Scientific Computing I - Übung 3

1 Theorie

1) Eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$ ist definiert durch die Eigenschaft

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} \tag{1}$$

mit der Einheitsmatrix I. Es gilt also $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$. Orthogonale Matrizen haben die Eigenschaft das Skalarprodukt von Vektoren zu erhalten. Wie lautet die durch die gewöhnliche euklidische Norm induzierte Matrixnorm einer orthogonalen Matrix $\boldsymbol{Q}$? Welchen Wert hat die Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{Q}$ bezüglich dieser Matrixnorm?

2) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal? Warum?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(x) & -sin(x) \\ 0 & sin(x) & cos(x) \end{bmatrix}$

3) Berechnen Sie die LU-Zerlegung der 3 x 3 Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4) Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

für den Vektor $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1)^T$.

2 Ein (vorauseilendes) warnendes Beispiel

Lineare Gleichungssysteme (LGS) der Form

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

lassen sich in MATLAB leicht darstellen. $\boldsymbol{A}$ wird als M x N *double* Matrix modelliert, x als 1 x N, $\boldsymbol{b}$ als M x 1 *double* Matrix. Die Lösung ist bekanntlich gegeben durch

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

Für die Inversion einer (quadratischen) Matrix bietet MATLAB die Funktion *inv* an. Damit lässt sich ein LGS lösen. Tatsächlich ist es aber meist besser, die Gleichung über MATLABs Backslash-Operator \ zu lösen.

Zur Verdeutlichung dieser Tatsache schreiben Sie ein Skript und zwar wie folgt:

1) Erstellen Sie zufällig konstruierte 10 x 10 Matrizen $\boldsymbol{A_n}$ und 10x1 Vektoren $\boldsymbol{x_n}$ mittels des *rand*-Befehls.

   Hinweis: rand(3, 3) erzeugt eine 3x3 (Zufalls-)Matrix.

2) Bilden Sie für die zufälligen Paare $\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{x_n}$ das Produkt $\boldsymbol{A_n x_n} = \boldsymbol{b_n}$. Bilden Sie anschließend den „Lösungsvektor" $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ einmal mittels des *inv*-Befehls $\hat{\boldsymbol{x}}_{n,inv} = \boldsymbol{A}_n^{-1}\boldsymbol{b}_n$ und einmal über den Backslashoperator $\hat{\boldsymbol{x}}_{n,bsl} = \boldsymbol{A}_n \backslash \boldsymbol{b}_n$.

   Hinweis: Das gewöhnliche Matrix-Vektor-Produkt berechnet man in MATLAB z.B. mittels des *-Operators: $>> b = A * x$.

3) Berechnen Sie jeweils die Differenz $E_{inv} := x_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,inv}$ bzw. $E_{bsl} := x_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,bsl}$ zwischen Ausgangsvektor $\boldsymbol{x}_n$ und den Lösungsvektoren $\hat{\boldsymbol{x}}_{n,inv}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{x}}_{n,bsl}$ und bilden Sie den Betrag der Differenzen $E_{inv} := \|x_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,inv}\|$ bzw. $E_{bsl} := \|x_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,bsl}\|$ mittels des MATLAB-Befehls *norm*.

4) Was fällt ihnen im Vergleich der beiden Methoden auf? Visualisieren Sie dazu den Quotienten $E = \frac{E_{inv}}{E_{bsl}}$ der beiden Betragsdifferenzen für 10000 Paare $\boldsymbol{A_n}$ und $\boldsymbol{x_n}$.

   Hinweis: Schleifen :)

Im Allgemeinen ist es besser LGS mittels des Backslashoperators zu lösen! Dieser löst das Gleichungssystem nicht über Invertierung der Matrix A, sondern direkt mittels Gauß-Elimination!

3 LU-Faktorisierung

Aus der Vorlesung ist die sogenannte LU-Faktorisierung bekannt. Diese löst lineare Gleichungssysteme der Form $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ durch Zerlegung der Matrix $\boldsymbol{A}$ in untere und obere Dreicksmatrizen *L* und *U* und anschließender Invertierung der Dreiecksmatrizen. Man erhält also zunächst das Gleichungssystem $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$

und erhält die Lösung als $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{b}$. Dies wollen wir nun nachbauen! Schreiben Sie dazu separate MATLAB-Funktionen, welche die folgenden Teilaufgaben lösen:

1) Implementieren Sie die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution gemäß Skript. (F. 31, 32)
2) Implementieren Sie dann die Bildung der Eliminationsmatrix. (F. 35)
3) Bilden Sie nun die LU-Zerlegung mittels der Eliminationsmatrix.
4) Setzen Sie jetzt alles zusammen:
   Lösen Sie das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mittels LU-Zerlegung gefolgt von Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durch Verbindung Ihrer Funktionen aus 1) - 3) für das Paar $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ aus den Aufgaben 3) und 4) des Kurzfragenteils sowie für das Beispiel der Vorlesung.

4 Lohnt sich ein Besuch auf einer Kunstmesse?

Marie, eine Fotografin, überlegt eine Kunstmesse zu besuchen, um dort ihre Bilder zu verkaufen. Sie hat Bilder in drei Größen. Sie will kleine Bilder für 10€, mittelgroße Bilder für 18€ und große Bilder für 34€ verkaufen. Aus der Vergangenheit weiß sie, dass sie doppelt so viele mittelgroße wie große Bilder verkaufen wird. Außerdem verkauft sie so viele kleine Bilder, wie sie mittelgroße und große Bilder zusammen verkauft. Ein Stand auf der Messe kostet 300€. Wie viele Bilder muss Marie verkaufen, damit sie die Kosten für den Stand wieder eingenommen hat?

1) Modellieren Sie die Fragestellung aus dem einleitenden Text als lineares Gleichungssystem mit einer Matrix $\boldsymbol{A}$ und einem Vektor $\boldsymbol{b}$, so dass die Lösung $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ den Anzahlen zu verkaufender kleiner, mittelgroßer und großer Bilder entspricht.
2) Nutzen Sie eine LU-Zerlegung, um das Gleichungssystem aus dem vorherigen Aufgabeteil zu lösen.
   Hinweis: Falls Sie Aufgabe 3 nicht lösen konnten, können Sie den MATLAB-Befehl `lu` hierfür verwenden.
3) Es gibt auf der Messe auch kleinere Stände für 200€ und großere Stände für 500€. Größere Stände locken in der Regel aufgrund ihrer besseren Sichtbarkeit mehr Publikum an, weswegen mit mehr Verkäufen zu rechnen ist. Wie viele Bilder muss Marie verkaufen, damit sich ein kleiner oder ein großer Stand jeweils lohnt?
4) Marie hat einen großen Stand gemietet und 20 kleine Bilder, 8 mittelgroße Bilder und 4 große Bilder verkauft. Wie viel Gewinn oder Verlust hat sie gemacht? Entspricht die Verteilung der verkauften Bildern ihren Erwartungen?
   Hinweis: Versuchen Sie die vorhandene Matrix $\boldsymbol{A}$ und den vorhandenen Vektor $\boldsymbol{b}$ zu nutzen, um diese Fragen zu beantworten.