



Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Dynamical systems Project

مریم قنبری - ۴۰۰۱۰۷۹۷۳
فاطمه محمدی محمدی - ۴۰۱۱۱۰۱۸۳
ریحانه علی پور - ۴۰۱۱۰۸۵۳۴

استاد طالبی

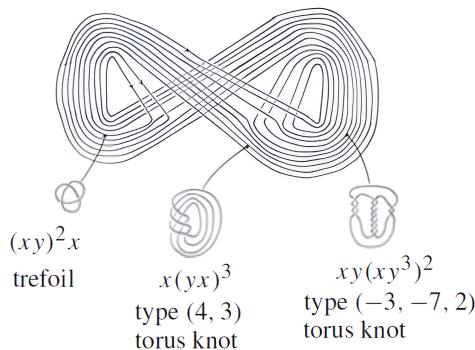
فهرست مطالب

۱	بررسی گره ها در مدارهای لورنتز	۱۰۰
۱	تمپلیت لورنتز	۱۱۰
۲	شار مدولار و گره های مدولار	۲۱۰
۴	رابطه گره های مدولار و لورنتز	۳۱۰
۷	بعد فرکتالی و جاذب عجیب (Strange Attractor)	۲۰۰
۱۲	تعريف آشوب	۳۰۰
۱۲	تعريف دیوانی (Devaney's Definition)	۱۳۰
۱۲	تعريف بلاک و کوپل (Block and Coppel's Definition)	۲۳۰
۱۲	تعريف لی و یورک (Li and Yorke's Definition)	۳۳۰
۱۳	مثال سیستم آشوبناک در فیزیک نسبیتی	۴۰۰
۱۴	هامیلتونی و مدل سازی حرکت نسبیتی	۱۴۰
۱۵	به دام افتادن نسبیتی و پتانسیل مؤثر	۲۴۰
۱۶	روش های تحلیل آشوب	۳۴۰
۱۶	حوزه جذب و بعد جعبه ای	۴۴۰

۱.۰ برسی گره ها در مدارهای لورنتز

در هر میدان برداری، بویژه در مدل لورنتز، هر مدار تناوبی یک خم بسته‌ی نشانده شده در فضای سه بعدی است که طبق تعریف، یک گره است. بنابراین می‌توان مدل لورنتز را به نوعی بصورت حد مدارهای تناوبی اش دید. این امر انگیزه‌ای برای مطالعه توپولوژیک جاذب لورنتز ایجاد می‌کند.

تعریف: یک گره لورنتز، مدار تناوبی در شار در \mathbb{R}^3 حاصل از دستگاه معادلات لورنتز است. در این بخش با معرفی تمپلیت لورنتز و همچنین گره‌های مدولار، کلاس ایزوتوپی گره‌های لورنتز را مشخص می‌کنیم.



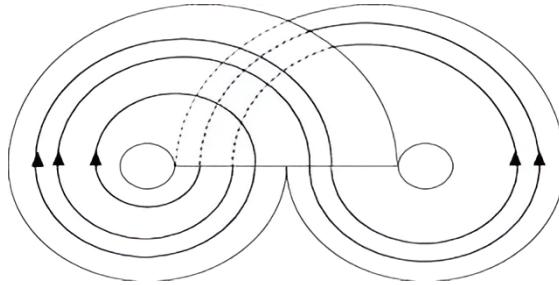
شکل ۱: چند گره در مدارهای تناوبی شار لورنتز

۱.۱.۰ تمپلیت لورنتز

برای برسی توپولوژیک مدل لورنتز، ابتدا تمپلیت لورنتز و یک سیستم دینامیکی طبیعی بر روی آن را می‌سازیم و خواص آن را بررسی می‌کنیم. این تمپلیت هندسی و سیستم لورنتز اصلی هم ارز هستند [۲] و این هم ارزی خواص مطلوب را از تمپلیت به مدل لورنتز منتقل می‌کند.

برای ساختن تمپلیت لورنتز، دو نوار کاغذی را در نظر می‌گیریم که برای هر نوار، طول یک انتهای نوار نصف دیگری است. برای هر نوار، دو انتهایش را به هم می‌چسبانیم و سپس از همین بخش، (branched-locus)، دو گوش ایجاد شده را به هم وصل می‌کنیم. روی این رویه، بخش branched-locus را بازه‌ی $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم و شار روی تمپلیت را طوری تعریف می‌کنیم که در این بازه مانند نگاشت $(1 \bmod 2)x$ عمل کند.

در این سیستم، هر مدار تناوبی تصویر یک گره بر رویه‌ی ساخته شده است. می‌توان این سیستم را بصورت یک سیستم دینامیکی نمادین نیز نمایش داد. به ازای هر نقطه شروع روی بازه‌ی $[0, 1]$ ، می‌توان برای هر بازگشت به این بازه که از گوش راست تمپلیت رخ داده نماد R را استفاده کرد و مشابها هرگاه مدار نقطه از گوش چپ رد شد و به بازه رسید نماد L را قرار دهیم. در اینصورت برای هر مدار تناوبی، معادلا هر گره، به یک رشته‌ی دوری متناهی از L و R ها رسید. همچنین به ازای هر رشته دوری متناهی، دقیقاً یک گره متناظرش در این سیستم وجود دارد. بنابراین، می‌توان رشته‌های معرفی شده را بعنوان گره‌های تمپلیت بررسی کرد. [۶]



شکل ۲: تمپلیت لورنتر

۲.۱.۰ شار مدولار و گره های مدولار فضای مشبکه ها

تعریف: به ازای دو بردار $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ، می توان زیرگروه تولید شده توسط این دو بردار را به شکل زیر در نظر گرفت

$$L = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

به L یک مشبکه می گوییم. در صورتیکه دو بردار مستقل خطی نباشد، زیرگروه تولید شده بصورت $\omega \mathbb{Z}$ خواهد بود که $\omega \in \mathbb{C}$. به چنین زیرگروهی، مشبکه ی بدیهی می گوییم.
مجموعه همه مشبکه ها با تعریف فوق، یک فضای توپولوژیک ایجاد می کند. این مجموعه را \mathcal{M} می نامیم.
برای هر $L \in \mathcal{M}$ سری زیر را تعریف می کنیم

$$G_n(L) = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}.$$

قضیه: نگاشت زیر، دوسویی است

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$L \rightarrow (G_4(L), G_6(L)).$$

برای اثبات این قضیه به [۱۰] ارجاع می دهیم. از این قضیه، نتیجه می شود که فضای مشبکه ها را می توان در \mathbb{C}^2 نشاند.

لم: یک مشبکه L بدیهی است اگر و تنها اگر $0 = 20G_4(L)^3 - 49G_6(L)^2 = \Delta(L)$. به Δ ، میان یک مشبکه می گوییم. یک طرف این لم را اثبات می کنیم. نشان می دهیم به ازای هر مشبکه ی بدیهی، میان صفر است. به ازای مشبکه ی \mathbb{Z} ، برای محاسبه مقادیر $G_n(\mathbb{Z})$ کافیست مقادیر تابع زتا ریمان برای این دو حالت خاص را داشته باشیم.

$$G_4(\mathbb{Z}) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = 2\zeta(4) = \frac{\pi^4}{45}$$

$$G_6(\mathbb{Z}) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^6} = 2\zeta(6) = \frac{2\pi^6}{945}$$

$$\Rightarrow 20G_4(\mathbb{Z})^3 - 49G_6(\mathbb{Z})^2 = \frac{20\pi^{12}}{45^3} - \frac{196\pi^{12}}{945^2} = 0$$

حال به ازای هر مشبکه ω بدهی و وجود دارد $\omega \in \mathbb{C}$ بطوریکه این مشبکه همان ω باشد و از آنجا که $G_n(\omega L) = \omega^{-n} G_n(L)$ ، تساوی فوق برای همه ω های بدهی برقرار است

از تساوی آخر لم فوق نتیجه می شود که برای هر $k > 0$ حقیقی، تساوی زیر برقرار است.

$$G_n(kL) = k^{-n} G_n(L)$$

در نتیجه برای هر مشبکه غیربدیهی، عدد حقیقی منحصر بفرد $k > 0$ وجود دارد بطوریکه

$$\begin{aligned} |G_4(kL)|^3 - |G_6(kL)|^2 &= k^{-12}(|G_4(L)|^3 - |G_6(L)|^2) = 1 \\ \Rightarrow (G_4(kL), G_6(kL)) &\in \mathbb{S}^3 \end{aligned}$$

یعنی هر مشبکه را می توان با یک تبدیل $L \rightarrow kL$ به یک مشبکه با مساحت یک متاظر کرد. پس مشبکه ها، در حد ضرب در یک عدد حقیقی مثبت، متاظر با ۳-کره هستند، این یعنی مشبکه های غیر بدیهی متاظر با مکمل $\Delta = 0$ در ۳-کره هستند. لم: مجموعه ای زیر، یک گره ای ۳-پره در ۳-کره است.

$$\{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \mid 20z^3 - 49z^2 = 0\}$$

برای اثبات این لم، به [۹] ارجاع می دهیم.

نتیجه: فضای مشبکه های با مساحت واحد همانسان است با مکمل یک گره ای ۳-پره در ۳-کره.

شار مدولار

فضای مشبکه های با مساحت واحد را درنظر بگیرید. شار زیر را روی این \mathbb{R}^2 تعریف می کنیم.

$$\phi_t = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

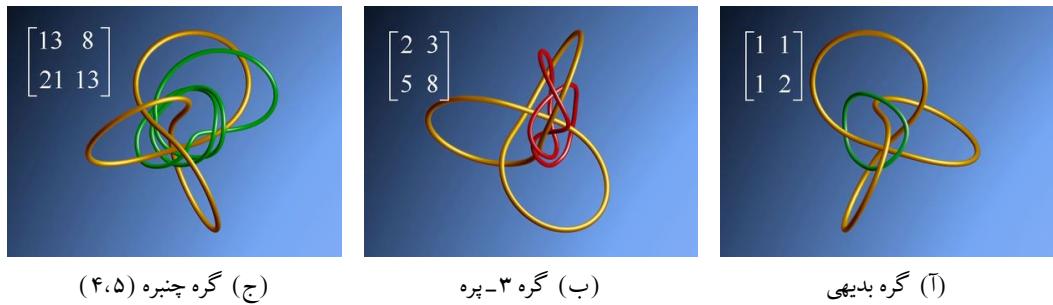
هنگامی که این شار روی یک مشبکه L با مساحت واحد عمل می کند، هر یک از نقاط مشبکه تحت ϕ_t به نقطه دیگری در صفحه تبدیل می شود و $(L)\phi_t$ بدست می آید. این مشبکه نیز مساحت واحد خواهد داشت پس شار، همواره در فضای ذکر شده قرار دارد. به این شار، شار مدولار می گوییم. برای یک مشبکه، مدارش تحت شار مدولار را با تناظری که در بخش قبل ساختیم، بصورت یک خم در $\mathbb{S}^3 \setminus \{\text{trefoil}\}$ نشان می دهیم. با این تعریف، مدارهای تناوبی شار مدولار، در فضای توصیف شده، گره هستند و آن ها را گره ای مدولار می نامیم. قضیه: مدارهای تناوبی شار مدولار با کلاس های هم ارزی ماتریس های سهموی در $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ تناظر یک به یک دارند.

یک طرف این قضیه را اثبات می کنیم. فرض کنید $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ یک ماتریس سهموی باشد. این ماتریس، مشبکه \mathbb{Z}^2 را ثابت نگه می دارد. طبق تعریف، اندازه ای مقادیر ویژه ای این ماتریس، یکی بیشتر از ۱ و دیگری کمتر از یک است. در نتیجه ماتریس قطری شدنی است و وجود دارد $P \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ بطوریکه

$$PAP^{-1} = \pm \begin{bmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

برای یک $T \in \mathbb{R}$. ادعا می کنیم مشبکه ای $L = P(\mathbb{Z}^2)$ تحت شار مدولار دارای مدار تناوبی است.

$$\phi_T(L) = \pm \begin{bmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} P(\mathbb{Z}^2) = \pm PA(\mathbb{Z}^2) = \pm P(\mathbb{Z}^2) = L.$$



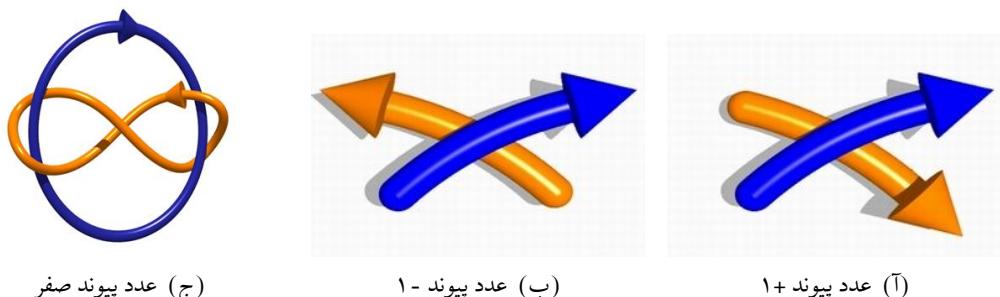
شکل ۳: گره های معادل چند ماتریس سهموی- گره ای زردرنگ همان گره ۳-پره ای محدود است.

۳.۱۰ رابطه گره های مدولار و لورنتز

در این بخش ابتدا به یکی از خواص مشترک گره های مدولار و گره های لورنتز می پردازیم که به مفهوم یکسان بودن کلاسهای ایزوتوپی گره های مدولار و گره های لورنتز کمک می کند. سپس، بطور توصیفی تناظر بین این دو نوع کلاس ایزوتوپی را نشان می دهیم.

محاسبه عدد پیوند با گره ۳-پره

تعریف: فرض کنید دو گره ای k_1, k_2 داریم. تصویر این دو در صفحه را درنظر می گیریم. به ازای هر تقاطع دو گره در صفحه که k_1 از روی k_2 رد شده است، مقدار $+1$ یا -1 را جمع میکنیم. به مجموع نهایی، عدد پیوند دو گره ای k_1, k_2 می گوییم. [۱]



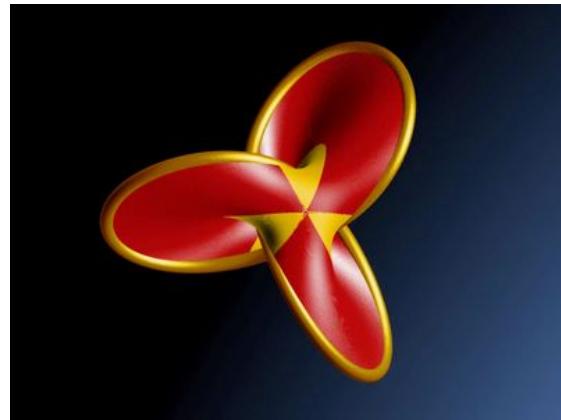
شکل ۴: نحوه محاسبه عدد پیوند دو گره

طبق قضیه ای در بخش قبل، هر یک از ماتریس های سهموی با دترمینان واحد، متناظر با یک مدار تناوبی و در نتیجه یک گره در شار مدولار هستند پس به ازای یک ماتریس $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ، می توان گره ای یکتا متناظر با آن را با k_A نمایش داد.

قصد داریم عدد پیوندی یک k_A دلخواه را با گره ۳-پره محدود از Δ محاسبه کنیم. در تعریف شار مدولار، متناظر با هر مشبکه، یک عدد مختلط Δ بعنوان میبن مشبکه معرفی کردیم. مشاهده شد که با ضرب کردن یک ضریب حقیقی مثبت k در یک مشبکه، میبن آن در k^{-12} ضرب می شود. بنابراین، آرگومان Δ با این کار ثابت می ماند.

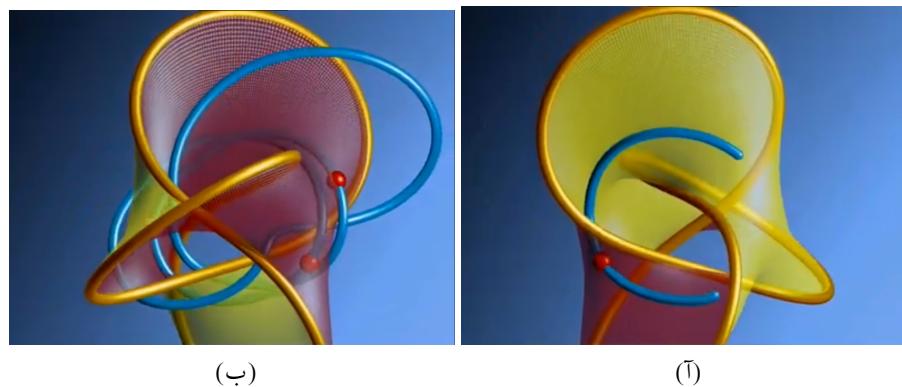
در 3 -گره، می توانیم مجموعه نقاطی که $\arg \Delta$ یکسان دلخواهی دارند را در نظر بگیریم. این مجموعه همواره یک رویه‌ی زایفرت با مرز گره‌ی 3 -پره است. رویه‌ی زایفرت با آرگومان صفر را در نظر می‌گیریم که رویه‌ای است که $\Delta \in \mathbb{R}^+$.

حال، چون یک گره دلخواه k_A ، تقاطعی با گره 3 -پره میان صفر ندارد، پس تصویر این گره تحت نگاشت Δ



شکل ۵: رویه زایفرت با مرز گره 3 -پره

یک خم بسته است که از مبدا نمی‌گذرد و بطور طبیعی روی آن یکتابع لگاریتم تعریف می‌شود. اینتابع لگاریتم، اندیس این خم حول مبدا را نشان می‌دهد که درواقع همان عدد پیوند k_A با گره 3 -پره است: اگر رویه زایفرت معرفی شده را در نظر بگیریم، هرگاه آرگومان خم k_A تغییر علامت دهد، این خم با رویه زایفرت برخورد می‌کند و از آن رد می‌شود. در هر یک از این تقاطع‌ها 1 ± 1 به عدد پیوند اضافه می‌شود و همان 1 ± 1 نیز با اندیس گره جمع می‌شود. علامت اضافه شدن نیز وابسته به این است که خم از آرگومان مثبت به منفی حرکت کرده یا بالعکس. نتیجه: عدد پیوند هر گره 3 -پره $i = 0$ است، برابر اندیس چرخشی اش حول مبدا است.



شکل ۶: مراحل محاسبه اندیس چرخشی

تاظر گره های مدولار با گره های لورنتز

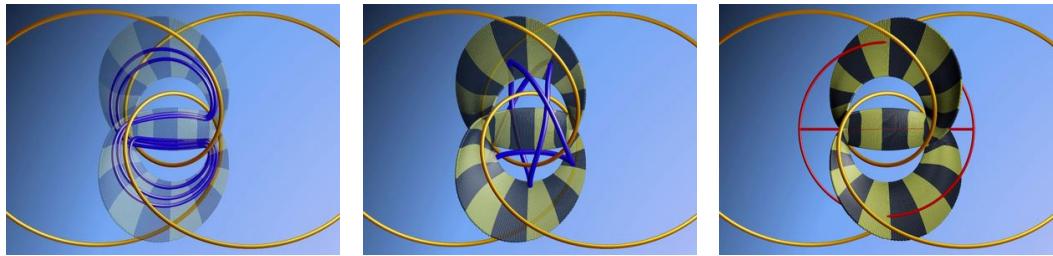
قضیه: گره های مدولار تاظر یک به یک به گره های لورنتز دارند. [۶]

برای نشان دادن این قضیه، ابتدا تمپلیت لورنتز را در فضای ۳-گره منهای گره ۳-پره می سازیم. این نشان می دهد که گره های حاصل روی این تمپلیت، در فضای مشبکه ها قرار می گیرند و طبق تعریف، گره مدولار هستند. سپس هر گره مدولار در این فضا را با یک تغییر شکل هموار روی تمپلیت قرار میدهیم بطوریکه در هیچ لحظه ای با گره ۳-پره تقاطع پیدا نکند. بنابراین هر گره مدولار هم یک گره لورنتز است و اثبات کامل می شود.

فضای همه می مشبکه های شش-ضلعی با مساحت ۱، یک زیرمجموعه از ۳-گره منهای ۳-پره است که همه این مشبکه ها در حد دوران با یکدیگر هم ارزند در نتیجه این زیرمجموعه یک دایره در فضای ما تشکیل می دهد.

همچنین، فضای همه می مشبکه ها با مساحت یک که دامنه بنیادی به شکل لوزی افقی با زاویه بین $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ دارند، قطر دایره ای زیرمجموعه فوق را تشکیل می دهد. اجتماع دو زیرمجموعه فوق را در نظر می گیریم. این مجموعه را در جهت ناپایدار شار مدولار گسترش می دهیم. حاصل، همانسان با تمپلیت لورنتز می شود.

ایده ای قرار دادن گره های مدولار روی تمپلیت، به این صورت است که برای یک مشبکه، کوتاهترین بردار ناصفر در این مشبکه را v می گیریم و سپس کوتاهترین برداری در این مشبکه که مضرب v نباشد را u می گیریم. پس از این بطور همزمان u را کوتاهتر و v را بلندتر می کنیم بطوریکه مساحت همواره ۱ بماند.



(ج) تغییر شکل و قرارگیری روی تمپلیت

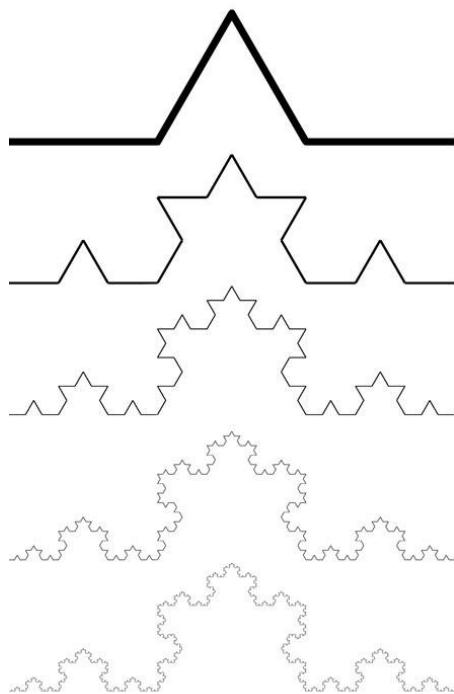
(ب) گره مدولار

(آ) تمپلیت لورنتز در فضای مکمل گره ۳-

پره

۲۰۰ بعد فرکتالی و جاذب عجیب (Strange Attractor)

هدف ما معرفی فرکتال، بعد فرکتال و محاسبه‌ی بعد فرکتال مجموعه‌های جاذب سیستم لورنژ است. خود-مشابه: یک شکل هندسی را خود-مشابه می‌نامیم هرگاه نقطه‌ای وجود داشته باشد که هر همسایگی از آن شامل نسخه‌ای از تمام شکل باشد. به شکلی که در هر نقطه خود-مشابه باشد کاملاً خود-مشابه می‌گوییم. در طبیعت به وفور نمونه‌هایی از خودشابهی‌های تقریباً کامل مانند نورون‌های مغزی، رودخانه‌ها و کوهکشان‌ها می‌توان یافت. مجموعه‌ی کانتور، منحنی کُخ و مثلث سرپنسکی نمونه‌هایی از اشکال کاملاً خود-مشابه هستند.



شکل ۷: فرایند تولید منحنی کُخ، یک نمونه از فرکتال کاملاً خود-مشابه

فرکتال توصیفی از ساختار خود-مشابه اشکال است. در فرکتال هر جزو کوچک می‌تواند کل ساختار را با تکرار تولید کند. به طور شهودی، فرکتال یک شکل هندسی با پیچیدگی بی‌نهایت است که هرچقدر آن را بزرگنمایی کنیم، هرگز صاف و هموار نخواهد شد تا شیبه به یک فضای اقلیدسی معمولی به نظر برسد. مفهوم بعد فرکتالی تلاش می‌کند این پیچیدگی را به صورت کمی بیان کند. بسیاری از فرکتال‌ها دارای ویژگی خودشابهی هستند.

بعد فرکتال: در واقع آنچه فرکتال را از اشکال هندسی کلاسیک متمایز می‌کند بعد آن است. جلوتر می‌بینیم بعد فرکتال‌ها عددی غیرصحیح است در صورتی که به طور شهودی بعد اشکال هندسی کلاسیک را می‌دانیم. برای مثال خط یا منحنی یک بعدی، صفحه دو بعدی و مکعب سه بعدی است. تعریفی از بعد ارائه می‌کنیم که بتوان آن را برای بعد فرکتال نیز گسترش داد. پاره خط، مربع و مکعب اشکال خود-مشابه هستند و آن‌ها را به ترتیب می‌توان به ۴، ۲ و ۸ قطعه کاملاً مشابه با

نسخه اولیه تقسیم کرد که مقیاس هر قطعه نصف نسخه اصلی باشد. توجه کنید هر نسخه کوچکتر از پاره خط، مربع و مکعب اولیه اگر به ترتیب 2^2 و 2^3 برابر بزرگنمایی شوند تبدیل به نسخه اولیه خود می‌شوند. پس اگر N را تعداد قطعات تقسیم شده، $\frac{1}{S}$ را مقیاس هر قطعه و D را بعد شکل در نظر بگیریم به راحتی می‌توان بعد D را از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$N = S^D \Rightarrow D = \frac{\log(N)}{\log(S)}$$

حال توجه کنید مثلث سرپنسکی را می‌توان به ۳ قطعه‌ی کاملاً مشابه با نسخه اولی تقسیم کرد که مقیاس هر قطعه نصف نسخه اصلی باشد. پس تعداد قطعات (N) برابر ۳ و S برابر ۲ است. در نتیجه بعد مثلث سرپنسکی طبق تعریف بالا برابر $1.585 = \frac{\log(3)}{\log(2)}$ محاسبه می‌شود! ولی اگر فرکتال‌ها پیچیده‌تر شوند محاسبه‌ی بعد آن‌ها به این سادگی نخواهد بود. برای همین روش دیگری برای محاسبه‌ی بعد فرکتال که به نام «روش شمارش جعبه‌ای» معروف است معرفی می‌کنیم. روش شمارش جعبه‌ای: شیء دلخواه را در شبکه‌ای مربوطی یا مکعبی (بسته به اینکه در چه بعدی می‌نشیند) قرار می‌دهیم. مربع یا مکعب‌های شبکه را جعبه می‌نامیم. سپس تمام جعبه‌هایی که با شیء تماش دارند را رنگ می‌کنیم. حال اگر طول جعبه‌های شبکه را نصف کنیم و همین کار را تکرار کنیم، به اندازه‌گیری دقیق‌تری از پیچیدگی شیء می‌رسیم. همچنین با کوچک و کوچک‌تر کردن طول جعبه‌ها این اندازه‌گیری دقیق‌تر می‌شود. بعد از روش شمارش جعبه‌ای با فرمول زیر قابل محاسبه است. (به طوری که s طول جعبه‌ها و $N(s)$ تعداد جعبه‌های رنگ شده است).)

$$D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\log(N(s))}{\log(s)}$$

در ادامه می‌خواهیم بعد فرکتال مجموعه‌های جاذب سیستم دینامیکی لورنزا با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای بدست آوریم. سیستم دینامیکی لورنزا:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (2)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (3)$$

اعداد حقیقی مثبت هستند. محدوده‌ی گیرافتادگی: Y را یک محدوده‌ی گیرافتادگی برای سیستم دینامیکی می‌نامیم هرگاه اگر $x(t) \in Y$ آنگاه برای هر $t > s$ داشته باشیم $y(t) \in Y$. در واقع اگر مدار نقطه‌ای وارد محدوده‌ی گیرافتادگی شود تا همیشه در آن محدوده باقی می‌ماند.

تابع لیاپانوف: به تابعی که تحت جریان سیستم نزولی باشد گفته می‌شود.

لم: سیستم لورنزا دارای محدوده‌ی گیرافتادگی است.

اثبات:

با استفاده از یک تابع لیاپانوف، می‌توانیم نشان دهیم که تمام جواب‌های سیستم در نهایت وارد محدوده بیضوی به مرکز $(0, 0, 2r)$ می‌شوند. این محدوده به صورت زیر است:

$$T = \{(x, y, z) \mid |x^2 + y^2 + \sigma(z - 2r)^2| \leq C\}$$

به ازای مقدار مثبت C .

اثبات: قرار دهید $E = rx^2 + \sigma y^2 + b(z - 2r)^2$. حال مشتق آن نسبت به t را می‌گیریم:

$$\frac{dE}{dt} = 2rx(\dot{x}) + 2\sigma y(\dot{y}) + 2b(z - 2r)(\dot{z})$$

با جایگذاری معادلات لورنژ برای \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} داریم:

$$\frac{dE}{dt} = 2rx(\sigma(y - x)) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2b(z - 2r)(xy - bz)$$

اگر معادله‌ی بالا را ساده کنیم:

$$\frac{dE}{dt} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz)$$

از آنجا که $\sigma > 0$ است، داریم:

$$rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz > 0 \Leftrightarrow rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 > br^2$$

بنابراین، هنگامی که (x, y, z) خارج از محدوده‌ی بیضوی $\{(x, y, z) | rx^2 + y^2 + bz^2 > 2brz\}$ قرار دارد، داریم:

$$\frac{dE}{dt} \leq 0.$$

بنابراین E خارج از F یک تابع لیپانوف است. اگر C را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم به‌طوریکه محدوده‌ی بیضوی F داخل T قرار نگیرد، آنگاه T یک محدوده‌ی گیرافتادگی برای سیستم است. این به این دلیل است که هر وضعیت اولیه‌ای خارج از T خارج از F نیز هست و مقدار $E(x(t))$ در زمان متناهی کم می‌شود و درنهایت وارد F می‌شود حال چون این مدار نمی‌تواند از F خارج شود بنابراین از T نیز خارج نمی‌شود و داخل آن باقی می‌ماند.

مجموعه‌ی جاذب: مجموعه‌ی $K = \bigcap_{t>0} \phi_t(E)$ نسبت به معادلات دیفرانسیل لورنژ ناوردا است. این مجموعه به عنوان مجموعه‌ی جاذب سیستم لورنژ شناخته می‌شود.

نقاط تعادلی و پایداری آن‌ها: با قراردادن معادلات (۱) و (۲) و (۳) برابر صفر و حل معادلات جدید سه نقطه‌ی تعادلی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{x}_1^* = (0, 0, 0), \quad (4)$$

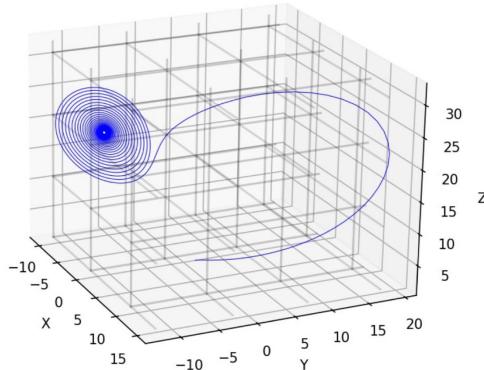
$$\mathbf{x}_2^* = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad r \geq 1, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_3^* = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad r \geq 1. \quad (6)$$

محاسبه‌ی بعد فرکتال مجموعه‌ی جاذب لورنژ: ما ابعاد فراکتالی سیستم لورنژ را با شرایط اولیه $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$ و $z_0 = 0.1$ و مقادیر پارامترهای $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$, $r = 20$, $a = 24.74$, و 28 بررسی می‌کنیم. با محاسبه مقادیر ماتریس ژاکوبی برای این سیستم و محاسبه‌ی مقادیر ویژه برای نقاط تعادلی داریم:

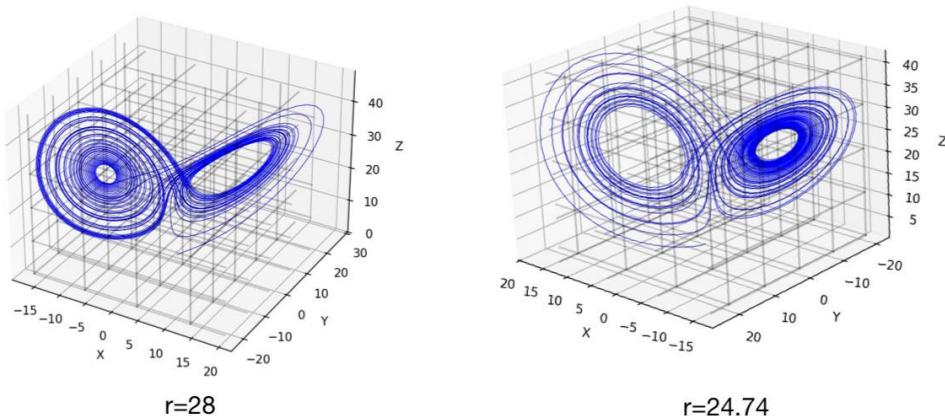
- برای $r < 24.7$ داریم که مبدأ ناپایدار باقی می‌ماند و دو نقطه متعادل دیگر پایدار هستند،
- در $r \approx 24.7368$ ، دو نقطه تعادل پایدار ناپایدار می‌شوند و این منجر به یک انشعاب هاپف می‌شود.

اندازه‌ی بعد به طور حدودی برای $r = 24.74$ و $r = 28$ برابر ۲.۱ است که شهودا قابل درک است زیرا مجموعه‌های جاذب فضایی کمی بیشتر از صفحه را اشغال می‌کنند. مجموعه جاذب مشاهده شده برای $r = 20$ بسیار کوچکتر از سیستم‌های $r = 24.74$ و $r = 28$ است. برای نتیجه‌گیری دقیق‌تر بهتر است اندازه طول جعبه‌هارا کوچک‌تر در نظر گرفت. با این حال، انتظار می‌رود که بعد مجموعه‌ی جاذب برای $r = 20$ نیز کمی بیشتر از ۲ باشد.

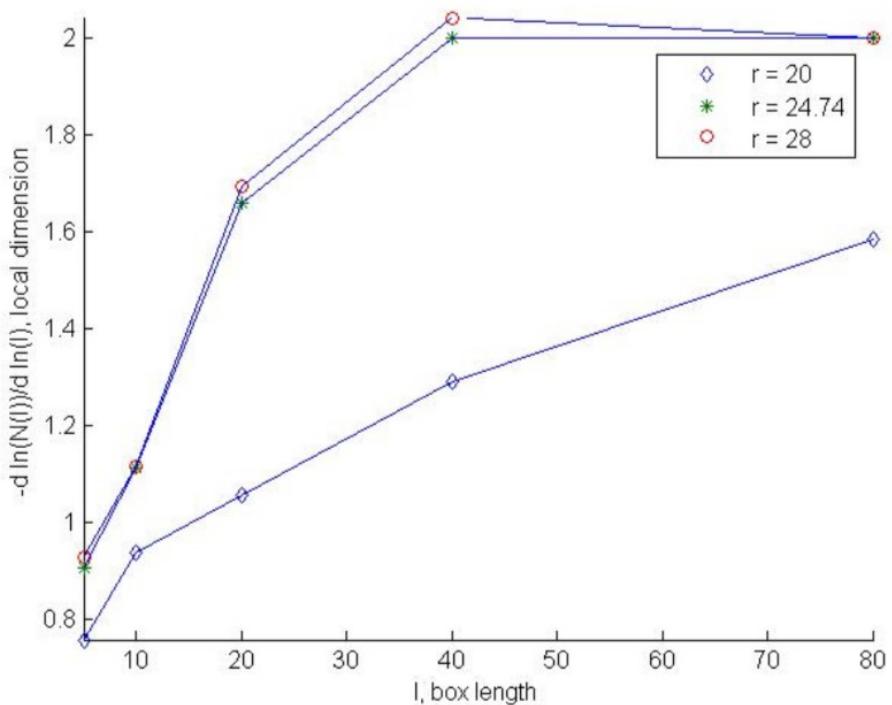


$$r=20$$

شکل ۸: سیستم لورن در $r = 20$



شکل ۹: سیستم لورنر در $r = 28$ و $r = 24.74$



شكل ١٠ : نمودار بعد فکتال موضعی

[٤] [٨] [٣]

سیستم لورنتز نمونه‌ای برجسته از یک سیستم آشوبناک محسوب می‌شود. در ادامه، تلاش خواهیم کرد تا درک جامع‌تری از ماهیت سیستم‌های آشوبناک ارائه دهیم و با بررسی چند مثال، ویژگی‌های کلیدی این سیستم‌ها را روشن‌تر سازیم.

۳.۰ تعریف آشوب

آشوب به رفتار غیرقابل پیش‌بینی و تصادفی یک سیستم اشاره دارد که معمولاً با ویژگی‌های ناپایدار و حساسیت بالا به شرایط اولیه همراه است. در ریاضیات، چندین تعریف برای آشوب ارائه شده است که هر یک از آن‌ها جنبه‌های متفاوتی از این پدیده را توصیف می‌کنند. در ادامه، سه تعریف رایج از آشوب بررسی می‌شود.

۱.۳.۰ تعریف دیوانی (Devaney's Definition)

یک نگاشت $X \rightarrow f$ روی یک فضای حالت X را آشوبناک می‌نامیم اگر یک زیرمجموعه‌ی ناپایدار $Y \subseteq X$ وجود داشته باشد که شرایط زیر را داشته باشد:

۱. انتقال‌پذیری توپولوژیکی: هر دو ناحیه‌ی باز در Y با اعمال تکراری f به یکدیگر مرتبط می‌شوند.
۲. تراکم نقاط دارای مدارهای دوره‌ای: مجموعه‌ی نقاط دارای مدارهای دوره‌ای در Y متراکم است.
۳. واپستگی حساس به شرایط اولیه: تغییرات کوچک در شرایط اولیه منجر به تغییرات بزرگی در آینده‌ی سیستم می‌شود.

۲.۳.۰ تعریف بلاک و کوپل (Block and Coppel's Definition)

یک سیستم دینامیکی $X \rightarrow f$ آشوبناک است اگر:

- یک عدد طبیعی m و یک زیرمجموعه‌ی فشرده و ناپایدار $Y \subseteq X$ وجود داشته باشد که تحت f^m تغییر نکند، یعنی:

$$f^m(Y) = Y.$$

- یک نگاشت پیوسته‌ی سورجکتیو $Y \rightarrow g$ وجود داشته باشد که f^m را به یک نگاشت سیمبولیک مرتبط کند:

$$g \circ f^m = \sigma \circ g.$$

این تعریف، آشوب را از طریق شباهت آن با سیستم‌های آشوبناک شناخته‌شده مورد بررسی قرار می‌دهد.

۳.۳.۰ تعریف لی و یورک (Li and Yorke's Definition)

یک نگاشت پیوسته $I \rightarrow f$ (که در آن I یک بازه فشرده از اعداد حقیقی است) را آشوبناک می‌نامیم اگر مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا از نقاط با رفتار آشوبناک وجود داشته باشد، به طوری که:

۱. وجود نقاط تناوبی با همه‌ی دوره‌های طبیعی اگر یک نقطه تناوبی با دوره ۳ داشته باشیم، یعنی $x = f^3(x)$ ولی دوره آن برابر با ۱ یا ۲ نباشد، آنگاه این نگاشت تناوبی با تمام دوره‌های طبیعی $n \geq 1$ را خواهد داشت.

- در نتیجه از قضیه "دوره‌ی سه، آشوب را تضمین می‌کند" (Three Period Implies Chaos) به دست می‌آید.

۲. وجود مجموعه‌ای نامتناهی و بدون تناوب (Scrambled Set) وجود دارد که به آن مجموعه‌ی درهم‌ریخته (Scrambled Set) می‌گوییم و دارای ویژگی‌های زیر است:

- عدم تناوب: برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S$, $x \neq y$ داریم:

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(y) - f^n(x)|$$

این به معنی آن است که این نقاط در برخی مراحل زمانی از هم فاصله‌ی زیادی می‌گیرند.

- نزدیکی نامنظم: همچنین برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S$ داریم:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(y) - f^n(x)| = 0$$

یعنی نقاط در برخی مراحل زمانی به هم بسیار نزدیک می‌شوند.

این ویژگی نشان‌دهنده‌ی حساسیت به شرایط اولیه هستند و بیان می‌کنند که هر دو نقطه‌ی دلخواه از این مجموعه، در برخی مراحل به هم نزدیک شده و سپس از هم دور می‌شوند.

۴. مثال سیستم آشوبناک در فیزیک نسبیتی

مسئله سه‌جسمی یکی از مسائل کلاسیک و پیچیده‌ی دینامیک است که بیش از ۲۰۰ سال مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است. با وجود پیشرفت‌های زیاد، تنها در موارد خاص، راه حل‌های دقیق برای آن یافت شده است. در این پژوهش، حرکت یک ذره‌ی باردار در اطراف دو ذره‌ی باردار ثابت با استفاده از یک هامیلتونی نسبیتی بررسی می‌شود.

در مقایسه با مدل نیوتونی، مسیرهای این ذرات ویژگی‌های آشوبناک نشان می‌دهند. در اینجا، مسئله دو-مرکزی بدون برهم‌کنش گرانشی تحلیل شده و مقایسه‌هایی با موارد مشابه در نسبیت عام انجام می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در هر دو حالت، سیستم رفتار آشوبناک مشابهی دارد.

پویایی این سیستم با بررسی حرکت ذرات در یک پتانسیل مؤثر قابل تحلیل است. در مکانیک نیوتونی، این پتانسیل انتگرال‌پذیر است، اما اصلاحات نسبیتی باعث ورود غیرخطی‌هایی می‌شود که دو تغییر اساسی را ایجاد می‌کنند:

- مسیرها به دام تکینگی‌های مرکزی می‌افتد، حتی با وجود تکانه زاویه‌ای غیرصفر.
- دینامیک سیستم تحت تأثیر اثرات نسبیتی قرار می‌گیرد و آشوبناک‌تر می‌شود.

در نتیجه، پتانسیل مؤثر در این سیستم دیگر قابل انتگرال‌گیری نیست. این موضوع بررسی آشوب را دشوارتر می‌کند، زیرا شاخص‌های استاندارد آشوب مانند نمای لیاپانوف و برش‌های پوانکاره برای این سیستم به دلیل وابستگی به مدارهای پایدار، محدودیت دارند.

برای مطالعه‌ی آشوب در این سیستم باز، تحلیل مرز حوزه‌ی جذب (ABB) روشی مناسب‌تر از نمای لیاپانوف در نظر گرفته می‌شود. ABB مستقل از مختصات است و نیازی به مسیرهای طولانی مدت ندارد، در حالی که نمای لیاپانوف یک کمیت لورنتز ناوردانیست. بررسی این ویژگی‌ها، شناخت دقیقتی از آشوب در سیستم‌های دینامیکی نسبیتی ارائه می‌دهد.

۱.۴.۰ هامیلتونی و مدل‌سازی حرکت نسبیتی

هامیلتونی H یک تابع انرژی در فیزیک است که دینامیک یک سیستم را توصیف می‌کند. در مکانیک کلاسیک، هامیلتونی مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم است:

$$H(q, p) = T + V$$

که در آن:

- T انرژی جنبشی ذره است.
- V انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی اعمال شده بر ذره است.

معادلات هامیلتونی برای توصیف تکامل سیستم عبارتند از:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

این معادلات نشان می‌دهند که چگونه موقعیت و تکانه‌ی ذره در طول زمان تغییر می‌کنند.

هامیلتونی در نسبیت خاص

در نسبیت خاص، مدل دینامیکی این سیستم با استفاده از یک ابر-هامیلتونی نسبیتی تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(P_\alpha - qA_\alpha)(P^\alpha - qA^\alpha).$$

که در آن:

- \mathcal{H} : ابر-هامیلتونی سیستم که شامل انرژی و تکانه‌ی نسبیتی است.
- P_α : تکانه‌ی همیلتونی ذره.
- q : بار الکتریکی ذره‌ی آزمونی.
- A_α : پتانسیل برداری الکترومغناطیسی که میدان الکتریکی و مغناطیسی را توصیف می‌کند.

معادلات هامیلتونی متناظر عبارتند از:

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}, \quad \frac{dP_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}.$$

که در آن:

- x^α : مختصات چهار بعدی فضا-زمان.
- P_α : تکانه‌ی همیلتونی نسبیتی ذره.
- λ : پارامتر همدیس (Affine Parameter) که مسیر ژئودزیکی را تعیین می‌کند.

ارتباط تکانه‌ی مکانیکی و همیلتونی

علاوه بر این، تکانه‌ی مکانیکی با تکانه‌ی همیلتونی ارتباط دارد:

$$p^\alpha = mu^\alpha = P^\alpha - qA^\alpha.$$

که در آن:

- p^α : تکانه‌ی مکانیکی ذره.
- m : جرم سکون ذره.
- u^α : چهارسرعت ذره.

این معادله نشان می‌دهد که میدان برداری پتانسیل الکترومغناطیسی (A^α) تأثیر مستقیمی بر تکانه‌ی مکانیکی دارد و سبب تغییر مسیر ذره می‌شود. این ویژگی در دینامیک نسبیتی نقش اساسی در رفتار ذرات باردار تحت تأثیر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی دارد.

۲.۴.۰ به دام افتادن نسبیتی و پتانسیل مؤثر

یکی از تفاوت‌های اساسی بین مکانیک نیوتینی و نسبیتی، تأثیر تکانه زاویه‌ای در جلوگیری از سقوط به تکینگی است. در مکانیک نیوتینی، اگر یک ذره دارای تکانه زاویه‌ای غیرصفر باشد، هرگز مستقیماً به مرکز سقوط نخواهد کرد. اما در نسبیت خاص، چنین حفاظتی وجود ندارد و مسیرهایی که دارای $qQ < L$ هستند، می‌توانند به دام بیفتد. پتانسیل مؤثر در این سیستم عبارت است از:

$$V_{eff}^2 = m^2 - \frac{2EqQ}{r} + \frac{L^2 - q^2 Q^2}{r^2}.$$

در صورتی که مقدار L کمتر از یک مقدار بحرانی باشد، نیروی مرکزی غالب شده و مسیرها در نزدیکی تکینگی به پایان می‌رسند. این ویژگی از تفاوت‌های کلیدی دینامیک نیوتینی و نسبیتی محسوب می‌شود و می‌تواند سبب آشوب در سیستم شود.

تعریف پارامترها در پتانسیل مؤثر

در معادله‌ی پتانسیل مؤثر، هر پارامتر به این صورت تعریف می‌شود:

- V_{eff} : پتانسیل مؤثر سیستم که نشان‌دهنده‌ی انرژی کلی در چارچوب نسبیتی است.
- m : جرم سکون ذره‌ی آزمونی که در میدان الکتریکی دو بار ثابت قرار دارد.
- E : انرژی کلی ذره، شامل انرژی جنبشی و پتانسیل الکترواستاتیکی.
- q : بار الکتریکی ذره‌ی آزمونی که تحت تأثیر دو بار الکتریکی ثابت قرار گرفته است.
- Q : بار الکتریکی مراکز ثابت که میدان الکتریکی را ایجاد می‌کنند.
- r : فاصله‌ی بین ذره‌ی آزمونی و مرکز میدان.
- L : تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ی آزمونی که مقدار آن روی حرکت مداری تأثیر دارد.

چرا این ویژگی سبب آشوب در سیستم می‌شود؟

در مکانیک نیوتونی، تأثیر تکانه‌ی زاویه‌ای یک سد دافعه‌ای در نزدیکی مرکز ایجاد می‌کند که مانع از سقوط ذره به مرکز می‌شود. اما در نسبیت خاص، این سد دافعه‌ای همیشه حفظ نمی‌شود.

۱. حذف سد دافعه‌ای در نسبیت: در نیوتن، عبارت $\frac{L^2}{r^2}$ باعث جلوگیری از سقوط می‌شود. اما در نسبیت خاص، این مقدار به $\frac{L^2 - q^2 Q^2}{r^2}$ تغییر می‌یابد. اگر $qQ < L$ ، این مقدار منفی خواهد شد، یعنی سد دافعه‌ای دیگر وجود ندارد و ذره به مرکز سقوط می‌کند.

۲. افزایش حساسیت نسبت به شرایط اولیه: در سیستم‌های نیوتونی، مدارها با مقدار معینی از تکانه‌ی زاویه‌ای پایدار می‌مانند. اما در نسبیت، تغییرات کوچک در شرایط اولیه (مانند انرژی یا تکانه زاویه‌ای) می‌تواند مسیر ذره را از یک مدار پایدار به دام افتادن در تکینگی تغییر دهنده. این حساسیت زیاد نسبت به شرایط اولیه، ویژگی آشوبناک بودن سیستم را نشان می‌دهد.

۳. تغییر رفتار دینامیکی در انرژی‌های بالا: در نسبیت خاص، انرژی E در مقدار پتانسیل تأثیر دارد. برای مقدار زیاد E ، اثرات غیرخطی افزایش یافته و حرکت ذره رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد. به بیان ساده‌تر، در انرژی‌های بالا، مسیرهای بسته و پایدار به مسیرهای آشوبناک و نامنظم تبدیل می‌شوند.

۴. ترکیب برهم‌کنش‌های غیرخطی: در نسبیت، برهم‌کنش بین انرژی، تکانه زاویه‌ای، و نیروهای الکترومغناطیسی به صورت غیرخطی در پتانسیل مؤثر ظاهر می‌شوند. برهم‌کنش غیرخطی یکی از نشانه‌های اصلی رفتار آشوبناک است.

۳.۴.۰ روش‌های تحلیل آشوب

به منظور بررسی آشوبناک بودن این سیستم، از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود:

- نمای لیاپانوف: این کمیت، میزان حساسیت سیستم نسبت به شرایط اولیه را نشان می‌دهد. مقادیر مثبت نمای لیاپانوف نشان‌دهنده آشوب در سیستم هستند.

- برش‌های پوانکاره: نمایش گسسته‌ای از مسیرهای فاز که امکان بررسی نظم یا آشوب در سیستم را فراهم می‌کند.

- مرز حوزه‌ی جذب: (ABB) این روش، معیاری مستقل از مختصات برای بررسی آشوب در سیستم‌های باز ارائه می‌دهد. ABB در سیستم‌های نسبیتی که مسیرهای به دام افتاده در تکینگی دارند، ابزاری مناسب برای بررسی آشوب است.

ABB نسبت به نمای لیاپانوف برتری دارد، زیرا نیاز به مسیرهای طولانی مدت ندارد و می‌تواند حتی در سیستم‌هایی که مسیرهای کوتاه دارند نیز آشوب را شناسایی کند. در سیستم‌های آشوبناک، ABB روی مجموعه‌ای فراکتالی قرار می‌گیرد، در حالی‌که در سیستم‌های غیرآشوبناک چنین نیست.

۴.۴.۰ حوزه جذب و بعد جعبه‌ای

یکی از روش‌های مهم برای تحلیل آشوب در سیستم‌های دینامیکی، بررسی مرز حوزه‌ی جذب (Attractor Basin) و محاسبه‌ی بعد جعبه‌ای (Boundary - Box Dimension) است.

مرز حوزه‌ی جذب (ABB) مشخص می‌کند که نقاط مختلف فضای فاز چگونه به نواحی مختلف جذب‌کننده هدایت می‌شوند. در سیستم‌های آشوبناک، این مرزها به طور کلی دارای ساختارهای پیچیده و فراکتالی هستند. اگر ABB دارای ویژگی‌های فراکتالی باشد، نشان‌دهنده‌ی آشوب در سیستم است. بعد جعبه‌ای (Box Dimension): بعد جعبه‌ای معیاری برای تعیین میزان پیچیدگی مرز ABB است. این بعد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\dim_{BF} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(F)}{\ln \epsilon}.$$

که در آن $N_\epsilon(F)$ تعداد کوچک‌ترین جعبه‌هایی است که برای پوشش مجموعه‌ی F لازم هستند. در سیستم‌های آشوبناک، بعد جعبه‌ای عددی کسری است که نشان‌دهنده‌ی پیچیدگی مرزهای جذب است. که طبق شبیه سازی ای که در مقاله مرجع انجام شده بود بعد جعبه‌ای محاسبه شده این مقدار میباشد. $d_B \approx 1.76 - 0.02 \ln \mathcal{F}$. [۵].

كتاب نامه

mathe- the to introduction elementary an book: knot The Adams. Conrad Colin [١]
.٢٠٠٤ Soc., Mathematical American knots. of theory matical

sys- dynamical in orbits periodic Knotted Williams. F Robert and Birman S Joan [٢]
.١٩٨٣، ٨٢-٤٧: (١) ٢٢ Topology, equations. Lorenz's i: tems

Sys- Lorenz the of Sets Attracting of Dimension Fractal Calculating Budai. Jamie [٣]
.٢٠١٤ University, State Colorado .٦ volume tem.

Decode and Encode to System Chaotic Lorenz the Exploring Chong. Michael [٤]
University, McMaster Statistics. and Mathematics of Department Messages. Secret
.٢٠٢٣

dynamics. relativistic special in Chaos al. et Cornish. Neil Drake, Picton Samuel [٥]
.١٩٩٦ March PubMed.

mathematicians. of congress International In dynamics. and Knots Ghys. Étienne [٦]
.٢٠٠٧ Zürich, Society Mathematical European .٢٧٧-٢٤٧ pages , ١ volume

. ١٠ ٧ volume Theory, Chaos of Applications and Principles of Analysis He. Jiarong [٧]
.٢٠٢٤ AMMSAC.

. ٢٠ ١٣ Dimension, Fractal and Self-Similarity Fractals: . ١٩٨ Math ٢٠ ١٣ Spring [٨]
. ٦١ Volume (AM-٦١), Hypersurfaces Complex of Points Singular Milnor. John [٩]
. ٢٠ ١٦ Press, University Princeton .٦١ volume

Business & Science Springer .٧ volume arithmetic, in course A Serre. Jean-Pierre [١٠]
. ٢٠ ١٢ Media.