NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)
TẠ VĂN ĐĨNH – NGUYỄN HỒ QUỲNH

TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP HAI

PHÉP TÍNH GIẢI TÍCH MỘT BIẾN SỐ

(Tái bản lần thứ mười)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương 1

SỐ THỰC

Chương này sẽ nhắc lại các khái niệm về tập hợp, ánh xạ và giải thích chi tiết tập hợp các số thực.

1.1. Tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học. Chúng ta đã biết tập hợp các số tự nhiên **N**, tập hợp các số nguyên **Z**, tập hợp các số hữu tỉ **Q**... Ta cũng có thể nói tập hợp các điểm của một đoạn thẳng, tập hợp các đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước...

Khi nói đến một tập hợp ta nghĩ đồng thời đến các *phần tử* của tập đó ; để chỉ a là phần tử của tập hợp A ta viết $a \in A$ và đọc là a *thuộc* A ; để chỉ b không là phần tử của tập hợp A ta viết $b \notin A$ và đọc là b *không thuộc* A.

Để chứng tỏ rằng tập hợp X (gọi tắt là tập X gồm các phần tử x, y, z, ..., ta viết

$$X := \{x, y, z, \ldots\}$$

và như thế, trong biểu thức trên, ở vế phải ta đã liệt kê danh sách các phần tử của X. Việc liệt kê đó có thể là triệt để (liệt kê hết tất cả phần tử của X) nếu số phần tử của X không quá lớn ; việc liệt kê cũng có thể không triệt để (không liệt kê ra hết mọi phần tử của X) nếu số phần tử của X quá lớn, hoặc X có vô số phần tử, khi đó ta phải dùng dấu "..." miễn là không gây hiểu nhầm.

Do đó những trường hợp không thể liệt kê ra hết tất cả các phần tử của một tập hợp, người ta dùng cách sau : Để chỉ tập hợp A gồm tất cả các *phần tử có thuộc tính* σ (tính chất để xác định một phần tử thuộc hay không thuộc tập A) người ta viết :

$$A := \{a \mid a \text{ có thuộc tính } \sigma\}.$$

Tập con

Cho hai tập hợp A và B ; nếu mỗi phần tử của A là phần tử của B thì ta nói rằng A là một *tập con* của B và viết là $A \subseteq B$; nếu A là tập con của B và tập B có ít nhất một phần tử không là phần tử của A thì ta nói rằng A là *tập con thực sự* của B và viết là $A \subset B$.

Cho A, B là hai tập, nói rằng tập A *bằng* tập B và viết là A = B nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

Tập rỗng

Theo quan niệm thông thường, một tập cần có phần tử tạo nên tập đó ; tuy nhiên, trong toán học, để tiện cho việc lập luận người ta chấp nhận khái niệm *tập rỗng* viết là ∅, là tập không chứa phần tử nào. Người ta quy ước ∅ là tập con của bất kì tập A nào, $\varnothing \subseteq A$. Cần phân biệt $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Các kí hiệu lôgic

Để diễn đạt thuận lợi các lập luận toán học người ta hay sử dung các kí hiệu lôgic, ở đây chúng ta cũng nêu một số kí hiệu thường dùng và đơn giản nhất.

Nếu ta không để ý đến nội dung của một mệnh đề nào đó mà chỉ chú ý đến mối liên quan của nó với các mệnh đề khác thì ta có thể kí hiệu mệnh đề đó bởi một chữ. Chẳng hạn, kí hiệu "$\alpha \Rightarrow \beta$" được hiểu là "từ mệnh đề α suy ra mệnh đề β", kí hiệu "$\alpha \Leftrightarrow \beta$" được hiểu là "từ mệnh đề α suy ra mệnh đề β và ngược lại, từ mệnh đề β suy ra mệnh đề α" hay nói khác đi "mệnh đề α và mệnh đề β tương đương với nhau".

Bây giờ, giả sử A là một tập và t là một tính chất nào đó của những phần tử của A. Gọi C(t) là tập tất cả những phần tử của A có tính chất t, nghĩa là

$$C(t) := \{x \in A \mid x \text{ có tính chất } t\}.$$

Khi đó, nếu

• $C(t) = A$ thì mọi phần tử của A đều có tính chất t, và ta nói rằng "*Với mọi* $x \in A$, x có tính chất t" và ta viết $\forall x \in A : t(x)$; kí hiệu $\forall$ gọi là kí hiệu phổ biến (đó là chữ A viết ngược, từ chữ All (tiếng Anh)).

• $C(t) \neq \varnothing$ thì có ít nhất một phần tử x của A có tính chất t ; ta nói rằng "*Tồn tại* một phần tử $x \in A$, x có tính chất t" và viết $\exists x \in A : t(x)$, kí hiệu $\exists$ gọi là kí hiệu tồn tại (đó là chữ E viết ngược, từ chữ EXISTENCE (tiếng Anh)).

Giao của hai tập

Cho A, B là hai tập, gọi *giao* của A và B, viết là $A \cap B$ và đọc là "A giao B", là tập định nghĩa bởi :

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Hợp của hai tập

Gọi *hợp* của tập A và tập B, viết là $A \cup B$ và đọc là "A hợp B" là tập định nghĩa bởi :

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Bổ sung

Gọi *bổ sung* của B trong A ($B \subseteq A$), viết là C_AB là tập định nghĩa bởi :

$$C_AB := \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Phép giao, hợp và bổ sung thoả các tính chất sau :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$C_A(B_1 \cup B_2) = C_A B_1 \cap C_A B_2$$

$$C_A(B_1 \cap B_2) = C_A B_1 \cup C_A B_2.$$

Tích Đềcác

Cho hai tập A, B không rỗng, với mỗi $a \in A$ và mỗi $b \in B$, ta lập cặp (a, b) gọi là một cặp sắp thứ tự (viết phần tử $a \in A$ trước và phần tử $b \in B$ sau) ; *tích Đềcác* của A và B, kí hiệu là $A \times B$ và đọc là "A tích Đềcác B", là tập được định nghĩa bởi $A \times B := \{(a, b) : a \in A ; b \in B\}$.

Tập nghiệm

Một mệnh đề thuộc loại "... là thủ đô nước Việt Nam" được gọi là một *mệnh đề mở*. Mệnh đề này không đúng mà cũng không sai. Trong mệnh đề trên, nếu ta điền vào chỗ trống các từ "Hà Nội" thì được một mệnh đề đúng ; còn nếu điền vào chỗ trống các từ "Hải Phòng" thì được một mệnh đề sai.

Nói chung, trong toán học, các mệnh đề mở có dạng các phương trình hay bất phương trình. Chẳng hạn, mệnh đề

$$x + 3 = 9$$

là một mệnh đề mở, được gọi là *phương trình*, và mệnh đề

$$x + 3 < 9$$

cũng là một mệnh đề mở, được gọi là một *bất phương trình*. Trong mỗi mệnh đề trên, chữ x là một kí hiệu chỉ một số chưa định rõ và nếu thay x bởi một số cụ thể nào đó có thể làm cho mệnh đề đúng hoặc sai. Kí hiệu x được gọi là *một biến* (ẩn). Tập mọi giá trị của biến sao cho khi thay các giá trị đó vào phương trình hoặc bất phương trình thì các phương trình đó, bất phương trình đó có nghĩa, được gọi là *miền* của biến. *Tập nghiệm* của một phương trình hay bất phương trình là tập mọi phần tử của miền của biến khi thay vào mệnh đề mở thì mệnh đề đó đúng. Chẳng hạn nếu miền của biến x là tập các số nguyên dương thì tập nghiệm của phương trình

$$x + 3 = 9$$

là tập $\{6\}$, còn tập nghiệm của phương trình

$$x + 3 = 2$$

là tập rỗng $\varnothing$.

Bây giờ, nếu lấy miền của biến là tập các số nguyên thì tập $\{6\}$ là tập nghiệm của phương trình $x + 3 = 9$, còn tập $\{-1\}$ là tập nghiệm của phương trình $x + 3 = 2$. Như thế tập nghiệm của một mệnh đề mở phụ thuộc vào tập miền biến và cùng một mệnh đề mở có thể có nhiều miền biến khác nhau.

Ánh xạ

Cho hai tập E và F ; ta gọi một *ánh xạ* f từ E sang F và viết là $f : E \to F$, là *một quy tắc* làm ứng *mỗi phần tử* của E với *một phần tử xác định* của F, E được gọi là *tập gốc* (hoặc tập nguồn) và F được gọi là *tập ảnh* (hoặc tập đích) ; phần tử $y \in F$ ứng với phần tử $x \in E$ được gọi là *ảnh* của x qua ánh xạ f và viết $y = f(x)$, cũng đọc là $y = f(x)$, và để chỉ rõ quy tắc làm ứng x với y ta viết $x \mapsto f(x)$.

Ánh xạ f được gọi là *đơn ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *nhiều nhất* một nghiệm $x \in E$, với mọi $y \in F$.

Ánh xạ f được gọi là *toàn ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *ít nhất* một nghiệm $x \in E$ với mọi $y \in F$.

Ánh xạ f được gọi là *song ánh* nếu phương trình $f(x) = y$ có *một nghiệm duy nhất* $x \in E$ với mọi $y \in F$. Một song ánh là một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Hai tập A và B được gọi là *tương đương* với nhau, viết là "$A \backsim B$" nếu tồn tại một song ánh $f : A \to B$.

Cho tập $I := \{1, 2, ..., n\}$, bất kì một tập X nào tương đương với I cũng được gọi là một tập *hữu hạn* (có số phần tử là hữu hạn và bằng n), khi đó ta viết card (X) = n. Gọi **N** là tập các số tự nhiên, bất kì một tập X nào tương đương với **N** cũng gọi là một tập *đếm được*, ta viết card (**N**) = card (X) ; (có thể hiểu là số các phần tử của X bằng số các phần tử của **N**).

1.2. Tập các số thực

Chúng ta đã biết tập các số tự nhiên **N** :

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

Để mở rộng lớp nghiệm phương trình $x + n = 0$, $n \in \mathbf{N}$, ta đưa thêm tập các số nguyên **Z** :

$$\mathbf{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$$

Để mở rộng lớp nghiệm phương trình $mx + n = 0$; $m, n \in \mathbf{Z}$ được đưa thêm tập các số hữu tỉ **Q** :

$$\mathbf{Q} := \{x : x = \frac{m}{n} ; n \neq 0 ; m, n \in \mathbf{Z} ; m, n \text{ chỉ có ước chung là } \pm 1\}$$

và dĩ nhiên ta có bao hàm thức kép

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

Tuy nhiên người ta có thể chứng minh được rằng $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$; $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$; nghĩa là cả **Z**, lẫn **Q** đều là những tập *đếm được*.

Bây giờ để chứng tỏ rằng tập các số hữu tỉ cũng còn quá hẹp, ta xét nghiệm dương của phương trình $x^2 = 2$, và ta có $x = \sqrt{2}$; số $\sqrt{2}$ không phải là có một số hữu tỉ. Ta chứng minh điều này bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ ; khi đó $\sqrt{2}$ có dạng :

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} ; m, n \in \mathbf{N} ;$$

với m và n chỉ có ước số chung là 1 và −1.

Vì cả hai vế của phương trình trên đều dương nên suy ra phương trình tương đương $m^2 = 2n^2$. Do đó m^2 chia hết cho 2 ; vì thế m chia hết cho 2, và ta có thể viết m = 2p ; do đó $4p^2 = 2n^2$, nghĩa là $n^2 = 2p^2$. Cũng lập luận như trên n cũng chia hết cho 2 và như thế m và n cùng có ước số chung là 2 và điều đó mâu thuẫn với giả thiết, vậy $\sqrt{2}$ không thể là một số hữu tỉ, ta nói rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Hơn nữa, có thể chứng minh được rằng nếu n là một số nguyên dương, không là số chính phương, nghĩa là n không là bình phương của một số nguyên k nào thì $\sqrt{n}$ cũng là một số vô tỉ. Chẳng hạn $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ là những số vô tỉ. Tập các số hữu tỉ và các số vô tỉ được gọi là tập các số thực và kí hiệu là **R**.

Để dễ phân biệt số vô tỉ và số hữu tỉ chúng ta đưa thêm khái niệm về số thập phân.

1.2.1. *Số thập phân*

Xét các số hữu tỉ $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; ta có thể viết các số đó dưới dạng số thập phân

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

$$\frac{1}{4} = 0,25$$

và ta nói rằng số hữu tỉ $\frac{1}{4}$ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân *hữu hạn* và số hữu tỉ $\frac{1}{3}$ được biểu diễn dưới dạng số thập phân *vô hạn tuần hoàn*. Nói rằng $\frac{1}{4}$ là số thập phân hữu hạn vì khi biểu diễn $\frac{1}{4} = 0,25$ ta có thể kết thúc ngay ở số 5 ; trong khi $\frac{1}{3}$ là một số thập phân vô hạn tuần hoàn vì khi biểu diễn $\frac{1}{3} = 0,333...$ ta có thể viết thêm bao nhiêu số 3 nữa vẫn chưa biểu diễn đúng hẳn được số $\frac{1}{3}$, nhưng nếu muốn kéo dài con số 3 đến bao nhiêu cũng viết được. Cũng như thế, có thể viết

$$\frac{1}{7} = 0,1428571...$$

Ở đây, sau con số 1 (số sau dấu phảy thứ 7) ta viết dấu "..." vì nếu muốn viết thêm bao nhiêu số sau dấu phẩy cũng được, chẳng hạn có thể viết :

$$\frac{1}{7} = 0,14285714285714...$$

và như thế trong biểu diễn dạng thập phân của $\frac{1}{7}$, các số 142857 được lập lại theo thứ tự đó bao nhiêu lần tuỳ ý... và nếu ta muốn dừng lại ở số mấy cũng được miễn là đã biểu diễn đầy đủ các số 142857 vì biết đầy đủ 6 con số này tức là biết *quy tắc tuần hoàn* của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,1428571... = \frac{1}{7}$.

Người ta có thể chứng minh rằng *bất kì một số hữu tỉ* nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân *hữu hạn* hay *vô hạn tuần hoàn*. Với số vô tỉ thì không như thế, người ta cũng chứng minh được rằng bất kì một số vô tỉ nào cũng biểu diễn dưới dạng số thập phân *vô hạn không tuần hoàn*. Chẳng hạn khi ta viết :

$$\sqrt{2} = 1,41...$$

thì ta *không thể* từ biểu diễn thập phân này mà có thể viết thêm các số sau dấu phẩy một cách tuỳ tiện vì không *có quy tắc tuần hoàn* ; nếu viết :

$$\sqrt{2} = 1,41421...$$

thì ta chỉ có thể biết được rằng đó là *biểu diễn xấp xỉ* $\sqrt{2}$ với 5 con số sau dấu phẩy và từ năm con số đó không thể suy diễn để viết tiếp những con số thập phân khác vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, có biểu diễn thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Ngoài ra như định nghĩa ở trên, tập các số thực **R** gồm các số hữu tỉ và số vô tỉ, do vậy ta có bao hàm thức

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Ta cũng đã biết rằng các tập **Z, Q** tương đương với **N** và cả 3 tập đó : tập các số tự nhiên, tập các số nguyên và tập các số hữu tỉ là những tập vô hạn, đếm được ; tập số thực **R** không phải là tập đếm được, và ta nói rằng card (**R**) là continum.

1.2.2. *Trường số thực*

Bây giờ chúng ta định nghĩa tập các số thực **R** như một tập hợp các phần tử, trong đó xác định được một số phép toán và quan hệ có các tính chất được mô tả trong một số tiên đề mà chúng ta thừa nhận. Các tiên đề ấy, trừ tiên đề cận trên đúng, phản ánh những tính chất quen thuộc của số thực mà bạn đọc đã biết từ trường trung học.

Tiên đề về cấu trúc trường(*)

Trong **R** xây dựng được hai luật hợp thành trong là phép cộng (+) và phép nhân (.), thoả mãn các tính chất sau :

1) Phép cộng và phép nhân có tính giao hoán :

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \, . \, b &= b \, . \, a \end{aligned} \qquad \forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$$

2) Phép cộng và phép nhân có tính kết hợp :

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= a + (b + c) \\ (a \, . \, b) \, . \, c &= a \, . \, (b \, . \, c) \end{aligned} \qquad \forall (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$$

(*) Về cấu trúc trường và quan hệ thứ tự, bạn đọc có thể xem thêm ở chương 2 và chương 1 quyển Toán học cao cấp Tập một.

3) Phép nhân có tính phân bố đối với phép cộng :

$$\left.\begin{array}{l} a.(b+c)=a.b+a.c \\ (a+b).c=a.c+b.c \end{array}\right. \qquad \forall(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$$

4) Phép cộng có phần tử trung hoà, kí hiệu là 0 :

$$a + 0 = a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

Phép nhân có phần tử trung hoà, kí hiệu là 1 :

$$a \,.\, 1 = a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

5) Mọi phần tử $a \in \mathbf{R}$ đều có phần tử đối, kí hiệu là $-a$:

$$a + (-a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

Mọi phần tử $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ đều có phần tử nghịch đảo, kí hiệu là a^{-1} : $a \,.\, a^{-1} = 1$

Tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần(*)

Trong **R** xây dựng được quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$, tương thích với cấu trúc trường, nghĩa là

$$x \geq y \text{ tương đương với } x + a \geq y + a \qquad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$x \geq y \text{ tương đương với } \begin{cases} ax \geq ay \text{ nếu } a > 0 \\ ax \leq ay \text{ nếu } a < 0 \end{cases}$$

Tiên đề cận trên đúng (về tính đầy của **R**)

Tập hợp **Q** các số hữu tỉ cũng thoả mãn tiên đề về cấu trúc trường và tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần, tức là **Q** là một trường được sắp thứ tự. Ta cũng biết rằng giữa hai số hữu tỉ a, b, tồn tại một số hữu tỉ thứ ba, chẳng hạn $\frac{a+b}{2}$, do đó giữa hai số hữu tỉ bất kì tồn tại

(*) Về cấu trúc trường và quan hệ thứ tự, bạn đọc có thể xem thêm ở chương 2 và chương 1 quyển Toán học cao cấp Tập một.

vô số số hữu tỉ khác. Tuy nhiên **Q** là một trường sắp thứ tự không đầy, như ta sẽ thấy ở dưới. Do vậy tập **R** các số thực còn thoả mãn tiên đề về tính sắp thứ tự đầy của nó, đó là tiên đề cận trên đúng.

Trước hết ta đưa vào một số định nghĩa.

Định nghĩa 1. Số thực x được gọi là *cận trên* của tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ nếu $\forall a \in A$, $a \le x$. Khi đó ta nói tập hợp A *bị chặn trên*. x được gọi là *cận dưới* của A nếu $\forall a \in A$, $a \ge x$. Khi đó ta nói tập hợp A *bị chặn dưới*. Tập hợp A được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

Định nghĩa 2. Cận trên bé nhất của tập hợp A, nếu có, được gọi là *cận trên đúng* của A, kí hiệu sup A. Cận dưới lớn nhất của A, nếu có, được gọi là *cận dưới đúng* của A. Kí hiệu inf A.

sup A và inf A có thể thuộc A, cũng có thể không thuộc A. Nếu $\sup A \in A$, thì sup A là *phần tử lớn nhất* của A. Kí hiệu max A. Nếu $\inf A \in A$ thì inf A là *phần tử bé nhất* của A. Kí hiệu min A.

Bây giờ ta xét tập hợp $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$. Tập hợp ấy không rỗng, vì $1 \in A$, bị chặn trên vì $\forall x \in A$, $x < 2$. Nhưng tập hợp A không có cận trên đúng thuộc **Q**, dễ thấy rằng $\sup A = \sqrt{2}$, mà $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Với ý nghĩa ấy, ta nói rằng **Q** là một trường sắp thứ tự không đầy.

Tiên đề cận trên đúng : Mọi tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng thuộc **R**.

Từ tiên đề đó, dễ dàng suy ra rằng : Một tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn dưới đều có cận dưới đúng thuộc **R**.

1.2.3. *Trị số tuyệt đối của một số thực*

Người ta gọi trị số tuyệt đối của số thực x là số thực được kí hiệu $|x|$, xác định như sau :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \ge 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Từ đó dễ dàng suy ra các tính chất sau :

(1.2) $|a.b| = |a|.|b|$

(1.3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ với $b \neq 0$.

(1.4) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(1.5) $|a - b| \geq ||a| - |b||$

Thật vậy, chẳng hạn ta chứng minh (1.4). Ta có

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Cộng hai bất đẳng thức kép ấy từng vế một, ta được

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Từ đó suy ra (1.4). Để chứng minh (1.5) ta viết

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

Do đó

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

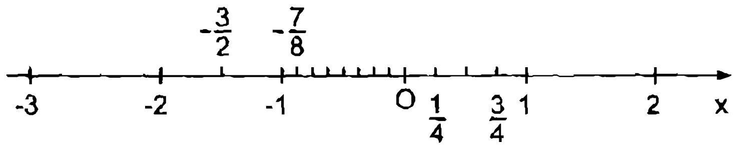
Tương tự

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|. \blacksquare$$

1.2.4. *Trục số thực*

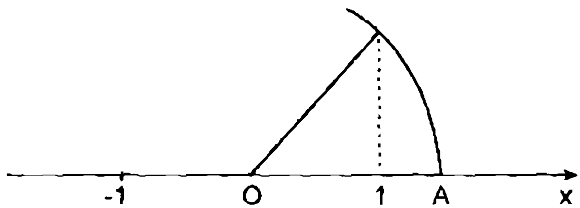
Để biểu diễn hình học tập hợp các số thực **R**, ta xét trục Ox, với O là điểm gốc. Mỗi điểm M trên trục Ox được ứng với số thực x sao cho $\overline{OM} = x$. Mỗi số thực x được ứng với điểm M trên trục Ox sao cho $\overline{OM} = x$. Đó là một song ánh giữa tập hợp **R** và trục Ox. Người ta gọi trục Ox là đường thẳng thực hay trục số thực.

Ảnh của các số $-3, -2, -\dfrac{3}{2}, -1, 0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, 2, 3$ trên Ox được cho ở hình 1.1.



Hình 1.1

Hình 1.2 minh hoạ cách sử dụng định lí Pythagore để xác định ảnh của số vô tỉ $\sqrt{2}$ trên trục Ox.



Hình 1.2. Điểm A ứng với số $\sqrt{2}$

• Ta đưa vào các kí hiệu sau :

$\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$,

$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$, $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+ - \{0\}$, $\mathbf{R}_-^* = \mathbf{R}_- - \{0\}$, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$

Với $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a < b$, ta có các khoảng sau :

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ $\quad$ $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$ $\quad$ $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} : x < a\}$ $\quad$ $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ $\quad$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$

• Trên trục số thực lấy hai điểm x_1, x_2. Người ta gọi khoảng cách giữa hai điểm ấy là số, kí hiệu $d(x_1, x_2)$ được xác định bởi

(1.6) $$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

Như vậy $|x|$ chính là khoảng cách giữa x và 0 :

$$|x| = d(x, 0)$$

Dùng các tính chất của trị số tuyệt đối của số thực, có thể suy ra các tính chất sau đây của khoảng cách :

$$(1.7)\quad \begin{cases} 1)\ d(x, x') \geq 0,\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ \quad d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x',\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ 2)\ d(x, x') = d(x', x),\ \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2 \\ 3)\ d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x'),\ \forall (x, x', x'') \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

• Lấy điểm a trên trục số, r là một số dương. Người ta gọi r – lân cận của điểm a là khoảng kí hiệu v(a, r) được xác định bởi

$$(1.8)\qquad v(a, r) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < r\}$$

1.2.5. *Nguyên lí Archimède*

Định lí 1.1. (Archimède). Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, với mọi $x > 0$ cho trước, luôn tồn tại một số nguyên dương k sao cho $k\varepsilon > x$.

Chứng minh. Ta sẽ dùng lập luận phản chứng. Giả sử điều khẳng định của định lí không đúng, nghĩa là $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n\varepsilon \leq x$. Khi đó tập hợp $E = \{n\varepsilon : n \in \mathbf{N}^*\}$ là một tập hợp trong **R**, không rỗng và bị chặn trên. Theo tiên đề cận trên đúng, tồn tại b = sup E. Vì $b - \varepsilon < b$, $b - \varepsilon$ không là cận trên của E, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_0\varepsilon > b - \varepsilon$ hay $(n_0 + 1)\varepsilon > b$, điều này mâu thuẫn với định nghĩa cận trên đúng của b. Định lí được chứng minh. ■

Hệ quả. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, tồn tại $k \in \mathbf{Z}$ sao cho

$$k \leq x < k + 1$$

Bạn đọc hãy tự chứng minh hệ quả này.

Số k trong hệ quả ấy được gọi là *phần nguyên của x*, kí hiệu E(x).

Định lí 1.2. Giữa hai số thực bất kì luôn tồn tại một số hữu tỉ.

Chứng minh. Giả sử c, d là hai số thực với $c < d$. Vì $d - c > 0$ nên theo định lí 1.1, tồn tại $q \in \mathbf{N}^*$ sao cho $1 < (d - c)q$ hay

(1.9) $$cq + 1 < dq.$$

Mặt khác, theo hệ quả của định lí 1.1, tồn tại $p \in \mathbf{Z}$ sao cho

(1.10) $$p \leq cq + 1 < p + 1$$

Từ (1.9), (1.10) suy ra

$$p - 1 \leq cq < p \leq cq + 1 < dq$$

Từ $cq < p < dq$, ta được

$$c < \frac{p}{q} < d, \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}. \ \blacksquare$$

Hệ quả. Giữa hai số thực bất kì có vô số số hữu tỉ.

1.2.6. *Tập số thực mở rộng*

Ta thêm vào tập $\mathbf{R}$ hai phần tử, kí hiệu là $-\infty$, $+\infty$, đặt $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ và mở rộng các luật hợp thành trong +, . và quan hệ thứ tự $\leq$ vào $\overline{\mathbf{R}}$ như sau :

$$(1.11) \begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}, x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, x + (-\infty) = (-\infty) + x = \\ \qquad = -\infty, (+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_+^*, x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty, x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*, x.(+\infty) = (+\infty).x = -\infty, x.(-\infty) = (-\infty).x = +\infty \\ (+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty, (+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbf{R}, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$\overline{\mathbf{R}}$ được gọi là *tập số thực mở rộng* hay *đường thẳng thực mở rộng*.

Định lí 1.3. Mọi tập hợp A không rỗng của $\overline{\mathbf{R}}$ đều có cận trên đúng (sup A có thể bằng $+\infty$) và cận dưới đúng (inf A có thể bằng $-\infty$).

1.3. Dãy số thực

1.3.1. *Các định nghĩa*

Định nghĩa 1. Một dãy số thực (nói ngắn gọn là dãy số) là một ánh xạ từ $\mathbf{N}^*$ vào $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{N}^* \ni n \mapsto x_n \in \mathbf{R}$$

Người ta thường dùng kí hiệu $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, để chỉ một dãy số.

Thí dụ.

(a) $\{x_n\}$; $x_n = \dfrac{1}{n}$; $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{1}{2}, \ldots, x_n = \dfrac{1}{n}, \ldots$

(b) $\{x_n\}$; $x_n = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $\ldots, x_n = 1, \ldots$

(c) $\{x_n\}$; $x_n = (-1)^n$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1, \ldots, x_n = (-1)^n, \ldots$

(d) $\{x_n\}$; $x_n = n^2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4, \ldots, x_n = n^2, \ldots$

(e) $\{x_n\}$; $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{9}{4}, \ldots, x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \ldots$

Ta hãy nêu một vài nhận xét mở đầu về các thí dụ trên.

- Trong thí dụ (a) giá trị của dãy $\{x_n\}$ luôn dương và giảm dần khi n tăng dần và có khuynh hướng giảm về số không (?)

- Trong thí dụ (b) giá trị của dãy $\{x_n\}$ luôn không đổi.

- Trong thí dụ (c) giá trị của $\{x_n\}$ chỉ lấy hai giá trị -1 hoặc $+1$ tuỳ theo n lẻ hay chẵn.

- Trong thí dụ (d) giá trị của $\{x_n\}$ luôn dương và tăng dần theo n.

- Trong thí dụ (e) giá trị của n tăng dần theo n : $x_{n+1} > x_n$. Thật vậy, dùng công thức khai triển nhị thức có :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}.\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.2\ldots n}.\frac{1}{n^n}$$

tức là :

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

trong đó : $n! := 1.2.3 \ldots (n-1)n$ và đọc là n giai thừa.

Từ hệ thức trên, thay n bởi $(n + 1)$ ta có :

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

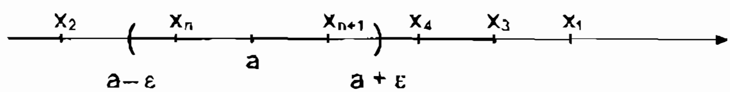
So sánh x_n và x_{n+1} trong hai khai triển trên ta thấy rằng khai triển của x_{n+1} nhiều hơn khai triển của x_n một số hạng, đồng thời từ số hạng thứ ba trở đi thì vì $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ nên $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ nên các số hạng của x_n bé thua số hạng tương ứng của x_{n+1}, do vậy $x_{n+1} > x_n$, $\forall n$. ■

Qua những thí dụ trên ta nhận thấy một dãy số $\{x_n\}$ có thể có hai khả năng : hoặc là các giá trị có "khuynh hướng" tập trung gần một số α nào đó (thí dụ (a) thì $\alpha = 0$; thí dụ (b) : $\alpha = 1$...) hoặc là không có một số α nào để các giá trị $\{x_n\}$ tập trung quanh nó (thí dụ (c) và (d)).

Định nghĩa 2. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại $a \in \mathbf{R}$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ ta có $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a hay a là giới hạn của dãy $\{x_n\}$ và viết $x_n \to a$ khi $n \to \infty$, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Vì $|x_n - a| < \varepsilon$ tương đương với $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, nên ta còn có thể phát biểu như sau : Dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến a nếu mọi ε – lân cận của a đều chứa mọi phần tử của dãy trừ một số hữu hạn phần tử đầu tiên (hình 1.3)



Hình 1.3

Nếu dãy $\{x_n\}$ không hội tụ, ta nói rằng nó *phân kì*.

Thí dụ.

Trở lại thí dụ (a) ở mục trên, ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, vì chỉ cần chọn

$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, ta có $\forall n \geq n_0$

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Trong thí dụ (b), ta thấy hiển nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

Trong thí dụ (c), dãy $\{x_n\}$ phân kì.

Trong thí dụ (d), dãy $\{x_n\}$ cũng phân kì, x_n lớn lên vô cùng khi n tăng vô hạn. Ta viết $x_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

Trong thí dụ (e), dãy $\{x_n\}$ cũng tăng theo n, nhưng hiện nay chúng ta chưa đủ điều kiện để kết luận. Chúng ta sẽ nghiên cứu chi tiết dãy này sau.

1.3.2. *Các tính chất của dãy số hội tụ.*

Định lí 1.4. (1) Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.

(2) Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì nó giới nội, tức là tồn tại một khoảng (b, c) chứa mọi phần tử x_n.

Chứng minh. (1) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, ε là một số dương bất kì. Khi đó tồn tại $n_1 \in \mathbf{N}^*$ và $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Đặt $n_o = \max(n_1, n_2)$. Với $n \geq n_o$, cả hai bất đẳng thức trên được thoả mãn. Do đó

$$|a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bất đẳng thức đó đúng với mọi $\varepsilon > 0$, do đó $|a - b| = 0$, tức là $a = b$.

(2) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Khi đó tồn tại $n_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_o$ $\Rightarrow |x_n - a| < 1$, nghĩa là $a - 1 < x_n < a + 1$. Gọi b, c lần lượt là số bé nhất và lớn nhất của tập hữu hạn $\{a - 1, x_1, ..., x_{n_o-1}, a + 1\}$. Hiển nhiên ta có $b \leq x_n \leq c$, $\forall n$. Vậy dãy $\{x_n\}$ giới nội.

Định lí 1.5. Cho hai dãy số hội tụ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. *Khi đó*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = Cx$, $\lim\limits_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x$, *với C là hằng số*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{y}$ *với* $y_n \neq 0$, $y \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{x}{y}$ *với* $y_n \neq 0$, $y \neq 0$.

Chứng minh. (1) vì $x_n \to x$, $y_n \to y$, nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $n_1 \in \mathbf{N}^*$, $n_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_2$ $\Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt $n_o = \max(n_1, n_2)$. Khi đó ta có $\forall n \geq n_o$

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

Vậy $x_n + y_n \to x + y$

(2) Cách chứng minh thật đơn giản (đề nghị coi là bài tập).

(3) Các dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ hội tụ nên chúng giới nội theo định lí 1.4 (2), nghĩa là tồn tại số $M > 0$ sao cho $|x_n| \le M$, $|y_n| \le M$, $\forall n$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho với $n \ge n_0$ ta có

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Vậy với $n \ge n_0$,

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \le |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M}.M + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Do đó $x_n y_n \to xy$

(4) Vì $y_n \to y \ne 0$, nên $|y_n| \to |y| > 0$. Vậy tìm được $n_1 \in N^*$ sao cho $n \ge n_1 \Rightarrow |y_n| > \frac{1}{2}|y|$. Vậy với $n \ge n_1$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} \le \frac{2|y_n - y|}{|y|^2}$$

Cũng vì $y_n \to y$ nên với $\varepsilon > 0$, tìm được $n_2 \in N^*$ sao cho $n \ge n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{2}$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$, ta được với $n \ge n_0$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \le \frac{2}{y^2} . \frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon$$

Vậy $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$

(5) là hệ quả của (3) và (4). ■

Định lí 1.6. (1) Cho hai dãy số $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$. *Nếu* $x_n \geq y_n$, $\forall n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ *thì* $a \geq b$.

(2) Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *và* $\{z_n\}$. *Nếu* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a, \text{ thì } \lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Chứng minh. (1) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử a < b. Khi đó tồn tại số r sao cho a < r < b. Vì $x_n \to a$, $a < r$ nên tồn tại $n_1 \in N^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow x_n < r$. Tương tự, tồn tại $n_2 \in N^*$ sao cho $n \geq n_2 \Rightarrow y_n > r$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ta có với $n \geq n_0$

$$x_n < r < y_n,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \geq y_n$.

(2) Vì $x_n \to a$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_1 \in N^*$ sao cho $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, nghĩa là $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Tương tự, vì $z_n \to a$, nên tìm được $n_2 \in N^*$ sao cho $n \geq n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Đặt $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Ta có với $n \geq n_0$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

suy ra $|y_n - a| < \varepsilon$, nghĩa là $y_n \to a$. ■

1.3.3. *Dãy đơn điệu*

Định nghĩa. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *tăng* nếu $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n$, là *giảm* nếu $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n$. Dãy tăng hay dãy giảm được gọi là dãy *đơn điệu*. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực c sao cho $x_n \leq c$, $\forall n$, *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực d sao cho $x_n \geq d$, $\forall n$.

Thí dụ.

(a) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{n}$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi số 0, bị chặn trên bởi số 1.

(b) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$ không đơn điệu, bị chặn dưới bởi -1, bị chặn trên bởi 1.

(c) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = n^2$ là dãy tăng, bị chặn dưới bởi 0, nhưng không bị chặn trên, nó không bị chặn.

(d) Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy tăng như ta đã chứng minh ở trên. Nó bị chặn dưới bởi 2. Ta sẽ chứng minh rằng nó bị chặn trên. Thật vậy, ở trên ta đã tính được

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Đặt

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

dễ thấy rằng $x_n < y_n$. Lại vì

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2.3} < \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

ta được

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ là một cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$, công bội $\frac{1}{2}$, tổng của nó bé hơn 1, do đó $y_n < 3$, vậy $x_n < 3$.

Định lí 1.7. (1) Nếu dãy số $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên thì nó hội tụ.

(2) Nếu dãy số $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ.

Chứng minh. (1) Vì dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên, theo tiên đề cận trên đúng, tồn tại $l = \sup\{x_n, n \in N^*\}$. Với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước $l - \varepsilon$ không là cận trên đúng của tập ấy, do đó tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho

$$x_{n_0} > l - \varepsilon$$

Với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l$$

Do đó

$$|x_n - l| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

Vậy $x_n \to l$.

(2) Suy từ (1) bằng cách xét dãy $\{-x_n\}$. ■

Thí dụ áp dụng định lí.

Dãy $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là một dãy tăng và bị chặn trên như ta đã thấy ở trên, do đó nó hội tụ. Gọi e là giới hạn của dãy ấy, ta được

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Sau đây là một số giá trị của dãy $\{x_n\}$:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25,$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2,3703..., ..., x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,7048 \ ..., ..$$

trong khi giá trị của số e viết với 15 chữ số có nghĩa sau dấu phẩy là :
e = 2,71828 18284 59054...

Như thế dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ hội tụ về số e rất chậm. Sau này chúng ta sẽ dùng biểu diễn khác của số e để tính giá trị xấp xỉ của số e nhanh hơn.

Ở chương 3, chúng ta sẽ chứng minh e là một số vô tỉ (định lí 3.3).

Định lí 1.8 (Cantor). *Cho hai dãy số* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *sao cho*

$$(1.12)\qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, a_n \le b_n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \\ \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

Khi đó tồn tại một số thực duy nhất $c \in [a_n, b_n]$ *với mọi n.*

Chứng minh. Chọn một số nguyên dương n cố định bất kì. Ta có

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k \le \ldots \le b_n .$$

Dãy $\{a_k\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ theo định lí 1.7.

Giả sử $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Vì $a_k \le b_n$, $\forall k$, nên $c \le b_n$. Vì $c = \sup\{a_k\}$ nên $a_n \le c$. Vậy $a_n \le c \le b_n$, $\forall n$, tức là $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n$.

Điểm c là duy nhất, vì nếu d cũng là điểm chung của mọi đoạn $[a_n, b_n]$ thì ta có

$$|c-d| \le b_n - a_n,\ \forall n$$

Nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, nên từ đó suy ra c = d. ■

Định nghĩa. Dãy các đoạn $\{[a_n, b_n]\}$ thoả mãn điều kiện (1.12) được gọi là *dãy các đoạn bao nhau.*

1.3.4. *Dãy số giới nội*

Xét dãy $\{x_n\}$ với $x_n = (-1)^n$. Đó là một dãy số giới nội, nó không hội tụ. Dãy $\{x_n\}$ với n = 2k là dãy {1, 1, ..., 1, ...} được gọi là một dãy con của dãy $\{x_n\}$, dãy con đó hội tụ và có giới hạn bằng 1. Cũng như vậy, dãy con $\{x_n\}$ với $n = 2k + 1$ là dãy $\{-1, -1, ..., -1, ...\}$, nó có giới hạn bằng -1.

Thí dụ đơn giản này dẫn ta đến một định lí quan trọng. Trước hết ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa. Cho dãy số $\{x_n\}$. Từ đó trích ra dãy x_{n_k} :

$$x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$$

với các chỉ số là những số nguyên dương thoả mãn điều kiện

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

(ở đây vai trò thứ tự trong dãy là k). Dãy $\{x_{n_k}\}$ được gọi là dãy con được trích ra từ dãy $\{x_n\}$.

Trong thí dụ mở đầu, ta đã trích ra hai dãy con $\{x_{n_k}\}$ với $n_k = 2k$ và $n_k = 2k + 1$.

Định lí 1.9 (Bolzano – Weierstrass). Từ mọi dãy số giới nội ta đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Chứng minh. Ta dùng phương pháp chia đôi. Dãy $\{x_n\}$ giới nội nên tồn tại hai số a_0, b_0 sao cho $a_0 \le x_n \le b_0$, $\forall n$. Điểm $\frac{a_0 + b_0}{2}$ chia đoạn $[a_0, b_0]$ thành hai đoạn $\left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right]$, $\left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$, một trong hai đoạn đó phải chứa vô số phần tử của $\{x_n\}$, gọi đoạn đó là $[a_1, b_1]$. Ta có $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$. Lại chia đoạn $[a_1, b_1]$ làm hai bởi điểm $\frac{a_1 + b_1}{2}$, một trong hai đoạn $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$ phải chứa vô số điểm của dãy $\{x_n\}$. Gọi đoạn đó là $[a_2, b_2]$ và ta cứ tiếp tục như vậy. Ta sẽ được một dãy các đoạn thẳng bao nhau :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_k, b_k] \supset ...$$

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{b_0 - a_0}{2^k} = 0.$$

Theo định lí Cantor, tồn tại một số thực duy nhất $c \in [a_k, b_k]$, $\forall k$. Vì mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ đều chứa vô số phần tử của dãy $\{x_n\}$, ta có thể lấy trong mỗi đoạn $[a_k, b_k]$ một điểm x_{n_k} của dãy $\{x_n\}$ sao cho các phần tử $x_{n_k} \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}\}$. Dãy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Thật vậy, hai số x_{n_k} và c đều cùng thuộc đoạn $[a_k, b_k]$, do đó

$$|x_{n_k} - c| \le b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Vậy $$\lim_{k\to\infty}|x_{n_k} - c| = 0. \blacksquare$$

1.3.5. *Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy*

Định nghĩa. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* (hay *dãy cơ bản*) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $m \ge n_0$ và $n \ge n_0$ ta có $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Bổ đề. Dãy Cauchy là một dãy giới nội.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $m \ge n_0$, $n \ge n_0$ ta có $|x_m - x_n| < 1$.

Đặc biệt, ta có $$|x_n - x_{n_0}| < 1,\ \forall n \ge n_0$$

Nhưng $|x_n - x_{n_0}| > |x_n| - |x_{n_0}|$, do đó $|x_n| < |x_{n_0}| + 1$

Đặt $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0} - 1|, |x_{n_0}| + 1\}$. Ta có

$$|x_n| \le M, \ \forall n. \ \blacksquare$$

Định lí 1.10 (Tiêu chuẩn Cauchy).

Điều kiện cần và đủ để dãy số thực $\{x_n\}$ *hội tụ là nó là một dãy Cauchy.*

Chứng minh. Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với $m \ge n_0$, $n \ge n_0$

$$|x_m - x_n| \le |x_m - l| + |l - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Đảo lại, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Theo bổ đề, nó là một dãy giới nội. Theo định lí 1.9, có thể trích ra một dãy con hội tụ $\{x_{n_k}\}$.

Giả sử $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$. Ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Thật vậy, ta có

$$|x_n - l| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - l|$$

Vì $x_{n_k} \to l$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $\nu_1 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n_k \ge \nu_1 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại $\nu_2 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $n \ge \nu_2$, $n_k \ge \nu_2 \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Đặt $\nu_0 = \max(\nu_1, \nu_2)$. Ta có với $n \ge \nu_0$

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. $\blacksquare$

Chú thích. Qua chứng minh trên ta thấy rằng mọi dãy hội tụ đều là dãy Cauchy. Nhưng đảo lại mọi dãy Cauchy trong trường hợp tổng quát chưa chắc đã là dãy hội tụ. Phần đảo của định lí 1.10 khẳng định rằng mọi dãy *số thực* là dãy Cauchy đều hội tụ trong **R**. Nó cũng biểu hiện tính đầy của tập hợp **R**.

Người ta cũng có thể định nghĩa tập hợp **R** là tập hợp thoả mãn tiên đề về cấu trúc trường, tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần và tiên đề về tính đầy của Cauchy. Mọi dãy số thực là dãy Cauchy đều hội tụ trên **R**.

1.3.6. *Vô cùng bé và vô cùng lớn*

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một vô cùng bé (viết tắt là VCB) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, tức là nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì $\{x_n - l\}$ là một VCB.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một vô cùng lớn (viết tắt là VCL) nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > A$.

Nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho khi $n \geq n_0$ ta có $x_n > 0, |x_n| > A$, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Nếu với mọi số $A > 0$, tìm được $n_0 \in N^*$ sao cho khi $n \geq n_0$ ta có $x_n < 0, |x_n| > A$, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

1.3.7. *Chú ý cuối cùng về dãy số thực*

Trong các ví dụ trước, dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức

$$x_n = f(n)$$

Đó là cách xác định hiện (hay tường minh) một dãy số. Theo cách xác định ấy, ta có thể tính ngay x_n khi biết n.

Bây giờ xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}, \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

trong trường hợp này ta không biết được x_n, nếu không biết x_{n-1}, ... Nếu muốn tính x_3, ta phải xuất phát từ x_0 tính x_1, từ x_1 tính x_2, rồi từ x_2 tính x_3. Người ta gọi đây là cách *xác định ẩn* hay *xác định theo quy nạp* một dãy số. Hãy xét chi tiết hơn dãy đó. Vì

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} \text{ với } x_0 = 2$$

nên
$$x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$$

hoặc
$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}}$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ giảm dần và $x_n > 0$, $\forall n$, do đó $\{x_n\}$ hội tụ và hội tụ đến nghiệm dương của phương trình bậc hai $x^2 - 2 = 0$, tức là hội tụ đến $\sqrt{2}$ (lưu ý rằng $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ và $x_3 = 1{,}41421$).

Chúng ta không bàn chi tiết về ưu, nhược điểm của các cách xác định dãy, cũng không bàn về sự hội tụ của dãy ẩn ; chúng ta chỉ lưu ý rằng tuy về hình thức cách cho dãy dưới dạng quy nạp không tiện tính toán, nhưng nó rất thực tế ; vì những dãy ẩn nảy sinh từ việc tìm dãy hội tụ về một số nào đó (thường là không biết trước) ; chẳng hạn dãy ẩn này sinh từ thủ tục phân đôi (xem 3.7 chương 3) và thủ tục Newton (xem 5.2.7 chương 5).

TÓM TẮT CHƯƠNG 1

• *Tập hợp*

Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là **N**, tập hợp các số nguyên là **Z**, tập hợp các số hữu tỉ là **Q**.

Có thể mô tả một tập hợp theo hai cách : hoặc liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp đó, hoặc nêu tính chất đặc trưng của tập hợp đó.

Các kí hiệu thường dùng :

$\Rightarrow$ kéo theo hoặc suy ra

$\Leftrightarrow$ tương đương

$\forall$ với mọi

$\exists$ tồn tại

:, | sao cho

$\in$ thuộc

$\notin$ ($\overline{\in}$) không thuộc

$\varnothing$ tập rỗng

Tập con, bao hàm :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

Bằng nhau : $A = B \Leftrightarrow A$ trùng với B ;

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A.$$

Hợp : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$.

Giao : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$.

Bổ sung của B trong A : $C_A B$

$$x \in C_A B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B$$

Tích Đêcác

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

• *Ánh xạ*

Một ánh xạ f từ E sang F, viết là $f : E \to F$ là một quy tắc làm ứng mỗi phần tử $x \in E$ với một và chỉ một phần tử $y \in F$.

f là đơn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có nhiều nhất một nghiệm $x \in E$, $\forall y \in F$.

f là toàn ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có ít nhất một nghiệm $x \in E$, $\forall y \in F$.

f là song ánh nếu phương trình $f(x) = y$ có một nghiệm duy nhất $x \in E$; $\forall y \in F$.

Hai tập A và B được gọi là tương đương với nhau nếu tồn tại một song ánh $f : A \to B$. Một tập X tương đương với tập các số tự nhiên **N** được gọi là một tập đếm được, viết là card (X) = card (**N**).

• *Tập các số thực*

Số hữu tỉ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân hữu hạn hay vô hạn tuần hoàn.

Số vô tỉ được biểu diễn dưới dạng một số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Tập số thực **R** là tập gồm các số hữu tỉ và số vô tỉ. Giữa tập các số tự nhiên **N**, các số nguyên **Z**, các số hữu tỉ **Q** và các số thực **R** có bao hàm thức :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Tập các số thực **R** là một trường sắp thứ tự đầy, nghĩa là thoả mãn các tiên đề sau :

Tiên đề về cấu trúc trường

Tiên đề về quan hệ thứ tự toàn phần

Tiên đề cận trên đúng (biểu hiện tính đầy của **R**).

Mọi tập hợp $A \subset \mathbf{R}$ không rỗng, bị chặn trên đều có cận trên đúng thuộc **R**.

Tập số thực mở rộng được kí hiệu $\overline{\mathbf{R}}$ là tập **R** và được bổ sung thêm hai kí hiệu $-\infty$ và $+\infty$.

• *Dãy số thực*

Dãy số thực là một ánh xạ, ánh xạ **N** sang **R** :

$$n \mapsto x_n \in \mathbf{R}.$$

Một dãy số thực $\{x_n\}$ được gọi là hội tụ đến a, hay $\{x_n\}$ có giới hạn là a và viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $N > 0$ sao cho $n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Khi đó, ta cũng nói rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Nếu một dãy $\{x_n\}$ không hội tụ thì ta nói rằng dãy $\{x_n\}$ phân kì.

Các tính chất của dãy hội tụ :

$x_n \to a$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, thì a là duy nhất.

$x_n \to a \Leftrightarrow$ mỗi lân cận của a chứa mọi x_n, trừ một số hữu hạn các x_n.

$\{x_n\}$ hội tụ thì có một khoảng hữu hạn (b, c) chứa mọi x_n và nói rằng x_n giới nội.

Nếu $x_n \to x$; $y_n \to y$ thì

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n\to\infty}(Cx_n) = Cx, \text{ C là hằng số}$$

$$\lim_{n\to\infty}(C + x_n) = C + x, \text{ C là hằng số}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{y} \text{ với } y_n \neq 0,\ y \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y} \text{ với } y_n \neq 0,\ y \neq 0.$$

Nếu $x_n \geq y_n$, $\forall n$ và $x_n \to a$, $y_n \to b$ thì $a \geq b$.

Nếu $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall n$ và $x_n \to a$, $z_n \to a$ thì $y_n \to a$.

Các định lí cơ bản về dãy số :

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là tăng (giảm) nếu $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$), $\forall n$. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn trên (dưới) nếu tồn tại số c (d) sao cho $x_n \le c$ ($x_n \ge d$), $\forall n$.

- Nếu dãy số $\{x_n\}$ tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì nó hội tụ.
- Cho hai dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sao cho

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \le b_n,\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Khi đó tồn tại duy nhất $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n$.

- Từ mọi dãy số giới nội ta đều có thể trích ra một dãy con hội tụ.
- Điều kiện cần và đủ để dãy số thực $\{x_n\}$ hội tụ trong **R** là $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy, tức là với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho $m \ge n_0$, $n \ge n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

BÀI TẬP

1. Dùng kí hiệu tập hợp, biểu diễn các tập sau :

1. Các số nguyên dương bé thua 12

2. Các số nguyên dương là bội số của 4 và bé thua 4[illegible]

3. Các phân số có tử số là 3 và mẫu số là một số nguyên dương bé thua 9.

2. Cho F : = {1, 4, 7, 10} và G : = {1, 4, 7}. Hỏi các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng :

1. $G \subset F$;

2. Tập {1, 7} là tập con thực sự của F ;

3. Tập {1, 4, 7} là tập con thực sự của G.

3. Liệt kê mọi tập con của các tập :

1. $\{a, b, c\}$; 2. $\{1, 2, 3, 4\}$.

4. Cho $A := \{a, b, c\}$, $B := \{1, 2, 3\}$; $C := \{b, c, a\}$; $D := \{3, 2, 1\}$.

Hỏi :

1. $A = C$? 2. $A = B$? 3. A tương đương B ? 4. $B = D$?

5. Xét xem các tập cho dưới đây, tập nào vô hạn, tập nào hữu hạn :

1. Tập mọi số nguyên dương lớn hơn 100.

2. Tập mọi số nguyên dương bé thua 1 000 000 000.

3. Tập mọi điểm nằm trên đoạn thẳng nối liền hai điểm phân biệt A, B.

6. Cho $A := \{q, r, t, u\}$, $B := \{p, q, s, u\}$ và

$C := \{t, u, v, w\}$.

1. Tìm $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Chúng có bằng nhau không ?

2. Tìm $A \cup (B \cap C)$ và $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Chúng có bằng nhau không ?

7. Cho A, B là hai tập hữu hạn, chứng minh rằng

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

8. Cho $A := \{0, 1, 2\}$; $B = \{1, 3\}$.

1. Tìm $A \times B$ và $B \times A$

2. Tính $\text{card}(A \times B)$; $\text{card}(B \times A)$; $\text{card}(A \times A)$; $\text{card}(B \times B)$.

9. Xét ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$; f có là đơn ánh ? toàn ánh ? Tìm $f(\mathbf{R})$.

10. Dùng lập luận phản chứng, chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

11. Dùng phương pháp quy nạp toán học chứng minh :

1. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

12. Xét xem đã dùng tiên đề nào trong các tiên đề về số thực để chứng minh các hệ thức dưới đây :

1. $5 + 3 = 3 + 5$;
2. $9 + 0 = 9$;
3. $-3 + 0 = -3$;
4. $[-3 + (4)] + 7 = -3 + (4 + 7)$;
5. $0 + 0 = 0$;
6. $(-1).(1) = -1$;
7. $(-3) + [-(-3)] = 0$;
8. $4.\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$.

13. Dùng định nghĩa "lớn hơn, bé thua" và các tiên đề thứ tự, chứng minh (giả thiết $a, b, c \in \mathbf{R}$) :

1. Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$
2. Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$
3. Nếu $a > 0$ thì $-a < 0$
4. Nếu $a \neq 0$ thì $a^2 > 0$
5. Nếu $a > b$ thì $a^2 > b^2$ (với $a > 0$, $b > 0$).

14. Giải các phương trình và bất phương trình :

1. $|x + 3| = 7$;
2. $|2x - 6| = 14$;
3. $|x - 4| < 7$;
4. $|5x - 1| \leq 4$;
5. $|4x - 2| > 4$;
6. $|5 + 9x| \geq 4$.

15. Cho $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$; định nghĩa :

$$A + B := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$$

$$AB := \{x \in \mathbf{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = ab\}$$

nghĩa là $A + B$ là tập các số thực có dạng $a + b$ với $a \in A$ và $b \in B$; AB là tập các số thực có dạng ab với $a \in A$ và $b \in B$.

1. Giả sử A, B bị chặn trên, chứng minh rằng

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

2. Giả sử A, B bị chặn trên, $A \subset \mathbf{R}_+$, $B \subset \mathbf{R}_+$, chứng minh rằng :

$$\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$$

16. Xét sự hội tụ của dãy $x_n := (-1)^n \frac{n+1}{n}$.

17. Chứng tỏ rằng các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng, $n \geq 1$:

1. $x_n := \frac{n+1}{n}$;

2. $x_n := \frac{n}{n+1}$;

3. $x_n := \frac{1}{n^2+1}$;

4. $x_n := \frac{n}{n^2+1}$.

18. Tìm giới hạn của các dãy sau (nếu hội tụ) :

1. $x_n := n - \sqrt{n^2 - n}$;

2. $x_n := \sqrt{n(n+a)} - n$;

3. $x_n := n + \sqrt[3]{1-n^3}$;

4. $x_n := \frac{n}{2} \sin n\frac{\pi}{2}$;

5. $x_n := \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$.

19. Xét dãy $x_n := x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$ với $x_0 = 1$.

1. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

20. Xét dãy $x_n := \frac{a_n}{b_n}$ với $a_n := 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n := a_{n-1} + 2b_{n-1}$;

với $a_0 > 0$, $b_0 > 0$.

1. Chứng minh rằng $a_n > 0$, $b_n > 0$.

2. Tính x_{n+1} theo x_n.

3. Tính $x_{n+1} - x_n$ và chứng tỏ rằng dãy $\{x_n\}$ đơn điệu, suy ra $\{x_n\}$ có giới hạn độc lập với a_0, b_0.

21. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy

$$x_n := \frac{2}{x_{n-1}} + 1 \text{ với } x_0 = 1.$$

22. Cho hai số a và b thoả $0 < a < b$, xét 2 dãy

$$x_n := \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}, \quad y_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$$

với $x_0 = a$ và $y_0 = b$.

Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và có chung giới hạn.

23. Xét sự hội tụ của dãy $x_n := \sqrt{1 + x_{n-1}}$, với $x_0 = \sqrt{3}$.

24. Đặt $x_0 = 1$, $x_n(3 + x_{n-1}) + 1 = 0$ với $n \geq 1$.

Chứng tỏ rằng $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của $\{x_n\}$.

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

12. 1. Giao hoán ; 2. Đồng nhất ; 3. Đồng nhất ; 4. Kết hợp ; 5. Đồng nhất ; 6. Đồng nhất ; 7. Nghịch đảo ; 8. Nghịch đảo.

15. 1. Chứng minh rằng sup A + sup B là một cận trên của A + B, rồi dùng định nghĩa cận trên đúng để kết luận rằng sup A + sup B là cận trên đúng của A + B.

2. Chứng tỏ rằng sup A . sup B là một cận trên của AB, rồi dùng định nghĩa cận trên đúng suy ra điều cần chứng minh.

16. Phân kì.

17. 1. $\{x_n\}$ giảm và bị số 1 chặn dưới, hội tụ ; 2. $\{x_n\}$ tăng và bị số 1 chặn trên, hội tụ ; 3. $\{x_n\}$ giảm, $0 < x_n < \frac{1}{2}$, $\forall n$, hội tụ ; 4. Hội tụ.

18. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a}{2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; 4. Phân kì ; 5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

19. 1. Nếu $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì l thoả phương trình $l = l + \dfrac{1}{l}$, nghĩa là $\dfrac{1}{l} = 0$, phương trình này vô nghiệm.

2. $x_o \geq 1$, $x_1 \geq 1$; $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

20. 1. $a_o > 0$, $b_o > 0$, suy ra $a_n > 0$, $b_n > 0$;

2. $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$;

3. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$, dấu của $x_{n+1} - x_n$ là dấu của $\sqrt{3} - x_n$, cũng là dấu của $\sqrt{3} - x_{n-1}$, cũng là dấu của $\sqrt{3} - x_o$. Nếu $\sqrt{3} - x_o > 0$, $\{x_n\}$ tăng và bị $\sqrt{3}$ chặn trên, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. Nếu $\sqrt{3} - x_o < 0$, $\{x_n\}$ giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$. Nếu $\sqrt{3} - x_o = 0$, $x_n = \sqrt{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

21. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ thì $l = 2$ vì $x_n > 1, \forall n$;

$$x_{n+1} = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1} + 2} + 1 \ ; \ x_{n+1} - 2 = \frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2} \ ;$$

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{-x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 2}.$$

Dấu của $x_{n+1} - x_{n-1}$ là dấu tam thức bậc hai $-x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 2$. Suy ra nếu $x_{n-1} > 2$ thì $x_{n+1} < x_{n-1}$ và nếu $x_{n-1} < 2$ thì $x_{n+1} > x_{n-1}$.

22. $\{x_n\}$ tăng và $\{y_n\}$ giảm : $\dfrac{x_1}{a} = \dfrac{b}{x_1} = \sqrt{\dfrac{b}{a}} > 1$;

$y_1 - a = b - y_1 = \dfrac{b-a}{2} > 0$: $x_o < x_1 < y_1 < y_o$; đi đến

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_1 < b.$$

$L := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; $l := \lim\limits_{n\to\infty} y_n : L = \sqrt{Ll}$ và $l = \dfrac{L+l}{2} \Rightarrow L = l$.

23. Dùng quy nạp chứng minh $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới :

$$x_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}} < x_o,\ x_2 = \sqrt{1+x_1} < \sqrt{1+x_o}\ ;\ x_2 < x_1\ , \dots,$$

$$x_{n+1} < x_n,\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > \sqrt{2}\ , \forall n,\ x_n > 1.$$

Suy ra $l := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ thì l thoả $l = \sqrt{1+l}$ suy ra $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vì $x_n > 1$.

Chương 2

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

Chương này giới thiệu hàm số một biến số thực, các hàm số sơ cấp cơ bản, đặc biệt giới thiệu một hàm số dạng đa thức gọi là đa thức nội suy.

2.1. Định nghĩa hàm số một biến số thực

Cho X, Y, $X \subseteq \mathbf{R}$, $Y \subseteq \mathbf{R}$, ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là một hàm số một biến số thực, tập X được gọi là *miền xác định* thường kí hiệu là D_f của hàm số f và tập f(X) thường được gọi là miền giá trị, kí hiệu là R_f của hàm số f ; $x \in D_f$ được gọi là *biến độc lập hay đối số*, $f(x) \in R_f$ được gọi là biến phụ thuộc hay hàm số ; để chứng tỏ hàm số f làm ứng mỗi phần tử $x \in D_f$ với một phần tử xác định $f(x) \in R_f$ người ta thường viết

$$x \mapsto f(x) \text{ hoặc } y = f(x)$$

Thí dụ.

(a) $x \mapsto x$ là hàm số đồng nhất, thường kí hiệu là id(x).

(b) $x \mapsto 2x + 3$ là hàm số bậc nhất.

(c) $x \mapsto -2x^2 + 5x + 1$ là hàm số bậc hai.

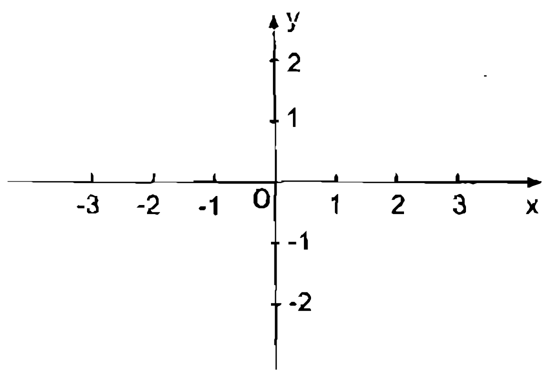
(d) $x \mapsto E(x)$ là hàm số phần nguyên của x, nghĩa là E(x) là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x ; chẳng hạn :

$$E(-3,2) = -4 \text{ ; } E(0) = 0 \text{ ; } E(2) = 2 \text{ ; } E(2,6) = 2 \text{ ; ...}$$

(e) $x \mapsto c$, c là hằng số, gọi là *hàm số hằng*.

2.2. Đồ thị của hàm số một biến số thực

Trước đây chúng ta đã giả thiết có một song ánh giữa tập các số thực **R** và đường thẳng L và từ đó đã xây dựng trục số và khi ta viết (x) ta đồng thời hiểu đó là một số thực x ∈ **R** và số thực x đó có ảnh (toạ độ) là điểm (x) trên trục số. Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng một song ánh giữa tập tích Đềcác **R** × **R** và một mặt phẳng P bằng cách vẽ một trục số nằm ngang hướng từ trái sang phải, có gốc là O, gọi là trục số Ox, trục số Oy vuông góc với Ox, hướng từ dưới lên trên ; các đơn vị chọn trên Ox và Oy không nhất thiết phải giống nhau, nhưng thường người ta hay chọn các đơn vị đó giống nhau (hình 2.1). Trục Ox được gọi là *trục hoành*, Oy là *trục tung*. Mỗi điểm nằm trên trục hoành bên phải gốc O ứng với một số thực dương, mỗi điểm nằm trên trục hoành bên trái gốc O ứng với một số thực âm. Trên trục tung Oy, mỗi điểm nằm trên gốc O ứng với một số thực dương, mỗi điểm nằm dưới gốc O ứng với một số thực âm ; gốc O ứng với số không trên mỗi trục.



Hình 2.1

Xét một cặp số thực có thứ tự (a, b) ∈ **R** × **R**, quy ước phần tử đầu tiên trong cặp đó (a) là phần tử của trục hoành, và phần tử thứ hai (b) là phần tử của trục tung, như vậy có nghĩa là :

1. Toạ độ đầu tiên của cặp số thực có thứ tự (x, y) (tức là toạ độ x) là khoảng cách có dấu từ một điểm đến trục tung, khoảng cách có

dấu đó lấy dấu dương nếu điểm ở bên phải trục tung và lấy dấu âm nếu điểm đó ở bên trái trục tung.

2. Toạ độ thứ hai của cặp số thực có thứ tự (x, y) (tức là toạ độ y) là khoảng cách có dấu từ một điểm đến trục hoành, khoảng cách đó lấy dấu dương nếu điểm ở trên trục hoành, dấu âm nếu điểm ở dưới trục hoành.

Như vậy, một điểm M bất kì trong mặt phẳng được ứng với một cặp số thực có thứ tự (x, y) ; ngược lại, mỗi cặp số có thứ tự $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ được ứng với một điểm M của mặt phẳng, do vậy có thể đồng nhất một điểm M của mặt phẳng với một cặp số thực có thứ tự (x, y) ; x được gọi là *hoành độ* của điểm M và y là *tung độ* của điểm M. Kí hiệu M(x, y) được đọc là điểm M có hoành độ là x và tung độ là y.

Mặt phẳng xác định bởi trục hoành Ox và trục tung Oy được gọi là *mặt phẳng toạ độ*, hệ toạ độ xâydựng theo kiểu trên gọi là *hệ toạ độ vuông góc Đềcác*, chính hệ toạ độ vuông góc Đềcác này đã xác định song ánh giữa cặp số có thứ tự $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ với một điểm của mặt phẳng toạ độ.

Đồ thị của hàm số $x \mapsto f(x)$ hay là $y = f(x)$ được định nghĩa là *tập các điểm* trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ (x, f(x)).

Tuỳ theo tính chất cụ thể của hàm số f(x), đồ thị của f(x) có thể là một tập điểm rời rạc hữu hạn hoặc vô hạn cũng có thể là tập những mảnh cung đứt đoạn, và cũng có thể là một cung liền.

• *Chú ý*. Trong thực tế nhiều khi người ta phải giải bài toán ngược : người ta *không biết chính xác* hàm số f(x) mà chỉ biết *một tập rời rạc hữu hạn* của đồ thị của nó và một vài nét rất khái quát về hàm số f(x) ; người ta muốn dựng lại hàm số f(x) và dĩ nhiên không thể nào dựng được đúng nguyên xi hàm số f(x) (vì bản thân hàm số f(x) lại chưa biết) nhưng người ta hi vọng rằng dựng được một hàm số có các tính chất như hàm số f(x) và dĩ nhiên đồ thị của hàm số được dựng ít ra thì cũng gần trùng với đồ thị của f(x) tại tập các điểm rời rạc đã cho trước ở trên.

2.3. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn, hàm số đơn điệu

Giả sử X là một tập hợp số thực ($X \subset \mathbf{R}$), X nhận gốc O làm tâm đối xứng. Hàm số $f : X \to \mathbf{R}$ được gọi là *chẵn* nếu

$$f(x) = f(-x), \forall x \in X,$$

là *lẻ* nếu

$$f(x) = -f(-x), \forall x \in X.$$

Hàm số $y = x^n$ là chẵn nếu n chẵn, là lẻ nếu n lẻ. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục y làm trục đối xứng. Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc O làm tâm đối xứng.

Nếu $X \subset \mathbf{R}$ hàm số $f : X \to \mathbf{R}$ được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại hằng số dương p sao cho

$$f(x + p) = f(x) \qquad \forall x \in X$$

số p nhỏ nhất sao cho ta có đẳng thức ấy được gọi là *chu kì* của f. Các hàm số y = sinx, y = cosx là tuần hoàn với chu kì 2π ; các hàm số y = tgx, y = cotgx là tuần hoàn với chu kì π.

Nếu $J \subseteq I \subseteq \mathbf{R}$, hàm số $f : I \to \mathbf{R}$ được gọi là *tăng* trên J nếu

$$x_1, x_2 \in J, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2),$$

tăng nghiêm ngặt trên J nếu

$$x_1, x_2 \in J, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

giảm trên J nếu

$$x_1, x_2 \in J, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

giảm nghiêm ngặt trên J nếu

$$x_1, x_2 \in J, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số tăng hay giảm trên được gọi là *đơn điệu* trên I.

2.4. Hàm số hợp

Cho $X \subseteq \mathbf{R}$, $Y \subseteq \mathbf{R}$, $Z \subseteq \mathbf{R}$; cho hàm số $g : X \to Y$ và hàm số $f : Y \to Z$; xét hàm số $h : X \to Z$ định nghĩa bởi

$$h(x) := f[g(x)] \; ; \; x \in X$$

h được gọi là hàm số hợp của hàm số f và hàm số g, người ta thường kí hiệu hàm số hợp h :

$$h(x) = f[g(x)] \text{ hay } h(x) := (f \circ g)(x), \; x \in X$$

Thí dụ

(a) $X = Y = Z = \mathbf{R}$, xét các ánh xạ

$$f : x \mapsto x^2 + 2, \; g : x \mapsto 3x + 1$$

Khi đó $\quad f[g(x)] = [g(x)]^2 + 2 = (3x+1)^2 + 2$

$$g[f(x)] = 3f(x) + 1 = 3(x^2 + 2) + 1$$

(b) $X = Y = Z = \mathbf{R}$, xét các ánh xạ

$$f : x \mapsto 2^x \; ; \; g : x \mapsto x^2$$

Khi đó $\quad f[g(x)] = 2^{g(x)} = 2^{x^2}$

$$g[f(x)] = [f(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

2.5. Hàm số ngược và đồ thị hàm số ngược

Cho hai tập $X \subseteq \mathbf{R}$, $Y \subseteq \mathbf{R}$; cho song ánh $f : X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$, song ánh f chính là một hàm số có miền xác định $D_f = X$ và miền giá trị là tập ảnh của X, tức là f(X) :

$$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}.$$

Khi đó vì f là song ánh nên f là toàn ánh, nghĩa là $f(X) = Y$ và f cũng là đơn ánh, nghĩa là với $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x_1), f(x_2) \in Y$. Khi đó mỗi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của đúng một phần tử $x \in X$ nên có thể đặt ứng một phần tử $y \in Y$ với một phần tử $x \in X$; phép làm ứng đó đã xác định một hàm số ánh xạ Y sang X, hàm số này được gọi là *hàm số ngược* của song ánh f và được kí hiệu là $f^{-1} : Y \to X$, nghĩa là :

$$f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

trong đó y là biến độc lập và x là hàm số phụ thuộc.

Từ định nghĩa hàm số ngược, ta có :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Do vậy trong cùng một hệ toạ độ, *đồ thị hai hàm số* $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ *trùng nhau* nhưng, thông thường và đặc biệt khi vẽ đồ thị người ta có thói quen dùng chữ x để chỉ biến độc lập, chữ y để chỉ hàm số phụ thuộc, với quy ước đó hàm số ngược của f(x) được viết là

$$f^{-1} : x \mapsto y = f^{-1}(x)$$

Do vậy, nếu biểu diễn hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ dưới dạng $y = f^{-1}(x)$ thì nếu (x, y) là một điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì (y, x) là một điểm của đồ thị hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Hai điểm (x, y) và (y, x) đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất, từ đó đi đến kết luận :

Đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường phân giác thứ nhất.

Thí dụ.

(a) Xét hàm số $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2$

Với $y \in \mathbf{R}$; $y < 0$, phương trình (ẩn là x) $x^2 = y$ vô nghiệm, vậy h không toàn ánh.

Với $y \in \mathbf{R}$, $y > 0$ phương trình $x^2 = y$ có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{y}$, vậy h không đơn ánh.

Như thế hàm h không có hàm ngược.

(b) Xét hàm số $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

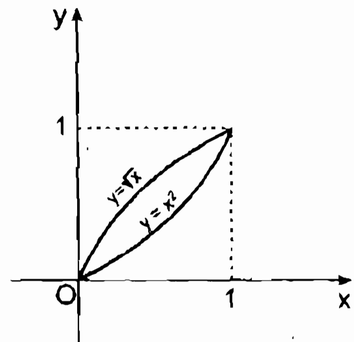
trong đó $\mathbf{R}_+$ là tập : $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$.

Vì với mọi $y \in \mathbf{R}$ phương trình $x^2 = y$ hoặc vô nghiệm (với $y < 0$) hoặc có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{y}$ (với $y > 0$), do đó hàm số g là đơn ánh nhưng không toàn ánh, do đó g cũng không có hàm số ngược.

(c) Xét hàm số $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto x^2$.

Trong trường hợp này phương trình $x^2 = y$ luôn có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{y}$, do đó f là song ánh và do đó có hàm số ngược $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Nếu vẽ đồ thị của hai hàm số f(x) và $f^{-1}(x)$ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc Đécác (hình 2.2) thì ta vẽ đồ thị hai hàm số : $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$; $x \in \mathbf{R}_+$.



Hình 2.2

2.6. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm số sau đây được gọi là các hàm số *sơ cấp cơ bản* : hàm số luỹ thừa $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$; hàm số mũ $x \mapsto a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; hàm số lôgarít : $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; các hàm số lượng giác : $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \mathrm{tg} x$; $x \mapsto \mathrm{cotg} x$ và các hàm lượng giác ngược.

Tất cả những hàm số nêu trên (trừ các hàm số lượng giác ngược) là những hàm số đã quen thuộc đối với học sinh phổ thông trung học nên ở đây chỉ nhắc lại những tính chất chủ yếu của chúng ; riêng các hàm số lượng giác ngược sẽ được trình bày chi tiết hơn.

(1) Hàm số luỹ thừa $x \mapsto x^\alpha$; $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbf{R}$.

Miền xác định của hàm số luỹ thừa phụ thuộc α.

Với $\alpha \in \mathbf{N}$: miền xác định là cả trục số $\mathbf{R}$.

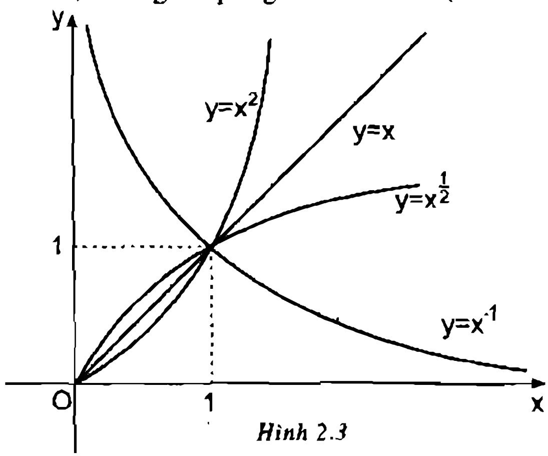
Với α nguyên âm : miền xác định là cả trục số trừ điểm gốc O.

Với α có dạng $\alpha = 1/p$; $p \in \mathbf{Z}$ thì :

với p chẵn, $p \in \mathbf{N}^*$: miền xác định là $\mathbf{R}_+$;
với p lẻ, $p \in \mathbf{N}^*$: miền xác định là $\mathbf{R}$;
với $p \in \mathbf{Z}$ miền xác định cũng phụ thuộc p chẵn hay lẻ.

Với α là số vô tỉ thì quy ước chỉ xét $y = x^\alpha$ tại mọi $x \geq 0$ nếu $\alpha > 0$ và tại mọi $x > 0$ nếu $\alpha < 0$.

Đồ thị của hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm (1, 1) và đi qua gốc (0, 0) nếu $\alpha > 0$; không đi qua gốc nếu $\alpha < 0$ (hình 2.3).



Hình 2.3

(2) Hàm số mũ $x \mapsto a^x$; $y = a^x$; $a > 0, a \neq 1$.

Số a được gọi là cơ số của hàm số mũ. Hàm số mũ a^x xác định với mọi x là luôn luôn dương.

- Hàm số mũ $y = a^x$ tăng (nghĩa là với $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$) khi $a > 1$

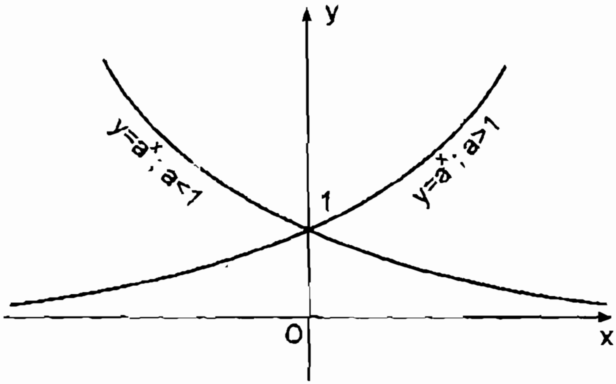
- Hàm số $y = a^x$ giảm (nghĩa là với $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$) khi $a < 1$.

- Điểm (0, 1) luôn nằm trên đồ thị của hàm a^x : $a^0 = 1$.

• Đặc biệt $a^1 = a$.

Hình 2.4 cho đồ thị của hàm $y = a^x$.

(3) Hàm số lôgarít $x \mapsto \log_a x$; $y = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$.



Hình 2.4

Số a được gọi là cơ số của lôgarít, đặc biệt nếu $a = 10$ thì $\log_{10}x$ thường được viết ngắn gọn là lgx và đọc là lôgarít thập phân của x. Hàm số $\log_a x$ chỉ xác định với $x > 0$.

• Hàm số $\log_a x$ tăng khi $a > 1$ và khi đó :

với $0 < x \leq 1$ thì $\log_a x \leq 0$;

với $x \geq 1$ thì $\log_a x \geq 0$.

• Hàm số $\log_a x$ giảm khi $0 < a < 1$ và khi đó :

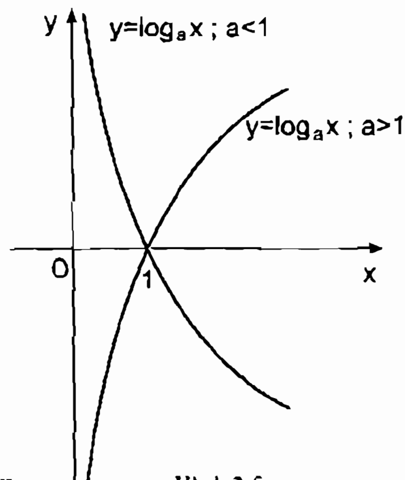
với $0 < x \leq 1$ thì $\log_a x \geq 0$;

với $x \geq 1$ thì $\log_a x \leq 0$.

• Điểm (1, 0) luôn nằm trên đồ thị của $\log_a x$, nghĩa là $\log_a 1 = 0$.

• Đặc biệt $\log_a a = 1$.

Hình 2.5 cho đồ thị của hàm $\log_a x$.



Hình 2.5

• Vì hàm số mũ $x \mapsto a^x$ là một song ánh từ **R** lên $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, nên hàm số ngược của a^x là hàm số $y \mapsto \log_a y$, nghĩa là $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.

Nếu dùng chữ x để chỉ đối số, chữ y chỉ hàm số thì trên cùng một hệ toạ độ đồ thị hai hàm số a^x và $\log_a x$ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

• Hàm số $\log_a x$ còn có một số tính chất sau :

$$\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B \ ; \ A > 0, B > 0$$

$$\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B \ ; \ A > 0, B > 0$$

$$\log_a A^\alpha = \alpha \log_a A, \ A > 0.$$

Với $b > 0$; $b = a^{\log_a b}$

Với $b > 0$; $b \neq 1$; $\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$; $A > 0$

(4) Các hàm số lượng giác :

$$x \mapsto \sin x \ ; \ x \mapsto \cos x \ ; \ x \mapsto \mathrm{tg} x \ ; \ x \mapsto \mathrm{cotg} x.$$

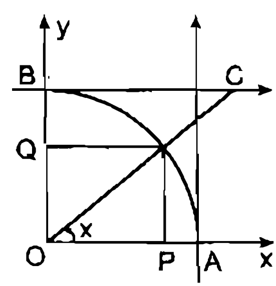
Các hàm số này được gọi là hàm số lượng giác vì chúng được xác định trên **R** thông qua đường tròn lượng giác, xem hình 2.6.

Trên hình 2.6 có :

$\overline{OP} := \cos x$; $\overline{OQ} := \sin x$;

$\overline{AT} := \mathrm{tg} x$; $\overline{BC} := \mathrm{cotg} x$

• Các hàm số $x \mapsto \sin x$; $y = \sin x$ và $x \mapsto \cos x$; $y = \cos x$ có miền xác định là toàn trục số **R** và có miền giá trị là khoảng đóng $[-1, 1]$.

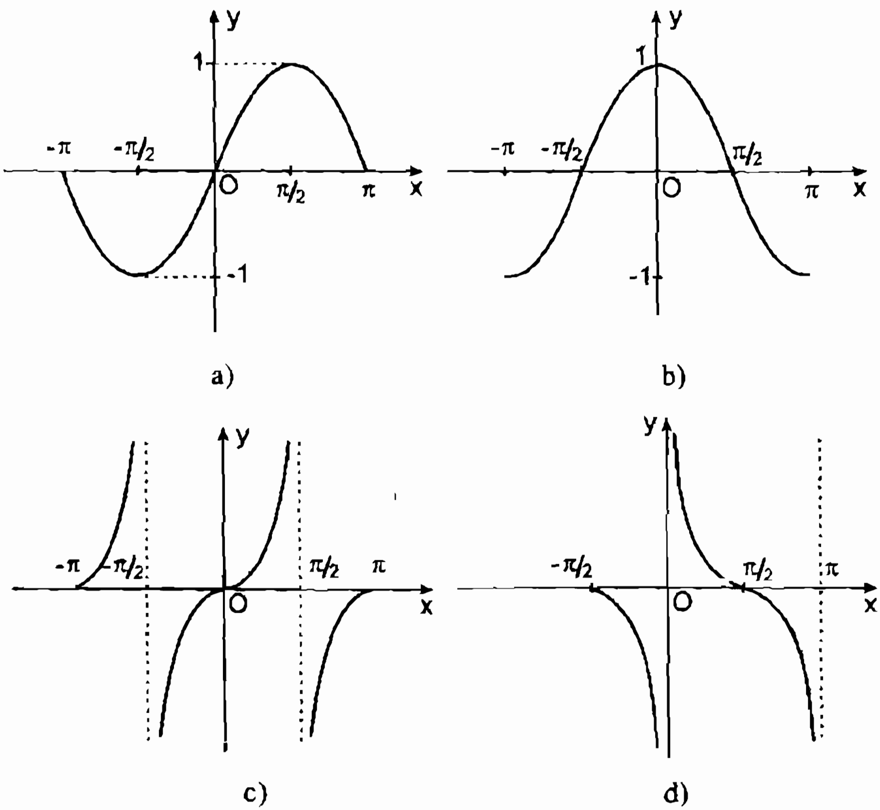


Hình 2.6

• Hàm số $x \mapsto \operatorname{tg}x$; $y = \operatorname{tg}x$ xác định tại mọi $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbf{Z}$ và có miền giá trị là $\mathbf{R}$.

• Hàm số $x \mapsto \operatorname{cotg}x$; $y = \operatorname{cotg}x$ xác định tại mọi $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ và có miền giá trị là $\mathbf{R}$.

• Hình 2.7 cho đồ thị các hàm số lượng giác :



Hình 2.7

(a) Đồ thị $y = \sin x$; (b) Đồ thị $y = \cos x$;

(c) Đồ thị $y = \operatorname{tg}x$; (d) Đồ thị $y = \operatorname{cotg}x$.

(5) Các hàm số lượng giác ngược :

1. Hàm số $x \mapsto \arcsin x$

Xét hàm số $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$; $x \mapsto \sin x$; f là một song ánh, do đó có hàm số ngược f^{-1}, kí hiệu hàm số ngược $f^{-1} : y \mapsto \arcsin y$; $x = \arcsin y$; đọc là x bằng ac–siny (x là "cung có sin bằng y"), nghĩa là :

$$y = \sin x \ ; \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

Với quy ước dùng chữ x để chỉ đối số và chữ y để chỉ hàm số thì hàm số ngược của hàm số $y = \sin x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ là hàm số $y = \arcsin x$.

• Hàm số $y = \arcsin x$ có miền xác định là khoảng đóng $[-1, 1]$ và miền giá trị là khoảng đóng $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số tăng. Đồ thị có dạng như hình 2.8(a).

2. Hàm số $y = \arccos x$

Xét song ánh $f : [0 ; \pi] \to [-1, 1]$; $x \mapsto \cos x$; hàm f có hàm số ngược $f^{-1} : y \mapsto \arccos y$, $x = \arccos y$, đọc là x bằng ac–cosy (x là cung có cos là y), nghĩa là

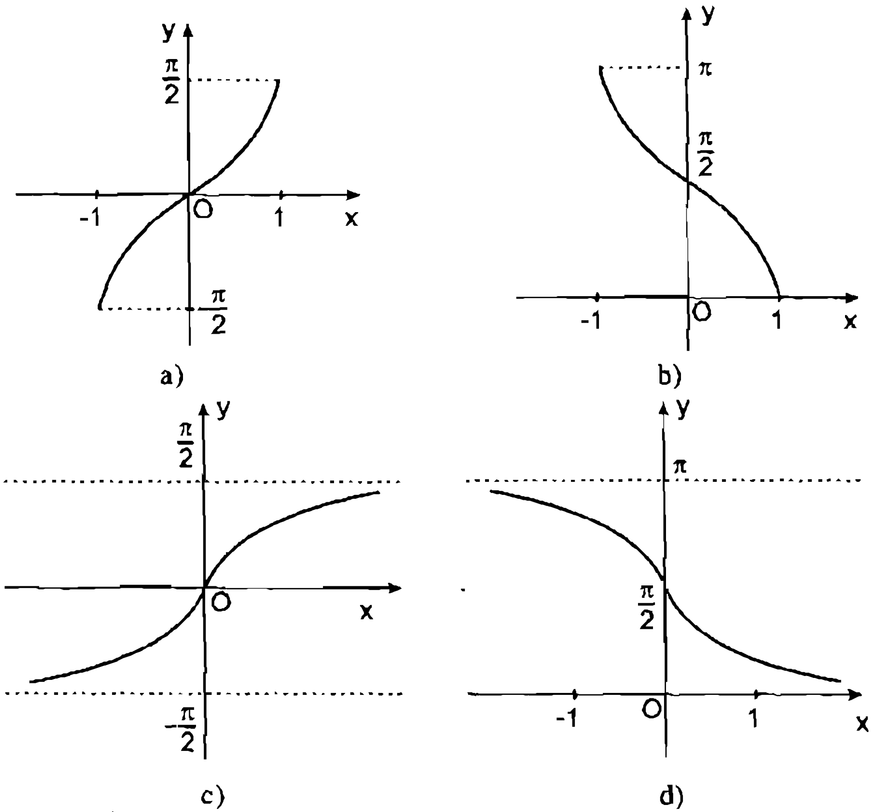
$$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \Leftrightarrow x = \arccos y$$

Hàm số ngược của hàm số $y = \cos x$ với $x \in [0 ; \pi]$ là hàm số $y = \arccos x$.

• Hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định là khoảng đóng $[-1, 1]$ và miền giá trị là khoảng đóng $[0, \pi]$ và là một hàm số giảm. Đồ thị của nó có dạng như hình 2.8 (b).

• Vì $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ nên có thể suy ra

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$



Hình 2.8

3. Hàm số y = arctgx

Hàm số y = tgx ; với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ là một song ánh ; hàm số ngược của nó là x = arctgy ; đọc là x bằng ac–tangy (x là cung có tang là y), nghĩa là :

$$y = \text{tg}x \; ; \; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \text{arctg}y.$$

Hàm số ngược của hàm số y = tgx với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ là y = arctgx

• Hàm số y = arctgx có miền xác định là toàn trục số **R** và miền giá trị là khoảng mở $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ và là hàm số tăng. Đồ thị của nó có dạng hình 2.8(c).

4. Hàm số y = arccotgx

Hàm số y = cotgx với $x \in (0, \pi)$ có hàm số ngược là x = arccotgy đọc là x bằng ac–côtangy (x là cung có côtang là y) ; nghĩa là :

$$y = \text{cotg}x \; ; \; 0 < x < \pi \Leftrightarrow x = \text{arccotg}y$$

Hàm số ngược của hàm số y = cotgx với $x \in (0, \pi)$ là hàm số y = arccotgx.

• Hàm số y = arccotgx có miền xác định là toàn trục số **R** và miền giá trị là khoảng mở $(0, \pi)$ và là hàm số giảm. Đồ thị của nó có dạng hình 2.8 (d).

(a) Đồ thị y = arcsinx ; (b) Đồ thị y = arccosx ; (c) Đồ thị y = arctgx ; (d) Đồ thị y = arccotgx.

• Có thể chứng minh được (coi là bài tập)

$$\text{arctg}x + \text{arccotg}x = \frac{\pi}{2}$$

• Hơn nữa ta còn có các hệ thức

(i) $\forall x \neq 0 : \text{arctg}x + \text{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,\text{sgn}\,x$

(ii) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, đặt : $\alpha = \text{arctg}a \; ; \; \beta = \text{arctg}b$

Khi đó :

$$\text{arctg}a + \text{arctg}b = \begin{cases} \text{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab}, & \text{nếu } ab < 1 \\ \dfrac{\pi}{2}\text{sgn}\,a, & \text{nếu } ab = 1 \\ \text{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi\,\text{sgn}\,a, & \text{nếu } ab > 1 \end{cases}$$

Chứng minh.

(i) Với $x > 0$, ta có $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

và $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)} = \frac{1}{x}$$

suy ra $$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

Cùng lập luận tương tự với $x < 0$, suy ra (i).

(ii) Theo giả thiết, ta có :

$$\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ và nếu } \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} \text{ thì}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{a+b}{1-ab}$$

Ta có :

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{hay } (\alpha > 0 \text{ và } \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \text{hay } (\alpha < 0 \text{ và } \beta > -\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{hay } (a > 0 \text{ và } b < \frac{1}{a}) \\ \text{hay } (a < 0 \text{ và } b > \frac{1}{a}) \end{cases} \Leftrightarrow ab < 1$$

• Nếu $ab < 1$ thì $\alpha + \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và do vậy

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha + \beta)) = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}$$

• Nếu $ab > 1$ và $a > 0$ thì $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ và do vậy

$$\alpha + \beta = \text{arctg}\frac{a+b}{1-ab} + \pi.$$

• Nếu $ab > 1$ và $a < 0$ thì $\alpha + \beta \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ và do vậy

$$\alpha + \beta = \text{arctg}\frac{a+b}{1-ab} - \pi.$$

• Nếu $ab = 1$ thì chính là trường hợp (i).

Vậy, tổng hợp lại ta có (ii).■

2.7. Các hàm số sơ cấp

Cho hai hàm số f và g, gọi *tổng* của f và g, viết là $f + g$; *hiệu*, viết $f - g$; *tích*, viết là fg và *thương* viết là $\frac{f}{g}$ là các hàm số được định nghĩa như sau :

tổng	$: (f + g)(x) := f(x) + g(x)$	(cộng hai hàm)
hiệu	$: (f - g)(x) := f(x) - g(x)$	(trừ hai hàm)
tích	$: (fg)(x) := f(x)g(x)$	(nhân hai hàm)
thương	$: \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$	(chia hai hàm)

Nếu gọi D_f, D_g là miền xác định của f và g tương ứng thì miền xác định của tổng, hiệu và tích của chúng là $D_f \cap D_g$; riêng miền xác định của $\frac{f}{g}$ là $D_f \cap D_{g'}$, trong đó

$$D_{g'} := \{x \in D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

Thí dụ. Cho $f(x) = 2x^3 + 4x + 1$,

$$g(x) = \sqrt{x-2}$$

Khi đó $f \pm g$, fg xác định với mọi $x \geq 2$, riêng $\frac{f}{g}$ xác định với mọi $x > 2$.

Người ta gọi *hàm số sơ cấp* là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng.

Thí dụ. Các hàm số :

$$y = \sin 8x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \; ; \; y = 2^{-x} + x^2 + 4 \; ;$$

$$y = \sqrt[5]{x^3} - \lg(3x + 7) + 1 \; ; \; y = \frac{x + \sqrt{1 - x^2} + \cos x}{x - \sqrt{1 - x^2}}$$

đều là những hàm số sơ cấp.

Trong các hàm số sơ cấp, người ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số : các *đa thức* và các *phân thức hữu tỉ* hay các *hàm số hữu tỉ* vì khi tính giá trị của các hàm số này người ta chỉ cần thực hiện các phép toán số học đối với biến.

Gọi đa thức bậc n, $n \in \mathbf{N}$, viết là $P_n(x)$, là biểu thức :

$$P_n(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \; ; \; a_k \in \mathbf{R}, \; k = \overline{0, n} \; ; \; a_n \neq 0.$$

Thí dụ. $\sqrt{2} + \lg 17 + \sin\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}x + 4x^2 + \sqrt{5}x^3$ là một đa thức bậc 3 đối với x.

Gọi phân thức hữu tỉ là hàm số có dạng tỉ số của hai đa thức :

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} := \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}, \; m, n \in \mathbf{N}$$

trong đó các hệ số a_i, $i = \overline{0, n}$; b_j, $j = \overline{0, m}$ là những số thực.

2.8. Đa thức nội suy

Bây giờ ta trở lại chú ý đã nêu trong phần chú ý mục 2.2 : ta muốn phục hồi một hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị $x \in [a, b]$ nào đó mà chỉ biết một số hữu hạn gồm $(n + 1)$ giá trị của hàm số đó tại các điểm rời rạc $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$. Các giá trị này thường được cung cấp qua thực nghiệm hay tính dưới dạng bảng sau :

x	x_0	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Khi đó ta đặt vấn đề *tìm một đa thức bậc n* :

(2.1) $$P_n(x) := a_0 + a_1x + ... + a_nx^n,\ a_n \neq 0$$

với $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, sao cho $P_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các mút x_i, $i = \overline{0, n}$, nghĩa là

(2.2) $$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$$

Đa thức $P_n(x)$ tìm được đó gọi là *đa thức nội suy*. Ta chọn đa thức nội suy hàm số $f(x)$ vì, như đã nói đa thức là loại hàm số đơn giản nhất, dễ tính nhất.

Định lí 2.1. Nếu tồn tại đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số $f(x)$ thì đa thức đó là duy nhất.

Chứng minh.

Thật vậy, giả sử có hai đa thức $P_n(x)$, $Q_n(x)$ cùng là đa thức nội suy của một hàm $f(x)$. Lúc đó theo định nghĩa, có

$$P_n(x_i) = y_i\ ;\ Q_n(x_i) = y_i$$

Vậy hiệu $P_n(x) - Q_n(x)$ cũng là một đa thức có bậc không vượt quá n và triệt tiêu tại $n + 1$ giá trị khác nhau x_i, $i = \overline{0, n}$ (vì $P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$, $i = \overline{0, n}$). Do vậy đa thức hiệu $P_n(x) - Q_n(x)$ phải đồng nhất bằng không, nghĩa là $P_n(x) \equiv Q_n(x)$. ■

Có thể có nhiều dạng đa thức nội suy nhưng do tính duy nhất, nhất thiết chúng có thể quy về nhau được. Dưới đây chúng ta sẽ xây dựng đa thức nội suy theo kiểu Lagrange, gọi là đa thức *nội suy Lagrange* và kí hiệu là $L_n(x)$. Ta đặt

$$(2.3)\quad l_i(x) = \frac{(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_o)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

$$i = \overline{0,n}$$

Hiển nhiên $l_i(x)$ là đa thức bậc n và

$$(2.4)\qquad l_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ nghĩa là } l_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ khi } j = i \\ 0 \text{ khi } j \neq i \end{cases}$$

$l_i(x)$ được gọi là *đa thức Lagrange cơ sở.*

Bây giờ ta lập đa thức

$$(2.5)\qquad L_n(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

Hiển nhiên $L_n(x)$ là đa thức bậc n thoả : $L_n(x_i) = y_i$

Do vậy $L_n(x)$ là đa thức nội suy bậc n của hàm số f(x). Bây giờ nêu một số đa thức nội suy thông dụng.

• *Nội suy bậc nhất* (hay là nội suy tuyến tính)

Trường hợp này n = 1 và có bảng :

x	x_o	x_1
y	y_o	y_1

Đa thức nội suy $L_1(x)$ có dạng

$$(2.6)\qquad L_1(x) = y_o l_o(x) + y_1 l_1(x)$$

trong đó

$$(2.7)\qquad \begin{cases} l_o(x) = \dfrac{x - x_1}{x_o - x_1} \\ l_1(x) = \dfrac{x - x_o}{x_1 - x_o} \end{cases}$$

• *Nội suy bậc hai*

Trường hợp này có 3 nút (n = 3) và có bảng :

x	x_o	x_1	x_2
y	y_o	y_1	y_2

Đa thức nội suy $L_2(x)$ có dạng :

$$(2.8)\qquad L_2(x) = y_o l_o(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

trong đó

$$(2.9)\qquad \begin{cases} l_o(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)} \\ l_1(x) = \dfrac{(x - x_o)(x - x_2)}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)} \\ l_2(x) = \dfrac{(x - x_o)(x - x_1)}{(x_2 - x_o)(x_2 - x_1)} \end{cases}$$

Dĩ nhiên, khi đã có đa thức nội suy, người ta còn đặt vấn đề đánh giá sai số giữa f(x) và $L_n(x)$ tại những điểm không phải là điểm nút. Tuy nhiên, đây là một bài toán tế nhị chúng ta chưa đủ phương tiện để trình bày chi tiết ở đây.

TÓM TẮT CHƯƠNG 2

• *Định nghĩa hàm số một biến số (thực)*

Ánh xạ $f : X \to Y$ với $X, Y \subseteq \mathbf{R}$ được gọi là hàm số một biến số (thực), X là miền xác định, thường kí hiệu là D_f, Y là miền giá trị, thường kí hiệu là R_f . $x \in D_f$ được gọi là biến số độc lập hay đối số, $f(x) \in R_f$ là biến số phụ thuộc hay hàm số, để chứng tỏ rằng f(x) ứng với x, thường viết

$$x \mapsto f(x) \text{ hoặc } y = f(x)$$

Đồ thị của hàm số y = f(x) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ có toạ độ (x, f(x)).

Cho hàm số $g : X \to Y$, $x \mapsto g(x)$, và hàm số $f : Y \to Z$, $y \mapsto f(y)$, với $X, Y, Z \subseteq \mathbf{R}$; khi đó hàm số $h : X \to Z$ được định nghĩa bởi

$$x \mapsto h(x) \; ; \; h(x) := f[g(x)]$$

được gọi là hàm hợp của hàm số f và hàm số g.

Cho song ánh $f : X \to Y$, $X, Y \subseteq \mathbf{R}$. Song ánh này làm ứng mỗi $x \in X$ với đúng một phần tử $y \in Y$ và ngược lại mỗi phần tử $y \in Y$ được ứng với đúng một phần tử $x \in X$, phép ứng y với x được gọi là hàm số ngược của hàm số f và được kí hiệu là f^{-1}, nghĩa là $f^{-1} : Y \to X$, $y \mapsto x = f^{-1}(y)$, và do đó :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Với quy ước dùng chữ x để chỉ biến số độc lập, chữ y để chỉ hàm số thì hàm số ngược của hàm số f(x) được viết là

$$f^{-1} : x \mapsto y = f^{-1}(x)$$

Khi đó, nếu biểu diễn trong cùng một hệ toạ độ thì đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số y = f(x) qua đường phân giác thứ nhất.

• *Các hàm số sơ cấp cơ bản*

Các hàm số sơ cấp cơ bản là các hàm số :

$y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$,

$y = a^{x}$, $a > 0 \; ; \; a \neq 1$,

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Hàm số $y = \log_a x$ là hàm ngược của hàm số $y = a^x$.

$y = \sin x,$

$y = \arcsin x.$

Hàm số $y = \arcsin x$ là hàm ngược của hàm số $y = \sin x$ với $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

$y = \cos x,$

$y = \arccos x.$

Hàm số $y = \arccos x$ là hàm ngược của hàm số $y = \cos x$ với $0 \le x \le \pi$.

$y = \operatorname{tg} x,$

$y = \operatorname{arctg} x.$

Hàm số $y = \operatorname{arctg} x$ là hàm ngược của hàm số $y = \operatorname{tg} x$ với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$y = \operatorname{cotg} x,$

$y = \operatorname{arccotg} x.$

Hàm số $y = \operatorname{arccotg} x$ là hàm ngược của hàm số $y = \operatorname{cotg} x$ với $0 < x < \pi$.

• *Hàm số sơ cấp*

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản.

Trong các hàm số sơ cấp người ta đặc biệt chú ý đến đa thức và phân thức hữu tỉ.

Một đa thức bậc n kí hiệu là $P_n(x)$ là hàm số sơ cấp có dạng :

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n \ ; \ a_i \in \mathbf{R} \ ; \ i = \overline{0,n}, \ a_n \neq 0.$$

Một phân thức hữu tỉ là một hàm sơ cấp có dạng $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ trong đó $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ là hai đa thức có bậc lần lượt là n và m.

Đa thức nội suy Lagrange

Nội suy tuyến tính :

Là đa thức bậc nhất, kí hiệu là $L_1(x)$, có đồ thị đi qua 2 điểm (x_0, y_0) và (x_1, y_1) cho trước và được tính theo công thức

$$L_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Nội suy bậc hai :

Là đa thức bậc hai, $L_2(x)$ có đồ thị đi qua 3 điểm (x_0, y_0), (x_1, y_1) và (x_2, y_2), được tính theo công thức

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của các hàm số :

1. $y = (x - 2)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$; 2. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$; 3. $y = \sqrt{\cos x^2}$;

4. $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$; 5. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$; 6. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x}$;

7. $y = \arccos(2\sin x)$; 8. $y = \lg[\cos(\lg x)]$; 9. $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

2. Tìm miền giá trị của các hàm số :

1. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; 2. $y = \lg(1 - 2\cos x)$;

3. $y = \arccos\dfrac{2x}{1 + x^2}$; 4. $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

3. Cho $f(x) := \lg x^2$; tìm $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$.

4. Cho $$f(x) := \begin{cases} 1+x & \text{khi } -\infty < x \le 0 \\ 2^x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Tìm $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

5. Cho $f(x) := \dfrac{1-x}{1+x}$, tìm $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $\dfrac{1}{f(x)}$.

6. Tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax + b$, biết rằng $f(0) = -2$ và $f(3) = 5$ (nội suy tuyến tính).

7. Tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ biết rằng $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$ (nội suy bậc hai).

8. Hàm số $y = \operatorname{sgn}x$ (đọc là dấu của x) được định nghĩa như sau :

$$\operatorname{sgn}x := \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị của hàm số đó và chứng minh rằng $|x| = x \operatorname{sgn}x$.

9. Giả sử hàm số $f(u)$ xác định khi $0 < u < 1$; tìm miền xác định của $f(\sin x)$, $f(\ln x)$.

10. Cho $f(x) := \dfrac{1}{2}(a^x + a^{-x})$; $a > 0$, chứng minh rằng

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y)$$

11. Giả sử $f(x) + f(y) = f(z)$. Xác định z nếu

1. $f(x) = ax$; 2. $f(x) = \operatorname{arctg}x$, $(|x| < 1)$;

3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; 4. $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

12. Tìm f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x)) nếu

1. $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$;   2. $f(x) = \text{sgn}x, g(x) = \dfrac{1}{x}$;

3. $f(x) := \begin{cases} 0 \text{ khi } x \le 0 \\ x \text{ khi } x > 0 \end{cases}$; $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{khi } x \le 0 \\ -x^2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

13. Tìm f(x) nếu

1. $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$;   2. $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ $(|x| \ge 2)$;

3. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$ $(x > 0)$;   4. $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$

14. Tìm hàm số ngược của các hàm số :

1. $y = 2x + 3$;

2. $y = x^2$ a) $-\infty < x \le 0$,   b) $0 \le x < +\infty$;

3. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ $(x \ne -1)$;

4. $y = \sqrt{1 - x^2}$ a) $-1 \le x \le 0$,   b) $0 \le x \le 1$;

5. $y = \text{sh}x$, với $\text{sh}x := \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $-\infty < x < +\infty$.

15. Hàm số f(x) xác định trong một khoảng đối xứng $(-l, l)$ được gọi là *chẵn* nếu $f(x) \equiv f(-x)$, lẻ nếu $f(x) \equiv -f(-x)$. Xét tính chẵn lẻ các hàm số :

1. $f(x) := 3x - x^3$;   2. $f(x) := \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2}$;

3. $f(x) := a^x + a^{-x}$ $(a > 0)$;   4. $f(x) := \ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$;

5. $f(x) := \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

16. Chứng minh rằng bất kì một hàm số nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-l, l)$ cũng có thể viết được dưới dạng tổng một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

17. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì các hàm số :

1. $f(x) := A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$;

2. $f(x) := \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$;

3. $f(x) := 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$;

4. $f(x) := \sin^2 x$;

5. $f(x) := \sin x^2$;

6. $f(x) := \sqrt{\mathrm{tg}x}$;

7. $f(x) := \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.

18. Viết các hàm số sau đây dưới dạng hàm số hợp :

1. $y = (3x^2 - 7x + 1)^3$; 2. $y = 2^{\mathrm{tg}\frac{1}{x}}$; 3. $y = \ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}$;

4. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$; 5. $y = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

19. Dùng phương pháp vẽ từng điểm, vẽ đồ thị các hàm số :

1. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2. $y = \cos 3x$; 3. $y = \cos\frac{x}{3}$;

4. $y = 3^x$; 5. $y = \log_2\frac{1}{x}$.

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

1. 1. $-1 \le x < 1$,

2. $4k^2\pi^2 \le x \le (2k+1)^2\pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$,

$\cdot 689.6$

3. $|x| \le \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ và $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4k-1)} \le |x| \le \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(4k+1)}$,

4. $\dfrac{1}{2k+1} < x < \dfrac{1}{2k}$ và $-\dfrac{1}{2k+1} < x < -\dfrac{1}{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,

5. $x > 0$, $x \ne n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

6. $-\dfrac{1}{3} \le x \le 1$, 7. $|x - k\pi| \le \dfrac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$,

8. $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

9. $k\pi + \dfrac{\pi}{4} \le x \le k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$

2. 1. $0 \le y \le 2\dfrac{1}{4}$, 2. $-\infty < y \le \lg 3$,

3. $0 \le y \le \pi$, 4. $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$

6. $f = \dfrac{7}{3}x - 2$

7. $f = \dfrac{7}{6}x^2 + \dfrac{17}{6}x + 1$

9. $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$; $1 < x < e$

11. 1. $z = x + y$, 2. $z = \dfrac{x+y}{1-xy}$,

3. $z = \dfrac{xy}{x+y}$, 4. $z = \dfrac{x+y}{1+xy}$

12. 1. $f(f(x)) = x^4$, $g(g(x)) = 2^{2^x}$, $f(g(x)) = 2^{2x}$, $g(f(x)) = 2^{x^2}$

2. $f(f(x)) = \operatorname{sgn} x$, $g(g(x)) = x$ $(x \ne 0)$,

$f(g(x)) = g(f(x)) = \operatorname{sgn} x$ $(x \ne 0)$

3. $f(f(x)) = f(x)$, $g(f(x)) = g(x)$, $g(g(x)) = f(g(x)) = 0$

13. 1. $x^2 - 5x + 6$, 2. $x^2 - 2$ $(|x| \geq 2)$,

3. $\dfrac{-x}{1-\sqrt{x^2+1}}$ $(x > 0)$, 4. $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$

14. 5. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

15. 1. lẻ, 2. chẵn, 3. chẵn, 4. lẻ, 5. lẻ.

16. Viết f(x) dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

17. 1. $T = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, 2. $T = 2\pi$, 3. $T = 6\pi$, 4. $T = \pi$, 5. không tuần hoàn, 6. $T = \pi$, 7. không tuần hoàn.

Chương 3

GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Chương này giới thiệu khái niệm giới hạn của hàm số một biến số, các giới hạn cơ bản, số e, công thức tính xấp xỉ số vô tỉ e với độ chính xác tùy ý ; cách khử các dạng vô định. Từ khái niệm giới hạn chuyển sang khái niệm liên tục của hàm số một biến số và các tính chất cơ bản của hàm số liên tục và ứng dụng để xây dựng thủ tục phân đôi, tìm nghiệm phương trình f(x) = 0.

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) ; nói rằng f(x) có giới hạn là L (hữu hạn) khi x dần đến x_0, $x_0 \in [a, b]$ và viết là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *nếu với bất kì dãy* $\{x_n\}$ trong $(a, b) \setminus \{x_0\}$ mà $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Theo thuật ngữ của giới hạn của dãy số thì định nghĩa trên có thể diễn đạt thành "hàm số f(x) có giới hạn là L nếu với bất kì dãy số $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0 thì dãy số $\{f(x_n)\}$ cũng hội tụ đến L".

Định nghĩa giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to x_0$ như trên có thuận lợi là chuyển khái niệm giới hạn của hàm số f(x) về khái niệm giới hạn của dãy số (đã quen thuộc ở mục trước) nhưng cũng có chỗ không tiện lợi là muốn chứng tỏ $f(x) \to L$ $(x \to x_0)$ thì phải chứng tỏ $f(x_n) \to L$ với mọi dãy $\{x_n\} \to x_0$. Vì thế người ta dùng định nghĩa tương đương (ở đây chúng ta không chứng minh điều này) với định nghĩa trên.

Định nghĩa.

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b), nói rằng f(x) có giới hạn là L (hữu hạn), khi x dần tới $x_0(x_0 \in [a, b])$ nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Thí dụ.

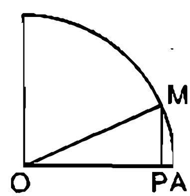
(a) Cho f(x) = C, C là hằng số ; ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, vì $f(x) = C$, $\forall x$, do vậy với bất kì $\delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$ luôn có $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$.

(b) Cho f(x) = x ; sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$ thì luôn có $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$.

(c) Cho f(x) = sinx ; sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Trước hết để ý rằng chúng ta xét quá trình $x \to 0$ nên có thể giả thiết $|x| < \frac{\pi}{2}$; tuy nhiên khi đó (xem hình 3.1) :



Hình 3.1

độ dài $\overset{\frown}{AM} = |x|$; $PM = |\sin x|$.

PM < AM (vì tam giác PAM vuông góc tại P).

Do vậy $|\sin x| < |x|$.

Như thế, cho trước $\varepsilon > 0$; chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$ luôn có $|x - 0| < \delta$ thì $|\sin x - 0| < \varepsilon$.

(d) Bạn đọc có thể chứng minh rằng $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

(e) Cho $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$; chứng minh rằng $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Để ý rằng điểm $x = 0$ không thuộc miền xác định của $f(x)$; nhưng với $x \neq 0$ thì $f(x) = |x|$; do vậy dùng kết quả thí dụ (b) có thể suy ra $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Trên đây chúng ta định nghĩa lim f(x) khi $x \to x_0$, bây giờ ta xét trường hợp $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Định nghĩa. Nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần tới dương vô cùng và viết là :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

nếu với bất kì $\varepsilon > 0$; tìm được $N > 0$ đủ lớn sao cho khi $x > N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần tới âm vô cùng và viết là

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

nếu với bất kì $\varepsilon > 0$, tìm được $N < 0$ có trị tuyệt đối đủ lớn sao cho khi $x < N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Thí dụ.

(a) Chứng minh rằng $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Thật vậy, với bất kì $\varepsilon > 0$; chỉ cần chọn $N > \frac{1}{\varepsilon}$ ta luôn có $x > N$ thì $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

(b) Bạn đọc dễ kiểm tra lại rằng $\lim_{x \to {+\infty \atop -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

Khi $f(x) \to 0$ $(x \to a)$, a có thể hữu hạn, có thể là vô cùng thì f(x) được gọi là một vô cùng bé trong quá trình $x \to a$; và khi $x \to a$ mà f(x) có trị tuyệt đối trở nên lớn hơn bất kì số dương nào cho trước thì ta nói rằng f(x) là một vô cùng lớn trong quá trình $x \to a$; khi đó ta cũng viết

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

nếu f(x) trở thành dương vô cùng và

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

nếu f(x) trở thành âm vô cùng.

Thí dụ.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; vì $\forall A > 0 : \forall \delta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$, thì $|x| < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > A$.

(b) Cũng như vậy $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$.

3.2. Các tính chất của giới hạn

Từ nay trở đi, khi viết $f(x) \to L (x \to a)$ nếu không nói gì thêm thì ta hiểu rằng L là hữu hạn, còn a có thể hữu hạn hoặc vô cùng.

Bây giờ ta phát biểu một số tính chất đơn giản của giới hạn của hàm số.

Định lí 3.1.

Cho $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$

Khi đó :

(a) $\lim\limits_{x \to a} Cf_1(x) = CL_1$, với C là hằng số

(b) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2$

(c) $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x)f_2(x)) = L_1L_2$

(d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ với điều kiện $L_2 \neq 0$.

Cách chứng minh định lí này cũng giống cách chứng minh định lí 1.2 chương 1 chỉ khác ở chỗ thay vì nói tìm được $N > 0$, ta nói tìm được $\delta > 0$ (khi a là hữu hạn) đề nghị bạn đọc tự kiểm tra lại. Chúng ta sẽ nêu một số nhận xét thú vị hơn.

• *Nhận xét.*

(1) Từ các thí dụ đã nêu và từ định lí 3.1 ta có thể suy ra : nếu $P_n(x)$ là một đa thức bậc n đối với x, nghĩa là :

$$P_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

thì
$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

(2) Hơn nữa, cũng từ thí dụ trên và từ định lí 3.1 suy ra : nếu $R(x)$ là một phân thức hữu tỉ, nghĩa là

$$R(x) := \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

thì
$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, \text{ miễn là } Q_m(x_0) \neq 0.$$

(3) Định lí 3.1 chưa khẳng định được trong các trường hợp khi L_1 là $+\infty$ và L_2 là $-\infty$, khi đó : về mặt hình thức ta có dạng $\infty - \infty$, đó là một *dạng vô định* ; nghĩa là chưa thể khẳng định được trong trường hợp đó $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$ có hay không.

Trong trường hợp (c), khi $L_1 = 0\ (\infty)$ và $L_2 = \infty\ (0)$ thì về mặt hình thức ta có dạng $0.\ \infty$, và cũng là một dạng vô định thứ hai.

Cuối cùng, trong trường hợp (d) ; khi $L_1 = 0(\infty)$ và $L_2 = 0(\infty)$ thì về mặt hình thức ta có dạng vô định thứ ba là $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Khi gặp các dạng vô định đó, muốn biết cụ thể phải tìm cách *để khử dạng vô định*. Có nhiều cách khác nhau để khử dạng vô định. Sau đây giới thiệu một số cách khử dạng vô định thông qua các thí dụ cụ thể.

Thí dụ.

(a) Xét $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$. Trong thí dụ này, khi $x \to 1$; ta gặp ngay dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ (xem nhận xét (2) ngay trên đây). Tuy nhiên dùng hằng thức :

$$x^p - 1 \equiv (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}) ;$$

p nguyên và $p > 1$; từ đó, dễ thấy rằng

$$\frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{(x - 1)(1 + x + \dots + x^{n-1})}{(x - 1)(1 + x + \dots + x^{m-1})}$$

Do đó, dùng nhận xét (2) ta có ngay

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m}.$$

(b) Xét $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; ở đây ta cũng gặp dạng vô định $\dfrac{0}{0}$; tuy nhiên, thực hiện phép đổi biến $\sqrt{1 + x} = y$ thì khi $x \to 0$, $y \to 1$; do đó :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2} \text{ (theo thí dụ (a))}.$$

(c) Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[5]{1 + x}}{x}$; ở đây ta viết

$$\frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[5]{1 + x}}{x} = \frac{(\sqrt[3]{1 + x} - 1) + (1 - \sqrt[5]{1 + x})}{x}.$$

Từ đó, dùng định lí 3.1 và thí dụ (b) ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$$

(d) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$; dạng vô định ở đây là $\dfrac{\infty}{\infty}$; để khử dạng vô định này ta có thể chia tử và mẫu cho $\sqrt{x}$ và được :

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$$

Do đó, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1$

(e) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$, dạng vô định ở đây là $\infty-\infty$; và khử dạng vô định này bằng cách nhân với lượng liên hợp và được :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

Từ đây, dùng cách làm của bài (d) có :

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\frac{1}{2}.$$

(f) Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$; để khử dạng vô định $\infty-\infty$ này ta có thể thực hiện phép đổi biến $x=y^6$, khi đó :

$$\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{1-y^3}-\frac{2}{1-y^2}=\frac{3(1+y)-2(1+y+y^2)}{(1-y)(1+y)(1+y+y^2)}$$

$$=\frac{(1-y)(1+2y)}{(1-y)(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}.$$

Như thế

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-3\sqrt{x}}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{1}{2}.$$

Qua những thí dụ trên gợi cho ta thấy rằng dùng định lí 3.1 có thể khử được các dạng vô định thuộc loại phân thức hữu tỉ (xem nhận xét (2) mục này). Để khử các dạng vô định khác chúng ta còn cần một số mệnh đề chi tiết hơn và một vài giới hạn thuộc loại dạng vô định điển hình.

Trước hết ta phát biểu mệnh đề tương tự mệnh đề ở phần giới hạn của dãy số.

Định lí 3.2.

Giả sử ba hàm số $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ thỏa bất đẳng thức

$$f(x)\le g(x)\le h(x) \text{ với } x\in(a,b)$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ *thì* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$

Bạn đọc có thể dùng cách chứng minh định lí 1.3 chương 1 để chứng minh định lí này. Từ định lí này và từ các thí dụ (c) và (d) có thể suy ra giới hạn rất quen thuộc (đã học ở lớp trung học) thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$:

(3.1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Sau đây giới thiệu một số thí dụ áp dụng giới hạn trên.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.1=1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.1=\dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin mx}{mx}\dfrac{mx}{nx}\dfrac{nx}{\sin nx}\right)=\dfrac{m}{n}$; với m, n là 2 số nguyên khác không.

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)+(1-\cos 3x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}.9$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4 \text{ (xem thí dụ (b))}$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cos 2x+1-\cos 2x}{1-\cos x}$

(dùng hằng thức $1-ab=(1-a)b+(1-b)$)

$$=\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x+\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos 2x+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}.4.\frac{x^2}{1-\cos x}\right)$$

$$=1+\frac{4}{2}.2=5.$$

Bây giờ cũng như trong mục giới hạn của dãy số chúng ta nêu một mệnh đề nói về sự tồn tại giới hạn của một hàm số đơn điệu.

Định lí 3.3.

*Cho f là một hàm số xác định, tăng (giảm) trên **R** ; khi đó, nếu f bị chặn trên nghĩa là tồn tại M sao cho f(x) ≤ M với mọi x ∈ **R** (bị chặn dưới nghĩa là tồn tại N sao cho f(x) ≥ N với mọi x ∈ **R**) thì tồn tại*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = L$$

Chúng ta không chứng minh định lí này mà chỉ lưu ý rằng nếu hàm f tăng mà không bị chặn trên (giảm mà không bị chặn dưới) thì không tồn tại giới hạn của f khi $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Bây giờ ta nêu thí dụ áp dụng định lí này, chứng minh rằng

(3.2) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Chứng minh. Thật vậy, trước kia trong phần nói về dãy đơn điệu tăng ta đã chứng minh được :

(3.3) $$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bây giờ ta chứng minh $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Để ý rằng bất kì một số dương x nào cũng có số tự nhiên n $(n \neq 0)$ sao cho $n \le x \le n+1$ nghĩa là $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$, từ đó

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức kép trên, dùng kết quả (3.3) và định lí 3.2 suy ra

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Hơn nữa, bằng cách đổi biến $x := -y$ ta cũng có thể chứng minh rằng

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \blacksquare$$

Bây giờ, ta đặt :

$$x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ và } y_n := 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

thì vì (xem thí dụ (e), 1.3.1 chương 1)

$$y_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

nên ta có bất đẳng thức kép : $x_n < y_n \le e$

Như đã biết $x_n \to e$; do đó $y_n \to e$. Hơn nữa với bất kì n, m nguyên dương, có :

$$y_{n+m} - y_n =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}\right\}$$

do vậy :

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\}.$$

Biểu thức trong dấu { } là tổng của một cấp số nhân có công bội là $\frac{1}{n+2}$, do vậy biểu thức đó bằng $\frac{(n+2)^n-1}{(n+1)(n+2)^{n-1}}$; do đó

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}$$

Mặt khác, vì $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$; nên $0 < e - y_n < \frac{1}{n!n}$

Từ bất đẳng thức kép trên và từ định nghĩa y_n có thể viết

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \tag{3.4}$$

với θ là một số dương gồm giữa 0 và 1.

Dùng biểu thức trên ta có thể tính số e với độ chính xác tùy ý ; chẳng hạn, dừng ở số hạng n = 7 thì :

$$\frac{\theta}{n!n} = \frac{1}{7!7} < 0,00003$$

Nếu lấy 5 số lẻ sau dấu phẩy thì :

$\frac{1}{2!} = 0,50000$; $\frac{1}{3!} = 0,16667$; $\frac{1}{4!} = 0,04167$; $\frac{1}{5!} = 0,00833$;

$\frac{1}{6!} = 0,00139$; $\frac{1}{7!} = 0,00020$; do đó

$e \approx 2,71826$ với sai số bé thua 0,00003.

Ngoài ra từ biểu diễn (3.4) cũng có thể khẳng định rằng số e là một số vô tỉ ; thật vậy, nếu e là một số hữu tỉ nghĩa là $e = \frac{m}{n}$, với m, n nguyên và chỉ có ước chung là ± 1, thì với số e này, dùng biểu diễn (3.4) có :

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \; ; 0 < \theta < 1.$$

Do đó, nếu nhân cả hai vế của đẳng thức trên với n! thì sẽ được một đẳng thức trong đó vế trái là một số nguyên trong khi vế phải là một số nguyên cộng với một phân số dạng $\frac{\theta}{n}$; chính mâu thuẫn này chứng tỏ rằng số e là một số vô tỉ.

Trước khi nêu một vài thí dụ chúng ta để ý rằng nếu đặt $u = \frac{1}{x}$ thì ta có một dạng khác của số e :

(3.5) $$\boxed{\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e}$$

Cả hai dạng $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ và $(1 + u)^{\frac{1}{u}}$ đều có dạng vô định thuộc loại 1^{∞} và chính các công thức (3.2) và (3.5) cho một gợi ý để khử dạng vô định 1^{∞}.

Sau đây nêu một vài thí dụ :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$; đây không phải là dạng vô định.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}} = 1$, ở đây cũng không phải dạng vô định.

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 1}{2x + 1}\right)^{\frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}} = 0$ vì ở đây là giới hạn của một đại lượng bé thua 1 lũy thừa vô cùng.

(d) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left\{\left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{x^2 + 1}{2}}\right\}^{\left(\frac{-2x^2}{x^2 + 1}\right)} = \frac{1}{e^2}$$

(e) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x}} = e$

(f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0}\left\{\left(1+\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right\}^{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}} = e^{\frac{3}{2}}$

(vì $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\cos 2x}\dfrac{(\cos x-1)+(1-\cos 2x)}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos 2x}.\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x^2}+\dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2}.4\right) =$

$= 1.\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}.4\right) = \dfrac{3}{2}$).

• *Chú ý.*

Cùng với nhận xét (3) phần định lí 3.1 ta kết luận rằng các dạng vô định đã gặp là $\infty-\infty$, $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ và 1^{∞} ; qua các thí dụ đã nêu cốt để giới thiệu các cách khử dạng vô định nói trên.

• *Số e và lôgarit tự nhiên.*

Hàm số lôgarit với cơ số e được gọi là lôgarit tự nhiên hay lôgarit nêpe (tên nhà toán học người Scotland là Neper) và kí hiệu là ln hay L ; nghĩa là

(3.6) $\qquad \ln x = \log_e x, \qquad x > 0$

nghĩa là nếu $y = \ln x$ thì có nghĩa là $x = e^y$, từ đó ta cũng suy ra

(3.7) $\qquad x = e^{\ln x}\ ;\ x > 0$

Từ lnx có thể chuyển dễ dàng sang lgx (và ngược lại) theo công thức quen thuộc

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \text{ và } \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}; \text{ với } \lg e = 0{,}434294...$$

$$\ln 10 = \frac{\lg 10}{\lg e} = \frac{1}{\lg e} = 2{,}302585...$$

nghĩa là : $\ln x = 2{,}302585 \lg x$ và $\lg x = 0{,}434294 \ln x$.

Từ cơ số e, ta xây dựng hàm số mũ $y = e^x$, là hàm số rất hay gặp trong các bài giảng về sau ; từ hàm số e^x lại xây dựng các hàm số hypebôn định nghĩa như sau :

Hàm số chx đọc là hàm số cos hypebôn :

(3.8) $$\mathrm{ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Hàm số shx đọc là hàm số sin hypebôn :

(3.9) $$\mathrm{sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các công thức sau :

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$$

$$\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x.\mathrm{ch}x \text{ ; } \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$$

$$\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}x.\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x.\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$$

v.v...

Ngoài ra, để ý rằng chx là hàm số chẵn và shx là hàm số lẻ nên cũng dễ dàng suy ra công thức của $\mathrm{sh}(x - y)$ và $\mathrm{ch}(x - y)$, v.v... Như vậy các hàm số hypebôn cũng có những công thức tương tự đối với các hàm số vòng (tức là các hàm số lượng giác).

3.3. Giới hạn một phía

Bây giờ ta xét lim f(x) khi $x \to x_0$ (hữu hạn) khi x luôn thoả $x < x_0$ hoặc khi $x > x_0$; khi đó nếu tồn tại lim f(x) thì ta nói rằng đó là các giới hạn một phía : giới hạn trái ($x \to x_0$, $x < x_0$) và giới hạn phải ($x \to x_0$, $x > x_0$) của f(x). Khi đó ta kí hiệu :

$$\text{(3.10)}\qquad \begin{aligned} &\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ ; (giới hạn trái)} \\ &\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) := f(x_0 + 0) \text{ ; (giới hạn phải)}^{*} \end{aligned}$$

Dĩ nhiên ngay tại $x = x_0$ có thể hàm f(x) không xác định và nói chung $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

Thí dụ.

Cho $f(x) := \frac{|x|}{x}$. Hàm số này không xác định tại $x = 0$ và với $x < 0$ thì $f(x) = -1$ và $x > 0$ thì $f(x) = +1$. Do vậy :

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1 \text{ và } \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Qua thí dụ này ta thấy rằng nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, tức là $x \to x_0$ cả hai phía : cả $x < x_0$ lẫn $x > x_0$ thì nhất thiết $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = L$.

Hơn nữa, cũng có thể chứng minh được rằng *điều kiện ắt có và đủ để*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ là } f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = L.$$

Bây giờ để kết thúc phần giới hạn chúng ta xét kĩ thêm về hai loại giới hạn đặc biệt : đó là vô cùng bé và vô cùng lớn (xem mục 1.3.8 chương 1).

3.4. Vô cùng bé và vô cùng lớn

Hàm số f(x) được gọi là một *vô cùng bé*, viết tắt là VCB khi $x \to x_0$ nếu : $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

(*) Một số sách dùng $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$ là $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$.

Hàm số g(x) được gọi là một vô cùng lớn, viết tắt là VCL khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Dĩ nhiên ở đây x_0 có thể là hữu hạn hoặc vô cùng.

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra lại rằng nếu f(x) là một VCB khi $x \to x_0$ thì $\dfrac{1}{f(x)}$ là một VCL khi $x \to x_0$; ngược lại nếu g(x) là một VCL khi $x \to x_0$ thì $\dfrac{1}{g(x)}$ là một VCB khi $x \to x_0$. Hơn nữa, các định lí về tổng, tích, thương các VCB cũng như tổng, tích, thương các VCL cũng được suy diễn trực tiếp từ định lí tổng, tích, thương các đại lượng có giới hạn.

Vấn đề chúng ta muốn xét kĩ hơn là xét *tốc độ hội tụ* về số không của các VCB trong cùng một quá trình $x \to x_0$ và dĩ nhiên *tốc độ tiến* ra vô cùng của các VCL cũng tương tự.

Cho $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$, ta nói rằng : $f_1(x)$ có bậc cao hơn $f_2(x)$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$$

và viết là

(3.11) $$f_1(x) = o(f_2(x)),\ x \to x_0$$

Khi đó ta cũng nói rằng $f_2(x)$ có bậc thấp hơn $f_1(x)$ trong quá trình $x \to x_0$.

$f_1(x)$ cùng bậc với $f_2(x)$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = C \neq 0$$

và viết là

(3.12) $$f_1(x) = O(f_2(x)),\ x \to x_0$$

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$ thì nói rằng $f_1(x)$ tương đương với $f_2(x)$ khi $x \to x_0$ và viết là

(3.13) $$f_1(x) \sim f_2(x),\ x \to x_0$$

Bây giờ nếu ta lấy trường hợp đặc biệt

$$f_2(x) := x^\alpha\ ;\ \alpha > 0$$

thì biểu thức $f(x) = o(x^\alpha)$ có nghĩa là $f(x)$ là một VCB có bậc cao hơn α so với VCB x khi $x \to 0$ và biểu thức $f(x) = O(x^\alpha)$ có nghĩa là $f(x)$ là một VCB có bậc α so với VCB x khi $x \to 0$, và cuối cùng biểu thức $f(x) \sim x^\alpha$ có nghĩa là $f(x)$ tương đương với VCB x^α khi $x \to 0$. Bạn đọc có thể kiểm tra lại khái niệm tương đương ở đây là quan hệ tương đương đã học trong giáo trình đại số, vì vậy thường hay dùng tính chất bắc cầu của quan hệ đó, nghĩa là, chẳng hạn :

Nếu $f_1(x) \sim f_2(x)$; $f_2(x) \sim f_3(x)$ thì $f_1(x) \sim f_3(x)$.

Thí dụ :

$$\sin x \sim x\ ;\ x \sim \mathrm{tg}x,\ \text{vậy } \sin x \sim \mathrm{tg}x.$$

Để thêm thuận lợi khi khử các dạng vô định người ta thường dùng tính chất sau.

Định lí 3.4.

Nếu $f(x)$, $g(x)$, $\bar{f}(x)$, $\bar{g}(x)$ là những VCB khi $x \to x_0$, nếu $f(x) \sim \bar{f}(x)$, $g(x) \sim \bar{g}(x)$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$$

Bạn đọc có thể tự kiểm tra lại kết quả này bằng cách dùng định nghĩa khái niệm VCB tương đương, ở đây chúng ta chỉ nêu một số thí dụ áp dụng.

Thí dụ :

Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ và khi $x \to 0$ thì $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$; $\sin x \sim x$; (xem thí dụ (b), định lí 3.2 chương này), do đó :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0.$$

Để kết thúc mục giới hạn, chúng ta lưu ý rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì có thể viết

(3.14) $$f(x)=L+\alpha(x)$$

trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to x_0$.

Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì với $\varepsilon > 0$ bất kì tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $|x-x_0|<\delta$ thì $|f(x)-L|<\varepsilon$; và bất đẳng thức cuối cùng đó chứng tỏ rằng $f(x)-L$ là một VCB khi $x \to x_0$.

Điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là nếu có thể viết được (3.14) thì $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

3.5. Sự liên tục của hàm số một biến số

Khái niệm liên tục của hàm số là một khái niệm rất cơ sở, đóng một vai trò trung tâm trong việc nghiên cứu hàm số cả về lí thuyết lẫn ứng dụng. Trong mục này chúng ta sẽ giới thiệu tính liên tục của hàm số và các tính chất của một hàm số liên tục cũng như giới thiệu một vài ứng dụng.

Định nghĩa.

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định trong khoảng (a, b) ; nói rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in (a, b)$ nếu

(3.15) $$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Bạn đọc lưu ý rằng điểm x_0 nhất thiết phải thuộc miền xác định của f(x).

Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm ấy. Vậy x_0 là điểm gián đoạn của f(x), nếu hoặc x_0 không thuộc miền xác định của f(x), hoặc x_0 thuộc miền xác định của f(x) nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ hay không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Thí dụ :

(a) Từ các thí dụ về giới hạn của hàm số ta suy ra các hàm số :

f(x) = x liên tục tại mọi x hữu hạn.

f(x) = sinx liên tục tại x = 0 ; hơn nữa với x_0 bất kì, có :

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}$$

$$|\sin x - \sin x_0| < 2\sin\frac{x - x_0}{2}, \text{ do đó } \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

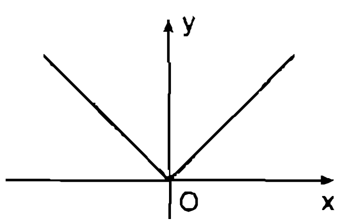
Vậy hàm số f(x) = sinx liên tục tại mọi $x \in \mathbf{R}$,

f(x) = C liên tục với mọi $x \in \mathbf{R}$ (C là hằng số),

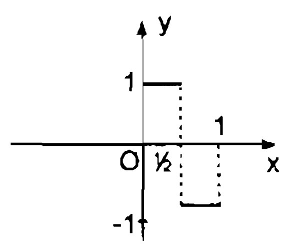
f(x) = cosx liên tục tại mọi $x \in \mathbf{R}$,

f(x) = tgx liên tục tại mọi x thuộc miền xác định, v.v...

(b) Xét hàm số f(x) = |x| (xem hình 3.2). Vì $\lim\limits_{x \to 0}(x) = 0$ nên hàm số này liên tục tại x = 0.



Hình 3.2



Hình 3.3

(c) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x - a}$ gián đoạn tại điểm $x = a$ vì tại $x = a$ hàm số không xác định.

(d) Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & \text{với những trường hợp khác} \end{cases}$

(xem hình 3.3) gián đoạn tại các điểm $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ và $x = 1$ vì chẳng hạn, tại $x = \dfrac{1}{2}$ ta có :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2} - 0} f(x) = 1 \text{ và } \lim_{x \to \frac{1}{2} + 0} f(x) = -1.$$

Hai giới hạn trái và phải của f(x) tại điểm $x = \dfrac{1}{2}$ khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$.

Nói rằng hàm số f(x) liên tục trong khoảng (x, b) nếu f(x) liên tục tại mọi $x \in (a, b)$.

Dùng các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương và định nghĩa liên tục của hàm số có thể suy ra :

Định lí 3.5.

Cho f(x), g(x) là hai hàm số liên tục trong khoảng (a, b), khi đó :

(a) f(x) + g(x) liên tục trong (a, b) ;

(b) f(x) g(x) liên tục trong (a, b) ;

Đặc biệt Cf(x) (C là hằng số) liên tục trong (a, b) ;

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trong (a, b) trừ ra những điểm x làm g(x) = 0.

Từ định lí trên suy ra :

Các *đa thức* là *những hàm số liên tục ; phân thức hữu tỉ* là *hàm số liên tục* trừ *các không điểm* của đa thức mẫu số ; các *hàm số lượng giác liên tục trong miền xác định* của nó.

Trước khi xét các tính chất khác của hàm số liên tục, lưu ý rằng một hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) \tag{3.16}$$

Từ (3.16) suy ra là muốn tìm giới hạn của f(x) khi $x \to x_0$ nếu đã biết f(x) liên tục tại x_0 thì chỉ việc thế một cách máy móc x bởi x_0 vào biểu thức của f(x).

Bây giờ ta phát biểu định lí về sự liên tục của hàm số hợp.

Định lí 3.6.

Giả sử hàm số g(x) xác định trong khoảng Y : = (c, d) và f(x) xác định trong khoảng X : = (a, b) và khi x biến thiên trong X thì f(x) không lấy giá trị ngoài khoảng Y. Nếu f(x) liên tục tại $x_0 \in X$ và g(x) liên tục tại điểm tương ứng $y_0 = f(x_0)$ thì hàm số hợp g(f(x)) liên tục tại x_0.

Chứng minh.

Cho trước $\varepsilon > 0$ tùy ý, vì g(y) liên tục tại $y = y_0$ nên tìm được $\sigma > 0$ (ứng với ε đã cho) sao cho khi

$$|y - y_0| < \sigma \text{ thì } |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Mặt khác vì f(x) liên tục tại $x = x_0$ nên với σ ở trên, tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ có

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma$$

Từ đó suy ra

$$\left|g\big(f(x)\big) - g(y_0)\right| = \left|g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)\right| < \varepsilon$$

Bất đẳng thức cuối cùng này chứng tỏ rằng khi $x \to x_0$, thì $g(f(x)) \to g(f(x_0))$, do vậy, theo định nghĩa, g(f(x)) liên tục tại x_0. ■

• *Nhận xét.*

(1) Từ định lí (3.5) và (3.6) có thể chứng minh được các hàm số sơ cấp liên tục trong miền xác định của chúng.

(2) Có thể dùng tính liên tục của hàm số để tìm một số giới hạn ; cụ thể chúng ta sẽ chứng minh các công thức :

(3.17) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \ ; \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

(3.18) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \ ; \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

(3.19) $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu \ ; \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Thật vậy ; ta có $\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

Vì hàm số lôgarit liên tục và vì $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to e$ khi $\alpha \to 0$ (công thức (3.5)) nên suy ra (3.17) ; đặc biệt khi $a = e$ thì (3.17) có dạng :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1 \ \text{hay}$$

(3.17a) $$\ln(1+\alpha) \sim \alpha \text{ khi } \alpha \to 0$$

Muốn chứng minh (3.18) ta đặt $a^\alpha - 1 = \beta$, khi đó theo tính liên tục của hàm số mũ, khi $\alpha \to 0$ thì $\beta \to 0$; hơn nữa $\alpha = \log_a(1+\beta)$, do đó dùng kết quả (3.17) có :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Như thế (3.18) đã được chứng minh. Đặc biệt, nếu lấy $\alpha = \frac{1}{n}$; $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ thì :

(3.17b) $$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$$

Cuối cùng ; để chứng minh (3.19) ta đặt $(1+\alpha)^\mu - 1 = \beta$; vì hàm số lũy thừa liên tục nên khi $\alpha \to 0$ thì $\beta \to 0$; lấy lôgarit hệ thức $(1+\alpha)^\mu = 1+\beta$ ta được : $\mu\ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta)$

Như thế

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}.\mu.\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

Theo (3.17a) $\ln(1+\beta) \sim \beta$; $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, do đó suy ra (3.19).

(3) Trong nhiều trường hợp ta phải tìm giới hạn của biểu thức $[u(x)]^{v(x)}$ khi $x \to x_0$, khi đó giả sử :

$$\lim_{x\to 0} u(x) = a \quad \text{và} \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = b$$

với $0 < a$, b là hai số hữu hạn.

Muốn thế ta viết u^v dưới dạng : $u^v = e^{v\ln u}$

Dùng tính liên tục của hàm số lôgarit ; có thể viết

$$\lim_{x\to x_0} v = b\,; \quad \lim_{x\to x_0} \ln u = \ln a$$

Do đó $$\lim_{x\to x_0} v\ln u = b\ln a$$

Và vì tính liên tục của hàm số mũ, ta có :

(3.20) $$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{b\ln a} = a^b$$

3.6. Điểm gián đoạn của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên đoạn [a, b], $x_0 \in [0, b]$ là một điểm gián đoạn của f. Ta nói rằng x_0 là một điểm gián đoạn bỏ được nếu

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)\,;$$

x_0 là một điểm gián đoạn loại một, nếu $f(x_0 - 0) \in \mathbf{R}$, $f(x_0 + 0) \in \mathbf{R}$ nhưng

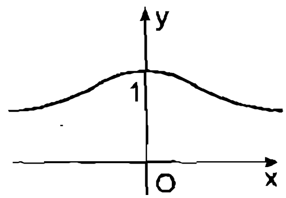
$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0),$$

hiệu $[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$ được gọi là bước nhảy của f tại x_0 ; x_0 là điểm gián đoạn loại hai nếu nó không thuộc hai loại trên.

Thí dụ.

(a) Xét hàm số
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Rõ ràng ở đây $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ và $f(0) = a$, do đó nếu $a \neq 1$ thì f(x) không liên tục tại $x = 0$; và nếu $a = 1$ thì hàm số f(x) liên tục tại $x = 0$; trường hợp này, ta nói rằng có thể lập lại sự liên tục của hàm số f(x) bằng cách xác định giá trị a thích hợp (h.3.4). Theo ý ấy người ta gọi $x = 0$ được gọi là điểm gián đoạn bỏ được.



Hình 3.4

(b) Xét hàm số cho ở thí dụ (d) mục trên. Ta có $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1$, $f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = -1$, nghĩa là khi $x \to \frac{1}{2}$ thì hai giới hạn trái và phải hữu hạn và khác nhau. Vậy $x = \frac{1}{2}$ là điểm gián đoạn loại 1. Bước nhảy của hàm số f tại $x = \frac{1}{2}$ là $f\left(\frac{1}{2} + 0\right) - f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -2$.

(c)
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ta có $f(0 - 0) = 0$, $f(0 + 0) = +\infty$. Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2. Vì $f(0 - 0) = f(0)$, hàm f liên tục trái tại $x = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ hữu tỉ} \\ 0 & x \text{ vô tỉ} \end{cases}$

gián đoạn tại mọi $x \in \mathbf{R}$. Mọi điểm đều là điểm gián đoạn loại 2 vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với mọi $x_0 \in \mathbf{R}$.

3.7. Các tính chất của hàm số liên tục

Sau đây chúng ta sẽ xây dựng một số tính chất cơ bản của hàm liên tục.

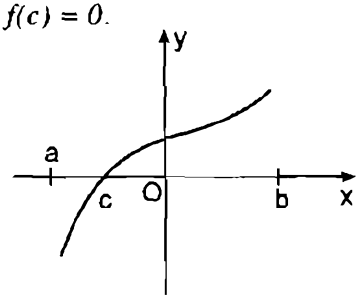
Định lí 3.7 (về giá trị trung gian)

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định, liên tục trong một khoảng $I := (\alpha, \beta)$; cho $a, b \in I$ sao cho $a < b$ và $f(a)f(b) < 0$.

Khi đó tồn tại một $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Minh hoạ hình học (h.3.5).

Định lí trên có một ý nghĩa hình học rất đơn giản và thú vị. Ta đã biết, đồ thị của một hàm số liên tục là đường liền (không đứt), định lí 3.7 nói rằng nếu đồ thị nằm ở hai phía đối với trục hoành thì sẽ cắt trục hoành.



Hình 3.5

Chứng minh định lí.

Giả thiết $f(a)\,f(b) < 0$ suy ra $f(a)$ trái dấu với $f(b)$ và để định ý ; ta giả thiết $f(a) < 0$ (nếu $f(a) > 0$ thì chỉ cần thay f bởi $-f$ và vẫn dùng lập luận đó) và sẽ đi tìm điểm c sao cho $f(c) = 0$, là giới hạn chung của 2 dãy.

Thật vậy, đầu tiên đặt $c_0 = a$ và $d_0 = b$, khi đó theo giả thiết $f(c_0) < 0$ và $f(d_0) > 0$; đặt $u_0 := \dfrac{c_0 + d_0}{2}$; nếu $f(u_0) = 0$ thì $c = u_0$; nếu $f(u_0) < 0$ thì đặt $c_1 := u_0$, $d_1 := d_0$; nếu $f(u_0) > 0$ thì đặt $c_1 := c_0$ và $d_1 := u_0$;

lại xét $[c_1, d_1]$ ta lại có $f(c_1)f(d_1) < 0$, do vậy tiếp tục đặt $u_1 := \frac{c_1 + d_1}{2}$ và quá trình tiếp diễn và nói chung, với cách đặt như trên (ứng với mút và giá trị hàm số tại đó là âm (dương) thì đặt là $c_n(d_n)$) ; cứ như thế ta luôn có $f(c_n) < 0$ và $f(d_n) > 0$; tiếp tục đặt $u_n = \frac{1}{2}(c_n + d_n)$. Nếu $f(u_n) = 0$ thì hiển nhiên $c = u_n$ và chính c là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nếu

$f(u_n) < 0$ thì đặt $c_{n+1} = u_n$ và $d_{n+1} = d_n$;

$f(u_n) > 0$ thì đặt $c_{n+1} = c_n$ và $d_{n+1} = u_n$.

Bây giờ ta giả sử quá trình trên không kết thúc (nếu không thì đã tìm được nghiệm c rồi !). Khi đó, ta có 2 dãy số $\{c_n\}$ và $\{d_n\}$, dĩ nhiên hai dãy đó hội tụ (xem định lí 1.4 chương 1) và có chung giới hạn là c. Vì $f(c_n) < 0$ nên theo giả thiết liên tục của f(x), $\lim f(c_n) = f(\lim c_n) = f(c) \leq 0$, tương tự $\lim f(d_n) = f(\lim d_n) = f(c) \geq 0$, do đó $f(c) = 0$. ■

• Thủ tục chọn các điểm u_n ở trên được gọi là *thủ tục phân đôi*. Người ta thường dùng thủ tục này để giải phương trình $f(x) = 0$ khi biết khoảng chứa nghiệm.

Thí dụ.

Tìm một nghiệm trong khoảng [1, 2] của phương trình bậc ba :

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Ta nhận thấy $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$,

$$u_o = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2},\quad f(u_o) = f\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \; ; \; u_1 = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} \; ;$$

$$f(u_1) = f\left(\frac{5}{4}\right) < 0 \; ; \; u_2 = \frac{\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{11}{8} \; ; \; f\left(\frac{11}{8}\right) > 0 \; ;$$

$$f(u_3) = \frac{\left(\frac{5}{4} + \frac{11}{8}\right)}{2} = \frac{21}{16} ; f\left(\frac{21}{16}\right) < 0 ;$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{21}{16} + \frac{11}{8}\right) = \frac{43}{32} ; f\left(\frac{43}{32}\right) > 0.$$

Như vậy, chẳng hạn, ta dừng thủ tục phân đôi ở u_4 thì có thể khẳng định rằng nghiệm x_0 của phương trình bậc ba $x^3 - x - 1 = 0$ nằm trong khoảng $\left[\frac{21}{16}, \frac{43}{32}\right]$.

Định lí trên có một hệ quả hiển nhiên là

Hệ quả 3.1.

Cho f(x) là một hàm số xác định, liên tục trong khoảng [a, b]. Khi đó f(x) lấy ít nhất một lần mọi giá trị nằm giữa f(a) và f(b).

Thật vậy, để định ý, giả sử $f(a) < f(b)$ và giả sử t là một số gồm giữa f(a) và f(b) ; nghĩa là $f(a) < t < f(b)$, khi đó tồn tại điểm giá trị $c : a < c < b$ sao cho $f(c) = t$. Thật vậy, đặt $g(x) = f(x) - t$; khi đó $g(a) < 0$ và $g(b) > 0$, do đó, theo định lí (dĩ nhiên g(x) cũng liên tục trong [a, b]) trên, tồn tại c thoả mãn $g(c) = 0$, tức là $f(c) - t = 0$, tức là $f(c) = t$

Chính vì nội dung của hệ quả này mà định lí trên mang tên định lí về các giá trị trung gian của hàm liên tục.

Thí dụ

Xét hàm số $f(x) = \sin x$; như đã biết, hàm số sinx liên tục, chẳng hạn trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; hơn nữa $\sin 0 = 0$ và $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; do vậy, với $0 < r < 1$, phương trình $\sin x = r$ tồn tại ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Định lí 3.7 đã nói về sự tồn tại các giá trị trung gian của một hàm liên tục trong khoảng (a, b) ; một câu hỏi rất tự nhiên là ngay tại các mút a và b thì f(x) có dáng điệu như thế nào ? Chẳng hạn xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, khi đó tập các giá trị của f(x) tương ứng là $[1, +\infty)$, như thế cận trên (xem 1.3.6 chương 1) của f(x) là $+\infty$; bây giờ lại xét hàm số $g(x) = x$, $x \in [0, 1)$ và tập các giá trị của g(x) lại là khoảng [0, 1) và cận trên của g(x) là 1 nhưng không bao giờ đạt được 1 ; nếu ta xét thêm hàm số $h(x) = x$, $x \in [0, 1]$ thì tập các giá trị của h(x) là [0, 1], cận trên đạt được của h(x) là 1.

Ta cũng lưu ý rằng cả 3 hàm f(x), g(x) và h(x) liên tục trong (0, 1), như thế điều khác nhau giữa ba hàm số đó là gì ? Định lí Weierstrass về cận trên của một hàm liên tục trả lời câu hỏi đó.

Định lí 3.8 (Weierstrass).

Cho f(x) là một hàm số xác định, liên tục trên một khoảng đóng giới nội [a, b], khi đó tập $J := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ *là giới nội, hơn nữa, tồn tại hai điểm* $c, d \in [a, b]$ *sao cho* $f(d) = \sup f(x)$ *và* $f(c) = \inf f(x)$, *với* $x \in [a, b]$.

Định lí này thường được phát biểu dưới dạng ngắn gọn là *"một hàm số liên tục f(x) trên một khoảng đóng giới nội thì đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng của nó"* và khi đó thay vì viết sup f(x) và inf f(x) ta viết max f(x) và min f(x).

Chứng minh.

Trước hết, ta chứng minh rằng $J := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ giới nội. Thật vậy, giả sử J không giới nội và có một cận trên là $+\infty$ (khi có cận dưới là $-\infty$ thì chỉ cần thay f bởi $-f$ và dùng lập luận như cũ), khi đó với bất kì số nguyên dương N ; tìm được $x_N \in [a, b]$ sao cho $f(x_N) \geq N$; xét dãy $\{x_N\}$, $x_N \in [a, b]$ đó, dãy $\{x_N\}$ bị chặn, do đó theo định lí Bolzano – Weierstrass, tìm được một dãy con $\{x_{N_k}\}$ hội tụ tới một điểm $\in [a, b]$; mặt khác, theo giả thiết f(x) liên tục trong [a, b], do đó

$$f\left(\lim_k x_{N_k}\right) = \lim_k f\left(x_{N_k}\right)$$

Vì $f\left(x_{N_k}\right) \geq N_k$ và dãy $\{N_k\}$, dĩ nhiên theo định nghĩa, dần tới $+\infty$ và điều này, mâu thuẫn với giả thiết f(x) xác định trong [a, b]. Vậy, có thể biểu diễn J = (m, M) với m := inf f(x) ; M := sup f(x).

Bây giờ để hoàn tất việc chứng minh định lí ta chứng minh rằng tồn tại c, d $\in$ [a, b] sao cho f(c) = m và f(d) = M. Dĩ nhiên chỉ cần chứng minh sự tồn tại của một trong hai giá trị đó, chẳng hạn ta chứng minh tồn tại d. Thật vậy vì M = supf(x), x $\in$ [a, b] ; nên theo định nghĩa, với bất kì $\varepsilon > 0$, luôn tìm được u $\in$ [a, b] sao cho $0 < M - f(u) < \varepsilon$ và bây giờ, với n nguyên dương, luôn tồn tại $u_n \in [a, b]$ sao cho $0 < M - f(u_n) < \frac{1}{n}$; như thế dãy $\{u_n\}$, $u_n \in [a, b]$ là một dãy giới nội, do đó lại cũng theo định lí 1.9 (Bolzano – Weierstrass) (xem 1.3.4 chương 1), có thể trích một dãy con $\left\{u_{n_k}\right\}$ hội tụ và vì tính liên tục của f(x), có :

$$f\left(\lim_k u_{n_k}\right) = \lim_k f(u_{n_k})$$

Xét bất đẳng thức kép

$$0 < M - f\left(u_{n_k}\right) < \frac{1}{n_k}$$

Chuyển qua giới hạn bất đẳng thức kép này, suy ra $M = \lim f\left(u_{n_k}\right)$ khi $n_k \to \infty$; vậy $d = \lim u_{n_k}$, do đó, tồn tại d $\in$ [a, b] sao cho f(d) = M, và định lí được chứng minh. ■

Để ý rằng bây giờ ta có thể viết J = [m, M] với m = minf(x) ; M = maxf(x), x $\in$ [a, b] và tập J được gọi là tập ảnh của tập [a, b] và định lí trên còn có một dạng phát biểu khác : "ảnh của một khoảng đóng giới nội qua một ánh xạ liên tục cũng là một khoảng đóng giới nội". Và như vậy, một câu hỏi rất tự nhiên đặt ra là với một khoảng thì sao ? Câu trả lời hầu như hiển nhiên : Ảnh của một khoảng (a, b) (a có thể là $-\infty$ và b có thể là $+\infty$) qua một ánh xạ là một hàm số liên tục cũng là một khoảng nào đó.

Thật vậy, giả sử $f(x_1) < f(x'_1)$ là 2 ảnh của f(x) với $x_1, x'_1 \in (a, b)$; khi đó, nếu đặt $c_1 := f(x_1)$ và $d_1 := f(x'_1)$ thì theo hệ quả trên, hàm liên tục f(x) lấy tất cả các giá trị từ c_1 đến d_1 và từ đó suy ra điều kết luận của mệnh đề trên nếu ta thừa nhận một điều gần như hiển nhiên là điều kiện ắt có và đủ để một tập con $J \subseteq \mathbf{R}$ là một khoảng là với bất kì u, v ; u < v và $u, v \in J$ thì khoảng đóng $[u, v] \subset J$.

Trên kia, trong các mục nói về giới hạn của dãy và giới hạn của hàm số chúng ta đã khai thác các dãy và các hàm số đơn điệu và đã thiết lập được các mệnh đề về sự tồn tại giới hạn của các dãy số và dãy hàm số đơn điệu, bây giờ cũng tương tự, chúng ta thử khai thác tính đơn điệu của một hàm số liên tục để khai thác các mệnh đề chi tiết hơn.

Trước hết, nhắc lại khái niệm về ánh xạ :

Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Cho hai tập A, B ; cho một ánh xạ $f : A \to B$ và ánh xạ $g : B \to A$. Ánh xạ g được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f nếu $g(f(a)) = a$ với mọi $a \in A$ và $f(g(b)) = b$ với mọi $b \in B$.

Một ánh xạ g thoả tính chất đó khi và khi f là một song ánh, nghĩa là f(x) là một đơn ánh (nghĩa là nếu $f(a_1) = f(a_2)$ thì $a_1 = a_2$) và f cũng là một toàn ánh (nghĩa là với bất kì $b \in B$; phương trình $f(x) = b$ có ít nhất một nghiệm là phần tử của A). Nếu $b \in B$ thì g(b) là phần tử duy nhất của A, là nghiệm của phương trình $f(x) = b$; điều đó chứng tỏ rằng nếu tồn tại ánh xạ g thoả ánh xạ ngược của ánh xạ f thì ánh xạ g đó là duy nhất và thường được kí hiệu là f^{-1}.

Bây giờ ta nêu đặc điểm của một đơn ánh liên tục.

Định lí 3.9.

Cho f là một hàm số xác định, liên tục trong khoảng (a, b), giả sử f là đơn ánh. Khi đó :

Nếu $u < v$; $u, v \in (a, b)$ sao cho $f(u) < f(v)$ thì với bất kì $w \in (u, v)$ có : $f(u) < f(w) < f(v)$.

Chứng minh.

Chúng ta sẽ dùng lập luận phản chứng để chứng minh mệnh đề này. Thật vậy, nếu f(u) < f(v) < f(w) thì từ giả thiết liên tục của f và từ định lí về các giá trị trung gian của một hàm số liên tục, suy ra f(v) là giá trị trung gian của f(u) và f(w), do đó sẽ là ảnh của một $v' \in [u, w]$, nghĩa là $f(v') = f(v)$ với $v' \leq w < v$, do vậy $v' \neq v$ và điều này mâu thuẫn với giả thiết đơn ánh của f. Cũng lập luận tương tự nếu f(w) < f(u) < f(v). Như thế cả hai trường hợp hoặc f(u) < f(v) < f(w) hoặc f(w) < f(u) < f(v) đều không thể xảy ra, do đó chỉ có thể xảy ra f(u) < f(w) < f(v). ■

Mệnh đề trên còn có thể phát biểu "ảnh của khoảng (u, v) *qua hàm số liên tục, đơn ánh f là khoảng* (f(u), f(v)) hay khoảng (f(v), f(u)) tuỳ theo f tăng ngặt hay giảm ngặt" và từ đó gợi cho chúng ta ý thức về tính tăng ngặt của hàm số f, cụ thể là

Hệ quả 3.2.

Cho f, một hàm số liên tục, đơn ảnh, xác định trên khoảng (a, b) ; cho $a', b' \in (a, b)$ với $a' < b'$. Khi đó :

- *Nếu $f(a') < f(b')$ thì f là tăng ngặt trên $[a', b']$, nghĩa là $f(u) < f(v)$ nếu $a' < u < v < b'$.*

- *Nếu $f(a') > f(b')$ thì f là giảm ngặt trên $[a', b']$, nghĩa là $f(u) > f(v)$ nếu $a' < u < v < b'$.*

Thật vậy, ta hãy chứng minh điều khẳng định thứ nhất : vì $f(a') < f(b')$ nên nếu $a' < v < b'$, theo định lí trên có : $f(a') < f(v) < f(b')$; đặc biệt $f(a') < f(v)$ và điều này cũng vẫn đúng khi $v = b'$; bây giờ vì $f(a') < f(v)$, nếu $a' < u < v$, cũng theo định lí trên : $f(a') < f(u) < f(v)$, đặc biệt $f(u) < f(v)$, và điều này vẫn đúng khi $u = a'$. Muốn chứng minh điều khẳng định thứ hai chỉ cần thay f bởi $-f$. ■

Từ hai mệnh đề trên bây giờ có thể tìm được sự liên hệ giữa tính đơn điệu ngặt và tính đơn ánh của một hàm liên tục.

Định lí 3.10.

Điều kiện ắt có và đủ để một hàm số xác định, liên tục trên một khoảng (a, b) là một đơn ánh là hàm số f(x) đơn điệu ngặt trên khoảng đó.

Chứng minh.

Nếu f đơn điệu ngặt thì f là đơn ánh : cho $u \neq v$ khi đó, hoặc $u < v$ hoặc $v < u$; do vậy hoặc $f(u) < f(v)$ hoặc $f(v) < f(u)$, nghĩa là $f(u) \neq f(v)$ và f là đơn ánh. Nếu f là đơn ánh thì f đơn điệu ngặt : cho $a' < b'$, $a', b' \in (a, b)$ khi đó hoặc $f(a') < f(b')$ hoặc $f(a') > f(b')$, do vậy ta sẽ chứng minh :

hoặc (i) nếu $f(a') < f(b')$ thì f là tăng ngặt,

hoặc (ii) nếu $f(a') > f(b')$ thì f là giảm ngặt.

Xét (i) cho $u < v$, $u, v \in (a, b)$; đặt $w := \min(a', u)$ và $z := \max(b', v)$, khi đó $a', b', u, v \in [w, z]$.

Theo hệ quả vừa nêu trên, f đơn ánh nên f tăng ngặt trên $[w, z]$; vì $u \neq v$, $u, v \in [w, z]$ nên $f(u) < f(v)$ và u, v là 2 điểm bất kì $(u < v)$ trên (a, b) nên f tăng ngặt trên (a, b) ; muốn chứng minh phần (ii) chỉ cần thay f bởi $-f$ và dùng lập luận của phần chứng minh (i). ■

Bây giờ ta xét các đặc trưng của một song ánh liên tục và bắt đầu bằng việc chứng minh bổ đề

Bổ đề 3.1.

Cho f là một hàm số tăng ngặt, xác định, liên tục trên $I := (a, b)$ và cho một dãy $\{u_n\}$ lấy giá trị trong I. Khi đó hai mệnh đề sau đây tương đương :

(i) dãy $\{u_n\}$ hội tụ và có giới hạn thuộc I ;

(ii) dãy $\{f(u_n)\}$ hội tụ và có giới hạn thuộc tập ảnh $f(I)$.

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : điều này chính là tính chất của hàm số liên tục (định lí 3.7).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Cho $\{u_n\}$ là một dãy lấy giá trị trong I sao cho dãy $\{f(u_n)\}$ hội tụ và có giới hạn thuộc tập ảnh của f(I) ; khi đó có thể viết $\lim f(u_n) = f(s)$, với $s \in I$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ và $\lim u_n = s$. Thật vậy, cho $\varepsilon > 0$ bất kì, nếu $s \neq a$; $s \neq b$ thì có thể tìm được $\delta > 0$; $\delta < \varepsilon$ sao cho $[s - \delta, s + \delta] \subset I$ và khi đó thì $f(s - \delta) < f(x) < f(s + \delta)$ (theo giả thiết tăng ngặt của f(x)) ; hơn nữa $f(s) = \lim f(u_n)$ nên có thể tìm được N sao cho khi $n > N$ thì

$$f(s - \delta) < f(u_n) < f(s + \delta)$$

Từ đó, cũng vì tính tăng ngặt của hàm số f(x), suy ra $s - \delta < u_n < s + \delta$, nghĩa là với $n > N$ thì $|s - u_n| < \delta < \varepsilon$ và điều đó chứng tỏ rằng $\lim u_n = s$.

Bây giờ giả thiết s là cận trên của khoảng I ; nghĩa là $s = b$; khi đó có thể tìm được $\delta > 0$; $\delta < \varepsilon$ sao cho $s - \delta \in I$; vì $u_n \in I$ nên $f(u_n) \leq f(s) = \lim f(u_n)$ và do đó với N chọn thích hợp ; có $n > N$ kéo theo $f(s - \delta) < f(u_n) < f(s)$, do đó $s - \delta < u_n \leq s$ (vì f tăng ngặt), nghĩa là $s = \lim u_n$.

Trường hợp $s = a$ cũng lập luận tương tự. ■

Định lí 3.11.

Cho f là một hàm số xác định, liên tục trên một khoảng $I := (a, b)$; cho J là ảnh f(I) của I. Điều kiện ắt có và đủ để f là một song ánh từ I lên J là f đơn điệu ngặt. Khi đó f^{-1} cũng là một hàm số liên tục, tăng ngặt (giảm ngặt) nếu f tăng ngặt (giảm ngặt).

Chứng minh.

Hiển nhiên f là một toàn ánh từ I lên tập ảnh f(I), do đó f là song ánh từ I lên J khi và chỉ khi f là đơn ánh, nghĩa là theo định lí 3.10 khi và chỉ khi f đơn điệu ngặt. Như vậy để hoàn tất chứng minh định lí vừa nêu chỉ cần chứng minh phần còn lại nói về ánh xạ ngược f^{-1}.

Xét một dãy $\{w_n\}$ lấy giá trị trong j, giả sử dãy $\{w_n\}$ hội tụ và có giới hạn trong J, ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{f^{-1}(w_n)\}$ hội tụ và có giới hạn trong I và $\lim f^{-1}(w_n) = f^{-1}(\lim w_n)$.

Thật vậy, theo bổ đề 3.1 dãy $\{u_n\}$ định nghĩa bởi $u_n := f^{-1}(w_n)$ hội tụ (vì $\{f(u_n)\} = \{w_n\}$ hội tụ). Hơn nữa vì f liên tục nên $\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$ và hệ thức này có nghĩa là $f(\lim f^{-1}(w_n)) = \lim w_n$ và $\lim f^{-1}(w_n) = f^{-1}(\lim w_n)$ và do đó f^{-1} liên tục. Bây giờ giả sử f tăng ngặt và cho $u < v$, $u, v \in J$, nghĩa là $u = f(s)$; $v = f(t)$ với $s, t \in I$. Vì $u \neq v$ nên $s \neq t$; hoặc $s < t$ hoặc $s > t$. Từ $t < s$ suy ra $f(t) < f(s)$ và như thế $u > v$, điều đó mâu thuẫn với giả thiết $u < v$, vậy chỉ có thể $s < t$ nghĩa là $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, điều đó chứng tỏ rằng f^{-1} tăng ngặt vì u, v, $(u \neq v)$ lấy bất kì trên J. Tương tự, có thể chứng minh f^{-1} giảm ngặt khi f giảm ngặt. ■

Chú ý.

Với định lí này chúng ta cũng thấy lại các kết quả quen thuộc về hàm số ngược. Chẳng hạn xét hàm số x^n $(n \in N)$ trong $X := [0, \infty)$; khi đó tồn tại hàm số liên tục của căn thức bậc n :

$$x = \sqrt[n]{y} \text{ với } y \in Y := [0, \infty)$$

Bây giờ chúng ta xét đến một khía cạnh khác của hàm số liên tục, đó là tính liên tục đều, trước hết lấy thí dụ sau :

Thí dụ.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \in (0, 1]$; ta chia khoảng $(0, 1]$ thành các khoảng nhỏ bởi hệ phân điểm :

$$x_o = 0 ; x_1 = 10^{-3} ; x_2 = 2.10^{-3} ; \ldots ; x_{999} = 999.10^{-3} ; x_{1000} = 1.$$

Khi đó luôn có $x_i - x_{i-1} = 10^{-3}$, $i = \overline{1,1000}$

Xét hiệu

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{10^3}{2} - 10^3 = -\frac{10^3}{2}$$

$$f(x_3) - f(x_2) = \frac{10^3}{3} - \frac{10^3}{2} = -\frac{10^3}{6}$$

$$f(x_4) - f(x_3) = \frac{10^3}{4} - \frac{10^3}{3} = -\frac{10^3}{12}$$

. . . .

$$f(x_{1000}) - f(x_{999}) = 1 - \frac{10^3}{999} = -\frac{1}{999} \approx -10^{-3}$$

Lại xét hàm số $g(x) = x^2$; $x \in [0, 1]$, và dùng lại hệ phân điểm trên ta có :

$$g(x_1) - g(x_0) = 10^{-6}$$

$$g(x_2) - g(x_1) = (2.10^{-3})^2 - (10^{-3})^2 = 3.10^{-6}$$

$$g(x_3) - g(x_2) = (3.10^{-3})^2 - (2.10^{-3})^2 = 5.10^{-6}$$

. . . .

$$g(x_{1000}) - g(x_{999}) = 1999.10^{-6} \approx 2.10^{-3}$$

Ta nhận thấy rằng ở thí dụ này hàm số f(x) có độ lớn của hiệu $f(x_i) - f(x_{i-1})$ rất khác nhau từ -10^{-3} đến $-\frac{1}{2}10^3$, trong khi g(x) thì $g(x_i) - g(x_{i-1})$ có độ lớn gần nhau hơn, từ 2.10^{-3} đến 10^{-6} ; hai thí dụ này chỉ khác nhau ở chỗ miền xác định của f(x) là (0, 1] ; còn miền xác định của g(x) là [0, 1]. Điều đó gợi cho ta

Định nghĩa.

Hàm số f(x) xác định trong khoảng I được gọi là liên tục đều trong (a, b) nếu với $\varepsilon > 0$ bất kì, luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho với bất kì $u, v \in I$ thỏa $|u - v| < \delta$ thì $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Chú ý rằng, đây là một đòi hỏi khắt khe ; vì như đã biết, hàm số f(x) liên tục tại $x_\alpha \in (a, b)$, nghĩa là với $\varepsilon > 0$ bất kì, tìm được $\delta > 0$ sao cho $|x - x_\alpha| < \delta$ (dĩ nhiên ở đây δ phụ thuộc ε và còn phụ thuộc x_α nữa !) thì $|f(x) - f(x_\alpha)| < \varepsilon$; như thế tính liên tục đều đòi hỏi trong vô số δ_α (mỗi δ_α ứng với một x_α và có vô số không đếm được x_α trên (a, b)) có một δ chung nhất, dĩ nhiên δ đó là $\delta = \inf\limits_\alpha \delta_\alpha$.

Định lí sau đây cho một khẳng định về tính liên tục đều.

Định lí 3.12. (Heine).

Cho một hàm số f liên tục trên một khoảng đóng, giới nội [a, b], khi đó f liên tục đều trên [a, b].

Chứng minh.

Ta sẽ dùng lập luận phản chứng : giả sử f liên tục nhưng không đều trên [a, b], khi đó có thể tìm được $\varepsilon > 0$, và với mọi n nguyên dương hai điểm u_n và $v_n \in [a, b]$ sao cho $|u_n - v_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Xét 2 dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$, đó là các dãy giới nội, do đó theo định lí Bolzano – Weierstrass, tồn tại các dãy con $\{u_{n_k}\}$ và $\{v_{n_k}\}$ hội tụ, vì $\left|u_{n_k} - v_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ hay là $u_{n_k} - \frac{1}{n_k} < v_{n_k} < u_{n_k} + \frac{1}{n_k}$ và vì $\lim\limits_k n_k = \infty$, do đó $\lim u_{n_k} = \lim v_{n_k}$; mặt khác vì $\left|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\right| \geq \varepsilon$ với mọi k, nên chuyển bất đẳng thức đó qua giới hạn, có :

$$\left|f(\lim u_{n_k}) - f(\lim v_{n_k})\right| = \left|\lim f(u_{n_k}) - \lim f(v_n)_k\right| \geq \varepsilon$$

và điều đó mâu thuẫn với $\lim u_{n_k} = \lim v_{n_k}$. ■

TÓM TẮT CHƯƠNG 3

• *Định nghĩa giới hạn hàm số*

Cho hàm số f(x) xác định trong (a, b), nói rằng f(x) có giới hạn là L (hữu hạn) khi x dần đến $x_o \in [a, b]$ viết là

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

nếu với bất kì dãy $\{x_n\}$ trong $(a, b) \setminus \{x_o\}$ mà $x_n \to x_o$ thì :

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

hoặc là, một phát biểu tương đương :

Nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Nói rằng hàm số g(x) có giới hạn là L khi x dần tới dương (âm) vô cùng và viết là

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = L$$

nếu với bất kì $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $N > 0$ sao cho khi

$$x > N \ (|x| > N) \text{ thì } |f(x) - L| < \varepsilon$$

• *Các tính chất đơn giản của giới hạn hàm số*

Cho $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$; $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$

a có thể là hữu hạn hay vô cùng.

Khi đó $\lim_{x \to a} Cf_1(x) = CL_1$, C là hằng số

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \to a} f_1(x) f_2(x) = L_1 . L_2$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ với } L_2 \neq 0.$$

• *Tiêu chuẩn có giới hạn*

Cho f(x), g(x), h(x) thoả bất đẳng thức kép :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ x \in (a, b)$$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Cho f(x) là một hàm số đơn điệu không giảm (không tăng), nghĩa là $f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$ khi $x_1 \geq x_2$, khi đó, nếu f(x) bị chặn trên (dưới), nghĩa là tồn tại M (N) sao cho với mọi $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq N)$ thì

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f = L$$

Từ hai tiêu chuẩn trên có thể chứng minh hai công thức giới hạn cơ bản :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Có thể tính gần đúng số e theo công thức xấp xỉ :

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

với sai số không vượt quá $\frac{\theta_n}{n!n}$, trong đó θ_n là một số dương gồm giữa 0 và 1.

Có thể biểu diễn công thức về số e dưới một dạng tương đương khác

$$\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Hàm số $y = \log_e x$ được gọi là hàm lôgarit tự nhiên và thường kí hiệu là lnx hay Lx.

• *Giới hạn một phía*

Khi $x \to a$ (hữu hạn) và $x < (>)\ a$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ thì ta nói rằng f(x) có giới hạn trái (phải) khi $x \to a$ và viết

$$\lim_{x \to a-0} f(x) := f(a - 0), \text{ (giới hạn trái)}$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) := f(a + 0), \text{ (giới hạn phải)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = L$$

• *Vô cùng bé và vô cùng lớn*

Hàm số f(x) được gọi là vô cùng bé, viết tắt là VCB khi $x \to a$ nếu $f(x) \to 0$ khi $x \to a$; hàm số g(x) được gọi là một vô cùng lớn, viết tắt là VCL khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ hay } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Nghịch đảo của VCB là VCL và ngược lại.

Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là hai VCB khi $x \to a$, khi đó nếu

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0, \text{ viết là } f_1(x) = o(f_2(x))$$

và nói rằng $f_1(x)$ là VCB có bậc cao hơn VCB $f_2(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = C\ (\neq 0)$, viết là $f_1(x) = O(f_2(x))$ và nói là $f_1(x)$ cùng bậc với VCB $f_2(x)$.

Đặc biệt nếu $C = 1$ thì viết $f_1(x) \sim f_2(x)$ khi $x \to a$ và nói là VCB $f_1(x)$ tương đương với VCB $f_2(x)$.

Nếu khi $x \to a$, có $f(x) \sim \overline{f}(x)$, $g(x) \sim \overline{g}(x)$ thì :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$$

$$f(x)g(x) \sim \overline{f}(x)\overline{g}(x)$$

• *Sự liên tục của hàm số một biến số*

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong (a, b), nói rằng $f(x)$ liên tục tại $x_o \in (a, b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Nói rằng $f(x)$ xác định liên tục trong khoảng (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in (a, b)$.

Các hàm số sơ cấp liên tục trong miền xác định của chúng.

Từ tính liên tục của các hàm số sơ cấp có thể chứng minh được các công thức giới hạn sau :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e$$

đặc biệt $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\lg(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu$$

• *Điểm gián đoạn của hàm số*

Hàm số f(x) được gọi là gián đoạn tại x_0 nếu tại đó f(x) không liên tục, nghĩa là x_0 là điểm gián đoạn của f(x) nếu

hoặc là x_0 không thuộc miền xác định của f(x)

hoặc là x_0 thuộc miền xác định của f(x) nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì nói rằng x_0 là điểm gián đoạn loại một, những điểm gián đoạn không phải loại một đều gọi là gián đoạn loại hai.

• *Các tính chất của hàm số liên tục*

Định lí về giá trị trung gian của hàm số :

Cho f(x) xác định liên tục trong khoảng $I := (\alpha, \beta)$, cho $a, b \in I$ với $a < b$, khi đó nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Tính chất này thường được dùng để giải phương trình $f(x) = 0$ khi biết khoảng chứa nghiệm.

Hệ quả :

Nếu f(x) liên tục trong [a, b] thì f(x) lấy ít nhất một lần mọi giá trị nằm giữa f(a) và f(b).

Hơn nữa

Định lí Weierstrass :

Nếu f(x) liên tục trong khoảng đóng [a, b] thì f(x) đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trong [a, b], nghĩa là tồn tại $c, d \in [a, b]$ sao cho

$$m := f(c) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \text{ và } f(d) = \max_{x \in [a,b]} f(x) := M$$

Khi đó f(x) thoả $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$.

• *Sự liên tục đều*

Hàm số f(x) xác định trong (a, b) được gọi là liên tục đều trong (a, b) nếu với $\varepsilon > 0$ bất kì luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho với bất kì $u, v \in (a, b)$ thoả $|u - v| < \delta$ thì $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$.

Định lí (Heine).

Hàm số f(x) liên tục trong khoảng đóng, giới nội [a, b] thì f(x) liên tục đều trong [a, b].

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$, $x_n := n^{(-1)^n}$ không dần tới vô cùng nhưng cũng không bị chặn.

2. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

3. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{60}-2x+1}$; 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

4. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

5. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

6. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

7. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$;

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$.

8. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$;

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sin \ln(x + 1) - \sin \ln x]$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$;

8. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$ $(x > 0)$

9. Cho đồ thị của hàm số liên tục $y = f(x)$, cho trước điểm có hoành độ $x = a$, cho trước số $\varepsilon > 0$, hãy tìm số $\delta > 0$ sao cho khi $|x - a| < \delta$ có $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

10. Dùng định nghĩa "$\varepsilon - \delta$" để chứng minh hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại điểm $x = 5$ và điền vào chỗ trống bảng dưới đây :

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

11. Cho hàm số $f(x) := x + 0{,}001\ E(x)$, trong đó $E(x)$ là phần nguyên của x (xem thí dụ (d) mục 2.1 chương 2). Chứng minh rằng với mỗi $\varepsilon > 0{,}001$, có thể tìm được $\delta := \delta(\varepsilon, x) > 0$ sao cho khi $|x' - x| < \delta$ có $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ và với $0 < \varepsilon \le 0{,}001$ thì với bất kì giá trị nào cũng không tìm được δ thoả yêu cầu trên. Hàm số f(x) không liên tục tại những điểm nào ?

12. Xét sự liên tục của các hàm số

1. $f(x) = |x|$,

2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 4)}{(x-2)} & \text{nếu } x \neq 2 \\ A & \text{nếu } x = 2, \end{cases}$$

3. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$ và $f(0) = 0$.

4. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ nếu $x \neq 0$ và $f(0) = 0$,

5. $f(x) = 2x$ nếu $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 2 - x$ nếu $1 < x \le 2$,

6. $f(x) = \sin\pi x$ khi x hữu tỉ, $f(x) = 0$ khi x vô tỉ.

13. Cho $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{nếu } x < 0 \\ a + x & \text{nếu } x \ge 0 \end{cases}$

Hãy chọn số a sao cho f(x) liên tục.

14. Cho f và g là hai hàm số liên tục trên [a, b] và giả sử f = g tại mọi điểm hữu tỉ của [a, b]. Hỏi có thể kết luận f = g được không ?

15. Dùng phương pháp phân đôi tìm nghiệm dương của phương trình $1{,}8x^2 - \sin 10x = 0$ với sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}.

16. Xét xem trong ba hàm số $f = \sqrt{x}$, $g = x^2$ và $h = \cos x^2$ hàm nào liên tục đều trên $\mathbf{R}_+$

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

2. 1. (để ý : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

3. 1. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ (để ý x = 2 là không điểm của tử và mẫu),

2. $\frac{n(n+1)}{2}$,

3. $2\frac{1}{24}$ (viết $x^{100} - 2x + 1 = x^{100} - x - (x - 1)$

$$= x(x^{99} - 1) - (x - 1), \ldots),$$

4. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

4. 1. 1, 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 1. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$

(viết $\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x} = (\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1) - (\sqrt[n]{1+\beta x} - 1)$;

2. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$ (dùng hằng đẳng thức $ab - 1 = (a - 1)b + (b - 1)$).

6. 1. cosa, 2. $\frac{1}{4}$, 3. 14.

(dùng hằng thức $1 - abc = (1 - a)bc - c(b - 1) - (c - 1)$) ;

4. $-\frac{1}{12}$ (viết $\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} = (\sqrt{\cos x} - 1) - (\sqrt[3]{\cos x} - 1)$)

7. 1. $\frac{1}{12}$ (nhân tử và mẫu với $\sqrt{x} + 2$), 2. $\frac{1}{3}$.

8. $0,\ 1,\ e^{-2},\ e^{-\frac{1}{2}},\ 1,\ 0,\ 1,\ \ln x.$

10. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{10}$.

12. 1. Liên tục, 2. liên tục nếu $A = 4$ và gián đoạn tại $x = 2$ nếu $A \neq 4$, 3. liên tục, 4. liên tục, 5. không liên tục, 6. gián đoạn tại $x \neq k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

13. $a = 1$.

14. $f = g$. (Gọi x_0 là điểm vô tỉ, $x_0 \in [a, b]$, gọi α là số thập phân (hữu tỉ) xấp xỉ dưới x_0, viết đến 10^{-n}, vì $f = g$ tại những điểm hữu tỉ : $f(\alpha) = g(\alpha)$, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho khi $n \geq n_0$ có $\alpha \in [a, b]$:

$$f(x_0) - g(x_0) = f(x_0) - f(\alpha) - (g(x_0) - g(\alpha)).$$

Vì $|x_0 - \alpha| < 10^{-n}$ nên $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_1 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f(x_0) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } |g(x_0) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Do đó $\qquad |f(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon$

Vì ε tuỳ ý, suy ra $f(x_0) = g(x_0)$).

15. $0{,}69999 \pm 0{,}00001$

16. f liên tục đều trên $[0, \infty)$, g không liên tục đều trên $[0, \infty)$, h cũng không liên tục đều trên $[0, \infty)$.

Trong cả 3 trường hợp có thể giả thiết $0 \leq y < x$ và xét xem khi $x - y < \alpha$ có kéo theo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ hay không.

Với f, có : $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \dfrac{x - y}{2\sqrt{y}}$ nếu $y > 0$.

Muốn $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ dương và bé thua ε, chỉ cần $x - y < 2\varepsilon\sqrt{y}$ hay, nếu lấy $y \geq y_o > 0$ với y_o cố định, thì chỉ cần $x - y < 2\varepsilon\sqrt{y_o}$, do đó $\alpha = 2\varepsilon\sqrt{y_o}$, vì vậy có sự liên tục đều trên $[y_o, +\infty)$. Hơn nữa f liên tục nên liên tục đều trên đoạn $[0, y_o]$.

Với g, cũng tương tự, xét $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) > 2y(x - y)$. Dầu là α bé thì $x - y < \alpha$ không đảm bảo $x^2 - y^2 < \varepsilon$, vì chẳng hạn

$$x - y = \frac{\alpha}{2},\ y > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x^2 - y^2 > 1.$$

Vậy g không liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Với h không lập luận như trên được vì h không đơn điệu, nhưng do h có cực đại và cực tiểu liên tiếp nhau có :

$\cos x^2 = 1$ với $x^2 = 2k\pi$; $x = \sqrt{2k\pi} = x_k$, $k \in \mathbf{N}$

$\cos x^2 = -1$ với $x^2 = (2k + 1)\pi$, $x = \sqrt{(2k+1)\pi} = x'_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Có thể suy ra :

$$x'_k - x_k < \frac{\pi}{\sqrt{2k\pi}} \to 0\ (k \to \infty)$$

và
$$\left|h(x'_k) - h(x_k)\right| = 2$$

Điều đó chứng tỏ rằng h không liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Chương 4

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Chương này giới thiệu ngắn gọn đạo hàm và vi phân các cấp của hàm số một biến số.

4.1. Đạo hàm

Định nghĩa đạo hàm

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) nói rằng hàm số f(x) *khả vi tại điểm* $c \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

(4.1) $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = A, \qquad x \neq c$$

Số A ; giới hạn của tỉ số $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, $x \neq c$, khi $x \to c$ được gọi là *đạo hàm của hàm số* f(x) lấy tại diểm x = c ; và kí hiệu f'(c).

Nếu hàm số f(x) *khả vi tại mọi điểm* $x \in (a, b)$ thì ta nói rằng f(x) *khả vi trong khoảng* (a, b).

Trước khi nêu các thí dụ, ta nêu một vài nhận xét về tính khả vi của hàm số f(x).

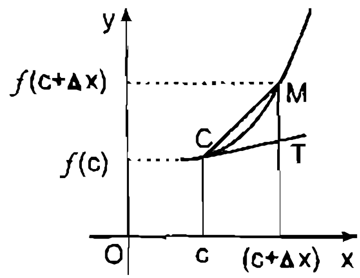
• *Nhận xét.*

(1) Nếu đặt $x - c := \Delta x$ thì biểu thức định nghĩa trở thành

(4.2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} := f'(c)$$

và như thế đạo hàm tại $x = c$ của hàm $f(x)$ chính là giới hạn của tỉ so giữa số gia của hàm số tại điểm $x = c$ (tức là hiệu $f(c + \Delta x) - f(c)$) với số gia của đối số tại $x = c$ (tức là hiệu $c + \Delta x - c$, Δx có thể âm hoặc dương, nhưng vì $x \neq c$ nên $\Delta x \neq 0$).

(2) Nếu vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$ trong một hệ toạ độ Đềcác vuông góc (xem hình 4.1) thì tỉ số $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ chính là hệ số góc của dây cung CM với $C(c, f(c))$ và $M(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$, nghĩa là tỉ số đó là tang của góc α, gồm giữa trục Ox và vectơ $\overline{CM}$.



Hình 4.1

Khi cho $\Delta x \to 0$ thì điểm M trên đồ thị tiến đến điểm C ; do vậy, cát tuyến CM tiến đến tiếp tuyến CT, như thế, về mặt hình học, đạo hàm tại mỗi điểm chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị của $f(x)$ tại điểm đó ; và một hàm số khả vi tại một điểm $x = c$ có nghĩa là tại điểm $x = c$, đồ thị của $f(x)$ có một tiếp tuyến duy nhất không vuông góc với trục Ox.

(3) Dùng liên hệ giữa giới hạn và vô cùng bé có thể biểu diễn hệ thức định nghĩa khả vi (4.2) dưới dạng

$$f(c + \Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + o(\Delta x) \tag{4.3}$$

trong đó như đã biết $o(\Delta x)$ là một VCB bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

(4) Từ hệ thức (4.3) dễ dàng suy ra f khả vi tại $c \in (a, b)$ thì f liên tục tại c. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Bây giờ nêu một vài thí dụ đơn giản.

Thí dụ.

(a) $f(x) = c$, $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = 0$ vì luôn có $f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

(b) $f(x) = x$; $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = 1$ vì

$$f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

(c) $f(x) = \sin x$; $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = \cos x$

Thật vậy

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

và $$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên và dùng công thức (3.1) chương 3 và tính liên tục của hàm số $\cos x$, suy ra $f'(x) = \cos x$.

(d) $f(x) = e^x$, $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = e^x$.

Thật vậy $f(x + \Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$

và $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên (cho $\Delta x \to 0$) và dùng công thức (3.18) chương 3 sẽ suy ra $f'(x) = e^x$.

Định lí 4.1.

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số xác định trên (a, b) ; giả sử f(x) và g(x) khả vi tại $x \in (a, b)$. Khi đó f(x) + g(x), f(x)g(x) cũng khả vi tại x và

(i) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(ii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(ii') *đặc biệt* $(cf(x))' = cf'(x)$

Chứng minh.

Công thức (i) là hệ quả của định lí giới hạn. Muốn chứng minh (ii) chỉ cần để ý rằng

$$f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + \\ + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)].$$

Công thức (i) và (ii') cho phép nói rằng phép toán lấy đạo hàm là một phép ánh xạ tuyến tính. ■

Định lí 4.2 (Định lí về đạo hàm của hàm số hợp).

Giả sử :

1) Hàm $u = g(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và lấy giá trị trong khoảng (c, d), $g(x)$ khả vi tại $e \in (a, b)$.

2) Hàm $y = f(x)$ xác định trong (c, d) và khả vi tại $u_e = g(e)$.

Khi đó hàm hợp $y := f[g(x)]$ khả vi tại e và $(f[g(x)])' = f'_u(g(x))g'(x)$ trong đó kí hiệu $f'_u(g(x))$ chỉ đạo hàm của f đối với u và lấy tại $u_e = g(e)$.

Chứng minh.

Theo công thức (4.3) hàm f khả vi tại u_e, có

$$f(u_e + \Delta u) - f(u_e) = f'_u(u_e)\Delta u + o(\Delta x) \qquad (*)$$

Mặt khác, hàm g(x) khả vi tại e nên :

$$\Delta u = g(e + \Delta x) - g(e) = g'_x(e)\Delta x + o(\Delta x)$$

Thế giá trị Δu vào biểu thức (*), được :

$$f(u_e + \Delta u) - f(u_e) = f'_u(u_e)\,[g'_x(e)\Delta x + o(\Delta x)] + o(\Delta u)$$

$$= f'_u(g(e))g'_x(e)\Delta x + f'_u(u_e)o(\Delta x) + o(\Delta u)$$

Chia cả hai vế cho Δx và chú ý $o(\Delta x)$ là VCB bậc cao hơn Δx và vì u khả vi tại e nên u liên tục tại e (nhận xét (4) ở trên) ; do vậy khi $\Delta x \to 0$ thì $o(\Delta u) \to 0$. ■

Từ hai định lí trên, có thể bổ sung thêm một số thí dụ.

Thí dụ.

(1) $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$

Viết f = sinu ; u = x + $\frac{\pi}{2}$, như thế định lí đạo hàm hàm số hợp cho

$$f'(x) = (\sin u)'_u . u'_x = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).1 = -\sin x$$

(2) $f(x) = a^x$; $f'(x) = a^x \ln a$

Chỉ cần viết $a^x = e^{x\ln a} = e^u$; $u = x\ln a$, có

$$(a^x)' = (e^u)'_u . u'_x = e^{x\ln a}.\ln a = a^x \ln a.$$

Định lí 4.3 (Định lí về đạo hàm của hàm số ngược)

Giả sử f : [a, b] → [c, d] là một song ánh liên tục, g = f^{-1} : [c, d] → [a, b] là hàm số ngược của nó. Nếu f có đạo hàm tại x_0 ∈ [a, b] và $f'(x_0) \neq 0$ thì g có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Chứng minh.

Nếu $y \in (c, d)$, $y \neq y_0$, ta có $x = g(y) \neq g(x_0)$, hay $x \neq x_0$. Khi đó

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Khi $y \to y_0$ thì $g(y) \to g(y_0)$, vì g liên tục trên (c, d). Do đó $x \to x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ■

Sau đây là một số thí dụ ứng dụng định lí trên.

(a) $y = \log_a x$ là hàm số ngược của hàm số $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$. Vì $x'(y) = a^y \ln a$, nên $y'(x) = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}$.

Đặc biệt, nếu y = lnx thì $y' = \frac{1}{x}$.

(b) y = arcsinx là hàm số ngược của x = siny, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Vì x'(y) = cosy, nên

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tương tự như vậy, ta có

(c) y = arccosx có đạo hàm $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) y = arctgx có đạo hàm $y' = \frac{1}{1+x^2}$

4.2. Vi phân

Như đã biết, theo định nghĩa, một hàm số f(x) khả vi tại x, có (công thức (4.3))

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Tích số $f'(x)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của f(x), lấy tại điểm x, và kí hiệu là df, nói khác đi :

(4.4) $$df = f'(x)\Delta x$$

Vi phân của hàm số f(df) *bằng tích số của đạo hàm* (f'(x)) *nhân với số gia của đối số* (Δx). Đặc biệt, nếu xét hàm số f(x) = x thì dx = (1).Δx, nghĩa là Δx = dx. Do vậy công thức trên lại có dạng :

(4.5) $$df = f'(x)dx$$

hoặc tương đương $f'(x) = \frac{df}{dx}$

nghĩa là đạo hàm của hàm số bằng thương số giữa vi phân của hàm số đối với đối số và vi phân của đối số.

Tổng quát hơn, cho f(u) là một hàm số khả vi đối với u, và $u = g(x)$ là một hàm số khả vi đối với x, khi đó định lí đạo hàm hàm số hợp đã khẳng định f(g(x)) cũng khả vi đối với x. Hơn nữa, trong trường hợp này ta cũng có :

$$df = f'_x dx$$

Điều đó có nghĩa là, trong mọi trường hợp, dẫu f là một hàm số phụ thuộc biến độc lập x hay phụ thuộc x thông qua một biến trung gian u nào đó, ta luôn có vi phân của hàm số bằng tích đạo hàm của hàm số đối với đối số và vi phân của đối số, vì thế người ta nói rằng *vi phân có tính bất biến.*

Bây giờ ta chứng minh điều khẳng định trên. Thật vậy, vì f(u) khả vi đối với u nên ta có :

$$df = f'_u du$$

Mặt khác, $u = g(x)$ khả vi đối với x nên :

$$du = g'_x\,dx\,.$$

Thế du vào biểu thức df ta có

$df = f'_u\,g'_x\,dx = f'_x\,dx$ (theo công thức đạo hàm hàm số hợp). ■

Bây giờ ta lấy một vài áp dụng.

Thí dụ.

(1) $y = x^{\mu}$; $\mu \in \mathbf{R}$; $x > 0$; $y'_x = \mu x^{\mu-1}$.

Thật vậy từ $y = x^{\mu}$, bằng cách lấy lôga cả hai vế có : $\ln y = \mu \ln x$.

Lấy đạo hàm đối với x cả hai vế (dùng thí dụ (a)) và đạo hàm hàm số hợp (y là hàm số của x) ; có :

$$\frac{y'}{y} = \frac{\mu}{x}\ ;\ \text{suy ra } y' = \mu x^{\mu-1}$$

Trường hợp $y = x^{\mu}$ với $x < 0$; bằng phép đổi biến $x' = -t$, cũng có thể suy ra $y' = \mu x^{\mu-1}$; do vậy $y = x^{\mu}$; $\mu \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{R}$; $y' = \mu x^{\mu-1}$.

(2) Chứng tỏ rằng nếu f(x), g(x) là hai hàm số khả vi tại x, thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cũng khả vi tại x nếu $g(x) \neq 0$ và

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Thật vậy, chỉ cần viết $\dfrac{f}{g} = \dfrac{1}{g}.f$ và áp dụng tính chất khả vi của hàm số f và hàm số g và tính chất khả vi của hàm số hợp, có thể suy ra tính khả vi của f/g. Hơn nữa :

$$\left(\frac{1}{g}\cdot f\right)' = \left(\frac{1}{g}\right)' f + \frac{1}{g} f' = -\frac{g'}{g^2} f + \frac{1}{g} f'$$

Thí dụ.

(a) $(\operatorname{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(b) Từ thí dụ (a) suy ra :

$$y = \operatorname{arctg}x \; ; \; -\infty < x < \infty, \; y'_x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sau đây, tổng kết các thí dụ đã nêu những phần trên, chúng ta có bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản :

$c = C$	$y' = 0$
$y = x^{\mu}, \; \mu \in \mathbf{R}$	$y' = \mu x^{\mu - 1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg}x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg}x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$y = a^x$ $\qquad$ $y' = a^x \ln a$

$y = e^x$ $\qquad$ $y' = e^x$

$y = \log_a x$ $\qquad$ $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$y = \ln x$ $\qquad$ $y' = \dfrac{1}{x}$

$y = \arcsin x$ $\qquad$ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos x$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \mathrm{arctg}x$ $\qquad$ $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) Đạo hàm theo tham số.

Cho $x = f(t)$ là một hàm số khả vi đối với t, với $t \in (\alpha, \beta)$ và $y = g(t)$ là một hàm khả vi đối với t, với $t \in (\alpha, \beta)$, khi đó nếu hàm số ngược $t = f^{-1}(x)$ tồn tại và nếu $f'(t) \neq 0$ thì, theo định lí về tính khả vi của hàm số ngược và tính khả vi của hàm số hợp, có thể suy ra tính khả vi của hàm số y đối với x. Hơn nữa :

(4.6) $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Thật vậy, do tính bất biến của vi phân, ta có

$$dy = g'(t)dt \text{ và } dx = f'(t)dt.$$

Chia dy cho dx ta có ngay kết quả. ■

Thí dụ.

(a) Xét hàm số $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

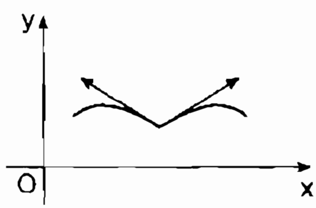
Khi đó $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{cotg}t.$$

(b) Xét hàm số $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

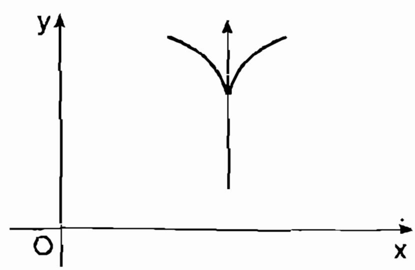
Khi đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot g\dfrac{t}{2}$.

4.3. Đạo hàm một phía, đạo hàm vô cùng

Trên kia, trong nhận xét (2) chúng ta đã nói rằng, về mặt hình học, khi hàm số f(x) khả vi tại x thì đồ thị của nó có một tiếp tuyến duy nhất không vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ là x. Bây giờ ta xét trường hợp đồ thị của f(x) có những điểm góc, tại những điểm góc đó, đồ thị nhận hai tiếp tuyến, tiếp tuyến phải và tiếp tuyến trái (hình 4.2) và trường hợp đồ thị có tiếp tuyến song song với trục tung (hình 4.3). Hiển nhiên tại những điểm như thế, hàm số không khả vi nữa nhưng có thể mở rộng khái niệm đạo hàm (như đã làm khi nói về giới hạn trái và giới hạn phải) và ta có các định nghĩa :



Hình 4.2



Hình 4.3

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$f'_-(c)$ được gọi là đạo hàm trái của f(x) tại x = c và

$$f'_+(c) := \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$f'_+(c)$ được gọi là đạo hàm phải của f(x) tại x = c.

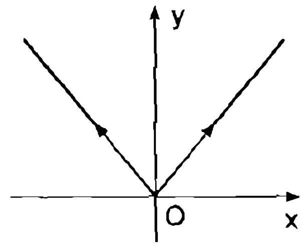
Thí dụ.

Xét $f(x) = |x|$ (xem hình 4.4) ta có :

$$f'_{-}(0) = -1 \text{ và } f'_{+}(0) = 1.$$

Tại điểm $x = 0$, đồ thị của hàm số có hai tiếp tuyến trái và phải.

Cũng có thể suy ra $f(x)$ khả vi tại $x = c$ khi và chỉ khi $f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$.



Hình 4.4

Trường hợp khi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \infty$ hoặc $-\infty$.

thì ta nói rằng tại điểm $x = c$, $f(x)$ có đạo hàm vô cùng và tiếp tuyến của đồ thị $f(x)$ tại $x = c$ vuông góc với trục hoành.

4.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng (a, b), giả sử $f(x)$ khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$; khi đó, hàm đạo hàm $f'(x)$ cũng có thể khả vi và đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$, kí hiệu $f''(x)$ hoặc $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, cứ tiếp tục suy diễn như thế chúng ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp n.

Định nghĩa đạo hàm cấp cao.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) ; $f(x)$ được gọi là khả vi n lần (trong (a, b)) nếu f là khả vi $(n - 1)$ lần trong (a, b) và đạo hàm cấp $(n - 1)$ của f cũng khả vi. Khi đó đạo hàm cấp n của f được định nghĩa bởi hệ thức :

$$f^{(n)}x := [f^{(n-1)}(x)]'$$

Thí dụ.

(1) Hàm số $f(x) = x^k$ (k nguyên dương) có đạo hàm cấp n, với mọi n là

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$$

nếu $\quad n \le k$ và $f^{(k)}(x) = k!$, $f^{(n)}(x) = 0$ nếu $n > k$.

Đề nghị kiểm tra lại công thức trên theo phương pháp quy nạp.

(2) Hàm số $f(x) = e^x$ có $f^{(n)}(x) = e^x$ với mọi n.

(3) Cũng dùng phương pháp quy nạp, có thể kiểm tra lại rằng

(a) $f(x) = \sin x$ thì $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$

(b) $f(x) = \cos x$ thì $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$

Các quy tắc lấy đạo hàm cấp cao.

(1) Ta có $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ với bất cứ các hàm số f, g, n lần khả vi và bất kì λ, μ thực.

(2) Quy tắc Leibnitz

Với bất kì hàm số f, g khả vi n lần, ta có :

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}g'' + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}f^{(n-k)}g^{(k)} + \dots + nf'g^{(n-1)} + fg^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

trong đó kí hiệu $\binom{n}{k}$ là hệ số Newton trong khai triển Newton của $(f+g)^n$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

và $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Muốn chứng minh quy tắc (1) chỉ cần quy nạp theo n và chú ý đến tính chất tuyến tính của đạo hàm cấp một, tức là chú ý rằng, tính chất công thức đã được chứng minh đúng cho trường hợp n = 1.

Cũng dùng phương pháp quy nạp theo n có thể chứng minh được quy tắc Leibnitz, tuy rằng phép quy nạp có phức tạp hơn. Để thấy nguồn gốc của các hệ số Newton ta có thể xét trường hợp riêng khi $f(x) = e^x$; $g(x) = e^x$. Khi đó

$$(fg)' = (e^{2x})' = 2e^{2x} = (1 + 1)e^{2x}$$

$$(fg)'' = (2e^{2x})' = 2^2e^{2x} = (1 + 1)^2e^{2x}$$

Bằng cách quy nạp theo n, có

$$(fg)^{(n)} = 2^ne^{2x} = (1 + 1)^ne^{2x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^xe^x$$

Trước khi nêu một vài thí dụ, xin lưu ý rằng nói chung (trừ một số trường hợp đã nêu trong các thí dụ ở trên), biểu thức $f^{(n)}(x)$ với $f(x)$ bất kì rất phức tạp và thường mang tính lí thuyết.

• *Thí dụ.*

(a) $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

Thật vậy, viết $f(x) = (1 + x)^{-1}$ và áp dụng công thức ở thí dụ trên, ta có :

$$((1 + x)^{-1})^{(n)} = (-1)(1)(-1 - 1)(1) \dots (-1 - n + 1)(1)(1 + x)^{-1-n}$$

$$= (-1)(-2)\dots(-n)\frac{1}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Tương tự :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Trong trường hợp này

$$f^{(n)}(x) = ((1-x)^{-1})^{(n)} = (-1)(-1)(-1-1)(-1)\dots(-1-n+1)(-1)(1-x)^{-1-n}$$

$$= (1)(2)\dots(n)\cdot\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2}\left[\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right]$

Trường hợp này nếu áp dụng nguyên xi cách làm ở hai thí dụ trên thì rất dài dòng vì cứ mỗi lần đạo hàm lại kèm thêm một thừa số $(-2x)$ (do lấy đạo hàm hàm số hợp), vì thế, ta viết $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$ nhưng không dùng quy tắc Leibnitz để lấy đạo hàm cấp cao mà ta phân tích

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{(1+x)+(1-x)}{2(1-x)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Từ hệ thức cuối cùng này, dùng kết quả của hai thí dụ trên, suy ra $f^{(n)}(x)$ như đã nêu.

Vi phân cấp cao

Định nghĩa vi phân cấp cao.

Vi phân cấp hai của hàm số $f(x)$ tại một điểm nào đó (nếu có) là vi phân của vi phân df (vi phân df bây giờ được gọi là vi phân cấp một), nếu kí hiệu vi phân cấp hai là d^2f, thì theo định nghĩa

$$d^2f := d(df)$$

Một cách quy nạp, vi phân cấp n, kí hiệu là d^nf là vi phân của vi phân cấp $(n-1)$:

$$d^n(f) = d(d^{n-1}f)$$

Như thế, về định nghĩa, vi phân cấp cao chỉ là một cách suy diễn định nghĩa vi phân của vi phân các cấp thấp hơn. Tuy nhiên, điều đáng lưu ý ở đây là vi phân cấp cao *không có dạng bất biến* như vi phân cấp một. Lấy một thí dụ, xét $f(x) = x^2$, vì x là biến độc lập nên

$$df = 2xdx \text{ và } d^2f = 2(dx)^2$$

Bây giờ nếu đặt $x = t^2$, khi đó $f = t^4$

$$df = 4t^3dt \text{ và } d^2f = 12t^2(dt)^2$$

Mặt khác, trên kia ta có $d^2f = 2(dx)^2$; nếu thế dx bởi 2tdt (từ $x = t^2$) vào thì $d^2f = 2(2tdt)^2 = 8t^2(dt)^2 \neq 12t^2(dt)^2$.

Thí dụ này nhắc nhở khi lấy vi phân cấp cao cần phải xét kĩ xem lấy vi phân đối với biến nào, biến độc lập hay biến phụ thuộc (tham biến) để tránh nhầm lẫn !

TÓM TẮT CHƯƠNG 4

• *Đạo hàm*

Hàm số f(x) xác định trong (a, b) được gọi là khả vi tại $x = c \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn

$$A = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \; x \neq c.$$

Số A được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x = c và kí hiệu là f'(c).

Nếu f(x) khả vi tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì nói rằng f(x) khả vi trong khoảng (a, b)

Nếu f(x) khả vi tại $x \in (a, b)$ thì liên tục tại đó.

Cho f(x), g(x) là hai hàm số khả vi tại $x \in (a, b)$.

Khi đó f(x) + g(x) và f(x).g(x) cũng khả vi tại x và

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$; $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Xét hàm hợp y = f[g(x)], khi đó nếu g(x) khả vi và f(x) khả vi, u = g(x) thì y khả vi (đối với x) và

$$(f[g(x)])' = f'_u(g(x))g'(x)$$

• *Vi phân*

Nếu một hàm số f(x) khả vi thì biểu thức f'(x)dx được gọi là vi phân của f(x), kí hiệu là df, nghĩa là : df = f'(x)dx, nghĩa là

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

đạo hàm chính là thương số giữa vi phân của hàm số và vi phân của đối số.

• *Đạo hàm theo tham số*

Cho x = f(t), y = g(t) là hai hàm khả vi đối với t thì y khả vi đối với x và $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$, nếu $f'_{(t)} \neq 0$

• *Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản*

$y = C$	$y' = 0$;	$y = x^{\mu}, \mu \in \mathbf{R}$,	$y' = \mu x^{\mu-1}$
$y = \sin x$,	$y' = \cos x$;	$y = \cos x$,	$y' = -\sin x$
$y = \mathrm{tg}x$,	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$y = \mathrm{cotg}x$,	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x$;	$y' = a^x \ln a$;	$y = e^x$,	$y' = e^x$
$y = \log_a x$,	$y' = \frac{1}{x\ln a}$;	$y = \ln x$;	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \arcsin x$;	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$y = \arccos x$,	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \mathrm{arctg}x$,	$y' = \frac{1}{1+x^2}$		

• *Đạo hàm hai phía, đạo hàm vô cùng*

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to c-0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm trái của nó f(x) tại x = c và kí hiệu là $f'_-(c)$, tương tự $\lim\limits_{x \to c+0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ gọi là đạo hàm phải của f(x) tại x = c, kí hiệu là $f'_+(c)$. Khi $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = +\infty$ hoặc $-\infty$ thì nói rằng tại x = c, f(x) có đạo hàm vô cùng.

• *Đạo hàm và vi phân cấp cao*

Nếu đạo hàm f'(x) là một hàm số khả vi và đạo hàm của f'(x) được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu là f''(x) hay $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, tiếp tục suy diễn, nếu đạo hàm cấp (n − 1) của f(x) cũng khả vi thì đạo hàm của đạo hàm cấp (n − 1) của f(x) được gọi là đạo hàm cấp n của f(x), kí hiệu là $f^{(n)}(x)$ hay $\dfrac{d^nf}{dx^n}$, nghĩa là $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

Các quy tắc lấy đạo hàm cấp cao :

$$\left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right]^{(n)} = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

$$\left[f(x)g(x)\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Một vài đạo hàm cấp cao của một vài hàm số sơ cấp

$f(x) = x^k$, $\quad f^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$ $(n \le k)$

$f(x) = e^x$, $\quad f^{(n)}(x) = e^x$

$f(x) = \sin x$, $\quad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$; $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$

$f(x) = \cos x$, $\quad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$; $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Nếu f'(x) khả vi thì vi phân của vi phân df được gọi là vi phân cấp hai của f(x), kí hiệu là d^2f : $\quad d^2f := d(df)$

Một cách quy nạp, vi phân cấp n của f(x) kí hiệu là d^nf là vi phân của vi phân cấp (n – 1) của f(x) : $\quad d^nf = d(d^{n-1}f)$.

BÀI TẬP

1. Cho $f(x) := (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$; tính f'(1), f'(2), f'(3).

2. Cho $f(x) := x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, tính f'(1).

3. Tính đạo hàm các hàm số :

1. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $\qquad$ 2. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3. $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ 4. $y = \sqrt[n+m]{(1-x)^m(1+x)^n}$

5. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. $\qquad$ 6. $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

7. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$, $\qquad$ 8. $y = \dfrac{1}{\cos^n x}$

9. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$, $\qquad$ 10. $y = x^{1/x}$

11. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\qquad$ 12. $y = e^x \ln\sin x$

13. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$, 14. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, 15. $y = e^{x^x}$

4. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 5 \text{ tại điểm } A(3, 2)$$

5. Chứng minh rằng đoạn tiếp tuyến của đường hypebôn $xy = m$ gồm giữa các trục toạ độ bị tiếp điểm chia làm hai phần bằng nhau.

6. Tìm đạo hàm và vẽ đồ thị của hàm số và của đạo hàm các hàm số :

1. $y = |x|$, 2. $y = x|x|$, 3. $y = \ln|x|$.

7. Tìm đạo hàm của hàm số :

1. $y = 1 - x$ thì $-\infty < x < 1$, $y = (1 - x)(2 - x)$ khi $1 \le x \le 2$ và $y = -(2 - x)$ khi $2 < x < +\infty$.

2. $y = x^2 e^{-x^2}$ khi $|x| \le 1$, $y = \dfrac{1}{e}$ khi $|x| > 1$.

8. Tính y' nếu : (với f là một hàm số khả vi)

1. $y = f(x^2)$, 2. $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$, 3. $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

9. Cho $f(x) = x(x - 1)(x - 2)\ldots(x - 100)$, tính $f'(0)$

10. Với điều kiện nào thì hàm số $f(x) := x^n \sin\dfrac{1}{x}$ khi $x \neq 0$ và $f(0) = 0$:

1. Liên tục tại $x = 0$, 2. Khả vi tại $x = 0$

3. Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$.

11. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(x) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$.

12. Xét tính khả vi của các hàm số :

1. $y = \left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^2\right|$, 2. $y = |\cos x|$

13. Tìm đạo hàm trái $f'_-(x)$ và đạo hàm phải $f'_+(x)$ của các hàm số :

1. $f(x) = |x|$, 2. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

14. Tìm vi phân các hàm số :

1. $y = \dfrac{1}{x}$, 2. $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$,

3. $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$, $a \neq 0$, 4. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$,

5. $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$.

15. Cho u(x), v(x) là hai hàm số khả vi, chứng minh rằng

1. $d(Cu) = Cdu$ (C là hằng số), 2. $d(u + v) = du + dv$,

3. $d(uv) = vdu + udv$, 4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

16. Tìm 1. $d(xe^x)$, 2. $d(\sqrt{a^2 + x^2})$

3. $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, 4. $d\ln(1 - x^2)$.

17. Tìm 1. $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$, 2. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, 3. $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

18. Dùng công thức số gia của hàm số khả vi, tìm giá trị xấp xỉ của các biểu thức :

1. $\sqrt[3]{1,02}$ 2. $\sin 29^\circ$, 3. $\lg 11$, 4. $\operatorname{arctg} 1,05$

19. Chứng minh công thức xấp xỉ :

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0)$$

với $|x| \ll a$ (hệ thức $A \ll B$ với $A, B > 0$ kí hiệu A rất bé so với B).

Dùng công thức trên tính các giá trị xấp xỉ của

1. $\sqrt{5}$,		2. $\sqrt{34}$,		3. $\sqrt{120}$.

20. Tìm y'' nếu

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$,		2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - x^2}}$

3. $y = e^{-x^2}$,		4. $y = \ln f(x)$.

21. Tìm y'_x, y''_{xx} của hàm số $y = f(x)$ cho dưới dạng tham số :

1. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$,		2. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$,

3. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

22. Tìm đạo hàm cấp cao các hàm số :

1. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$,		2. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$,

3. $y = x^2 e^{2x}$, tính $y^{(20)}$,		4. $y = x^2 \sin 2x$, tính $y^{(50)}$

23. Tính $y^{(n)}$ nếu

1. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$,		2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$,		4. $y = e^{ax}\sin(bx + c)$.

24. Dùng phương pháp quy nạp chứng minh rằng

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

25. Cho đa thức Legendre $P_m(x)$:

$$P_m(x) := \frac{1}{2^m m!}\left[(x^2 - 1)^m\right]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2 \ldots)$$

Chứng minh rằng $P_m(x)$ thoả phương trình

$$(1 - x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

26. Cho đa thức Tchebychev – Hermite $H_m(x)$:

$$H_m(x) := (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \qquad (m = 0, 1, 2, ...)$$

Tìm biểu thức hiện của $H_m(x)$ và chứng minh rằng

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

4. $8x - y - 22 = 0$

6. 1. $\operatorname{sgn}x (x \neq 0)$, 2. $2|x|$, 3. $\frac{1}{x} (x \neq 0)$.

7. 1. $y' = -1$ khi $\infty < x < 1$; $y' = 2x - 3$ khi $1 \leq x \leq 2$; $y' = 1$ khi $2 < x < +\infty$,

2. $y' = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$ khi $|x| \leq 1$, $y' = 0$ khi $|x| > 1$

8. 1. $2xf'(x^2)$, 2. $\sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$,

3. $e^{f(x)}[e^x f'(e^x) + f'(x)f(e^x)]$.

9. 100!

10. 1. $n > 0$, 2. $n > 1$, 3. $n > 2$

11. $f'_-(a) = -\varphi(a)$, $f'_+(a) = \varphi(a)$

12. 1. Không khả vi khi $x = 1$, 2. Không khả vi khi $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

13. 1. $f'_-(x) = f'_+(x) = \operatorname{sgn}x$ với $x \neq 0$, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$.

2. $f'_-(x) = f'_+(x) = \dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ khi $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$

$(k = 0, 1, 2, ...)$; $f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) = 1$; $f'_\pm(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \pm\infty$;

$f'_\pm(\sqrt{2k\pi}) = \pm\infty$ $(k = 1, 2, 3, ...)$.

17. 1. $1 - 4x^3 - 3x^6$; 2. $\frac{1}{2x^2}(\cos x - \sin x)$;

3. $-\cot g x$ ($x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

18. 1. 1,007 (theo bảng 1,0066) ; 2. 0,4849 (theo bảng 0,4848) ;

3. 1,043 (theo bảng 1,041) ; 4. 0,8104 ≈ arctg 1,05 ≈ $46^o26'$

(theo bảng arctg 1,05 ≈ $46^o24'$

19. 1. 2,25 (theo bảng 2,24) ; 2. 5,833 (theo bảng 5,831)

3. 10,9546 (theo bảng 10,9545).

20. 1. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$ 2. $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}|x|<1$;

3. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 4. $\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$

21. 1. $y''=\frac{3}{4(1-t)}$; 2. $y''=-\frac{1}{a\sin^3 t}$; 3. $y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$

22. 1. $y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$, 2. $y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$,

3. $y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$,

4. $y^{(50)} = 2^{50}(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x)$.

23. 1. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$, 2. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$;

3. $\frac{(-1)^{n+1}1.4...(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+1/3}}$ $(n\geq 2, x\neq -1)$;

4. $e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$ với $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

25. Lấy đạo hàm (m + 1) lần hệ thức $(x^2-1)u' = 2mxu$ với $u := (x^2-1)^m$.

26. Dùng đẳng thức $u' + 2xu = 0$, với $u = e^{-x^2}$.

Chương 5

CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Trong những mục trước chúng ta đã nói nhiều về các phép tính đạo hàm, về tính khả vi của hàm số, bây giờ trong mục này chúng ta xét một khía cạnh ứng dụng : xét khả năng tồn tại một giá trị trung gian của hàm số trong một khoảng nào đó và đi đến một số định lí thường có tên gọi là các định lí về giá trị trung bình của hàm số. Điểm đặc biệt của định lí này là phát biểu rất tự nhiên, ý nghĩa hình học càng tự nhiên hơn ; cách chứng minh cũng đơn giản, nhưng phạm vi ứng dụng lại rất rộng rãi và đa dạng. Trước hết, ta nhắc lại định nghĩa cực trị của hàm số. Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) ; nói rằng f(x) đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x = c, $c \in (a, b)$, nếu với $x + \Delta x \in (a, b)$ ta có :

$$f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0 \ (\geq 0)$$

Điểm x = c thường được gọi là điểm *cực trị* của hàm số f(x).

5.1. Các định lí về giá trị trung bình

Bổ đề 5.1. (Định lí Fermat)

Nếu hàm số $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ đạt cực trị tại $c \in (a, b)$ và nếu f khả vi tại c thì $f'(c) = 0$

Chứng minh.

Giả sử c là điểm cực đại của f. Theo giả thiết f khả vi tại x = c nên tồn tại đạo hàm f'(c). Ta có :

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Vì f(x) đạt cực đại tại c nên $f(c + h) - f(c) \leq 0$ với mọi h, do đó :

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \text{ khi } h < 0 \text{ và } \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \text{ khi } h > 0.$$

Như thế, chuyển qua giới hạn khi $h \to 0$ ta có $f'_+(c) \leq 0$ và $f'_-(c) \geq 0$;

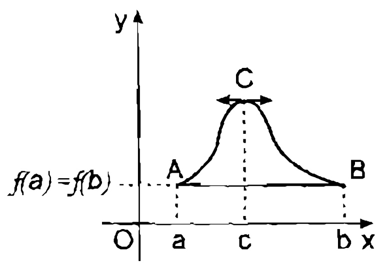
mặt khác vì tồn tại đạo hàm f'(c) ; nghĩa là $f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$, do đó $f'(c) = 0$; trường hợp c là điểm cực tiểu của hàm số f(x) cũng được chứng minh tương tự. ■

Hệ quả 5.2 (Định lí Rolle).

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trong khoảng đóng [a, b] và khả vi trong khoảng mở (a, b) ; giả sử f(a) = f(b) ; khi đó tồn tại c ∈ (a, b) sao cho f'(c) = 0.

Minh hoạ hình học.

Theo giả thiết, đồ thị của hàm số có dạng như hình vẽ (hình 5.1) ; khi đó định lí Rolle khẳng định rằng đồ thị của f(x) nhận một tiếp tuyến *song song với dây cung AB* (vì f'(c) = 0, tức là tiếp tuyến song song với trục hoành nhưng vì f(a) = f(b) nên dây cung AB song song với trục hoành) tại điểm (c, f(c)), với c ∈ (a, b).



Hình 5.1

Vì f(x) liên tục trên [a, b] nên theo định lí 3.9 f(x) đạt được giá trị nhỏ nhất min f(x) và giá trị lớn nhất max f(x), x ∈ [a, b]. Khi đó có hai khả năng xảy ra : hoặc cả hai giá trị đó đều đạt tại hai nút a và b và như thế :

$$f(a) = f(b) = \min f(x) = \max f(x) \text{ ; } x \in [a, b]$$

và f(x) là một hằng số với mọi x ∈ [a, b], do vậy f'(x) đồng nhất bằng không với bất kì x ∈ [a, b] ; hoặc có một giá trị đạt tại một điểm c nào đó, c ∈ (a, b) như thế theo bổ đề trên f'(c) = 0. ■

• *Nhận xét.*

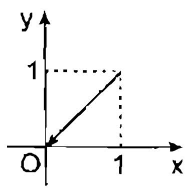
(1) Giả thiết f(x) liên tục trên khoảng đóng [a, b] là một giả thiết không thể bỏ qua được. Chẳng hạn xét hàm số

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leq 1\\ 1 & x=0\end{cases}$$

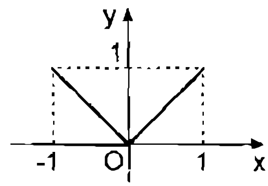
Hàm số này xác định trong [0, 1] nhưng không liên tục trong [0, 1], do đó không thể áp dụng định lí Rolle được (hình 5.2).

(2) Giả thiết hàm f(x) khả vi trong khoảng mở (a, b) cũng là một giả thiết không thể bỏ qua được.

Chẳng hạn xét hàm số $f(x) = |x|$ (xem hình 5.3) với $x \in [-1, 1]$;



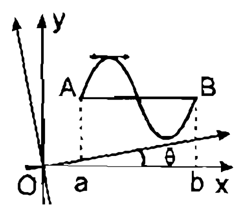
Hình 5.2



Hình 5.3

hàm số này liên tục trong [− 1 ; 1] ; f(− 1) = f(1) = 1, nhưng f(x) không khả vi trong (− 1, 1), do đó cũng không áp dụng định lí Rolle được.

(3) Trên kia, khi nói về minh hoạ hình học của định lí Rolle chúng ta đã nói rằng, nếu thoả các giả thiết về liên tục, khả vi và nếu f(a) = f(b) thì đồ thị của f(x) có tiếp tuyến song song với dây cung AB (điều đó là bản chất), hơn nữa vì f(a) = f(b) nên dây cung AB lại song song với trục hoành và do vậy tiếp tuyến đó có hệ số góc bằng không, nghĩa là f'(c) = 0. Như thế nếu dùng một phép quay hệ toạ độ một góc θ nào đó (hình 5.4) thì dĩ nhiên, đồ thị vẫn có tiếp tuyến song song với dây cung AB nhưng tiếp tuyến đó không còn song song với trục hoành nữa vì f(a) ≠ f(b).



Hình 5.4

Nhận xét này dẫn đến định lí :

Định lí 5.3 về số gia hữu hạn (Định lí Lagrange).

Cho hàm f(x), xác định liên tục trên khoảng đóng [a, b], khả vi trong khoảng mở (a, b), khi đó tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{5.1}$$

Chứng minh.

Tất cả vấn đề là dựng được một hàm số thoả các giả thiết của định lí Rolle ; thật vậy xét hàm số

$$g(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

(lưu ý rằng đồ thị của g(x) chính là dây cung AB (hình 5.4).

Hàm số h = g − f liên tục trong [a, b], khả vi trong (a, b) và $h(a) = g(a) - f(a) = 0$; $h(b) = g(b) - f(b) = 0$, do vậy theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $h'(c) = 0$ tuy nhiên :

$$h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c). \blacksquare$$

• *Chú ý*

(1) Công thức (5.1) còn có dạng :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{5.2}$$

Tuy xuất phát từ công thức (5.1) nhưng công thức (5.2) có một ý nghĩa đặc biệt, đóng một vai trò rất cơ bản trong nhiều ứng dụng đa dạng trong giải tích : biến một hiệu số thành một tích số (giống như các hằng thức đáng nhớ quen thuộc trong đại số sơ cấp $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$) và thường được dùng để xét dấu của hiệu $f(b) - f(a)$ hay để ước lượng $|f(b) - f(a)|$.

(2) Nếu trong công thức (5.2) đặt $a := x$; $b := x + h$ ta có :

$$(5.3) \qquad f(x + h) - f(x) = f'(c)h$$

với c là một số ở giữa x và x + h.

So sánh công thức (5.3) và công thức biểu diễn số gia hàm số :

$$(5.4) \qquad f(x + h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

ta thấy (5.3) đã dồn o(h) vào giá trị đạo hàm tại $x = c$.

Nếu θ là một số dương gồm giữa 0 và 1 : $0 < 0 < 1$ thì vì c ở giữa x và x + h nên có thể viết $x + \theta h = c$, $0 < \theta < 1$.

Như thế công thức (5.3) có dạng

$$(5.5) \qquad f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)h$$

So sánh hai biểu diễn (5.3) và (5.5) có thể thấy rằng nội dung chữ giá trị trung bình ở đây là giá trị trung bình của đạo hàm của f(x).

(3) Nếu quan tâm đến minh hoạ hình học của định lí Lagrange thì sẽ dẫn đến một kết quả giải tích tổng quát hơn định lí Lagrange. Thật vậy, nếu chuyển đường cong sang dạng tham số $x = g(t)$, $y = f(t)$ với $t \in [\alpha, \beta]$ và $g(\alpha) = a$; $g(\beta) = b$, thì hệ số góc của dây cung AB (hình 5.4) sẽ là

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{f(\beta) - g(\alpha)}$$

và hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (xem mục đạo hàm theo tham số) là $\dfrac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}$; nghĩa là :

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)}, \qquad \alpha < \gamma < \beta .$$

Chính nhận xét này dẫn đến định lí :

Định lí 5.4 (Cauchy).

Cho f(x), g(x) là hai hàm số xác định, liên tục trong khoảng đóng [a, b] và $g(a) \neq g(b)$; giả sử f(x) và g(x) khả vi trong khoảng mở (a, b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$.

Khi đó tồn tại c ở giữa a và b sao cho

(5.6) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Chứng minh

Với nhận xét (3) vừa nêu ở trên và từ cách chứng minh định lí Lagrange, ta đặt

$$h(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$$

Hiển nhiên hiệu h(x) – f(x) thoả các giả thiết của định lí Rolle (?), suy ra tồn tại c, a < c < b sao cho h'(c) = 0, nghĩa là

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0. \blacksquare$$

Chúng ta để ý rằng, trường hợp đặc biệt khi chọn g(x) : = x thì công thức (5.6) cho lại công thức (5.1), nghĩa là định lí Lagrange là trường hợp riêng của định lí Cauchy ; mặt khác khi f(a) = f(b) thì công thức (5.1) cho lại công thức f'(c) = 0, nghĩa là định lí Rolle là trường hợp riêng của định lí Lagrange.

Bây giờ, ta viết công thức Lagrange (5.5) dưới một dạng khác ; từ (5.5) có :

(5.7) $$f(x + h) = f(x) + f'(x + \theta h)h \ ; \ 0 < \theta < 1$$

Công thức này cho một cách tính giá trị của f tại lân cận x khi biết giá trị của f(x) và đạo hàm f' tại lân cận "rất gần" x. Một cách tự nhiên, ta đặt vấn đề nếu biết thêm đạo hàm các cấp cao của f tại x nữa thì liệu có thể biết chính xác hơn giá trị của f tại lân cận x hay không ? Chính công thức Taylor đã suy rộng công thức (5.7) và cho một trả lời về câu hỏi này.

Công thức Taylor.

Cho hàm số f(x) liên tục trong khoảng đóng [a, b] và khả vi đến (n + 1) lần trong khoảng mở (a, b) ; ta đặt vấn đề tìm một đa thức $P_n(x)$ có bậc không vượt quá n sao cho với một c ∈ (a, b) ta có :

(5.8) $$f(c) = P_n(c) \ ; \ f'(c) = P'_n(c) \ ; \ldots ; \ f^{(n)}(c) = P_n^{(n)}(c)$$

Ta sẽ tìm đa thức $P_n(x)$ dưới dạng :

(5.9) $\quad P_n(x) := a_o + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n.$

Muốn thế chỉ cần xác định các hệ số $a_o, a_1, \ldots, a_n$ thoả yêu cầu (5.8) vừa đặt ra ở trên. Thật vậy, thế giá trị $x = c$ vào (5.9) có

(a) $P_n(c) = a_o$. Hơn nữa lấy đạo hàm $P'_n(x)$ ta có

(b) $P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + na_n(x-c)^{n-1}$

Lấy đạo hàm cấp hai $P''_n(x)$ ta được :

(c) $P''_n(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x-c) + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}$

Tiếp tục lấy đạo hàm nữa ta được :

$$(d)\quad \begin{cases} P_n^{(k)}(x) = k!a_k + \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} j(j-1)\ldots(j-k+1)a_j(x-c)^{j-k} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le k \le n \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = n!a_n \end{cases}$$

Từ các hệ thức (a) đến (d) ; cho $x = c$; ta suy ra :

$$a_o = f(c)\ ;\ a_1 = \frac{f'(c)}{1!}\ ;\ a_2 = \frac{f''(c)}{2!}\ ,\ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Như vậy đa thức $P_n(x)$ thoả yêu cầu (5.8) có dạng cụ thể

$$(5.9)\qquad P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Bây giờ ta đặt

(e) $\quad R_n(x) := f(x) - P_n(x)$

Vì theo giả thiết, f khả vi đến (n + 1) lần, và theo hệ thức (e) ta có :

(f) $R_n(c) = R'_n(c) = R''_n(c) = ... = R_n^{(n)}(c) = 0$

Bây giờ, nếu đặt $G(x) := (x - c)^{n+1}$ thì cũng có :

(g) $G(c) = G'(c) = ... = G^{(n)}(c) = 0$ và $G^{(n+1)}(c) = (n+1)!$

Giả sử $x \neq c$; $x \in (a, b)$; từ các hệ thức (f) và (g) ta có :

$$\frac{R_n(x)}{G(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(c)}{G(x) - G(c)}$$

Áp dụng định lí Cauchy vào tỉ số trên ta được

$$\frac{R_n(x)}{G(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{R'_n(c_1)}{G'(c)}$$

với c_1 nằm giữa x và c. Cũng từ các hệ thức trên, có :

$$\frac{R'_n(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{R'_n(c_1) - R'_n(c)}{G'(c_1) - G'(c)}$$

Lại áp dụng định lí Cauchy vào tỉ số trên ta được :

$$\frac{R'_n(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{R'_n(c_1) - R'_n(c)}{G'(c_1) - G'(c)} = \frac{R''_n(c_2)}{G''(c_2)}$$

với c_2 nằm giữa c_1 và c.

Như thế, sau (n + 1) lần áp dụng định lí Cauchy ta được :

$$\frac{R_n(x)}{G(x)} = \frac{R_n^{n+1}(\overline{c})}{G^{n+1}(\overline{c})}$$

Từ hệ thức định nghĩa G(x) có : $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ với mọi x, do đó :

$$G^{(n+1)}(\overline{c}) = (n+1)!$$

và
$$R_n(x) = \frac{R_n^{(n+1)}(\overline{c})}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$$

Mặt khác, từ hệ thức định nghĩa $R_n(x)$, suy ra :

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Từ đó, suy ra : $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\overline{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

Tổng kết các kết quả trên, ta đi đến định lí :

Định lí 5.5. (Mở rộng định lí Lagrange).

Nếu hàm f(x) xác định có đạo hàm đến cấp n liên tục trong khoảng đóng [a, b], có đạo hàm cấp (n + 1) lần trong khoảng mở (a, b) thì với bất kì c ∈ (a, b) luôn có

$$(5.10) \quad f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

với $\overline{c}$ là một số nằm giữa x và c.

Người ta thường gọi công thức (5.10) là *công thức Taylor* và biểu diễn một hàm số f(x) dưới dạng (5.10) được gọi là *khai triển Taylor hữu hạn* của hàm số f(x) tại điểm x = c.

Đặc biệt, khi c = 0 thì (5.10) được gọi là khai triển Mac Laurin của f(x) và khi đó (5.10) có dạng :

$$(5.11) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với θ thoả 0 < θ < 1.

• *Nhận xét.*

(1) Nếu đặt x : = c + h thì công thức (5.10) có dạng

$$(5.12) \quad f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

và đặc biệt, với n = 1 thì công thức (5.10) chính là (5.7).

Nói khác đi, công thức (5.10) đã trả lời câu hỏi đặt ra ở trên, nếu biết thêm các đạo hàm cấp cao của f tại x = c thì việc tính xấp xỉ giá trị của f tại lân cận c càng chính xác và chính lượng $R_n := \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta h)h^{n+1}$ cho độ chính xác của f(c + h) và khi thay f(c + h) bởi :

$$f(c + h) \approx f(x) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

thì nhận một sai số không vượt quá $\frac{1}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c + \theta h)h^{n+1}\right|$, còn một trở ngại nữa là rất tiếc trong biểu thức R_n chúng ta chưa xác định được chính xác giá trị θh thì chỉ biết θ là một số dương gồm giữa 0 và 1 : dầu là ta đã giả thiết f có đạo hàm đến cấp (n + 1) tại mọi điểm thuộc (a, b). Tuy nhiên trong rất nhiều trường hợp, với các hàm số sơ cấp cơ bản quen thuộc, ta có thể ước lượng được một cận trên của $f^{(n)}(x)$; nghĩa là tìm được một số M > 0 sao cho

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \ x \in (a, b)$$

Khi đó, việc xấp xỉ giá trị f(c + h) được coi như hoàn hảo vì muốn tính f(c + h) chỉ cần thực hiện các phép tính số học (+, −, ×, :) và dĩ nhiên biết các đạo hàm $f^{(n)}(x)$.

(2) Sau đây sẽ giới thiệu một số khai triển Mac Laurin hữu hạn của một số hàm số sơ cấp quen thuộc.

(a) Khai triển $f(x) = (1 + x)^m$; m nguyên dương.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng

$$f(0) = 1 ;\ f'(0) = m ;\ f''(0) = m(m-1), ..., f^{(m)}(0) = m! ;\ f^{(m+1)}(0) = 0.$$

Do đó, dùng công thức (5.11) ta được :

$$(5.13) \qquad (1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k + ... + x^m.$$

thay x bởi −x ta lại có :

$$(5.14)\quad (1-x)^m = 1 - \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots + (-1)^m x^m .$$

(b) Khai triển $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Dùng lại thí dụ (a) mục 4.4, chương 4, ta được :

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Từ đó, có :

$f(0) = 1$; $f'(0) = -1$; $f''(0) = (-1)^2 2!$; ... ; $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$

Do vậy, dùng công thức (5.11) ta được

$$(5.15)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}}_{0(x^n)}$$

Thay x bởi −x vào công thức trên ta được

$$(5.16)\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underbrace{\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}}_{0(x^n)}$$

(c) Khai triển $f(x) = \ln(1+x)$.

Ta để ý rằng $f(0) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, do vậy :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \qquad \text{(dùng thí dụ (b))}$$

Do đó :

$$(5.17)\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}}_{0(x^n)}$$

Đặc biệt nếu x là VCB thì thường dùng công thức (5.17) dưới dạng

(5.17a) $$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

và thay x bởi $-x$, ta có :

(5.17b) $$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(d) Khai triển $f(x) = e^x$.

Vì $f(0) = 1$; $f'(0) = 1, \ldots, f^n(0) = 1$ nên

(5.18) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{0(x^n)} \; ; \; 0 < \theta < 1$$

Đặc biệt khi x là VCB thì thường dùng công thức

(5.18a) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^n).$$

(e) Khai triển $f(x) = \sin x$.

Dùng thí dụ (a) ta được

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x \; ; \text{ với } n = 2k \\ (-1)^k \cos x \; ; \text{ với } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Do đó, dùng công thức (5.11) ta được

(5.19) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \underbrace{\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x}_{0(x^{2n})}, \quad 0 < \theta < 1$$

Tương tự, ta có :

(5.20) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x}_{0(x^{2n+1})}, \; 0 < \theta < 1$$

Đặc biệt khi x là VCB, ta thường dùng các công thức

(5.19a) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

(5.20a) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

(f) Khai triển $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. Có thể chứng minh được rằng :

(5.21) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n.o(x)$$

Đặc biệt :

(5.21a) $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2.o(x)$$

(5.21b) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2.o(x)$$

• *Khai triển hữu hạn :*

Các công thức (5.10) ; (5.11) và các công thức từ (5.13) đến (5.21) có một dạng chung : đó là biểu diễn hàm số f(x) dưới dạng tổng một đa thức và một biểu thức dần tới không lân cận một điểm xác định nào đó, nghĩa là f(x) có dạng

$$f(x) = P_n(x-c) + o((x-c)^n)$$

trong đó $P_n(x-c)$ là một đa thức có bậc không vượt quá n và $o((x-c)^n)$ là một VCB bậc cao hơn n khi $x \to c$.

Ta cũng nói rằng f(x) nhận một *khai triển hữu hạn cấp n lân cận điểm $x = c$*, và đa thức $P_n(x-c)$ được gọi là *phần chính bậc n* của khai triển hữu hạn.

Chẳng hạn các công thức (5.17), (5.18), ... là các khai triển hữu hạn của các hàm số $\ln(1 \pm x)$, e^x, ... lân cận điểm $x = 0$.

Người ta cũng chứng minh được khai triển hữu hạn có các tính chất sau đây : Cho f, g là hai hàm số nhận khai triển hữu hạn lân cận điểm $x = 0$, khi đó

(i) $\lambda f + g$; $\lambda \in \mathbf{R}$ cũng nhận khai triển hữu hạn lân cận điểm $x = 0$.

(ii) $f.g$ cũng nhận khai triển hữu hạn lân cận $x = 0$.

(iii) Nếu $f(0) = 0$ thì hàm hợp $g[f(x)]$ cũng nhận khai triển hữu hạn lân cận $x = 0$.

(iv) Nếu $g(0) \neq 0$ thì f/g cũng nhận khai triển hữu hạn lân cận $x = 0$.

Dưới đây sẽ giới thiệu cách dùng khai triển hữu hạn để tìm một số giới hạn.

(a) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} (2^x + 3^x - 5^x)^{(2^x + 3^x - 2.5^x)^{-1}}$?

Gọi biểu thức cần tìm giới hạn là A, ta có : $\ln A = \dfrac{\ln(2^x + 3^x - 5^x)}{(2^x + 3^x - 2.5^x)}$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{aligned} 2^x + 3^x - 5^x &= e^{x\ln 2} + e^{x\ln 3} - e^{x\ln 5} \\ &= 1 + x\ln 2 + 1 + x\ln 3 - 1 - x\ln 5 + o(x) \\ &= 1 + x\ln\frac{6}{5} + o(x) \end{aligned}$$

Vậy $\ln(2^x + 3^x - 5^x) \sim x\ln\dfrac{6}{5}$ và :

$$\begin{aligned} 2^x + 3^x - 2.5^x &= e^{x\ln 2} + e^{x\ln 3} - 2e^{x\ln 5} \\ &= 1 + x\ln 2 + 1 + x\ln 3 - 2(1 + x\ln 5) + o(x) \\ &= x\ln\frac{6}{25} + o(x). \end{aligned}$$

Cuối cùng

$$\lim_{x \to 0} \ln A = \lim_{x \to 0} \frac{x\ln\frac{6}{5}}{x\ln\frac{6}{25}} \text{ và } \lim_{x \to 0} A = e^{\ln\frac{6}{5}/\ln\frac{6}{25}}$$

(b) Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right)$, $ab \neq 0$?

Khai triển hữu hạn của $1 - x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ lân cận $x = 1$ là

$$1 - x^\alpha = -\alpha(x-1) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 + o[(x-1)^2].$$

Mặt khác, có

$$\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b} = \frac{a(1-x^b)-b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)} = \frac{a-b}{2} + o((x-1)^2).$$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right) = \dfrac{a-b}{2}$.

5.2. Ứng dụng các định lí về giá trị trung bình

Trong mục này chúng ta sẽ nêu một số ứng dụng đa dạng của tính chất khả vi của một hàm số, đặc biệt các định lí về giá trị trung bình.

5.2.1. *Khử dạng vô định*

Định lí 5.6 (De L'Hospital).

Giả sử các hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định, khả vi tại lân cận $x = a$ ($a \in \mathbf{R}$), có thể trừ tại $x = a$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ ở lân cận $x = a$.

Và nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Chứng minh.

Theo giả thiết f(x), g(x) khả vi tại lân cận x = a nên liên tục ở đó. Nếu f(x), g(x) không xác định tại x = a, ta bổ sung giá trị của chúng tại x = a bằng cách đặt $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Khi đó f(x) và g(x) liên tục ở lân cận x = a và cả tại x = a. Do định lí Cauchy ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

với c là một điểm nào đó nằm giữa x và a.

Khi $x \to a$ thì $c \to a$.

Vậy nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$. ■

• *Nhận xét*

(1) Trường hợp $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, định lí De L'Hospital vẫn đúng ; thật vậy, khi đó :

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$$

và do đó theo định lí trên ; ta cũng có $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, do đó

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) Trường hợp $x \to \infty$ vẫn có thể dùng được định lí 5.6 ; thật vậy, khi đó chỉ cần thực hiện phép đổi biến $x=\frac{1}{t}$ có $t \to 0$ (khi $x \to \infty$), do vậy

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right):=p(t)$$

$$g(x)=g\left(\frac{1}{t}\right):=q(t)$$

Hiển nhiên, khi đó :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{p(t)}{q(t)}$$

Do vậy, dùng định lí 5.6 và nhận xét (1) ta vẫn có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{p'(t)}{q'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{p(t)}{q(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(3) Trường hợp f và g khả vi tại lân cận a trừ ra tại x = a ; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ và $g'(x)\neq 0$ tại lân cận a. Khi đó nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ thì cũng có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Để khỏi rườm rà chúng ta không chứng minh mệnh đề này và chỉ nêu một số thí dụ áp dụng.

• *Thí dụ.*

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$; (dạng $\dfrac{0}{0}$).

Ta có : $$\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}=6\ ;$$

vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}=6$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $(\alpha>0)$; (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Ta có $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$$

Vậy : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$; (dạng $0.\infty$)

Đưa dạng $0.\infty$ về dạng $\frac{0}{0}$ bằng cách viết

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

Ta có : $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\left(\frac{\pi}{4}\right)(-1).\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]^{-1}}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x.4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\pi}=-\frac{16}{\pi}$$

Vậy : $\lim_{x\to 2}(x^2-4)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)=-\frac{16}{\pi}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x}$; (dạng $\frac{\infty}{\infty}$).

Trường hợp này định lí 5.6 bất lực, thật vậy :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\cos^2\frac{x}{2}$$

Khi $x\to+\infty$ thì $\cos\frac{x}{2}$ không xác định, do vậy, không tồn tại $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(2x)'}$; tuy nhiên, không phải vì thế mà kết luận không tồn tại giới hạn của $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x}$ vì luôn có :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

Bây giờ ta xét thêm một số thí dụ áp dụng khai triển hữu hạn để khử dạng vô định.

(e) Tìm $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}$; (dạng $\frac{0}{0}$).

Dùng khai triển hữu hạn (xem (5.19)) có :

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\ ;\ x(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Do đó : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{3}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 4\right)$; (dạng $0.\infty$)

Đặt $x = \frac{\pi}{4} + h$; có

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-h\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h\cosh}{-\sinh} = 1$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$; (dạng $\infty - \infty$)

Ta có $$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\mathrm{tg}x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x)}$$

Do đó $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\mathrm{tg}x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x + o(x)} = 0$$

(h) Tìm $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$; dạng 1^{∞}).

Đặt $x = 1 + t$; $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1+t) = \dfrac{-\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}$, do vậy

$$A = (2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}} = (1-t)^{-\cos\frac{\pi}{2}t/\sin\frac{\pi}{2}t}$$

Lấy lôgarit tự nhiên, có :

$$\ln A = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\ln(1-t) = -\frac{1+o(t)}{\frac{\pi}{2}t+o(t)}(-t+o(t))$$

$$= \frac{2}{\pi}(t+o(t))(1+o(t)).\frac{1}{1+o(t)}$$

Do vậy $\lim\limits_{t\to 0}\ln A = \frac{2}{\pi}$ và $\lim\limits_{t\to 0} A = \lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

5.2.2. *Khảo sát sự biến thiên của hàm số*

Việc áp dụng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số dựa vào định lí sau :

Định lí 5.7.

Cho f là một hàm số xác định, liên tục trong một khoảng đóng hữu hạn [a, b] và khả vi trong khoảng mở (a, b), khi đó :

(1) Điều kiện ắt có và đủ để f(x) tăng (giảm) trong [a, b] là $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a, b)$.

(2) Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in (a, b)$ và nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) tại ít nhất một điểm x thì $f(b) > f(a)$ ($f(b) < f(a)$).

Chứng minh.

Cách chứng minh trường hợp f(x) giảm tương tự trường hợp f(x) tăng, ở đây chúng ta chỉ chứng minh trường hợp f(x) tăng.

(1) Giả sử f tăng, khi đó $f(x+h) \geq f(x)$ với $h > 0$ và $f(x+h) \leq f(x)$ với $h < 0$ và do đó $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$, $h \neq 0$; bằng cách chuyển qua giới hạn, có $f'(x) \geq 0$.

Ngược lại, giả sử $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$; lấy hai điểm $u < v$ của đoạn $[a, b]$; theo định lí Lagrange có :

$f(v) - f(u) = (v - u)f'(w)$ với $u < w < v$, do đó :

$f(v) - f(u) \geq 0$, nghĩa là $f(v) \geq f(u)$; $f(x)$ tăng.

(2) Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$, theo (1) $f(x)$ tăng trên $[a, b]$, do đó $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ với mọi $x \in [a, b]$. Nếu ta có $f(x) = f(a)$ thì vì f tăng nên đạo hàm phải triệt tiêu tại mọi $x \in (a, b)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết tồn tại ít nhất một $x \in (a, b)$ sao cho $f'(x) > 0$. ■

Định lí này có một hệ quả dùng để tìm các hàm trội trong giải tích.

Hệ quả 5.8

Cho f, g là hai hàm số xác định, liên tục trong [a, b], khả vi trong (a, b).

(1) Nếu $f(a) \leq g(a)$ và nếu $f'(x) \leq g'(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

(2) Nếu $f(a) \leq g(a)$ và nếu $f'(x) < g'(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Chứng minh.

Đặt $h := g - f$

(1) Hàm số h xác định, liên tục trong $[a, b]$ và có đạo hàm $h'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, do đó h tăng trong $[a, b]$, nghĩa là $h(x) \geq h(a)$, theo giả thiết $h(a) \geq 0$, từ đó $h(x) \geq 0$ hay $g(x) \geq f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

(2) Cho $x \in (a, b)$, khi đó $h'(t) > 0$, với mọi $t \in (a, x)$, định lí trên chứng tỏ rằng $h(x) > h(a) \geq 0$, do đó $g(x) > f(x)$. ■

Thí dụ.

(a) Với mọi $x > 0$, có $1 + x < e^x$.

Cho $x > 0$, các hàm $f(t) := 1 + t$; $g(t) := e^t$ liên tục, khả vi trong $[0, x]$ và $f'(t) = 1$; $g'(t) = e^t$, do đó $f'(t) < g'(t)$ với mọi $t \in (0, +\infty)$, từ hệ quả suy ra $f(x) < g(x)$.

(b) Với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, có $\sin x < x$.

Chỉ cần áp dụng hệ quả trên với $f(x) = \sin x$ và $g(x) = x$.

Tìm cực trị của hàm số

Bây giờ ta nêu một vài mệnh đề giúp cho việc tìm cực trị một hàm số f(x) khả vi trong khoảng (a, b).

Định lí 5.9.

Cho hàm số f, xác định, liên tục trong [a, b], khả vi trong (a, b) (có thể trừ ra một số hữu hạn điểm) ; giả sử c là một điểm thoả a < c < b (có thể tại x = c hàm f không khả vi).

(1) Nếu khi x vượt qua c mà f'(c) đổi dấu từ + sang – thì f(x) đạt cực đại tại x = c.

(2) Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) đổi dấu từ – sang + thì f(x) đạt cực tiểu tại x = c.

(3) Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) không đổi dấu thì f(x) không đạt cực trị tại c.

Chứng minh.

Chúng ta chỉ cần chứng minh trường hợp (1) ; các trường hợp sau cũng lập luận tương tự.

Giả sử x là một điểm thuộc lân cận điểm x = c và x < c, khi đó theo giả thiết : $f'(t) > 0$ với $x < t < c$, do đó f(x) tăng trong [x, c] (định lí về hàm tăng). do đó $f(c) \geq f(x)$; lấy $x > c$ thuộc lân cận điểm c ; theo giả thiết $f'(t) < 0$ với $c < t < x$, do đó f(x) giảm trong [c, x], nghĩa là $f(c) \geq f(x)$. Như thế với mọi x thuộc lân cận điểm c, luôn có $f(c) \geq f(x)$, f(x) đạt cực đại tại x = c. ■

Thí dụ

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; hàm số này xác định, liên tục tại x = 0 và lân cận nó ; tuy nhiên tại x = 0 hàm số không khả vi (không có đạo hàm hữu hạn) ; mặt khác trong lân cận điểm x = 0 ; trừ chính điểm $x = 0$; đạo hàm $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $f'(x) < 0$ khi $x < 0$ và $f'(x) > 0$ khi $x > 0$, đạo hàm đổi dấu từ – sang + ; $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Khi f(x) có các đạo hàm cấp cao, ta còn có định lí :

Định lí 5.10.

Giả sử f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận điểm c, ngoài ra giả sử :

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0\ ;\ f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Khi đó

(1) Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại x = c, cụ thể :

$x = c$ là điểm cực tiểu nếu $f^{(n)}(c) > 0$;

$x = c$ là điểm cực đại nếu $f^{(n)}(c) < 0$.

(2) Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại x = c.

Chứng minh.

Dùng khai triển Taylor tại lân cận điểm $x = c$ và chú ý đến giả thiết $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$; có :

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(d)}{n!}(x-c)^n$$

với d ở giữa x và c.

Từ biểu diễn trên, suy ra : nếu n chẵn : $(x-c)^n > 0$ và nếu $f^{(n)}(c) > 0$; vì $f^{(n)}(x)$ liên tục tại lân cận $x = c$ nên có một lân cận đủ bé của c sao cho $f^{(n)}(x) > 0$ với x thuộc lân cận đó, do vậy : trong lân cận đó : $\dfrac{f^{(n)}(d)}{n!}(x-c)^n > 0$, nghĩa là $f(x) > f(c)$ với mọi x thuộc lân cận đó, do đó f(x) đạt cực tiểu tại $x = c$. Với trường hợp $f^{(n)}(c) < 0$ cũng lập luận tương tự, đi đến kết luận $x = c$ là điểm cực đại của f(x).

Bây giờ nếu n lẻ, khi đó $(x-c)^n$ đổi dấu khi vượt qua giá trị $x = c$; do vậy $f(x) - f(c)$ có dấu thay đổi khi vượt qua giá trị $x = c$. Vậy $x = c$ không thể là điểm cực trị. ■

Thí dụ.

(c) Xét hàm số $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$;

$f''(x) = 6x$; $f^{(3)}(x) = 6$; tại $x = 0$ có $f'(0) = f''(0) = 0$ và $f^{(3)}(0) = 6$; $x = 0$ không thể là điểm cực trị.

(b) Xét hàm $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$; $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; $x = \frac{\pi}{2}$ là điểm cực đại của hàm số.

Thí dụ này gợi ý rằng khi xét dấu $f'(x)$ khó khăn thì người ta dùng đạo hàm cấp cao để tìm cực trị của hàm số.

5.2.3. *Hàm số lồi*

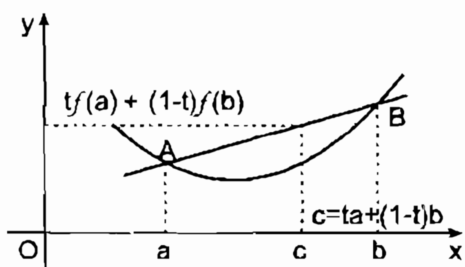
Định nghĩa.

Hàm số f xác định trong khoảng I được gọi là lồi nếu với mọi $a, b \in I$ với mọi $t \in [0, 1]$ luôn có

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b),$$

bất đẳng thức này thường được gọi là *bất đẳng thức lồi*.

Hãy xét biểu diễn hình học của một hàm số lồi trong I. Trước hết, để ý rằng nếu $c = ta + (1-t)b$, $0 \leq t \leq 1$ thì nhất thiết $c \in [a, b]$, ngoài ra trong mặt phẳng toạ độ, điểm $(ta + (1-t)b, tf(a) + (1-t)f(b))$ đúng là những điểm của đoạn AB với $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$. Bất đẳng thức lồi chứng tỏ rằng với mọi $c \in [a, b]$, thì *điểm của đồ thị* của f có hoành độ c luôn nằm dưới dây cung nối A và B (A, B là hai điểm của đồ thị của f ứng với các điểm có hoành độ a và b) (hình 5.5). Điều đó đúng với mọi khoảng $(a, b) \subset I$.



Hình 5.5.

Mệnh đề sau dây cho dấu hiệu nhận dạng hàm số lồi.

Mệnh đề 5.11.

Cho f, một hàm số xác định, liên tục trong một khoảng I nào đó, giả sử f có đạo hàm cấp hai $f'' > 0$ trong I. Khi đó, với bất kì $a < b$, $a, b \in I$, hàm số f lồi trong $[a, b]$.

Chứng minh.

Đặt $g(t) := tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b)$, muốn chứng minh f lồi trong [a, b] chỉ cần chứng minh f thoả bất đẳng thức lồi, nghĩa là chứng minh $g(t) \geq 0$ với mọi $t \in [0, 1]$. Thật vậy, từ biểu thức định nghĩa, có :

$$g'(t) = f(a) - f(b) - (a - b)f'(ta + (1 - t)b)$$

Theo công thức Lagrange, tồn tại $c = t_0a + (1 - t_0)b$, $t_0 \in (0, 1)$ sao cho : $a < c < b$ và $f(a) - f(b) = (a - b)f'(c)$.

Thế giá trị $f(a) - f(b)$ vào biểu thức của $g'(t)$, được :

$$g'(t) = (a - b)[f'(t_0a + (1 - t_0)b) - f'(ta + (1 - t)b)]$$

Mặt khác, theo giả thiết $f'' > 0$ nên f' tăng ; $a - b < 0$ và $ta + (1 - t)b <$ $< t_0a + (1 - t_0)b$ khi và chỉ khi $t \geq t_0$, ta có $g'(t) \geq g'(t_0) = 0$ nếu $t \leq t_0$; $g'(t) \leq g'(t_0)$ nếu $t \geq t_0$. Vậy g(t) tăng trong $[0, t_0]$ và giảm trong $[t_0, 1]$; hơn nữa vì $g(0) = g(1) = 0$, do đó g chỉ có thể lấy các giá trị dương trong (0, 1). ■

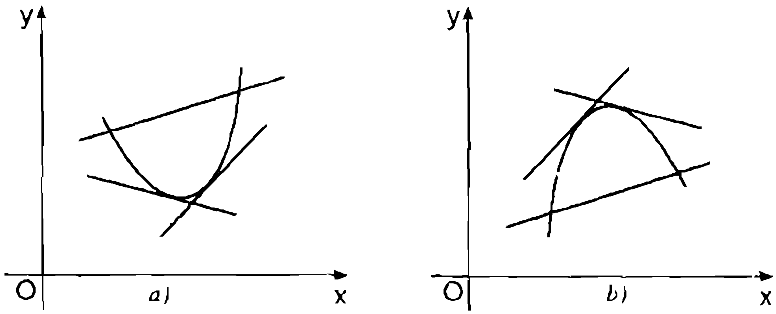
Ngược lại khái niệm lồi là khái niệm lõm, một hàm số f xác định trong [a, b] được gọi là *lõm* nếu f thoả bất đẳng thức lõm :

$$tf(a) + (1 - t)f(b) \leq f(ta + (1 - t)b) \; ; \; t \in [0, 1].$$

Tương tự trường hợp lồi, có thể chứng minh rằng :

Nếu f xác định, liên tục trong I ; có đạo hàm cấp hai $f'' < 0$ trong I thì f là hàm số lõm trong I.

Qua minh hoạ hình học ở trên có thể nói rằng đồ thị của hàm số lồi luôn nằm *trên* tiếp tuyến và đồ thị hàm số lõm luôn nằm *dưới* tiếp tuyến (hình 5.6).



Hình 5.6

Một điểm I(c, f(c)) của đồ thị của hàm số y = f(x) được gọi là *điểm uốn* của đồ thị nếu đạo hàm f''(x) đổi dấu khi qua giá trị x = c.

Thí dụ

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, có $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ với $x < 0$; $f'(x) < 0$ với $x > 0$, do đó $x = 0$ là điểm cực đại ; hơn nữa $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}(x^2 - 1)$, $f''(1) = f''(-1) = 0$; $f''(x) > 0$ với $x < -1$ hoặc $x > 1$; $f''(x) < 0$ với $-1 < x < 1$. Do đó các điểm $x = \pm 1$ là hai điểm uốn của đồ thị.

• *Các bất đẳng thức lồi*

(a) *Bất đẳng thức Jensen*

Cho f là một hàm số lồi trên I : = (a, b), khi đó, với $x_1, x_2, \ldots x_n \in I$ và với $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, luôn có :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức Jensen.

Chứng minh.

Bất đẳng thức trên là tầm thường khi n = 1 ; với n = 2 thì đó chính là định nghĩa tính lồi của f.

Bây giờ ta sẽ quy nạp theo n ; thật vậy, giả sử bất đẳng thức đã đúng với một số nguyên n > 2 nào đó, nghĩa là với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ và với mọi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, ta có

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Ta lấy $x_1, ... x_n, x_{n+1} \in I$ và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ (để tránh kí hiệu rườm rà, ta dùng x, λ nhưng dĩ nhiên, những x, λ này khác với x, λ đã dùng trong giả thiết quy nạp). Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ thì bất đẳng thức muốn có là hiển nhiên.

Giả sử λ_i, $i = \overline{1, n}$ không đồng thời triệt tiêu, đặt

$$c = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} > 0, \text{ và } x' = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Vì $x_i \in I$, $i = \overline{1, n}$ nên $x' \in I$. Dùng định nghĩa hàm lồi, ta có :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(cx' + (1-c)x_{n+1}) \leq$$

$$\leq cf(x') + (1 - c)f(x_{n+1}) = cf(x') + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

Mặt khác, dùng giả thiết quy nạp ta được :

$$f(x') = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{c} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{c} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

$$\left(\text{vì } \frac{\lambda_i}{c} \geq 0, \ i = \overline{1, n} \text{ và } \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{c} = 1\right)$$

Suy ra $f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$

(b) *Bất đẳng thức về số trung bình.*

Cho $a_i \ge 0$; $i = \overline{1,n}$, đặt :

$$\mathcal{A} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \; ; \; \mathcal{G} := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Khi đó : $$\mathcal{G} \le \mathcal{A}$$

tức là *trung bình nhân các số không âm, không vượt quá trung bình cộng của chúng.*

Chứng minh.

Xét hàm $f(x) = -\ln x$, $x \in (1, \infty)$; hiển nhiên f là lồi vì $f'(x) = \frac{1}{x^2} \ge 0$,

do đó có thể dùng bất đẳng thức Jensen và được, với $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$;

$\lambda_i \in [0, 1]$; $i = \overline{1,n}$

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(-\ln a_k),$$

tức là $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \le \prod_{k=1}^{n} a_k^{\lambda_k} \qquad (*)$$

Đặc biệt, lấy $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ suy ra

$$\mathcal{G} \le \mathcal{A}. \blacksquare$$

(c) *Các bất đẳng thức Hölder và Minkowski*

Cho $p > 1$, $q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó

(i) Cho $x > 0$, $y > 0$, dùng bất đẳng thức (*) với $n = 2$; $a_1 = x^p$, $a_2 = y^q$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ ta được $xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$

Bất đẳng thức này vẫn đúng khi x hoặc y bằng không.

(ii) Bây giờ cho $x_i, y_i \in \mathbf{R}$; $i = \overline{1,n}$, đặt

$$a = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad b = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Với $ab \neq 0$, dùng bất đẳng thức có được ở phần (i) với $x := \frac{|x_k|}{a}$; $y := \frac{|y_k|}{b}$ và được :

$$\frac{|x_k y_k|}{ab} = \frac{|x_k|}{a} \cdot \frac{|y_k|}{b} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{a^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{b^q} \ ; k = \overline{1,n}$$

Suy ra

$$\frac{1}{ab} \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \frac{1}{pa^p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{qb^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{pa^p} a^p + \frac{q}{qb^q} b^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Thay giá trị của a, b vào bất đẳng thức trên ta suy ra bất đẳng thức *Hölder* dưới đây

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Đặc biệt, khi $p = q = 2$ thì bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức *Cauchy – schwarz*.

(iii) Với cùng những kí hiệu như trên, ta cũng có :

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \le \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k - y_k|^{p-1}.$$

Từ đó, dùng bất đẳng thức Hölder hai lần, có thể chứng minh được bất đẳng thức *Minkowski* dưới đây :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5.2.4. *Sơ đồ khảo sát hàm số*

Việc khảo sát hàm số thường theo trình tự dưới đây :

(1) Miền xác định của f.

(2) Chiều biến thiên : tìm khoảng tăng, giảm của hàm số.

(3) Cực trị (nếu có).

(4) Tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).

(5) Tiệm cận (nếu có).

(6) Bảng biến thiên.

(7) Vẽ đồ thị.

Sau đây, lấy một thí dụ cốt để minh hoạ các bước khảo sát :

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

(1) Hàm số chỉ xác định khi $\dfrac{x^3}{x-1} \ge 0$ nghĩa là khi $\dfrac{x}{x-1} \ge 0$, tức là $x \le 0$ hoặc $x > 1$.

Miền xác định D_f là $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

(2) Muốn xét chiều biến thiên của hàm số, phải tính f'(x).

Ta có : $$f'(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

$f'(x) = 0$ khi $x = 0$ và $x = \frac{3}{2}$.

$f'(x)$ không xác định khi $0 < x \le 1$.

Sau đây là bảng dấu của đạo hàm $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$\Vert$	$-$	0	$+$	

Từ bảng dấu của f' suy ra :

$f(x)$ giảm khi $x < 0$ hoặc $1 < x < \frac{3}{2}$

$f(x)$ tăng khi $x > \frac{3}{2}$.

(3) Cực trị :

Đạo hàm f' đổi dấu từ − sang + khi vượt qua $x = \frac{3}{2}$ do đó $x = \frac{3}{2}$ là điểm cực tiểu, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; lưu ý : điểm $x = 0$ không phải là điểm cực trị.

(4) Muốn xét tính lồi, lõm ; ta tính f'' : $f''(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{(x-1)^3}$

f'' cùng dấu với $\frac{x}{x-1}$ nên $f'' \ge 0$ trong miền xác định, do đó f(x) là hàm số lồi.

(5) $x = 1$ là điểm hàm số không xác định, do đó đồ thị có một tiệm cận đứng có phương trình $x = 1$. Muốn tìm tiệm cận xiên ta viết f(x) dưới dạng :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = |x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} = |x|\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dùng công thức khai triển Taylor của $(1 + x)^{\alpha}$ (xem (5.21a) khai triển Taylor) có :

$$\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\,.\,o(x)$$

Do đó có thể viết :

$$f(x) = |x| + \frac{|x|}{2(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{|x|}{(x-1)^2} + \frac{|k|}{(x-1)^2}\,.\,o(x)$$

Từ biểu thức trên suy ra :

$$x \to +\infty, \text{ có } f(x) \sim x + \frac{x}{2(x-1)} \sim x + \frac{1}{2}$$

$$x \to -\infty, \text{ có } f(x) \sim x - \frac{x}{2(x-1)} \sim -x + \frac{1}{2}$$

Vậy f(x) có hai tiệm cận xiên :

$$y = x + \frac{1}{2} \text{ khi } x \to +\infty,$$

$$y = -x - \frac{1}{2} \text{ khi } x \to -\infty.$$

• *Chú ý :*

Trong nhiều trường hợp để việc khảo sát được đơn giản, người ta còn chú ý phát hiện các đặc điểm của hàm số f, chẳng hạn phát hiện tính chu kì và tính *chẵn, lẻ* của hàm số f.

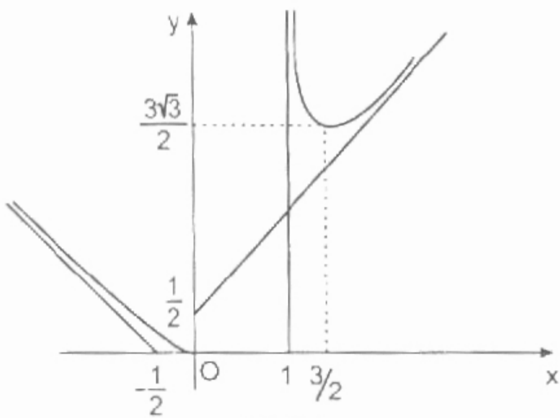
Một hàm số f(x) xác định trong một khoảng đối xứng $[-a, a]$ được gọi là *hàm chẵn* nếu $f(x) = f(-x)$; $x \in [-a, a]$;

hàm lẻ nếu $f(x) = -(f(-x)$; $x \in [-a, a]$.

Vì đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung và đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua gốc toạ độ nên khi khảo sát các hàm số này chỉ cần xét hoặc $x \geq 0$, hoặc $x \leq 0$ rồi lấy đối xứng là có toàn bộ đồ thị.

(6) Từ những kết quả trên có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$				$-$	0	$+$	
y''		$+$				$+$		$+$	
y	$-x-\frac{1}{2}$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$x+\frac{1}{2}$



Hình 5.7

(7) Đồ thị (hình 5.7).

5.2.5. *Đường cong cho dưới dạng tham số*

1. Phương trình tham số của đường cong

Cho hệ hai phương trình

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} ;\ t \in (\alpha, \beta) \qquad (1)$$

Khi đó, với mỗi giá trị $t \in (\alpha, \beta)$ hệ phương trình (1) cho một cặp giá trị tương ứng của x và y và xác định một quan hệ hàm số giữa x và y. Trong hệ toạ độ Đềcác, nếu lấy cặp số có thứ tự (x, y) cho bởi hệ (1) làm toạ độ của một điểm M trong mặt phẳng thì với mỗi trị số của $t \in (\alpha, \beta)$ ta có một điểm M(x, y) và khi t biến thiên trong khoảng (α, β) điểm M vạch nên một đường cong $\mathscr{C}$ nào đó trong mặt phẳng, vì thế ta gọi hệ phương trình (1) là hệ phương trình tham số của đường cong $\mathscr{C}$; t là tham số và M là điểm chạy trên $\mathscr{C}$.

Thí dụ 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A(a, c) và B(b, d).

Như đã biết, đường thẳng đi qua hai điểm A, B chính là đường thẳng đi qua A (hoặc B) và có vectơ chỉ phương là vectơ $\overrightarrow{AB}$, do đó phương trình của nó là :

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c} \tag{2}$$

hoặc
$$\frac{x-b}{b-a} = \frac{y-d}{d-c} \tag{2'}$$

Bây giờ nếu ta đặt m = b – a và n = d – c và đặt tỉ số :

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-c}{n} = t \tag{3}$$

thì từ phương trình (3) suy ra hệ hai phương trình với tham số t :

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + c \end{cases} ;\ t \in \mathbf{R} \tag{4}$$

Hệ hai phương trình (4) chính là hệ phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

Cũng tương tự, dạng tham số ứng với phương trình (2') là :

$$\begin{cases} x = mt + b \\ y = nt + d \end{cases} ;\ t \in \mathbf{R} \tag{4'}$$

Bạn đọc có thể kiểm tra lại rằng nếu hạn chế t chỉ biến thiên trong khoảng đóng [0, 1] ($t \in [0, 1]$) thì hệ phương trình (4) hoặc (4') chính là phương trình tham số của đoạn thẳng AB.

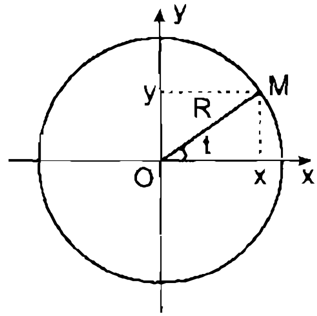
Nếu khử t từ phương trình đầu của (4) hoặc (4') ta sẽ thấy lại phương trình quen thuộc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B, viết dưới dạng trong hệ toạ độ Đềcác :

$$y - c = \frac{n}{m}(x - a)$$

hoặc

$$y - d = \frac{n}{m}(x - b)$$

Thí dụ 2. Lập hệ phương trình tham số của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng R.



Hình 5.8

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy ta vẽ một đường tròn $\mathcal{C}$ có tâm là gốc toạ độ O và có bán kính bằng R (hình 5.8) ; như đã biết, phương trình của đường tròn $\mathcal{C}$ trong hệ toạ độ Đềcác là :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

Bây giờ, nếu ta gọi t là góc giữa trục Ox và vectơ $\overline{OM}$, với M là một điểm nằm trên đường tròn $\mathcal{C}$, nghĩa là $t = (Ox, \overline{OM})$ thì ta có :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi) \qquad (6)$$

Hệ hai phương trình (6) chính là hệ phương trình tham số của đường tròn $\mathcal{C}$. Bạn đọc có thể dễ dàng chuyển hệ hai phương trình (6) về dạng (5) và hơn nữa cũng có thể kiểm tra lại rằng hệ hai phương trình dưới đây :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} ; t \in [0, 2\pi) \qquad (7)$$

là hệ phương trình tham số của elip $\mathcal{E}$ có hai bán trục là a và b có trục đối xứng trùng với các trục toạ độ Ox và Oy.

Thật vậy, hệ (7) cho :

$$\frac{x}{a} = \cos t$$

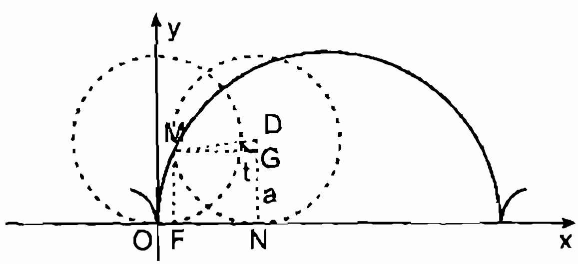
$$\frac{y}{b} = \sin t$$

Do đó :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

và phương trình này chính là phương trình của elíp $\mathscr{E}$ viết dưới dạng chính tắc.

Thí dụ 3. Đường xiclôit. Trong kĩ thuật cơ khí thường gặp bài toán : cho một đường tròn bán kính a, lấy một điểm tuỳ ý (nhưng đã chọn thì luôn giữ cố định) trên đường tròn ; cho đường tròn lăn nhưng không trượt trên một đường thẳng ; tìm quỹ đạo chuyển động của điểm đã chọn trên đường tròn (khi đường tròn đó lăn trên một đường thẳng). Ta sẽ giải bài toán trên bằng cách lập hệ phương trình tham số của quỹ đạo, và để cho tiện, ta lấy điểm được chọn là gốc toạ độ O (xem hình 5.9).



Hình 5.9

Giả sử M(x, y) là một vị trí mới của điểm chọn, N là tiếp điểm của đường tròn ứng với điểm M, khi đó, theo cách lăn, dĩ nhiên ta có :

$$\overset{\frown}{NM} = ON$$

Bây giờ, nếu $t = \overset{\frown}{NDM}$, với D là tâm đường tròn ứng với điểm M, thì ta có :

$$x = OF = ON - FN = \overset{\frown}{NM} - MG = at - a\sin t$$

$$y = FM = NG = ND - GD = a - a\cos t$$

Vậy, phương trình tham số của quỹ đạo là

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} ; \; t \in [0, 2\pi] \qquad (8)$$

Quỹ đạo của điểm được chọn trên đường tròn khi cho đường tròn lăn mà không trượt trên Ox được gọi là *một nhịp* của *đường xiclôit*. Nếu cho t biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$ thì hệ phương trình (8) là hệ phương trình tham số của *đường xiclôit*.

2. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số

Tương tự khi khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số cho dưới dạng $y = f(x)$; có thể khảo sát một đường cong cho dưới dạng tham số theo trình tự dưới đây :

1) Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số $x = x(t)$, $y = y(t)$. Nhận xét các tính chất chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có).

2) Xét chiều biến thiên của x, y theo t bằng cách xét dấu các đạo hàm $x'(t)$, $y'(t)$.

3) Tìm các tiệm cận của đường cong.

Nếu khi $t \to t_0$ hay $t \to \pm\infty$ mà cả x hoặc y hoặc cả x lẫn y dần tới vô cùng thì đường cong có tiệm cận, cụ thể là :

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} y = \pm\infty$ và $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} x = a$ (hữu hạn) đường cong có tiệm cận đứng là $x = a$.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} x = \pm\infty$ và $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} y = b$ (hữu hạn) đường cong có tiệm cận ngang là $y = b$.

Nếu cả x lẫn y dần tới vô cùng khi $t \to t_0$ ($t \to \pm\infty$) thì đường cong có thể có tiệm cận xiên và nếu đồng thời tồn tại các giới hạn

$$k = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} \frac{y}{x} \; ; \; b = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} [y - kx]$$

4) Căn cứ vào các kết quả trên ta có thể vẽ đường cong đồ thị của hệ phương trình tham số. Muốn vẽ đường cong được chính xác hơn, ta cũng tìm các điểm đặc biệt (nếu có) của đường cong và tiếp tuyến với đường cong tại các điểm đặc biệt. Chú ý rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường cong bằng giá trị của đạo hàm y'_x (với giá trị tương ứng của t)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

và đạo hàm cấp hai (nếu cần thiết)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{y''_{tt}\,x'_t - y'_t\,x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Sau đây ta nêu một vài thí dụ.

Thí dụ 1. Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi hệ phương trình tham số

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} ; \; t \in (-\infty, \infty) \; ; \; a > 0 \qquad (9)$$

Rõ ràng là x và y được xác định với mọi t và x và y không vượt ra ngoài khoảng $[-a, a]$, vì vậy đường cong không có tiệm cận, hơn nữa x và y là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, do đó ta chỉ cần khảo sát đường cong đã cho trong khoảng $[0, 2\pi]$. Ta có

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t = 0 \text{ khi } t = 0 \; ; \; \frac{\pi}{2} \; ; \; \pi \; ; \; \frac{3\pi}{2} \; ; \; 2\pi$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t = 0 \text{ khi } t = 0 \; ; \; \frac{\pi}{2} \; ; \; \pi \; ; \; \frac{3\pi}{2} \; ; \; 2\pi$$

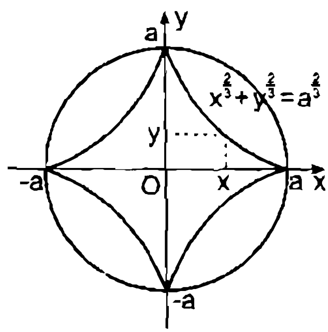
Từ những tính toán trên, ta có bảng biến thiên sau :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x'_t	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0
x	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0	↗	a
y'_t	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	↗	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0

Hình 5.10 cho đồ thị đường cong gọi là đường *axtrôit*. Nếu khảo sát tỉ mỉ hơn, ta nhận thấy rằng, với đường cong này ta có :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Do đó



Hình 5.10

$\frac{dx}{dy} = 0$ tại $t = 0$; π ; 2π và tại các điểm đó tiếp tuyến thẳng đứng.

Ngoài ra, từ hệ phương trình (9) ta cũng có thể khử t bằng cách để ý rằng

$$x^{2/3} = a^{2/3}\cos^2 t \; ; \; y^{2/3} = a^{2/3}\sin^2 t$$

và do đó

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \qquad (9')$$

Phương trình (9') là phương trình axtrôit viết trong hệ toạ độ Đềcác ; cũng có thể thấy rằng đường axtrôit dạng (9') luôn nằm trong đường tròn tâm O và bán kính a.

Thí dụ 2. Lá Đềcác. Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \; ; \; a > 0 \qquad (10)$$

Dễ thấy rằng khi thay x bởi y và y bởi x thì phương trình (10) không thay đổi, do đó đồ thị của (10) đối xứng qua đường phân giác thứ nhất.

Bây giờ ta đặt $y = tx$ và thế vào (10) ta được

$$x^3 + x^3t^3 - 3ax^2t = 0$$

và suy ra

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} ; \; t \neq -1 \qquad (11)$$

Vậy hệ phương trình (11) là dạng tham số của đường cong cho bởi phương trình (10).

Từ hệ phương trình (11), ta có :

$$x'_t = 3a \, . \, \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \; ; \; x'_t = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$y'_t = \frac{2-t^3}{(1+t^3)^2} \, . \, 3at \; ; \; y'_t = 0 \text{ khi } t = 0 \; ; \; t = \sqrt[3]{2}$$

Khi $t \to -1$ thì cả x lẫn y dần tới vô cùng và có :

$$k = \lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1} t = -1,$$

$$b = \lim_{t \to -1} [y - kx] = \lim_{t \to -1} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right]$$

$$= 3a \, . \lim_{t \to -1} \frac{t^2+t}{1+t^3} = 3a \, . \lim_{t \to -1} \frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = -a.$$

Vậy tiệm cận xiên của đường cong là $y = -x - a$. Từ các kết quả trên, ta có bảng biến thiên :

t	$-\infty$		-1		0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'_t		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y'_t		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

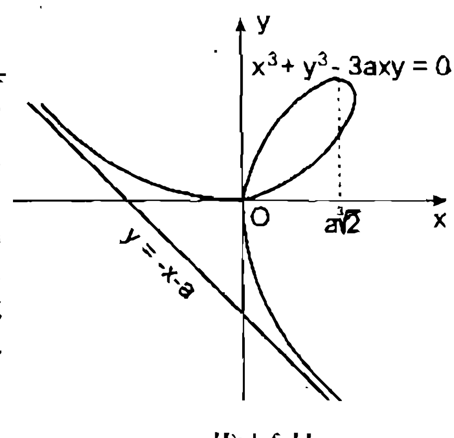
Để vẽ đường cong được chính xác, ta khảo sát thêm một số đặc điểm :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

do vậy : $\dfrac{dy}{dx} = 0$ tại $t = 0$, $t = \sqrt[3]{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ tại } t = \infty,\ t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Như vậy, đồ thị đi qua gốc toạ độ hai lần ứng với hai trị số $t = 0$; $t = \infty$ và các tiếp tuyến tại đó lần lượt là trục Ox và trục Oy. Tiệm cận xiên của đường cong là đường thẳng $y = -x - a$ (xem hình 5.11). Đồ thị này được gọi là *lá Đềcác*.

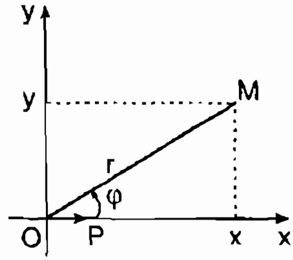


Hình 5.11

5.2.6. *Khảo sát đường cong trong hệ toạ độ cực*

Hệ toạ độ cực

Trong mặt phẳng chọn một điểm O cố định, gọi là *cực* và một vectơ đơn vị $\overline{OP}$, tia mang vectơ $\overline{OP}$ gọi là *trục cực* ; hệ toạ độ xác định bởi cực và trục cực được gọi là *hệ toạ độ cực* (hình 5.12a).



Hình 5.12a

Vị trí của mỗi điểm M trong mặt phẳng được xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$, nghĩa là xác định bởi góc $\varphi := (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$ và $r = |\overrightarrow{OM}|$; φ được gọi là *góc cực* và r được gọi là *bán kính cực*. Góc φ là một góc định hướng, lấy giá trị dương nếu chiều quay $\overline{OP}$ đến trùng với $\overline{OM}$ ngược chiều kim đồng hồ và lấy giá trị âm nếu ngược lại. Nếu $0 \le \varphi < 2\pi$ và $r \ge 0$; cặp số có thứ tự (r, φ) được gọi là các toạ độ cực của điểm M trong mặt phẳng. Bằng cách xây dựng như thế, ta đã thiết lập một song ánh giữa tập tích Đềcác $[0, 2\pi) \times [0, \infty)$ và các điểm trong mặt phẳng toạ độ cực : mỗi điểm M trong mặt phẳng ứng với một cặp số thứ tự (r, φ) ; riêng điểm O thì $r = 0$ còn φ có thể lấy tuỳ ý ; và mỗi cặp số thứ tự (r, φ) ứng với một điểm M của mặt phẳng.

Bây giờ ta tìm mối liên hệ giữa toạ độ Đềcác vuông góc và toạ độ cực của cùng một điểm M ; ta lấy trục hoành trùng với trục cực và trục tung ứng với tia $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$; gọi (x, y) và (r, φ) lần lượt là toạ độ của cùng một điểm M trong hệ toạ độ Đềcác vuông góc và hệ toạ độ cực (hình 5.12). Khi đó, theo các định lí về phép chiếu vuông góc ta có :

(5.22) $$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi < 2\pi \; ; \; r \ge 0.$$

Ngược lại, ta có :

(5.23) $$r^2 = x^2 + y^2 \; ; \; \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

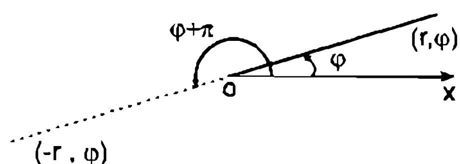
Trong công thức (5.23) có hai góc φ tương ứng (vì $0 \leq \varphi < 2\pi$) ta sẽ lấy góc φ sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với y vì $y = r\sin\varphi$.

• *Thí dụ.*

Biểu thức qua hệ toạ độ cực của điểm $M(-\sqrt{3}, 1)$. Ta có $r = \sqrt{3+1} = 2$, $tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ và $\varphi = \frac{11\pi}{6}$; chỉ lấy $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ vì $\sin\frac{5\pi}{6} > 0$, do đó toạ độ cực của điểm $(-\sqrt{3}, 1)$ là $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Chú thích. (*)

Nhiều khi, chẳng hạn khi vẽ đường cong trong hệ toạ độ cực, người ta thường dùng toạ độ cực suy rộng, theo đó bán kính cực r có thể lấy giá trị âm, góc cực φ được xác định sai khác $2k\pi$ với k nguyên. Trên hình 5.12b, các điểm (r, φ) và $(-r, \varphi)$ nằm trên cùng một đường thẳng, cùng cách O khoảng cách $|r|$, nhưng ở hai hướng khác nhau. Các toạ độ $(-r, \varphi)$ và $(r, \varphi + \pi)$ biểu diễn cùng một điểm.



Hình 5.12b

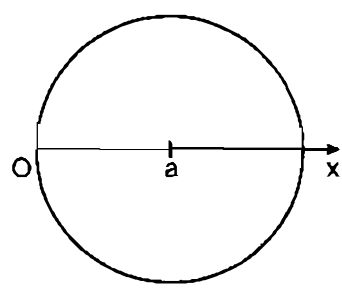
• *Phương trình đường cong trong hệ toạ độ cực.*

Cho hàm số $r = f(\varphi)$, đồ thị hàm số này trong hệ tọa độ cực được gọi là *đường cong trong hệ toạ độ cực* và phương trình $r = f(\varphi)$ được gọi là *phương trình đường cong trong hệ toạ độ cực.*

• *Thí dụ*

(a) Phương trình $r = a$, $a > 0$ là phương trình đường tròn tâm O bán kính a trong hệ toạ độ cực.

(b) Phương trình $r = 2a\cos\varphi$, $a > 0$ là phương trình đường tròn có tâm là điểm $(a, 0)$ trong hệ toạ độ Đềcác và có bán kính bằng a (hình 5.13).



Hình 5.13

Khảo sát đường cong trong hệ toạ độ cực

Giả sử cho hàm số $r = f(\varphi)$; muốn khảo sát và vẽ đồ thị hàm số này, ta thực hiện các bước :

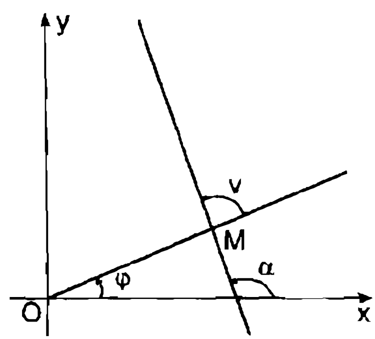
(1) Tìm miền xác định của $f(\varphi)$.

(2) Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị.

(3) Lập bảng biến thiên, xét sự biến thiên của $f(\varphi)$ theo φ.

Để vẽ đồ thị được chính xác hơn, ta thường xác định tiếp tuyến với đường cong tại mỗi điểm M của nó.

Gọi V là góc dương giữa vectơ $\overline{OM}$ và vectơ chỉ phương của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M (hình 5.14) ; gọi α là góc dương giữa trục cực và tiếp tuyến, ta có $V = \alpha - \varphi$.



Hình 5.14

Do đó $$\text{tg}V = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}\alpha\text{tg}\varphi}$$

Mặt khác, theo ý nghĩa hình học của đạo hàm có :

$$\text{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

trong đó $r' := \dfrac{dr}{d\varphi}$

Thế giá trị $\text{tg}\alpha$ vào biểu thức của $\text{tg}V$, ta được

(5.24) $$\text{tg}V = \frac{r}{r'}$$

• *Thí dụ.*

(a) Vẽ đường xoắn ốc lôgarit có phương trình

$$r = ae^{b\varphi}, \qquad a > 0, b > 0$$

Trong trường hợp này r được xác định với mọi φ, khi φ tăng r cũng tăng, $\varphi = 0$; $r = a$; $\varphi \to +\infty$, $r \to +\infty$; $\varphi \to -\infty$, $r \to 0$ và lúc đó đường cong quấn vô hạn quanh cực O : O được gọi là *điểm tiệm cận* của đường cong. Theo công thức (5.24) có :

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{a}$$

Do đó vectơ chỉ phương của tiếp tuyến với đường cong luôn tạo với $\overrightarrow{OM}$ một góc không đổi (hình 5.15 (a)).

(b) Vẽ đường hoa hồng ba cánh có phương trình

$$r = a\sin 3\varphi,\ a > 0$$

Ở đây r là một hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{3}$, vì thế chỉ cần khảo sát hàm số này trong một khoảng có độ dài bằng chu kì, chẳng hạn, khoảng $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$; hơn nữa r là hàm lẻ, do vậy chỉ cần khảo sát trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Ta có $\quad r' = 3a\cos 3\varphi$

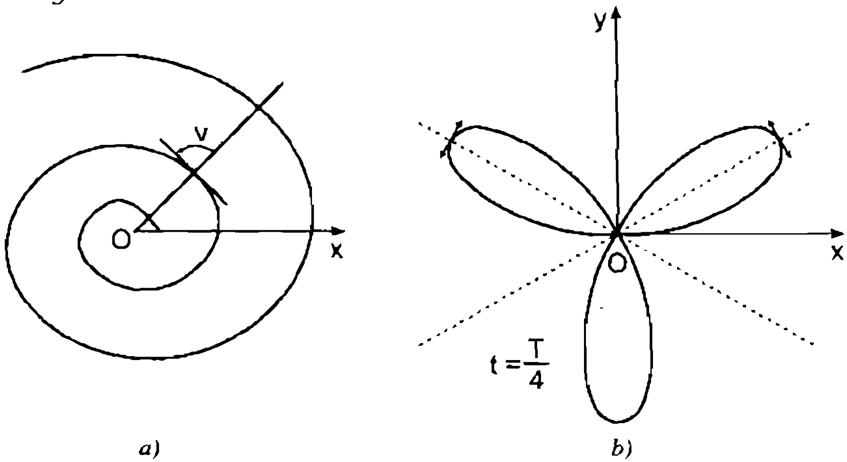
$$r' = 0 \text{ khi } \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}3\varphi$$

Dưới đây cho bảng biến thiên của r theo φ :

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'	$3a$	$+$	0	$-$	$-3a$
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\mathrm{tg}V$	0		∞		0

Đồ thị ứng với khoảng $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ gồm một cánh, ứng với chu kì $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ gồm hai cánh đối xứng nhau, lần lượt cho đồ thị quay các góc $\frac{2\pi}{3}$ quanh cực sẽ có toàn bộ đồ thị (hình 5.15 (b))



Hình 5.15

5.2.7. *Giải phương trình f(x) = 0 theo phương pháp Newton*

Bài toán giải phương trình f(x) = 0 là một bài toán có nhiều ý nghĩa về lí thuyết cũng như ứng dụng. Cho đến nay chúng ta chỉ xây dựng được công thức tìm nghiệm của phương trình đó cho trường hợp f(x) là các *đa thức* có bậc 1, 2 ; trường hợp f(x) là đa thức có bậc 3, 4 tuy có thể xây dựng được công thức nhưng việc tính toán rất phức tạp, người ta đã chứng minh được (trong giáo trình đại số) với đa thức có bậc cao hơn bốn thì không có công thức tìm nghiệm ; trường hợp f(x) là các *hàm lượng giác cơ bản* (sinx, cosx, tgx) ta cũng đã có công thức tìm nghiệm. Khi f(x) là một hàm số không phải thuộc loại đã nói trên thì việc giải phương trình f(x) = 0 được thực hiện theo hướng tìm một dãy số thực (theo nghĩa ẩn, xem 1.3.9 chương 1) $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ đến nghiệm thực α của phương trình f(x) = 0. Trước kia, khi nghiên cứu tính chất của hàm số liên tục chúng ta đã giới thiệu một phương pháp, gọi là phương pháp phân đôi để xây dựng dãy $\{x_n\}$, bây giờ chúng ta sẽ dùng tính chất khả vi và đặc biệt, các định lí trung bình để xây dựng một phương pháp xây dựng dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến nghiệm thực α ; đó là phương pháp *Newton*. Trước hết, ta chứng minh mệnh đề :

Mệnh đề 5.2.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b), ngoài ra giả sử $f(a)f(b) < 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu trên (a, b) ; khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$, $a < \alpha < b$.

Chứng minh.

Việc tồn tại nghiệm α : $f(\alpha) = 0$ là hệ quả 3.1 của định lí 3.7 và, tính duy nhất của nghiệm α là hệ quả của tính đơn điệu (vì $f'(x)$ không đổi dấu) của $f(x)$. ■

Bây giờ ta xét phương trình $f(\alpha) = 0$ và giả sử hàm số $f(x)$ *thoả giả thiết* của mệnh đề trên, người ra giả sử f có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trong (a, b). Ta lấy một điểm x_0 tuỳ ý, $x_0 \in (a, b)$; với giả thiết trên, có thể khai triển Taylor hàm số f tại x_0 và có :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$$

với c ở giữa x_0 và x.

Thế f(x) vào phương trình f(x) = 0, được

$$(5.25) \qquad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c) = 0$$

Như thế, nghiệm của phương trình trên cũng chính là nghiệm của phương trình nguyên thuỷ f(x) = 0. Bây giờ ta xây dựng thủ tục tìm dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến nghiệm α bằng cách bỏ qua số hạng bình phương trong phương trình (5.25) ta được :

$$(5.26) \qquad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

Làm như thế tức là chúng ta đã thay phương trình $f(x) = 0$ bởi phương trình đơn giản hơn rất nhiều vì bao giờ cũng có thể viết tường minh nghiệm (vì là phương trình bậc nhất) đối với ẩn x. Gọi x_1 là nghiệm của (5.26) ta có ngay :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Từ x_1, có thể tìm một cách tương tự x_2, x_3,... và một cách tổng quát :

$$(5.27) \qquad \begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ \text{với } x_0 \text{ chọn trước, } x_0 \in (a, b) \end{cases}$$

Tóm lại, với công thức (5.27) ta đã có một dãy $\{x_n\}$ với $x_0 \in (a, b)$. Nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì $\lim x_n$ nhất thiết sẽ là α, là nghiệm của phương trình nguyên thuỷ. Thật vậy, giả xử $x_n \to c$, chuyển qua giới hạn hệ thức (5.27) và để ý $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ (do tính liên tục của f(x)), suy ra $f(c) = 0$. Mặt khác phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $\alpha \in (a, b)$; do đó $c \equiv \alpha$.

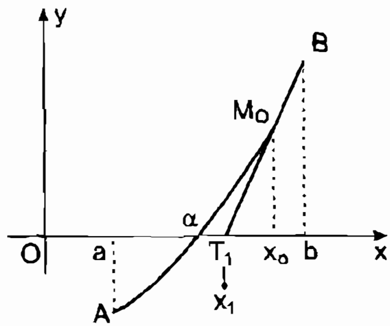
Nhận xét.

• Xét phương trình (2.25) ; nếu chọn x_0 trùng với α (nghiệm của phương trình) thì (5.25) nghiệm đúng, do đó x_0 càng gần α thì số hạng bị bỏ qua : $\frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c)$ càng bé, nghĩa là việc xấp xỉ (5.25) bởi (5.26) càng ít sai. Nói khác đi, x_n càng gần nghiệm α *thì tốc độ hội tụ* của $\{x_n\}$ về α *càng nhanh* : việc chọn giá trị xuất phát x_0 có ảnh hưởng quyết định đến sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$ trong thủ tục Newton. Người ta chứng minh được rằng nếu f'(x), f''(x) liên tục và không đổi dấu trong (a, b) thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ về α và chọn x_0 sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f''(x) : nếu $f'(x).f''(x) < 0$ thì $\{x_n\}$ đơn điệu tăng và nếu $f'(x).f''(x) > 0$ thì dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm.

• Bây giờ xét phương trình

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Phương trình này chính là phương trình tiếp tuyến tại x_0 với đồ thị của hàm số f(x), do đó, về mặt hình học ; x_1 chính là hoành độ của giao điểm tiếp tuyến với trục hoành (h. 5.16). Như thế, phương pháp Newton chính là phương pháp thay việc tìm giao điểm của cung AB của đồ thị của f(x) với trục hoành bởi việc tìm một dãy giao điểm của một "dãy" tiếp tuyến của cung AB với trục hoành, vì thế người ta còn gọi phương pháp Newton là phương pháp tiếp tuyến.



Hình 5.16

• *Thí dụ.*

Tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 - 2 = 0$. Ta có $f(x) = x^2 - 2$; $f'(x) = 2x > 0$ khi $x > 0$; $f''(x) = 2$, $f(2) = 2^2 - 2 > 0$, f(2) cùng dấu f''(x), f(x).f''(x) > 0 khi x > 0 ; do đó dãy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm đến nghiệm $\alpha = \sqrt{2}$ (như đã biết). Chọn $x_0 = 2$ và dùng công thức (5.27) được

$$x_1 = 1,5$$
$$x_2 = 1,417$$
$$x_3 = 1,41421$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1} - \frac{(x_{n-1}^2 - 2)}{2x_{n-1}}$$

Như đã biết $\sqrt{2} = 1,414213562...$ nên ta thấy rõ dãy xấp xỉ nghiệm $\{x_n\}$ hội tụ khá nhanh đến nghiệm $\sqrt{2}$.

TÓM TẮT CHƯƠNG 5

• *Các định lí về giá trị trung bình*

Định lí Fermat :

Cho hàm số f(x) xác định liên tục trong khoảng đóng [a, b], khi đó nếu f(x) đạt cực trị tại $c \in (a, b)$ và nếu f(x) khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

Định lí Rolle :

Cho hàm số f(x) xác định liên tục trong khoảng đóng [a, b] và khả vi trong khoảng mở (a, b) ; khi đó, nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lí Lagrange :

Cho hàm số f(x) xác định liên tục trong khoảng đóng [a, b], khả vi trong khoảng mở (a, b) ; khi đó tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ hay là } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Định lí Cauchy :

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số thoả mãn giả thiết định lí Lagrange, ngoài ra, giả sử $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, khi đó tồn tại c ở giữa a và b sao cho

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Công thức Taylor (mở rộng định lí Lagrange) :

Nếu hàm số f(x) xác định liên tục trong khoảng đóng [a, b], khả vi đến (n + 1) lần trong khoảng mở (a, b) thì với bất kì $c \in (a, b)$, có :

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{c})}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

với $\overline{c}$ ở giữa x và c.

Đặc biệt khi c = 0 :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với $0 < \theta < 1$.

Một số công thức thường dùng :

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-k+1)}{k!}x^k + ... + x^m,$$

m nguyên dương.

$$(1-x)^m = 1 - \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... +$$

$$+(-1)^k \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k + ... + (-1)^m x^m,$$

m nguyên dương.

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{n+1}.\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n+1}.\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k +$$

$$+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n o(x)$$

• *Ứng dụng các định lí về giá trị trung bình*

Định lí De L' Hospital :

Giả sử các hàm số f(x), g(x) khả vi tại lân cận a (a hữu hạn), f(a) = g(a) = 0 và g'(x) ≠ 0 tại lân cận a, khi đó

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$

Khi $x \to \infty$, định lí vẫn đúng.

Khi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, định lí vẫn đúng.

Dùng định lí De L' Hospital có thể khử được các dạng vô định.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số.

Định lí :

Cho f(x) là một hàm số xác định liên tục trong khoảng đóng [a, b], khả vi trong khoảng mở (a, b) ; khi đó

f(x) tăng (giảm) trong [a, b] ⇔ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $x \in (a, b)$.

Tìm cực trị của hàm số :

Cho f(x), xác định liên tục trong [a, b] ; khả vi trong (a, b) (có thể trừ ra một số hữu hạn điểm), giả sử c là một điểm thoả a < c < b (có thể tại x = c hàm f(x) không khả vi). Khi đó :

Nếu khi x vượt qua c mà f'(x) đổi dấu từ dương (âm), sang âm (dương) thì f(x) đạt cực trị tại x = c.

Tổng quát hơn :

Giả sử f(x) có đạo hàm liên tục đến cấp n tại lân cận điểm x = c ; giả sử : $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$; $f^{(n)}(c) \neq 0$

Khi đó, nếu :

(1) n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại x = c và

x = c là điểm cực đại nếu $f^{(n)}(c) < 0$

x = c là điểm cực tiểu nếu $f^{(n)}(c) > 0$

(2) n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại x = c.

Hàm lồi :

Hàm số f(x) xác định trong [a, b] được gọi là lồi trong [a, b] nếu với mọi $t \in [0, 1]$ luôn có bất đẳng thức lồi sau :

$$tf(a) + (1 - t)f(b) \geq f(ta + (1 - t)b)$$

Ngược lại, một hàm số f(x) được gọi là lõm trong [a, b] nếu với mọi $t \in [0, 1]$ luôn có

$$tf(a) + (1 - t)f(b) \leq f(ta + (1 - t)b)$$

Định lí :

Cho hàm số f(x) xác định liên tục trong [a, b], giả sử f(x) có đạo hàm cấp hai f''(x), $x \in (a, b)$.

Khi đó :

Nếu f''(x) > 0 (< 0) thì f(x) lồi (lõm) trong [a, b].

Một điểm I(c, f(c)) của đồ thị của hàm số f(x) được gọi là điểm uốn của đồ thị nếu đạo hàm cấp hai f''(x) đổi dấu khi qua giá trị x = c.

• *Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$*

Thường khảo sát hàm số theo trình tự dưới đây :

– Miền xác định của f(x) ;

– Chiều biến thiên : tìm khoảng tăng giảm ;

– Cực trị (nếu có) ;

– Tính lồi lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có) ;

– Tiệm cận (nếu có) ;

– Bảng biến thiên ;

– Vẽ đồ thị.

Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số

Có thể khảo sát một đường cong cho dưới dạng tham số theo trình tự dưới đây :

– Miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số $x = x(t)$, $y = y(t)$. Xét các tính chất chẵn, lẻ, tuần hoàn, chu kì (nếu có)

– Xét dấu $x'(t)$, $y'(t)$ để xét chiều biến thiên của x, y theo t

– Tìm các tiệm cận của đường cong (nếu có) :

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$ thì có tiệm cận đứng $x = a$ (t_0 có thể là $\pm\infty$).

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$ thì có tiệm cận ngang $y = b$.

Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)$ và $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)$ cùng là vô cùng thì đường cong có thể có tiệm cận xiên, cụ thể nếu đồng thời tồn tại các giới hạn $k = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{t\to t_0} (y - kx)$ thì tiệm cận xiên là $y = kx + b$.

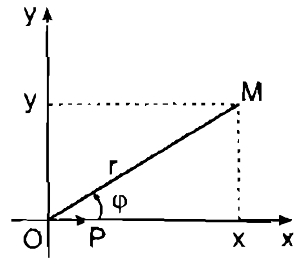
– Tìm các điểm đặc biệt của đường cong (nếu có) và tiếp tuyến của đường cong tại các điểm đặc biệt, hệ số góc của tiếp tuyến được tính theo công thức $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$

– Bảng biến thiên và đồ thị

Khảo sát đường cong trong hệ toạ độ cực

Công thức liên hệ giữa toạ độ Đềcác và toạ độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, 0 \le \varphi \le 2\pi, r \ge 0$$



Hình 5.17

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ và chọn φ

sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với y.

Các bước khảo sát hàm số $f = f(\varphi)$:

– Miền xác định của $f(\varphi)$;

– Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị ;

– Bảng biến thiên (xét sự biến thiên của $f(\varphi)$ theo φ).

• *Giải phương trình $f(x) = 0$ theo phương pháp lặp Newton (phương pháp tiếp tuyến) :*

Nếu hàm số f(x) xác định liên tục trong [a, b], khả vi trong (a, b), ngoài ra nếu $f(a)f(b) < 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu trong (a, b), khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm $x = \alpha$ của phương trình $f(x) = 0$.

Thủ tục lặp dưới đây (lặp Newton) cho cách tìm nghiệm xấp xỉ nghiệm $x = \alpha$:

Chọn $x_0 \in (a, b)$, tính $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Nếu $f'(x)$, $f''(x)$ liên tục, không đổi dấu trong (a, b) thì $\{x_n\}$ hội tụ về α và chọn x_0 sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với $f''(x)$: nếu $f'(x)f''(x) < 0$ (> 0) thì $\{x_n\}$ đơn điệu tăng (giảm).

BÀI TẬP

1. Xét xem định lí Rolle có áp dụng được cho hàm số

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ không ?

2. Hàm số $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ triệt tiêu khi $x_1 = -1$ và $x_2 = 1$, nhưng $f'(x) \neq 0$ với $|x| \leq 1$; điều đó có mâu thuẫn với định lí Rolle không ?

3. Chứng minh rằng nếu mọi nghiệm của đa thức

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ (a_n \neq 0)$$

với $a_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{0, n}$) là thực thì các đạo hàm $P'_n(x), P''_n(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ cũng chỉ có nghiệm thực.

4. Tìm trên đường cong $y = x^3$ một điểm có tiếp tuyến tại đó song song với dây cung nối hai điểm $A(-1, -1)$ và $B(2, 8)$.

5. Chứng minh rằng trong khoảng hai nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

6. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$, n nguyên dương không thể có quá 2 nghiệm thực phân biệt nếu n chẵn, không quá ba nghiệm thực phân biệt nếu n lẻ.

7. Giải thích tại sao công thức Cauchy không áp dụng được đối với các hàm số :

$$f(x) := x^2 ;\ g(x) := x^3,\ -1 \leq x \leq 1.$$

8. Chứng minh các bất đẳng thức :

1. $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$,

2. $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|$,

3. $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$; $0 < b < a$.

9. 1. Cho f, g, h là ba hàm số liên tục trên [a, b] và khả vi trên (a, b). Với $x \in [a, b]$; đặt :

$$F(x) := \begin{vmatrix} f(x) & f(a) & f(b) \\ g(x) & g(a) & g(b) \\ h(x) & h(a) & h(b) \end{vmatrix}$$

(i) Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = 0$.

(ii) Chứng tỏ rằng với cách chọn g và h thích hợp thì từ (i) có thể suy ra định lí *Lagrange*.

(iii) Chứng tỏ rằng với cách chọn h thích hợp thì từ (i) có thể suy ra định lí *Cauchy*.

2. Cho f là một hàm số số liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \alpha f(c)$.

3. Cho f là một hàm số khả vi trên [a, b] và d là một số thực ở giữa $f'(a)$ và $f'(b)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = d$.

10. Tìm các giới hạn

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$, 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$, 4. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + a\,tg^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$ $a \neq 0$

11. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$:

$$f(x) := \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

12. Cho f là một hàm số thực khả vi trên [a, b] và có đạo hàm f''(x) trên (a, b), chứng minh rằng $\forall x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

13. Cho $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$, tìm ba số hạng đầu tiên của khai triển Taylor tại $x_0 = 1$, áp dụng để tính f(1,03).

14. cho $f(x) := x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 2$; tìm ba số hạng đầu tiên của khai triển Taylor tại $x_0 = 2$, áp dụng để tính xấp xỉ f(2,02) và f(1,97).

15. Tìm xấp xỉ các giá trị sau và đánh giá sai số :

1. $\cos 10^{\circ}$, 2. ln (1,5)

16. Khảo sát tính đơn điệu các hàm số

1. $y = x^3 + x$, 2. $y = \text{arctg}x - x$

17. Tìm cực trị các hàm số :

1. $y = 2x^3 - 3x^2$, 2. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$,

3. $y = x\sqrt{x^2 - 2}$, 4. $y = x - \ln(1 + x)$,

5. $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + x^2}}$.

18. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

1. $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$, 2. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$,

3. $y = \dfrac{x^4+8}{x^3+1}$, 4. $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

5. $y = \dfrac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$, 6. $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$

19. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số :

1. $r = a + b\cos\varphi$ $(0 < a \le b)$,

2. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a > 0)$.

20. Dùng phương pháp Newton tính gần đúng nghiệm các phương trình sau với sai số tuyệt đối không quá 10^{-5} :

1. $x^2 - \sin \pi x = 0$, 2. $2\lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$, 3. $\lg x - \dfrac{1}{x^2} = 0$.

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

2. Tại $x = 0$ không tồn tại đạo hàm.

4. $A(-1, -1)$, $C(1, 1)$

9. 1. (ii) Chọn $g(x) = x$; $h(x) = 1$; (iii) Chọn $h(x) = 1$.

2. Xét hàm số $g(x) = e^{-\alpha x} f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$

3. Xét hàm số $g(x) = d(x - a) - f(x)$

10. 1. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} + 1} \to \dfrac{1}{2}$;

2. $a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + o(x)$,

$$\frac{a^x - b^x}{x} \sim \frac{1 + x\ln a - 1 - x\ln b}{x} \to \ln\frac{a}{b} \ ;$$

3. $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; giới hạn là ∞ ; 4. e^a.

11. $a = 0$; $b = \frac{1}{2}$

12. Đặt $\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}\lambda$; $\lambda \in \mathbf{R}$. Cho $x_0 \in (a, b)$, định nghĩa λ sao cho $\varphi(x_0) = 0$, suy ra $\varphi(x_0) = \varphi(a) = \varphi(b) = 0$ và suy ra $\varphi(x)$ thoả giả thiết định lí Rolle, suy ra tồn tại $c_1 \in (a, x_0) : \varphi'(c_1) = 0$; tương tự tồn tại $c_2 \in (x_0, b)$ sao cho $\varphi'(c_2) = 0$. Vì

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \lambda\left(x - \frac{a + b}{2}\right),$$

f có đạo hàm f'' nên φ cũng có đạo hàm φ'', lại áp dụng định lí Rolle cho $[c_1, c_2]$, suy ra $\exists c \in (a, b)$ thoả yêu cầu.

13. 0,821.

14. 342,399 ; 288,873.

15. 1. 0,985, $\delta < 0{,}001$; 2. 0,42, $\delta < 0{,}01$.

17. 1. $y_{CĐ} = y(0) = 0$; $y_{CT} = y(1) = -1$;

2. $y_{max} = y(0) = 4$; $y_{min} = y(-2) = \frac{8}{3}$

3. Không có cực trị ; 4. $y_{min} = y(0) = 0$.

18. 1. Đối xứng đối với Oy ; y = 0 khi $x=\pm\sqrt{2}$; $y_{max}=y(0)=2$;

$y_{min}=y(\pm\sqrt{2+\sqrt{5}})=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$; điểm uốn tại $x_{1,2}=\pm 0,77$, $y_{1,2}=1,04$; $x_{3,4}=\pm 2,67$, $y_{3,4}=-0,010$; tiệm cận y = 0 ;

2. $y_{CT}=y(1)=0$; $y_{CĐ}=y\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$, điểm uốn tại : x = −1, y = 0; tiệm cận $y=x-\frac{1}{3}$;

3. $y_{CT}=y(2)=2\frac{2}{3}$, $y_{CĐ}=y(-2,4)=-3,2$; điểm uốn x = 0 ; y = 8 ; tiệm cận x = −1 ; y = x.

4. $y_{min}=y(-0,5)=-\sqrt{5}$; điểm uốn $x_1=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}$, $y_1=-2,06$; $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}$, $y_2=-1,46$; tiện cận y = −1 khi $x\to-\infty$; y = 1 khi $x\to+\infty$;

5. Miền xác định : x > 0, $y_{min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$; tiệm cận $y=x+\frac{3}{2}$ và x = 0 ;

6. $y_{CĐ}=y(0)=1$, $y_{CT}=y(-4)=13$; tiệm cận $y=-2x+\frac{5}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

19. 1. Miền xác định : $r\ge 0$, $|\varphi|\le\alpha$; $\alpha:=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$; đường cong kín, đối xứng qua trục cực, $r_{max}=r(0)=a+b$;

2. Miền xác định $|\varphi|<\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{5}{6}\pi$, chu kì $\frac{2\pi}{3}$; $r_{min}=r(0)=a=r\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$; tiệm cận $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$; $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$.

20. 1. 0,75983 ; 2. 0,39754 ; 3. 1,89665.

Chương 6

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

6.1. Tích phân bất định. Các thí dụ đơn giản

Trong chương trước chúng ta đã biết rằng nếu một hàm số f(x) khả vi trong khoảng (a, b) thì có đạo hàm trong (a, b) và nếu cho một hàm số f(x) (khả vi) thì ta có thể tính được đạo hàm f'(x) của nó. Bây giờ ta đặt bài toán ngược lại, nếu cho trước một hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b), hỏi rằng có chăng một hàm số F(x) khả vi trong (a, b) và có đạo hàm F'(x) = f(x) hay dF(x) = f(x)dx, và nếu có F(x) thì tìm nó ra sao ? Chương này nhằm trả lời các câu hỏi đó.

Định nghĩa nguyên hàm.

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng mở (a, b) ; nói rằng hàm số F(x) xác định trong (a, b) là một nguyên hàm của f(x) nếu F(x) khả vi trong (a, b) và F'(x) = f(x) hay dF(x) = f(x)dx, với mọi $x \in (a, b)$.

Thí dụ.

(a) $\frac{x^4}{4}$ là nguyên hàm của x^3 với mọi $x \in \mathbf{R}$ vì $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

(b) $\frac{x^4}{4} + 10$ là nguyên hàm của x^3, với mọi $x \in \mathbf{R}$ vì $\left(\frac{x^4}{4} + 10\right)' = x^3$.

(c) $\frac{1}{5}\sin 5x$ là nguyên hàm của cos5x vì $\left(\frac{1}{5}\sin 5x\right)' = \cos 5x$.

(d) $\dfrac{x^4}{4}+C$ là nguyên hàm của x^3, C là hằng số bất kì và $\dfrac{1}{5}\sin 5x + D$ là nguyên hàm của cos5x, D là hằng số bất kì vì :

$$\left(\frac{x^4}{4}+C\right)' = x^3 \text{ và } \left(\frac{1}{5}\sin 5x + D\right)' = \cos 5x$$

Định lí sau đây tổng quát hoá các thí dụ trước.

Định lí 6.1.

Giả sử F(x) khả vi trong (a, b) và F(x) là nguyên hàm của f(x) với mọi $x \in (a, b)$. Khi đó :

(1) Với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là nguyên hàm của f(x) với mọi $x \in (a, b)$.

(2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của f(x) với mọi $x \in (a, b)$ đều có dạng F(x) + C.

Chứng minh.

(1) Là hệ quả tất nhiên của giả thiết F(x) là nguyên hàm của f(x) ; $x \in (a, b)$.

(2) Giả sử G(x) là một nguyên hàm nào đó của f(x) ; $x \in (a, b)$.

Khi đó : $G'(x) = f(x)$ và $F'(x) = f(x)$ (giả thiết)

Suy ra $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, tức là

$(G(x) - F(x))' = 0$ (tính chất tuyến tính của đạo hàm)

Suy ra $G(x) - F(x) = C$

nghĩa là $G(x) = F(x) + C$. ■

Từ định lí trên ta thấy rằng nếu biết F(x) là một nguyên hàm của f(x), $x \in (a, b)$, thì biết vô số nguyên hàm khác của f(x) và các nguyên hàm đó có dạng F(x) + C với C là hằng số tuỳ ý ; họ vô số nguyên hàm của f(x) đó, $x \in (a, b)$ được gọi là *tích phân bất định* của f(x), $x \in (a, b)$ và kí hiệu là $\int f(x)dx := F(x) + C$.

Kí hiệu $\int$ gọi là *dấu tích phân* ; x gọi là *biến lấy tích phân* ; f(x) là *hàm số lấy tích phân* ; f(x)dx là *biểu thức dưới dấu tích phân*.

Trở lại các thí dụ trên ta có :

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \cos 5xdx = \frac{1}{5}\sin 5x + C$$

Chú ý.

Trong một số trường hợp, người ta cần sử dụng khái niệm nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) trên khoảng đóng [a, b]. Khi đó có nghĩa là :

- F(x) là nguyên hàm của f(x) ; $x \in (a, b)$ và
- $F'(a + 0) = f(a)$; $F'(b - 0) = f(b)$

Bây giờ nêu một số tính chất đơn giản của tích phân bất định.

Các tính chất đơn giản nhất

(1) Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x), $x \in (a, b)$ thì

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \text{ với } k \text{ là hằng số khác 0.}$$

(2) Nếu F(x), G(x) lần lượt là nguyên hàm của f(x) và g(x), $x \in (a, b)$ thì

$$\int (Af(x) + Bg(x))dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx =$$

$$= AF(x) + BG(x) + C$$

với A, B là hai hằng số tuỳ ý.

Chúng ta bỏ qua cách chứng minh các tính chất này vì quá đơn giản (chỉ cần dùng định nghĩa tích phân bất định) và lưu ý đến các ý nghĩa : tính chất (1) nói rằng có thể đưa một hằng số tuỳ ý ra ngoài dấu tích phân ; tính chất (2) nói rằng có thể tách tích phân của tổng thành tổng các tích phân. Các tính chất này được dùng thường xuyên cùng với bảng nguyên hàm các hàm số thông dụng dưới đây để tính các tích phân.

Bảng tích phân các hàm số thông dụng

Từ bảng đạo hàm các hàm số thông dụng ta suy ra bảng tích phân, gọi là bảng tích phân cơ bản

$$\int 0.dx = C$$

$$\int 1.dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ ;\ \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Trước khi nêu các thí dụ áp dụng bảng tích phân cơ bản, ta phát biểu định lí về sự tồn tại nguyên hàm và sẽ chứng minh định lí ở phần tích phân xác định (định lí 7.2 chương 7).

Định lí 6.2.

Mọi hàm số f(x) xác định liên tục trong khoảng [a, b] có nguyên hàm trong khoảng đó.

Muốn tính tích phân bất định của một hàm số f(x) ta luôn đối sánh tích phân cần tính với các tích phân cơ bản, để thực hiện các phép biến đổi thích hợp, đưa tích phân cần tính đó về dạng tích phân cơ bản rồi áp dụng công thức.

Thí dụ.

(a) Tính $I = \int (3-x^2)^3 dx$. Ta có :

$$(3-x^2)^3 = 3^3 - 3.3^2x^2 + 3.3x^4 - x^6$$

$$= 3^3 - 3^3x^2 + 3^2x^4 - x^6.$$

Do đó $I = \int (3^3 - 3^3x^2 + 3^2x^4 - x^6)dx =$

$$= \int 3^3dx - \int 3^3x^2dx + \int 3^2x^4dx - \int x^6dx$$

$$= 3^3\int dx - 3^3\int x^2dx + 3^2\int x^4dx - \int x^6dx$$

$$= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$$

(b) Tính $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$; ta có :

$$I = \int (x.x^{-1/2} + x^{-1/2})dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$$

(c) Tính $I = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; ta có :

$$I = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$$

(d) Tính $I = \int (2x-10)^{12}dx$; ta để ý rằng $\frac{1}{2}d(2x-10) = dx$, do vậy, ta viết

$$I = \int (2x-10)^{12}\frac{1}{2}d(2x-10) = \frac{1}{2}\int (2x-10)^{12}d(2x-10)$$

$$= \frac{1}{2.13}(2x-10)^{13} + C$$

(e) Tính $I = \int \frac{dx}{x+a}$; ta có : $I = \int \frac{d(x+a)}{(x+a)} = \ln|x+a| + C$

(f) Tính $I = \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$; ta có :

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{(x+2)-(x-1)}{3(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right],$$

do đó : $$I = \int \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right]dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

(g) Tính $I = \int \frac{dx}{1+\cos x}$

Ta có : $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

$$I = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

(h) Tính $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Ta có $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, do đó :

$$I = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg\frac{x}{2}}$$

$$I = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

(i) Tính $I = \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$

Để ý rằng $x^2 = [1-(1-x)]^2$ nên

$$I = \int \frac{[1-(1-x)]^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{1-2(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^{100}}dx$$

$$= \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C$$

(k) Tính $I = \int \sin 3x \sin 5x\, dx$; ta có

$$\sin 3x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x),$$

do đó : $I = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

(l) Tính $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

ta có : $I = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \text{arctg}(e^x) + C$

(m) Tính $I = \int \frac{dx}{a^2 + x^2}$; ta có :

$$I = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

(n) Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; ta viết $a^2 - x^2 = a^2\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$ và đi đến

$$I = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(o) Tính $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$; thực hiện tương tự bài (f) đi đến

$$I = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\int \frac{d(a - x)}{a - x} + \frac{1}{2a}\int \frac{d(a + x)}{a + x} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$$

6.2. Phép đổi biến

Trong nhiều trường hợp, khi tính $\int f(x)dx$; nếu để biến tích phân là x thì không thấy được tích phân cần tính đó gần với dạng tích phân cơ bản nào (để có thể áp dụng được tích phân cơ bản), khi đó ta tìm cách đổi sang biến mới, để hi vọng với biến mới thì tích phân cần tính gần với tích phân cơ bản hơn. Không có một quy tắc cụ thể nào giúp ta thực hiện phép đổi biến thích hợp được, tuy nhiên cũng có thể phát biểu một cách tổng quát về quy tắc của phép đổi biến, đó là mệnh đề :

• *Mệnh đề 6.1.*

Nếu biết rằng $\int g(t)dt = G(t) + C$ *thì*

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

(trong đó các hàm số g(t), w(x), w'(x) đều được giả thiết là những hàm số liên tục).

Quy tắc trên là hệ quả của quy tắc lấy vi phân một hàm số hợp (định lí 4.2 chương 4) :

$$\frac{d}{dx}G(w(x)) = G'(w(x))w'(x) = g(w(x))w'(x)$$

vì $G'(t) = g(t)$

Mặt khác, vì tính bất biến của vi phân (xem 4.2 chương 4), ta có

$$dG(t) = g(t)dt$$

Bây giờ, giả sử cần tính tích phân $\int f(x)dx$

Trong nhiều trường hợp, để tiện lợi, ta thường thực hiện phép đổi biến t := w(x), và khi đó biểu thức dưới dấu tích phân trở thành

$$f(x)dx = g(w(x))w'(x)dx$$

với hi vọng rằng $\int g(t)dt$ gần với tích phân cơ bản nào đó. Khi đó, theo mệnh đề trên, thay vì tính $\int f(x)dx$ ta chỉ cần tính $\int g(t)dt$ và có

$$\int g(t)dt = G(t) + C$$

Khi đó tìm được nguyên hàm G(t), chỉ cần thay t bởi w(x) và ta có :

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(w(x)) + C$$

Thí dụ.

Trong tích phân $I = \int \sin^3 x \cos x dx$, ta để ý d(sinx) = cosxdx nên đặt t := sinx thì biểu thức dưới dấu tích phân trở thành

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d(\sin x) = t^3 dt$$

và $\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$; do vậy $I = \int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + C$

• *Chú ý.*

Trong một số trường hợp, ta lại thực hiện phép đổi biến x = φ(t) và ta được

$$f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = g(t)dt,$$

và khi đó biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx lại trở thành g(t)dt.

Sau đây nêu thêm một số thí dụ :

(a) Trở lại những thí dụ ở phần trước, ta thấy trong thí dụ (d), ta đã thực hiện phép đổi biến t = 2x – 10 ; trong (e) là t = x + a ; trong (g) là $t = \frac{x}{2}$; trong (h) là $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; trong (i) là t = (1 – x) ; trong (*l*) : t = e^x ; trong (m) : $t = \frac{x}{a}$, ...

(b) Tính $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, vì muốn khử căn bậc hai ta thực hiện phép đổi biến x := asint (ở đây ta coi x biến thiên từ –a đến a ; còn t biến thiên từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$; nghĩa là $t = \arcsin\frac{x}{a}$) và có :

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \text{ ; } dx = a\cos t\, dt,$$

do đó

$$I = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right] + C$$

Mặt khác, $\frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t \cdot a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$

Cuối cùng : $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

(c) Tính $I = \int \frac{dx}{x\ln x}$; đặt $t = \ln x$; $dt = \frac{dx}{x}$ có

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

(d) Tính $I = \int \frac{\cos dx}{1 + \sin^2 x}$; đặt $t = \sin x$; $dt = \cos x dx$ và

$$I = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C$$

(e) Tính $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

Thực hiện phép đổi biến $x = a\operatorname{tg} t$ (t biến thiên từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$; nghĩa là $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$). Khi đó :

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t} \; ; \; x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t} \; ;$$

Do đó : $I = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t\cos t) + C$ (xem thí dụ (b)).

Muốn chuyển kết quả về biến x, ta lưu ý rằng : $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ và biểu diễn sint và cost qua $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$ rồi thế vào kết quả của I ; được :

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

(f) Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Ta thực hiện phép đổi biến Euler : $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$; lấy vi phân cả hai vế ta được :

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = dt - dx \ ;$$

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\right)dx = dt \ ;$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + \alpha} + x}{\sqrt{x^2 + \alpha}}\,dx = dt \ ; \text{ nhưng } \sqrt{x^2 + \alpha} + x = t$$

(do cách đổi biến) nên ta có :

$$\frac{tdx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = dt, \text{ tức là } \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \frac{dt}{t}$$

Do vậy :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$$

6.3. Phương pháp tính tích phân từng phần

Giả sử $u = f(x)$ và $v = g(x)$ là hai hàm số khả vi và có đạo hàm $u' = f'(x)$; $v' = g'(x)$ là hai hàm số liên tục. Khi đó theo quy tắc lấy vi phân của tích ta có : $d(uv) = vdu + udv$ hay $udv = d(uv) - vdu$; vì nguyên hàm của $d(uv)$ là uv nên ta suy ra :

(6.1) $$\int udv = uv - \int vdu$$

Công thức (6.1) cho quy tắc lấy tích phân từng phần, quy tắc này chuyển việc lấy tích phân của biểu thức $udv = uv'dx$ về tích phân của $vdu = v.u'dx$. Muốn dùng quy tắc lấy tích phân từng phần cần chú ý hai điểm : thứ nhất, trong tích phân cần tính : $\int f(x)dx$, nên tách biểu thức $f(x)dx$ thế nào để $f(x)dx$ có dạng udv ; thứ hai, bất kể tách theo kiểu gì thì tích phân biểu thức vdu cũng không khó tìm (nói chung, phải dễ tìm) hơn biểu thức $f(x)dx$ ban đầu.

Phạm vi ứng dụng của quy tắc lấy tích phân từng phần hạn chế hơn quy tắc đổi biến. Tuy nhiên, trong những trường hợp không có cơ sở để tiên đoán được sẽ dùng tích phân cơ bản nào thì người ta thường nghĩ đến dùng quy tắc lấy tích phân từng phần. Đặc biệt những loại tích phân sau đây thường dùng quy tắc này :

$$\int x^k \ln^m x dx,\ \int x^k \sin bx dx,\ \int x^k \cos bx dx,\ \int x^k e^{ax} dx,\ \text{v.v...}$$

Thí dụ.

(a) Tính $I = \int \ln x dx$.

Để ý rằng $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$ nên ta đặt $u = \ln x$; $dv = dx$, khi đó :

$du = \frac{1}{x}dx$; $v = x$.

$$I = \int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$$

(b) Tính $I = \int \operatorname{arctg} x dx$.

Đặt $u = \operatorname{arctg} x$; $dv = dx$ và có :

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx\ ;\ v = x.$$

Do đó :

$$I = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(c) Tính $I = \int x\cos x dx$

Đặt u = x ; dv = cosxdx ; có : du = dx ; v = sinx và được :

$$I = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

(d) Tính $I = \int x\sin^2 x dx$

Dùng công thức $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, ta có :

$$I = \int \frac{1}{2}x(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\cos 2xdx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}J \text{ ; với } J := \int x\cos 2xdx$$

Để tính J ; ta thực hiện phép đổi biến 2x = t, $x = \frac{1}{2}t$; $dx = \frac{1}{2}dt$ và đi đến

$$J = \frac{1}{4}\int t\cos tdt = \frac{1}{4}[t\sin t + \cos t] + C$$

(xem thí dụ (c)), tức là

$$J = \frac{1}{4}[2x\sin 2x + \cos 2x] + C$$

Cuối cùng :

$$I = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}[2x\sin 2x + \cos 2x] + C$$

(e) Tính $I = \int x^2 \sin xdx$. Ta có :

$$I = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)d(x^2) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C$$

(xem thí dụ (c)).

(f) Tính $I=\int e^{ax}\cos bx dx$ và $J=\int e^{ax}\sin bx dx$, $ba\neq 0$

Trong cả hai tích phân ta đặt $dv=e^{ax}dx$ thì $v=\frac{1}{a}e^{ax}$

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$$

tức là $$\begin{cases} I-\frac{b}{a}J=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx \\ \frac{b}{a}I+J=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx \end{cases}$$

Coi I, J là ẩn, từ hệ hai phương trình trên suy ra

$$I=\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$$

$$J=\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

Chú ý.

• Trong nhiều trường hợp cụ thể, tuy chỉ cần tính I nhưng qua tích phân từng phần ở trên ; lại gặp J ; khi đó, lại tiếp tục dùng quy tắc tích phân từng phần để tính J nhưng cách đặt u và dv phải nhất quán với cách đặt ban đầu, nếu không sẽ rơi vào vòng luẩn quẩn sẽ đi đến hệ thức tầm thường 0 = 0(!). Cụ thể ở đây, để tính J ; nhất thiết phải đặt $dv=e^{ax}dx$, $v=\frac{1}{a}e^{ax}$; và $u=\sin bx$; $du=b\cos bx dx$ và được :

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx\right].$$

$$I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I.$$

Chuyển vế, được :

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx$$

từ đó, suy ra I như đã tính ở trên.

• Nếu để ý rằng đạo hàm các biểu thức $e^{ax}\cos bx$ hoặc $e^{ax}\sin bx$ cũng cho lại dạng $e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ thì ta có thể viết

$$\int e^{ax}\cos bx dx = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C$$

trong đó A, B là hai hằng số sẽ xác định ngay bây giờ. Thật vậy, từ định nghĩa tích phân bất định ta có :

$$\left(\int e^{ax}\cos bx dx\right)' = (e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C)'$$

tức là : $$e^{ax}\cos bx = e^{ax}[(aA + bB)\cos bx + (aB - bA)\sin bx]$$

Bằng cách cân bằng hệ số của cosbx và sinbx ở cả hai vế suy ra $aA + bB = 1$ và $-bA + aB = 0$.

Suy ra : $A = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ và $B = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

(g) Tính $I = \int x^2e^{3x}dx$.

Dĩ nhiên ở đây, có thể đặt $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$ để dẫn đến tích phân đơn giản hơn $\int xe^{3x}dx$ rồi tiếp tục tính, nhưng, dùng nhận xét vừa nêu trong thí dụ (f) ta có thể viết :

$$I = \int x^2e^{3x}dx = e^{3x}(ax^2 + bx + c) + C$$

Suy ra :

$$x^2e^{3x} = (e^{3x}(ax^2 + bx + c) + C)' = e^{3x}[3ax^2 + (3b + 2a)x + (b + 3c)]$$

Dùng cách cân bằng hệ số cả hai vế, được :

$$3a = 1\ ;\ a = \frac{1}{3}\ ;\ 3b + 2a = 0\ ;\ b = -\frac{2}{9}\ ;\ b + 3c = 0\ ;\ c = \frac{2}{27}$$

và cuối cùng :

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C$$

(h) Tính $I = \int \sqrt{x^2 + \beta}\, dx\ ;\ \beta \in \mathbf{R}$.

Ta có : $I = \int \frac{x^2 + \beta}{\sqrt{x^2 + \beta}} dx = \beta \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \beta}} + \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta}} dx$

$$= \beta \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \beta}\right| + \int x d(\sqrt{x^2 + \beta})$$

(xem thí dụ (f) mục 6.2) và

$$\int x d(\sqrt{x^2 + \beta}) = x\sqrt{x^2 + \beta} - \int \sqrt{x^2 + \beta}\, dx + C = x\sqrt{x^2 + \beta} - I + C$$

Như vậy $I = \beta \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \beta}\right| + x\sqrt{x^2 + \beta} - I + C$

Chuyển vế, được

$$2I = \beta \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \beta}\right| + x\sqrt{x^2 + \beta} + C$$

Cuối cùng

$$I = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + \beta} + \beta \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \beta}\right|\right] + C$$

(k) Trong thí dụ cuối cùng này chúng ta xây dựng một công thức truy chứng để tính tích phân

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}\ ;\ n = 1, 2, \ldots$$

Ta đặt $u = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^n}$ và $dv = dx$ và có

$$du = -\frac{2nxdx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \; ; \; v = x$$

Dùng công thức (6.1) được :

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$$

Đặt $J := \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$ ta có :

$$J = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

$$= I_n - a^2 I_{n+1}$$

Thế J vào biểu thức của I_n được :

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2 n I_{n+1}$$

Suy ra :

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} I_n .$$

Từ hệ thức cuối cùng này ta kết luận rằng muốn tính I_{n+1} phải biết I_n, muốn tính I_n phải biết I_{n-1}, v.v... quá trình đó dẫn đến I_1 :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \text{ (thí dụ (m)).}$$

Chẳng hạn, với n = 2 ; ta có : (thí dụ (e))

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

6.4. Tích phân các phân thức hữu tỉ

Nhìn lại quá trình tính tích phân một hàm số (qua các thí dụ đã nêu) chúng ta thấy rằng muốn tính tích phân một hàm số phải dùng quy tắc đổi biến hoặc quy tắc lấy tích phân từng phần để đưa tích phân cần tính về dạng tích phân cơ bản để áp dụng công thức và khi dùng các quy tắc lấy tích phân đó, nhiều hay ít chúng ta đã dùng những 'kĩ xảo" để đạt mục đích mong muốn. Bây giờ, trong mục này chúng ta sẽ học cách tính tích phân của một lớp hàm số đặc biệt : các phân thức hữu tỉ ; muốn tính tích phân các hàm số thuộc loại này không đòi hỏi (ít ra là về nguyên tắc) một kĩ xảo nào mà chỉ cần tuân theo một số trình tự, quy tắc nhất định.

Trước khi giới thiệu cụ thể cách tính tích phân các hàm số đó chúng ta lưu ý rằng trong bài giới thiệu các hàm số sơ cấp cơ bản, và các hàm số sơ cấp, nghĩa là các hàm số có thể biểu diễn qua một số hữu hạn các hàm số sơ cấp cơ bản và chúng ta cũng thấy rằng các hàm số sơ cấp khả vi trong miền xác định của nó, hơn nữa, đạo hàm của chúng cũng là các hàm sơ cấp. Tuy nhiên, nguyên hàm của một hàm số sơ cấp không nhất thiết là một hàm số sơ cấp, nói khác đi, có những hàm số sơ cấp mà nguyên hàm của chúng lại không thể biểu diễn được qua một số hữu hạn hàm số sơ cấp cơ bản. Chẳng hạn, các hàm số sau đây thực sự tồn tại nhưng nguyên hàm của chúng không phải là một hàm số sơ cấp :

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2 dx,\quad \int \cos x^2 dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$ với a, b $\in$ **R**, với p, $\dfrac{m+1}{n}$, $\dfrac{m+1}{n}+p$ không phải là những số nguyên.

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x^n}dx,\quad \int \frac{\cos x}{x^n}dx \text{ với n nguyên.}$$

Bây giờ chúng ta xét một phân thức hữu tỉ nghĩa là một hàm số R(x) có dạng :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$$

với a_i, b_i $\in$ **R** và $a_n, b_m \neq 0$.

Nếu m < n thì R(x) được gọi là *phân thức thực sự*.

Nếu m ≥ n thì R(x) được gọi là phân thức *không thực sự*.

Nếu R(x) không là phân thức thực sự thì bằng cách chia tử cho mẫu bao giờ cũng có thể biểu diễn R(x) dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức thực sự. Tính tích phân các đa thức thì quá dễ, do vậy ta chỉ cần tìm cách tính tích phân các phân thức thực sự và trước hết ta tính các tích phân sau :

I. $\int \frac{A}{x-a}dx$; II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$; IV. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$

trong đó A, M, N, a, p, q ∈ **R** ; k, m nguyên dương, ngoài ra ta giả thiết $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Trước hết, ta thấy rằng hai dạng I và II đã quen thuộc :

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a|+C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}.\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C \ (k \neq 1)$$

Muốn tích các tích phân dạng III và IV, chúng ta biểu diễn x^2+px+q dưới dạng

$$x^2+px+q = x^2+2.\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Theo giả thiết, $q-\frac{p^2}{4}>0$ nên ta đặt $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, với $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Bây giờ thực hiện phép đổi biến $x+\frac{p}{2}=t$; $dx = dt$

$$x^2+px+q=t^2+a^2, \quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$$

Khi đó, tích phân dạng III sẽ là

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C$$

Rốt cuộc trở về biến x ta được

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Cùng với phép đổi biến như trên, tích phân dạng IV sẽ là :

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Có thể tính tích phân thứ nhất của vế phải bằng cách đổi biến $t^2+a^2=u$; $2tdt = du$ và có

$$\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C$$

Còn tích phân thứ hai thì chính là thí dụ (k) ở mục trước. Sau khi tính được cả hai tích phân đó theo biến t, ta chỉ cần trở về biến x bằng cách thế $t = \dfrac{2x + p}{2}$ vào kết quả, ta sẽ được kết quả cuối cùng.

Định lí đại số sau đây cho phép kết luận rằng việc lấy tích phân một phân thức thực sự rốt cuộc dẫn đến việc lấy tích phân bốn dạng I, II, III, IV đã nêu trên.

Định lí 6.3 (Không chứng minh)

Mọi đa thức bậc n, với hệ số thực :

$$Q(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_n x^n \;\; ; \; a_n \neq 0$$

đều có thể phân tích thành tích các thừa số là nhị thức bậc nhất và tam thức bậc hai không có nghiệm thực trong đó có thể có những thừa số trùng nhau :

$$Q(x) = a_n (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x^2 + px + q)^{\mu} \ldots (x^2 + lx + s)^{\nu}$$

trong đó $a, b, \ldots \in \boldsymbol{R}$; $p^2 - 4q < 0, \; \ldots \; l^2 - 4s < 0$ *và* $\alpha + \beta + \ldots + 2(\mu + \ldots + \nu) = n$.

Khi đó phân thức thực sự tương ứng $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots +$$

$$+ \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \frac{P_1 x + Q}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x + Q_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)}$$

trong đó $A, A_1, ..., A_{\alpha-1}, B, B_1, ..., B_{\beta-1}, ..., M, N, M_1, N_1, ..., M_{\mu-1}, N_{\mu-1}, ..., P, Q, P_1, Q_1, ..., P_{\nu-1}, Q_{\nu-1}$ là các hằng số được xác định theo phương pháp hệ số bất định mà chúng ta sẽ giới thiệu qua các thí dụ dưới đây.

• *Thí dụ.*

(a) Phân tích hàm số

$$R(x) = \frac{1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$

thành các phân thức tối giản. Trước hết ta có :

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)^2$$

Do đó :

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1}$$

Bây giờ, để xác định các hệ số A, M, N, M_1, N_1 ta dùng phương pháp hệ số bất định, nghĩa là ta quy đồng mẫu thức ở vế phải, sắp xếp tử thức (dĩ nhiên là một đa thức) rồi cho đồng nhất các hệ số của các đơn thức đồng dạng của tử thức ở cả hai vế. Trong trường hợp cụ thể này ta có :

$$1 \equiv (A+M_1)x^4 + (N_1 - M_1)x^3 + (2A + M + M_1 - N_1)x^2 +$$
$$+ (N - M - M_1 + N_1)x + (A - N - N_1)$$

Đồng nhất hệ số các đơn thức đồng dạng ở hai vế ta có hệ 5 phương trình 5 ẩn :

$$\begin{cases} A + M_1 = 0 \\ N_1 - M_1 = 0 \\ 2A + M + M_1 - N_1 = 0 \\ N - M - M_1 + N_1 = 0 \\ A - N - N_1 = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ phương trình trên là :

$$A = \frac{1}{4}\ ;\ M = N = -\frac{1}{2}\ ;\ M_1 = N_1 = -\frac{1}{4}$$

Vậy

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)}$$

(b) Phân tích $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ thành tổng các phân thức tối giản.

Từ định lí đại số trên ta có :

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

Dĩ nhiên, có thể dùng phương pháp hệ số bất định để tính các hệ số A, B, C trong phân tích trên (như đã làm trong thí dụ (a)) ; tuy nhiên, trong trường hợp cụ thể này khi đa thức mẫu số chỉ có nghiệm thực đơn, chúng ta có thể tính A, B, C nhanh gọn hơn theo cách sau đây : Trước hết, để ý rằng phân tích trên là đồng nhất thức, nghĩa là cách phân tích đó đúng với mọi giá trị của x ; bây giờ, chẳng hạn, để tính hệ số A : ta nhân cả hai vế với (x − 1), và có

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-2)(x-4)} = A + \frac{B}{x-2}(x-1) + \frac{C}{x-4}(x-1).$$

Trong đồng nhất thức trên ; ta cho x = 1 và có

$$\frac{1 + 2.1 + 6}{(1-2)(1-4)} = A\ ;\ \text{nghĩa là } A = 3.$$

Tương tự, muốn tính B ta nhân cả hai vế của đồng nhất thức ban đầu với (x − 2) rồi cho x = 2 ta được

$$B = \frac{2^2 + 2.2 + 6}{(2-1)(2-4)} = -7$$

và cuối cùng C = 5.

Do đó :

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$$

(c) Phân tích $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}$ thành tổng các phân thức tối giản.

Dùng định lí đại số trên ta có :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{(x-1)}$$

Lưu ý rằng trong thí dụ này, nếu dùng cách làm của thí dụ (b) thì chỉ tính được $A=-\dfrac{5}{32}$ và $B=\dfrac{1}{2}$, do vậy, ta có :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=-\frac{5}{32(x+3)}+\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{x-1}$$

Muốn tính nốt các hệ số B_1, B_2 ta phải dùng cách làm như trong thí dụ (a) (nhưng chỉ gặp 2 phương trình, hai ẩn), và có :

$$B_1=\frac{3}{8},\ B_2=\frac{5}{32}.$$

do đó :

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=-\frac{5}{32(x+3)}+\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}$$

(d) Phân tích $\dfrac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Về nguyên tắc, ta có thể biểu diễn :

$$\frac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

rồi dùng các cách đã giới thiệu trong các thí dụ trên để tính A, B, C, D. Tuy nhiên, vì mục đích phân tích cốt để dễ dàng lấy tích phân nên ta có thể viết :

$$\frac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}=\frac{(x^2+3)-(x^2-1)}{4(x^2+3)(x^2-1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+3}\right]$$

và như vậy, ta có :

$$\frac{1}{(x^2+3)(x^2-1)}=\frac{1}{4}\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{2(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x^2+3}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)}-\frac{1}{4(x^2+3)}$$

Chú ý.

• Qua những thí dụ trên, ta thấy rằng muốn tính một tích phân dạng phân thức thực sự chỉ cần phân tích phân thức đó thành những phân thức tối giản (theo định lí đại số) thuộc các dạng I, II, III, IV (mục 6.4) rồi dùng cách tính tích phân các dạng đó.

• Việc giới thiệu cách tính tích phân các biểu thức hữu tỉ (đối với biến lấy tích phân) đã mở ra một phương pháp rất hữu hiệu để lấy tích phân các biểu thức không hữu tỉ đối với biến lấy tích phân : trong trường hợp này người ta cố gắng dùng phép đổi biến và tích phân từng phần để đưa biểu thức cần lấy tích phân về một biểu thức mới đối với biến lấy tích phân mới và biểu thức mới này lại hữu tỉ đối với biến mới. Chúng ta sẽ minh hoạ ý này trong vài trường hợp dưới đây.

6.5. Tích phân các biểu thức lượng giác

Giả sử cần tính tích phân $I=\int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó $R(u, v)$ là một biểu thức hữu tỉ đối với u và v, nghĩa là khi tính giá trị của $R(u, v)$ chỉ cần thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân và chia đối với các biến u, v. Khi đó, thực hiện phép đổi biến :

$$t:=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\ -\pi<x<\pi$$

và có : $\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, t \; ; \; x = 2\mathrm{arctg}\, t \; ; \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Do đó, có thể đưa tích phân I về dạng

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

và rõ ràng ở đây biểu thức dưới dấu tích phân là hữu tỉ đối với t.

Thật ra, trong những thí dụ về tích phân các biểu thức lượng giác đã gặp ở các phần trên ta đã dùng ý tưởng hữu tỉ hoá rồi tuy rằng trong các trường hợp cụ thể đó không đòi hỏi phải hữu tỉ theo kiểu thực hiện phép đổi biến tổng quát $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

Bây giờ ta lấy một thí dụ :

(a) Tính $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}dx$ $\quad (0 < a < 1 \; ; -\pi < x < \pi)$.

Thực hiện đổi biến $t := \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; có :

$$I = (1-a^2)\int \frac{dt}{(1-a)^2 + (1+a)^2 t^2} = \mathrm{arctg}\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)t\right] + C$$

$$= \mathrm{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

(b) Tính $I = \displaystyle\int \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x + a^2}dx$ $(0 < a < 1, -\pi < x < \pi)$.

Ta có :

$$I = \int\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}\right]dx = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

(c) Tính $I = \int \sin^2 x\cos^3 x dx$. Đặt t : = sinx ; và có

$$I = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

d) Tính $I = \int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$. Vì $d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$ và có thể biểu diễn $\sin^4 x$ theo tgx nên ta đặt tgx = t và được

$$I = \int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C = tgx-\frac{2}{tgx}-\frac{1}{3tg^3x}+C$$

(e) Tính $I = \int\frac{dx}{\sin x\cos 2x}$. Ta có :

$$I = \int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)} = \int\frac{\sin x dx}{\sin^2 x(2\cos^2 x-1)}$$

$$= \int\frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}$$

Vì d(cosx) = –sinxdx nên ta đặt t : = cosx và có :

$$I = \int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \int\frac{2(1-t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)}dt$$

$$= \int\left[\frac{2}{1-2t^2}-\frac{1}{1-t^2}\right]dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

6.6. Tích phân các biểu thức dạng $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$ và $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm \alpha^2})dx$

Ta để ý rằng hàm dưới dấu các tích phân trong cả hai tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$ và $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm \alpha^2})dx$ không hữu tỉ đối với biến x (vì x còn chứa trong dấu căn thức), nhưng R(u, v) thì lại hữu tỉ đối với u và v, do vậy muốn tính các loại tích phân đó người ta tìm các đổi biến hoặc đồng thời đổi biến và tích phân từng phần với hi vọng, với biến mới thì biểu thức dưới dấu tích phân trở nên hữu tỉ đối với biến mới ; trong trường hợp này, người ta tìm cách khử căn thức. Chẳng hạn : với tích phân

$$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx$$

người ta thường dùng phép biến đổi $x := \alpha \operatorname{tg} t$.

Với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$ người ta thường dùng phép đổi biến $x := \alpha \sin t$, hay $x := \alpha \cos t$.

Với tích phân $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$ người ta thường dùng phép đổi biến $x = \dfrac{\alpha}{\cos t}$.

Sau đây nêu một số thí dụ cốt để minh hoạ phương pháp

▪ *Thí dụ*

(a) Tính $I = \int \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$, $a > 0$.

Thực hiện phép đổi biến $x := a\sin t$; $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, khi đó $dx = a\cos t dt$;

$\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a\cos t$, vì $\cos t \ge 0$.

Vậy :

$$I = \int a\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = a\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = a\int\frac{dt}{\sin t} - a\int \sin t dt =$$

$$= a\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a\cos t + C$$

vì $\sin t = \frac{x}{a}$; $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ nên, cuối cùng có

$$I = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(b) Tính $I = \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$, $a > 0$.

Về nguyên tắc, có thể khử căn thức bằng cách đổi biến x : = atgt, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, nhưng với bài này ta để ý rằng có thể viết :

$$I = \int\frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}} \text{ ; do đó ta đổi biến } \frac{a}{x} = t$$

và được $\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a}dt$

$$I = -\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\frac{1}{a}\ln\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right| + C \text{ (thí dụ (f) mục 6.2)}$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|t - \sqrt{t^2 + 1}\right| + C$$

và cuối cùng $$I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}\right| + C$$

(c) Tính $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Thực hiện đổi biến $x - 1 := \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}$$

do đó $$I = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t|t|}\sqrt{-1-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}$$

(vì phải có $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow t < 0$ nên $|t| = -t$).
Cuối cùng

$$I = -\sqrt{-1-2t} + C = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

(d) Tính $I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$.

Ta viết $I = \frac{1}{2}\int x.\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

và dùng cách lấy tích phân từng phần : $u = x$ và $dv = \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; khi đó có :

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Chuyển vế – I sang vế trái, được :

$$2I = x\sqrt{x^2 - a^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Dùng thí dụ (f) mục 6.2, được kết quả cuối cùng

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

(e) Tính $I = \int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\, dx$.

Ta có $I = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$, đặt $t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

tức là $\quad x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$.

$$I = \int (1+t^2)t.\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\text{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

TÓM TẮT CHƯƠNG 6

• *Tích phân bất định*

Cho hàm số f(x) xác định trong (a, b), hàm số F(x) xác định trong (a, b) được gọi là nguyên hàm của f(x) nếu F(x) khả vi trong (a, b) và $F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)dx$, với mọi $x \in (a, b)$.

Định lí :

Giả sử hàm số F(x) khả vi trong (a, b) và F(x) là nguyên hàm của f(x), $x \in (a, b)$. Khi đó :

1) F(x) + C cũng là nguyên hàm của f(x), với C là một hằng số tuỳ ý, và với mọi $x \in (a, b)$.

2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của f(x), $x \in (a, b)$ đều có dạng F(x) + C.

Khi đó, ta kí hiệu mọi nguyên hàm của f(x) là $\int f(x)dx$ và đọc là tích phân bất định của f(x) ; nghĩa là :

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Các tính chất đơn giản của tích phân bất định :

1) Nếu k là một hằng số khác 0 và nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x), có

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C$$

2) Nếu F(x), G(x) là hai nguyên hàm của f(x), g(x) và A, B là hai hằng số, có :

$$\int [Af(x)dx + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx =$$

$$= AF(x) + BG(x) + C$$

• *Bảng tích phân các hàm số thông dụng*

$$\int 0 \,.\, dx = C$$

$$\int 1 \,.\, dx = \int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + C,\ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ ; \ \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + C, \ \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\int \sqrt{x^2 + \beta} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 + \beta} + \beta \ln | x + \sqrt{x^2 + \beta} | + C \right]$$

Định lí :

Một hàm số f(x) xác định liên tục trong (a, b) thì có nguyên hàm trong khoảng đó.

Phép đổi biến

Nếu biết rằng $\int g(t)dt = G(t) + C$ thì :

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + C$$

trong đó g(t), ω(x), ω'(x) là những hàm liên tục.

Trong nhiều trường hợp, ta thường thực hiện phép đổi biến $t = \omega(x)$. Khi đó biểu thức dưới dấu tích phân trở thành $f(x)dx = g\omega(x)\omega'(x)dx$. Nếu G(t) là nguyên hàm của g(t) thì :

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(\omega(x)) + C$$

Phép tính tích phân từng phần

Giả sử u, v là hai hàm số khả vi và có các đạo hàm u', v' là hai hàm số liên tục, khi đó :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

• *Tích phân các phân thức hữu tỉ*

Một phân thức hữu tỉ là một hàm R(x) có dạng

$$R(x) = \frac{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}$$

$a_n, b_m \neq 0$ và $m < n$, thì R(x) được gọi là phân thức thực sự.

Định lí (đại số) :

Nếu $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}$, $\quad m < n,\ a_n, b_m \neq 0.$

Nếu Q(x) có dạng :

$$Q(x) = a_n(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}$$

với a, b, ... ∈ **R** ; $p^2 - 4q < 0$; $l^2 - 4s < 0$ và

$$\alpha + \beta + \ldots + 2(\mu + \ldots + \nu) = n$$

thì có thể phân tích R(x) thành tổng các phân thức tối giản :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{(x^2+lx+s)}$$

trong đó A, A_1, ..., $A_{\alpha-1}$, B, B_1, ..., $B_{\beta-1}$, ..., M, N, M_1, N_1, ..., $M_{\mu-1}$, $N_{\mu-1}$, ..., P, Q, P_1, Q_1, ..., $P_{\nu-1}$, $Q_{\nu-1}$ là các hằng số được xác định theo phương pháp hệ số bất định.

Định lí đại số trên suy ra rằng việc lấy tích phân một phân thức hữu tỉ dẫn đến các tích phân :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C \;;$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C,\; k > 1 \;;$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{artg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \;;$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{a^2}I_{n-1}.$$

• *Các tích phân không biểu diễn được qua các hàm số sơ cấp* (tuy rằng tồn tại nguyên hàm)

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},$$

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$, a, b $\in$ **R**, p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ không phải là những số nguyên,

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx,\ \int \frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}dx\text{ , n nguyên dương.}$$

• Tích phân các biểu thức dạng :

$$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx,\ \int R(x, \sqrt{x^2 \pm \alpha^2})dx$$

trong đó R(u, v) là biểu thức hữu tỉ đối với u và v.

Với $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx$, dùng phép đổi biến $x = \alpha tgt$;

Với $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$, dùng phép đổi biến $x = \alpha\sin t$ hay $x = \alpha\cos t$;

Với $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$, dùng phép đổi biến $x = \frac{\alpha}{\cos t}$

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân :

1. $\int x^2(5-x)^4 dx$;

2. $\int \left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}\right)dx$;

3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

4. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$;

5. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$;

6. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$;

7. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx$;

8. $\int \sqrt{1 + \sin 2x dx}$ $(0 \le x \le \pi)$;

9. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}$;

10. $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$;

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2}}$;

13. $\int (\sin 5x - \sin 5y) dx$;

14. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$;

15. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

16. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$;

17. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2 \frac{x}{2}}$;

18. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$;

20. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$;

21. $\int \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$;

22. $\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx$;

23. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\text{cox}^3 x}} dx$;

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$;

26. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$;

27. $\int \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1 + x^{n+2}}} dx$;

28. $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+5)}$;

29. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$; 30. $\int \sin^2 x dx$;

31. $\int \sin x \sin(x+y) dx$; 32. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} dx$

2. Tính các tích phân :

1. $\int \operatorname{arctg} x dx$; 2. $\int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1} dx$;

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$; 4. $\int \sqrt{e^x - 1} dx$;

5. $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$; 6. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} dx$;

7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$; 8. $\int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$;

9. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; 10. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$,

11. $\int \sin^{n-1} x \sin(n+1)x dx$; 12. $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$;

13. $\int \frac{dx}{1+x^3}$; 14. $\int \frac{dx}{1+x^6}$;

15. $\int \max(1, x^2) dx$; 16. $\int (|1+x| - |1-x|) dx$

3. Tính các tích phân :

1. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $n \in \mathbf{N}$, tính I_o, I_1, I_2 và lập công thức truy chứng để tính I_n ;

2. $I_n = \int x^n e^x dx$, $n \in \mathbf{N}$; 3. $I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$;

4. $\int e^{-2x}\cos 3x dx$; 5. $\int x^2 \ln x dx$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

(Không viết hằng số C vào đáp số)

1. 1. $\dfrac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \dfrac{10}{3}x^6 + \dfrac{1}{7}x^7$;

2. $y\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} - \dfrac{y^3}{2x^2}$;

6. $\dfrac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$; 7. $\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$;

9. $-\dfrac{2}{15(5x-2)^{3/2}}$; 15. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

17. $2\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$; 18. $d(\sqrt{x}) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$; $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

19. $-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$

(chia tử và mẫu cho x^2 và để ý $d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}dx$) ;

20. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 21. $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

22. $\ln(2+e^x)$;

23. $\operatorname{arctg} e^x$ (nhân tử và mẫu với e^x, để ý $d(e^x) = e^x dx$) ;

24. $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}$; 25. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$

(chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$, để ý $d(\operatorname{tg}x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$) ;

26. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)$ (để ý $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$) ;

27. $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$ khi $n \neq -2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$ khi $n = -2$;

29. $\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$;

30. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$;

31. $\frac{x}{2}\cos y-\frac{1}{4}\sin(2x+y)$; 32. $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$

2. 1. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$; 2. $\ln|\sin x-1|-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

(tách thành hai tích phân $\int\frac{dx}{\sin x-1}+\int\frac{\cos x}{\sin x-1}dx$; viết $\sin x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$) ;

3. $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|$ (viết $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$) ;

4. $2(\sqrt{e^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1})$ (đặt $e^x = u^2+1$) ;

5. $\frac{1}{256}\left[3x-\frac{1}{2}\sin 2x-\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{20}\sin 10x\right]$

(dùng công thức $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ và $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$) ;

6. $\frac{9}{2}\ln\left|\left(x-\frac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2-5x+6}\right|+\sqrt{x^2-5x+6}$

(viết $x^2-5x+6 = \frac{1}{4}[(2x-5)^2-1]$) ;

7. $\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+2}\right|$

8. $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{(-x^2+3x-2)^3}}+\frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2}+\frac{3}{16}\arcsin(2x-3)$

(viết $-x^2+3x-2=\frac{1}{4}[1-(2x-3)^2]$) ;

9. $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}$ (đặt $\sin x = u$) ;

11. $\frac{1}{n}\sin nx \sin^n x$ (dùng công thức $\sin(n+1)x = \sin nx\cos x + \sin x\cos nx$; để ý $\cos x\sin^{n-1} x=\left(\frac{\sin^n x}{n}\right)'$ và $\cos nx=\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'$) ;

12. $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}$

13. Viết $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1-x^2+x^2}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{1-x}{x^2-x+1}+\frac{x^2}{1+x^3}$

14. Viết $\frac{1}{1+x^6}=\frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=$

$$=\left[\frac{x^4-x^2+1+x^2}{(1+x^2)(x^4-x^2+1)}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+(x^3)^2}-\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\right].$$

15. x, $|x|\le 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$, $|x|>1$.

16. $\frac{1}{2}\left[(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|\right]$.

3. 1. $I_o(x)$; $I_1(x) = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, $I_2(x) = tgx$;

$$I_n(x) = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}(x)$$

(Viết $\frac{1}{\cos^n x} = \frac{1}{\cos^{n-2}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, đặt $u = \cos^{2-n}x$) ;

2. $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$;

3. $\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\right| \pm \sqrt{x^2-1}$;

4. $\frac{1}{13}e^{-2x}(3\sin 3x - 2\cos 3x)$; 5. $\frac{x^3}{9}(3\ln x - 1)$

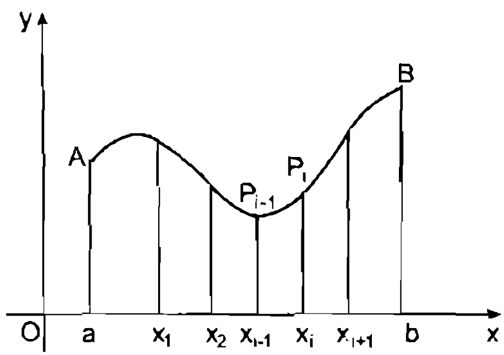
6. Đặt $x = t^6$; $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$.

Chương 7
TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

7.1. Định nghĩa tích phân xác định

• *Bài toán diện tích hình thang cong*

Cho hàm số $y = f(x)$, xác định liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$, ngoài ra giả sử $f(x)$ không âm trên $[a, b]$. *Xét hình thang cong* AabB là hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ (trên $[a, b]$) ; các đường thẳng $x = a$; $x = b$ và trục hoành Ox (hình 7.1) ; ta đặt vấn đề định nghĩa *diện tích S* của hình thang cong AabB.



Hình 7.1

Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia :

(7.1) $\quad x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n \equiv b.$

Các điểm chia x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) được chọn tuỳ ý miễn là tuân theo thứ tự tăng dần và điểm đầu x_0 trùng với a, điểm cuối cùng x_n trùng với b, ta gọi cách chia đó là một *phân điểm* $\mathscr{P}$.

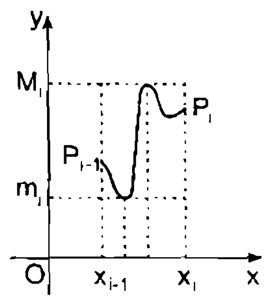
Bây giờ, từ các điểm chia x_i ($i = \overline{0, n}$) ta dựng các đường thẳng $x = x_i$, như thế ta đã chia hình thang cong AabB thành n hình thang cong nhỏ $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ ($i = \overline{1, n}$) (hình 7.1), mỗi hình thang cong nhỏ đó có đáy $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ ($i = \overline{1, n}$). Theo giả thiết, hàm số f(x) liên tục trên [a, b] nên cũng liên tục trên $[x_{i-1}, x_i]$, ($i = \overline{1, n}$), do đó đạt được giá trị nhỏ nhất m_i ($m_i := \min\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$) và giá trị lớn nhất M_i($M_i := \max\limits_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$), theo định lí 3.2 chương 3 :

$$m_i \le f(x) \le M_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

do đó :

$$(7.2) \qquad m_i\Delta x_i \le f(x)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Về mặt hình học ; tích số $m_i\Delta x_i$, $M_i\Delta x_i$ chính là diện tích của hình chữ nhật "trong" và "ngoài" có chiều rộng là Δx_i và chiều dài tương ứng là m_i và M_i (hình 7.2) : hình thang cong nhỏ thứ i $P_{i-1}x_{i-1}x_iP_i$ luôn bị các hình chữ nhật trong và hình chữ nhật ngoài kẹp.



Hình 7.2

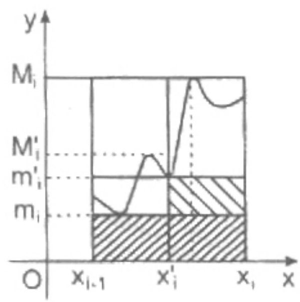
Gọi lần lượt S_* và S^* là tổng các diện tích của các hình chữ nhật trong và hình chữ nhật ngoài, để cho gọn, gọi S_* là tổng trong và S^* là tổng ngoài, luôn có bất đẳng thức (từ 7.2) :

$$(7.3) \qquad S_* \le S^* \; ; \; S_* := \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \; ; \; S^* := \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Sau đây ta nêu một số nhận xét về tổng trong và tổng ngoài.

(1) Với mỗi n đã ấn định và với mỗi phân điểm $\mathscr{P}$ đã chọn thì S_* và S^* là những số xác định.

(2) Với phân điểm $\mathscr{P}$ đã chọn, nếu trong đoạn thứ i $[x_{i-1}, x_i]$ ta lấy thêm một điểm chia x'_i nữa, với $x'_i \in (x_{i-1}, x_i)$ thì sẽ có hai hình chữ nhật trong và hai hình chữ nhật ngoài (hình 7.3) và do tính chất của minf(x) và maxf(x), tổng diện tích của hai hình chữ nhật trong *lớn hơn* diện tích cũ của hình chữ nhật trong và tổng diện tích của hai hình chữ nhật ngoài *bé thua* diện tích của hình chữ nhật ngoài cũ, nhưng bất đẳng thức 7.3 vẫn luôn đúng.



Hình 7.3

(3) Từ nhận xét (2) suy ra, nếu tăng n thì S_* *tăng* và S^* *giảm*, do đó, với bất kì phân điểm $\mathscr{P}$; luôn có hai dãy số $\{S_*^{(n)}\}$ đơn điệu tăng (và bị $S^*_{(n)}$ chặn trên) với mọi n, và dãy số $\{S^*_{(n)}\}$ đơn điệu giảm (và bị $S_*^{(n)}$ chặn dưới) với mọi n.

Theo định lí 1.4 chương 1 về sự hội tụ của dãy đơn điệu ta kết luận rằng khi m tăng vô hạn và mọi $\Delta x_i \to 0$, có

$$(7.4) \qquad \lim_n S_*^{(n)} = \underline{S} \ \text{ và } \ \lim_n S^*_{(n)} = \overline{S}$$

Do giả thiết và định lí 7.2 chương này ta có $\underline{S} = \overline{S}$ và ta nói rằng hình thang cong AabB có *diện tích và ta định nghĩa diện tích S* của hình thang cong chính là giới hạn chung đó :

$$S = \underline{S} = \overline{S}$$

Bây giờ, từ (7.2) và (7.3) có thể viết

$$(7.5) \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Mặt khác, nếu gọi $\lambda_i = \Delta x_i$ và $\lambda := \max_{1 \leq i \leq n}(\Delta x_i)$ thì các hệ thức (7.4) có thể viết dưới dạng :

$$(7.6) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \underset{\sim}{S} \text{ và } \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \tilde{S}$$

Do vậy, nếu hình thang cong AabB có diện tích nghĩa là nếu $\underset{\sim}{S} = \tilde{S} = S$ thì từ bất đẳng thức kép (7.5) và từ định lí chuyển qua giới hạn các bất đẳng thức kép (định lí 3.2 chương 3) ta cũng có :

$$(7.7) \qquad S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Giới hạn dạng (7.7) có một vai trò cực kì quan trọng trong giải tích và trong các ứng dụng đa dạng của giải tích và bây giờ chúng ta sẽ nêu chi tiết hơn giới hạn dạng đó.

Để kết thúc phần diện tích hình thang cong ta lưu ý rằng giả thiết về tính liên tục của hàm số f(x) trên khoảng đóng [a, b] là giả thiết bản chất, còn giả thiết f(x) không âm thì có thể bỏ qua vì nếu f(x) âm thì luôn có thể đẩy trục hoành xuống để thoả điều kiện f(x) không âm.

• *Định nghĩa tích phân xác định*

Cho hàm số f(x) xác định và bị chặn trong khoảng đóng [a, b], chia [a, b] thành những khoảng nhỏ bởi một phân điểm $\mathscr{P}$ (7.1), trong mỗi khoảng nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm ξ_i tuỳ ý :

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

và lập tổng

$$(7.8) \qquad \sigma := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

với $\qquad \Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, n})$

Dĩ nhiên tổng σ định nghĩa theo (7.8) là một số xác định ; số đó *phụ thuộc* số khoảng nhỏ n, *phụ thuộc* ξ_i, chọn tuỳ ý trong $[x_{i-1}, x_i]$ và *phụ thuộc cách chọn phân điểm* $\mathscr{P}$.

Nếu khi n tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho $\max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i := \lambda$, $\lambda \to 0$; với $\lambda_i := \Delta x_i \ (i = \overline{1, n})$, σ có giới hạn (hữu hạn) I, và giới hạn I này *không phụ thuộc* cách chọn điểm ξ_i, cũng *không phụ thuộc* cách chọn phân điểm $\mathscr{P}$:

$$(7.9) \qquad \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sigma = I$$

thì I được gọi là *tích phân xác định* của hàm số f(x) lấy trên khoảng đóng [a, b] và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$:

$$(7.10) \qquad I = \int_a^b f(x)dx$$

Khi đó ta cũng nói rằng hàm số f(x) *khả tích* trên [a, b], [a, b] là *khoảng lấy* tích phân, a là *cận dưới*, b là *cận trên* của tích phân, x là *biến số* lấy tích phân, f(x) là *hàm số* lấy tích phân và f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân.

Với công thức (7.7) và với định nghĩa (7.9) diện tích S của hình thang cong AabB là :

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

• *Chú ý.*

(1) Hệ thức định nghĩa (7.9) có thể diễn đạt theo "ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$" của khái niệm giới hạn : $\sigma \to I$ có nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $\delta > 0$ sao cho

(7.11) $\qquad \lambda < \delta$ có $|\sigma - I| < \varepsilon$

(2) Trong định nghĩa, chúng ta đã giả thiết f(x) xác định và bị chặn trong [a, b]. Khi đó, gọi $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, $x \in [a, b]$ có :

(7.12) $\qquad m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a, b]$

(3) Kí hiệu $m_i := \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, (m_i là cận dưới đúng của f(x) trong $[x_{i-1}, x_i]$; xem 1.3.6 chương 1) và $M_i := \sup f(x)$, (M_i là cận trên đúng của f(x) trong $[x_{i-1}, x_i]$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$).

Ta có :

$$m_i \leq f(x) \leq M_i,\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

(7.13) $$s := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ;\ S := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

lần lượt được gọi là *tổng* (tích phân) *dưới* và *tổng* (tích phân) *trên*. (Trong bài toán diện tích ở trên, vì f(x) được giả thiết là liên tục nên m_i trùng với min f(x) và M_i trùng với max f(x) (với $x \in [x_{i-1}, x_i]$) và tổng dưới chính là tổng trong, tổng trên chính là tổng ngoài). Từ (7.9), (7.12) và (7.13) suy ra :

(7.14) $\qquad s \leq \sigma \leq S$

Hơn nữa, tổng dưới s và tổng trên S còn có các tính chất sau :

(a) Khi tăng số điểm chia trong phân điểm $\mathscr{P}$ thì tổng dưới tăng và tổng trên giảm.

(b) Nếu gọi s_1, S_1 là tổng dưới, tổng trên ứng với phân điểm $\mathscr{P}_1$, s_2, S_2 là tổng dưới, tổng trên ứng với phân điểm $\mathscr{P}_2$, có : $s_1 \leq S_2$.

Chứng minh.

(a) Để khỏi rườm rà, chỉ lưu ý cách lập luận tương tự nhận xét (2) và (3) trong bài toán diện tích.

(b) Gọi $\mathscr{P}$ là phân điểm thứ ba, có được bằng cách hợp tập các điểm chia của phân điểm $\mathscr{P}_1$ và phân điểm $\mathscr{P}_2$ và gọi s, S lần lượt là tổng dưới, tổng trên ứng với phân điểm $\mathscr{P}$, khi đó, theo (a) :

$$s_1 \leq s \text{ và } S \leq S_2$$

Nhưng, dĩ nhiên $s \leq S$, do đó suy ra $s_1 \leq S$, suy ra $s_1 \leq S_2$. ■

(4) Từ tính chất của tổng dưới và tổng trên suy ra rằng tập các tổng dưới $\{s\}$ ứng với các phân điểm $\mathscr{P}$ khác nhau là một tập bị chặn trên ; cụ thể là bị một tổng trên bất kì S chặn, do đó theo mệnh đề 1.2 chương 1, tập $\{s\}$ có cận trên đúng I_* :

$$I_* := \sup \{s\}$$

Tương tự tập các tổng trên $\{S\}$ bị chặn dưới, do đó có cận dưới đúng I^* :

$$I^* := \inf \{S\}$$

Hiển nhiên, ta có :

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S \tag{7.15}$$

Với tất cả những nhận xét trên, bây giờ ta có thể trả lời câu hỏi rất tự nhiên là : để hàm số f(x) khả tích trên [a, b] thì f(x) phải thoả điều kiện gì ?

7.2. Điều kiện khả tích

Định lí 7.1. Với những kí hiệu đã dùng ở trên ; điều kiện ắt có và đủ để hàm số bị chặn f(x) khả tích trên [a, b] là :

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \tag{7.16}$$

Chứng minh.

"$\Rightarrow$" Giả sử tồn tại tích phân (7.10), khi đó, theo nhận xét (1) ; có (7.11) nghĩa là có

$$I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon$$

Mặt khác theo bất đẳng thức kép (7.15) và theo tính chất của cận trên đúng và cận dưới đúng, suy ra :

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon$$

Từ đó :

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = I$$

và (7.16) được chứng minh.

"$\Leftarrow$" Bây giờ giả sử có (7.16), khi đó từ (7.15) suy ra

$$s \le I \le S \,;\, I = \lim I_* = \lim I^*$$

Kết hợp bất đẳng thức kép này với bất đẳng thức kép (7.14) ta có đồng thời :

$$s \le I \le S \text{ và } s \le \sigma \le S$$

Hơn nữa vì $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$ (giả thiết) nên cũng suy ra : $|\sigma - I| < \varepsilon$

Bất đẳng thức cuối cùng này chứng tỏ rằng f khả tích trên [a, b]. ■

Nếu ta ký hiệu

(7.17) $$\omega_i := M_i - m_i,$$

ω_i được gọi là *dao động* của f trong $[x_{i-1}, x_i]$ thì có :

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$$

và có thể viết điều kiện khả tích (7.16) dưới dạng

(7.18) $$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

Bây giờ, từ điều kiện khả tích (7.16) ta có thể tìm các dấu hiệu khả tích của một hàm số quen thuộc.

Định lí 7.2.

Nếu f(x) liên tục trong [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

Chứng minh.

Vì f(x) liên tục trong khoảng đóng [a, b] nên theo định lí 3.12 chương 3 ; f(x) liên tục đều trong [a, b], do đó với bất kì $\varepsilon > 0$ luôn tìm được $\delta > 0$ sao cho $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ với $x_{i-1}, x_i \in [a, b]$ luôn có $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$ nghĩa là $\omega_i < \varepsilon$; từ đó, dùng (7.18) có :

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a)$$

Vì (b – a) là hằng số, ε bé tuỳ ý nên (7.18) được thoả, do đó f(x) khả tích trên [a, b]. ■

• *Định lí 7.3*

Nếu f(x) bị chặn trong [a, b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trong [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

Để đỡ nặng nề, chúng ta không chứng minh chi tiết định lí này mà chỉ gợi ý cách chứng minh. Trước hết, để ý rằng chỉ cần chứng minh cho trường hợp khoảng [a, b] chứa một điểm gián đoạn tại x = x' (?), sau đó, với $\varepsilon > 0$ cho trước, chia [a, b] thành 3 khoảng $[a, x' - \varepsilon]$, $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ và $[x' + \varepsilon, b]$ rồi áp dụng tính chất liên tục đều của f(x) trong các khoảng đóng $[a, x' - \varepsilon]$, $[x' + \varepsilon, b]$ để xây dựng các hệ thức thuộc loại (7.18) ; trong khoảng $[x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$ chỉ chứa một số hữu hạn điểm chia của phân điểm $\mathscr{P}$ nên việc chứng tỏ hệ thức (7.18) gần như hiển nhiên (?).

Định lí 7.4.

Nếu f(x) bị chặn và đơn điệu trong [a, b] thì khả tích trong [a, b].

Chứng minh.

Giả sử f(x) đơn điệu tăng trong [a, b], khi đó :

$$\omega_i := M_i - m_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Bây giờ cho trước $\varepsilon > 0$; đặt $\delta := \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ vì f(x) đơn điệu tăng nên $f(b) - f(a) > 0$.

Khi đó chỉ cần $\Delta x_i < \delta_i$, $i = \overline{1,n}$, luôn có :

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

Như thế f(x) thoả (7.18), do đó f(x) khả tích trên [a, b]. Trường hợp f(x) đơn điệu giảm cũng chứng minh tương tự. ■

• **Vài thí dụ**

(a) Tính $\int_0^1 x^2 dx$.

Vì $f(x) = x^2$ liên tục trong [0, 1] nên f(x) khả tích (định lí 7.2), do đó :

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$$

Theo định nghĩa khả tích ; có thể chọn $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tuỳ ý và ở đây ta chọn $\xi_i = i.\dfrac{1}{n}$; $\Delta x_i = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ (chia [0, 1] thành n khoảng nhỏ bằng nhau), khi đó $\max \Delta x_i \to 0$ tương đương với $n \to \infty$, do đó :

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{1}{n} \right)^2 . \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} . \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

(xem bài tập số 11, 2 chương 1) :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

(b) Tính $\int_a^b \sin x dx$

Vì f(x) = sinx liên tục trong [a, b], nên f(x) khả tích trên [a, b], do đó có thể chọn phân điểm sao cho

$$x_0 = a, ..., x_i = a + ih, \text{ với } h := \frac{b-a}{n} \; ; \; i = \overline{1,n}.$$

Khi đó $\max \Delta x_i = \Delta x_i = h$.

Nếu chọn $\xi_i := a + (i-1)h \; ; \; i = \overline{1,n}$ theo định nghĩa (7.10), có :

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\sin \xi_i) h$$

Đặt $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} (\sin \xi_i) h$, có :

$$\sigma_n = [\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + ... + \sin(a+(n-1)h)]h$$

Nhân cả hai vế đẳng thức trên với $2\sin\frac{h}{2}$ và dùng công thức lượng giác : 2sinusinv = cos(u − v) − cos(u + v), suy ra

$$\sigma_n = \frac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left[a + \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right]}{2\sin\frac{h}{2}}.h$$

$$= h.\frac{\cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(b - \frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} \text{ (vì } a + nh = b)$$

Cuối cùng, thế giá trị σ_n vào biểu thức cần tìm giới hạn, được :

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\left[\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b \quad (?)$$

• *Chú ý.*

(1) Qua hai thí dụ, ta thấy rằng nếu chỉ dùng định nghĩa để tính tích phân thì khối lượng tính toán cũng như cách tính toán rất cồng kềnh và đa dạng vì không có một công thức đủ tổng quát để gợi ý cách tính các giới hạn, chính mục 7.4 sau sẽ cải thiện tình hình này.

(2) Trở lại hai thí dụ trên, ta dễ dàng thấy :

Nếu $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ thì $\int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 y^2 dy = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$

Cũng vậy

Nếu $\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$ thì

$$\int_a^b \sin t dt = \int_a^b \sin v dv = \ldots = \int_a^b \sin y dy = \cos a - \cos b$$

Từ hai thí dụ đó có thể kết luận : $\int_a^b f(x)dx$ (nếu có) thì chỉ phụ thuộc các cận a, b và hàm số lấy tích phân f(x), không phụ thuộc biến số tích phân :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(u)du \qquad (7.19)$$

(3) Khi định nghĩa tích phân ta xét hàm số f(x) trong khoảng đóng [a, b], tức là ta đã giả thiết a < b. Bây giờ nếu b < a ta định nghĩa

$$(7.20) \qquad \int_a^b f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

và khi b = a ta định nghĩa :

$$(7.21) \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

7.3. Các tính chất của tích phân xác định

Để khỏi phải nhắc lại nhiều lần, trong các mệnh đề dưới đây khi nói đến tích phân $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ chúng ta đều hiểu là f(x) được giả thiết khả tích trên [α, β].

• *Tính chất 1.* (Không chứng minh).

(i) Có thể đưa thừa số là hằng số ra ngoài dấu tích phân :

$$(7.22) \qquad \int_a^b C.f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

(7.22') Đặc biệt $\int_a^b C.dx = C\int_a^b 1.dx = C(b-a)$

(ii) Tích phân của tổng hai hàm số bằng tổng hai tích phân :

$$(7.23) \qquad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

• *Tính chất 2.*

Cho 3 khoảng đóng [a, b], [a, c] và [c, b], nếu f(x) khả tích trên khoảng có độ dài dài nhất thì cũng khả tích trên hai khoảng còn lại và :

$$(7.24) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Chứng minh.

Đầu tiên giả sử a < c < b và f(x) khả tích trên [a, b]. Xét một phân điểm $\mathscr{P}$ trong đó điểm c được chọn làm điểm chia, khi đó :

$$\sum_a^b \omega\Delta x = \sum_a^c \omega\Delta x + \sum_c^b \omega\Delta x$$

vì $\omega = M - m > 0$; $\Delta x > 0$ nên nếu vế trái đẳng thức trên dần tới không sẽ kéo theo hai tổng vế phải đẳng thức đó dần tới không, nói khác đi, theo định lí 7.1 f(x) khả tích trên [a, b] thì cũng khả tích trên [a, c] và trên [c, b]. Mặt khác, hiển nhiên có :

$$\sum_a^b f(\xi)\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\Delta x$$

Chuyển qua giới hạn, cho $\lambda \to 0$, suy ra (7.24).

Bây giờ, giả sử b < a < c và f(x) khả tích trên [b, c] ; khi đó theo phần đã chứng minh : f(x) khả tích trên [b, a] và trên [a, c] và có :

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

Chuyển vế đẳng thức trên và dùng công thức (7.20) suy ra (7.24). ■

• *Tính chất 3.* (Trong tính chất này : a < b).

(i) Nếu $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

(ii) Nếu $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(iii) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] ⇒ |f(x)| khả tích trên [a, b] và

(7.25) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(iv) Nếu $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b] \Rightarrow$

$$(7.26) \qquad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Chứng minh.

(i) Hiển nhiên.

(ii) Chỉ cần áp dụng (i) cho hiệu $g(x) - f(x)$.

(iii) Trước hết, ta chứng minh tính khả tích của $|f(x)|$; nếu trong khoảng $[x_{i-1}, x_i]$, lấy 2 điểm bất kì x', x'', có (bất đẳng thức (1.25) chương 1) :

$$\big||f(x'')| - |f(x')|\big| \le |f(x'') - f(x')|$$

Do đó, nếu kí hiệu ω_i^* là giao động của hàm số $|f(x)|$ trong khoảng $[x_{i-1}, x_i]$, thì theo định nghĩa (7.2) có : $\omega_i^* \le \omega_i$, do đó :

$$0 \le \sum \omega_i^* \Delta x_i \le \sum \omega_i \Delta x_i$$

Vì $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ (theo giả thiết) nên $\sum \omega_i \Delta x_i \to 0$ (định lí 7.1), kéo theo $\sum \omega_i^* \Delta x_i \to 0$, do đó $|f|$ khả tích trên $[a, b]$.

Cuối cùng, bất đẳng thức hiển nhiên (vì $\Delta x_i > 0$)

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum |f(\xi_i)| \Delta x_i$$

kéo theo (7.25).

(iv) Chỉ cần áp dụng (ii) cho m, f và M và áp dụng (7.22'). ■

• *Tính chất 4.*

(i) Định lí trung bình thứ nhất.

Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$, $(a < b)$ và giả sử $m \le f(x) \le M$, với $x \in [a, b]$, khi đó tồn tại μ :

$$(7.27) \qquad \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \; m \le \mu \le M.$$

Đặc biệt nếu f(x) liên tục trong [a, b], tồn tại c ; c ∈ [a, b]

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{7.28}$$

Chứng minh.

Giả sử a < b, dùng bất đẳng thức (7.20), có

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

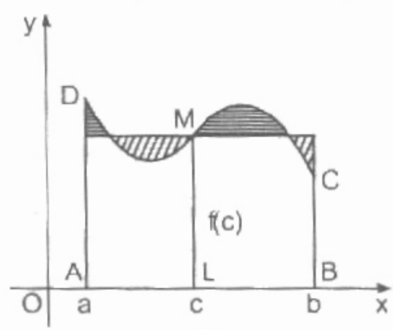
và đặt $\mu := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Nếu a > b, ta xét tích phân dạng $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ và dùng công thức (7.20) cũng suy ra (7.27).

Bây giờ giả sử f(x) liên tục trong [a, b], khi đó, theo định lí 3.8 chương 3, m = min f(x) ; M = max f(x), x ∈ [a, b], và theo hệ quả 3.1 chương 3, suy ra tồn tại c ∈ [a, b], sao cho f(c) = μ ; m ≤ μ ≤ M. ■

• *Nhận xét.*

(1) Công thức (7.28) có một ý nghĩa hình học thú vị. Thật vậy, giả sử f(x) ≥ 0, khi đó vế trái (7.28) chính là diện tích hình thang cong ABCD (hình 7.4) và vế phải chính là diện tích hình chữ nhật có chiều rộng là (b – a) và chiều dài là f(c). Nói khác đi, tồn tại một hình chữ nhật có chiều dài là tung độ f(c) của một điểm M nằm trên cung DC của đồ thị f, có hoành độ c ở giữa a và b, sao cho diện tích hình chữ nhật đó



Hình 7.4

bằng diện tích hình thang cong ABCD có chung đáy AB. Chính vì giá trị f(c) trung gian đó, công thức (7.28) mang tên định lí trung bình.

(2) So sánh công thức (7.28) và công thức (5.2) chương 5 :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

có thể nói rằng nếu f(x) có một nguyên hàm là F(x) (nghĩa là f(x) = F'(x)) thì (7.28) có dạng :

$$\int_a^b f(x)dx = F'(c)(b - a)$$

Chính hệ thức này gợi ra liên hệ giữa tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và giá trị cụ thể của nguyên hàm F(x), trong mục 7.4 ta sẽ nghiên cứu quan hệ đó.

(ii) Định lí trung bình thứ hai.

Giả sử :

(1) f(x) và tích f(x).g(x) khả tích trên [a, b].

(2) $m \le f(x) \le M$.

(3) g(x) không đổi dấu trong [a, b] : $g(x) \ge o(g(x) \le 0)$.

Khi đó :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx\,,\ m \le \mu \le M. \tag{7.29}$$

Đặc biệt, nếu f(x) liên tục trong [a, b], có :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx,\ a \le c \le b. \tag{7.30}$$

Chứng minh.

Trước hết, giả sử $g(x) \ge 0$ và $a < b$, khi đó, từ giả thiết (2) có :

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

Áp dụng tính chất 3 (iv) suy ra :

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

Mặt khác, vì $g(x) \ge 0$ $(a < b)$ nên dùng tính chất 3(i), có :

$$\int_a^b g(x)dx \ge 0.$$

Nếu tích phân này bằng không thì hiển nhiên có (7.29) vì khi đó

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Nếu $\int_a^b g(x)dx > 0$, suy ra :

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu,\ \mu \in [m, M]$$

do đó có (7.29).

Bây giờ, để ý rằng hạn chế $g(x) \ge 0$ và $a < b$ là không cần thiết vì khi đổi cận tích phân hoặc đổi dấu của g(x) trong biểu thức trên dấu bằng vẫn không thay đổi.

Đặc biệt khi f(x) liên tục trong [a, b], cũng lập luận như phần tương ứng trong định lí trung bình thứ nhất, suy ra (7.30). ■

7.4. Cách tính tích phân xác định

Nếu f(x) khả tích trên [a, b], f(x) cũng khả tích trong [a, x], $x \in [a, b]$ (tính chất 2 mục 7.3, nếu bây giờ thay cận trên b bởi biến x thì ta có tích phân

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a, b] \tag{7.31}$$

$\Phi(x)$ là một hàm phụ thuộc cận trên x, và để phân biệt cận và biến số tích phân ta viết biến số tích phân là t (xem nhận xét (2) mục 7.2). Hàm $\Phi(x)$ có các tính chất sau.

Định lí 7.5.

(1) Nếu f(t) khả tích trên [a, b] thì $\Phi(x)$ liên tục đối với $x \in [a, b]$.

(2) Nếu f(x) liên tục tại t = x thì $\Phi(x)$ có đạo hàm tại x và :

(7.32) $$\Phi'(x) = f(x)$$

Chứng minh.

(1) Cho x một số gia $\Delta x = h$ sao cho $x + h \in [a, b]$, khi đó, theo định nghĩa (7.31) có :

$$\Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{(công thức (7.24))}$$

do đó :

(7.33) $$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \mu h, \text{ (công thức (7.27))}$$

với μ ở giữa m' và M' là hai cận dưới và trên của f trong khoảng [x, x + h] (xem hệ thức (7.2) trong chú ý (2) phần định nghĩa tích phân xác định).

Nếu bây giờ cho $h \to 0$, hiển nhiên có :

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0 \text{ hay là } \Phi(x+h) \to \Phi(x)$$

và điều đó chứng tỏ tính liên tục của $\Phi(x)$.

(2) Thật vậy, từ (7.33) suy ra :

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu$$

Mặt khác f(t) liên tục tại t = x nên với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý tìm được $\delta > 0$ sao cho khi $|h| < \delta$ có

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon, \; t \in [x, x+h]$$

Vì m' := inf f(t), M' := sup f(t), $t \in [x, x + h]$ (xem mệnh đề 1.2 chương 1) có :

$$f(x) - \varepsilon \le m' \le M' \le f(x) + \varepsilon$$

Ngoài ra, vì μ thoả : $m' \le \mu \le M'$ nên suy ra :

$$f(x) - \varepsilon \le \mu \le f(x) + \varepsilon \text{ hay là } |\mu - f(x)| \le \varepsilon$$

Do đó :

$$\Phi'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mu = f(x). \blacksquare$$

• *Nhận xét.*

Kết luận (2) của định lí có một ý nghĩa quan trọng về lí thuyết cũng như ứng dụng. Nếu f(x) liên tục trong toàn khoảng [a, b] thì nó khả tích (định lí 7.2) và, hơn nữa, tại bất kì $x \in [a, b]$ công thức (7.32) đúng : *Khi đó đạo hàm của tích phân (7.31) theo cận trên x luôn bằng hàm số lấy tích phân trong khoảng lấy tích phân đó.*

Nói khác đi, chúng ta đã chứng minh định lí 6.2 chương 6 :

Một hàm f(x) liên tục trong khoảng [a, b] luôn có nguyên hàm trong khoảng đó và một trong các nguyên hàm đó được biểu diễn dưới dạng 7.31.

Định lí 7.6. (Liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm).

Nếu f(x) liên tục trong khoảng đóng [a, b] và nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) (luôn tồn tại nguyên hàm này, theo nhận xét trên) trong khoảng đó thì

$$(7.34) \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Công thức (7.34) được gọi là công thức Newton–Leibnitz (đọc là Niutơn–Lainit) và cũng thường được viết dưới dạng :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Chứng minh.

Vì F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong [a, b] và tích phân (7.31) cũng là một nguyên hàm của f(x) trong [a, b] nên theo định lí 6.1 (2) chương 6 có :

(7.35) $$\Phi(x) = F(x) + C,\ x \in [a, b]$$

với C là một hằng số cộng.

Từ đẳng thức (7.35) suy ra :

$$\Phi(a) = F(a) + C$$

nhưng $\Phi(a) = 0$ (xem (7.21)), suy ra : $F(a) = -C$.

Bây giờ trong (7.35) cho $x = b$ sẽ suy ra (7.34). ■

Công thức Newton – Leibnitz cho cách tính tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$, không cần phải trở về định nghĩa, miễn là biết một nguyên hàm F(x) của f(x), như vậy, nếu chúng ta đã quen với các kĩ thuật tìm tích phân bất định đã học ở chương 6 thì về nguyên tắc có thể tính được các dạng khác nhau của tích phân xác định.

• *Thí dụ.*

(a) Trở lại hai thí dụ trong mục 7.3, dễ dàng thấy :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$$

(b) $$\int_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\mu+1}\left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right) \qquad (\mu \neq -1).$$

(c) $$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

(d) Dùng tích phân xác định, tìm giới hạn

$$I := \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$$

Gọi $$I_n = \frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

thì có thể viết I_n dưới dạng :

$$I_n = \frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{\frac{n}{n^2}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

Xét hàm $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$, hàm số này liên tục trong [0, 1], do đó khả tích trên [0, 1] ; dùng phân điểm đều $\Delta x_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ và các điểm chia :

$$x_0 = 0\ ;\ x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_i = \frac{i}{n}, \qquad i = \overline{0,n}\ ;$$

chọn điểm $\xi_i = x_i$, có tổng tích phân chính là I_n, do đó

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \text{arctg}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(e) Tính $I = \int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

Ta có $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, do đó

$$I = \sqrt{2}\int_0^{100\pi} |\sin x|dx$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(\int_0^{\pi} |\sin x|dx + \int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx\right) + \left(\int_{2\pi}^{3\pi}|\sin x|dx + \int_{3\pi}^{4\pi}|\sin x|dx\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\int_{98\pi}^{99\pi} |\sin x|dx + \int_{99\pi}^{100\pi} |\sin x|dx\right)\right]$$

$$= 50\sqrt{5}\left[\int_0^{\pi} |\sin x|dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|dx\right] = 50\sqrt{2}\left(\int_0^{\pi}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right)$$

$$= 50\sqrt{2}\ [(\cos 0 - \cos\pi) + (\cos 2\pi - \cos\pi)] = 200\sqrt{2}$$

(f) Tính $I(\alpha) := \int_0^1 x|x - \alpha|dx$, α là tham số.

Vì : $|x - \alpha| = \begin{cases} x - \alpha \text{ nếu } x \geq \alpha \\ \alpha - x \text{ nếu } x < \alpha \end{cases}$

Do đó $I(\alpha)$ phụ thuộc vào $\alpha < 0$ hoặc $0 \leq \alpha \leq 1$ hoặc $\alpha > 1$.

Với $\alpha < 0$, $x > \alpha$, ta có :

$$I(\alpha) = \int_0^1 x(x - \alpha)dx = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}$$

Với $0 \leq \alpha \leq 1$, ta có

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} x|x - \alpha|dx + \int_{\alpha}^1 x|x - \alpha|dx$$

$$= \int_0^{\alpha} x(\alpha - x)dx + \int_{\alpha}^1 x(x - \alpha)dx = \frac{1}{3} - \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

Với $\alpha > 1$, $x < \alpha$, ta có :

$$I(\alpha) = \int_0^1 x|x-\alpha|dx = \int_0^1 x(\alpha - x)dx = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}$$

(g) Tính các đạo hàm :

(i) $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$, (ii) $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$;

(iii) $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$ và (iv) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$.

(i) Vì a, b là hằng nên $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = 0$

(ii) Theo công thức (7.32) $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2$

(iii) Vì $\int_a^b \sin x^2 dx = -\int_b^a \sin x^2 dx$

Dùng công thức (7.32)

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\sin a^2$$

(iv) Đặt $u = x^2$; $\Phi(u) = \int_a^u \sin t^2 dt$.

Do đó dùng (7.32) và dùng định lí đạo hàm hàm số hợp có :

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} \sin t^2 dt = \frac{d}{dx}\int_a^u \sin t^2 dt = \frac{d}{dx}\Phi(u) = \frac{d}{du}(\Phi(u)).\frac{du}{dx} = 2x\sin x^4.$$

7.5. Phép đổi biến trong tích phân xác định

Tương tự tích phân bất định, trong tích phân xác định, người ta cũng dùng các phép đổi biến thích hợp để tính tích phân.

Định lí 7.7 (Đổi biến x : = φ(t)).

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$, *với f(x) liên tục trong [a, b].*

Giả sử thực hiện phép đổi biến $x = \varphi(t)$ *thoả :*

(1) $\varphi(t)$ *có đạo hàm liên tục trong* $[\alpha, \beta]$

(2) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$

(3) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ *thì x biến thiên nhưng không ra ngoài khoảng liên tục của hàm số f(x). Khi đó*

(7.36) $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Chứng minh.

Giả sử F(x) là một nguyên hàm của f(x) trong [a, b], khi đó F(φ(t)) sẽ là một nguyên hàm của f[(φ(t)]φ'(t) trong [α, β] (mệnh đề 6.1 chương 6). Mặt khác theo công thức Newton – Leibnitz có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

và $$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

So sánh hai đẳng thức trên suy ra (7.36). ■

• *Nhận xét.*

(1) Cả ba điều kiện của định lí đều không thể bỏ qua được. Điều kiện (1) đảm bảo tồn tại tích phân vế phải hệ thức (7.36) ; điều kiện (3)

đảm bảo hàm số hợp $f[\varphi(t)]$ được xác định với mọi $t \in [\alpha, \beta]$; và điều kiện (2) đã được dùng khi chứng minh công thức.

(2) Thuận lợi của công thức (7.36) là, sau khi đổi biến không cần phải trở về biến cũ.

• *Thí dụ.*

(a) Tính $$I := \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Đặt $x := 2\sin t$; có $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

$2\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$; $2\sin\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$; $dx = 2\cos t\,dt$.

Các điều kiện của định lí đều thoả, do đó :

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

(b) Cho $I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$; $J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $I_n = J_n$.

Thật vậy, đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$; $\cos x = \sin t$, $dx = -dt$, khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; khi $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$. Do đó, dùng (7.36) có :

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = J_n$$

(c) Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trong [−a, a] thì :

(7.37) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ nếu } f(x) \text{ lẻ} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx \text{ nếu } f(x) \text{ chẵn} \end{cases}$$

Thật vậy, theo công thức (7.24) có

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Trong tích phân thứ nhất của vế phải đẳng thức trên, ta thực hiện phép đổi biến x = − t cớ

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

Do đó : $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} \left[f(x) + f(-x)\right]dx$$

Từ đẳng thức cuối cùng này dùng tính chất hàm số chẵn, lẻ và dùng tính chất 1 (i) suy ra (7.37).

Định lí 7.8 (Đổi biến t : = φ(x)).

Xét tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$*, với f(x) liên tục trong [a, b].*

Nếu phép đổi biến t : = φ(x) thoả :

(1) φ(x) biến thiên đơn điệu ngặt và có đạo hàm liên tục trên [a, b]

(2) f(x)dx trở thành g(t)dt, trong đó g(t) là một hàm số liên tục trong khoảng đóng [φ(a), φ(b)] thì :

(7.38) $$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

Chứng minh.

Giả sử $\int g(t)dt = F(t) + C$, khi đó :

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = F[\varphi(x)] + C$$

Do đó :

$$\int_a^b f(x)dx = F[\varphi(x)]\Big|_a^b = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = F(t)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt. \blacksquare$$

• *Thí dụ.*

(a) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$

Đổi biến $t = \sin x$, hàm số $t = \sin x$ đơn điệu trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dùng (7.38) có :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(b) Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ $(0 < \alpha < \pi)$.

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên hàm số $f(x) := \frac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ liên tục trong $[-1, 1]$; thực hiện đổi biến $t = x - \cos\alpha$; $dt = dx$ và

$$I = \int_{-1-\cos\alpha}^{1-\cos\alpha} \frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]$$

Vì $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}$

Do đó : $$I = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}$$

7.6. Phép lấy tích phân từng phần

Giả sử $u(x)$ và $v(x)$ là những hàm số có đạo hàm liên tục trong $[a, b]$. Khi đó :

$$d(uv) = vdu + udv$$

Lấy tích phân đẳng thức này trên $[a, b]$ được :

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

Vì $$\int_a^b d(uv) = (u.v)\Big|_a^b$$ nên :

(7.39) $$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Công thức (7.39) được gọi là công thức tích phân từng phần.

Thí dụ.

(a) Tính $$I = \int_1^e \ln x dx$$

Ta có : $I = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - 1.\ln 1 - (e-1) = 1$

(b) Tính $$J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \in \mathbf{N}.$$

Đặt $u = \sin^{n-1}x$ và $d(-\cos x) = dv$, có $du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx$ và $v = -\cos x$

Dùng công thức (7.39) được

$$J_n = (-\cos x \sin^{n-1} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right]$$

hay $J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$

Suy ra công thức truy hồi :

(7.40) $$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

Đặc biệt, có $$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; dx = \frac{\pi}{2}; \; J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

Hệ thức (7.40) chứng tỏ rằng muốn tính J_n phải biết J_{n-2}, muốn tính J_{n-2} phải biết $J_{n-4}, \ldots$, cuối cùng phải biết J_0 hoặc J_1 tuỳ theo n chẵn hay lẻ. Chẳng hạn, với n chẵn (n = 2m), công thức (7.40) cho :

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2m-2}$$

$$J_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-2} J_{2m-4}$$

$$\vdots$$

$$J_4 = \frac{3}{4} J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{2} J_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Nhân vế với vế các đẳng thức trên, suy ra :

$$(7.41)\qquad J_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)...3.1}{2m(2m-2)...4.2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Nếu dùng kí hiệu :

$$1.3...(2m-3)(2m-1) := (2m-1)!!$$

(đọc là (2m − 1) giai thừa cách) và

$$2.4...(2m-2)2m := (2m)!!$$

(đọc là (2m) giai thừa cách) thì có thể viết (7.41) dưới dạng :

$$(7.42)\qquad J_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Tương tự với n lẻ : $n = 2m + 1$, có

$$(7.43)\qquad J_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Dùng thí dụ (b) trong phần định lí 7.7, có thể viết gọn

$$(7.44)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{khi n chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!} & \text{khi n lẻ} \end{cases}$$

7.7. Tính gần đúng tích phân xác định

Như đã biết, công thức Newton – Leibnitz cho cách tính tích phân xác định của các hàm số khả tích miễn là biết nguyên hàm của các hàm số đó. Tuy nhiên, chúng ta cũng đã biết có nhiều hàm số sơ cấp nhưng không thể biểu diễn nguyên hàm của chúng dưới dạng các hàm số sơ cấp, ngay cả khi có thể biểu diễn được nguyên hàm dưới dạng các hàm số sơ cấp người ta cũng tìm cách tính gần đúng tích phân xác định miễn là đạt độ chính xác thích hợp và cách tính đơn giản.

Mục này sẽ giới thiệu hai công thức tính gần đúng tích phân xác định : công thức *hình thang* và công thức *Simpson*.

• *Công thức hình thang.*

Giả sử cần tính tích phân

(7.45) $$I := \int_a^b f(x)dx$$

trong đó f(x) là một hàm số xác định liên tục trong [a, b].

Dùng hệ phân điểm đều, chia [a, b] thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia :

$$x_0 \equiv a,\ x_1 = a + h,\ \ldots,\ x_i = a + ih,\ \ldots,\ x_n \equiv b\ ;\quad i = \overline{0, n}$$

(7.46) $$h := \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n},\quad i = \overline{1, n}$$

Tại các điểm chia, ta tính : $f(x_i)$ và đặt :

(7.47) $$f(x_i) := y_i,\ i = \overline{0, n}$$

Nói khác đi, ta có bảng giá trị tương ứng (x_i, y_i) :

x	$a \equiv x_0$	x_1	...	x_i	...	$x_n \equiv b$
y	y_0	y_1	...	y_i	...	y_n

Ta có :

(7.48) $$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Để tính tích phân ở vế phải của (7.48) ta thay hàm số lấy tích phân f(x) bởi các đa thức nội suy bậc nhất Lagrange $L_1(x)$ trong các khoảng $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ (dĩ nhiên trong các khoảng khác nhau, có các đa thức nội suy khác nhau).

Chẳng hạn trong $[x_0, x_1]$, dùng công thức (2.6) và (2.7) chương 2 ta có :

(7.49) $$f(x) \approx L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

trong đó

(7.50) $$\begin{cases} l_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ l_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

Như thế, ta đã xấp xỉ $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ bởi $\int_{x_0}^{x_1} L_1(x)dx$:

(7.51) $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} L_1(x)dx$$

trong đó $L_1(x)$, hàm số dưới dấu tích phân ở vế phải (7.51) thoả các công thức (7.49) và (7.50).

Thực hiện phép đổi biến $x = x_0 + ht$; $dx = hdt$, khi $x = x_0 \Rightarrow t = 0$; khi $x = x_1$, có $x_1 = x_0 + h = x_0 + ht \Rightarrow t = 1$.

Khi đó

$$l_0(x) = \frac{x_0 + ht - x_1}{-h} = \frac{x_0 + ht - x_0 - h}{-h} = -(t - 1)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_0 + ht - x_0}{h} = t$$

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = y_0(1 - t) + y_1 t$$

Do đó

$$\int_{x_0}^{x_1} L_1(x)dx = h\int_0^1 \left[y_0(1 - t) + y_1 t\right] dt = h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}$$

Từ (7.51) có công thức xấp xỉ

(7.52) $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}$$

Nhận thấy vế phải của (7.52) không phụ thuộc các cận lấy tích phân x_0, x_1 mà chỉ phụ thuộc $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ (xem (7.47)) nên, có thể suy ra :

$$(7.53)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \dots \\ \dots \\ \displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx h \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \end{cases}$$

Từ các hệ thức (7.48), (7.52) và (7.53) suy ra công thức xấp xỉ

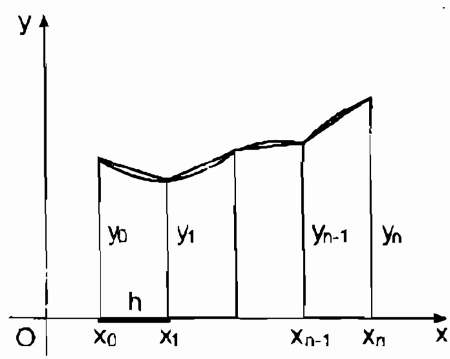
$$(7.54)\qquad \int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right]$$

Gọi biểu thức ở vế phải (7.54) là I_T, có :

$$(7.55)\qquad I \approx I_T = h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right],$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Công thức này được gọi là *công thức hình thang*, vì nếu $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ thì các biểu thức ở vế phải của (7.52) và (7.53) chính là diện tích của các hình thang có chiều cao h và các đáy lần lượt $y_0, y_1, \dots, y_n$ (hình 7.5)



Hình 7.5

Có thể chứng minh được rằng nếu xấp xỉ I bởi I_T theo công thức (7.55) thì :

$$|I - I_T| \le \frac{M_2}{12} h^2 (b-a) \tag{7.56}$$

trong đó $M_2 := \max|f''(x)|,\ x \in [a, b]$.

• *Thí dụ*. Tính gần đúng $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Ta đã biết $I = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ do đó, nếu đã biết số π thì có

$$I = 0{,}78539816$$

Nếu dùng (7.55) và chia [0, 1] thành 10 khoảng bằng nhau, ta có bảng

x	$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$
$0{,}0 = x_o$	$1{,}0000000 = y_o$
$0{,}1 = x_1$	$0{,}9900990 \approx y_1$
$0{,}2 = x_2$	$0{,}9615385 \approx y_2$
$0{,}3 = x_3$	$0{,}9174312 \approx y_3$
$0{,}4 = x_4$	$0{,}8620690 \approx y_4$
$0{,}5 = x_5$	$0{,}8000000 \approx y_5$
$0{,}6 = x_6$	$0{,}7352941 \approx y_6$
$0{,}7 = x_7$	$0{,}6711409 \approx y_7$
$0{,}8 = x_8$	$0{,}6097561 \approx y_8$
$0{,}9 = x_9$	$0{,}5524862 \approx y_9$
$1{,}0 = x_{10}$	$0{,}5000000 = y_{10}$

Dùng công thức (7.55) ta được

$$I \approx I_T = 0{,}7849815 \text{ với sai số tương đối } 0{,}054\%$$

• *Công thức Simpson.*

Khi xây dựng công thức hình thang chúng ta đã xấp xỉ f(x) bởi các đa thức nội suy bậc nhất, bây giờ ta sẽ xấp xỉ f(x) bởi các đa thức nội suy bậc hai, do đó trong mỗi khoảng xấp xỉ cần đến ba nút, vì thế phải chia [a, b] thành 2n khoảng bằng nhau bởi các điểm chia

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{2n} \equiv b$$

(7.57) $$x_i = \alpha + ih,\ h = \frac{b-a}{2n},\ i = \overline{0, 2n}$$

Tại các điểm chia x_i ta tính $f(x_i)$ và đặt

(7.58) $$f(x_i) = y_i$$

Khi đó, ta có :

(7.59) $$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

Để tính $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$ ta xấp xỉ f(x) bởi đa thức nội suy Lagrange bậc hai $L_2(x)$ và dùng công thức (2.8) và (2.9) chương 2 ta có :

(7.60) $$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

với

(7.61) $$\begin{cases} l_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ l_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ l_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

Ta có :

(7.62) $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx$$

trong đó $L_2(x)$ được tính theo (7.60) và (7.61).

Để tính tích phân ở vế phải của (7.62) ta thực hiện phép đổi biến $x = x_0 + ht$ và có $dx = hdt$, ứng x_0 là $t = 0$, ứng x_2 là $t = 2$. khi đó :

$$l_0(x) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2),$$

$$l_1(x) = -t(t-2),$$

$$l_2(x) = \frac{1}{2}t(t-1)$$

do đó :

$$\int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx = h\int_0^2 \left[\frac{y_0}{2}(t-1)(t-2) - y_1 t(t-2) + \frac{y_2}{2}t(t-1)\right]dt$$

$$= h\int_0^2 \left[\left(\frac{y_0}{2} - y_1 + \frac{y_2}{2}\right)t^2 + \left(-\frac{3y_0}{2} + 2y_1 - \frac{y_2}{2}\right)t + y_0\right]dt$$

và cuối cùng :

(7.63) $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Tương tự, suy ra :

(7.64) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \displaystyle\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \end{cases}$$

Cuối cùng, từ các công thức (7.58), (7.63) và (7.64) suy ra

(7.65) $$I \approx I_s = \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})]$$

với $h = \dfrac{b-a}{2n}$

Công thức (7.65) được gọi là công thức Simpson.

Người ta cũng chứng minh được rằng

(7.66) $$|I - I_s| \leq M_4 \frac{h^4}{180}(b-a)$$

với $M_4 : = \max|f^{(4)}(x)|\ ;\ x \in [a, b]$.

Thí dụ.

Lấy lại thí dụ trong mục công thức hình thang, với n = 10 ta tính được $I \approx I_s = 0{,}78539815$ với sai số tương đối 0,000002%.

• Chú ý cuối cùng về tính gần đúng tích phân. Việc dùng các công thức hình thang và Simpson chỉ *thực sự thuận lợi* khi biết được các giá trị $f(x_i) = y_i$ (các hệ thức (7.47) và (7.58)) nhưng rất tiếc là trong thực tế, *không phải lúc nào* cũng có thể tính *dễ dàng và chính xác* giá trị hàm số f(x) tại bất kì điểm $x = x_i$, chính để khắc phục khó khăn đó, hiện nay người ta đang cố gắng phát hiện các phương pháp số hiệu quả hơn.

7.8. Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định

7.8.1. *Tính diện tích hình phẳng*

• Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ Đềcác. Từ bài toán diện tích hình thang cong, ta đã biết diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng y = 0, x = a, x = b và cung đồ thị hàm số liên tục $f(x) \geq 0$ là S :

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

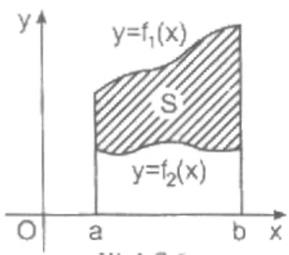
Nếu $f(x) \le 0$, $x \in [a, b]$ thì $S = -\int_a^b f(x)dx$

Do đó, trong mọi trường hợp với f(x) liên tục trong [a, b] ta có :

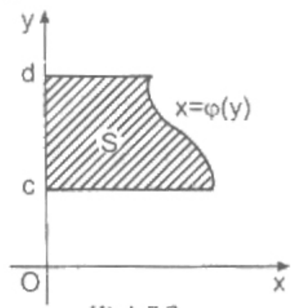
(7.67) $$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng x = a, x = b, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ với f_1, f_2 là hai hàm số liên tục trong [a, b] (hình 7.6) thì diện tích S được tính theo công thức

(7.68) $$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$



Hình 7.6



Hình 7.7

Tương tự, nếu phương trình đường cong cho dưới dạng $x = \varphi(y)$, $\varphi(y)$ liên tục trong [c, d] thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = c, y = d, x = 0 và đồ thị $x = \varphi(y)$ được tính theo công thức (hình 7.7) :

(7.69) $$S = \int_c^d |\varphi(y)|dy$$

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

thì diện tích hình thang cong cũng được tính theo công thức (7.67) trong đó y = f(x) được thay bởi $y = \psi(t)$, dx được thay bởi $dx = \varphi'(t)dt$

còn hai cận a, b được thay bởi hai cận mới t_1, t_2 lần lượt là nghiệm của các phương trình

$$a = \varphi(t_1)\ ;\ b = \varphi(t_2)$$

tức là

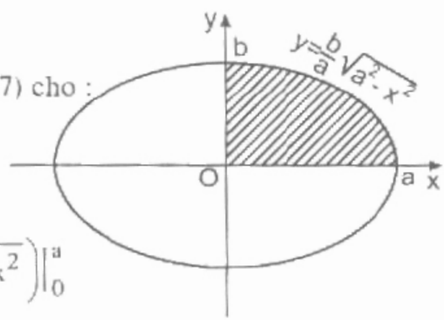
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left|\psi(t)\varphi'(t)\right| dt \qquad (7.70)$$

trong đó $\varphi(t)$, $\psi(t)$ và $\varphi'(t)$ là các hàm liên tục trong $[t_1, t_2]$.

• *Thí dụ.*

(a) Tính diện tích của elip (hình 7.8) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hình 7.8

Vì lẽ đối xứng, công thức (7.67) cho :

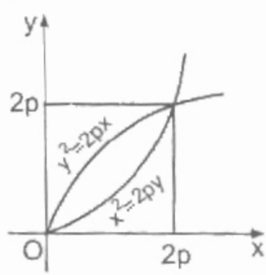
$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 4\left(\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Big|_0^a$$

$= \pi ab$ (thí dụ (b) mục 6.2 chương 6).

Cũng có thể tính S theo cách biểu diễn tham số của phương trình elip $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$. Khi đó, dùng (7.70) có :

$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi ab$$



Hình 7.9

(b) Tính diện tích của hình gồm giữa hai đường cong $y^2 = 2px$; $x^2 = 2py$, $p > 0$ (hình 7.9).

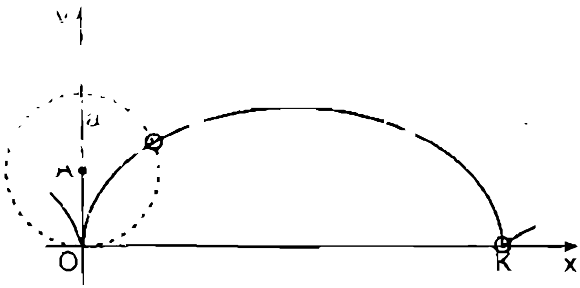
Ở đây : $f_1(x) = \sqrt{2px}$; $f_2(x) = \dfrac{x^2}{2p}$ do đó, dùng (7.68) có

$$S = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2$$

(c) Tính diện tích hình giới hạn bởi đường cycloide

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$ và trục hoành Ox (hình 7.10).



Hình 7.10

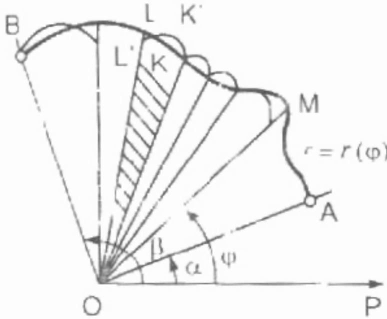
Theo công thức (7.70) có :

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

• Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực.

Giả sử đường cong giới hạn hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực. Người ta gọi *hình quạt cong* là một hình giới hạn bởi hai tia đi qua cực và một đường cong mà mọi tia đi qua cực cắt đường cong đó không quá một điểm. Để tính diện tích của hình quạt cong giới hạn bởi hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ và cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong $r = r(\varphi)$ trong đó $r(\varphi)$ là một hàm số liên tục trong $[\alpha, \beta]$ (hình 7.11), ta chia góc $\widehat{AOB}$ thành n góc nhỏ, kí hiệu là $\Delta\varphi_i$, $i = \overline{1, n}$.

Như thế hình quạt đó được chia thành n hình quạt nhỏ có diện tích ΔS_i, $i = \overline{1,n}$ (hình. 7.11).



Giả sử OKL là hình quạt nhỏ thứ i, diện tích của nó xấp xỉ bằng diện tích hình quạt tròn OKL' có cùng góc ở tâm $\Delta\varphi_i$ và có bán kính là $r = r(\varphi'_i)$, $\varphi_i \le \varphi'_i < \varphi_i + \Delta\varphi_i$ nghĩa là

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} r^2(\varphi'_i)\Delta\varphi_i$$

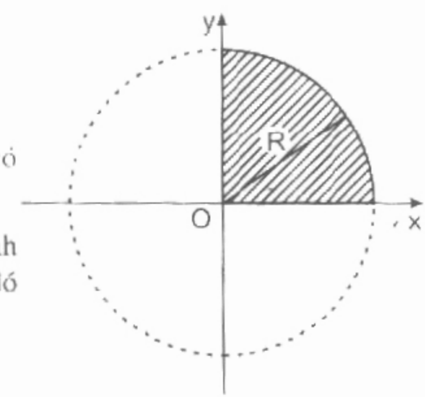
Hình 7.11

Do đó diện tích hình quạt cong đã cho xấp xỉ bằng

(7.71) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} r^2(\varphi'_i)\Delta\varphi_i$$

Xấp xỉ càng tốt nếu n càng lớn $\Delta\varphi_i$ càng nhỏ, do đó diện tích S của hình quạt, theo định nghĩa tích phân xác định là

(7.72) $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$



• *Thí dụ.*

(a) Tính diện tích đường tròn có bán kính R.

Phương trình đường tròn bán kính R trong hệ toạ độ cực là r = R, do đó dùng (7.72) có (hình 7.12) :

$$S = \frac{1}{2}.4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 d\varphi = \pi R^2$$

Hình 7.12

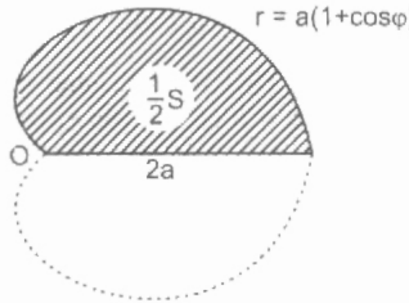
(b) Tính diện tích giới hạn bởi đường hình tim $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ (hình 7.13).

Dùng công thức (7.72) có :

$$S = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi$$

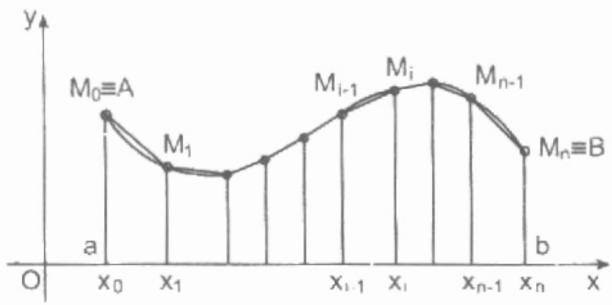
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$



Hình 7.13

7.8.2. *Tính độ dài đường cong phẳng*

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trong $[a, b]$, gọi cung $\overset{\frown}{AB}$ là đồ thị của $f(x)$, $x \in [a, b]$. Ta sẽ định nghĩa *độ dài s* của cung $\overset{\frown}{AB}$ và tính s (hình 7.14).



Hình 7.14

Lấy trên cung $\overset{\frown}{AB}$ những điểm $M_o(x_o, f(x_o))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, ..., $M_i(x_i, f(x_i))$, ..., $M_n(x_n, f(x_n))$ với $x_o \equiv a$; $x_n \equiv b$. Ta gọi độ dài s là giới hạn của độ dài đường gấp khúc $M_oM_1 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_n$ khi số cạnh của đường gấp khúc tăng vô hạn sao cho độ dài cạnh lớn nhất của nó dần tới không, nghĩa là :

(7.73) $$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_{i-1}M_i$$

trong đó $\lambda := \max\limits_{1 \le i \le n} M_{i-1}M_i$

$M_{i-1}M_i$ là độ dài đoạn $M_{i-1}M_i$

Hiển nhiên ta có :

(7.74) $$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

với $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i := f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Theo công thức Lagrange (công thức (5.2) chương 5), có

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i,\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$$

Thế giá trị Δy_i vào (7.74) ta được :

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

Suy ra : $$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

Vì $f'(x)$ liên tục nên $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ liên tục với $x \in [a, b]$ nên hàm số $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ khả tích trên $[a, b]$ (định lí 7.2), do đó luôn tồn tại độ dài s, và, theo định nghĩa tích phân xác định, có

(7.75) $$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

thì từ (7.75) chỉ cần thay dx bởi $x'(t)dt$, thay $f'(x)$ bởi $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, ta có công thức :

(7.76) $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

Trường hợp đường cong cho trong hệ toạ độ cực

$$r = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$$

ta chỉ cần dùng công thức (5.22) chương 5 :

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \ y = r(\varphi)\sin\varphi$$

và coi x, y được biểu diễn theo tham số φ ta được

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$$

$$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

Do đó : $$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)$$

Khi đó công thức (7.76) trở thành :

(7.77) $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

• *Chú ý.*

Nếu s là độ dài cung $\overset{\frown}{AM}$, là đồ thị của hàm số f(x) liên tục cùng với đạo hàm f '(x) ; trong đó A(a, f(a)) là một điểm cố định và M(x, f(x)) thì công thức (7.75) cho

$$s = \int_{a}^{x} \sqrt{1 + f'^2(t)}dt$$

Từ đó, theo công thức đạo hàm theo cận trên (7.32) ta có

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

suy ra :

(7.78) $$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Vì $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx}$ nên có thể viết (7.78) dưới dạng

(7.79) $$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số, (7.79) lấy dạng

(7.80) $$(ds)^2 = [x'^2(t) + y'^2(t)](dt)^2$$

Hai công thức (7.79), (7.80) thường được gọi là công thức *vi phân cung*.

• *Thí dụ.*

(a) Tính độ dài cung parabôn $y = \frac{1}{2p}x^2$, $p > 0$ lấy từ gốc tọa độ đến điểm M có hoành độ x.

Công thức (7.75) cho :

$$s = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+p^2})\right]\Big|_0^x$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}$$

(dùng công thức ở thí dụ (h) mục 6.3 chương 6).

(b) Tìm độ dài đường tròn bán kính R.

Phương trình đường tròn trong hệ toạ độ cực là $x = R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, do đó dùng công thức (7.77) có :

$$s = 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,d\varphi = 2\pi R$$

(c) Tính độ dài đường cycloide

$$x = a(t - \sin t)\ ;\ y = a(1 - \cos t)\ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

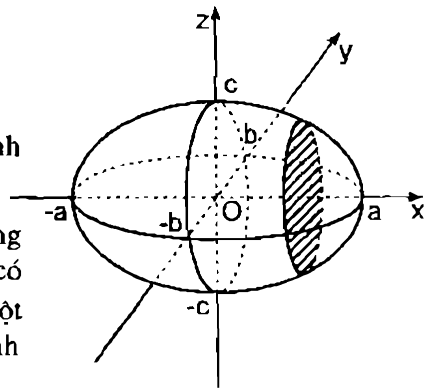
Dùng công thức (7.76) có :

$$s = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

Theo định nghĩa tích phân xác định, giới hạn đó chính là $\int_a^b S(x)dx$, tích phân này chắc chắn tồn tại vì S(x) được giả thiết liên tục trong [a, b]. Vậy, nếu gọi V là thể tích vật thể nói trên ta được

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{7.82}$$



Hình 7.16

• *Thí dụ.*

Tính thể tích của elipxôit (hình 7.16) :

Cắt elipxôit bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x \in [-a, a]$ sẽ được một thiết diện là một elip có phương trình

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

hay
$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

Theo thí dụ (a) mục áp dụng công thức (7.67), diện tích elip đó là

$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

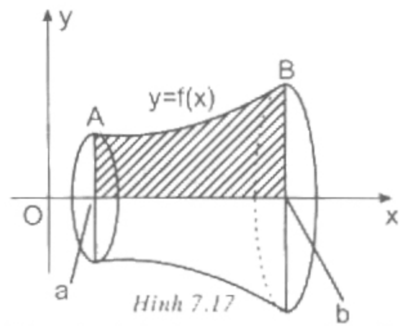
Do đó, dùng công thức (7.82) ta có thể tích V của hình elipxôit là

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

• *Vật thể tròn xoay.*

Giả sử phải tìm thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi hình thang cong AabB giới hạn bởi đường $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, trục Ox, các đường thẳng $x = a$, $x = b$ khi quay nó quanh trục Ox (hình 7.17).



Hình 7.17

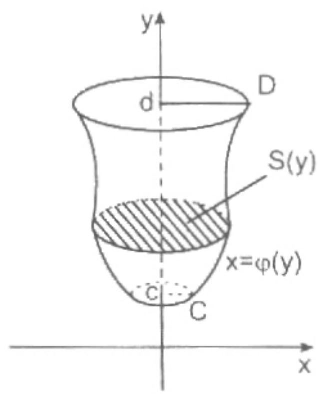
Giả sử f(x) liên tục trong [a, b], khi đó mọi thiết diện vuông góc với trục Ox đều là mặt tròn có tâm nằm trên Ox và có bán kính là $y = f(x)$ nên diện tích S(x) của thiết diện ứng với hoành độ x là

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

Do đó, dùng công thức (7.82) ta suy ra công thức tính thể tích của vật thể tròn xoay :

(7.83) $$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Tương tự, nếu hình thang cong CcdD giới hạn bởi đường $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$, $\varphi(y)$ liên tục trong [c, d], trục Oy và các đường thẳng $y = c$; $y = d$ (hình 7.18) thì thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình thang cong đó khi cho nó quay quanh trục Oy được tính theo công thức



(7.84) $$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

Hình 7.18

• *Thí dụ.*

Tính thể tích của vật tròn xoay tạo bởi elip : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi cho elip quay quanh trục Ox.

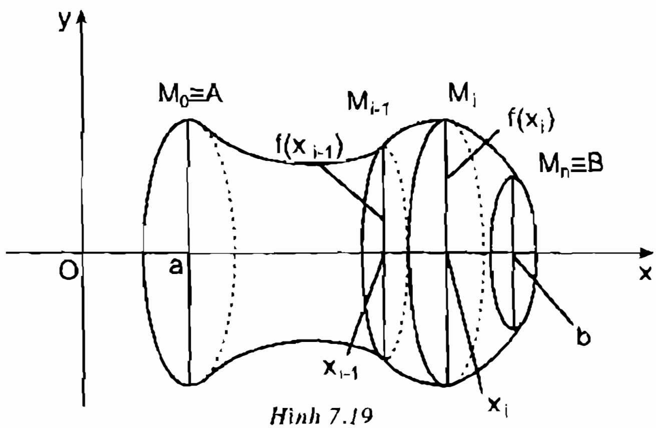
Ở đây $f^2(x) = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ do đó, dùng công thức (7.83) có

$$V = \pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)dx$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

7.8.4. *Tính diện tích mặt tròn xoay*

Xét cung $\overset{\frown}{AB}$, đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, với $f(x)$, $f'(x)$ liên tục trong $[a, b]$, cho cung $\overset{\frown}{AB}$ quay quanh trục Ox và xét vật thể tròn xoay tạo thành (hình 7.19).



Hình 7.19

Ta sẽ định nghĩa diện tích mặt tròn xoay này và tính diện tích đó.

Trước hết xét trường hợp $f(x) \geq 0$: Lấy trên cung $\overset{\frown}{AB}$ những điểm $M_o \equiv A(a, f(a))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, ..., $M_i(x_i, f(x_i))$, ..., $M_n \equiv B(b, f(b))$, trong đó x_i, $i = \overline{0,n}$ tuân theo thứ tự :

$$a \equiv x_o < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n \equiv b$$

Khi quay quanh Ox dây cung $M_{i-1}M_i$ sinh ra một mặt nón cụt có diện tích xung quanh là

$$\pi M_{i-1}M_i[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

trong đó (xem (7.74))

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$$

Do đó, diện tích của mặt tròn xoay sinh ra bởi đường gấp khúc $AM_1M_2...B$ khi quay nó xung quanh trục Ox bằng

$$(7.85)\qquad \sum_{i=1}^{n} \pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\Delta x_i$$

Giới hạn của tổng (7.85) khi $n \to +\infty$ sao cho $\max\Delta x_i \to 0$ được gọi là diện tích S của mặt tròn xoay được sinh ra bởi cung $\overset{\frown}{AB}$ quay quanh trục Ox.

Lưu ý rằng tổng (7.85) *không phải* là tổng tích phân của hàm $2f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ vì trong các số hạng của tổng đó ứng với khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ hiện diện ba điểm x_{i-1}, ξ_i và x_i của khoảng $[x_{i-1}, x_i]$. Tuy nhiên, người ta cũng chứng minh được rằng giới hạn của tổng (7.85) bằng giới hạn (giới hạn luôn tồn tại vì theo giả thiết f(x), f'(x) liên tục trong [a, b]) của tổng tích phân của hàm số $2f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Vậy, ta có :

$$S = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\max\Delta x_i \to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

hay là :

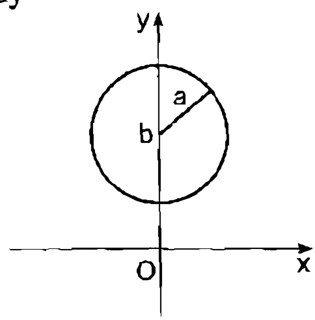
$$(7.86)\qquad S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Nếu f(x) có dấu bất kì ta định nghĩa :

(7.87)
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

Trường hợp đường cong có phương trình $x = \varphi(y)$, $\varphi(y)$ liên tục trong $[c, d]$ thì diện tích mặt tròn xoay sinh ra bởi cung của đồ thị $x = \varphi(y)$ quay quanh trục Oy là

(7.88)
$$S = 2\pi \int_c^d |\varphi(y)| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy$$



Hình 7.20

• *Thí dụ.* Tính diện tích của vòng xuyến sinh bởi đường tròn $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(b > a)$ quay quanh trục Ox (hình 7.20).

Diện tích của vòng xuyến bằng tổng hai diện tích sinh bởi hai nửa đường tròn khi quay quanh Ox : nửa đường tròn trên có phương trình

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$$

và nửa đường tròn dưới có phương trình

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Trong cả hai trường hợp có $y'^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$

Dùng công thức (7.86) ta được :

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx +$$

$$+ 2\pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}dx$$

$$= 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8ab\pi \arcsin \frac{x}{a}\Big|_0^a = 4\pi^2 ab$$

7.8.5. *Hai sơ đồ ứng dụng tích phân*

Trong các ứng dụng hình học nêu ở trên, khi định nghĩa và lập các công thức chúng ta đã theo một phương pháp gọi là phương pháp *lập tổng tích phân.*

Sơ đồ dùng phương pháp tổng tích phân như sau : Giả sử cần tính một đại lượng A(x) phụ thuộc một đại lượng x khác, giả sử x biến thiên từ a đến b ; ngoài ra, giả sử A(x) thoả *tính chất cộng* hiểu với nghĩa : nếu chia [a, b] thành hai khoảng [a, c] và [c, b] thì đại lượng A ứng với [a, b] bằng đại lượng A ứng với [a, c] *cộng* với đại lượng A ứng với [c, b]. Với những giả thiết trên, khi cần tính A ta tiến hành như sau :

- Chia [a, b] thành n phần bởi phân điểm

(7.89) $$x_o \equiv a < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$$

- Phân tích đại lượng A thành tổng của n số hạng

(7.90) $$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

trong đó A_i là đại lượng A tương ứng trong khoảng thứ i : $[x_{i-1}, x_i]$.

- Tìm một hàm số f(x) sao cho có thể biểu diễn gần đúng

(7.91) $$A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

sao cho khi $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ càng bé thì xấp xỉ càng tốt sao cho khi dùng (7.91) phạm sai số bé thua A_i.

- Thế biểu thức vế phải của (7.90) bởi biểu thức xấp xỉ

(7.92) $$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

- Dùng định nghĩa tích phân, viết

(7.93) $$A = \int_a^b f(x)dx$$

Trong các ứng dụng đa dạng của tích phân, nếu tiến hành theo năm bước trên, mỗi bước ứng với một "nhiệm vụ toán học", xây dựng các hệ thức từ (7.89) đến (7.93) dĩ nhiên dựa vào các hiểu biết cơ bản về đặc thù của đại lượng A cần tính, sơ đồ ứng dụng này còn được gọi ngắn gọn là sơ đồ *tích phân.*

Bây giờ ta xét hệ thức (7.91), có thể hiểu biểu thức vế trái của (7.91) là *hiệu* của giá trị A tại x_i và giá trị A tại x_{i-1}, nghĩa là hiệu $A(x_i) - A(x_{i-1})$ và chính là đại lượng A được gia tăng thêm khi x biến thiên từ x_{i-1} đến x_i, vì thế ta kí hiệu biểu thức vế trái của (7.91) là ΔA, nghĩa là

(7.94) $$\Delta A \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Đặt $x = x_{i-1}$; $x + \Delta x = x_i$, $\xi_i = \xi$ thì ΔA có dạng

(7.95) $$\Delta A \approx f(\xi)\Delta x$$

Trên kia, trong bước thứ ba, ta đã yêu cầu độ chính xác của công thức xấp xỉ (7.91) là : sai số khi dùng (7.91) *không vượt quá* $(x_i - x_{i-1})$; do vậy, thay vì biểu diễn xấp xỉ (7.95) có thể viết (xem (4.3) chương 4)

$$\Delta A = f(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$$

Do đó, thay vì dùng (7.94) ta dùng

(7.96) $$dA = f(x)dx$$

Vậy, nếu biết dA (vi phân của A) thì có thể viết ngay

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

mà không cần qua các bước ứng với các công thức từ (7.91) đến (7.92). Sơ đồ này thường được gọi là *sơ đồ vi phân.*

- Tóm lại, có thể tính A theo sơ đồ vi phân :
- Lấy $x \in [a, b]$; lấy $x + dx$.
- Tính giá trị A tại x và tại $x + dx$.

• Tìm phần chính bậc nhất dA của ΔA.

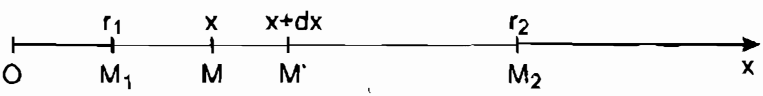
• Lấy tích phân của dA từ a đến b.

• *Thí dụ.*

Lực đẩy giữa hai điện tích cùng dấu e_1 và e_2 đặt cách nhau một khoảng r được cho bởi công thức :

$$F = \frac{e_1e_2}{r^2}$$

Giả sử điện tích e_1 được đặt cố định ở gốc hoành độ O, hãy tính công của lực đẩy F sản ra do điện tích e_2 di chuyển từ điểm M_1 có hoành độ r_1 đến điểm M_2 có hoành độ r_2 trên trục hoành Ox (hình 7.21).



Hình 7.21

Gọi A(x) là công của lực đẩy F sinh ra do e_2 di chuyển từ M_1 đến M có hoành độ x ; cho x số gia khá bé dx ; vì dx khá bé, trong khoảng [x, x + dx] có thể coi lực đẩy F như không đổi và bằng $\frac{e_1e_2}{x^2}$, do đó công của lực đẩy làm cho e_2 di chuyển từ x đến x + dx là vi phân công dA_i và

$$dA = \frac{e_1 \cdot e_2}{x^2}dx$$

Vậy công của lực đẩy F sản ra khi e_2 di chuyển từ M_1 đến M_2 là

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 \cdot e_2}{x^2}\,dx = -e_1e_2 \cdot \frac{1}{x}\Big|_{r_1}^{r_2} = e_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

7.9. Tích phân suy rộng

Trong phần 7.1 chương này chúng ta đã xây dựng khái niệm tích phân xác định trong trường hợp các cận lấy tích phân là hữu hạn và hàm số lấy tích phân là bị chặn, bây giờ chúng ta sẽ mở rộng sang trường hợp : cận lấy tích phân là vô hạn và trường hợp hàm số lấy tích phân không bị chặn và khi đó ta có khái niệm tích phân suy rộng.

7.9.1. *Trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn*

Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng $[a, +\infty)$ (dĩ nhiên a hữu hạn), nghĩa là f(x) xác định với mọi $x \geq a$ và khả tích trong bất kì khoảng hữu hạn $[a, A]$; khi đó, như đã biết tích phân $\int_a^A f(x)dx$ có nghĩa với bất kì $A > a$.

Nếu tồn tại

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \tag{7.97}$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm số f(x) trong khoảng $[a, +\infty)$ và kí hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{7.98}$$

Khi đó, ta cũng nói rằng tích phân (7.98) *hội tụ* và viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx \tag{7.99}$$

Nếu không tồn tại giới hạn (7.97) thì ta nói rằng tích phân (7.98) *phân kì*.

Tương tự (7.99) ta cũng định nghĩa được *tích phân* của hàm số f(x) lấy từ $-\infty$ đến a :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx := \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A' < a) \tag{7.100}$$

và tích phân của hàm số f(x) từ $-\infty$ đến $+\infty$:

$$(7.101)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

với giả thiết f(x) khả tích trên bất kì khoảng hữu hạn [A', A] và với những khái niệm trên, có thể viết

$$(7.102)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \quad \forall a$$

Tích phân suy rộng trong vế trái (7.102) hội tụ khi cả hai tích phân vế phải (7.102) hội tụ.

Qua các định nghĩa trên ta thấy rằng tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định (hiểu theo nghĩa thông thường) khi cho cận tích phân dần tới vô cùng, do vậy, cũng rất tự nhiên, muốn tính tích phân suy rộng người ta dùng công thức Newton – Leibnitz (công thức (7.34)) để tính tích phân, sau đó cho cận tích phân dần tới vô cùng. Chẳng hạn, để tính tích phân dạng (7.98) ta tính (công thức (7.34) :

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a)$$

Nếu tích phân (7.98) hội tụ, dĩ nhiên ta có : $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ là hữu hạn và ta viết

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) := F(\infty)$$

và khi đó có thể viết

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

Với các tích phân dạng (7.100) và (7.102) cũng được tính tương tự.

• *Thí dụ.*

(a) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x \Big|_0^{+\infty} = \text{arctg}(+\infty) - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$$

(b) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x \Big|_{-\infty}^{0} = -\text{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2}$$

(c) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(d) Tính $\quad I := \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$.

Với $\alpha \neq 1$ có

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$$

Với $\alpha = 1$ có $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty$

Vậy I hội tụ khi $\alpha > 1$ và I phân kì khi $\alpha \leq 1$.

(e) $\quad I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \ (a > 0)$, $J := \int_a^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \ (a > 0)$

$$I = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$J = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

(f) Các tích phân $\int_a^{+\infty} \sin x dx$, $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ không hội tụ vì sinx và cosx không xác định khi $x \to +\infty$.

• *Sự hội tụ của tích phân suy rộng có cận là vô cùng.*

Trường hợp $f(x) \geq 0$.

Giả sử $f(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, A]$, với a, A hữu hạn $(a < A)$; khi đó tích phân

(7.103) $$\Phi(A) = \int_a^A f(x)dx$$

là một hàm đơn điệu tăng đối với biến A, do đó theo định lí 3.3 chương 3 suy ra :

Điều kiện ắt có và đủ để tích phân suy rộng (7.98) hội tụ là tích phân (7.103) luôn bị chặn trên khi A tăng :

(7.104) $$\int_a^A f(x)dx \leq L \text{ (L là hằng số).}$$

Nếu không thoả (7.104) thì tích phân (7.103) có giá trị là ∞

Từ điều kiện (7.104) và từ tính đơn điệu của tích phân suy ra :

• *Định lí 7.9 (tiêu chuẩn so sánh).*

(1) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a, A]$ $(a \leq A)$ và

(7.105) $$0 \leq f(x) \leq g(x),\ x \geq a$$

Khi đó

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì thì* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kì.*

(2) Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a, A]$ $(a \leq A)$. Khi đó :

Nếu tồn tại giới hạn

(7.106) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < +\infty)$$

thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *sẽ cùng tính chất, nghĩa là cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

Chứng minh.

(1) Đề nghị coi là bài tập.

(2) Thật vậy, theo định nghĩa giới hạn (7.106) suy ra, với mọi $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý, với x khá lớn, luôn có

$$k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$$

hay $(k - \varepsilon)\, g(x) < f(x) < g(x)\,(k + \varepsilon)$ (vì $|x| > 0$)

Áp dụng (1) vào bất đẳng thức kép trên suy ra (2). ■

Hệ quả 7.1.

Cho f(x) và g(x) là hai hàm số dương khả tích trên $[a, +\infty)$

Khi đó :

1) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và nếu* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

2) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *và nếu* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kì thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì.*

Chứng minh.

Để chứng minh phần 1) ta để ý rằng theo giả thiết, $\forall \varepsilon > 0$ cho trước, có thể chọn $c > a$ sao cho với $x > c$ luôn có $f(x) \le \varepsilon g(x)$, từ đó, theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra kết luận của 1). Phần 2) cũng được chứng minh tương tự, đề nghị bạn đọc coi là bài tập.

• *Thí dụ.*

Xét sự hội tụ của các tích phân :

a) $J := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$; b) $K := \int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{1+x^2}$;

c) $L := \int_0^{+\infty} x^r e^{-sx} dx$; $0 \le r \in \mathbf{R}, s > 0$

Với J, để ý rằng với x > 1 luôn có :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$$

Dùng thí dụ (d) mục trước và tiêu chuẩn so sánh, suy ra J hội tụ. Với K, để ý rằng

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} : \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

Dùng (d) ở thí dụ trước và hệ quả 2) suy ra tích phân K phân kì. Với L, để ý rằng

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^r e^{-sx}}{x^{-2}} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{r+2}}{e^{sx}} = 0$$

Dùng thí dụ (d) và hệ quả 1) suy ra L hội tụ.

Trường hợp f(x) có dấu tuỳ ý.

Trường hợp f(x) có dấu tuỳ ý, có định lí :

• *Định lí 7.10.* (Không chứng minh).

Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

Khi đó, ta nói rằng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *bán hội tụ (hội tụ không tuyệt đối).*

Với các tích phân dạng (7.100) và (7.101) cũng có những mệnh đề tương tự.

7.9.2. *Trường hợp hàm số lấy tích phân không bị chặn*

Bây giờ xét trường hợp hàm số f(x) *không bị chặn* trong khoảng đóng hữu hạn [a, b] ; cụ thể hơn giả sử f(x) bị chặn và khả tích trong khoảng đóng bất kì $[a, b-\eta]$ với $0 < \eta < b - a$ nhưng không khả tích trong bất kì khoảng đóng dạng $[b-\eta, b]$, $f(b-0)$ không giới nội và b được gọi là một điểm *bất thường*.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\eta \to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx \tag{7.107}$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng* của hàm f(x) lấy trên [a, b] và ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ* và viết

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta \to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx \tag{7.108}$$

Nếu giới hạn (7.107) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói rằng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ *phân kì*.

Tương tự, nếu f(x) bị chặn và khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a + \eta', b]$ nhưng $f(a + 0)$ không bị chặn và f(x) không khả tích trong mọi khoảng hữu hạn $[a, a + \eta']$, điểm a là điểm bất thường, ta có định nghĩa

$$(7.109) \qquad \int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta'\to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)dx$$

Nếu f(x) không bị chặn tại c, $a < c < b$; nghĩa là $f(c \pm 0)$ không bị chặn ta định nghĩa tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ bởi biểu thức

$$(7.110) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tích phân suy rộng ở vế trái đẳng thức (7.110) hội tụ khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải hội tụ.

• *Thí dụ.*

(a) $$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\eta'\to 0} \int_{-1+\eta'}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\eta'\to 0} [-\arcsin(-1 + \eta')]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$ (điểm -1 là điểm bất thường).

(b) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\eta\to 0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\eta\to 0} \arcsin(1 - \eta) = \frac{\pi}{2}$$

(điểm $+1$ là điểm bất thường).

(c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; các điểm ± 1 là điểm bất thường vì

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi$$

(d) Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng :

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (a < b, \alpha > 0)$$

Ở đây x = b là một điểm bất thường.

Với $\alpha \neq 1$, ta có :

$$\lim_{\eta\to0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\eta\to0}\left[\frac{1}{\alpha-1}\eta^{1-\alpha} + \frac{1}{-\alpha+1}(b-a)^{1-\alpha}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\lim_{\eta\to0}\eta^{1-\alpha}.$$

Do đó : $$I = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{khi } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{khi } \alpha > 1 \end{cases}$$

Với $\alpha = 1$, ta có

$$\lim_{\eta\to0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta\to0}[-(\ln\eta - \ln(b-a))] = +\infty$$

Do đó $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$, phân kì nếu $\alpha \geq 1$.

(e) Tương tự tích phân $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(a < b, \alpha > 0)$ hội tụ nếu $\alpha < 1$, phân kì nếu $\alpha \geq 1$.

(f) Xét sự hội tụ của tích phân $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, trong đó f(x) là hàm số liên tục trên [0, 1]. Dù rằng I là một tích phân suy rộng loại có điểm bất thường là x = 1 nhưng ta có thể đưa I về một tích phân thường bằng cách đổi biến. Thật vậy, cố định c trong (0, 1) và đặt $x = \sin\theta$ trên $[0, c]$ và có

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{c\to 1^-}\int_0^c \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 1^-}\int_0^{\arcsin c} f(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta$$

Vì hàm hợp của f là hàm sin là liên tục, do đó $f(\sin\theta)$ bị chặn trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và tích phân cuối cùng là một tích phân thường (không còn là tích phân suy rộng nữa).

• Tuy nhiên, một cách tổng quát có thể đưa một tích phân suy rộng loại $\int_a^b f(x)dx$ với a (hữu hạn) là một điểm bất thường về một tích phân suy rộng có cận lấy tích phân là vô hạn. Thật vậy, thực hiện phép đổi biến $u(x) = \frac{1}{x-a}$ hay $x(u) = a + \frac{1}{u}$. Khi $x \to a^+$, $u \to +\infty$ và $u(b) = \frac{1}{b-a}$; ngoài ra $x'(u) = -\frac{1}{u^2}$, do vậy ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{u}\right)}{u^2}\,du$$

Đặt $a'_1 = \frac{1}{b-a} > 0$ và cố định $c > a'_1$, khi u biến thiên trên $[a'_1, c]$ thì $x = a + \frac{1}{u}$ biến thiên trên $\left[a+\frac{1}{c}, b\right]$ và theo giả thiết trên khoảng này f(x) bị chặn và khả tích và như thế $\frac{f\left(a+\frac{1}{u}\right)}{u^2}$ bị chặn và khả tích trên $[a'_1, c]$ và tích phân $\displaystyle\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{u}\right)}{u^2} du$ là một tích phân suy rộng có cận vô hạn, và tích phân gốc ban đầu hội tụ khi và chỉ khi tích phân sau hội tụ.

(g) Với $p > 0$; tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln x)}{x^p} dx$ là tích phân suy rộng với điểm bất thường $a = 0$, thực hiện phép đổi biến $u = \dfrac{1}{x}$ ta được

$$\int_0^1 \frac{(-\ln x)}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} u^{p-2} \ln u du$$

Bạn đọc có thể dùng cách lấy tích phân từng phần và thấy rằng tích phân sau hội tụ với $0 < p < 1$.

Với nhận xét và thí dụ (g), ta có thể phát biểu mà không chứng minh các mệnh đề về sự hội tụ của tích phân suy rộng loại có cận hữu hạn là điểm bất thường tương tự các mệnh đề trong mục 7.9.1.

Định lí 7.10 (tiêu chuẩn so sánh).

(1) Cho f và g là hai hàm số không âm, khả tích trên (a, b] với x = a là điểm bất thường sao cho $f(x) \le g(x)$ với $x \in (a, c]$; $a < c < b$. Khi đó

Nếu $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ ;*

Nếu $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *phân kì thì* $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *phân kì.*

(2) Giả sử f và g là hai hàm số dương khả tích trên (a, b] cùng có điểm bất thường x = a. Khi đó

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ (0 < k < +\infty)$$

thì tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ.*

Hệ quả 7.2.

Cho f và g là hai hàm số dương, khả tích trên (a, b] cùng có điểm bất thường x = a. Khi đó

1) Nếu $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *và nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ.*

2) Nếu $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ *và nếu* $\int_a^b g(x)dx$ *phân kì thì* $\int_a^b f(x)dx$ *phân kì.*

• *Thí dụ.*

Xét sự hội tụ của các tích phân

(a) $I := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$; (b) $J := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{tg}x)^p dx$;

(c) $K := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$; (d) $L := \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Với tích phân I ta để ý rằng $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$, $0 \le x < 1$ do đó, dùng tiêu chuẩn so sánh, suy ra tích phân I hội tụ. Khi x = 0 thì tích phân J có điểm bất thường là x = 0 khi p < 0 và J có điểm bất thường là $x = \frac{\pi}{2}$ khi p > 0, tuy nhiên trong cả hai trường hợp ta luôn có

$$\lim_{x\to 0}\left[(\text{tg}x)^p : \frac{1}{x^p}\right] = 1$$

và : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(\operatorname{tg}x)^p : \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p} \right] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{(\sin x)^p}{(\cos x)^p} : \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p} \right]$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(\sin x)^p . \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^p} \right] = 1.$$

Do đó, dùng thí dụ (d) và (e) ở mục trên và dùng phần 2) của định lí 7.10 suy ra J hội tụ khi $|p| < 1$ và J phân kì khi $|p| \ge 1$.

Bây giờ xét tích phân K ; với $a < 1$, điểm $x = 0$ là điểm bất thường, với $b < 1$ điểm $x = 1$ là điểm bất thường. Phân tích K thành hai tích phân, chẳng hạn $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1$, tương tự các thí dụ trước, tích phân thứ nhất chỉ hội tụ khi $1 - a < 1$, nghĩa là khi $a > 0$ còn tích phân thứ hai chỉ hội tụ khi $b > 0$. Vậy K chỉ hội tụ khi $a > 0$, $b > 0$.

Cuối cùng, xét tích phân L ; với $p \ge 1$ thì L chính là trường hợp riêng của tích phân trong thí dụ ở mục 7.9.1, do vậy L hội tụ khi $p \ge 1$; với $p < 1$ thì $x = 0$ là điểm bất thường của L. Phân tích L thành hai tích phân : $L = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$ trong đó tích phân thứ nhất hội tụ khi $p > 0$ (vì so với $\dfrac{1}{x^{1-p}}$) và tích phân thứ hai hội tụ với p bất kì vì với $r > 1$ ta luôn có :

$$\lim_{x \to \infty} \left[x^{p-1} e^{-x} : \frac{1}{x^r} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{r+p-1}}{e^x} = 0;$$

dùng thí dụ (d) và hệ quả trên suy ra $\int\limits_1^{+\infty}$ hội tụ với $r \ge 1$.

Vậy, tích phân L hội tụ khi $p > 0$.

• *Chú ý cuối cùng về tích phân suy rộng.*

Cũng như đối với tích phân xác định thông thường, với tích phân suy rộng cũng có thể thực hiện phép đổi biến tích phân và phép lấy tích phân từng phần. Chúng ta sẽ không đi sâu vào chi tiết những vấn đề này mà hạn chế trong một số thí dụ cốt để hiểu ý tưởng của phương pháp và biết thêm một số tích phân suy rộng khác có nhiều ứng dụng thú vị.

• *Thí dụ.*

(a) Tính $$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Tích phân suy rộng này có hai điểm bất thường $x = a$ và $x = b$; thực hiện phép đổi biến

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$$

sẽ chuyển I về tích phân thông thường

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi$$

(b) Xét sự hội tụ của $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$

Thực hiện phép đổi biến $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, sẽ đưa I về dạng

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,$$

để ý rằng có thể viết

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Vì $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\,.\,\sqrt{t} = 0$ nên tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}$ hội tụ (?), chỉ cần xét tích phân thứ hai và có

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}}$$

(dùng phép lấy tích phân từng phần :

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{d(\cos t)}{\sqrt{t}} = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt).$$

Vì $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \le \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ nên $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ hội tụ (các định lí 7.9 ; 7.10)

Do đó I hội tụ.

(c) Tính tích phân $I = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^4}$

Thực hiện phép đổi biến $x = \dfrac{1}{t}$, đưa I về :

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$

Do đó, có thể viết

$$2I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} + \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}$$

Lại thực hiện phép đổi biến $z := x - \frac{1}{x}$, sẽ được

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(d) Tính tích phân $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (tích phân rất hay gặp trong lí thuyết xác suất).

Để ý rằng với $x > 1$, có $e^{-x^2} < e^{-x}$, do đó I hội tụ. Bây giờ xét hàm số $f(x) := (1+t)e^{-t}$; dùng khảo sát hàm số có thể thấy rằng $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$: $g_{max} = g(0) = 1$; do vậy với $t \neq 0$, có :

$$(1+t)e^{-t} < 1$$

Thay t bởi $\pm x^2$, ta được hai bất đẳng thức

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ và } (1+x^2)e^{-x^2} < 1$$

Suy ra $$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

Từ đó :

Với $0 < x < 1$ có $e^{-nx^2} > (1-x^2)^n$

Với $x > 0$ có $e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Do đó :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Mặt khác

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}} I \text{ (đổi biến } u = \sqrt{n}x\text{)}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

(đổi biến x = cost và công thức (7.44)) và cuối cùng

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}$$

(đổi biến x = cotgt và công thức (7.44)).

Từ các bất đẳng thức tích phân và các đẳng thức trên suy ra :

$$\sqrt{n}.\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}.\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.\frac{\pi}{2}$$

Do đó bình phương bất đẳng thức kép trên, được :

$$\frac{n}{2n+1}.\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.\frac{1}{2n+1} < I^2 < \frac{n}{2n-1}.\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(2n-1)$$

Bây giờ dùng công thức Wallis (xem bài tập số 10 chương này) :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.\frac{1}{2n+1}$$

ta suy ra hai vế trái và phải của bất đẳng thức kép trên dần tới $\frac{\pi}{4}$ khi $n \to \infty$, do đó :

$$I^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ vậy } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (vì } I > 0).$$

TÓM TẮT CHƯƠNG 7

• *Định nghĩa tích phân xác định*

Định nghĩa

Cho hàm số f(x) xác định trong [a, b], chia [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia :

$$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n \equiv b$$

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Lấy ξ_i bất kì $\in [x_{i-1}, x_i]$, lập $f(\xi_i)$, khi đó nếu $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$ (hữu hạn), thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) lấy trong [a, b], kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Khi đó, nói rằng hàm f(x) khả tích trong [a, b].

Đặt : $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$; $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \; ; \; S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ thì}$$

Điều kiện ắt có và đủ để f(x) khả tích trong [a, b] là :

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

Từ điều kiện trên suy ra :

Nếu f(x) liên tục trong [a, b] thì f(x) khả tích trong [a, b].

Ngoài ra :

Nếu f(x) bị chặn trong [a, b] và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trong [a, b] ; hoặc f(x) bị chặn và đơn điệu trong [a, b] thì f(x) khả tích trong [a, b]. Các tính chất của tích phân xác định.

Tính chất 1.

$$\int_a^b C.f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \text{ C là hằng số, đặc biệt}$$

$$\int_a^b C.dx = C\int_a^b 1.dx = C(b-a)\text{, C là hằng số ;}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Tính chất 2.

Cho 3 khoảng đóng [a, b], [a, c] và [c, b] ; nếu f(x) khả tích trên khoảng có độ dài dài nhất thì cũng khả tích trên hai khoảng còn lại và :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tính chất 3. (Trong tính chất này a < b).

1) Nếu $f(x) \geq 0, x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$;

2) Nếu $f(x) \leq g(x), x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

3) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] $\Rightarrow |f(x)|$ khả tích trên [a, b] và $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$;

4) Nếu $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ thì : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Tính chất 4.

1) Định lí trung bình thứ nhất :

Giả sử f(x) khả tích trên [a, b], ($a \leq b$) và giả sử $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$, khi đó tồn tại $\mu : m \leq \mu \leq M$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Đặc biệt, nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

2) Định lí trung bình thứ hai :

Giả sử • f(x) và tích f(x) . g(x) khả tích trên [a, b]

• $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$

• g(x) không đổi dấu trong [a, b].

Khi đó, tồn tại $\mu : m \le \mu \le M$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Đặc biệt nếu f(x) liên tục trong [a, b] thì tồn tại c sao cho :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \ ; \ a \le c \le b.$$

• *Cách tính tích phân xác định*

Định lí :

1) Nếu f(x) khả tích trên [a, b] thì Φ(x) liên tục đối với $x \in [a, b]$; trong đó

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

2) Nếu f(t) liên tục tại t = x thì Φ(x) có đạo hàm tại t = x và $\Phi'(x) = f(x)$

3) Nếu f(x) liên tục trong [a, b] và nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x), $x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Công thức trên thường gọi là công thức Newton–Leibnitz.

• *Phép đổi biến trong tích phân xác định*

Đổi biến $x = \varphi(t)$:

Giả sử f(x) liên tục trong [a, b], giả sử phép đổi biến $x = \varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện :

1) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục, $t \in [\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;

3) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên nhưng không ra ngoài khoảng liên tục của hàm số f(x). Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Đổi biến $t = \varphi(x)$.

Giả sử f(x) liên tục trong [a, b], và giả sử phép đổi biến $t = \varphi(x)$ thoả mãn :

1) $\varphi(x)$ biến thiên đơn điệu trên [a, b] và $\varphi(x)$ có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục, $x \in [a, b]$;

2) f(x)dx trở thành g(t)dt, trong đó g(t) là một hàm liên tục trong $[\varphi(a), \varphi(b)]$.

Khi đó thì :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

• *Phép lấy tích phân từng phần*

Giả sử u(x), v(x) là hai hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trong [a, b], khi đó có

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

• *Một công thức thường dùng*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, \text{ với n chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{(n)!!}, \text{ với n lẻ} \end{cases}$$

• *Tính gần đúng tích phân xác định*

Công thức hình thang :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right] = I_T$$

trong đó :

$$h = \frac{b-a}{n} \ ; \ y_i = f(x_i) \ ; \ x_i = a + ih \ ; \ i = \overline{i, n}$$

Sai số $\delta_T = |I - I_T|$ thoả bất đẳng thức :

$$\delta_T \le \frac{M_2}{12} h^2 (b-a)$$

với $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Công thức Simpson :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})] = I_s$$

trong đó :

$$h = \frac{b-a}{2n} \ ; \ y_i = f(x_i) \ ; \ x_i = a + ih \ ; \ i = \overline{0, 2n}$$

sai số $\delta_S = |I - I_s|$ thoả bất đẳng thức

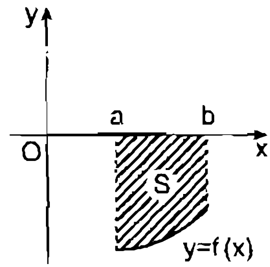
$$\delta_s \le \frac{M_4}{180} h^4 (b-a) \text{ với } M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

• *Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định*

Tính diện tích hình phẳng

Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng x = a, x = b, y = 0 và cung của đồ thị hàm số liên tục y = f(x), x ∈ [a, b] được tính theo công thức (hình 7.22)

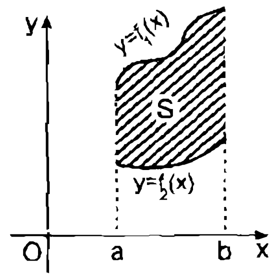
$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$



Hình 7.22

Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng x = a, x = b, $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai hàm liên tục, x ∈ [a, b] (hình 7.23) thì diện tích S được tính theo công thức

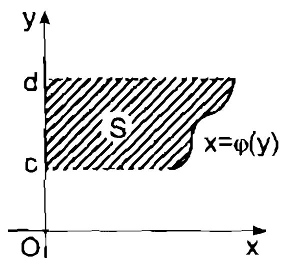
$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$



Hình 7.23

Tương tự, nếu phương trình đường cong cho dưới dạng x = φ(y), φ(y) liên tục trong [c, d] (hình 7.24) thì diện tích S được tính theo công thức

$$S = \int_c^d |\varphi(y)|dy$$



Hình 7.24

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

thì diện tích S được tính theo công thức

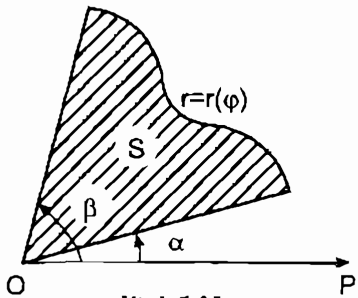
$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)|dt$$

trong đó t_1, t_2 lần lượt là nghiệm của các phương trình

$$a = \varphi(t_1) \; ; \; b = \varphi(t_2).$$

Cuối cùng, khi đường cong cho trong hệ tọa độ cực $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, diện tích S giới hạn bởi các tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ và cung đường cong liên tục $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, thì S được tính theo công thức (hình 7.25)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$



Hình 7.25

Tính độ dài đường cong phẳng

Độ dài s của cung đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục $x \in [a, b]$ được tính theo công thức

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Trường hợp đường cong cho dưới dạng tham số

$$x = x(t), \; y = y(t) \; ; \; t \in [\alpha, \beta]$$

thì dùng công thức : $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$

Trường hợp đường cong cho trong hệ toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \; ; \; \varphi \in [\alpha, \beta]$$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Tính thể tích của vật thể

Giả sử biết diện tích S(x) của thiết diện của vật thể trên mặt phẳng vuông góc với trục Ox thì thể tích V của vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng x = a và x = b, a < b (hình 7.15), được tính theo công thức

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Đặc biệt, khi vật thể là vật thể tròn xoay tạo bởi hình thang cong AabB giới hạn bởi đường y = f(x), x ∈ [a, b] trục Ox ; các đường thẳng x = a ; x = b khi hình thang cong này quay quanh trục Ox thì thể tích V của vật thể tròn xoay được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Tương tự, nếu hình thang cong quay quanh trục Oy có công thức

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

Diện tích xung quanh mặt tròn xoay

Gọi S là diện tích xung quanh của mặt tròn xoay tạo bởi cung đồ thị hàm số y = f(x), x ∈ [a, b] khi cho cung đó quay quanh trục Ox thì S được tính theo công thức

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Nếu quay quanh trục Oy thì

$$S = 2\pi \int_c^d |\varphi(y)| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\, dy$$

• *Hai sơ đồ ứng dụng tích phân*

Trong kỹ thuật, kinh tế khi cần tính một đại lượng A(x) phụ thuộc đại lượng x khác, người ta thường dùng tích phân xác định dưới dạng sơ đồ tích phân hoặc sơ đồ vi phân.

Sơ đồ tích phân :

1) Chia [a, b] thành n khoảng nhỏ :

$$x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \equiv b.$$

2) Phân tích A(x) thành tổng của n số hạng

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

A_i là đại lượng A tương ứng khi $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

3) Tìm một hàm f(x) sao cho có thể biểu diễn gần đúng

$$A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \,;\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

4) Thế A(x) bởi $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-i}$

5) Dùng định nghĩa tích phân xác định, viết $A = \int\limits_a^b f(x)dx$

Sơ đồ vi phân :

1) Lấy $x \in [a, b]$, lập $x + dx$.

2) Tính giá trị A tại x và tại x + dx.

3) Tìm phần chính bậc nhất dA của ΔA : $\Delta A = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$

4) Lấy tích phân của dA từ a đến b :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

• *Tích phân suy rộng*

Trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn

Giả sử hàm số f(x) xác định với mọi $x \geq a$ và khả tích trong bất kì khoảng hữu hạn [a, A], khi đó nếu

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx = I \text{ (hữu hạn)}$$

thì I được gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trong khoảng [a, +∞) và kí hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$:

$$I = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Khi đó, cũng nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ*.

Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn I thì nói rằng tích phân $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *phân kì*.

Tương tự $$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx := \lim_{A'\to+\infty}\int_{A'}^{a} f(x)dx,\ A' < a$$

và $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A\to+\infty}}\int_{A'}^{A} f(x)dx$$

Dấu hiệu hội tụ : (tiêu chuẩn so sánh)

Cho f(x), g(x) là hai hàm số dương khả tích trên [a, + ∞), khi đó nếu tồn tại c > a sao cho f(x) ≤ g(x) ; x ∈ [c, +∞) thì :

(1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

(2) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng tính chất.

Hệ quả.

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ và nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ và nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Trường hợp hàm số lấy tích phân không bị chặn

Giả sử hàm số f(x) bị chặn và khả tích trong khoảng đóng bất kì $[a, b-\eta]$, với $0<\eta<b-a$ nhưng không khả tích trong bất kì khoảng đóng dạng $[b-\eta, b]$, $f(b-0)$ không bị chặn, và b được gọi là một *điểm bất thường* của hàm số f(x). Khi đó, nếu

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx = I \text{ (hữu hạn)}$$

thì nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ hội tụ và viết

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx := \lim_{\eta\to 0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$$

Nếu không tồn tại giới hạn I thì nói rằng tích phân suy rộng $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ phân kì.

Tương tự, có thể định nghĩa tích phân suy rộng khi nút trái a của khoảng (a, b] là điểm bất thường, hoặc khi hàm số f(x) có điểm bất thường tại x = c với $c \in (a, b)$.

• *Dấu hiệu hội tụ* (tiêu chuẩn so sánh).

(1) Cho f(x), g(x) là hai hàm số không âm, khả tích trên (a, b] với x = a là điểm bất thường và $f(x) \le g(x)$, $x \in (a, c]$, $a < c < b$.

Khi đó

Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kì.

(2) Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng tính chất.

• *Hệ quả.*

Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ và nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kì.

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa tính các tích phân :

1. $\int_1^2 e^x dx$; 2. $\int_a^b \frac{1}{x^2}dx$, $0 < a < b$; 3. $\int_0^1 a^x dx$ $(a > 0)$

2. Ước lượng các tích phân :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}dx$; 2. $\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

3. Tính các đạo hàm

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt$; 2. $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_x^y e^{t^2}dt$; 3. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

4. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định tìm các giới hạn :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha}+\dfrac{1}{n\alpha+\beta}+\dfrac{1}{n\alpha+2\beta}+\ldots+\dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right]$, $(\alpha>0, \beta>0)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right)$

5. Tìm các giới hạn :

1. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x(\operatorname{arctg}t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$

6. Có thể dùng công thức Newton–Leibnitz để tính các tích phân sau đây được không ? Tại sao ?

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$; 2. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{1-x^2}\,dx$; 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{(2+\operatorname{tg}^2x)\cos^2x}$

7. Tính các tích phân :

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$; 2. $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ nếu $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 2-x & \text{khi } 1<x\le 2\end{cases}$

3. $\int_0^1 \sqrt{9-4x^2}\,dx$;

4. $\int_0^1 (x^3-2x+5)e^{-\frac{x}{2}}\,dx$;

5. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$;

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4\theta d\theta$;

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx dx$

8. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục trên [0, 1] thì :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

2. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

9. Thực hiện phép đổi biến $t = x + \frac{1}{x}$, tính tích phân

$$I := \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

10. Từ công thức tính $J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ (thí dụ (b) mục 6) và từ bất đẳng thức hiển nhiên (?) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} xdx$$

chứng minh rằng :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

(Công thức Wallis).

11. Chứng minh rằng nếu f(x) là một hàm số liên tục trên **R**, tuần hoàn, có chu kì T thì với mọi a, luôn có

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

12. Tính tích phân

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \text{ trong đó } f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$$

13. Cho f(x), g(x) là hai hàm số khả tích trên [a, b], giả sử $f^2(x)$, $g^2(x)$ và f(x)g(x) cũng khả tích trên [a, b]. Chứng minh bất đẳng thức (với a < b)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)\left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy – Schwartz).

14. Dùng công thức hình thang và công thức Simpson, tính gần đúng các tích phân sau và so sánh kết quả :

1. $I = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ (chia [2, 5] thành 6 khoảng bằng nhau),

2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x}\, dx$ (chia $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ thành 10 khoảng bằng nhau).

15. Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi

1. Đường cong $y = x^2$ và các đường thẳng $x = 0$, $y = 4$;

2. Đường parabôn $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$;

3. Parabôn bậc ba $y = x^3$ và các đường thẳng $y = x$, $y = 2x$;

4. Đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$ và parabôn $y^2 = 2x$;

5. Đường hình tim $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

16. Tìm thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 = a^2$ và $y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.

17. Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt parabôlôit $z = 4 - y^2$; các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng $x = a$.

18. Tìm thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường :

1. $y^2 + x - 4 = 0$ khi quay quanh trục Oy ;

2. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 4$ khi quay quanh Ox ;

3. $y = x^2$, $y = 4$ khi quay quanh đường thẳng $x = -2$.

19. Tìm độ dài của đường cong :

1. $9y^2 = 4(3 - x^2)$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Oy ;

2. $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Ox.

20. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường axtơrôit

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t\ (a > 0).$$

khi quay quanh trục Oy.

21. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$; 2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos x dx$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

4. $\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

6. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

7. $\int_{0}^{1} x \ln^2 x dx$;

8. $\int_{-2}^{2} \frac{sx}{x^2-1}$

22. Xét sự hội tụ của các tích phân sau :

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$,

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$,

3. $\int_{1}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$,

4. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$,

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$,

6. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{tgx - x}$,

7. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$,

8. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{\sin x} - 1}$

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

1. 1. $e(e-1)$; 2. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; 3. $\frac{a-1}{\ln a}$

2. 1. $\frac{\pi}{2} \le \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx \le \frac{e\pi}{2}$;

2. $|I| < 10^{-1}$; chú ý $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 10^{-2}$, $x \in [10, 18]$

3. 1. $-e^{x^2}$; 2. e^{y^2} ; 3. $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$

4. 1. $\dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\alpha+\beta x}$; Tổng S_n được viết dưới dạng

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+\beta/n} + \frac{1}{\alpha+2\beta/n} + \ldots + \frac{1}{\alpha+(n-1)\beta/n}\right]$$

và xét hàm khả tích $f(x) = \dfrac{1}{\alpha+\beta x}$; 2. $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

3. $\dfrac{4}{e}$; Viết $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}} = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$

$u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}\dfrac{n+2}{n}\ldots\dfrac{2n}{n}} = \sqrt[n]{\prod\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}$, hệ thức này gợi ý

$\sum f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ và dẫn đến

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}\sum f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ với } f(x) := \ln(1+x),$$

$$\lim u_n = \int_0^1 \ln(1+x)dx .$$

5. 1. 1 ; 2. $\dfrac{\pi^2}{4}$

6. 1. Không, hàm số không xác định tại $x = 0$; 2. Không, hàm số không xác định khi $x > 1$; 3. Được.

7. 1. $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$; 2. $\dfrac{5}{6}$; 3. $\dfrac{9}{4}\arcsin\dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;

4. $98 - \frac{156}{\sqrt{e}}$; 5. $\frac{\pi}{16}$; 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7. $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$; 8. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$;

9. 0 ; 10. $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (xem bài tập **2.** 11 chương 6).

8. 1. Thực hiện đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$; 2. Thực hiện đổi biến $x = \pi - t$.

9. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}} - e^2$. Viết $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{1}^{2}$; $t = x + \frac{1}{x}$, t nghịch biến khi $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$;

t đồng biến khi $x \in [1, 2]$.

$$x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right] : dx = \frac{\sqrt{t^2 - 4} - t}{2\sqrt{t^2 - 4}} dt \ ;$$

$$x \in [1, 2] : dx = \frac{\sqrt{t^2 - 4} + t}{2\sqrt{t^2 - 4}} dt$$

10. Từ công thức tính J_n và từ bất đẳng thức kép suy ra

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

suy ra
$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

suy ra
$$\frac{1}{(2n+1)2n}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

11. Viết $\int_a^{a+T} = \int_a^0 + \int_0^T + \int_T^{a+T}$ và với tích phân thứ ba, thực hiện phép biến đổi $x = t + T$ rồi dùng tính tuần hoan của f.

12. $\operatorname{arctg}\frac{32}{27} - 2\pi$

13. Với các hằng số α, β bất kì, có

$$\int_a^b(\alpha f + \beta g)^2 dx = \alpha^2\int_a^b f^2 dx + 2\alpha\beta\int_a^b fg dx + \beta^2\int_a^b g^2 dx \geq 0$$

vì $(\alpha f + \beta g)^2 \geq 0$; $a < b$: Bất đẳng thức được suy từ tính chất không âm của một tam thức bậc hai đối với α (hoặc β) có hệ số bình phương không âm.

14. 1. 2,59 ; 2. 0,950

15. 1. $\frac{16}{3}$; 2. $\frac{1}{6}$; 3. $\frac{3}{4}$; 4. 0,95 ; 5. a^2

16. $\frac{16}{3}a^3$

17. $\frac{16}{3}a$

18. 1. $34\frac{2}{15}\pi$; 2. 12π ; 3. $\frac{128\pi}{3}$

19. 1. $\frac{28}{3}$; 2. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

20. $\frac{12}{5}\pi a^2$

21. 1. -1, 2. Phân kì, 3. $\frac{\pi}{2}$, 4. $\frac{256}{15}$, 5. π, 6. Phân kì, 7. $\frac{1}{4}$, 8. Phân kì.

22. 1. Phân kì, 2. Hội tụ, 3. Hội tụ, 4. Phân kì, 5. Hội tụ, 6. Phân kì, 7. Phân kì, 8. Hội tụ.

Chương 8

CHUỖI

8.1. Đại cương về chuỗi số

8.1.1. *Định nghĩa*

Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Biểu thức

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

được gọi là *chuỗi số* và được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Các số $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ được gọi là các *số hạng* của chuỗi số, u_n với n tổng quát được gọi là *số hạng tổng quát*. Tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi số. Nếu S_n dần tới một giới hạn hữu hạn S khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và có tổng S*. Hiệu $R_n = S - S_n$ được gọi là *phần dư* thứ n của chuỗi số. Nếu chuỗi số hội tụ thì $R_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Nếu S_n không dần tới một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, ta nói rằng chuỗi số *phân kì*.

Ví dụ. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$. Đó là một cấp số nhân vô hạn có công bội q. Với $q \neq 1$, $S_n = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Nếu $|q| < 1$ thì $|q|^n \to 0$ khi $n \to \infty$, do đó $S_n \to \dfrac{a}{1-q}$, khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số hội tụ và có tổng $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Nếu $|q| > 1$ thì $|q|^n \to \infty$ khi $n \to \infty$, do đó $S_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số phân kì.

Nếu $q = 1$, $S_n = na$, $S_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kì. Nếu $q = -1$, chuỗi số có dạng $a - a + a - a + \ldots$ Vì $S_n = 0$ khi n chẵn, $S_n = a$ khi n lẻ, S_n không dần đến một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kì.

Tóm lại, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ hội tụ nếu $|q| < 1$, phân kì nếu $|q| \geq 1$.

8.1.2. *Điều kiện ắt có của chuỗi số hội tụ*

Định lí 8.1. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì số hạng tổng quát* u_n *của nó dần tới 0 khi* $n \to \infty$.

Thật vậy, $S_n = S_{n-1} + u_n$, do đó $u_n = S_n - S_{n-1}$. Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n với S_{n-1} cùng dần tới một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, do đó $u_n = S_n - S_{n-1}$ dần tới 0 khi $n \to \infty$.

Điều kiện $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$ chỉ là điều kiện ắt có, chứ không là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Chẳng hạn, xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ được gọi là chuỗi điều hoà. Số hạng tổng quát của nó $u_n = \frac{1}{n}$ dần tới 0 khi $n \to \infty$, nhưng chuỗi số ấy phân kì. Thật vậy

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n và S_{2n} cùng dần tới một giới hạn khi $n \to \infty$, tức là $\lim_{n \to \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$, điều này mâu thuẫn với $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$.

Từ định lí trên suy ra rằng nếu u_n không dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì. Chẳng hạn chuỗi số $1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{6} + \dots + \frac{n+1}{2n} + \dots$ phân kì vì số hạng tổng quát $u_n = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} \neq 0$ khi $n \to \infty$.

8.1.3. *Tiêu chuẩn Cauchy*

Định lí 8.2. Điều kiện ắt có và đủ để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ là với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ ta có $|S_p - S_q| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} u_n \right| < \varepsilon$.

Thật vậy, chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng S_n hội tụ. Theo tiêu chuẩn Cauchy của dãy số hội tụ (mục 1.3.4), điều này xảy ra khi và chỉ khi với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được số nguyên dương n_0 sao cho khi $p > q \geq n_0$ ta có

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Đối với chuỗi điều hoà, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ta thấy rằng điều kiện của định lí Cauchy không được thoả mãn vì không thể xảy ra bất đẳng thức $|S_{2n} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| < \varepsilon$, nên chuỗi điều hoà phân kì.

8.1.4. *Vài tính chất đơn giản của chuỗi số hội tụ*

a) *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và có tổng S thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$, *trong đó α là một hằng số, cũng hội tụ và có tổng αS.*

b) *Nếu các chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ và có tổng theo thứ tự là S, S' thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *cũng hội tụ và có tổng S + S'.*

c) *Tính hội tụ hay phân kì của một chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên.*

Thật vậy, gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ bằng $\sum_{k=1}^{n} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k = \alpha S_n$, tổng này dần tới αS khi $n \to \infty$.

Tính chất a) đã được chứng minh. Bạn đọc tự chứng minh các tính chất b) và c). ■

8.2. Chuỗi số dương (hay chuỗi sô có số hạng dương)

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số dương. Vì $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, $u_{n+1} > 0$, ta có $S_{n+1} > S_n$. Vậy $\{S_n\}$ là một dãy số tăng.

Do đó nếu dãy số $\{S_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại $\lim_{n \to \infty} S_n$, chuỗi số hội tụ, còn nếu dãy số $\{S_n\}$ không bị chặn thì $S_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kì.

8.2.1. *Các định lí so sánh*

Định lí 8.3. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Giả sử* $u_n \leq v_n$, $\forall n \geq n_0 \in \mathbf{N}$. *Khi đó nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ ; nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kì.*

Thật vậy, do tính chất c) của chuỗi số đã nêu ở mục 8.1.4, ta có thể xem như $n_0 = 1$. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Vì $u_k \leq v_k$, $\forall k \geq 1$ nên $S_n \leq S'_n$. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng S' thì $S'_n \leq S'$, do đó $S_n \leq S'$. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ vì có tổng riêng S_n bị chặn trên. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$, do đó $\lim_{n \to \infty} S'_n = +\infty$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì. ■

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot 3^n}$ hội tụ, vì ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{n} \cdot 3^n} \le \frac{1}{3^n}$, $\forall n \ge 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ hội tụ.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ phân kì, vì $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 1$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Định lí 8.4. Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

(8.1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k > 0,$$

thì hai chuỗi số ấy đồng thời hội tụ hay phân kì.

Thật vậy, do (8.1) bắt đầu từ một số hạng nào đó trở đi

$$\frac{k}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3k}{2}$$

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì vì $u_n < \frac{3k}{2} v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Còn nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì vì $u_n > \frac{k}{2} v_n$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng hội tụ. ■

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ phân kì vì $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ vì $\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$ khi $n \to \infty$ và chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

8.2.2. *Các quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi số*

Quy tắc D'Alembert. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu*

(8.2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

thì chuỗi số hội tụ khi $l < 1$, phân kì khi $l > 1$.

Thật vậy, giả sử $l < 1$. Chọn ε khá bé để $l + \varepsilon < 1$. Vì $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$,

tồn tại số nguyên dương n_0 để cho với $n > n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$$

Cũng có thể xem như $n_0 = 1$. Khi đó

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_2}{u_1} \cdot u_1 \leq (l + \varepsilon)^{n-1} . u_1$$

Vì $l + \varepsilon < 1$, chuỗi có số hạng tổng quát $(l + \varepsilon)^{n-1} . u_1$ hội tụ, do đó theo định lí so sánh 1 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nếu $l > 1$, từ một số hạng nào đó trở đi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ do đó $u_{n+1} > u_n$, số hạng tổng quát không dần đến 0 khi $n \to \infty$. Chuỗi số phân kì. ■

Ví dụ. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{\alpha}}{n^n}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[(n+1)!]^{\alpha}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n!)^{\alpha}} = \frac{(n+1)^{\alpha} n^n}{(n+1)(n+1)^n} = (n+1)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Khi $n \to \infty$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e}$, do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{1}{e}(n+1)^{\alpha-1}$. Do đó nếu $\alpha > 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, chuỗi số phân kì. Nếu $\alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, chuỗi số hội tụ. Nếu $\alpha = 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{e} < 1$ khi $n \to \infty$, chuỗi số hội tụ. Vậy chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi $\alpha \leq 1$.

Quy tắc Cauchy. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu*

(8.3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

thì chuỗi số hội tụ khi $l < 1$, phân kì khi $l > 1$.

Bạn đọc tự chứng minh quy tắc này.

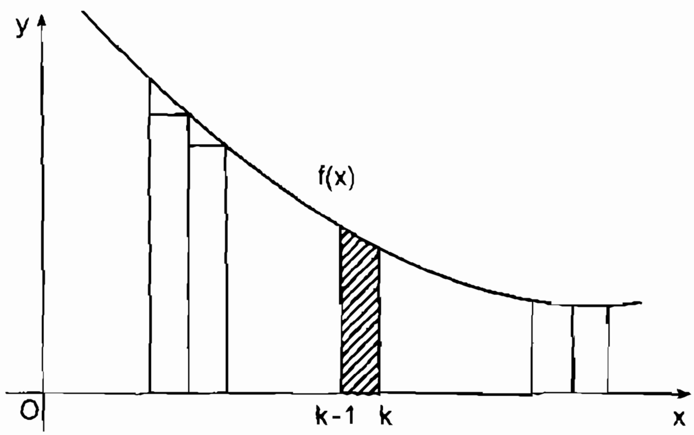
Ví dụ. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}\alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Ta có $\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}}\sin^2\alpha$, nhưng $n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2\ln n}{n}} \to 1$ khi $n \to \infty$. Vậy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 2\sin^2\alpha$. Nếu $\sin^2\alpha < \frac{1}{2}$, tức là $\alpha < \frac{\pi}{4}$, chuỗi hội tụ.

Nếu $\sin^2\alpha > \frac{1}{2}$ tức là $\alpha > \frac{\pi}{4}$, chuỗi phân kì. Nếu $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$, tức là $\alpha = \frac{\pi}{4}$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, nó hội tụ.

Quy tắc so sánh với tích phân. Giả sử hàm số f(x) liên tục, dương, giảm trên khoảng (1, +∞) và dần tới 0 khi x → +∞. Khi đó tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *trong đó* $u_n = f(n)$, *cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

Thật vậy, chia khoảng $(1, +\infty)$ bởi những điểm chia có hoành độ nguyên. Vì f(x) giảm nên $\forall x \in [k-1, k]$ ta có $f(k) \le f(x) \le f(k-1)$, do đó

$$u_k = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx = u_{k-1}$$



Hình 8.1

Bất đẳng thức kép đó đúng với mọi $k \ge 2$. Cộng các bất đẳng thức kép ứng với $k = 2, 3, ..., n$, ta có

$$u_2 + u_3 + ... + u_n \le \int_1^n f(x)dx \le u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Đặt $I_n = \int_1^n f(x)dx$, ta có

$$S_n - u_1 \le I_n \le S_n - u_n$$

Giả sử tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức là tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim_{n \to \infty} I_n$. Khi ấy $I_n \le I$, do đó $S_n \le I + u_1$. Vì dãy các tổng riêng thứ n bị chặn trên nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Nếu tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kì, tức là nếu $I_n \to +\infty$ khi $n \to \infty$ thì vì $S_n \ge I_n + u_n > I_n$, nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì. ■

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, α là một hằng số. Chuỗi đó được gọi là chuỗi Riemann. Ta so sánh nó với tích phân $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Ta biết rằng tích phân ấy hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$ (mục 7.9), nên chuỗi Riemann hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kì khi $\alpha \le 1$.

8.3. Chuỗi có số hạng với dấu bất kì

8.3.1. *Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ*

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với các số hạng u_n có dấu bất kì.

Định lí 8.5. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

Thật vậy, vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy (định lý 8.2), với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $n_0 \in \mathbf{N}^*$ sao cho khi $p > q \geq n_0$ ta có

$$\sum_{n=q+1}^{p} |u_n| < \varepsilon$$

Do đó
$$\left|\sum_{n=q+1}^{p} u_n\right| \leq \sum_{n=q+1}^{p} |u_n| < \varepsilon.$$

Vì vậy, cũng theo định lí 8.2, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_r$ hội tụ. ■

Ví dụ. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$. Lập chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$. Vì $\frac{|\cos n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ và vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (chuỗi Riemann, $\alpha = 2$) hội tụ, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi đang xét hội tụ.

Chú thích 1. Điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ chỉ là điều kiện đủ để chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ, chứ không phải là điều kiện ắt có. Như sẽ thấy ở dưới đây, có thể chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì.

Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ, là *bán hội tụ* nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì.

Chú thích 2. Nếu dùng quy tắc D'Alembert hay quy tắc Cauchy mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kì thì có thể khẳng định rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kì. Thật vậy, khi ấy $|u_n|$ không dần tới 0 khi $n \to \infty$, do đó u_n cũng thế, vậy chuỗi số phân kì.

8.3.2. *Chuỗi số đan dấu*

Theo định nghĩa, đó là chuỗi số có dạng $\pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots)$ trong đó $u_1, u_2, u_3 \dots$ là những số dương. Rõ ràng ta chỉ cần xét chuỗi số đan dấu với số hạng đầu tiên dương : $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$

Định lí 8. 6 (Leibniz). Nếu dãy số dương $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ giảm và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi số đan dấu $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \dots$ hội tụ và có tổng bé thua u_1.

Chứng minh. Nếu n là số chẵn, n = 2m, ta có

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

Vì dãy số $\{u_n\}$ giảm nên S_{2m} tăng khi m tăng. Mặt khác

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

do đó $S_{2m} < u_1$. Vậy dãy số $\{S_{2m}\}$ tăng và bị chặn trên, nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$, với $S \le u_1$.

Nếu n lẻ, n = 2m + 1, ta có $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Vì $u_{2m+1} \to 0$ khi $m \to \infty$ nên

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} = S$$

Vậy chuỗi số đan dấu hội tụ và có tổng bé thua u_1. ■

Ví dụ. Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Nó thoả các điều kiện của định lí Leibniz, nên nó hội tụ, nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi số điều hòa, nó phân kì.

Vậy chuỗi số đang xét bán hội tụ.

8.3.3. *Vài tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối*

Ta biết rằng tổng của một số hữu hạn số hạng có tính giao hoán và tính kết hợp : nó không thay đổi khi ta đổi thứ tự của các số hạng của nó hay khi ta nhóm một số số hạng lại một cách tuỳ ý trước khi cộng. Nhưng điều đó không còn đúng nữa đối với các chuỗi số hạng có dấu bất kì.

Ví dụ 1. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Ta đã biết chuỗi đó hội tụ, gọi S là tổng của nó :

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ cũng hội tụ và có tổng $\frac{S}{2}$:

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots$$

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]$ cũng hội tụ và có tổng $\frac{3S}{2}$:

$$\frac{3S}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Nhưng chuỗi ở vế phải lại suy ra được từ chuỗi xuất phát bằng cách đổi thứ tự của các số hạng. Vậy khi ta đổi thứ tự các số hạng của nó, tổng của nó đã thay đổi.

Ví dụ 2. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, đó là một chuỗi đan dấu bán hội tụ. Viết nó dưới dạng

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)+\ldots$$

Gọi v_p là số hạng tổng quát $\left(\frac{1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{1}{\sqrt{4p-1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)$.

Ta có khi $p \to \infty$

$$v_p \sim \frac{2}{\sqrt{4p}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Do đó chuỗi số $\sum_{p=1}^{\infty} v_p$ phân kì (chuỗi Riemann với $\alpha=\frac{1}{2}$).

Vậy tính hội tụ của chuỗi đã thay đổi khi ta đổi thứ tự các số hạng và nhóm các số hạng lại.

Tuy nhiên tính giao hoán và tính kết hợp vẫn đúng đối với các chuỗi số hội tụ tuyệt đối. Người ta đã chứng minh được các tính chất sau đây :

Tính chất 1. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S thì chuỗi số suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng và bằng cách nhóm tuỳ ý một số số hạng lại cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là S.

Còn nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ thì ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của nó để chuỗi số thu được hội tụ và có tổng bằng một số bất kì cho trước hoặc trở nên phân kì.

Định nghĩa. Giả sử cho hai chuỗi số hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Người ta gọi *tích* của chúng là chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, trong đó $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{n-k}$

Tính chất 2. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S và S' thì tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.S'.

8.4. Dãy hàm số

8.4.1. *Các định nghĩa*

Định nghĩa 1. Giả sử $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ là một dãy các hàm số xác định trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}$. Điểm $x_0 \in X$ được gọi là *điểm hội tụ* của dãy hàm số ấy nếu dãy số $\{f_n(x_0)\}$ hội tụ. Tập hợp những điểm hội tụ của dãy hàm số $\{f_n\}$ được gọi là *tập hợp hội tụ* của nó.

Như vậy, nếu dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ tới hàm số f trên tập hợp X, thì tại mỗi điểm $x \in X$, với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tìm được một số $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

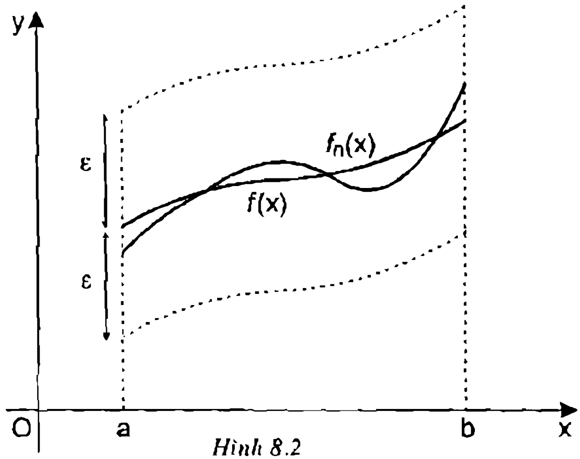
$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Số n_0 phụ thuộc ε và nói chung phụ thuộc x. Trong trường hợp số n_0 chỉ phụ thuộc ε mà không phụ thuộc $x \in X$, ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều trên X tới hàm số f.

Định nghĩa 2. Dãy hàm số $\{f_n\}$ được gọi là *hội tụ đều trên X* tới hàm số f nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tìm được một số $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Về mặt hình học, dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên đoạn [a, b] tới f nếu đồ thị của các hàm số $f_n(x)$ với mọi $n \geq n_0$ đều nằm trong "dải" ε bao quanh đồ thị của hàm số f(x) trên đoạn [a, b] (hình 8.2).



Hình 8.2

Ví dụ. Xét dãy hàm số $\{f_n\}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n$. Nếu $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Nếu $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$. Nếu $x = 1$, thì $x^n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. Nếu $x = -1$, không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$. Vậy tập hợp hội tụ của dãy hàm số $\{f_n\}$ là khoảng (−1, 1]. Trên khoảng ấy

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n\} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } -1 < x < 1 \\ 1 \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$$

Dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ tới 0 trên khoảng [0, 1), nhưng không hội tụ đều trên khoảng ấy, vì với mọi số $n \in \mathbf{N}$, luôn tìm được $x \in [0, 1)$ sao cho

$$|x^n - 0| = |x|^n > \frac{1}{2}.$$

Nhưng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều tới 0 trên mọi đoạn [0, a] với a < 1. Thật vậy, cho trước số $\varepsilon < 0$, luôn tìm được số $n_0 \in \mathbf{N}$, sao cho $a^{n_0} < \varepsilon$. Khi đó ta có $\forall x \in [0, a]$, $\forall n \geq n_0$

$$|x^n - 0| = |x|^n \leq a^{n_0} < \varepsilon$$

8.4.2. *Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ đều*

Định lí 8.7. Dãy các hàm số xác định trên tập hợp X $\{f_n\}$ hội tụ đều trên X khi và chỉ khi với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tìm được số $n_0 \in \mathbf{N}$, *sao cho*

(*) $m \geq n_0,\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X$

Chứng minh. Giả sử dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên X tới f. Khi đó tồn tại số $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in X$$

Do đó nếu $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in X$$

Vì vậy ta có $\forall x \in X,\ \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Đảo lại, giả sử dãy hàm số $\{f_n\}$ thoả mãn điều kiện (*). Khi đó với mỗi x cố định $\in X$, dãy $\{f_n(x)\}$ là một dãy Cauchy, do đó nó hội tụ. Ta kí hiệu $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Hàm số f xác định trên X.

Trong điều kiện (*), cố định $x \in X$ và $n \geq n_0$ cho $m \to \infty$, ta được

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in X,\ \forall n \geq n_0.$$

Vậy dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều tới f trên X. ■

8.4.3. *Các tính chất của dãy hàm số hội tụ đều*

Định lí 8.8. Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy các hàm số liên tục trên khoảng I. Nếu dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên I tới hàm số f thì f là một hàm số liên tục trên I.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$, sao cho với $x \in I$, $x + h \in I$,

$$|h| < \delta \Rightarrow |f(x + h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ta có

$$|f(x + h) - f(x)| \le |f(x + h) - f_n(x + h)| + |f_n(x + h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Vì dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều tới f trên I nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $n \ge n_0$ kéo theo

$$|f(x + h) - f_n(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Hàm số f_n liên tục trên I, nên tìm được số $\delta > 0$ sao cho

$$|h| \le \delta \Rightarrow |f_n(x + h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Do đó $\qquad |h| \le \delta \Rightarrow |f(x + h) - f(x)| < \varepsilon.$ ■

Chú thích. Từ định lí 1 suy ra rằng nếu dãy hàm số $\{f_n\}$ liên tục trên I hội tụ tới một hàm số gián đoạn trên đó thì sự hội tụ đó không đều.

Trở lại ví dụ trong mục 8.4.1. Dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định bởi $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n$, hội tụ trên đoạn $[0, 1]$ tới hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ nếu } x = 1 \end{cases}$$

Hàm số ấy gián đoạn, nên sự hội tụ trên không đều.

Định lí 8.9. Giả sử các hàm số f_n liên tục trên $[a, b]$, dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$ tới f. Khi đó với $x_0 \in [a, b]$,

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \text{ *hội tụ đều trên* } [a, b] \text{ *tới* } \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Đặc biệt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Chứng minh. Hàm số giới hạn f(x) liên tục trên [a, b] theo định lí 1, nên nó khả tích trên đó. Ta có $\forall x \in [a, b]$

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} [f_n(t) - f(t)]dt\right| \le \int_{x_0}^{x} \max_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| dt .$$

Vì $\{f_n\}$ hội tụ đều trên [a, b] tới f nên với mọi số $\varepsilon > 0$, luôn tìm được $n_o \in N$, sao cho

$$n \ge n_o \Rightarrow \max_{a \le t \le b} |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Do đó $$n \ge n_o \Rightarrow \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \blacksquare$$

Định lí 8.10. Giả sử các hàm số f_n có đạo hàm liên tục trên [a, b], dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ trên [a, b] tới f, dãy hàm số $\{f'_n\}$ hội tụ đều trên [a, b] tới g. Khi đó f có đạo hàm trên [a, b] và $f'(x) = g(x)$

Chứng minh. Các hàm số f'_n liên tục trên [a, b], dãy $\{f'_n\}$ hội tụ đều trên [a, b] tới g, do đó theo định lí 8.9 ta có với $x \in [a, b]$, $x_o \in [a, b]$

$$\lim_{n \to \infty}\left[\int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt\right] = \int_{x_0}^{x} g(t)dt .$$

Nhưng $$\lim_{n \to \infty}\left[\int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt\right] = \lim_{n \to \infty}\left[f_n(x) - f_n(x_o)\right] = f(x) - f(x_o).$$

Vậy $$f(x) - f(x_o) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Do đó f(x) khả vi trên [a, b] và $f'(x) = g(x)$. $\blacksquare$

8.5. Chuỗi hàm số

8.5.1. *Hội tụ và hội tụ đều*

Xét chuỗi

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

mà các số hạng u_n là những hàm số xác định trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}$. Gọi S_n là tổng riêng thứ n của nó.

Định nghĩa 1. Chuỗi hàm số (**) được gọi là *hội tụ tại điểm* $x_o \in X$ nếu dãy hàm số $\{S_n\}$ hội tụ tại điểm x_o, được gọi là *hội tụ trên tập hợp X* nếu nó hội tụ tại mọi điểm của X. Giới hạn S của dãy $\{S_n\}$ được gọi là *tổng của chuỗi hàm số.*

Ví dụ 1. Chuỗi hàm số $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ là một cấp số nhân vô hạn có công bội x, nó hội tụ nếu $|x| < 1$.

Vậy chuỗi hàm số ấy hội tụ với mọi $x \in (-1, 1)$ và có tổng $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, do đó

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... , -1 < x < 1.$$

Ví dụ 2. Xét chuỗi hàm số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$. Ta có

$$\frac{|\sin nx|}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbf{R}$$

mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (chuỗi Riemann, $\alpha = 2$) hội tụ, vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 3. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ hội tụ khi $x > 1$, phân kì khi $x \le 1$.

Vậy tập hội tụ của nó là khoảng $(1, +\infty)$.

Ví dụ 4. Xét chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Rõ ràng nó hội tụ tại $x = 0$.

Nếu $x \neq 0$, ta áp dụng quy tắc D'Alembert vào chuỗi có các số hạng dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}\, n!}{(n+1)!\,|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Vậy chuỗi hàm số đang xét hội tụ tuyệt đối $\forall x \in \mathbf{R}$.

Định nghĩa 2. Chuỗi hàm số (**) được gọi là *hội tụ đều trên X* nếu dãy hàm số $\{S_n\}$ hội tụ đều trên X. Nói cách khác, chuỗi hàm số (**) hội tụ đều trên X và có tổng là S nếu với mọi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$n \ge n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Ví dụ. Xét chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$. Đó là một chuỗi đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nên nó hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Phần dư thứ n của nó cũng là một chuỗi số đan dấu nên có tổng về trị tuyệt đối bé thua trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên của nó, tức là

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n+1}$$

Nếu $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ tức là nếu $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ thì $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Vậy có thể chọn $n_o = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, phần nguyên của $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, rõ ràng n_o không phụ thuộc $x \in \mathbf{R}$. Do đó chuỗi hàm số đang xét hội tụ đều trên **R**.

8.5.2. *Tiêu chuẩn hội tụ đều của chuỗi hàm số*

Từ tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ đều của dãy hàm số, ta suy ra :

Tiêu chuẩn Cauchy. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập X khi và chỉ khi với mọi số $\varepsilon > 0$, tìm được số nguyên n_o sao cho khi $p > q > n_o$ ta có*

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Tiêu chuẩn Weierstrass. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. *Nếu ta có $|u_n(x)| \le a_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in X$ và nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi hàm số đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên X.*

Chứng minh. Định lí so sánh áp dụng vào hai chuỗi có số hạng dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cho ta thấy rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối trên X. Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, theo định lí Cauchy, với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được n_o sao cho khi $p > q > n_o$ ta có

$$\sum_{n=q+1}^{p} a_n < \varepsilon.$$

Do đó

$$|S_p(x) - S_q(x)| = |u_{q+1}(x) + \dots + u_p(x)| \le |u_{q+1}(x)| + \dots + |u_p(x)| \le$$
$$\le a_{q+1} + \dots + a_p < \varepsilon.$$

Vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên X theo tiêu chuẩn Cauchy của chuỗi hàm số hội tụ đều. ■

Ví dụ 1. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên **R** vì ta có

$$\frac{|\cos nx|}{n^2 + x^2} \le \frac{1}{n^2}, \forall n, \forall x \in \mathbf{R}$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ (chuỗi Riemann, $\alpha = 2$).

Ví dụ 2. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[-1, 1]$, vì ta có

$$\frac{|x|^n}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n, \forall x \in [-1, 1]$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ (chuỗi Riemann, $\alpha = \frac{3}{2}$).

8.5.3. *Tính chất của các chuỗi hàm số hội tụ đều*

Từ các tính chất của dãy hàm số hội tụ đều, ta suy ra các tính chất sau đây của chuỗi hàm số hội tụ đều.

Ta biết rằng tổng của một số hữu hạn các hàm số liên tục là một hàm số liên tục, đạo hàm (tích phân) của tổng của một số hữu hạn hàm số bằng tổng đạo hàm (tích phân) của mỗi số hạng. Đối với các chuỗi hàm số, các tính chất ấy nói chung không còn đúng nữa, nhưng các tính chất ấy vẫn đúng đối với các chuỗi hàm số hội tụ đều.

Định lí 8.11. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu* các số hạng u_n *đều liên tục trên khoảng I, chuỗi hàm số hội tụ đều trên I thì tổng của nó cũng liên tục trên I.*

Từ định lí này ta thấy rằng : Nếu chuỗi hàm số có các số hạng liên tục mà hội tụ tới một hàm số gián đoạn trên X thì chuỗi hàm số ấy hội tụ không đều trên X.

Ví dụ. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^n$ hội tụ khi $|1-x| < 1$, tức là khi $0 < x < 2$. Với $x = 0$ chuỗi hàm số đã cho hội tụ và có tổng $S(0) = 0$. Với $0 < x < 2$, $S(x) = x\dfrac{1}{1-(1-x)} = 1$ (cấp số nhân). Vậy chuỗi hàm hội tụ trên khoảng [0, 2) tới một hàm gián đoạn

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ khi } x = 0 \\ 1 \text{ khi } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Vậy chuỗi hàm hội tụ không đều trên khoảng [0, 2).

Định lí 8.12. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Nếu các số hạng* u_n *đều liên tục trên [a, b] và nếu chuỗi hàm số hội tụ đều trên đoạn đó tới S(x) thì*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx .$$

Chứng minh. S(x) là tổng của một chuỗi hàm số hội tụ đều trên [a, b] có các số hạng liên tục trên đó, do vậy S(x) liên tục trên [a, b], nên S(x) khả tích trên [a, b]. Xét hiệu

$$\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b [S(x) - S_n(x)]dx .$$

Vì chuỗi hàm số hội tụ đều trên [a, b], nên $\forall\varepsilon > 0$, tìm được số n_0 dương sao cho khi $n > n_0$

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \forall x \in [a, b].$$

Do đó $$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.$$

Vậy $$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_a^b u_k(x)dx\right]$$

$$= \int_a^b u_1(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots . \blacksquare$$

Định lí 8.13. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ trên (a, b) tới S, các số hạng* u_n *liên tục cùng với đạo hàm của chúng trên (a, b). Khi đó nếu chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ *hội tụ đều trên (a, b) thì tổng S khả vi trên (a, b) và ta có*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Ví dụ. Xét chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$. Đặt $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$. Vì $|u_n(x)| \le \frac{1}{n^3}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n$, mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ hội tụ nên chuỗi hàm số hội tụ tuyệt đối và đều trên **R**. Gọi S(x) là tổng của nó. S(x) là một hàm số liên tục vì là tổng của một chuỗi hàm số hội tụ đều mà các số hạng đều liên tục trên **R**. Theo định lí 8.12

$$\int_0^{\pi} S(x)dx = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4}$$

Vì $u'_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ mà chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ hội tụ đều trên **R**,

nên theo định lí 8.13 ta có $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$

8.6. Chuỗi luỹ thừa

8.6.1. *Chuỗi luỹ thừa. Bán kính hội tụ*

Ta gọi *chuỗi luỹ thừa* là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n +$$

Vấn đề cơ bản đầu tiên khi khảo sát một chuỗi hàm số là xác định tập hội tụ của nó.

Định lí 8.14 (Abel). Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$.

Thật vậy, chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ, nên số hạng tổng quát $a_n x_0^n$ dần đến 0 khi $n \to \infty$, do đó $a_n x_0^n$ bị chặn, tức là $\left|a_n x_0^n\right| \leq M, \forall n$, với một số dương M nào đó. Ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

Vì $\left|a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, áp dụng định lí so sánh vào hai chuỗi có số hạng dương $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$, ta suy ra chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi x thoả mãn $|x| < |x_0|$. ■

Hệ quả. Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kì tại* $x = x_1$ *thì nó phân kì tại mọi x thỏa mãn* $|x| > |x_1|$.

Thật vậy, nếu nó hội tụ tại $x = x_2$ với $|x_2| > |x_1|$ thì theo định lí Abel nó sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi x mà $|x| < |x_2|$, đặc biệt nó hội tụ tại $x = x_1$, điều này trái với giả thiết. ■

Rõ ràng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ luôn hội tụ tại x = 0. Từ định lí Abel, suy ra rằng tồn tại một số $R (0 \le R < +\infty)$ sao cho chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối trong khoảng (−R, R) và phân kì trong các khoảng (−∞, −R) và (R, +∞). Tại x = −R và x = R chuỗi luỹ thừa có thể hội tụ, có thể phân kì. Số R đó được gọi là *bán kính hội tụ*, khoảng (−R, R) được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Muốn tìm tập hội tụ của chuỗi luỹ thừa, ta tìm bán kính hội tụ, tức là khoảng hội tụ của nó, rồi khảo sát sự hội tụ của nó tại hai mút.

8.6.2. *Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa*

Định lí 8.15. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ *(hoặc* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$*) thì bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *được xác định bởi*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } \rho = 0 \end{cases}$$

Chứng minh. Xét chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Áp dụng quy tắc D'Alembert, ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.|x| = \rho.|x|$

Nếu $0 < \rho < +\infty$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ, tức là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối nếu $\rho|x| < 1$, do đó $|x| < \frac{1}{\rho}$. Nếu $\rho|x| > 1$, tức là $|x| > \frac{1}{\rho}$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ phân kì vì số hạng tổng quát $|a_n x^n|$ của nó không dần tới 0 khi $n \to \infty$, do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì. Vậy trong trường hợp này $R = \frac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = +\infty$, $\forall x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = +\infty$. Vậy chuỗi luỹ thừa phân kì tại mọi $x \neq 0$, do đó $R = 0$.

Nếu $\rho = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = 0 < 1$, chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối tại mọi x, do đó $R = +\infty$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. ■

Ví dụ 1. Xét chuỗi luỹ thừa $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, do đó $R = 1$. Chuỗi đã cho hội tụ trong khoảng $(-1, 1)$. Tại $x = 1$, ta có chuỗi số $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ đó là chuỗi số điều hoà, nó phân kì. Tại $x = -1$, ta có chuỗi số $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$ đó là chuỗi số đan dấu thoả mãn các điều kiện của định lí Leibniz, nó hội tụ. Do đó tập hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $-1 \leq x < 1$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi luỹ thừa $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Do đó $R = +\infty$, chuỗi luỹ thừa hội tụ trên toàn **R**.

Ví dụ 3. Xét chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Vậy $R = 1$, chuỗi luỹ thừa hội tụ khi $|x| < 1$, phân kì khi $|x| > 1$.

Khi $x = 1$, ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \neq 0$ khi $n \to \infty$, vậy chuỗi số phân kì.

Khi $x = -1$, ta có chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, số hạng tổng quát của nó không dần tới 0 khi $n \to \infty$, chuỗi số phân kì. Tóm lại chuỗi hàm số đã cho có tập hội tụ là $(-1, 1)$.

8.6.3. *Tính chất của chuỗi luỹ thừa*

Tính chất 1. Chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] nằm trong khoảng hội tụ của nó.*

Thật vậy, lấy một số dương $x_0 < R$, trong đó R là bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa, sao cho đoạn $[-x_0, x_0]$ chứa đoạn [a, b]. Vì $x_0 \in (-R, R)$

nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|$ hội tụ. Với mọi $x \in [a, b]$, ta có $\left|a_n x^n\right| \le \left|a_n x_0^n\right|, \forall n$.

Theo định lí Weierstrass, chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên [a, b]. ■

Từ tính chất 1 vừa chứng minh và các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều suy ra các tính chất sau đây của chuỗi luỹ thừa.

Tính chất 2. Tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.*

Chú thích. Nếu chuỗi luỹ thừa hội tụ tại cả một trong hai mút của khoảng hội tụ thì tổng của nó liên tục một phía tại mút ấy.

Tính chất 3. Có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *trên mọi đoạn [a, b] nằm trong khoảng hội tụ của nó :*

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx$$

Đặc biệt ta có $\forall x \in (-R, R)$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots,$$

chuỗi này cũng có khoảng hội tụ là (–R, R).

Tính chất 4. Có thể lấy đạo hàm từng số hạng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tại mọi điểm nằm trong khoảng hội tụ của nó :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,$$

chuỗi này cũng là chuỗi luỹ thừa có khoảng hội tụ là (–R, R), Lại áp dụng tính chất 4 vào chuỗi luỹ thừa này, ta có

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' = 2a_2 + 3.2a_3x + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} + ...$$

Áp dụng tiếp tục tính chất 4, ta thấy rằng có thể lấy đạo hàm từng số hạng mọi chuỗi luỹ thừa vô số lần trong khoảng hội tụ của nó.

8.6.4. *Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa*

Dễ dàng thấy rằng chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-1, 1)$; tổng của nó là $\frac{1}{1-x}$, đó là một hàm số sơ cấp. Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào hàm số $f(x)$ có thể khai triển thành một chuỗi luỹ thừa.

• Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong lân cận ấy, tức là

$$(8.4)\quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...,$$

trong đó $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ là những hằng số. Theo tính chất 4 của chuỗi luỹ thừa, ta có

$$(8.5)\begin{cases} f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... + \\ \qquad\qquad + na_n(x - x_0)^{n-1} + ... \\ f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x - x_0) + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ... \\ .... \\ f^{(n)}(x) = n!a_n + ... \\ .... \end{cases}$$

Thế $x = x_0$ vào các đẳng thức trên, ta có

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, ...,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, ...$$

Vậy ta có

$$(8.6)\quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Chuỗi luỹ thừa đó được gọi là *chuỗi Taylor* của hàm số f(x) ở lân cận điểm x_0. Nếu $x_0 = 0$, ta có

$$(8.7)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Chuỗi luỹ thừa này được gọi là *chuỗi Mac Laurin* của hàm số f(x).

Tóm lại, nếu hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp và có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa trong một lân cận nào đó của điểm x_0 thì chuỗi luỹ thừa đó phải là chuỗi Taylor của hàm số đó trong lân cận ấy.

• Bây giờ ta xét xem nếu hàm số f(x) có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0, thì với điều kiện nào tổng của chuỗi Taylor của nó bằng f(x). Nếu chuỗi Taylor của hàm số f(x) hội tụ và có tổng bằng f(x), ta nói rằng f(x) đã được khai triển thành chuỗi Taylor. Vậy ta cần tìm điều kiện để có thể khai triển hàm số f(x) thành chuỗi Taylor.

Theo công thức Taylor ở chương 5, nếu hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp (n + 1) ở lân cận điểm x_0 thì

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

trong đó $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ξ là một điểm nào đó giữa x_0 và x. Nếu f(x) có đạo hàm mọi cấp ở lân cận điểm x_0 thì có thể lấy n trong công thức Taylor lớn bao nhiêu cũng được.

Định lí 8.16. Giả sử trong một lân cận nào đó của điểm x_0 hàm số có đạo hàm mọi cấp. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *trong đó*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ξ là một điểm nào đó giữa x_0 và x thì có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

Thật vậy, vì $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$; nên $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$, do đó

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Trong thực hành, khi khai triển một số hàm số sơ cấp ta thường dùng kết quả sau đây.

Định lí 8.17. Nếu trong một lân cận nào đó của điểm x_0 hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp, trị số tuyệt đối của mọi đạo hàm đó đều bị chặn bởi cùng một số trong lân cận ấy, thì có thể khai triển $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong đó.

Thật vậy, với mọi x trong lân cận ấy ta có

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \ \forall n \in \mathbf{N}$$

trong đó M là một hằng số dương nào đó. Do đó

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}.$$

Nhưng vì chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ với mọi x (xem ví dụ 2, mục 8.5.2 chương này), nên $\frac{x^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $\frac{\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

khi $n \to \infty$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Theo định lí 8.16, f(x) có thể khai triển được thành chuỗi Taylor trong một lân cận của x_0.

8.6.5. *Khai triển một số hàm số sơ cấp thành chuỗi luỹ thừa*

• $f(x) = e^x$

Tại mọi $x \in \mathbf{R}$, hàm số e^x có đạo hàm mọi cấp và các đạo hàm ấy đều bằng e^x, do đó

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

Vậy chuỗi Mac Laurin của hàm số $f(x) = e^x$ có dạng

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Giả sử A là một số dương bất kì. Ta có $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in (-A, A)$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^A = M$$

Do đó theo định lí 8.17 hàm số $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Mac Laurin trong lân cận $(-A, A)$ của điểm $x_0 = 0$. Nhưng vì A là số bất kì, nên hàm số e^x có thể khai triển được thành chuỗi Mac Laurin $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{8.8}$$

• $f(x) = \sin x$

Ta có $$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ do đó}$$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}$$

Vậy hàm số sinx có thể khai triển được thành chuỗi Mac Laurin với mọi x. Vì $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$, ..., ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \tag{8.9}$$

$$-\infty < x < +\infty$$

• $f(x) = \cos x$

Tương tự như trên, ta được

$$(8.10) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

• $f(x) = (1 + x)^\alpha$, α là một số thực bất kì.

Ta có $f(0) = 1$,

$$f'(0) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\big|_{x=0} = \alpha,$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1),$$

....

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$$

Do đó chuỗi Mac Laurin của hàm số $(1 + x)^\alpha$ có dạng

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Để tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa đó, ta tính

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1.$$

Vậy chuỗi luỹ thừa này hội tụ khi $|x| < 1$. Người ta chứng minh được rằng trong khoảng hội tụ ấy, chuỗi Mac Laurin của hàm số $(1 + x)^\alpha$ hội tụ về chính hàm số ấy. Vậy

$$(8.11) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \; -1 < x < 1.$$

• $f(x) = \ln(1 + x)$

Ta có $f'(x) = (1 + x)^{-1}$, ta lấy tích phân từng số hạng chuỗi luỹ thừa ấy từ 0 đến x, ta được

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^x = \ln(1+x) =$$

$$= \int_0^x dx - \int_0^x xdx + \int_0^x x^2dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \ldots$$

$$(8.12)\ \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ -1 < x < 1$$

• $f(x) = \text{arctg}x$

Vì $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$

ta có

$$(8.13)\qquad \text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Vì chuỗi luỹ thừa này cũng hội tụ tại $x = \pm 1$, nên khai triển trên đúng trên đoạn $[-1, 1]$.

8.6.6. *Công thức Euler*

Công thức (8.8) khai triển hàm số mũ $x \mapsto e^x$ thành chuỗi luỹ thừa cho phép ta mở rộng định nghĩa hàm số mũ vào mặt phẳng phức.

Chuỗi hàm số

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

hội tụ tại mọi $z \in \mathbf{C}$, tổng của nó theo định nghĩa là hàm số mũ $z \mapsto e^z$.

Với $z = x \in \mathbf{R}$, $e^z = e^x$

Với $z = ix$, $x \in \mathbf{R}$, ta có

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \dots + \frac{i^nx^n}{n!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots +$$

$$+ i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right]$$

Vậy

(8.14) $$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Do đó

(8.15) $$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Từ đó

(8.16) $$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Các công thức (8.14), (8.15), (8.16) được gọi là *công thức Euler*.

8.6.7. *Ứng dụng chuỗi luỹ thừa để tính gần đúng*

• *Tính xấp xỉ giá trị của hàm số tại một điểm*

Giả sử cần tính giá trị của hàm số f(x) tại một điểm trong một lân cận nào đó của x_0 và giả sử trong lân cận ấy

(8.17) $$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Nếu ta tính xấp xỉ f(x) bởi tổng của (n + 1) số hạng đầu của chuỗi (8.17) thì sai số phạm phải là

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|$$

ξ nằm giữa x và x_0. Công thức đó cho ta cách xác định n để phép tính xấp xỉ trên đạt độ chính xác yêu cầu.

Ví dụ. Tính số e với độ chính xác 0,00001.

Ta có e = f(1), với $f(x) = e^x$. Nếu dùng công thức xấp xỉ

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

thì sai số phạm phải là

$|R_n(1)| = \dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ với $0 \le \xi \le 1$, do đó $|R_n(1)| < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Để đạt độ chính xác 0,00001, chỉ cần xác định n sao cho $\dfrac{3}{(n+1)!} < 0{,}00001$.

Thử trực tiếp ta thấy rằng, chỉ cần lấy n = 8. Vậy

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2{,}718278$$

• *Tính xấp xỉ tích phân*

Nếu hàm số f(x) có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa trên một khoảng nào đó thì $\int f(x)dx$ cũng có thể khai triển luỹ thừa trên khoảng ấy.

Ví dụ. Xét hàm số $f(x) = e^{-x^2}$. Ta có $\forall x \in \mathbf{R}$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Do đó

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots$$

và ta có

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{1!3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} - \frac{1}{3!7.2^7} + \ldots$$

Vế phải là một chuỗi số đan dấu thoả các điều kiện của định lí Leibniz. Nếu ta giữ ba số hạng đầu để tính xấp xỉ thì sai số phạm phải bé thua trị tuyệt đối của số hạng thứ tư :

$$\frac{1}{3!7.2^7} = \frac{1}{5370} < 0{,}001$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2!5.2^5} = 0{,}4644$$

với độ chính xác 0,001.

8.7. Chuỗi Fourier

Trong cơ học, vật lí, kĩ thuật điện, ... ta thường gặp những hiện tượng tuần hoàn. Chúng được mô tả bởi những hàm số tuần hoàn (xem mục 2.5 chương 2). Những hàm số tuần hoàn đơn giản nhất là những hàm số

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),\ n = 1, 2, ...,$$

chúng biểu diễn những dao động điều hoà với biên độ A_n, chu kì $T = \frac{2\pi}{n\omega}$.

Nếu cho một hàm số g(t) tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$, có thể khai triển nó dưới dạng

$$g(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

được không ? Đặt $\omega t = x$, ta có $g(t) = g\left(\frac{x}{\omega}\right) := f(x)$. Khi đó f(x) là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, khai triển trên có dạng

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trong đó $a_o = 2A_o$, $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = B_n \cos\varphi_n$.

8.7.1. *Chuỗi lượng giác*

Người ta gọi *chuỗi lượng giác* là chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{8.18}$$

trong đó $a_0, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ là những hằng số. Số hạng tổng quát $u_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$ là một hàm số tuần hoàn chu kì $\frac{2\pi}{n}$, liên tục và khả vi mọi cấp. Nếu chuỗi (8.18) hội tụ thì tổng của nó là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π. Ta có

$$|u_n(x)| \le |a_n| + |b_n|,\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Nếu $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ là những dãy số sao cho

(8.19) Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ thì theo định lí Weierstrass chuỗi lượng giác (8.18) hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbf{R}$.

Tuy nhiên điều kiện (8.19) không phải là điều kiện ắt có để chuỗi (8.18) hội tụ. Có thể chứng minh rằng nếu các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ giảm đơn điệu và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi (8.18) hội tụ tại $x \neq 2k\pi$. Thật vậy, với $x = 2k\pi$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx = 0$. Xét $x \neq 2k\pi$. Đặt

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$. Ta có

$$2\sin\frac{x}{2}S_n = \sum_{k=1}^{n} 2b_k\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]b_k$$

$$= b_1\cos\frac{x}{2} - b_n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1})\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

Nhưng $\left|b_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \le b_n$, mà $b_n \to 0$ khi $n \to \infty$, còn

$$\sum_{k=2}^{n}\left|(b_k - b_{k-1})\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right| < \sum_{k=2}^{n}|b_k - b_{k-1}| =$$

$$= -\sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1}) = b_1 - b_n \to b_1 \text{ khi } n \to \infty$$

vì $\{b_n\}$ giảm đơn điệu và dần tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy

$$\sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1})\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

hội tụ có thể trừ tại $x = 2k\pi$.

8.7.2. *Chuỗi Fourier*

• *Bổ đề*. Với mọi p, k ∈ **Z** ta có các hệ thức

(8.20) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0$$

(8.21) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0 \text{ nếu } k \neq 0$$

(8.22) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin px dx = 0$$

(8.23) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos px dx = \begin{cases} 0 \text{ nếu } k \neq p \\ \pi \text{ nếu } k = p \neq 0 \end{cases}$$

(8.24) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin px dx = \begin{cases} 0 \text{ nếu } k \neq p \\ \pi \text{ nếu } k = p \neq 0 \end{cases}$$

Bằng cách dùng các công thức lượng giác

$$\cos kx \sin px = \frac{1}{2}[\sin(p+k)x + \sin(p-k)x]$$

$$\cos kx \cos px = \frac{1}{2}[\cos(k+p)x + \cos(p-k)x]$$

$$\sin kx \sin px = \frac{1}{2}[\cos(k-p)x - \cos(k+p)x]$$

$$\cos^2 kx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kx)$$

$$\sin^2 kx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2kx)$$

bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng các công thức (8.20) – (8.24).

• Giả sử hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2π, khả tích trên $[-\pi, \pi]$, có thể khai triển được trên đoạn $[-\pi, \pi]$ thành chuỗi lượng giác dạng

(8.25) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Để tính a_0, ta hãy lấy tích phân từ $-\pi$ đến π của chuỗi hàm ở vế phải của (8.25) và để ý đến các hệ thức (8.20), (8.21) ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0$$

Do đó

(8.26) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Nhân hai vế của (8.25) với $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}$, rồi lấy tích phân hai vế của đẳng thức nhận được từ $-\pi$ đến π và để ý đến các công thức (8.22), (8.23) ta có được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k$$

Do đó

$$(8.27)\qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx\,,\ k = 1, 2, \ldots$$

Để tính b_k, ta nhân hai vế của (8.25) với sinkx, rồi lấy tích phân hai vế của đẳng thức nhận được từ $-\pi$ đến π, để ý đến các công thức (8.22), (8.24), ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi b_k$$

Do đó

$$(8.28)\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k = 1, 2, \ldots$$

Các hệ số a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... được xác định theo các công thức (8.26), (8.27), (8.28) được gọi là các *hệ số Fourier* của hàm số f(x). Chuỗi lượng giác (8.25) trong đó các hệ số được xác định bởi (8.26), (8.27), (8.28) được gọi là chuỗi Fourier của f(x).

Nếu f(x) là một hàm số chẵn thì f(x)coskx là chẵn, còn f(x)sinkx là lẻ, do đó

$$(8.29)\qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx\,,\ b_k = 0,\ \forall k \in \mathbf{N}$$

Cũng vậy, nếu f(x) là một hàm số lẻ thì f(x)coskx là lẻ, còn f(x)sinkx là chẵn, do đó

$$(8.30)\qquad a_k = 0,\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx\,,\ \forall k \in \mathbf{N}$$

Vấn đề còn lại bây giờ là xét xem với điều kiện nào chuỗi Fourier của hàm số f(x) hội tụ và có tổng bằng f(x), tức là với điều kiện nào hàm số f(x) có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

8.7.3. ***Điều kiện đủ để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier***

Định nghĩa. Hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ được gọi là *liên tục từng khúc* nếu có thể chia $[a, b]$ bởi một số hữu hạn điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ sao cho trên mỗi khoảng (x_{i-1}, x_i) hàm số f liên tục, có giới hạn phải hữu hạn tại x_{i-1} và giới hạn trái hữu hạn tại x_i. Nếu f biến thiên đơn điệu trên mỗi khoảng (x_{i-1}, x_i), ta nói rằng f *đơn điệu từng khúc*. Như vậy nếu f liên tục từng khúc hay nếu f đơn điệu từng khúc và bị chặn thì nó liên tục tại mọi điểm của $[a, b]$, trừ một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1.

Bổ đề 1. Nếu $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục từng khúc thì

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x)\cos\alpha x dx = 0, \quad \lim_{\alpha \to \infty} \int_a^b f(x)\sin\alpha x dx = 0$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh bổ đề này trong trường hợp f liên tục trên $[a, b]$. Khi đó f bị chặn trên $[a, b]$, tức là tồn tại số $M > 0$ sao cho $|f(x)| \le M$, $\forall x \in [a, b]$. Ngoài ra, f liên tục đều trên $[a, b]$, tức là với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại số $\delta > 0$, sao cho $\forall (x', x'') \in [a, b]^2$

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Chia đoạn $[a, b]$ bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, sao cho $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, \dots, n$. Khi đó

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x)\cos\alpha x dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\alpha x dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\cos\alpha x dx + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\alpha x dx$$

Do đó

$$|I(\alpha)| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| dx + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\alpha dx \right| \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\alpha x dx \right|$$

Vì với $\alpha > 0$, ta có

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\alpha x dx \right| = \left| \frac{1}{\alpha} (\sin\alpha x_i - \sin\alpha x_{i-1}) \right| \le \frac{2}{\alpha}$$

Do đó

$$|I(\alpha)| \le \frac{2Mn}{\alpha} + \varepsilon(b - a) < \varepsilon\,(1 + b - a) \text{ nếu } \alpha > \frac{2Mn}{\varepsilon}.$$

Vậy $I(\alpha) \to 0$ khi $\alpha \to 0$. Hệ thức sau được chứng minh tương tự. ■

Hệ quả. Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn $[a, b]$, a_n, b_n là các hệ số Fourier của nó, thì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Bổ đề 2. Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn, S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi Fourier của nó, thì

(8.31) $$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} du$$

Chứng minh. Ta có

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Áp dụng các công thức (8.26), (8.27), (8.28) ta được

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt + \sin kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt$$

Nhưng $$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Do đó $$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

Đổi $t - x = u$ trong tích phân ở vế phải, ta được

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du$$

Hàm số $u \mapsto f(x+u)\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}$ là tuần hoàn chu kì 2π, vì vậy

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du. \blacksquare$$

Hệ quả. ta có $\forall n \in \mathbf{N}$

(8.32) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du = 1$$

Thật vậy, áp dụng công thức (8.31) vào hàm số $x \mapsto f(x) = 1$. Các hệ số Fourier của nó là $a_0 = 2$, $a_n = b_n = 0\ \forall n \in \mathbf{N}^*$. Do đó $S_n(x) = 1$. ■

Định lí 8.18. Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π, khả vi thì chuỗi Fourier của nó hội tụ và có tổng bằng $f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh. Từ các công thức (8.31), (8.32), ta được

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+u) - f(u)\right]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu,$$

trong đó $$\varphi(u) = \frac{f(x+u) - f(u)}{\sin\frac{u}{2}}$$

Hàm số $u \mapsto \varphi(u)$ liên tục $\forall u \neq 0$, có điểm gián đoạn bỏ được tại $u = 0$, vì

$$\lim_{u\to 0}\varphi(u) = \lim_{u\to 0}\frac{f(x+u) - f(u)}{u}.2 = 2f'(x)$$

Do đó nó thoả mãn các điều kiện của bổ đề 1. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x) - f(x)\right] = \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu = 0. \ ■$$

Kết luận của định lí 8.18 còn đúng với những điều kiện rộng rãi hơn. Chúng ta thừa nhận định lí sau đây.

Định lí 8.19. Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, thoả mãn một trong hai điều kiện sau trên đoạn $[-\pi, \pi]$:

– hoặc f liên tục từng khúc và có đạo hàm f' liên tục từng khúc

– hoặc f đơn điệu từng khúc và bị chặn

Khi đó chuỗi Fourier của f hội tụ tại mọi điểm. Tổng S(x) của nó bằng f(x) tại những điểm liên tục của f. Tại điểm gián đoạn c của f, ta có

$$S(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}. \ ■$$

Các điều kiện nêu trong định lí này là điều kiện Dirichlet.

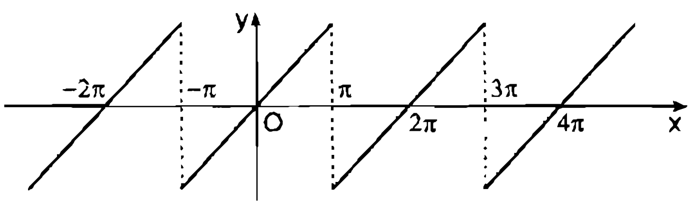
Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π, bằng x trên khoảng $(- \pi, - \pi)$.

Hàm số f(x) thoả mãn các điều kiện của định lí 8.19 nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. Vì f(x) lẻ, ta có

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2...$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]$$

$$= \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}, n = 1, 2, 3...$$



Hình 8.3

Vậy $\forall x \neq (2n + 1)\pi$

$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + ...$$

Chú ý rằng tại $x = \pi$, tổng của chuỗi bằng

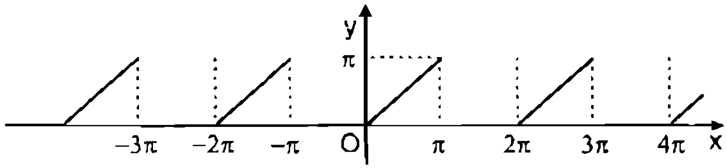
$$\frac{1}{2}[f(\pi + 0) + f(\pi - 0)] = 0,$$

tại $x = -\pi$ cũng vậy

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π, xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } -\pi \leq x < 0 \\ x \text{ nếu } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số được cho ở hình 8.4



Hình 8.4

Ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{nếu n lẻ} \\ 0 & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{nếu n lẻ} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

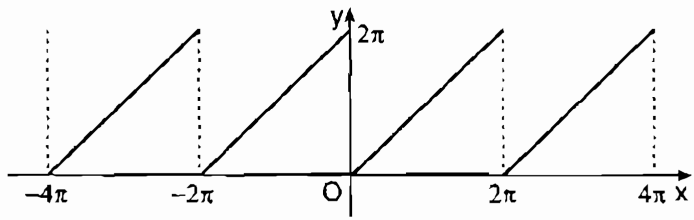
Vậy $\forall x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$$

Tại những điểm $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tổng của chuỗi bằng trung bình cộng của giới hạn phải và giới hạn trái, tức là bằng $\dfrac{\pi + 0}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 3. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π, biết rằng $f(x) = x$ khi $0 \le x \le 2\pi$.



Hình 8.5

Trước hết, ta nhận xét rằng nếu hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2π thì ta có

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \ \forall a \in \mathbf{R}$$

Do đó khi tính hệ số Fourier của một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, ta có thể thay khoảng lấy tích phân $[-\pi, \pi]$ bằng khoảng $[a, a + 2\pi]$, trong đó a là một số bất kì.

Đối với hàm số đã cho trong ví dụ này, đơn giản nhất là ta chọn khoảng lấy tích phân $[0, 2\pi]$. Ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

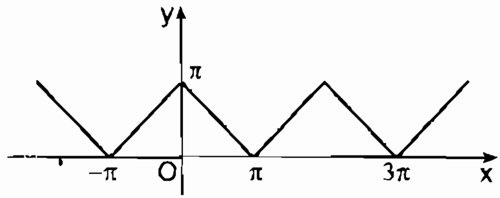
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

Do đó, $\forall x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

$$f(x) = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\right)$$

Tại các điểm $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, tổng của chuỗi hàm bằng π.

Ví dụ 4. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn, chu kì 2π, bằng $\pi - x$ với $0 \leq x \leq \pi$.



Hình 8.6

Vì f(x) chẵn nên $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$ ta có

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu chẵn} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{nếu lẻ} \end{cases}$$

Do đó $\forall x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \dots\right)$$

Chú ý rằng ta có $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}$

$$\frac{|\cos(2k+1)x|}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(2k+1)^2}$$

mà chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ hội tụ, nên chuỗi Fourier của hàm số f(x) hội tụ đều trên **R**.

Chú thích. Nếu hàm số f(x) tuần hoàn chu kì $2l$, thoả các giả thiết của định lí 8.19 trên đoạn $[-l, l]$, thì bằng phép đổi biến $x' = \frac{\pi}{l}x$ ta có $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) := F(x')$, F(x') là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, thoả các giả thiết của định lí 8.19 trên đoạn $[-\pi, \pi]$, nên khai triển được thành chuỗi Fourier

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx' + b_n\sin nx')$$

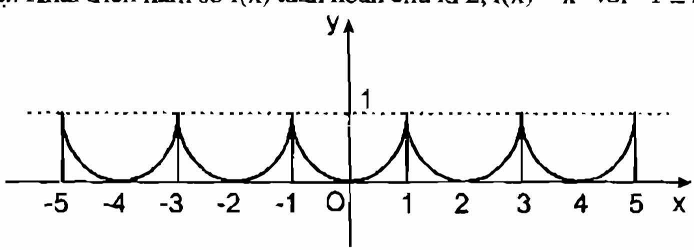
hay $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

trong đó $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)\cos nx'dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x'\right)\sin nx'dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,...$$

Ví dụ. Khai triển hàm số f(x) tuần hoàn chu kì 2, $f(x) = x^2$ với $-1 \le x \le 1$.



Hình 8.7

Vì f(x) là hàm chẵn, nên $b_n = 0$, n = 1, 2,...

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

Do đó $\forall x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - ...\right)$$

Công thức này đúng trên **R**.

8.7.4. *Khai triển một hàm số bất kì thành chuỗi Fourier*

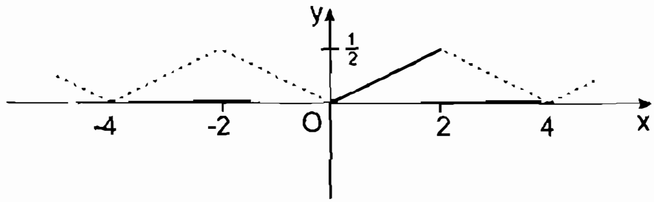
Giả sử f(x) là một hàm số thoả các giả thiết của định lí 8.19 trên đoạn [a, b]. Muốn khai triển f(x) thành chuỗi Fourier, ta xây dựng một hàm số tuần hoàn g(x) có chu kì lớn hơn hay bằng (b – a) sao cho

$$g(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$$

Nếu hàm số g(x) có thể khai triển được thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi đó bằng f(x) tại mọi điểm của [a, b], trừ tại những điểm gián đoạn của f(x). Rõ ràng có nhiều cách xây dựng hàm số g(x) như vậy. Với mỗi hàm số g(x), có một chuỗi Fourier tương ứng, do đó có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số f(x). Nếu hàm số g(x) chẵn, thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosin còn nếu g(x) lẻ thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số sin.

Ví dụ. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{x}{2}$ với $0 < x < 2$ thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin và thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin.

Muốn khai triển f(x) thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin, ta xây dựng hàm số g(x) chẵn, tuần hoàn với chu kì bằng 4, bằng $f(x) = \frac{x}{2}$ với $0 < x < 2$. Vì g(x) chẵn (hình 8.8), ta có



Hình 8.8

$b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = 1$$

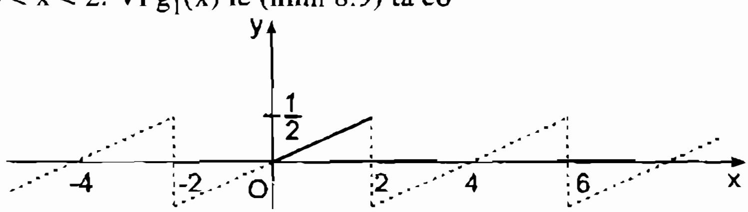
$$a_n = \int_0^2 \frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{nếu n chẵn} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{nếu n lẻ} \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vậy $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi x}{2} + \dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi x}{2} + \ldots\right)$

Hệ số của số hạng tổng quát của chuỗi hàm ấy là $-\dfrac{4}{(2k+1)^2}$ nên chuỗi hàm hội tụ đều trên **R**.

Muốn khai triển f(x) thành chuỗi Fourier theo họ các hàm sin, ta xây dựng hàm số $g_1(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì là 4, bằng $f(x) = \dfrac{x}{2}$ với $0 < x < 2$. Vì $g_1(x)$ lẻ (hình 8.9) ta có



Hình 8.9

$a_n = 0, n = 0, 1, 2,...$

$$b_n = \int_0^2 \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}, \quad n = 1, 2,...$$

Vậy $$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - ...\right)$$

8.7.5. *Đẳng thức Parseval*

Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π, thoả các giả thiết của định lí Jordan – Dirichlet. Khi đó ta có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trừ tại những điểm gián đoạn loại 1 của f(x). Bình phương hai vế, rồi lấy tích phân từ $-\pi$ đến π đẳng thức thu được. Người ta chứng minh được rằng với các giả thiết nêu trên, ta có thể nhân chuỗi Fourier của f(x) với chính nó, có thể lấy tích phân từng số hạng chuỗi hàm số ở vế phải. Để ý đến các công thức (8.22), (8.23), (8.24) ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4}.2\pi + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

hay

(8.33) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Đẳng thức đó được gọi là *Đẳng thức Parseval*.

8.7.6. *Dạng phức của chuỗi Fourier*

Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π, thoả các điều kiện của định lí Jordan – Dirichlet. Khi đó ta có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trừ tại những điểm gián đoạn loại 1 của f(x). Đặt

$$u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Áp dụng các công thức

$$u_n(x) = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}$$

Đặt $\alpha_o = \dfrac{a_o}{2}$

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ nếu } n \geq 1$$

$$\alpha_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \text{ nếu } n \leq -1.$$

Ta được $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$

Đó là dạng phức của chuỗi Fourier. Chú ý rằng $\alpha_{-n} = \overline{\alpha}_n$ trong đó $\overline{\alpha}_n$ và số phức liên hợp của α_n.

Nếu n nguyên dương, do các công thức (8.27), (8.28), ta được

$$\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Công thức ấy cũng đúng khi n = 0, vì $\alpha_o = \dfrac{a_o}{2}$

Nếu n nguyên âm, ta có

$$\alpha_n = \overline{\alpha}_{-n} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-nx)dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Vậy ta có $\forall n \in \mathbf{Z}$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

TÓM TẮT CHƯƠNG 8

Chuỗi số hội tụ

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là hội tụ nếu tổng riêng thứ n $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ dần tới một giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, là phân kì nếu nó không hội tụ.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Đó là điều kiện cần của sự hội tụ, nhưng điều kiện ấy không đủ.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ với $a \neq 0$ hội tụ nếu $|q| < 1$, phân kì nếu $|q| \geq 1$.

Chuỗi số có số hạng dương

– *Các định lí so sánh*

Giả sử $0 \leq u_n \leq v_n$ $\forall n \geq n_0$. Khi đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ ; nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

Giả sử $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$, trong đó $0 < k < +\infty$.

Khi đó hai chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hay cùng phân kì.

– *Các quy tắc khảo sát sự hội tụ*

Quy tắc D'Alembert. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n + 1}{u_n} = l$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi $l < 1$, phân kì khi $l > 1$.

Quy tắc Cauchy. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi $l < 1$, phân kì khi $l > 1$.

Quy tắc so sánh với tích phân. Giả sử hàm số f(x) liên tục lấy giá trị dương, giảm trên khoảng $[1, +\infty)$ và dần tới 0 khi $x \to +\infty$. Khi đó tích phân suy rộng $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, trong đó $u_n = f(n)$ cùng hội tụ hay cùng phân kì.

Chuỗi số với các số hạng có dấu bất kì

– *Hội tụ tuyệt đối*. Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Ta nói rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì, ta nói rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ.

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S thì chuỗi số mà ta được bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng của nó hoặc bằng cách nhóm tuỳ ý một số số hạng của nó cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ, ta có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi số thu được hội tụ và có tổng bằng một số bất kì cho trước hoặc phân kì.

– *Chuỗi số đan dấu.* Nếu dãy số dương $u_1, u_2, ..., u_n,...$ giảm dần và dần tới 0 khi $n \to \infty$ thì chuỗi số đan dấu

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...$$

hội tụ và có tổng bé thua u_1.

Dãy hàm số hội tụ

– Dãy hàm số $\{f_n(x)\}$ được gọi là hội tụ tới hàm số f(x) trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o (\varepsilon, x)$, sao cho

$$n \geq n_o \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nếu n_o không phụ thuộc $x \in X$, ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều trên X tới f(x).

– *Các tính chất của dãy hàm số hội tụ đều.*

Nếu trên khoảng I, các hàm số $f_n(x)$ liên tục và hội tụ đều tới f(x) thì

1) f(x) liên tục trên I

2) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \ \forall [a, b] \subset I$

Nếu các hàm số $f_n(x)$ khả vi trên I, dãy $\{f_n(x)\}$ hội tụ trên I tới f(x), dãy $\{f'_n(x)\}$ hội tụ đều trên I tới g(x) thì g(x) khả vi trên I và $g(x) = f'(x), \forall x \in I$.

Chuỗi hàm số hội tụ

– Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}$ nếu dãy hàm số $\{S_n(x)\}$, trong đó $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, hội tụ trên X, là hội tụ đều trên X nếu dãy hàm số $\{S_n(x)\}$ hội tụ đều trên X.

– Nếu $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in X$, $|u_n(x)| \le a_n$ và nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên X.

– *Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều.*

Nếu trên khoảng I, các hàm số $u_n(x)$ liên tục, chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên I thì

1) Tổng của chuỗi hàm số đó liên tục

2) $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$, $\forall [a,b] \subset I$

Nếu các hàm số $u_n(x)$ khả vi trên I, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ trên I, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên I, thì

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),\ \forall x \in I$$

Chuỗi luỹ thừa

– Là chuỗi hàm số có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Số $R \geq 0$ là bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nếu chuỗi ấy hội tụ tuyệt đối với $|x| < R$ và phân kì với $|x| > R$. Tại $x = \pm R$, chuỗi luỹ thừa có thể hội tụ hoặc phân kì.

Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$, hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ thì $R = \frac{1}{\rho}$.

– *Các tính chất*

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] nằm trong tập hợp hội tụ của nó.

Tổng của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là một hàm số liên tục trong tập hợp hội tụ của nó.

Có thể lấy tích phân từng số hạng một chuỗi luỹ thừa trên mọi đoạn nằm trong tập hợp hội tụ của nó :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

Có thể lấy đạo hàm từng số hạng mọt chuỗi luỹ thừa tại mọi điểm nằm trong tập hợp hội tụ của nó :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

– *Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa*

Ta nói rằng hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong một khoảng I nếu tìm được một chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trên I sao cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ \forall x \in I.$$

– *Khai triển thành chuỗi luỹ thừa một số hàm số thông dụng*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \ (R = \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \ (R = \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ (R = \infty)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (R = 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \ (R = 1)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \ (R = 1)$$

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \ (R = 1)$$

Công thức Euler

$$e^{ix} \cos x + i\sin x, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Chuỗi Fourier

– Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos x + b_n \sin x)$$

Nếu nó hội tụ, tổng của nó là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π.

Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ thì chuỗi lượng giác hội tụ đều trên **R**, tổng của nó là một hàm số liên tục trên **R**.

– Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, khả tích trên $[-\pi, \pi]$, thì các số a_n, b_n cho bởi các công thức sau được gọi là hệ số Fourier của nó :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Chuỗi hàm số $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, trong đó a_n, b_n là các hệ số Fourier của f được gọi là chuỗi Fourier của f.

– *Khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier*

Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π, thoả một trong hai điều kiện sau trên đoạn $[-\pi, \pi]$:

– hoặc f liên tục từng khúc và f' liên tục từng khúc,

– hoặc f đơn điệu từng khúc và bị chặn,

thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm, tổng S(x) của chuỗi bằng f(x) tại những điểm liên tục của f, bằng $\frac{1}{2}[f(x + 0) + f(x - 0)]$ tại những điểm gián đoạn của f.

– *Đẳng thức Parseval*

Nếu f thoả các điều kiện trên thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

– Dạng phức của chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}, \ \alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

BÀI TẬP

1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây :

1) $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}$;   2) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

3) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;   4) $u_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+3n+3}$

5) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2(n^2+3)}$;   6) $u_n = 1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \ln\left(1 + \operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}\right)$;   8) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$

9) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+3\ln n}$;   10) $u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

2. Cùng câu hỏi như bài 1.

1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$;   2) $u_n = \ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 2$

3) $u_n = \dfrac{k^n}{n^k}$ $(k > 0)$;   4) $u_n = \dfrac{a^n}{n+b^n}$ $(a > 0, b > 0)$

5) $u_n = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;   6) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

7) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}dx$;   8) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

9) $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{n^2+an+b}\right)$;   10) $u_n = na^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$

11) $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$.

3. Các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây có hội tụ không ? Tính tổng của chúng khi chúng hội tụ.

1) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

2) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

3) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

4) $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

5) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}$;

6) $u_n = \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$

7) $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \ge 2$;

8) $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}.\cos\dfrac{1}{n+1}}$

9) $u_n = \ln\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2^n}-1\right)$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

10) $u_n = \ln + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

4. Cùng câu hỏi như bài 1.

1) $u_n = \dfrac{1}{(2n-1).2^{2n-1}}$;

2) $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

3) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n+n}$;

4) $u_n = \dfrac{2.4.6...(2n)}{n^n}$

5) $n_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$, $a > 0$;

6) $u_n = \left(\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}\right)^n$

7) $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n-1}\right)^{n\ln n}$;

8) $u_n = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$

9) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$;

10) $u_n = \operatorname{tg}^n\left(a+\dfrac{b}{n^2}\right)$

$0 < a \le \dfrac{\pi}{2}$, $b > 0$

11) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha}$;

12) $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$

13) $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{2}\right)^n$;

14) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

15) $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

16) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n} + n\right)\pi$

17) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{(\ln n)^n}$;

18) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$

19) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$;

20) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$

21) $u = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$;

22) $u_n = \ln\left[1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right], \alpha > 0$

5. 1) Khảo sát sự hội tụ của hai dẫy hàm số $\{f_n\}, \{g_n\}$ xác định bởi

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{x}{x+n},\quad g_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{nx}{1+nx}$$

a) trên đoạn [0, 1]

b) trên khoảng $[1, +\infty)$.

2) Cho dẫy hàm số $\{f_n\}$ xác định bởi

$$f_n : [0, 2] \to \mathbf{R},\ x \mapsto f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Khảo sát sự hội tụ của dẫy $\{f_n\}$. Sự hội tụ ấy có đều không ?

b) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^2 f_n(x)dx = 1$

3) Chứng minh rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định bởi

$$f_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{nếu } x \in [0, n] \\ 0 & \text{nếu } x > n \end{cases}$$

hội tụ tới một hàm số f. Sự hội tụ ấy có đều không ?

6. 1) a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ hội tụ đều trên đoạn $[-1, 1]$.

b) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x e^{-n^2}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}^+$.

c) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số với số hạng tổng quát $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2 + n}{n^2}$ hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b], nhưng không hội tụ tuyệt đối.

7. Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ hội tụ đều trên khoảng $[a, +\infty)$ với $a > 0$, nhưng không hội tụ đều trên khoảng $[0, +\infty)$. Tính tổng của chuỗi hàm số ấy với $x > 0$.

8. Cho các hàm số

$$x \mapsto u_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} \ln x & \text{nếu } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

1) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ hội tụ đều trên đoạn [0, 1].

2) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ không đều trên đoạn [0,1].

9. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ xác định, liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}_+$.

10. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

Khảo sát sự hội tụ của nó. Có thể nói gì về sự liên tục và khả vi của nó.

11. Tìm miền hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;

2) $u_n(x) = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

3) $u_n(x) = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-x)^{2n}$;

4) $u_n(x) = (nx)^n$

5) $u_n(x) = x^n \ln n$;

6) $u_n(x) = \frac{(5x)^n}{n!}$

7) $u_n(x) = \frac{x^n}{n^{\alpha}}$ $\alpha > 0$;

8) $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$

9) $u_n(x) = a_n x^n$, trong đó $0 < a_0 < \frac{\pi}{2}$, $a_n = \sin a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

12. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

1) $u_n(x) = (3n+1)x^{3n}$, $n \geq 1$

2) $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n$, $n \geq 0$

3) $u_n(x) = \frac{n^2+3n-1}{n+3} \cdot \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$

4) $u_n(x) = \text{chna}.x^n,\ a > 0, n \geq 0$

5) $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n},\ n \geq 1.$

13. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $x_0 = 3$.

14. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận điểm $x_0 = 0$ các hàm số sau :

1) $f(x) = \text{ch}x$; 2) $f(x) = x^2e^x$

3) $f(x) = \sin^2 x$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$; 6) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$; 8) $f(x) = e^x\cos x$

15. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

không thể khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $x_0 = 0$.

16. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát là

$$u_n(x) = \left(1 + (-1)^n\frac{1}{n}\right)^{n^2}.x^n$$

17. Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nx^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_nx^n$, có bán kính hội tụ theo thứ tự là R, R'.

1) Chứng minh rằng nếu có một số nguyên dương n_0 sao cho $|a_n| \leq |b_n|,\ \forall n \geq n_0$ thì $R \geq R'$.

2) Chứng minh rằng nếu $|a_n| \sim |b_n|$ khi $n \to \infty$ thì $R = R'$.

3) Tính bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau :

a) $u_n(x) = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} x^n$; b) $u_n(x) = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) x^n$

c) $u_n(x) = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) x^n$; d) $u_n(x) = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) x^n$.

18. Tính các số sau với độ chính xác 0,0001 :

1) $\sqrt{e}$; 2) $\sqrt[5]{1,1}$; 3) $\ln(1,04)$.

19. 1) Tìm $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác 0,001.

2) Tính $\int_0^1 \operatorname{sh}(x^2) dx$ với độ chính xác 0,0001.

20. Tính $\cos 18^0$ với độ chính xác 0,0001.

21. Khai triển thành chuỗi fourier hàm số f(x) lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π, bằng $\pi - x$ với $0 < x < \pi$.

22. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π, bằng $1 - \dfrac{2x}{\pi}$ với $0 \le x \le \pi$. Suy ra giá trị của tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

23. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ với $-\pi \le x \le \pi$. Suy ra giá trị của các chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

24. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng $\sin\frac{x}{2}$ với $-\pi < x \le \pi$.

25. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì 2π, bằng cosax với $-\pi \le x \le \pi$, trong đó $0 < a < 1$.

Suy ra đẳng thức

$$\operatorname{cotg}\pi a = \frac{1}{\pi a} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2 - n^2}$$

26. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) tuần hoàn có chu kì $2l$, bằng e^x với $-l \le x \le l$.

27. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) xác định trên đoạn $[0, \pi]$, cho bởi :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ nếu } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

28. Cho hàm số $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 nx}{n!}$

1) Chứng minh rằng hàm số f(x) liên tục và khả vi liên tục trên **R**.

2) Khai triển hàm số f(x) thành chuỗi Fourier. Suy ra biểu thức của f(x).

ĐÁP SỐ VÀ GỢI Ý

1. 1) Phân kì ; 2) phân kì ; 3) phân kì ; 4) hội tụ ; 5) hội tụ ; 6) phân kì ; 7) hội tụ ; 8) hội tụ ; 9) phân kì ; 10) hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kì nếu $\alpha \le 1$.

2. 1) hội tụ ; 2) hội tụ ; 3) hội tụ khi $k < 1$, phân kì khi $k \ge 1$; 4) hội tụ khi và chỉ khi ($a < b$ và $b > 1$) hoặc ($a < 1$ và $b \ge 1$) ; 5) phân kì ;

6) hội tụ ; 7) hội tụ ; 8) hội tụ ; 9) hội tụ khi và chỉ khi a = 0 ; 10) hội tụ khi 0 < a < 1, phân kì khi a ≥ 1 ; 11) hội tụ khi và chỉ khi $a = \frac{9}{2}$.

3. 1) $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, $S = \frac{1}{2}$;

2) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, S = 1.

3) $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, S = 1 ;

4) Chuỗi đan dấu, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, S = 1 ;

5) $u_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$, $S = \frac{\pi}{4}$;

6) $S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1}\right]$, $S = \frac{1}{2}$;

7) $u_n = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^n}$, S = −ln2 ;

8) $u_n = \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}$, S = tg1 ;

9) $S_n = \ln\frac{2\cos 2\alpha + 1}{2\cos\frac{\alpha}{2^n} + 1}$, $S = \ln\frac{2\cos 2\alpha + 1}{3}$;

10) hội tụ khi và chỉ khi a = −2, b = 1, S = −ln2.

4. 1) hội tụ ; 2) hội tụ ; 3) hội tụ ; 4) hội tụ ; 5) hội tụ nếu a ≤ 1, phân kì nếu a > 1 ; 6) hội tụ ; 7) hội tụ ; 8) hội tụ ; 9) hội tụ ; 10) hội tụ nếu $a < \frac{\pi}{4}$, phân kì nếu $a \geq \frac{\pi}{4}$; 11) hội tụ nếu α > 1, phân kì nếu α ≤ 1 ; 12) phân kì ; 13) hội tụ ; 14) bán hội tụ ; 15) bán hội tụ ; 16) bán hội tụ ;

17) hội tụ tuyệt đối ; 18) phân kì ; 19) hội tụ ; 20) phân kì ; 21) hội tụ ;

22) hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > \frac{1}{2}$.

5. 3) hội tụ trên $(0, +\infty)$, hội tụ đều trên $[a, +\infty)$, $\forall a > 0$.

7. $\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

10. Tổng của chuỗi hàm số liên tục và khả vi vô hạn lần với $|x| > 1$.

11. 1) $-1 < x \leq 1$; 2) $3 \leq x < 5$;

3) $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$; 4) $R = 0$;

5) $-1 < x < 1$; 6) $-\infty < x < +\infty$; 7) $-1 \leq x < 1$ nếu $\alpha \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ nếu $\alpha > 1$; 8) $R = \infty$;

9) $-1 \leq x < 1$.

12. 1) $-1 < x < 1$, $\frac{4x^3 - x^6}{(1 - x^3)^2}$; 2) $|x| < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 3x}$;

3) $x \neq 0$, $xe^x - \frac{1}{x^3}\left[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2\right]$;

4) $-e^{-a} < x < e^{-a}$, $\frac{1 - x\operatorname{ch}a}{1 + x^2 - 2x\operatorname{ch}a}$;

5) $-1 < x \leq 1$, $\frac{\ln(1 + x)}{x}$

13. $\frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n + \ldots\right]$

14. 1) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, $R = \infty$

2) $x^2 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+2}}{n!} + \ldots$, $R = \infty$

3) $\dfrac{2x^2}{2!} - \dfrac{2^3x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ R = \infty$

4) $\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)x + \left(1 - \dfrac{2}{2^3}\right)x^2 + \ldots + \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \ldots,\ R = 1$

5) $\ln 6 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)x^n,\ |x| < 2$

6) $x - \dfrac{x^5}{2!5} + \dfrac{x^9}{4!9} - \ldots + (-1)^n\dfrac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} + \ldots,\ R = \infty$

7) $2\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + \ldots \dfrac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots\right),\ |x| < 1$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}x^n,\ R = \infty$

16. $R = \dfrac{1}{e}$

17. 3) a) $R = e$; b) $R = 1$; c) $R = 1$; d) $R = 1$

18. 1) 1,6487 ; 2) 1,0192 ; 3) 0092

19. 1) 0,747 ; 2) 0,3579

20. 0.9519

21. $2\left(\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 2x}{2} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n} + \ldots\right) = \begin{cases} f(x) \text{ nếu } x \neq 2k\pi \\ 0 \text{ nếu } x = 2k\pi \end{cases}$

22. $\dfrac{8}{\pi^2}\left[\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right] = f(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

23. $\frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=f(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{6}\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

24. $\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx\ =\begin{cases}\sin\frac{x}{2} \text{ nếu } x\neq(2k+1)\pi\\ 0 \text{ nếu } x=(2k+1)\pi\end{cases}$

25. $\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\frac{2a\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2},\ \forall x\in\mathbf{R}$

26. $\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}-$

$$-\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}=\begin{cases}f(x) \text{ nếu } x\neq(2k+1)l\\ \text{ch}l \text{ nếu } x=(2k+1)l\end{cases}$$

27. Nếu thác triển chẵn rồi thác triển tuần hoàn, ta được

$$\frac{3\pi}{8}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}\cos nx$$

28. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\ b_n=\frac{3}{4n!}$ nếu $n\neq 3k, k\in\mathbf{N}$; nếu $n=3k, k\in\mathbf{N}$,

$b_{3k}=\frac{3}{4.(3k)!}-\frac{1}{4k!}$.

MỤC LỤC

Chương 1
SỐ THỰC

Chương 2
HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

Chương 3
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Chương 4

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Chương 5

CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Chương 6

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Chương 7

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chương 8

CHUỖI

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
NGUYỄN TRỌNG BÁ
Biên tập tái bản :
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Trình bày bìa :
TRẦN TIỂU LÂM
Sửa bản in :
PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)
Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

TOÁN HỌC CAO CẤP – TẬP HAI
Mã số: 7K076T6 – DAI

In 5000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5cm. Tại Công ty Cổ phần in Anh Việt
Số đăng ký KHXB: 04 - 2006/ CXB/ 112 - 1860/GD
In xong nộp lưu chiểu Quý IV năm 2006.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Tìm đọc

SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC BỘ MÔN TOÁN

của Nhà xuất bản Giáo dục

1. Giải tích hàm	Nguyễn Xuân Liêm
2. Bài tập giải tích hàm	Nguyễn Xuân Liêm
3. Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân	Nguyễn Xuân Liêm
4. Giải tích (hai tập)	Nguyễn Xuân Liêm
5. Toán học cao cấp (ba tập)	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
6. Bài tập toán cao cấp (ba tập)	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
7. Đại số đại cương	Nguyễn Hữu Việt Hưng
8. Số đại số	Hoàng Xuân Sính
9. Hình học vi phân	Đoàn Quỳnh
10. Giải tích số	Nguyễn Minh Chương (Chủ biên)
11. Phương trình đạo hàm riêng	Nguyễn Minh Chương
12. Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định	Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phu
13. Mở đầu lí thuyết xác suất và ứng dụng	Đặng Hùng Thắng
14. Bài tập xác suất	Đặng Hùng Thắng
15. Lí thuyết xác suất	Nguyễn Duy Tiến - Vũ Viết Yên
16. Xác suất thống kê	Nguyễn Văn Hộ
17. Phương pháp tính và các thuật toán	Phan Văn Hạp - Lê Đình Thịnh
18. Từ điển toán học thông dụng	Ngô Thúc Lanh (Chủ biên)

Bạn đọc có thể mua tại các đại lí và các Cửa hàng sách của NXBGD :
81 Trần Hưng Đạo hoặc 57 Giảng Võ - Hà Nội ;
15 Nguyễn Chí Thanh - TP Đà Nẵng ;
231 Nguyễn Văn Cừ - Quận 5 - TP Hồ Chí Minh.
25 Hàn Thuyên - Hai Bà Trưng – Hà Nội

8 934980 685488

Giá: 21.400đ