



Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Dynamical systems Project

مریم قنبری - ۴۰۰۱۰۷۹۷۳

فاطمه محمدی محمدی - ۴۰۱۱۱۰۱۸۳

ریحانه علی پور - ۴۰۱۱۰۸۵۳۴

استاد طالبی

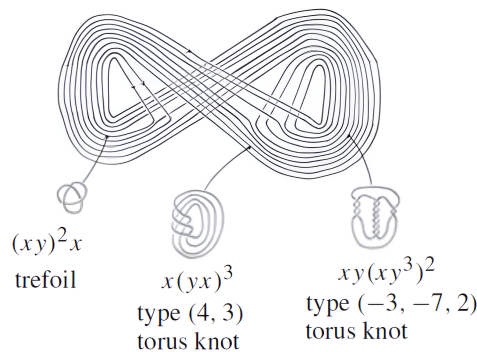
فهرست مطالب

۱.۰	بررسی گره ها در مدارهای لورنتز	۱
۱.۱.۰	تمپلیت لورنتز	۱
۲.۱.۰	شار مدولار و گره های مدولار	۲
۳.۱.۰	رابطه گره های مدولار و لورنتز	۴
۲.۰	بعد فرکتالی و جاذب عجیب (Strange Attractor)	۷
۳.۰	تعریف آشوب	۱۲
۱.۳.۰	تعریف دیوانی (Devaney's Definition)	۱۲
۲.۳.۰	تعریف بلاک و کوپل (Block and Coppel's Definition)	۱۲
۳.۳.۰	تعریف لی و یورک (Li and Yorke's Definition)	۱۲
۴.۰	مثال سیستم آشوبناک در فیزیک نسبیتی	۱۳
۱.۴.۰	هامیلتونی و مدل سازی حرکت نسبیتی	۱۴
۲.۴.۰	به دام افتادن نسبیتی و پتانسیل مؤثر	۱۵
۳.۴.۰	روش های تحلیل آشوب	۱۶
۴.۴.۰	حوزه جذب و بعد جعبه ای	۱۶

۱.۰ بررسی گره ها در مدارهای لورنتز

در هر میدان برداری، بویژه در مدل لورنتز، هر مدار تناوبی یک خم بسته ی نشانده شده در فضای سه بعدی است که طبق تعریف، یک گره است. بنابراین می توان مدل لورنتز را به نوعی بصورت حد مدارهای تناوبی اش دید. این امر انگیزه ای برای مطالعه توپولوژیک جاذب لورنتز ایجاد می کند.

تعریف: یک گره لورنتز، مدار تناوبی در شار در \mathbb{R}^3 حاصل از دستگاه معادلات لورنتز است. در این بخش با معرفی تمپلیت لورنتز و همچنین گره های مدولار، کلاس ایزوتوبی گره های لورنتز را مشخص می کنیم.

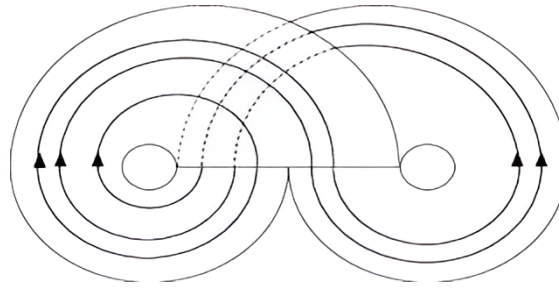


شکل ۱: چند گره در مدارهای تناوبی شار لورنتز

۱.۱.۰ تمپلیت لورنتز

برای بررسی توپولوژیک مدل لورنتز، ابتدا تمپلیت لورنتز و یک سیستم دینامیکی طبیعی بر روی آن را می سازیم و خواص آن را بررسی می کنیم. این تمپلیت هندسی و سیستم لورنتز اصلی هم ارز هستند [۲] و این هم ارزی خواص مطلوب را از تمپلیت به مدل لورنتز منتقل می کند. برای ساختن تمپلیت لورنتز، دو نوار کاغذی را در نظر می گیریم که برای هر نوار، طول یک انتهای نوار نصف دیگری است. برای هر نوار، دو انتهایش را به هم می چسبانیم و سپس از همین بخش، (branched-locus)، دو گوش ایجاد شده را به هم وصل می کنیم. روی این رویه، بخش branched-locus را بازه ی $[0, 1]$ در نظر می گیریم و شار روی تمپلیت را طوری تعریف می کنیم که در این بازه مانند نگاشت $2x \pmod{1}$ عمل کند.

در این سیستم، هر مدار تناوبی تصویر یک گره بر رویه ی ساخته شده است. می توان این سیستم را بصورت یک سیستم دینامیکی نمادین نیز نمایش داد. به ازای هر نقطه شروع روی بازه ی $[0, 1]$ ، میتوان برای هر بازگشت به این بازه که از گوش راست تمپلیت رخ داده نماد R را استفاده کرد و مشابه هرگاه مدار نقطه از گوش چپ رد شد و به بازه رسید نماد L را قرار دهیم. در اینصورت برای هر مدار تناوبی، معادلا هر گره، به یک رشته ی دوری متناهی از L و R ها رسید. همچنین به ازای هر رشته دوری متناهی، دقیقاً یک گره متناظرش در این سیستم وجود دارد. بنابراین، می توان رشته های معرفی شده را بعنوان گره های تمپلیت بررسی کرد. [۶]



شکل ۲: تمپلیت لورنتر

۲.۱.۰ شار مدولار و گره های مدولار

فضای شبکه ها

تعریف: به ازای دو بردار $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ، می توان زیرگروه تولید شده توسط این دو بردار را به شکل زیر در نظر گرفت

$$L = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

به L یک شبکه می گوییم. در صورتیکه دو بردار مستقل خطی نباشند، زیرگروه تولید شده بصورت $\omega\mathbb{Z}$ خواهد بود که $\omega \in \mathbb{C}$. به چنین زیرگروهی، شبکه ی بدیهی می گوییم.

مجموعه همه شبکه ها با تعریف فوق، یک فضای توپولوژیک ایجاد می کند. این مجموعه را \mathcal{M} می نامیم. برای هر $L \in \mathcal{M}$ سری زیر را تعریف می کنیم

$$G_n(L) = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}.$$

قضیه: نگاشت زیر، دوسویی است

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$L \rightarrow (G_4(L), G_6(L)).$$

برای اثبات این قضیه به [۱۰] ارجاع می دهیم. از این قضیه، نتیجه می شود که فضای شبکه ها را می توان در \mathbb{C}^2 نشانند.

لم: یک شبکه L بدیهی است اگر و تنها اگر $\Delta(L) = 20G_4(L)^3 - 49G_6(L)^2 = 0$. به Δ ، مبین یک شبکه می گوییم. یک طرف این لم را اثبات می کنیم. نشان می دهیم به ازای هر شبکه ی بدیهی، مبین صفر است. به ازای شبکه ی \mathbb{Z} ، برای محاسبه مقادیر $G_n(\mathbb{Z})$ کافیتست مقادیر تابع زتای ریمان برای این دو حالت خاص را داشته باشیم.

$$G_4(\mathbb{Z}) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = 2\zeta(4) = \frac{\pi^4}{45}$$

$$G_6(\mathbb{Z}) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^6} = 2\zeta(6) = \frac{2\pi^6}{945}$$

$$\Rightarrow 20G_4(\mathbb{Z})^3 - 49G_6(\mathbb{Z})^2 = \frac{20\pi^{12}}{45^3} - \frac{196\pi^{12}}{945^2} = 0$$

حال به ازای هر شبکه ی بدیهی وجود دارد $\omega \in \mathbb{C}$ بطوریکه این شبکه همان $\omega\mathbb{Z}$ باشد و از آنجا که $G_n(\omega L) = \omega^{-n} G_n(L)$ تساوی فوق برای همه ی شبکه های بدیهی برقرار است

از تساوی آخر لم فوق نتیجه می شود که برای هر $k > 0$ حقیقی، تساوی زیر برقرار است.

$$G_n(kL) = k^{-n} G_n(L)$$

در نتیجه برای هر شبکه غیربدیهی، عدد حقیقی منحصر بفرد $k > 0$ وجود دارد بطوریکه

$$|G_4(kL)|^3 - |G_6(kL)|^2 = k^{-12} (|G_4(L)|^3 - |G_6(L)|^2) = 1$$

$$\Rightarrow (G_4(kL), G_6(kL)) \in \mathbb{S}^3$$

یعنی هر شبکه را می توان با یک تبدیل $L \rightarrow kL$ به یک شبکه با مساحت یک متناظر کرد. پس شبکه ها، در حد ضرب در یک عدد حقیقی مثبت، متناظر با ۳- کره هستند، این یعنی شبکه های غیر بدیهی متناظر با مکمل $\Delta = 0$ در ۳- کره هستند.

لم: مجموعه ی زیر، یک گره ی ۳- پره در ۳- کره است.

$$\{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid 20z^3 - 49z^2 = 0\}$$

برای اثبات این لم، به [۹] ارجاع می دهیم.

نتیجه: فضای شبکه های با مساحت واحد همانسان است با مکمل یک گره ی ۳- پره در ۳- کره.

شار مدولار

فضای شبکه های با مساحت واحد را درنظر بگیرید. شار زیر را روی این \mathbb{R}^2 تعریف می کنیم.

$$\phi_t = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

هنگامی که این شار روی یک شبکه L با مساحت واحد عمل می کند، هر یک از نقاط شبکه تحت ϕ_t به نقطه دیگری در صفحه تبدیل می شود و $\phi_t(L)$ بدست می آید. این شبکه نیز مساحت واحد خواهد داشت پس شار، همواره در فضای ذکر شده قرار دارد. به این شار، شار مدولار می گوییم. برای یک شبکه، مدارش تحت شار مدولار را با تناظری که در بخش قبل ساختیم، بصورت یک خم در $\mathbb{S}^3 \setminus \{\text{trefoil}\}$ نشان می دهیم. با این تعریف، مدارهای تناوبی شار مدولار، در فضای توصیف شده، گره هستند و آن ها را گره ی مدولار می نامیم.

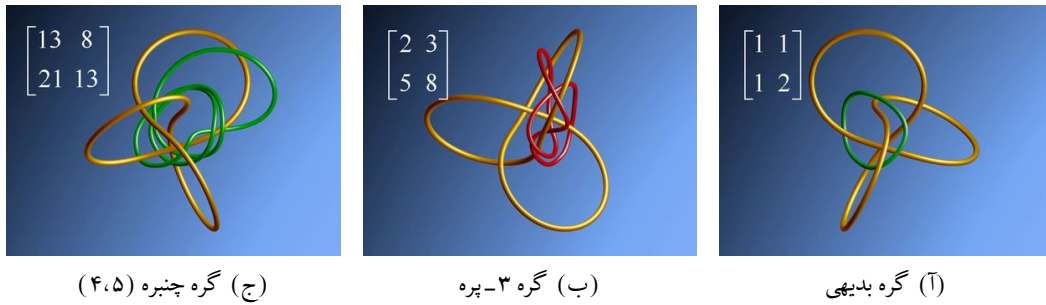
قضیه: مدارهای تناوبی شار مدولار با کلاس های هم ارزی ماتریس های سهموی در $SL_2(\mathbb{Z})$ تناظر یک به یک دارند.

یک طرف این قضیه را اثبات می کنیم. فرض کنید $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ یک ماتریس سهموی باشد. این ماتریس، شبکه ی صحیح \mathbb{Z}^2 را ثابت نگه می دارد. طبق تعریف، اندازه ی مقادیر ویژه ی این ماتریس، یکی بیشتر از ۱ و دیگری کمتر از یک است. در نتیجه ماتریس قطری شدنی است و وجود دارد $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ بطوریکه

$$PAP^{-1} = \pm \begin{bmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

برای یک $T \in \mathbb{R}$. ادعا می کنیم شبکه ی $L = P(\mathbb{Z}^2)$ تحت شار مدولار دارای مدار تناوبی است.

$$\phi_T(L) = \pm \begin{bmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} P(\mathbb{Z}^2) = \pm PA(\mathbb{Z}^2) = \pm P(\mathbb{Z}^2) = L.$$



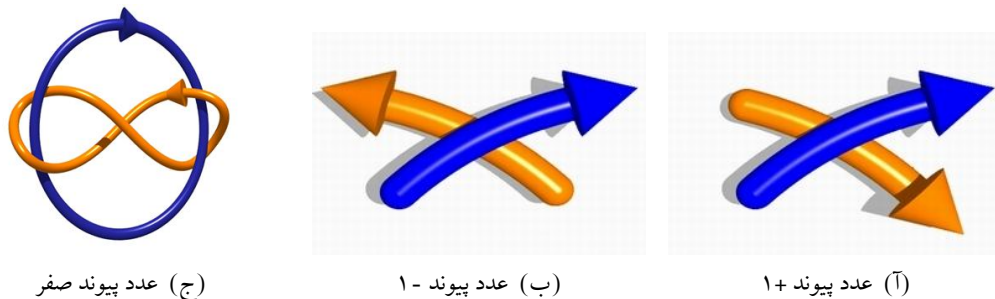
شکل ۳: گره های معادل چند ماتریس سهموی-گره ی زردرنگ همان گره ۳-پره ی محذوف است.

۳.۱.۰ رابطه گره های مدولار و لورنتز

در این بخش ابتدا به یکی از خواص مشترک گره های مدولار و گره های لورنتز می پردازیم که به مفهوم یکسان بودن کلاسهای ایزوتوپی گره های مدولار و گره های لورنتز کمک می کند. سپس، بطور توصیفی تناظر بین این دو نوع کلاس ایزوتوپی را نشان می دهیم.

محاسبه عدد پیوند با گره ۳-پره

تعریف: فرض کنید دو گره ی k_1, k_2 داریم. تصویر این دو در صفحه را در نظر می گیریم. به ازای هر تقاطع دو گره در صفحه که k_1 از روی k_2 رد شده است، مقدار +1 یا -1 را جمع میکنیم. به مجموع نهایی، عدد پیوند دو گره ی k_1, k_2 می گوئیم. [۱]

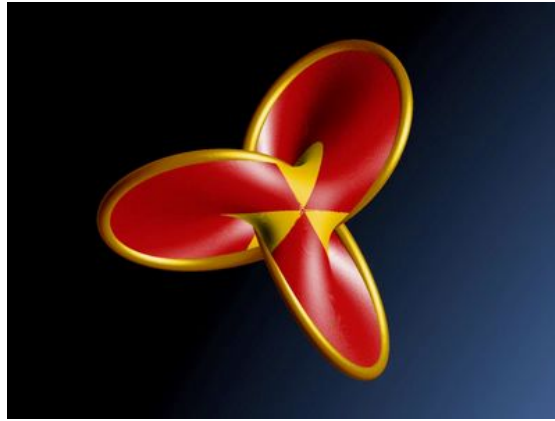


شکل ۴: نحوه محاسبه عدد پیوند دو گره

طبق قضیه ای در بخش قبل، هر یک از ماتریس های سهموی با درمیان واحد، متناظر با یک مدار تناوبی و در نتیجه یک گره در شار مدولار هستند پس به ازای یک ماتریس $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ، می توان گره ی یکتای متناظر با آن را با k_A نمایش داد.

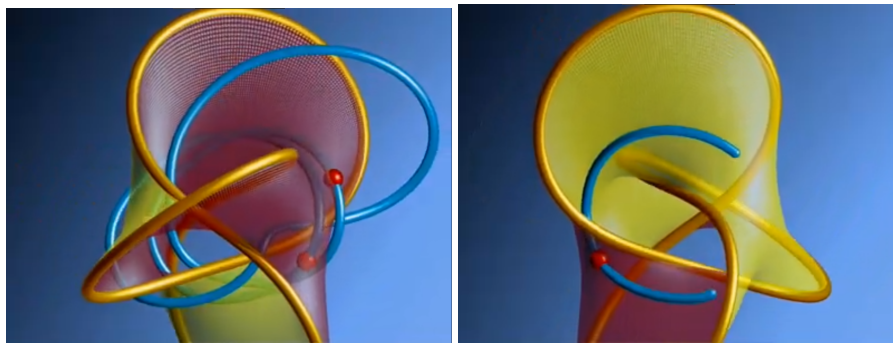
قصد داریم عدد پیوندی یک k_A دلخواه را با گره ۳-پره محذوف از ۳-گره محاسبه کنیم. در تعریف شار مدولار، متناظر با هر مشبکه، یک عدد مختلط Δ بعنوان مبین مشبکه معرفی کردیم. مشاهده شد که با ضرب کردن یک ضریب حقیقی مثبت k در یک مشبکه، مبین آن در k^{-12} ضرب می شود. بنابراین، آرگومان Δ با این کار ثابت می ماند.

در ۳- کره، می توانیم مجموعه نقاطی که $\arg \Delta$ یکسان دلخواهی دارند را در نظر بگیریم. این مجموعه همواره یک رویه ی زایفرت با مرز گره ی ۳- پره است. رویه ی زایفرت با آرگومان صفر را در نظر می گیریم که رویه ای است که $\Delta \in \mathbb{R}^+$. حال، چون یک گره دلخواه k_A ، تقاطعی با گره ۳- پره مبین صفر ندارد، پس تصویر این گره تحت نگاشت Δ



شکل ۵: رویه زایفرت با مرز گره ۳- پره

یک خم بسته است که از مبدا نمی گذرد و بطور طبیعی روی آن یک تابع لگاریتم تعریف می شود. این تابع لگاریتم، اندیس این خم حول مبدا را نشان می دهد که درواقع همان عدد پیوند k_A با گره ۳- پره است: اگر رویه زایفرت معرفی شده را در نظر بگیریم، هرگاه آرگومان خم k_A تغییر علامت دهد، این خم با رویه زایفرت برخورد می کند و از آن رد می شود. در هر یک از این تقاطع ها ± 1 به عدد پیوند اضافه میشود و همان ± 1 نیز با اندیس گره جمع می شود. علامت اضافه شدن نیز وابسته به این است که خم از آرگومان مثبت به منفی حرکت کرده یا بالعکس. نتیجه: عدد پیوند هر k_A با گره ۳- پره ی $\Delta = 0$ ، برابر اندیس چرخشی اش حول مبدا است.



(ب)

(ا)

شکل ۶: مراحل محاسبه اندیس چرخشی

تناظر گره های مدولار با گره های لورنتز

قضیه: گره های مدولار تناظر یک به یک به گره های لورنتز دارند. [۶]

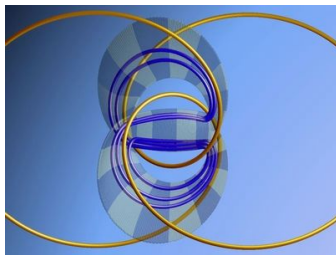
برای نشان دادن این قضیه، ابتدا تمپلیت لورنتز را در فضای ۳- کره منهای گره ی ۳- پره می سازیم. این نشان می دهد که گره های حاصل روی این تمپلیت، در فضای مشبکه ها قرار می گیرند و طبق تعریف، گره مدولار هستند. سپس هر گره مدولار در این فضا را با یک تغییر شکل هموار روی تمپلیت قرار می دهیم بطوریکه در هیچ لحظه ای با گره ۳- پره تقاطع پیدا نکند. بنابراین هر گره مدولار هم یک گره لورنتز است و اثبات کامل می شود.

فضای همه ی مشبکه های شش- ضلعی با مساحت ۱، یک زیرمجموعه از ۳- کره منهای ۳- پره است که همه ی این مشبکه ها در حد دوران با یکدیگر هم ارزند در نتیجه این زیرمجموعه یک دایره در فضای ما تشکیل می دهد.

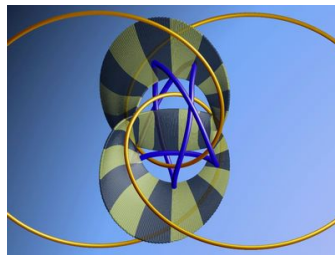
همچنین، فضای همه ی مشبکه ها با مساحت یک که دامنه بنیادی به شکل لوزی افقی با زاویه بین $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ دارند، قطر دایره ی زیرمجموعه فوق را تشکیل می دهد.

اجتماع دو زیرمجموعه فوق را در نظر می گیریم. این مجموعه را در جهت ناپایدار شار مدولار گسترش می دهیم. حاصل، همانسان با تمپلیت لورنتز می شود.

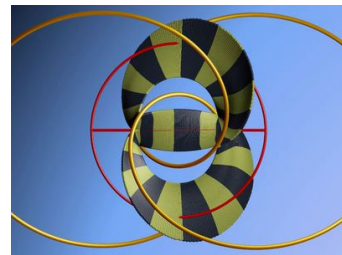
ایده ی قرار دادن گره های مدولار روی تمپلیت، به این صورت است که برای یک مشبکه، کوتاهترین بردار ناصفر در این مشبکه را v می گیریم و سپس کوتاهترین برداری در این مشبکه که مضرب v نباشد را u می گیریم. پس از این بطور همزمان u را کوتاهتر و v را بلندتر می کنیم بطوریکه مساحت همواره ۱ بماند.



(ج) تغییر شکل و قرارگیری روی تمپلیت



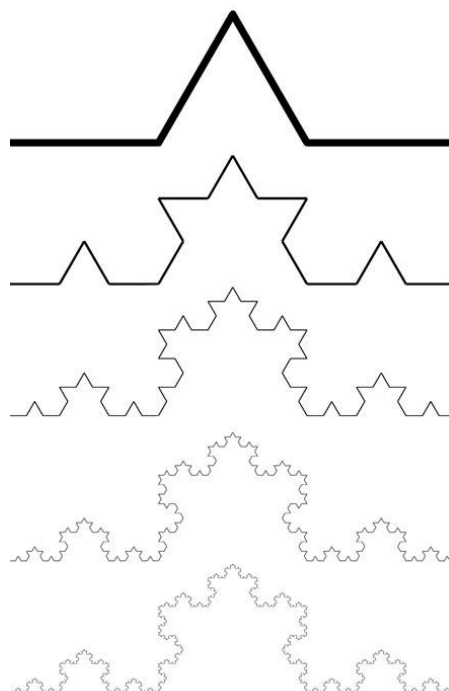
(ب) گره مدولار



(آ) تمپلیت لورنتز در فضای مکمل گره ۳- پره

۲.۰ بعد فرکتالی و جاذب عجیب (Strange Attractor)

هدف ما معرفی فرکتال، بعد فرکتال و محاسبه‌ی بعد فرکتال مجموعه‌های جاذب سیستم لورنز است. خود-مشابه: یک شکل هندسی را خود-مشابه می‌نامیم هرگاه نقطه‌ای وجود داشته باشد که هر همسایگی از آن شامل نسخه‌ای از تمام شکل باشد. به شکلی که در هر نقطه خود-مشابه باشد کاملاً خود-مشابه می‌گوییم. در طبیعت به وفور نمونه‌هایی از خودشبهاتی‌های تقریباً کامل مانند نورون‌های مغزی، رودخانه‌ها و کهکشان‌ها می‌توان یافت. مجموعه‌ی کانتور، منحنی گنخ و مثلث سرپینسکی نمونه‌هایی از اشکال کاملاً خود-مشابه هستند.



شکل ۷: فرایند تولید منحنی گنخ، یک نمونه از فرکتال کاملاً خود-مشابه

فرکتال توصیفی از ساختار خود-مشابه اشکال است. در فرکتال هر جزء کوچک می‌تواند کل ساختار را با تکرار تولید کند. به‌طور شهودی، فرکتال یک شکل هندسی با پیچیدگی بی‌نهایت است که هرچه قدر آن را بزرگنمایی کنیم، هرگز صاف و هموار نخواهد شد تا شبیه به یک فضای اقلیدسی معمولی به نظر برسد. مفهوم بعد فرکتالی تلاش میکند این پیچیدگی را به‌صورت کمی بیان کند. بسیاری از فرکتال‌ها دارای ویژگی خودشبهاتی هستند.

بعد فرکتال: در واقع آنچه فرکتال را از اشکال هندسی کلاسیک متمایز می‌کند بعد آن است. جلوتر می‌بینیم بعد فرکتال‌ها عددی غیرصحیح است در صورتی‌که به‌طور شهودی بعد اشکال هندسی کلاسیک را می‌دانیم. برای مثال خط یا منحنی یک‌بعدی، صفحه دو بعدی و مکعب سه‌بعدی است. تعریفی از بعد ارائه می‌کنیم که بتوان آن را برای بعد فرکتال نیز گسترش داد.

پاره‌خط، مربع و مکعب اشکال خود-مشابه هستند و آن‌ها را به ترتیب می‌توان به ۲، ۴ و ۸ قطعه کاملاً مشابه با

نسخه اولیه تقسیم کرد که مقیاس هر قطعه نصف نسخه‌ی اصلی باشد. توجه کنید هر نسخه کوچک‌تر از پاره‌خط، مربع و مکعب اولیه اگر به ترتیب ۲، ۲^۲ و ۲^۳ برابر بزرگ‌نمایی شوند تبدیل به نسخه‌ی اولیه‌ی خود می‌شوند. پس اگر N را تعداد قطعات تقسیم شده، $\frac{1}{S}$ را مقیاس هر قطعه و D را بعد شکل در نظر بگیریم به راحتی می‌توان بعد D را از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$N = S^D \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(S)}$$

حال توجه کنید مثلث سرپنسی را می‌توان به ۳ قطعه‌ی کاملاً مشابه با نسخه‌ی اولی تقسیم کرد که مقیاس هر قطعه نصف نسخه‌ی اصلی باشد. پس تعداد قطعات (N) برابر ۳ و S برابر ۲ است. در نتیجه بعد مثلث سرپنسی طبق تعریف بالا برابر $\frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.585$ محاسبه می‌شود!

ولی اگر فرکتال‌ها پیچیده‌تر شوند محاسبه‌ی بعد آن‌ها به این سادگی نخواهد بود. برای همین روش دیگری برای محاسبه‌ی بعد فرکتال که به نام «روش شمارش جعبه‌ای» معروف است معرفی می‌کنیم.

روش شمارش جعبه‌ای: شیء دلخواه را در شبکه‌ای مربعی یا مکعبی (بسته به اینکه در چه بعدی می‌نشیند) قرار می‌دهیم. مربع یا مکعب‌های شبکه را جعبه می‌نامیم. سپس تمام جعبه‌هایی که با شیء تماس دارند را رنگ می‌کنیم. حال اگر طول جعبه‌های شبکه را نصف کنیم و همین کار را تکرار کنیم، به اندازه‌گیری دقیق‌تری از پیچیدگی شیء می‌رسیم. همچنین با کوچک و کوچک‌تر کردن طول جعبه‌ها این اندازه‌گیری دقیق‌تر می‌شود. بعد از روش شمارش جعبه‌ای با فرمول زیر قابل محاسبه است. (به طوری که s طول جعبه‌ها و $N(s)$ تعداد جعبه‌های رنگ شده است.)

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\log(N(s))}{\log(s)}$$

در ادامه می‌خواهیم بعد فرکتال مجموعه‌های جاذب سیستم دینامیکی لورنز را با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای بدست آوریم. سیستم دینامیکی لورنز:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (۱)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (۲)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (۳)$$

σ و b ، r اعداد حقیقی مثبت هستند. محدوده‌ی گیرافتادگی: Y را یک محدوده‌ی گیرافتادگی برای سیستم دینامیکی می‌نامیم هرگاه اگر $x(t) \in Y$ آنگاه برای هر $s > t$ داشته باشیم $x(s) \in Y$. در واقع اگر مدار نقطه‌ای وارد محدوده‌ی گیرافتادگی شود تا همیشه در آن محدوده باقی می‌ماند.

تابع لیاپانوف: به تابعی که تحت جریان سیستم نزولی باشد گفته می‌شود.

لم: سیستم لورنز دارای محدوده‌ی گیرافتادگی است.

اثبات:

با استفاده از یک تابع لیاپانوف، می‌توانیم نشان دهیم که تمام جواب‌های سیستم در نهایت وارد محدوده‌ی بیضوی به مرکز $(0, 0, 2r) = (x, y, z)$ می‌شوند. این محدوده به صورت زیر است:

$$T = \{(x, y, z) \mid |x^2 + y^2 + \sigma(z - 2r)^2| \leq C\}$$

به ازای مقدار مثبت C .

اثبات: قرار دهید $E = rx^2 + \sigma y^2 + b(z - 2r)^2$. حال مشتق آن نسبت به t را میگیریم:

$$\frac{dE}{dt} = 2rx(\dot{x}) + 2\sigma y(\dot{y}) + 2b(z - 2r)(\dot{z})$$

با جایگذاری معادلات لورنز برای \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} داریم:

$$\frac{dE}{dt} = 2rx(\sigma(y - x)) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2b(z - 2r)(xy - bz)$$

اگر معادله‌ی بالا را ساده کنیم:

$$\frac{dE}{dt} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz)$$

از آنجا که $\sigma > 0$ است، داریم:

$$rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz > 0 \Leftrightarrow rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 > br^2$$

بنابراین، هنگامی که (x, y, z) خارج از محدوده‌ی بیضوی $F = \{(x, y, z) | rx^2 + y^2 + bz^2 > 2brz\}$ قرار دارد، داریم:

$$\frac{dE}{dt} \leq 0.$$

بنابراین E خارج از F یک تابع لیاپانوف است. اگر C را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم به‌طوری‌که محدوده‌ی بیضوی F داخل T قرار گیرد، آنگاه T یک محدوده‌ی گیرافتادگی برای سیستم است. این به این دلیل است که هر وضعیت اولیه‌ای خارج از T خارج از F نیز هست و مقدار $E(x(t))$ در زمان متناهی کم می‌شود و در نهایت وارد F می‌شود حال چون این مدار نمی‌تواند از F خارج شود بنابراین از T نیز خارج نمی‌شود و داخل آن باقی می‌ماند. مجموعه‌ی جاذب: مجموعه‌ی $K = \bigcap_{t>0} \phi_t(E)$ نسبت به معادلات دیفرانسیل لورنز ناوردا است. این مجموعه به‌عنوان مجموعه‌ی جاذب سیستم لورنز شناخته می‌شود. نقاط تعادلی و پایداری آن‌ها: با قرار دادن معادلات (۱) و (۲) و (۳) برابر صفر و حل معادلات جدید سه نقطه‌ی تعادلی زیر را بدست می‌آوریم:

$$x_1^* = (0, 0, 0), \quad (4)$$

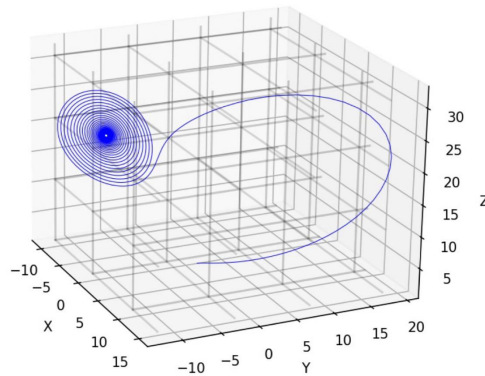
$$x_2^* = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad r \geq 1, \quad (5)$$

$$x_3^* = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad r \geq 1. \quad (6)$$

محاسبه‌ی بعد فرکتال مجموعه‌ی جاذب لورنز: ما ابعاد فراکتالی سیستم لورنز را با شرایط اولیه $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$ و $z_0 = 0.1$ و مقادیر پارامترهای $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 20$, و 24.74 ، و ۲۸ بررسی می‌کنیم. با محاسبه مقادیر ماتریس ژاکوبی برای این سیستم و محاسبه‌ی مقادیر ویژه برای نقاط تعادلی داریم:

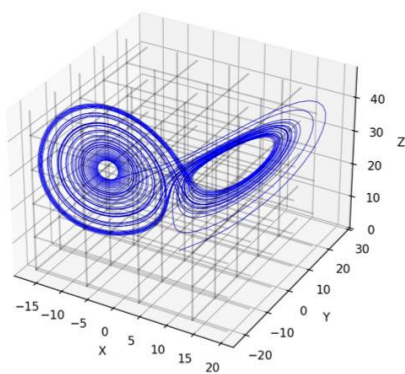
- برای $1 < r < 24.7$ داریم که مبدأ ناپایدار باقی می‌ماند و دو نقطه متعادل دیگر پایدار هستند،
- در $r \approx 24.7368$ ، دو نقطه متعادل پایدار ناپایدار می‌شوند و این منجر به یک انشعاب هاپف می‌شود.

اندازه‌ی بعد به طور حدودی برای $r = 24.74$ و $r = 28$ برابر 2.1 است که شهودا قابل درک است زیرا مجموعه‌های جاذب فضایی کمی بیشتر از صفحه را اشغال می‌کنند. مجموعه جاذب مشاهده شده برای $r = 20$ بسیار کوچکتر از سیستم‌های $r = 24.74$ و $r = 28$ است. برای نتیجه‌گیری دقیق‌تر بهتر است اندازه طول جعبه‌ها را کوچک‌تر در نظر گرفت. با این حال، انتظار میرود که بعد مجموعه‌ی جاذب برای $r = 20$ نیز کمی بیشتر از ۲ باشد.

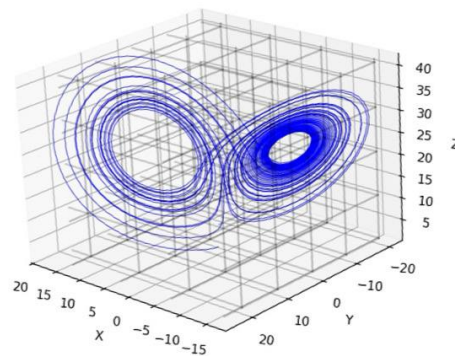


r=20

شکل ۸: سیستم لورن در $r = 20$

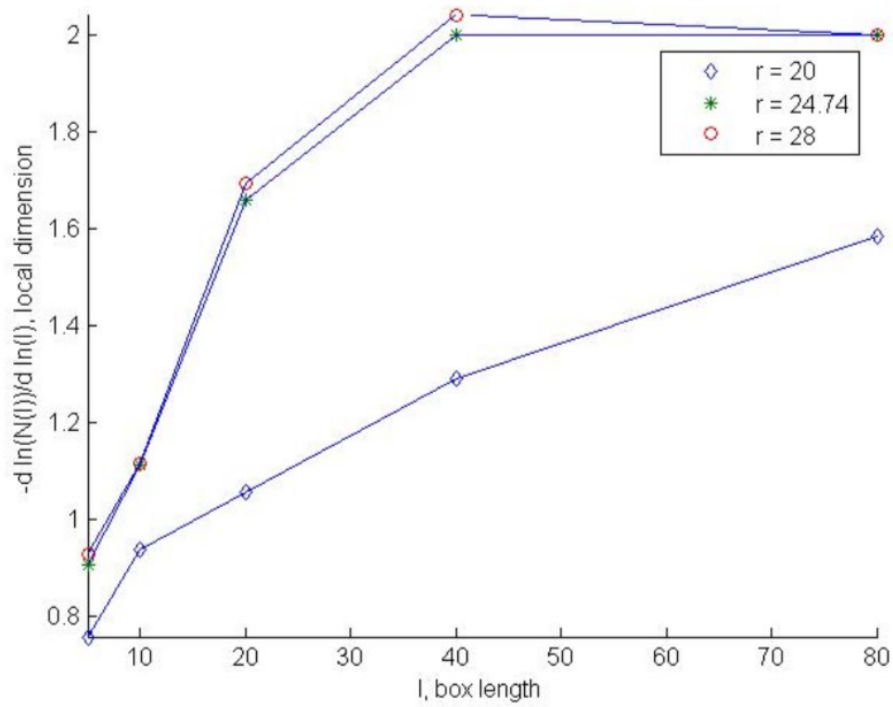


r=28



r=24.74

شکل ۹: سیستم لورنز در $r = 24.74$ و $r = 28$



شکل ۱۰: نمودار بعد فرکتال موضعی

[۴] [۸] [۳]

سیستم لورنتز نمونه‌ای برجسته از یک سیستم آشوبناک محسوب می‌شود. در ادامه، تلاش خواهیم کرد تا درک جامع‌تری از ماهیت سیستم‌های آشوبناک ارائه دهیم و با بررسی چند مثال، ویژگی‌های کلیدی این سیستم‌ها را روشن‌تر سازیم.

۳.۰ تعریف آشوب

آشوب به رفتار غیرقابل پیش‌بینی و تصادفی یک سیستم اشاره دارد که معمولاً با ویژگی‌های ناپایدار و حساسیت بالا به شرایط اولیه همراه است. در ریاضیات، چندین تعریف برای آشوب ارائه شده است که هر یک از آن‌ها جنبه‌های متفاوتی از این پدیده را توصیف می‌کنند. در ادامه، سه تعریف رایج از آشوب بررسی می‌شود.

۱.۳.۰ تعریف دیوانی (Devaney's Definition)

یک نگاشت $f : X \rightarrow X$ روی یک فضای حالت X را آشوبناک می‌نامیم اگر یک زیرمجموعه‌ی ناپایدار $Y \subseteq X$ وجود داشته باشد که شرایط زیر را داشته باشد:

۱. انتقال‌پذیری توپولوژیکی: هر دو ناحیه‌ی باز در Y با اعمال تکراری f به یکدیگر مرتبط می‌شوند.
۲. تراکم نقاط دارای مدارهای دوره‌ای: مجموعه‌ی نقاط دارای مدارهای دوره‌ای در Y متراکم است.
۳. وابستگی حساس به شرایط اولیه: تغییرات کوچک در شرایط اولیه منجر به تغییرات بزرگی در آینده‌ی سیستم می‌شود.

۲.۳.۰ تعریف بلاک و کوپل (Block and Coppel's Definition)

یک سیستم دینامیکی $f : X \rightarrow X$ آشوبناک است اگر:

- یک عدد طبیعی m و یک زیرمجموعه‌ی فشرده و ناپایدار $Y \subseteq X$ وجود داشته باشد که تحت f^m تغییر نکند، یعنی:

$$f^m(Y) = Y.$$

- یک نگاشت پیوسته‌ی سورجکتیو $g : Y \rightarrow Y$ وجود داشته باشد که f^m را به یک نگاشت سیمبولیک مرتبط کند:

$$g \circ f^m = \sigma \circ g.$$

این تعریف، آشوب را از طریق شباهت آن با سیستم‌های آشوبناک شناخته‌شده مورد بررسی قرار می‌دهد.

۳.۳.۰ تعریف لی و یورک (Li and Yorke's Definition)

یک نگاشت پیوسته $f : I \rightarrow I$ (که در آن I یک بازه فشرده از اعداد حقیقی است) را آشوبناک می‌نامیم اگر مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا از نقاط با رفتار آشوبناک وجود داشته باشد، به طوری که:

۱. وجود نقاط تناوبی با همه‌ی دوره‌های طبیعی
- اگر یک نقطه تناوبی با دوره ۳ داشته باشیم، یعنی $x = f^3(x)$ ولی دوره آن برابر با ۱ یا ۲ نباشد، آنگاه این نگاشت تناوبی با تمام دوره‌های طبیعی $n \geq 1$ را خواهد داشت.

- در نتیجه از قضیه ”دوره‌ی سه، آشوب را تضمین می‌کند“ (Chaos) Implies Three (Period) به دست می‌آید.

۲. وجود مجموعه‌ای نامتناهی و بدون تناوب (Scrambled Set) مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا از نقاط $S \subseteq I$ وجود دارد که به آن مجموعه‌ی درهم‌ریخته (Scrambled Set) می‌گوییم و دارای ویژگی‌های زیر است:

- عدم تناوب: برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S, x \neq y$ داریم:

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(y) - f^n(x)|$$

این به معنی آن است که این نقاط در برخی مراحل زمانی از هم فاصله‌ی زیادی می‌گیرند.

- نزدیکی نامنظم: همچنین برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S$ داریم:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(y) - f^n(x)| = 0$$

یعنی نقاط در برخی مراحل زمانی به هم بسیار نزدیک می‌شوند.

این ویژگی نشان‌دهنده‌ی حساسیت به شرایط اولیه هستند و بیان می‌کنند که هر دو نقطه‌ی دلخواه از این مجموعه، در برخی مراحل به هم نزدیک شده و سپس از هم دور می‌شوند.

۴.۰ مثال سیستم آشوبناک در فیزیک نسبیتی

مسئله سه‌جسمی یکی از مسائل کلاسیک و پیچیده‌ی دینامیک است که بیش از ۲۰۰ سال مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است. با وجود پیشرفت‌های زیاد، تنها در موارد خاص، راه‌حل‌های دقیق برای آن یافت شده است. در این پژوهش، حرکت یک ذره‌ی باردار در اطراف دو ذره‌ی باردار ثابت با استفاده از یک هامیلتونی نسبیتی بررسی می‌شود.

در مقایسه با مدل نیوتنی، مسیرهای این ذرات ویژگی‌های آشوبناک نشان می‌دهند. در اینجا، مسئله دو-مرکزی بدون برهم‌کنش گرانشی تحلیل شده و مقایسه‌هایی با موارد مشابه در نسبیت عام انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در هر دو حالت، سیستم رفتار آشوبناک مشابهی دارد.

پویایی این سیستم با بررسی حرکت ذرات در یک پتانسیل مؤثر قابل تحلیل است. در مکانیک نیوتنی، این پتانسیل انتگرال‌پذیر است، اما اصلاحات نسبیتی باعث ورود غیرخطی‌هایی می‌شود که دو تغییر اساسی را ایجاد می‌کند:

- مسیرها به دام تکینگی‌های مرکزی می‌افتند، حتی با وجود تکانه زاویه‌ای غیرصفر.

- دینامیک سیستم تحت تأثیر اثرات نسبیتی قرار می‌گیرد و آشوبناک‌تر می‌شود.

در نتیجه، پتانسیل مؤثر در این سیستم دیگر قابل انتگرال‌گیری نیست. این موضوع بررسی آشوب را دشوارتر می‌کند، زیرا شاخص‌های استاندارد آشوب مانند نمای لیاپانوف و برش‌های پوانکاره برای این سیستم به دلیل وابستگی به مدارهای پایدار، محدودیت دارند.

برای مطالعه‌ی آشوب در این سیستم باز، تحلیل مرز حوزه‌ی جذب (ABB) روشی مناسب‌تر از نمای لیاپانوف در نظر گرفته می‌شود. ABB مستقل از مختصات است و نیازی به مسیرهای طولانی مدت ندارد، در حالی که نمای لیاپانوف یک کمیت لورنتز ناوردا نیست. بررسی این ویژگی‌ها، شناخت دقیق‌تری از آشوب در سیستم‌های دینامیکی نسبیتی ارائه می‌دهد.

۱.۴.۰ هامیلتونی و مدل سازی حرکت نسبیتی

هامیلتونی H یک تابع انرژی در فیزیک است که دینامیک یک سیستم را توصیف می کند. در مکانیک کلاسیک، هامیلتونی مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم است:

$$H(q, p) = T + V$$

که در آن:

- T انرژی جنبشی ذره است.
 - V انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی اعمال شده بر ذره است.
- معادلات هامیلتونی برای توصیف تکامل سیستم عبارتند از:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

این معادلات نشان می دهند که چگونه موقعیت و تکانه ی ذره در طول زمان تغییر می کنند.

هامیلتونی در نسبیت خاص

در نسبیت خاص، مدل دینامیکی این سیستم با استفاده از یک ابر-هامیلتونی نسبیتی تعریف می شود:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_\alpha - qA_\alpha)(P^\alpha - qA^\alpha).$$

که در آن:

- \mathcal{H} : ابر-هامیلتونی سیستم که شامل انرژی و تکانه ی نسبیتی است.
 - P_α : تکانه ی همیلتونی ذره.
 - q : بار الکتریکی ذره ی آزمونی.
 - A_α : پتانسیل برداری الکترومغناطیسی که میدان الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می کند.
- معادلات هامیلتونی متناظر عبارتند از:

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{dP_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}.$$

که در آن:

- x^α : مختصات چهاربعدی فضا-زمان.
- P_α : تکانه ی همیلتونی نسبیتی ذره.
- λ : پارامتر همدیس (Affine Parameter) که مسیر ژئودزیک را تعیین می کند.

ارتباط تکانه‌ی مکانیکی و همیلتونی

علاوه بر این، تکانه‌ی مکانیکی با تکانه‌ی همیلتونی ارتباط دارد:

$$p^\alpha = mu^\alpha = P^\alpha - qA^\alpha.$$

که در آن:

• p^α : تکانه‌ی مکانیکی ذره.

• m : جرم سکون ذره.

• u^α : چهارسرعت ذره.

این معادله نشان می‌دهد که میدان برداری پتانسیل الکترومغناطیسی (A^α) تأثیر مستقیمی بر تکانه‌ی مکانیکی دارد و سبب تغییر مسیر ذره می‌شود. این ویژگی در دینامیک نسبیتی نقش اساسی در رفتار ذرات باردار تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارد.

۲.۴.۰ به دام افتادن نسبیتی و پتانسیل مؤثر

یکی از تفاوت‌های اساسی بین مکانیک نیوتنی و نسبیتی، تأثیر تکانه زاویه‌ای در جلوگیری از سقوط به تکینگی است. در مکانیک نیوتنی، اگر یک ذره دارای تکانه زاویه‌ای غیرصفر باشد، هرگز مستقیماً به مرکز سقوط نخواهد کرد. اما در نسبیت خاص، چنین حفاظتی وجود ندارد و مسیریایی که دارای $L < qQ$ هستند، می‌توانند به دام بیفتند. پتانسیل مؤثر در این سیستم عبارت است از:

$$V_{eff}^2 = m^2 - \frac{2EqQ}{r} + \frac{L^2 - q^2Q^2}{r^2}.$$

در صورتی که مقدار L کمتر از یک مقدار بحرانی باشد، نیروی مرکزی غالب شده و مسیرها در نزدیکی تکینگی به پایان می‌رسند. این ویژگی از تفاوت‌های کلیدی دینامیک نیوتنی و نسبیتی محسوب می‌شود و می‌تواند سبب آشوب در سیستم شود.

تعریف پارامترها در پتانسیل مؤثر

در معادله‌ی پتانسیل مؤثر، هر پارامتر به این صورت تعریف می‌شود:

• V_{eff} : پتانسیل مؤثر سیستم که نشان‌دهنده‌ی انرژی کلی در چارچوب نسبیتی است.

• m : جرم سکون ذره‌ی آزمونی که در میدان الکتریکی دو بار ثابت قرار دارد.

• E : انرژی کلی ذره، شامل انرژی جنبشی و پتانسیل الکترواستاتیکی.

• q : بار الکتریکی ذره‌ی آزمونی که تحت تأثیر دو بار الکتریکی ثابت قرار گرفته است.

• Q : بار الکتریکی مراکز ثابت که میدان الکتریکی را ایجاد می‌کنند.

• r : فاصله‌ی بین ذره‌ی آزمونی و مرکز میدان.

• L : تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ی آزمونی که مقدار آن روی حرکت مداری تأثیر دارد.

چرا این ویژگی سبب آشوب در سیستم می‌شود؟

در مکانیک نیوتنی، تأثیر تکانه‌ای زاویه‌ای یک سد دافعه‌ای در نزدیکی مرکز ایجاد می‌کند که مانع از سقوط ذره به مرکز می‌شود. اما در نسبیت خاص، این سد دافعه‌ای همیشه حفظ نمی‌شود.

۱. حذف سد دافعه‌ای در نسبیت: در نیوتن، عبارت $\frac{L^2}{r^2}$ باعث جلوگیری از سقوط می‌شود. اما در نسبیت خاص، این مقدار به $\frac{L^2 - q^2 Q^2}{r^2}$ تغییر می‌یابد. اگر $qQ < L$ ، این مقدار منفی خواهد شد، یعنی سد دافعه‌ای دیگر وجود ندارد و ذره به مرکز سقوط می‌کند.

۲. افزایش حساسیت نسبت به شرایط اولیه: در سیستم‌های نیوتنی، مدارها با مقدار معینی از تکانه‌ای زاویه‌ای پایدار می‌مانند. اما در نسبیت، تغییرات کوچک در شرایط اولیه (مانند انرژی یا تکانه زاویه‌ای) می‌توانند مسیر ذره را از یک مدار پایدار به دام افتادن در تکینگی تغییر دهند. این حساسیت زیاد نسبت به شرایط اولیه، ویژگی آشوبناک بودن سیستم را نشان می‌دهد.

۳. تغییر رفتار دینامیکی در انرژی‌های بالا: در نسبیت خاص، انرژی E در مقدار پتانسیل تأثیر دارد. برای مقدار زیاد E ، اثرات غیرخطی افزایش یافته و حرکت ذره رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد. به بیان ساده‌تر، در انرژی‌های بالا، مسیرهای بسته و پایدار به مسیرهای آشوبناک و نامنظم تبدیل می‌شوند.

۴. ترکیب برهم‌کنش‌های غیرخطی: در نسبیت، برهم‌کنش بین انرژی، تکانه زاویه‌ای، و نیروهای الکتریکی به صورت غیرخطی در پتانسیل مؤثر ظاهر می‌شوند. برهم‌کنش غیرخطی یکی از نشانه‌های اصلی رفتار آشوبناک است.

۳.۴.۰ روش‌های تحلیل آشوب

به منظور بررسی آشوبناک بودن این سیستم، از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود:

- نمای لیاپانوف: این کمیت، میزان حساسیت سیستم نسبت به شرایط اولیه را نشان می‌دهد. مقادیر مثبت نمای لیاپانوف نشان‌دهنده آشوب در سیستم هستند.
- برش‌های پوانکاره: نمایش گسسته‌ای از مسیرهای فاز که امکان بررسی نظم یا آشوب در سیستم را فراهم می‌کند.
- مرز حوزه‌ی جذب (ABB): این روش، معیاری مستقل از مختصات برای بررسی آشوب در سیستم‌های باز ارائه می‌دهد. ABB در سیستم‌های نسبیتی که مسیرهای به دام افتاده در تکینگی دارند، ابزاری مناسب برای بررسی آشوب است.

ABB نسبت به نمای لیاپانوف برتری دارد، زیرا نیاز به مسیرهای طولانی مدت ندارد و می‌تواند حتی در سیستم‌هایی که مسیرهای کوتاه دارند نیز آشوب را شناسایی کند. در سیستم‌های آشوبناک، ABB روی مجموعه‌ای فراکتالی قرار می‌گیرد، درحالی‌که در سیستم‌های غیرآشوبناک چنین نیست.

۴.۴.۰ حوزه جذب و بعد جعبه‌ای

یکی از روش‌های مهم برای تحلیل آشوب در سیستم‌های دینامیکی، بررسی مرز حوزه‌ی جذب (Attractor Basin) و محاسبه‌ی بعد جعبه‌ای (Box Dimension) است.

مرز حوزه‌ی جذب: ABB (ABB) مشخص می‌کند که نقاط مختلف فضای فاز چگونه به نواحی مختلف جذب‌کننده هدایت می‌شوند. در سیستم‌های آشوبناک، این مرزها به‌طور کلی دارای ساختارهای پیچیده و فراکتالی هستند. اگر ABB دارای ویژگی‌های فراکتالی باشد، نشان‌دهنده‌ی آشوب در سیستم است. بعد جعبه‌ای (Box Dimension): بعد جعبه‌ای معیاری برای تعیین میزان پیچیدگی مرز ABB است. این بعد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\dim_{BF} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\epsilon}(F)}{\ln \epsilon}.$$

که در آن $N_{\epsilon}(F)$ تعداد کوچک‌ترین جعبه‌هایی است که برای پوشش مجموعه‌ی F لازم هستند. در سیستم‌های آشوبناک، بعد جعبه‌ای عددی کسری است که نشان‌دهنده‌ی پیچیدگی مرزهای جذب است. که طبق شبیه‌سازی‌ای که در مقاله مرجع انجام شده بود بعد جعبه‌ای محاسبه شده این مقدار می‌باشد. $d_B \approx 1.76 - 0.02 \ln \mathcal{F}$. [۵]

کتاب نامه

- mathe- the to introduction elementary an book: knot The Adams. Conrad Colin [۱]
 .۲۰۰۴ Soc., Mathematical American knots. of theory matical
- sys- dynamical in orbits periodic Knotted Williams. F Robert and Birman S Joan [۲]
 .۱۹۸۳، ۸۲-۴۷:(۱)۲۲ Topology، equations. Lorenz's i: tems
- Sys- Lorenz the of Sets Attracting of Dimension Fractal Calculating Budai. Jamie [۳]
 .۲۰۱۴ University، State Colorado .۶ volume tem،
- Decode and Encode to System Chaotic Lorenz the Exploring Chong. Michael [۴]
 University، McMaster Statistics، and Mathematics of Department Messages. Secret
 .۲۰۲۳
- dynamics. relativistic special in Chaos al. et Cornish، Neil Drake، Picton Samuel [۵]
 .۱۹۹۶ March PubMed،
- mathematicians، of congress International In dynamics. and Knots Ghys. Étienne [۶]
 .۲۰۰۷ Zürich، Society Mathematical European .۲۷۷-۲۴۷ pages ،۱ volume
- .۱۰۷ volume Theory، Chaos of Applications and Principles of Analysis He. Jiarong [۷]
 .۲۰۲۴ AMMSAC،
- .۲۰۱۳ Dimension. Fractal and Self-Similarity Fractals: .۱۹۸ Math ۲۰۱۳ Spring [۸]
- ،۶۱ Volume (AM-۶۱)، Hypersurfaces Complex of Points Singular Milnor. John [۹]
 .۲۰۱۶ Press، University Princeton .۶۱ volume
- Business & Science Springer .۷ volume arithmetic، in course A Serre. Jean-Pierre [۱۰]
 .۲۰۱۲ Media،