Institut für Informationsverarbeitung
Leibniz Universität Hannover
http://www.tnt.uni-hannover.de

Scientific Computing I - Übung 7

1 Theorie

1) Was heißt es, dass zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *ähnlich* sind? Was für eine Beziehung besteht dann zwischen den Eigenwerten von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$? Gegeben die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_i^A$ der Matrix $\boldsymbol{A}$, wie berechnen sich dann die entsprechenden Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_i^B$ der Matrix $\boldsymbol{B}$? Warum ist es i.A. interessant, dass eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ ist?

2) Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ sei (z.B. durch Rundungsfehler) durch die orthogonale Matrix $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \epsilon & 2\epsilon \\ -2\epsilon & \epsilon \end{bmatrix}$ mit $\epsilon << 1$ gestört. Berechnen Sie die obere Schranke für die Differenz zwischen den (einfachen) Eigenwerten λ_i der ungestörten Matrix $\boldsymbol{A}$ und den (einfachen) Eigenwerten $\hat{\lambda}_i$ der gestörten Matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$.

3) Zeigen Sie, dass
$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{k-1} \tag{1}$$
mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und N paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i und $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ gegen ein Vielfaches des zum größten Eigenwert λ gehörenden Eigenvektors $\boldsymbol{v}$ konvergiert. Es handelt sich um die sogenannte *Potenzmethode* zur iterativen Bestimmung eines Eigenvektors einer Matrix.
Hinweis: Es ist $\boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ mit den n Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ von $\boldsymbol{A}$.

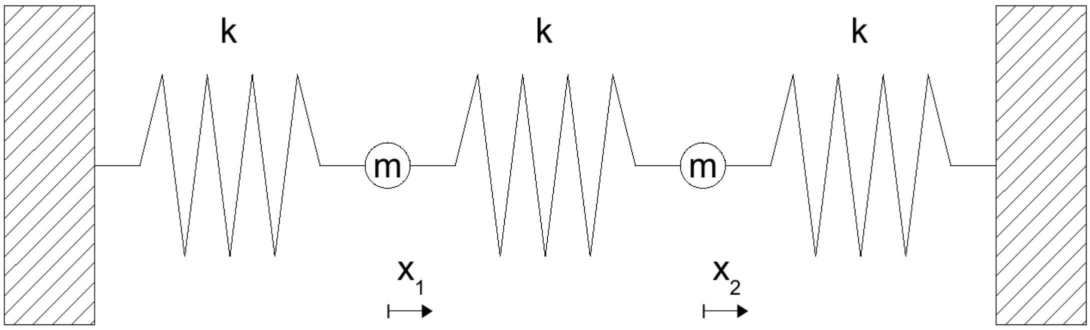

Abbildung 1: Gekoppeltes Masse-Feder System mit zwei Massen und drei Federn.

2 Eigenwerte braucht keiner? Von Wegen!

Eigenwertprobleme treten an verschiedensten Stellen im Ingenieursbereich auf. Ein Beispiel wollen wir in diesem Abschnitt kennenlernen. In Abbildung 1 ist ein gekoppeltes Masse-Feder System dargestellt. Aus der Physik- oder technischen Mechanikvorlesung ist bekannt, dass dieses System dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= -kx_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t)) \\ m\ddot{x}_2(t) &= -kx_2(t) + k(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned} \tag{2}$$

mit der Masse m und Federkonstanten k genügt. Bevor wir zum eigentlichen Eigenwertproblem kommen, wollen wir dieses System zunächst simulieren.

1) Schreiben Sie dazu eine Funktion, welche als Inputparameter Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit der beiden Massen sowie die Systemparameter k und m entgegen nimmt. Des Weiteren soll die Schrittweite h und der Endzeitpunkt der Simulation t_1 übergeben werden (Wir nehmen an, dass wir bei $t_0 = 0$ starten). Alternativ kann anstelle der Schrittweite h die Anzahl an Iterationsschritte n verwendet werden. Daraus berechnet sich dann h zu $h = \frac{t_1}{n-1}$ für $n > 1$. Berechnen Sie dann iterativ die Dynamik des Systems über den Ansatz (Euler-Methode)

$$\begin{aligned} x_i(t_{n+1}) &= x_i(t_n) + \dot{x}_i(t_n)h \\ \dot{x}_i(t_{n+1}) &= \dot{x}_i(t_n) + \ddot{x}_i(t_n)h \end{aligned} \tag{3}$$

   mit der Schrittweite h. Für den jeweiligen Wert der Beschleunigung verwenden Sie Gleichung (2). Ihre Funktion soll die Dynamik des Systems für die Zeitpunkte $t \in [t_0, t_1]$ berechnen und Sie graphisch ausgeben. Der Plot sollte neben passenden Achsenbeschriftungen mit einer Legende versehen sein, welche die Bewegung der beiden Massen kennzeichnet. Erproben Sie Ihre Funktion mit verschiedenen Schrittweiten h (z.B. $10^{-5}, 10^{-1}, 1$) sowie verschiedenen Werten der Systemparameter k und m (welche Einheit haben diese?).

2) Die analytische Lösung des Differentialgleichungssystems kann durch den Ansatz $x_j(t) = c_j e^{i\omega t}$ ermittelt werden. Einsetzen und Umformen führt auf die Gleichung

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{C} \tag{4}$$

mit $\boldsymbol{C} = [c_1, c_2]^T \in \mathbb{C}^2$ und $\lambda := \frac{-m\omega^2}{k}$. Dies ist ein Eigenwertproblem! Bestimmen Sie die Eigenvektoren $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ des Eigenwertproblems. Nutzen Sie die Matlab-Funktion *roots*, um die zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 gehörenden Eigenfrequenzen $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}$ zu ermitteln. Die allgemeine analytische Lösung des Systems nach (2) ist dann gegeben zu

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_1 \sum_{n=1}^{2} \alpha_n e^{i\omega_n^{(1)} t} + \boldsymbol{C}_2 \sum_{n=1}^{2} \beta_n e^{i\omega_n^{(2)} t}, \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten α_n und β_n aus den Anfangswerten von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bzw. deren zeitlichen Ableitungen bestimmt werden. Hierbei tritt ein lineares Gleichungssystem auf, welches mit den bereits bekannten Methoden gelöst werden kann! Fassen Sie Ihren bisherigen Code zusammen in eine Funktion, welche für übergebene Startwerte $x_i(t_0), \dot{x}_i(t_0)$ und einen Vektor von Zeitpunkten die Werte der analytischen Lösung nach (5) ausgibt.

3) Vergleichen Sie zum Schluss den Verlauf der analytischen mit der numerischen Lösung des Systems nach (2). Plotten Sie für die beiden Massen (in zwei Figures) jeweils die Auslenkungen $x_i(t)$ respektive Differenzen $x_i(t)_{ana} - x_i(t)_{num}$ zwischen analytischer und numerischer Lösung für $h = 10^{-5}, 10^{-1}, 1$ und ergänzen Sie eine passende Legende. Setzen Sie $k, m = 1$, $t_0 = 0, t_1 = 10$ und $x_1(t_0) = -0.2, x_2(t_0) = -0.2$ sowie $\dot{x}_i(t_0) = 0$.

Das in dieser Aufgabe betrachtete System war natürlich sehr einfach und entsprechend war das auftretende Eigenwertproblem niedrigdimensional und daher leicht zu lösen. Bei der Betrachtung realer System, etwa in der Simulation von Verformungsprozessen in der Elastodynamik mittels Finite-Elemente-Methode, treten sehr große Matrizen ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{10^{4+} \times 10^{4+}}$) auf was das effiziente Lösen von Eigenwertproblemen nötig macht.