高压油管的压力控制问题

目录

1　问题 1 模型的建立与求解

1.1 问题 1 第一问

如图 1 所示，本题之中需要控制的量是油管之中压强的值 P，使其能够最大程度的不偏离预设定的目标值 P_0。采取的方法是，通过控制单向阀开启的时长来控制管道之中液体的质量，从而控制管道之中液体的压强。

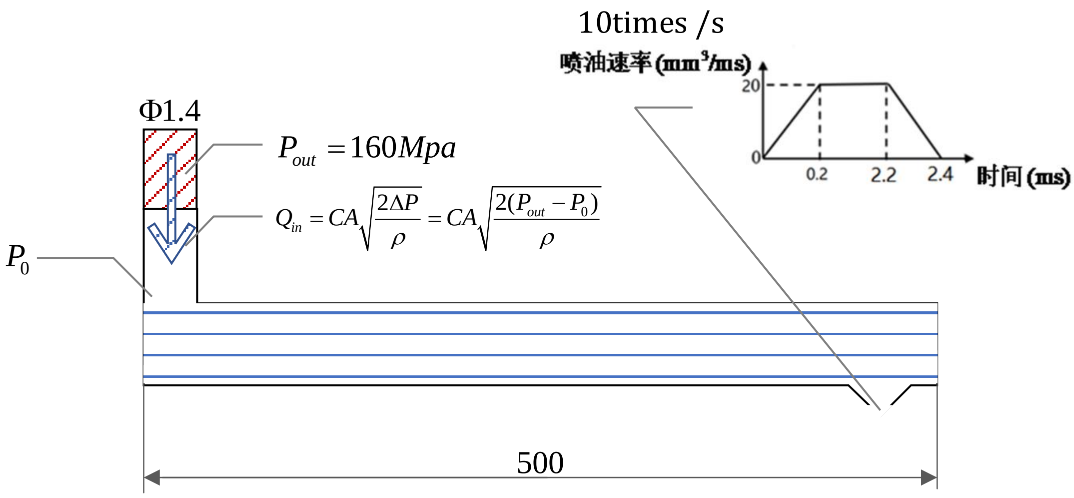

图 1 喷油模型 示意图

为了便于分析，对问题 1，有如下假设：

1. A,B 之中的阀门均以周期性的方式开闭
2. 在 t=0 时刻，A，B 两个单向阀都处于恰好打开的状态

对于高压油泵 A 的流入流量 Q_{in}，有：

$$Q_{in}=\begin{cases} CA\sqrt{\dfrac{2(P_{out}-P)}{\rho_{160Mpa}}} & t\in[kT_1,kT_1+t_0], \\ 0 & t\in(kT_1+t_0,(k+1)T_1]. \end{cases}$$

$$k=0,1,2,\cdots,n. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.1.1)$$

$$T_1=t_0+10$$

```
%% function in_Flow.m
% 计算输入 t ms 时刻时候的输入水流量
function y=inFlow(t,intime)
    Period = intime + 10;
    tempt = mod(t,Period);
    if tempt < intime
        y = C*s_in*sqrt(2*(p_out-p)/p2rho(p_out));
    else
```

```
        y = 0;
    end
```

在式(1.1)之中，T_1代表的是单向阀开、闭一次的周期，t_0代表的是单向阀 A 开启持续的时间；T_1、t_0单位为 ms，Q_{in}的单位为 mm^{3}ms^{-1}。

对于高压喷油嘴的输出流量Q_{out}，有：

$$Q_{out}=\begin{cases}100(t-kT_2) & t\in[kT_2,kT_2+0.2]\\ 20 & t\in(kT_2+0.2,kT_2+2]\\ -100(t-kT_2)+240 & t\in(kT_2+2,kT_2+2.2]\\ 0 & t\in(kT_2+2,(k+1)T_2]\end{cases}\quad\text{................}(1.1.2)$$

令$t_1=t\bmod T_2$，则以上的式子可以改写为：

$$Q_{out}=\begin{cases}-50|t_1-0.2|-50|t_1-2.2|+80 & 0\le t_1\le 2.4\\ 0 & otherwise\end{cases}.\quad\text{................}(1.1.3)$$

```
%% function out_Flow
% 计算输出 t ms 时刻的输出水流量
function y = out_Flow(t)
    Tout = 100;
    tempt = mod(t,Tout);
    y = max(-50abs(tempt-0.2)-50abs(tempt-2.2)+120,0);
end
```

in_Flow.m 和 out_Flow.m 用于计算t时刻流入或者流出油管的流量Q_{in}与Q_{out}。

式(1.2)之中的单位与式(1.1)之中约定的单位相同。根据Q_{in}和Q_{out}，能够得到在Δt时间之内油管之中的质量差值Δm：

$$\Delta m=\Delta m_{in}-\Delta m_{out}=(Q_{in}\rho_1-Q_{out}\rho_2)\Delta t\quad\text{........................}(1.1.4)$$

由注 1 可知，石油的弹性模量和液体压力之间存在着对应关系，即：石油液体在不同的压力条件下的密度值不同。因此，使用ρ_1表示高压油泵 A 中 160Mpa 压力条件下石油的密度；ρ_2表示在管道之中压强值为p条件下的石油密度。

在(注一)之中给出了燃油压强变化量和密度变化量之间存在正比关系：

$$dp=\frac{E}{\rho}d\rho,\rho(100)=0.850\text{.................................}(1.1.5)$$

同时在附件一之中给出了弹性模量E和燃油压强p之间的关系。尝试拟合映射关系：$p\xrightarrow{E(p)}E$，使得(1.1.4)之中的关系能够分离变量，变成：

$$\frac{dp}{E(p)}=\frac{d\rho}{\rho}\text{...}(1.1.6)$$

对于 1.1.5 之中的式子进行积分，得到：

$$H(p)\Big|_{100Mpa}^{P}=\int_{100Mpa}^{P}\frac{dp}{E(p)}=\int_{0.85g\cdot mm^{-3}}^{\rho_0}\frac{d\rho}{\rho}=\ln\rho\Big|_{0.85g\cdot mm^{-3}}^{\rho_0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1.1.7)$$

因此：

$$\frac{\rho}{\rho_0}=e^{H|_{100}^{P}}=e^{\int_{100}^{P}\frac{dp}{E(p)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1.8)$$

在以下的 fitdata.m 之中，我们先读取**“附件 3-弹簧模量与压力”**之中的原始数据 *E* 和 *p*，之后以多项式的形式来拟合 *E* 与 *p* 之间的映射关系 *E(p)*.

```
%% fitdata.m
% to load the raw statistics from the xlsx file
% to definite the initial variables.

data1 = xlsread("附件 3-弹性模量与压力.xlsx"); %读取原始数据
plot(data1(:,1),data1(:,2))                    %原始数据可视化

% 采用 3 阶的 polynomial 对于模量-压力进行拟合
y=polyfit(data1(:,1),data1(:,2),3)
fitdata = polyval(y,0:0.1:200);
hold on;
plot(0:0.1:200,fitdata)                    % 绘制拟合之后的数据
```

得到的三次拟合结果为：

$$E(p)=1.0004\times10^{-4}x^3-0.0011x^2+5.4744x+1531.9\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1.1.9)$$

由下图 2 知，使用 3 次函数进行拟合能够保证参数尽可能少的情况下实现较好的拟合效果。

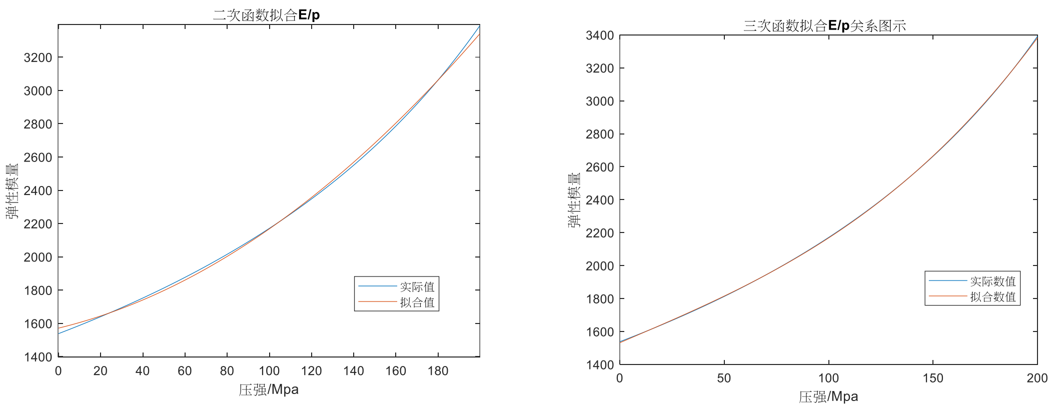

图 2 分别用二次和三次函数拟合的示意图

由图示可知，使用 3 次函数进行拟合时，基本上模量的实际值和拟合得到的值能够完全重合。在求解（1.1.7）时，由于直接积分求解得到的表达式不方便计算，故对于式(1.1.7)右侧的积分上界 *p* 以 0.1 的增量递增，通过数值积分的方式计算石油密度的增量 $\frac{\rho}{\rho_0}$。具体函数的实现如下 Integal_CALC.m 所示：

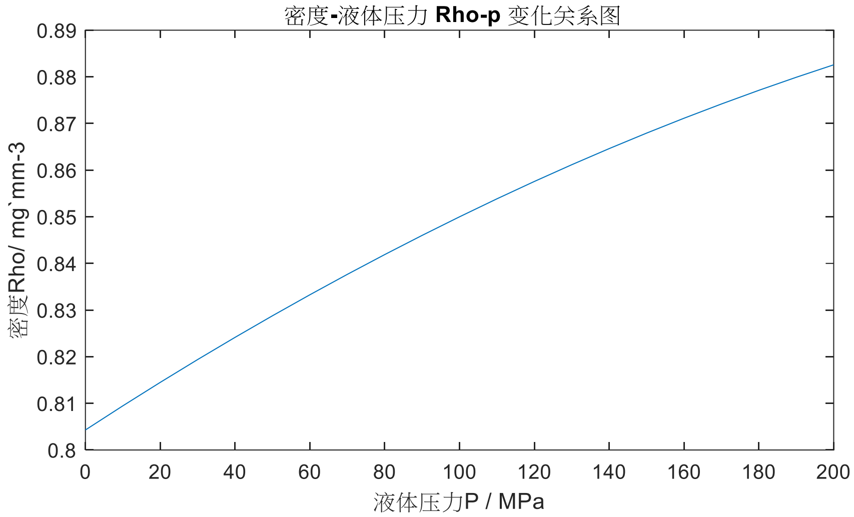

图 3 密度-液体压力变化关系

```
%% IntegralCALC.m
% 通过二者的微分表达式，用于计算模量 E 和液体压强 p 之间确切的对应关系
syms p;  % 定义符号型的变量 p
H = 1/(([p^3,p^2,p^1,1]y')); %y 为 fitdata.m 之中拟合的多项式系数

# %求解积分的式子并保留 4 位有效数字
H2 = vpa(simplify(H),4);

PressureA = 0 :0.1 :200;   %对于 Pressure 变量进行采样
RhosA = ones(length(PressureA),1)*0.85;  % 初始化 Rhos
for i = 1: length(PressureA)
% 求解变上限积分  并将值赋给 Rhos 数组
    deltarate = exp(int(H,100,PressureA(i)));
    RhosA(i) = deltarate  RhosA(i);
End

PressureA = PressureA';
plot(PressureA,PhosA);   %可视化
```

通过上述的 Integral_CALC.m 命令，可以得到石油密度 ρ 随着液体压力 p 从 0MPa 至 200Mpa 步长为 0.1 变化的数据，将其存储于“Appendix I.xlsx”文件的 Sheet1 之中。使用 MATLAB 之中提供的 Curve fitting 工具箱，采用傅里叶级数的方式对于图 3 所示的映射关系进行拟合，得到近似的解析解：

$$\rho(p) = 1.766\cos(8.511e-4\cdot p) + 0.6126\sin(8.511e-4\cdot p) - 0.9617 \quad (1.1.10)$$

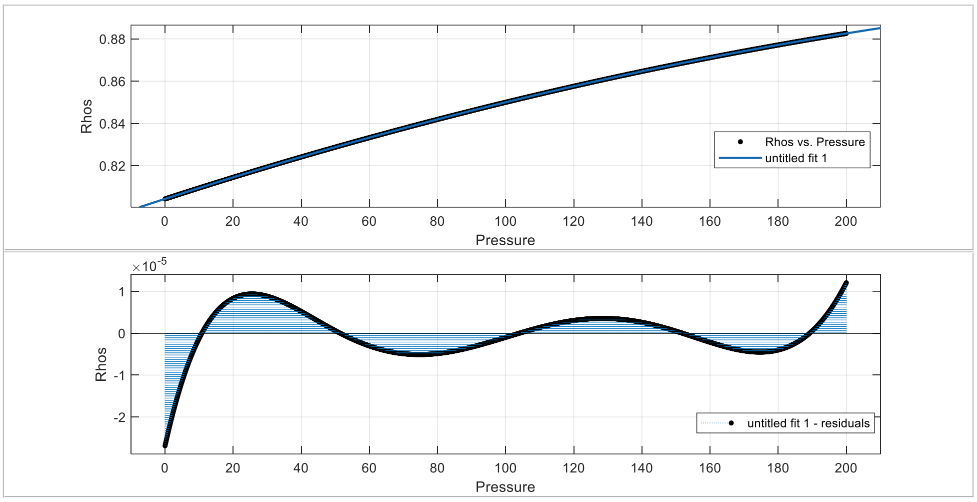

图 4 Fourier 函数拟合 ρ - p 关系

如图 4，图的上半部分展示的是拟合值和真实值之间的对比情况，下半部分显示的是拟合值和真实值之间的残差变化的情况。可以发现残差的数量级 10^{-5} 远远小于 ρ 的数量级 10^{0}。

同时，对于 p - ρ 之间的逆映射，由于从 ρ 到 p 的映射使用函数拟合的方式具有着 10^{-2} 数量级的误差，故使用 CURVE FITTING 工具箱之中插值的方法来进行拟合。并将插值的模型保存为 fittedmodel.mat.

于是编写 rho2p.m 和 p2rho.m, 用于实现式(1.1.9)与式(1.1.10)的映射：

```
%% function rho2p.m
% 用于从已知的 rho 倒推出 tank 之中的液压力
function y = rho2p(rho)
    y = fittedmodel(rho);
end
```

```
%% function p2rho.m
% 根据拟合之后的结果（参数），用于实现从 p 到 rho 的转换
function y = p2rho(p)
    w = 8.511e-4;
    a1 = 1.766;
    b1 = 0.6126;
    c = -0.9617;
    y = a1.*cos(w*p)+b1.*sin(w*p)+c;
end
```

由于在本题之中，求解油管之中的液体压强偏移量 Δp 并没有直接与具体的函数表达式相关联，故无法采用函数表达式优化的方法求解最为理想的进油时间。于是采用时间差分的方式模拟出每一个时刻的油管之中的液体质量 m，液体压力 p，以及石油的密度 ρ。并对于其偏离设定压强 p_0 的误差进行累加。

对于 $[t_1, t_2]$ 这个区间，将其等分为 n 份，于是所有观察的时间点可以构成一

个集合：$\{t_1, t_1+\Delta t, \cdots, t_1+(n-1)\Delta t, t_2\}$。其中 $\Delta t = \dfrac{t_2 - t_1}{n}$。对于每个观察时间点测得的 m，构成集合 $\{m_0, m_1, \cdots, m_n\}$。

对于其中的任意一个观察时间节点 $t_1 + k\Delta t, 0 \le \forall k \in \mathbb{N} \le n$，有：

$$m_k = m_{k-1} + \int_{t_1+(k-1)\Delta t}^{t_1+k\Delta t} Q_{in} \cdot \rho_{out} dt - \int_{t_1+(k-1)\Delta t}^{t_1+k\Delta t} Q_{out} \rho_{k-1} dt \quad \text{..............(1.1.11)}$$

在式（）之中，ρ_{k-1} 表示的是在 $t+(k-1)\Delta t$ 的时刻油管之中的密度值。同样，根据密度公式得到 $t_1 + k\Delta t$ 时刻油管之中的密度 ρ_k 和压强 p_k：

$$\rho_k = \frac{m_k}{V}, p_k = p(\rho_k) \quad \text{..................................(1.1.12)}$$

使用 update 函数，对于全局变量 ρ p 和 m 进行一次更新：

```
%% function update
% 用于根据上一个时刻的 m 来计算此时的 m,并对于 rho 和 p 进行一次更新
% 注意 m rho p 为全局变量
function [] = update(step,inPeriod)
   global rho p m V t;
   t2 = mod(t,inPeriod+10);
   tempinm =
integral(@(x)inFlow(x,inPeriod),t,t+step,'ArrayValued',true) .*
p2rho(160);
# tempinm 是某个时间段的进入流量
   tempoutm = integral(@outFlow,t,t+step,'ArrayValued',true).rho;
   m = m + tempinm - tempoutm;
   rho = m./V;
   p = rho2p(rho);
   t = t + step;
end
```

于是使用 1 范数和 2 范数刻画 t_1 时刻到 t_2 时刻 p 偏移 p_0 的总偏移量：

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_i - p_0| \quad \text{.......................................(1.1.13)}$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_0)^2 \quad \text{.....................................(1.1.14)}$$

根据式子（1.1.13）和（1.1.14），我们编写了 prob1.m（主函数），通过对于上文之中的其他函数的调用，从而实现了对于石油管道之中的压力的时刻仿真，并计算其偏差的绝对值总和以及偏差平方和。

```
%% function prob1
% 通过向 function update 之中上传 inPeriod（进油阀门开启时间），并选择
loss 模式
% startime : 表示计入模拟的时间
% endtime :  结束模拟的时间
% step : 差分模拟的步长
% loss :  选择 1 范数 or2 范数
```

```
function y=prob1(startime,endtime,step,inPeriod,options)
    y = 0;
    global t p pex;
    reseting();% 对于几个局部变量进行重置
    if options ==1
        temploss = @abs;
    else
        temploss = @norm;
    end
    if startime ~=0
        if mod(startime,step)~=0
            startime = idivide(startime,step,'ceil')  step;
        end
        for i = 1:startime/step
            update(t,step,inPeriod);
        end
    end
    for i = 1:(endtime - startime)/step
        update(step,inPeriod);
        y = y + temploss(p-pex);
    end
end
```

在新的.m 文件之中，我们新建了一个函数脚本，绘制从 0 到 2，步长为 0.1 的区间之内原来的 Loss 函数的值，得到的结果如下图所示：

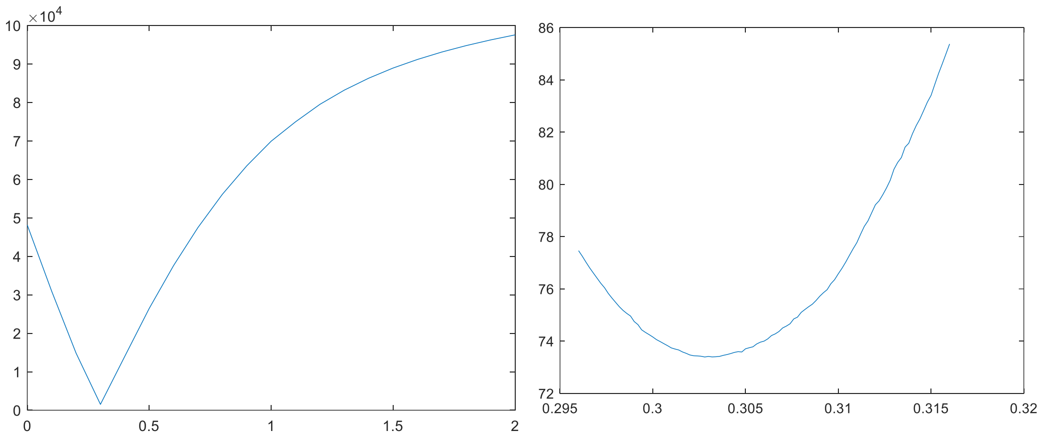

图 5 压强偏差和随着进油时间的偏移量

根据函数的趋势，可以得出原函数是一个并不光滑的凸函数。可以将搜索最小值的范围锁定于[0.2,0.4]的范围之内，下面寻找函数最优解的方法采用区间搜索的算法，如下图所示：

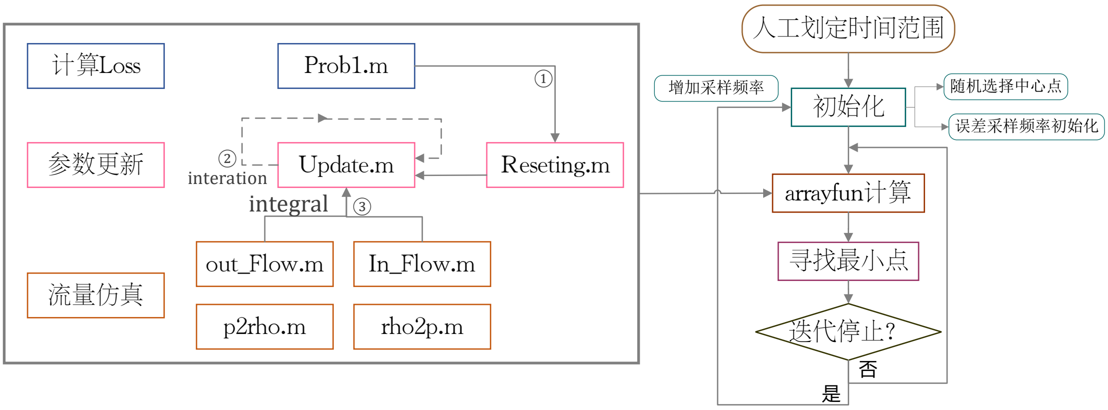

图 6 算法流程示意图

对于 $[0.2, 0.4]$ 内的区间，取 $x = 0.3$ 作为初始寻找的点。每次在区间中按照等间距的方式采样区间之中 11 个点的函数值，找到最小的点之后可以将邻域的范围进一步的缩小，从而找到最小值所在的点。

```
%% searching
% 三轮寻找最小值
for i = 1: 5
    A = point-range : interval : point + range;
    fun = @(x)loss(startime,endtime,step,x,options);
    funcA = arrayfun(fun,A);
    [~,index] = min(funcA);
    fprintf("第%d 轮得到结果: %f",i,A(index));
    point = A(index);
    range = range/10;
    interval = interval/10;
end
```

1.2 最终结果

通过区间寻找得到的最优解为：

$$t_{in} = 0.2910\,\text{ms}$$

绘制出 0~5s 内的结果如下图所示：

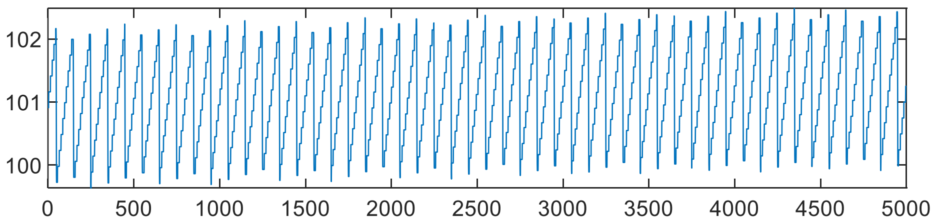

图 7　5s 内压强随时间变化情况

2 问题 1 的第二问

采用第一问之中的模型，对于第 2s，5s，10s 的调整之后能够稳定在 150Mpa。先绘出 2s，5s，10s 秒之后的压强随进油时间的图像，如下图所示：

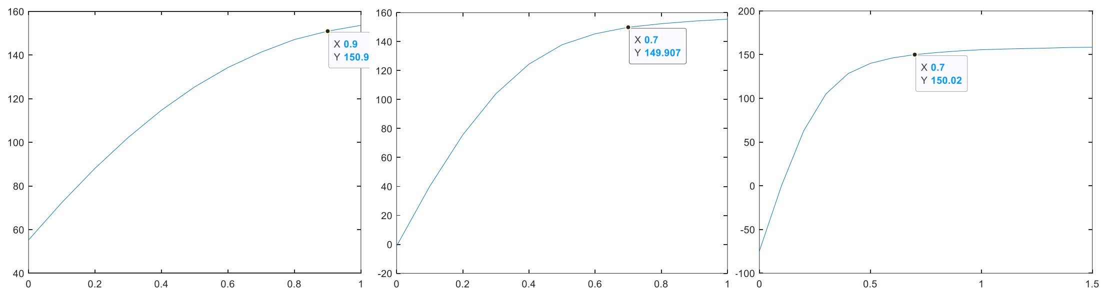

图 8　2s/5s/10s 后油管内压强随进油时间变化情况

得到最终结果，对于 2s 内达到 150Mpa 的情况，在 2s 内保持 0.8954ms 的进油周期，在 2s 后保持 0.77ms 的进油周期，得到的压强随时间的变化结果如下图所示：

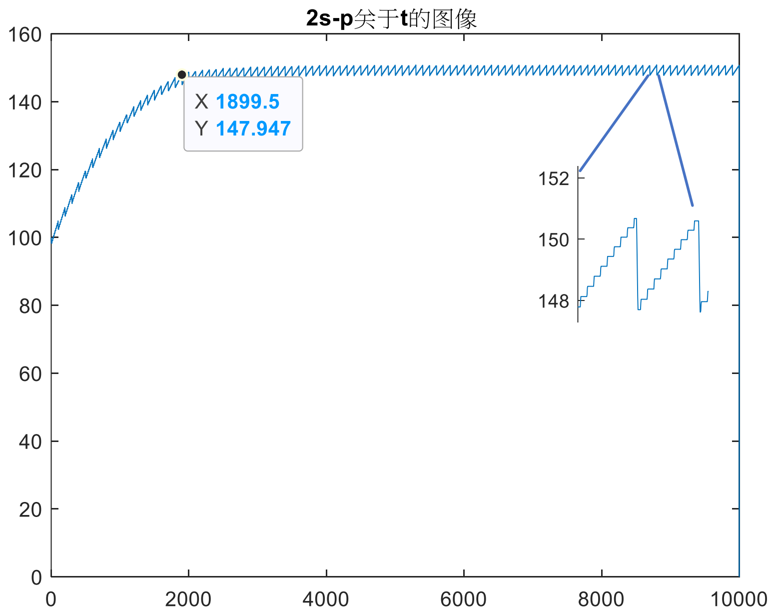

图 9　2s 内达到 150Mpa 的示意图

对于需要在 5s 秒左右达到压强 150Mpa，采用的方法是，从 0-5s 采用 0.7529ms 的进油区间，在 5s 以后采用 0.77ms 的进油区间。得到的结果图如下图 10 所示：

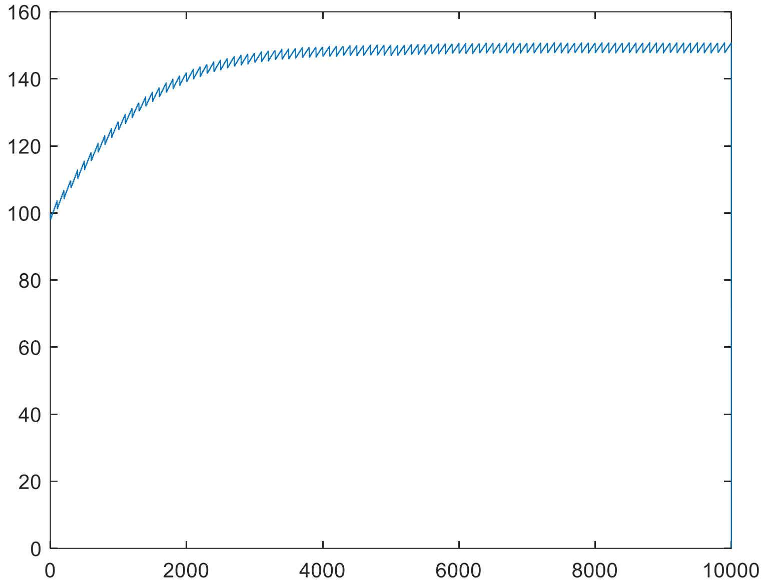

图 10 5s 内达到 150Mpa 示意图

对于需要在 10s 内达到 150Mpa 的要求，采用的方案是，从 0-10s 采用 0.72ms 的进油区间，从 10s 之后开始采用 0.77ms 的进油区间，得到的最终结果如图 11 所示：

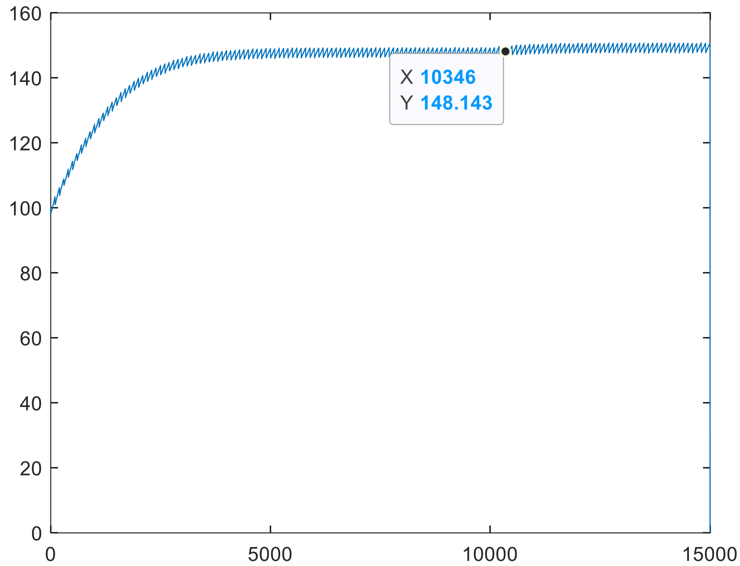

图 11 10s 内达到 150Mpa 示意图