Institut für Informationsverarbeitung
Leibniz Universität Hannover
http://www.tnt.uni-hannover.de

Scientific Computing I - Übung 2

1 Theorie

1) In der Vorlesung wurde die sogenannte Konditionszahl für Matrizen eingeführt. Wie ist diese mathematisch definiert? Was bedeutet die Formel intuitiv?

2) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   Tipp: Verwenden Sie die Regel von Sarrus.

3) Der führende Hauptminor k-ter Ordnung einer Matrix ist die Determinate der quadratischen Untermatrix, die nur aus den ersten k Zeilen und Spalten der ursprünglichen Matrix besteht. Beispiel: der führende Hauptminor erster Ordnung der Matrix aus 1.3a) ist det $\left(\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}\right) = 3$ und der führende Hauptminor zweiter Ordnung der gleichen Matrix ist det $\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right) = 15$. Bestimmen Sie alle führenden Hauptminoren der Matrizen aus 1.3.

2 Entwicklungssatz von LaPlace

Mit Hilfe des Entwicklungssatz von LaPlace lässt sich einfach die Determinante einer $n \times n$-Matrix A bestimmen:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} D_{ij}$$

wobei a_{ij} der Eintrag in i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A ist und D_{ij} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist, die man erhält wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte von A entfernt. Dabei ist j eine beliebig, aber fest, gewählte Spalte von A. Alternativ kann man auch eine beliebige Zeile i fest wählen und dann über die Spalten iterieren.
Hinweis: Für $i = j$ ($\Rightarrow (-1)^{i+j} = 1$) ist D_{ij} ein Hauptminor von A, aber nicht zwangsweise führend.

a) Implementieren Sie eine MATLAB-Funktion `function d = mydet(A, j)`, welche die Determinante d einer Matrix A durch Entwicklung nach der j-ten Spalte berechnet.
Tipp: Verwenden Sie Rekursion, d.h. `mydet` soll sich selbst aufrufen.

b) Erweitern Sie `mydet` um eine Überprüfung der Eingabewerte: welche Eigenschaften müssen A und j erfüllen?

c) Erweitern Sie `mydet` derart, dass kein j mehr übergeben werden muss. Stattdessen soll ihre Implementierung sich zufällig für die Entwicklung nach einer Zeile i oder nach einer Spalte j entscheiden und dabei auch i bzw. j zufällig wählen.

d) Um zu testen, ob ihre Implementierung, welche jetzt von Zufallszahlen abhängt, korrekt funktioniert, berechnen Sie jeweils 1000 Mal die Determinante der Matrizen aus Aufgabe 1.3. Kontrollieren Sie ihre Ergebnisse indem Sie den Durchschnitt (MATLAB: *mean*) und die Standardabweichung (MATLAB: *std*) der jeweils 1000 Zahlen berechnen.

3 Hauptminorenkriterium

Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren von A positiv sind. A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.
Hinweise: Die Zahl 0 ist weder positiv noch negativ. Über Semidefinitheit kann man mit Hauptminoren allein keine Aussage treffen.

a) Implementieren Sie eine Funktion `function x = definit(A)`, welche $x = 1$ zurück gibt, wenn A positiv definit ist, und $x = -1$ zurück gibt, wenn A negativ definit ist. Wenn A weder positiv noch negativ definit ist, soll $x = 0$ zurückgegeben werden. Ihre Funktion soll eine Fehlermeldung ausgeben, wenn

A keine passende Matrix ist.

b) Als Alternative zur Bestimmung der führenden Hauptminoren von $-A$, kann man die Vorzeichen der führenden Hauptminoren von A betrachten: sind alle ungeraden führenden Hauptminoren (1-ter Ordnung, 3-ter Ordnung, usw.) negativ und alle geraden führenden Hauptminoren positiv, dann ist A negativ definit.
Nutzen Sie dies aus um die Implementierung ihrer Funktion `definit` so zu verbessern, dass nur die führenden Hauptminoren von A bestimmt werden müssen.

4 Fließkommazahlenformate

Das (auch von MATLAB verwendete) IEEE-754 Zahlenformat für Fließkommazahlen definiert Fließkommazahlen unterschiedlicher Bitgröße. Die üblichsten sind jene vom Typ „single“ (32 bit) und „double“ (64 bit) mit einfacher respektive doppelter Genauigkeit. Die Basis β (vgl. Vorlesung) ist hierbei zum Wert 2 gesetzt. Abbildung 1 zeigt die Zuordnung der Bits einer Fließkommazahl gemäß IEEE-754.

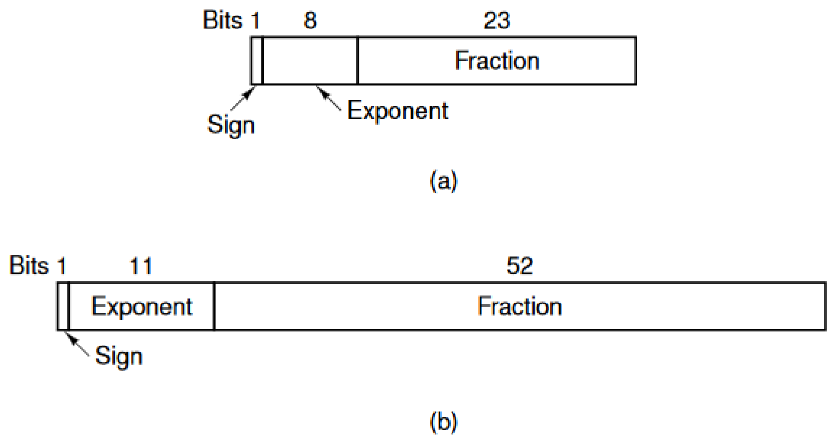

Abbildung 1: Fließkommazahlenformat für (a) einfache und (b) doppelte Präzision nach IEEE-754.

Der Biaswert B ist bei einfacher Präzision 127 und bei doppelter Präzision 1023. Eine Gleitkommazahl G ist entsprechend gegeben durch

$$G = (-1)^{sign} \cdot (1 + F) \cdot 2^{E-B} \tag{1}$$

mit dem Exponenten E und dem Nachkommawert (Fraction) F.
Die Zahl 3.2 ist in einfacher Präzision z.B. durch die Bitsequenz *01000000010011001100110011001101* codiert. Das erste Bit (von links) mit dem Wert '0' zeigt eine positive Zahl an. Die nachfolgenden 8 Bit '10000000' codieren den Exponenten, hier also $2^7 = 128$. Der Exponent inklusive des Biases

B ist also $128 - 127 = 1$. Die restlichen 23 Bit *10011001100110011001101* codieren die Nachkommawerte der Mantisse. In diesem Beispiel also $2^{-1} + 2^{-4} + \cdots = 0.600000023841858$. Rechnet man alles zusammen, erhält man den Wert *3.200000047683716* für die Zahl 3.2.

1) Schreiben Sie nun eine Funktion, welche eine gegebene Bitsequenz, gegeben als `char-array` (Folge von Buchstaben), in die zugehörige Fließkommazahl umwandeln. Ihre Funktion soll sowohl für Fließkommazahlen einfacher als auch doppelter Präzision funktionieren. Als Test liegt Ihnen die .mat-Datei `IEEE754_sequences.mat` vor. Diese enthält einen Cellarray mit verschiedenen Bitsequenzen. Für jede IEEE-754 konforme Sequenz sollte Ihre Funktion eine korrekte Ausgabe generieren.
   Hinweis: .mat-Dateien kann man z.B. mittels des `load`-Befehls öffnen. (Von Hand geht es natürlich auch) Die gegebene Datei enthält mehrere Zeichenfolgen in einem Array. Auf diese greift man jeweils mit geschweiften Klammern zu (vgl. auch MATLAB-Einführungs-PDF im Stud.IP). Eine Zeichenfolge kann man einer Variablen zuweisen und diese Variable dann wie einen Vektor benutzen und so auf die einzelnen Zeichen ("Bits") zugreifen.

2) Wie lautet die kleinste, mittels IEEE-754 Präzision normalisierte, darstellbare Zahl, größer Null? Wie die größte kleiner Unendlich? Wie groß ist der Abstand zwischen unmittelbar nebeneinander liegenden Gleitkommazahlen im IEEE-754 Format für einfache und doppelte Präzision?