خواص گره‌ها و کاربرد آن‌ها در علوم مختلف

پروژه درس آشنایی با ریاضیات

اساتید: دکتر علیشاهی،
دکتر رجب زاده، دکتر تابش

نیمسال اول 1401

نویسنده: فاطمه محمدی محمدی

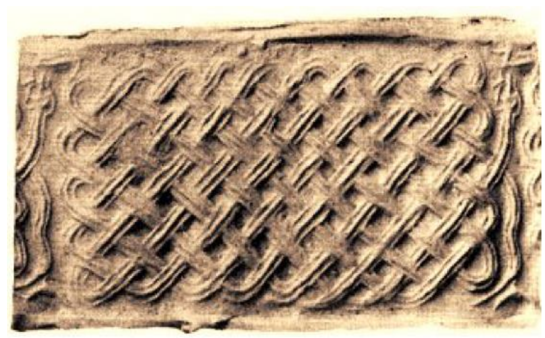
خلاصه

در این مقاله، مفاهیم پایه ای نظریه گره ها را معرفی می کنیم. سپس به بررسی برخی ناورداهای گره ها و خواص آن ها می پردازیم و در آخر، به برخی از کاربردهای این نظریه در شاخه های مختلف علم اشاره میکنیم.

1. تاریخچه

1.1. گره ها و تاریخ تمدن انسان

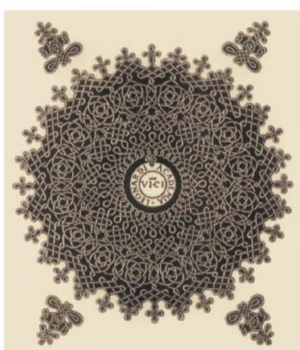
از اوایل تاریخ بشر، گره ها همواره مورد توجه انسان ها بوده اند و در معماری و هنر دوران باستان نمونه هایی از آنها دیده می شود. یکی از قدیمی ترین این نمونه ها، نقش یک مهر و موم در تمدن بین النهرین است که به 2500 سال قبل از میلاد مسیح برمی گردد. این نقش، نماد معروف مار Ouroboros است که در خود پیچ خورده و سر و دمش به هم متصل است. در تزئینات سلتیک هم نشانه های بسیاری از گره ها در سمبل های اعتقادی و روحانی آن زمان دیده می شود. برای مثال، گره ی سلتیک سه گانه، نماد تثلیث برای مسیحیان بوده (که هزاران سال بعد توسط ریاضیدانها به عنوان گره ی Trefoilمعرفی شد). همچنین، ریاضیدان و هنرمند معروف، لئوناردو داوینچی، یکی از افرادی بود که به طراحی گره های بسیار پیچیده پرداخته و حتی در الگوی بافت لباس مونالیزا، آثاری از گره های منظم ریاضیاتی دیده می شود.



شکل1 : مهر و موم متعلق به تمدن بین النهرین، شبکه ی گره ی 5 در 9

شکل 2: نماد گره‌ی Triquetra روی یکی از کتیبه‌های سلتیک

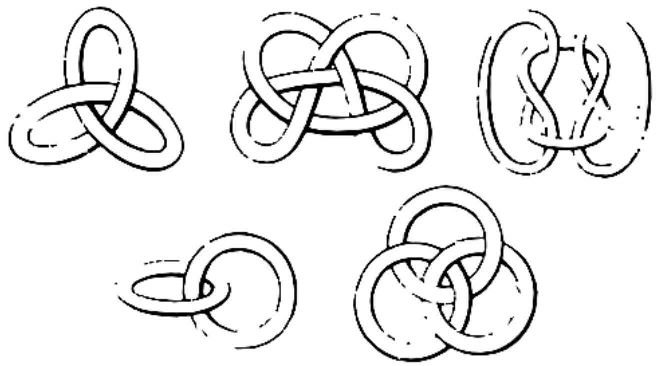
شکل3 گره های بافت لباس مونالیزا



شکل 4: یکی از طرح های گره ی داوینچی

1.2. فرضیه ی ناموفق ساختار اتم ها

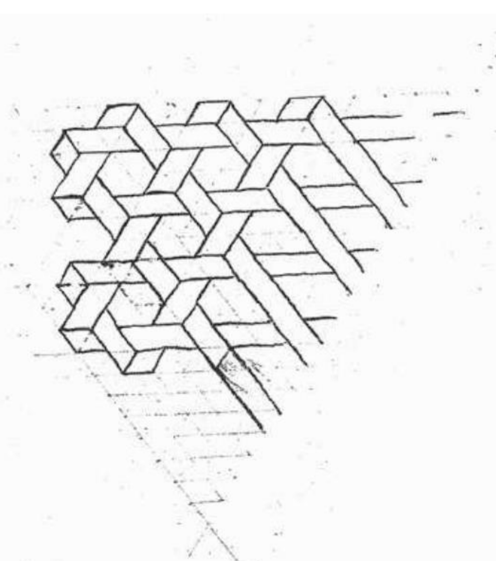
نگاه کردن به گره ها به صورت نظری توسط فیزیکدان ها شروع شد. در اواسط قرن نوزدهم میلادی، این نظریه مطرح بود که جهان از ماده ای به نام اتر به وجود آمده است. برای توجیه انواع مختلف مواد، ویلیام تامسون ایده ی جدیدی برای ساختار اتم ها پیشنهاد داد که ادعا می کرد اتم های مختلف در واقع گره های متمایزی از جنس اتر هستند. با این فرضیه، تعدادی از فیزیکدان ها تلاش کردند یک جدول از همه ی گره های متمایز ارائه کنند، اما این فرضیه بعد از چند سال رد شد. با این حال در این فاصله ریاضیدان ها به بررسی خواص این اشیاء پرداختند و نظریه گره ها بخشی از ریاضیات محض شد. گره های پیدا شده توسط دانشمندان هم، نام گره های اول را گرفتند که مانند اعداد اول، نمی توان آن ها را از ترکیب گره های دیگر ایجاد کرد.



شکل 5:گره های "بسیار ساده"، طراحی های ویلیام تامسون

1.3. شکل گیری نظریه گره ها

گفته می شود گاوس از اولین افرادی بود که به مطالعه ریاضیاتی گره ها پرداخت. گاوس عدد پیوند گره ها را با استفاده از انتگرال گاوس تعریف کرد. مدتی پس از آن، توجه ماکسول به کارهای تامسون و گاوس در رابطه با گره ها جلب شد و این آغازی برای نظریه ی گره های کنونی شد



شکل :6 الگوی گره در یادداشت های گاوس

two closed curves and r the distance between them and if $l\ m\ n$, $\lambda\ \mu\ \nu$, and $L\ M\ N$ are the direction cosines of ds $d\sigma$ & r respectively

then $\iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2} \begin{vmatrix} L & M & N \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$

$= \iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2} \left[\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2}\right)\left(1 - \frac{dr^2}{d\sigma^2}\right) - \left(r \frac{d^2 r}{ds\,d\sigma}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$= 4\pi n$

the integration being extended round both curves and n being the algebraical number of times ~~that~~ one curve embraces the other in the same direction.

If the curves are not linked together $n = 0$ but if $n = 0$ the curves are not necessarily independent

1 2 3

In fig 1 the two closed curves are inseparable but $n = 0$. In fig 2 the 3 closed curves are inseparable but $n = 0$ for every pair of them

Fig 3 is the simplest knot on a single curve. The simplest equation I can find for it is $r = b + a\cos\frac{3}{2}\theta \quad z = c\sin\frac{3}{2}\theta$

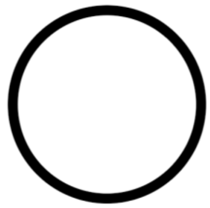
when c is $-$ve as in the figure the knot is righthanded when c is $+$ve it is lefthanded. A righthanded knot cannot be changed into a lefthanded one

شکل 7: نامه ای از ماکسول، اشاره به روش انتگرال گاوس

2. تعاریف اولیه

2.1. تعریف: گره

در ریاضیات، گره را می توان به صورت یک رشته ی نخ بسته تصور کرد، با این تفاوت که این نخ، ضخامت ندارد و سطح مقطعش یک نقطه است. در واقع گره یک منحنی بسته در فضا است که خودش را قطع نمی کند.



شکل 8 : گره ی بدیهی

2.2. تعریف: تصویر گره

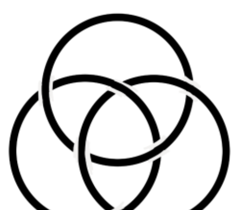
تصویر گره، تجسم آن روی فضای دو بعدی است. تقاطع های گره را با قرار دادن تکه های نخ در سطح های متفاوت مشخص می کنیم.

شکل9 : تصویر گره

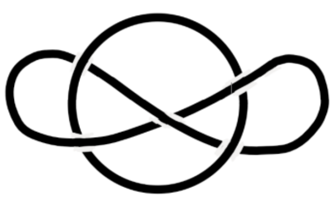
*شکل 10: تصویر **گره ی Trefoil***

2.3. تعریف: لینک

پیوند تعدادی گره به طوری که یکدیگر را قطع نکنند، یک لینک است. تعداد گره هایی که یک لینک را می سازند را تعداد مولفه های آن لینک می گوییم. یک لینک با تنها یک مولفه همان گره است.



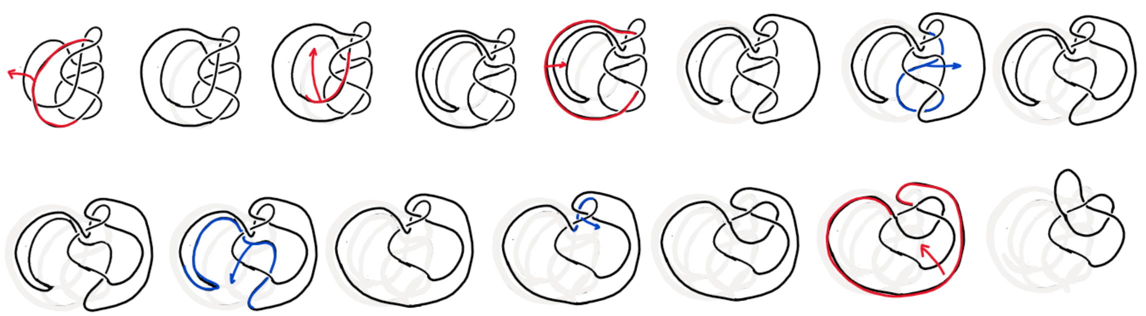
*شکل11 : **حلقه های Borromean***



*شکل 12: **لینک Whitehead***

2.4.   تعریف: هم ارزی

دو تصویر گره (یا پیوند) هم ارزند اگر بتوان با تغییر شکل یکی به دیگری رسید.



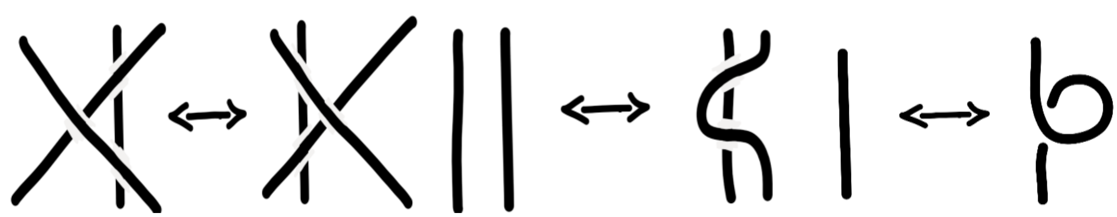
شکل 13: هم ارزی

در شکل های بالا، تصویر گره ی بالا-چپ طی مراحلی به گره ی Trefoil تبدیل شده است، درنتیجه این دو تصویر هم ارزند و هردو نشان دهنده ی گره ی Trefoil هستند.

2.5.   حرکات Reidemeister

یک حرکت رایدمایستر، یکی از سه حرکت زیر است که با آن، تصویر یک گره را تغییر شکل می دهیم. این حرکات روی تقاطع ها و روابط بینشان تاثیر می گذارند.

با حرکت نوع یک (I) می توان یک «پیچش» در گره ایجاد کرد یا یک پیچش را از بین برد، با حرکت نوع دو (II) می توان دو تقاطع به گره اضافه کرد یا دو تقاطع کم کرد و با حرکت نوع سه (III) می توان یک رشته را از رو یا زیر یک تقاطع رد کرد.



شکل 14 : حرکت نوع یک   شکل 15 : حرکت نوع دو   شکل 16: حرکت نوع سه

بنابراین، اگر با استفاده از حرکات رایدمایستر بتوانیم از یک تصویر گره به تصویر دیگری برسیم، این دو با هم، هم ارزند، اما چون کرانی برای تعداد حرکات لازم برای رسیدن از یک گره به گره ی دیگر نداریم، این حرکات به تنهایی نمی توانند به ما برای اثبات هم ارز نبودن دو گره کمک کنند.

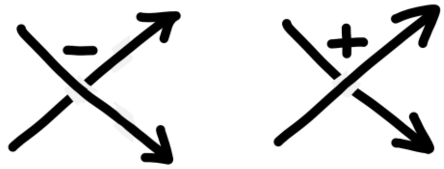
3. ناورداهای گره ها

3.1.   تعریف: ناوردا

در ریاضیات، ناوردا یک ویژگی از یک شی است که طی تغییرات معینی، ثابت می ماند. در اینجا، درباره ی گره ها تعدادی ناوردا را بررسی می کنیم که طی حرکات رایدمایستر ثابت می مانند و از آن ها برای اثبات عدم هم ارزی برخی دسته های گروه ها استفاده خواهیم کرد.

3.2. عدد پیوند

برای به دست آوردن **عدد پیوند** یک لینک، آن را «جهت دار» می کنیم. به این صورت که برای هر مولفه از لینک، یک جهت تعیین میکنیم و به ازای هر تقاطع بین دو مولفه ی متمایز M, N ، به تقاطع عدد $+1$ یا -1 اختصاص می دهیم. عدد پیوند این لینک برابر می شود با جمع عدد همه ی تقاطع هایش.

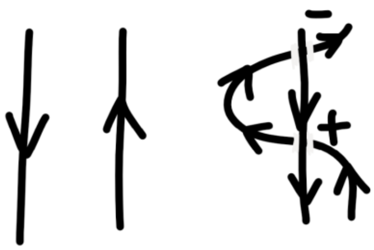


شکل 17: اگر جهت رشته ها را مانند شکل قرار دهیم و رشته ی روگذر شیب مثبت داشته باشد، عدد تقاطع مثبت است و در غیر این صورت منفی است.

ثابت می کنیم عدد پیوند یک لینک با حرکات رایدمایستر تغییر نمی کند.

گزاره: عدد پیوند تحت حرکات رایدمایستر ناوردا است.

اثبات: حرکت نوع یک در یک مولفه انجام می شود پس به تقاطعش عددی اختصاص نداده ایم. بنابراین، با ایجاد پیچش یا از بین بردنش عدد پیوند عوض نمی شود. در حرکت نوع دو، دو تقاطعی که ایجاد یا حذف می شوند اعداد قرینه دارند، پس در جمع نهایی تاثیری نمی گذارند. در حرکت نوع سه هم همین ویژگی وجود دارد. ■



شکل18 : تاثیر حرکت نوع دو بر عدد پیوند

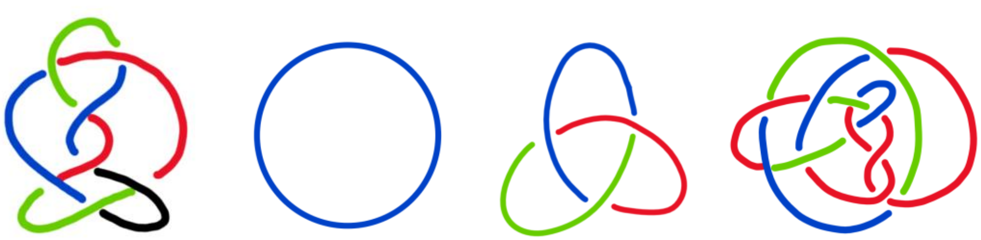
شکل 19: تاثیر حرکت نوع سه بر عدد پیوند

3.3. سه رنگ پذیری

با استفاده از عدد پیوند می توانیم برخی لینک ها را از یکدیگر متمایز کنیم. حال خاصیتی را معرفی میکنیم که در گره ها تمایز ایجاد کنیم. یک **رشته** از گره، یک بخش از تصویر گره است که دو انتهایش زیرگذر باشند و در طولش فقط روگذر باشد.

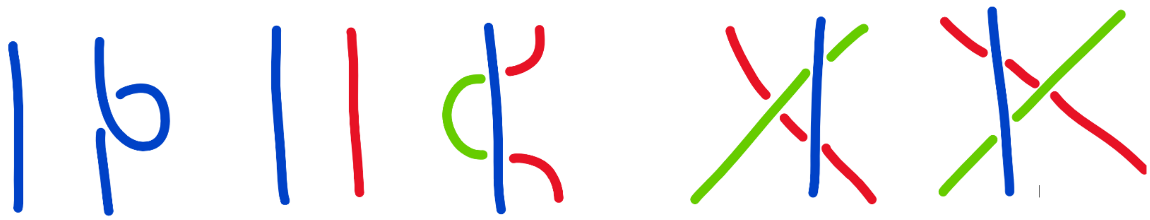
یک گره **سه رنگ پذیر** است اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

- هر رشته از گره با یک رنگ رنگ شده باشد.
- حداقل دو رنگ در کل گره استفاده شده باشد.
- در هر تقاطع، یا همه ی رشته ها هم رنگ باشند یا رنگ هرسه متفاوت باشد.



شکل20 : دوگره ی سه رنگ پذیر و دوگره ی سه رنگ ناپذیر

گزاره: سه رنگ پذیری تحت حرکات رایدمایستر ناوردا است.
اثبات: در حرکت نوع یک، رنگی را تغییر نمی دهیم. تقاطع ایجاد شده خاصیت سه رنگ پذیری را حفظ می کند چون تعداد رنگ های گره قبل و بعد از حرکت تغییر نمی کند. در حرکت نوع دو و سه اگر تقاطع هم رنگ داشته باشیم، با این حرکت تغییری در آن ایجاد نمی شود و سه رنگ پذیری هم حفظ می شود. اگر تقاطع سه رنگ باشد طبق شکل ها عمل میکنیم و رشته ی ایجاد شده رنگ جدید میگیرد یا رنگ رشته ی حذف شده حذف می شود و سه رنگ پذیری حفظ می شود.■



شکل 21: تاثیر حرکات رایدمایستر بر سه رنگ پذیری

با استفاده از سه رنگ پذیری، می توان ثابت کرد دو گره ی سمت راست شکل 20 با دو گره ی دیگر متفاوت اند. به طور کلی هر دو لینکی که یکی سه رنگ پذیر باشد و دیگری نباشد به هیچ عنوان هم ارز نیستند، اما با این ناوردا برای حالت های دیگر نمی توان نتیجه گیری ای کرد.

3.4. چندجمله ای براکت

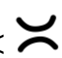
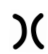
چندجمله ای براکت یک ناوردا نیست، ولی از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. در اینجا، فرآیندی را برای به دست آوردن چندجمله ای براکت پیش می بریم که با توجه به خواصی که از چندجمله ای انتظار داریم، ما را به آن برساند. برای شروع، می خواهیم چندجمله ای گره ی بدیهی برابر 1 باشد.

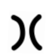
قانون اول:

$$< \bigcirc > = 1$$

سپس، می خواهیم یک روش برای «ساده کردن» لینک ها داشته باشیم. برای یک تصویر، یک تقاطع را یک بار به صورت افقی و یک بار به صورت عمودی باز میکنیم به طوری که گره های جدید دقیقا یک تقاطع کمتر داشته باشند. بین گره ی اولیه و این دو گره ی جدید یک رابطه ی خطی تعریف می کنیم. فعلا فرض می کنیم ضریبهای دو گره ی جدید A, B باشد.

قانون دوم:

$<$  $> = A <$  $> + B <$  $>$

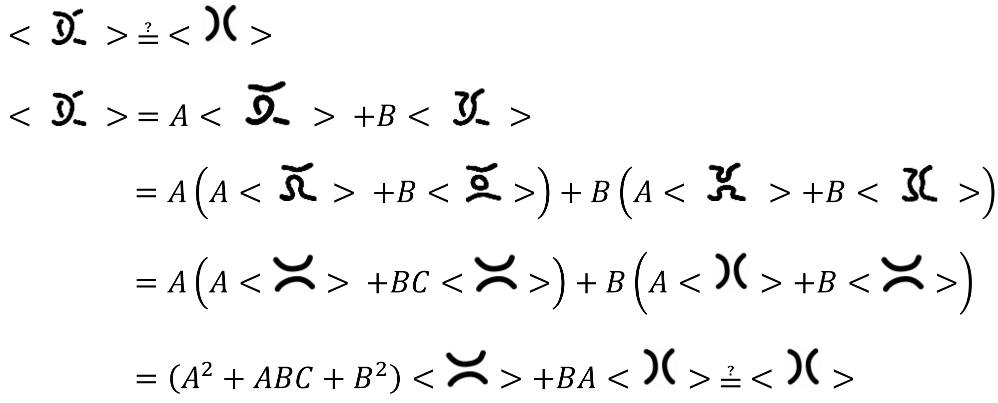
$<$  $> = A <$  $> + B <$  $>$

در نهایت، می خواهیم اضافه کردن یک گره ی بدیهی به یک لینک(گره ی بدیهی جدا از بقیه ی لینک قرار می گیرد)، مقدار چندجمله ای جدید ضریبی از چندجمله ای اولیه باشد. این ضریب را فعلا C در نظر می گیریم و لینک اولیه را با L نشان می دهیم.

قانون سوم:

$$< L \cup \bigcirc > = C < L >$$

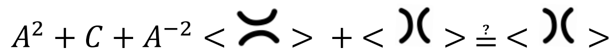
حال، حرکت دوم رایدمایستر را در چندجمله ای بررسی میکنیم.



به این صورت می توان نتیجه گرفت که برای برقراری تساوی باید داشته باشیم

$$B = A^{-1}$$

که چون متغیرها را مستقل از هم تعریف کرده بودیم، مشکلی ایجاد نمی کند. با قرار دادن A^{-1} به جای B، داریم:

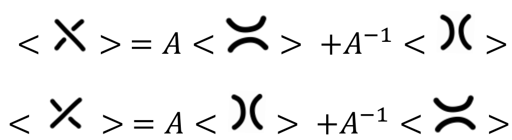


در نتیجه باید تساوی زیر هم برقرار باشد.

$$C = -A^2 - A^{-2}$$

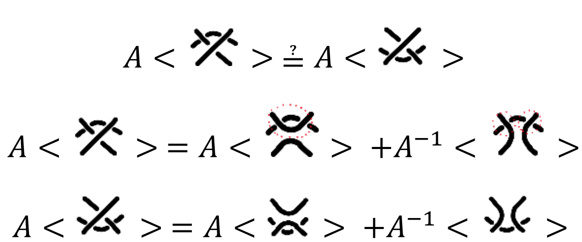
که باز هم مشکلی ایجاد نمی شود. حال قوانین را بر حسب A مینویسیم:

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$



$$\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$$

اکنون که چندجمله ای تحت حرکت نوع دو ناوردا شد، به دنبال آن ثابت میکنیم که چند جمله ای تحت حرکت نوع سه هم ناوردا است. کافی است در تقاطع های مشخص شده در عبارات خط دوم، حرکت دوم را اعمال کنیم تا به عبارت خط سوم برسیم. حالتی که رشته ی حرکت کننده روگذر باشد هم دقیقا به همین شکل است.



در نتیجه، چندجمله ای براکت تحت حرکات دو و سه رایدمایستر ناوردا است.

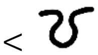
درنهایت، حرکت اول را بررسی می کنیم که چندجمله ای تحت آن تغییر می کند. سپس راهی ارائه می کنیم که این مشکل را حل کند. همان طور که می بینیم، پیچ دادن یک رشته به چپ یا راست چندجمله ای های متفاوتی ایجاد می کند.

$A <$  $> = A <$  $> + A^{-1} <$  $>$

$= A(-A^2 - A^{-2}) <$  $> + A^{-1} <$  $>$

$= -A^3 <$ — $>$

$A <$  $> = A <$  $> + A^{-1} <$  $>$

$= A^{-1} <$  $> + A(-A^2 - A^{-2}) <$  $>$

$= -A^{-3} <$ — $>$

با این حال، می توانیم با ایجاد تغییراتی، از چندجمله ای براکت استفاده کنیم و یک ناوردای گره تعریف کنیم. برای این کار ابتدا مفهوم پیچ خوردگی را تعریف می کنیم.

3.5. تعریف: پیچ خوردگی

اگر لینک L را جهت دار کنیم و همه ی تقاطع ها (لزوما نباید بین دو مولفه متفاوت باشد) را مشابه 3.2 عدد گذاری کنیم، پیچ خوردگی این لینک برابر با جمع عدد همه ی تقاطع ها است و آن را با $w(L)$ نمایش می دهیم.

حرکت های دوم و سوم رایدمایستر تغییری در پیچ خوردگی لینک ایجاد نمی کنند، اما هر حرکت رایدمایستر اول، $w(L)$ را به اندازه ± 1 تغییر می دهد. بنابراین پیچ خوردگی یک ناوردای گره نیست، اما از آن برای تعریف یکی از مهم ترین ناورداهای گره استفاده می کنیم.

3.6. چندجمله ای Jones

چندجمله ای $X(L)$ را با استفاده از چندجمله ای براکت و پیچ خوردگی به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} < L >$$

گزاره: چندجمله ای $X(L)$ تحت حرکات رایدمایستر ناوردا است.

اثبات: قبلا در 3.4 و 3.5 ثابت کردیم که براکت و پیچ خوردگی تحت حرکات دوم و سوم ناوردا اند. پس کافی است ثابت کنیم $X(L)$ تحت حرکت اول ناوردا است.

وقتی یک بار حرکت اول را اعمال میکنیم و به لینک جدید L' می رسیم، اگر مقدار $w(L)$ به اندازه $+1$ تغییر کند، براکت ضرب در $-A^3$ می شود و تاثیر یکدیگر را به نوعی خنثی میکنند. داریم:

$$X(L') = (-A^3)^{-w(L')} < L' >$$

$$= (-A^3)^{-(w(L)+1)}((-A^3) < L >)$$

$$= (-A^3)^{-w(L)} < L > = X(L)$$

به همین شکل، وقتی در لینک جدید مقدار $w(L)$ یکی کم شده باشد براکت ضرب در مقدار قرینه ی حالت قبل می شود و به همین نتیجه می رسیم. بنابراین چندجمله ای به دست آمده تحت همه ی حرکات رایدمایستر ناوردا است.■

حال، در $X(L)$ جایگذاری $A = t^{-\frac{1}{4}}$ را انجام می دهیم و به چندجمله ای جونز می رسیم.

بنابراین **چندجمله ای جونز** یک ناوردای گره است و برای یک لینک L به شکل زیر است.

$$V(L) = \left(-t^{-\frac{1}{4}}\right)^{-w(L)} < L >$$

چندجمله ای جونز بسیار در تشخیص کلاس های هم ارزی گره ها کارآیی دارد. ثابت شده که برای همه ی گره های اول متمایز دارای 1 تا 9 تقاطع، این فرمول یک چندجمله ای متفاوت ایجاد می کند. با این حال، یک از سوالات حل نشده تا کنون، وجود تصویری از یک گره ی غیر بدیهی است که چندجمله ای جونزش با چندجمله ای گره ی بدیهی برابر شود.

همچنین، دو گره ی متمایز توسط موراساگی ارائه شد که چندجمله ای جونز یکسان $(t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)^2$ دارند.

شکل 22: گره های موراساگی

هر یک از ناورداهایی که معرفی کردیم به روشی، در تمییز گره ها و لینک ها از هم به ما کمک می کنند، اما چرا نیاز داریم که گره های هم ارز و غیر هم ارز را از هم تشخیص دهیم؟ این کار، در شاخه های مختلف علم کاربردهایی دارد که اکنون به آن ها می پردازیم.

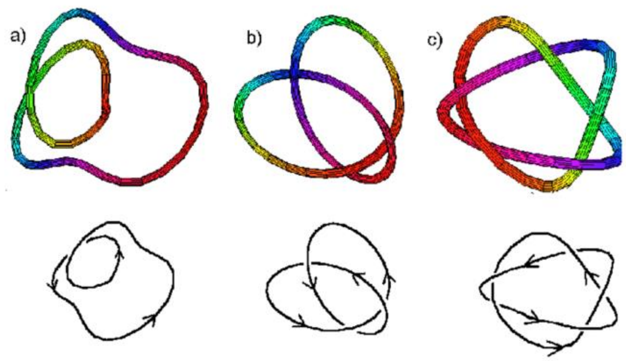
4. کاربرد گره ها در علوم مختلف

4.1. زیست شناسی

DNA ماده ژنتیکی سلول ها و حاوی اطلاعات کدگذاری شده در مورد پروسه های سلولی و مولکولی است. دی ان ای از دو رشته تشکیل شده که دور هم پیچیده شده اند. در یک تقسیم سلولی، دی ان ای کپی می شود و به سلول های دختر منتقل می شود. فرم دی ان ای بصورت دو رشته ی بسیار بلند است که میلیون ها بار در هم پیچیده شده و گره خورده اند. برای تکثیر و رونویسی دی ان ای به شکل مرتب و بدون گره تبدیل می شود تا اطلاعات به راحتی انتقال پیدا کند آنزیم هایی وجود دارند که هر گره را می شکافند و بعد از رونویسی، رشته ها را به شکلی منظم به هم وصل می کنند.

برای درک بهتر نحوه ی پیچش رشته های دی ان ای و مطالعه ی آنزیم های ذکر شده، از توپولوژی و بطور خاص نظریه گره ها استفاده می شود. با در نظر گرفتن دی ان ای به عنوان یک گره، می توانیم از نظریه گره ها برای تخمین میزان «سختی» باز کردن آن استفاده کنیم. این کار اطلاعاتی درباره ی خواص آنزیم ها هم به ما می دهد.

به عنوان مثال دو دانشمند به نام براون و کزارلی برای مطالعه نقش نوعی از آنزیم های توپوایزومراز در بسته بندی دی ان ای باکتری های ای کولای از نظریه گره ها استفاده کردند.



شکل 23گره ها در دی ان ای

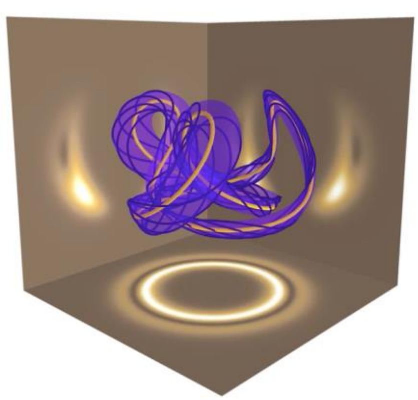
این دو دانشمند، در طی زمان پیچ خوردگی دی ان ای را محاسبه کردند و متوجه شدند که در طول تاثیر آنزیم بر دی ان ای، پیچ خوردگی آن به طور متناوب کاهش می یابد. در نهایت، به این نتیجه رسیدند که این آنزیم، هر چند وقت یک بار مارپیچ دی ان ای را برش می دهد و دوباره تعدادی از انتها ها را به هم می چسباند به طوری که رشته های زیرگذر به روگذر تبدیل می شوند و برعکس. در طی این فرآیند، آنزیم هر رشته ی بریده شده از دی ان ای را به شکلی مشابه گره ی بدیهی در می آورد. با مشاهده ی روش کار این آنزیم، محققان ممکن است بتوانند عملکرد این آنزیم ها را در داروسازی تکرار کنند و به درمان های جدیدی برای مبارزه با سرطان برسند.

4.2. فیزیک

میدان های الکترومغناطیسی، از تاثیرات متقابل دو میدان الکتریکی و مغناطیسی بر هم ایجاد می شود. برخی از این خطوط میدان تشکیل خم های بسته می دهند. وجود خمهای بسته، مسئله ی وجود خطوطی از میدان به صورت گره را پیش می آورد. در واقع، این گره هل وجود دارند ولی معمولا در برخورد با خودشان، یا در شرایط مختلف دیگر این گره ها به وجود می آیند و از بین می روند. در سیستم های مختلف، گره های مختلفی می توانند ایجاد شوند و برخی سیستم ها ممکن است محدود به انواع خاصی از گره ها باشند. با مطالعه ی خواص این گره ها، فیزکدانان می توانند درباره ی انتقال یک گره از یک سیستم به پلاسما مطالعه کنند و حتی اطلاعاتی از سطح خورشید (پلاسما) به دست آورند که در آزمایشگاه قابل دسترسی نیست.

حدود صد سال پیش، فیزیکدان هنری بیتمن روشی برای ساختن یک گره ی پایدار در یک میدان ارائه داد که مانند یک ماشین به ازای یک تابع مختلط بعنوان ورودی، یک میدان الکترومغناطیسی خروجی می دهد که گره ی پایدار دارد.

در یکی از پژوهش های چند سال اخیر، بنجامین بود با استفاده از ویژگی های توپولوژیکی گره ها، آنالیز مختلط و ساختار هنری بیتمن ، ثابت کرد که برای هر لینک دلخواه، یک تابع مختلط با شرایط لازم وجود دارد که با استفاده از ساختار بیتمن، به ما میدانی را می دهد که این لینک در آن پایدار است. به این صورت، نظریه ای که از فیزیک نشأت یافته بود بعد از حدود 300 سال دوباره در فیزیک کارآیی پیدا کرد.



شکل 24: یک میدان الکترومغناطیسی در فضای سه بعدی، شامل دو مجموعه ی نارنجی و آبی از خطوط میدان. گره ی Trefoil

5. نتیجه گیری

گره به عنوان یک شیء مجرد و بخشی از ریاضیات محض، خواص جالب و شگفت انگیزی دارد که به فیلد های دیگر ریاضیات هم مشابه اند. یکی از زیبایی های ریاضیات، مطالعه و درک پیچیدگی های مفاهیم انتزاعی بدون اهمیت دادن به کاربردهایش است. با این حال، کاربردهایش در حال توسعه ی روز افزون است و بخش پویایی از علم روز را تشکیل می دهد.

6. منابع

The Knot Book, Collin C. Adams

Knot Theory and Its Applications, Kunio Murasagi

Knots, J´ozef H. Przytycki

https://www.mdpi.com/2073-8994/4/2/302#fig_body_display_symmetry-04-00302-f001

https://www.prnewswire.com/news-releases/the-knot-pattern-found-on-the-earlier-version-mona-lisa-is-not-by-the-hand-of-leonardo-da-vinci-300982612.html

https://www.academia.edu/72406066/Leonardos_Secret_Signatures_Knots_and_Bows

http://leonardosknots.com/leonardosknots.html

https://www.commonwealthclub.org/events/archive/podcast/leonardos-knots

https://link.springer.com/article/10.1007/BF03024400

https://www.math.ucla.edu/~radko/191.1.05w/erin.pdf

https://math.mit.edu/research/highschool/primes/circle/documents/2020/Ayinon_2020.pdf

https://link.springer.com/article/10.1007/s00220-021-04219-3

https://www.quantamagazine.org/december-3-2014-learning-to-move-20131209/