EXERCÍCIOS DE APOIO

Apenas para praticar. Não vale nota.

Questão 1

Para que valor de L a função é contínua?

$f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$, se $x \neq 3$ e $f(3) = L$.

Resposta:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) = 27$$

Logo, a função será contínua em: $x = 3$ se $L = 27$.

Questão 2

Calcule (se existirem):

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^5 + 7}{x^4 + 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^4 + 2} \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Resposta:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^5 + 7}{x^4 + 2} = \frac{0^5 + 7}{0^4 + 2} = \frac{7}{2}$$

b)

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^4 + 2} \cdot cos\frac{1}{x} = 0$, pois $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^4 + 2} = \frac{0^5}{0^4 + 2} = 0$ em função cosseno é limitada.

c)

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

Questão 3

Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^5 + 4}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^3}{2x + 1} \right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^3}{2x + 1} \right) sen\left(3x + \frac{\pi}{2} \right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen 5x}{3x}$

Resposta:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = \lim\limits_{x \to -4} \frac{(x+4)(x-4)}{x + 4} = \lim\limits_{x \to -4} x - 4 = -8$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = +\infty$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^5 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{x^5\left(1 + \frac{4}{x^5}\right)} = 0$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = 1$

e) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^3}{2x + 1}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{0^3}{2.0 + 1} = 0$

f) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^3}{2x + 1}\right) sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot 1 = 0$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{sen 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen 5x}{3x} \cdot \frac{5}{5} = \lim_{x \to 0} \frac{sen 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$

Questão 4

Calcule as derivadas das funções abaixo.

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \log_2 x$

c) $f(x) = \frac{ln x}{x}$

paR
EI

d) $f(x) = x^3 ln x$

e) $f(x) = x^4 e^x$

Resposta:

a) $f'(x) = 4^x \ln 4$

b) $f'(x) = \frac{1}{x ln 2}$

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - ln x}{x^2}$

d) $f'(x) = 3x^2 ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$

e) $f'(x) = 4x^3 e^x + x^4 e^x$

Questão 5

Usando as regras de derivação, calcule a derivada das funções:

a) $f(x) = 3x^2 senx$

b) $f(x) = (2x+1)\cos x$

c) $f(x) = 3senx\log_3 x$

d) $f(x) = senx\cos x$

e) $f(x) = \sec x$

f) $f(x) = cossecx$

g) $f(x) = cotgx$

h) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

Resposta:

a) $f'(x) = (3x^2)'sen\,x + 3x^2(sennx)' = 6x\,sen\,x + 3x^2\cos x$

b) $f'(x) = (2x+1)'\cos x + (2x+1)(\cos x)' = 2\cos x - (2x+1)senx$

c) $f'(x) = (3sen\,x)'\log_3 x + 3sen\,x(\log_3 x)' = 3\cos x.\log_3 x + 3senx.\dfrac{1}{x\ln 3}$

d) $f'(x) = (senx)'\cos x + senx(\cos x)' = \cos x.\cos x + senx(-senx) = \cos^2 x - sen^2 x = \cos(2x)$

e) $f'(x) = (\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = -\dfrac{(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\sin x}{cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\sin x}{\cos x} = \sec x.\tan x$

f) $f'(x) = (cossec)' = \left(\dfrac{1}{senx}\right)' = -\dfrac{(senx)'}{(senx)^2} = -\dfrac{\cos x}{sen^2 x} = -\dfrac{1}{senx}\dfrac{\cos x}{senx} = -cossecx\cot x$

g) $f'(x) = (\cot x)' = \left(\dfrac{\cos x}{senx}\right)' = \dfrac{(\cos x)'senx - \cos x(senx)'}{(senx)^2} = \dfrac{-senx.senx - \cos x.\cos x}{sen^2 x} =$

$-\dfrac{1}{sen^2 x} = -\left(\dfrac{1}{senx}\right)^2 = -cossec^2 x$

h) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)'(x^2+3) - (2x+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2(x^2+3) - (2x+1)2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 6}{(x^2+3)^2}$

Questão 6

$f(x) = tg^2(x^3+2)$

a) $f'(x) = \dfrac{2sen(x^3+2)}{cos^3(x^3+2)}$

b) $f'(x) = 2x^3\dfrac{sen(x^3+2)}{cos^3(x^3+2)}$

c) $f'(x) = 6x^2\dfrac{sen(x^3+2)}{cos^3(x^3+2)}$

d) $f'(x) = 6x^2\dfrac{sen(x^3+2)}{cos^2(x^3+2)}$

e) nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa C)

$f(x) = tg^2(x^3+2)$

$f'(x) = 2tg(x^3+2)sec^2(x^3+2)\cdot(3x^2)$

ou ainda

$f'(x) = 6x^2\dfrac{sen(x^3+2)}{cos^3(x^3+2)}$

Questão 7

$g(x) = (2x^3-5x^2+2x)^{\frac{3}{2}}$

a) $g'(x) = (2x^3-5x^2+2x)^{\frac{1}{2}}(6x^2-10x+2)$

b) $g'(x) = \dfrac{3}{2}(2x^3-5x^2+2x)^{\frac{1}{2}}$

c) $g'(x) = \dfrac{3}{2}(2x^3-5x^2+2x)^{\frac{3}{2}}(6x^2-10x+2)$

d) $g'(x) = \dfrac{3}{2}(2x^3-5x^2+2x)^{\frac{-1}{2}}(6x^2-10x+2)$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa E)

$$g(x) = (2x^3 - 5x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2}(2x^3 - 5x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}}(6x^2 - 10x + 2)$$

Questão 8

$h(x) = ln(sen^4 x + 1)$

a) $h'(x) = \dfrac{sen^3 x cos x}{sen^4 x + 1}$

b) $h'(x) = \dfrac{4sen^3 x}{sen^4 x + 1}$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{sen^4 x + 1}$

d) $h'(x) = \dfrac{4sen^3 x cos x}{sen^4 x + 1}$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa D)

$h(x) = ln(sen^4 x + 1)$

$$h'(x) = \frac{1}{sen^4 x + 1} \cdot (4sen^3 x \cdot cos x)$$

$$h'(x) = \frac{4sen^3 x cos x}{sen^4 x + 1}$$

Questão 9

$u(x) = (cos x + 3)^5$

a) $u'(x) = 5 \cdot (cos x + 3)^4 \cdot sen x$

b) $u'(x) = -5 \cdot (cos x + 3)^4 \cdot cos x$

c) $u'(x) = -5 \cdot (cos x + 3)^4 \cdot sen x$

d) $u'(x) = -5 \cdot (cos x + 3)^4$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa C)

$u(x) = (cosx + 3)^5$

$u'(x) = 5 \cdot (cosx + 3)^4 \cdot (-senx)$

$u'(x) = -5 \cdot (cosx + 3)^4 \cdot senx$

Questão 10

Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$

a) $y = 3x + 4$

b) $y = 3x - 4$

c) $y = -3x - 4$

d) $y = -3x + 5$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa e)

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \to f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{1^3} = 1$$

$$f'(x_0) = f'(1) = -\frac{3}{1^4} = -3$$

Reta Tangente em (1,1):

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \to y - 1 = -3x + 3 \to y = -3x + 4$$

Questão 11

Sendo $f(x) = sen(x^2)$, calcule $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$

a) $f'(x) = 2xcosx^2,\ f''(x) = 2cosx^2 + 4x^2senx^2,\ f'''(x) = -12xsenx^2 - 8x^3cosx^2$

b) $f'(x) = 2xcosx^2,\ f''(x) = 2cosx^2 - 4x^2senx^2,\ f'''(x) = -12xsenx^2 - 8x^3cosx^2$

c) $f'(x) = 2xcosx^2,\ f''(x) = 2cosx^2 + 4x^2senx^2,\ f'''(x) = -12xsenx^2 + 8x^3cosx^2$

d) $f'(x) = 2xcosx^2,\ f''(x) = 2cosx^2 - 4x^2senx^2,\ f'''(x) = -12xsenx^2 + 8x^3cosx^2$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta:

Alternativa B)

$f(x) = senx^2$

$f'(x) = 2xcosx^2$

$f''(x) = 2cosx^2 - 2x2xsenx^2 = 2cosx^2 - 4x^2senx^2$

$f'''(x) = -4xsenx^2 - 8xsenx^2 - 4x^2 2xcosx^2$

$f'''(x) = -12xsenx^2 - 8x^3cosx^2$

Questão 12

Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = senx(4x^2 + 1)$

b) $g(x) = (5x^3 + 2x)^{10}$

c) $h(x) = ln(cos^2x + 1)$

d) $u(x) = \sqrt[3]{sen^2x}$

e) $v(x) = sen(\cos x)$

f) $r(x) = 3xe^{x^3}$

g) $s(x) = cos(2x^4)$

Resposta:

2) Devemos usar a Regra da Cadeia.

a) $f(x) = senx(4x^2 + 1) = (4x^2 + 1)senx$

$f'(x) = 8x \cdot senx + (4x^2 + 1)cosx$

b) $g'(x) = 10(5x^3 + 2x)^9(15x^2 + 2)$

c) $h'(x) = \dfrac{1}{cos^2x + 1} \cdot (2cosx \cdot (-senx)) = \dfrac{-2senx \cdot cosx}{cos^2x + 1}$

d) $u(x) = \sqrt[3]{sen^2x}$

Observe que podemos escrever $u(x) = (senx)^{\frac{2}{3}}$. Logo:

$$u'(x) = \frac{2}{3}(senx)^{-\frac{1}{3}} \cdot cosx = \frac{2cosx}{3\sqrt[3]{senx}}$$

e) $v'(x) = \cos(\cos x)(-senx) = -senx \cdot cos(cosx)$

f) $r'(x) = 3e^{x^3} + 3xe^{x^3}3x^2 = 3e^{x^3} + 9x^3e^{x^3} = e^{x^3}(3 + 9x^3)$

g) $s'(x) = -sen(2x^4) \cdot 8x^3$

ESCONDER GABARITO