证券组合投资多目标规划模型

1 摘要

在现实世界之中，投资者在拥有一定数量资本的条件下，需要对于债券进行合理的资金分配，以达到分散风险并获得尽可能最大的收益。本文之中采用了由 Markowitz 提出的方差模型，对于“获得最大的利益”和“承担尽可能最小的风险”这两个目标进行规划。在第一问之中，**得到了目标权重λ为 0.5 时的投资规划组合**。在第二问之中，**通过改变目标权重λ的值，得到了若干组解，绘制出目标函数关于λ变动的曲线，并尝试找到对于绝大多数投资者来说最为“优惠”的曲线拐点**。

2 数学模型的建立

在给定的股票价格变动表（见附件 1）之中，有n支证券。假设投资者的投资金额为$m=1$。投资者向第i支股票之中投入的金额记作x_i。第i支证券在t时刻的价格记作p_i^t。同时，投资者售出股票之后，单位投资额需要缴纳交易费用C_i。

如果只考虑交易过程中，股票买入和卖出价格之差所带来的收益，第i种证券从t时刻到$t+1$时刻的投资收益率β_i^t可以表示为：

$$\beta_i^t=\frac{p_i^{t+1}-p_i^t}{p_i^t} \quad (2.1)$$

显然，β_i^t为一随机变量，第i种证券收益率的期望和风险为：

$$E(\beta_i)=\overline{\beta_i} \qquad \sigma_{ii}=E(R_i-\overline{R_i})^2 \quad (2.2)$$

扣除交易费用之后，在第t时刻，第i支股票的收益为：

$$R_i(x_i^t)=\beta_i^t x_i^t-Cx_i^t=(\frac{p_i^{t+1}-p_i^t+d_i^t}{p_i^t}-C_i)x_i \quad (2.3)$$

于是，t时刻n支证券投资组合的期望收益和R_n为：

$$R_p^t(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}ER_i(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(E\beta_i-C_i\right)x_i \quad (2.4)$$

同时，证券组合存在的风险可以通过实际收益和期望收益的平方差表示：

$$o_p^2(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(R_i(x_i)-ER_i(x_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i x_j\sigma_{ij} \quad (2.5)$$

其中，σ_{ij}是第i种证券和第j种证券之间的协方差:

$$\sigma_{ij}=E(\beta_i-E\beta_i)(\beta_j-E\beta_j) \quad (2.6)$$

在证券组合投资决策时，假定投资者不允许被卖空，即不允许卖出他人的证券以后再将其买回来归还他人的投机行为，所以要求投资者对 n 种证券的投资额满足 $x_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

同时,考虑到投资者的资金限制,要求投资者在证券之中投入的金额以及交易的手续费不超过自身持有的资金 m .即:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \le m \quad (2.7)$$

于是,可以得到了交易证券组合投资的多目标模型:

$$\begin{aligned} &\min \sigma^2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\ &\max R_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (E\beta_i - C_i) x_i \\ &s.t. \begin{cases} x_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \le m \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

证券的收益通常会随着风险的增长而增长.换而言之,不可能同时实现高风险和低收益这两个目标.于是引入新的目标函数 $U(\mathbf{X})$,对于(1.6)之中的两个目标进行线性组合.

$$\min U(\mathbf{X}) = \lambda \sigma_p^2(\mathbf{X}) - (1-\lambda) R_p(\mathbf{X}) \quad (2.9)$$

为了方便程序的运行,将上述的变量进行向量化.

表 1-1 变量名称

变量名称	变量含义
$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$	证券投资向量
$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$	交易费用向量
$\boldsymbol{V} = (\sigma_{ij})_{n \times n}$	组合交易协方差矩阵
$\boldsymbol{I}$	元素 1 构成的 n 维列向量
$\boldsymbol{R} = (E\beta_1, E\beta_2, \cdots, E\beta_n)^{\mathrm{T}}$	证券期望收益率向量
λ	目标权重系数

于是向量化之后的模型可以表示为：

$$\begin{aligned} &\min U(\boldsymbol{X}) = \lambda \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{X} - (1-\lambda)(R - C)^T \boldsymbol{X} \\ &s.t. \begin{cases} \boldsymbol{I}^T \boldsymbol{X} + \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{X} \le m \\ \boldsymbol{X} \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

由非线性规划理论知，凸规划局部极值即为全局极值，Kuhn-Tucker 条件既是最优点存在必要条件，同时也是充分条件。该模型的 Kuhn-Tucker 条件可表为：

$$\begin{cases} -2\lambda \boldsymbol{VX} + (1-\lambda)\left(R - C\right) - \mu(I + C) + Y = 0 \\ I^T \boldsymbol{X} + C^T \boldsymbol{X} + x_{n+1} = m, \quad x_j y_j = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n \\ Y \ge 0, \boldsymbol{X} \ge 0, \mu \ge 0, \lambda \ge 0 \end{cases} \quad \text{.................... (2.11)}$$

其中 μ 是与第一个约束条件相对应的 Kuhn-Tucker 乘子，$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 是与非负证券组合投资向量 $\boldsymbol{X}$ 相对应的 K-T 乘子，x_{n+1} 为第 1 个约束条件所引入的松驰变量。为求解 K-T 条件，可考虑如下线性规划问题：

$$\min \Psi(Z) = I^T Z$$

$$\begin{cases} -2\lambda \boldsymbol{VX} - \mu(I + C) + Y + Z = (1-\lambda)\left(C - R\right) \\ I^T \boldsymbol{X} + C^T \boldsymbol{X} + x_{n+1} = m,\ x_j y_j = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n \\ Y \ge 0, \boldsymbol{X} \ge 0, Z \ge 0, \mu \ge 0, \lambda \ge 0 \end{cases} \quad \text{.................... (2.12)}$$

3 数学模型的求解

3.1 $\lambda = 0.5$ 兼顾风险和收益的模型

根据题设条件，十二期的收益率矩阵 $\boldsymbol{\beta}^{12\times 3}$，得到的收益率预期向量为：

$$\mathrm{E}\,\beta = [1.08908 1.21367 \qquad 1.23458] \quad \text{............................. (3.1)}$$

根据附件之中的数据，计算 $\sigma_{ij} = E(\beta_i - E\beta_i)(\beta_j - E\beta_j)$，得到协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0.0108 & 0.0124 & 0.0131 \\ 0.0124 & 0.0584 & 0.0554 \\ 0.0130 & 0.0554 & 0.0942 \end{bmatrix} \quad \text{.................................. (3.2)}$$

使用(2.10)之中的模型进行二次规划.在 $\lambda = 0.5$ 的条件下，得到的证券投资组合为：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3.13\text{e-}07 \\ 0.66934 \\ 0.32070 \end{bmatrix} \quad \text{.. (3.3)}$$

其预期的收益率和风险为:

$$\begin{cases} risk = 1.1985 \\ yield = 0.0597 \end{cases} \quad \text{... (3.4)}$$

3.2 目标函数值关于 λ 的变化曲线

通过改变 λ 的值，来得到对应值的最优投资组合。伪代码描述如下：

算法 3.2 范围内的 λ **曲线**

Require: 收益率矩阵 $\mathbf{X}$,交易费用向量 $\mathbf{C}$, k 步长(0.01 或者更小)

Initialize:收益率期望 RE, 协方差矩阵 $\mathbf{V}$,空矩阵 **Solv** 存放投资组合

For $k \in [0,1]$

构造(2.10)求解函数: $\min \frac{1}{2}\mathbf{X}H\mathbf{X}^T + fX^T$

模型的等式\不等式\上下界约束: **A,b,Aeq,beq,ub,lb**

求解这个模型,得到这个情况下的投资组合 *temp*

投资组合存储: Concat(**Solv** ,temp)

目标权重 k 的更新: $k \to k + step$

End For

迭代 Solv,绘制 risk(λ),yield(λ)曲线.

根据以上的思路编写 MATLAB 代码,得到以下的结果:

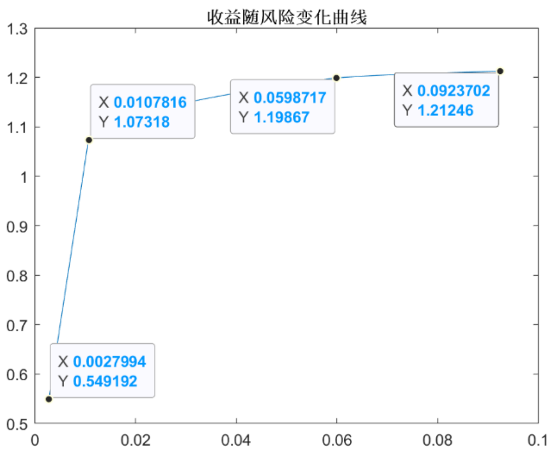

图 3-1 收益随风险变化曲线

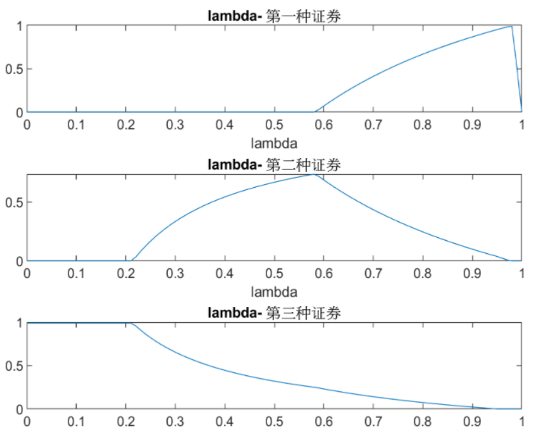

图 3-2 投资组合随 λ 变化示意图

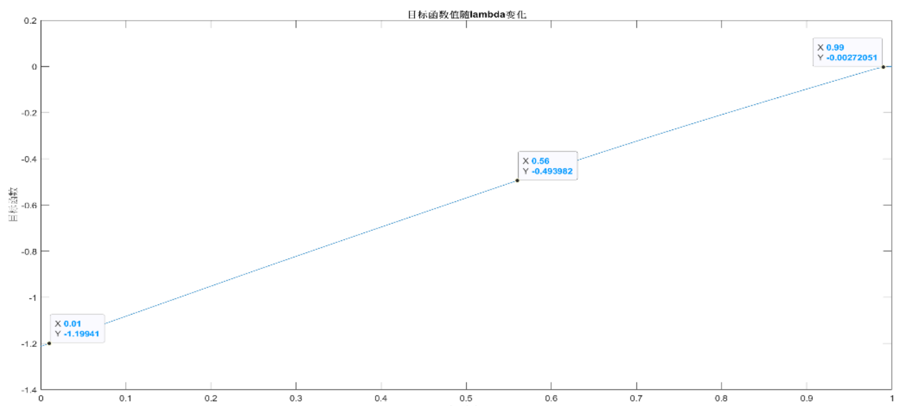

图 3-3 目标函数随 λ 变化示意图

4 基于建模结果的结论

4.1 承担风险的极限点

根据图 3-2, 收益始终会随着风险的增长而增长.但是收益曲线上存在着一个导函数不存在的点.当风险的增长超过这个曲线上的拐点之后,收益的增长率将迅速减缓.换而言之,投资者将承担更高的风险,但是无法获得与多承担的风险成比例的回报.**所以,对于大多数投资者来说,承担位于拐点处的风险最为合适.**

在图 3-2 之中,这个拐点的坐标为$\left(0.017816, 1.07318\right)$.

对于想承担更大风险的投资者而言，点(0.0598,1.1987)是极限.当超过了这个点之后,收益值可以视作基本保持不变.

4.2 承担风险与证券选择之间的关系

图 3-2 之中,在$\lambda = 1$的时候,对于风险的考量远远超过了对于收益的考量.每一个证券组合都存在风险,于是为了使风险最小,选择不投资任何证券.

通过比较这三支证券之间的风险和期望收益率,可以发现,第一支证券具有的风险最小,期望收益率最大.**在承担风险较小的时候,会倾向于选择第一支证券.随着承担风险的增加,决策结果会倾向于选择收益更大的第二支\第三支证券.**

附件 1：

表 1-1 股票价格的变动情况

年份	股票 A	股票 B	股票 C
1943	1.300	1.225	1.149
1944	1.103	1.290	1.260
1945	1.216	1.216	1.419
1946	0.954	0.728	0.922
1947	0.929	1.144	1.169
1948	1.056	1.107	0.965
1949	1.038	1.321	1.133
1950	1.089	1.305	1.732
1951	1.090	1.195	1.021
1952	1.083	1.390	1.131
1953	1.035	0.928	1.006
1954	1.176	1.715	1.908

附件 2: MATLAB 代码实现

main.m 协方差\期望计算,模型求解

```
X = [1.300    1.225      1.149;
1.103      1.290      1.260;
1.216      1.216      1.419;
0.954      0.728      0.922;
0.929      1.144      1.169;
1.056      1.107      0.965;
1.038      1.321      1.133;
1.089      1.305      1.732;
1.090      1.195      1.021;
1.083      1.390      1.131;
1.035      0.928      1.006;
1.176      1.715      1.908;
];
%原始收益率数据
[m,n]=size(X);
R = [];



RE = mean(X,1);
sigma = cov(X);
solv = [];

for k = 0:0.01:1
        H = 2*k * sigma;
        f = (k-1)*RE';
        A = (0.01+1)*ones(1,3);
        b = [1];
        temp = quadprog(H,f,A,b,[],[],[0;0;0],inf);
        solv = [solv;temp'];

end

risk = [];
yield = [];
for i = 1:100
      yield = [yield;fun1(solv(i,:))];
      risk = [risk;fun2(solv(i,:))];
end
```

fun1.m 求解投资组合预期收益

```
function yield = fun1(x)
RE=[1.08908333333333,1.21366666666667,1.23458333333333];
% 预期收益率
yield = x*(RE-ones(1,3)*0.01)';
end
```

fun2.m **求解投资组合的风险**

```
function op2 = fun2(x)
sigma=[0.0108075378787879,0.0124072121212121,0.0130751287878788;
       0.0124072121212121,0.0583916969696970,0.0554263939393939;
       0.0130751287878788,0.0554263939393939,0.0942268106060606];
% 协方差矩阵 表示对应证券的风险
op2 = x*sigma*x';
end
```

fun3.m 求解 lamda 对应的目标函数

```
function y = fun3(lambda,X)
sigma = [0.0108075378787879,0.0124072121212121,0.0130751287878788;
       0.0124072121212121,0.0583916969696970,0.0554263939393939;
       0.0130751287878788,0.0554263939393939,0.0942268106060606];
RE = [1.08908333333333,1.21366666666667,1.23458333333333];
   y = lambda*X'*sigma*X-(1-lambda)*(RE'-ones(3,1)*0.01)'*X;
end
```

plotdata1.m 绘出 Subplot，投资组合随 lambda 的变动关系

```
figure;
subplot(3,1,1);
l =0:0.01:1;
plot(0:0.01:1,solv(:,1));

subplot(3,1,2);
y2 = solv(:,2);
plot(l,y2);

subplot(3,1,3);
y3 = solv(:,3);
plot(l,y3)

% solv 是在执行 main1.m 之后得到的证券组合数据
```