

1. Проблема

Задача 4

Планирование производства

Есть участок производства, на котором из трех видов ресурсов по четырем технологиям производится продукция. Расход ресурса на единицу продукции по каждому виду технологии, количество ресурсов на складе и их себестоимость приведены в таблице:

Технология Ресурс	1	2	3	4	Запас ресурсов на складе	Себестоимость единицы ресурсов
1	0	3	9	11	300	0,18
2	3	5	7	0	400	0,22
3	4	8	0	13	450	0,19
Прибыль	15	20	17	21		

Требуется:

- 1) Составить оптимальный план работы данного участка.
- 2) Предложить алгоритм решения задачи о целесообразности приобретения 2 единиц одного из видов ресурсов.

2. Содержательная постановка

1) Необходимо рассчитать оптимальный объем производства, при котором достигается максимальная прибыль, с использованием запаса на складе.

2) На основе решения прошлого пункта, выявить в каком случае прибыль максимальна:

- Не покупать дополнительные ресурсы
- Купить две единицы i ресурса

3. Формальная постановка

Пусть

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ - пространство количества продуктов, произведенных по технологии i .
- $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ - пространство весов (прибыли) производства по технологии i .
- $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ - пространство запаса ресурсов на складе
- $A = \|a_{ij}\|, i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ - пространство затрат ресурсов на реализацию производства по технологии j
- $CP = \{cp_1, cp_2, cp_3\}$ - пространство себестоимостей ресурсов

Задача:

$$-(C, X) = -\sum_{i=1}^4 c_i x_i = -(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4) \rightarrow \min$$

Ограничения запаса ресурсов:

$$\left[\sum_{i=1}^4 x_i \times a_{ij} \right]_j \leq s_j, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

Естественные ограничения:

$$X \geq 0$$

4. Алгоритм и ПО

В качестве ПО будем использовать ЯП **Python** с подключенными модулями:

- **numpy** - для работы с линейной алгеброй
- **cvxpy** - для работы с линейным программированием

В качестве среды разработки **Jupyter Lab**,

5. Решение задачи

Приведем решение задачи с применением выбранного алгоритма.

Функция для решения задачи оптимизации:

```
In [1]: def optimal_receipt(c,s,a):
        """
        Функция, возвращающая оптимальное
        распределение производства
        по технологиям

        c - список
        прибыли по технологиям

        s - список
        остатка на складе

        a - 2D-список
        ресурсных затрат

        """

        import cvxpy
        import numpy as np
        from warnings import warn

        for i in c:
            if i < 0:
                warn('Одно или несколько значений прибыли отрицательное!')
        for i in a:
            for j in i:
                if j < 0:
                    raise Exception('Затраты по ресурсам не могут быть отрицательными!')
        for i in s:
            if i < 0:
                raise Exception('Остаток на складе не может быть отрицательным!')

        c = np.array(c)
        a = np.array(a)
        s = np.array(s)

        x = cvxpy.Variable(shape=len(c), integer = True)

        constraints = [(x @ a.T <= s),
                       (x >= 0)]

        total_value = - c @ x
        problem = cvxpy.Problem(cvxpy.Minimize(total_value), constraints=constraints)
        profit = abs(round(problem.solve()))
        remain = s - x.value @ a.T

        print('Для достижения максимальной прибыли в {}$, необходимо:\n'.format(profit))
        for i in range(len(x.value)):
            print('по технологии {} произвести {} \t продуктов'.format(i+1,round(x.value[i])))
        print('')
        for i in range(len(s)):
            print('Остаток {} ресурса: {}'.format(i+1, round(remain[i])))

        return profit
```

Функция для решения задачи о целесообразности покупки какого-либо вида ресурса в количестве n шт:

```
In [2]: def with_n_additional_resources(c,s,a,cp, n=2):
        """
        Функция, решающая задачу о
        целесообразности покупки
        какого-либо вида ресурса в количестве
        n шт.

        c - список
        прибыли по технологиям

        s - список
        остатка на складе

        a - 2D-список
        ресурсных затрат
```

```

profits = [optimal_receipt(c,s,a)]

ср - список
себестоимостей ресурсов

n - число
покупаемых ресурсов
'''

print('В случае без покупки ресурсов:\n')

profits = [optimal_receipt(c,s,a)]

for i in range(len(s)):
    c_new = c
    s_new = [i for i in s]
    s_new[i] += n
    a_new = a
    cp_new = cp
    print('_____ \n\nВ случае приобретения {} единиц {} ресурса:\n'.format(n, i+1))

    profits.append(optimal_receipt(c_new,s_new,a_new) - n*cp[i])

max_index = max(enumerate(profits),key=lambda x: x[1])[0]

print('_____ \nИтого:')
if max_index == 0:
    print('Смысла в покупке дополнительных ресурсов нет')
else:
    print('Лучше всего купить {} единиц {} ресурса.'.format(n, max_index))
    print('Это даст дополнительную прибыль в виде {}$.'.format(round(profits[max_index]-profits[0],1)))

return(profits)

```

6. Анализ

1) Запустим функцию на наших данных:

```

In [3]: s = [300,400,450]
c = [15,20,17,21]
a = [[0,3,9,11],
      [3,5,7,0],
      [4,8,0,13]]

optimal_receipt(c,s,a);

```

Для достижения максимальной прибыли в 1833\$, необходимо:

```

по технологии 1 произвести 112    продуктов
по технологии 2 произвести 0      продуктов
по технологии 3 произвести 9      продуктов
по технологии 4 произвести 0      продуктов

```

```

Остаток 1 ресурса: 219
Остаток 2 ресурса: 1
Остаток 3 ресурса: 2

```

Получаем, что для наших данных, целесообразно использовать только две технологии: **первую** и **третью**.

Видим, что у нас остается много лишних ресурсов 1, а также, что **третья** технология используется очень мало.

Следовательно, следует снизить закуп 1 ресурса, отказаться от **второй** и **четвертой** технологий производства.

2) Проведем анализ целесообразности покупки дополнительных двух единиц какого-либо ресурса.

Запустим программу на наших данных:

```

In [4]: s = [300,400,450]
c = [15,20,17,21]
a = [[0,3,9,11],
      [3,5,7,0],
      [4,8,0,13]]
cp = [0.18,0.22,0.19]
n = 2

with_n_additional_resources(c,s,a,cp,n);

```

В случае без покупки ресурсов:

Для достижения максимальной прибыли в 1833\$, необходимо:

по технологии 1 произвести	112	продуктов
по технологии 2 произвести	0	продуктов
по технологии 3 произвести	9	продуктов
по технологии 4 произвести	0	продуктов

Остаток 1 ресурса: 219
Остаток 2 ресурса: 1
Остаток 3 ресурса: 2

В случае приобретения 2 единиц 1 ресурса:

Для достижения максимальной прибыли в 1833\$, необходимо:

по технологии 1 произвести	112	продуктов
по технологии 2 произвести	0	продуктов
по технологии 3 произвести	9	продуктов
по технологии 4 произвести	0	продуктов

Остаток 1 ресурса: 221
Остаток 2 ресурса: 1
Остаток 3 ресурса: 2

В случае приобретения 2 единиц 2 ресурса:

Для достижения максимальной прибыли в 1836\$, необходимо:

по технологии 1 произвести	106	продуктов
по технологии 2 произвести	0	продуктов
по технологии 3 произвести	12	продуктов
по технологии 4 произвести	2	продуктов

Остаток 1 ресурса: 170
Остаток 2 ресурса: 0
Остаток 3 ресурса: 0

В случае приобретения 2 единиц 3 ресурса:

Для достижения максимальной прибыли в 1833\$, необходимо:

по технологии 1 произвести	112	продуктов
по технологии 2 произвести	0	продуктов
по технологии 3 произвести	9	продуктов
по технологии 4 произвести	0	продуктов

Остаток 1 ресурса: 219
Остаток 2 ресурса: 1
Остаток 3 ресурса: 4

Итого:

Лучше всего купить 2 единиц 2 ресурса.

Это даст дополнительную прибыль в виде 2.6\$.

Видим, что первого ресурса докупать две единицы смысла нет. Прибыль та же.

Есть смысл купить две единицы второго ресурса ресурса. Это повысит прибыль на 2.6\$.