อักษร

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

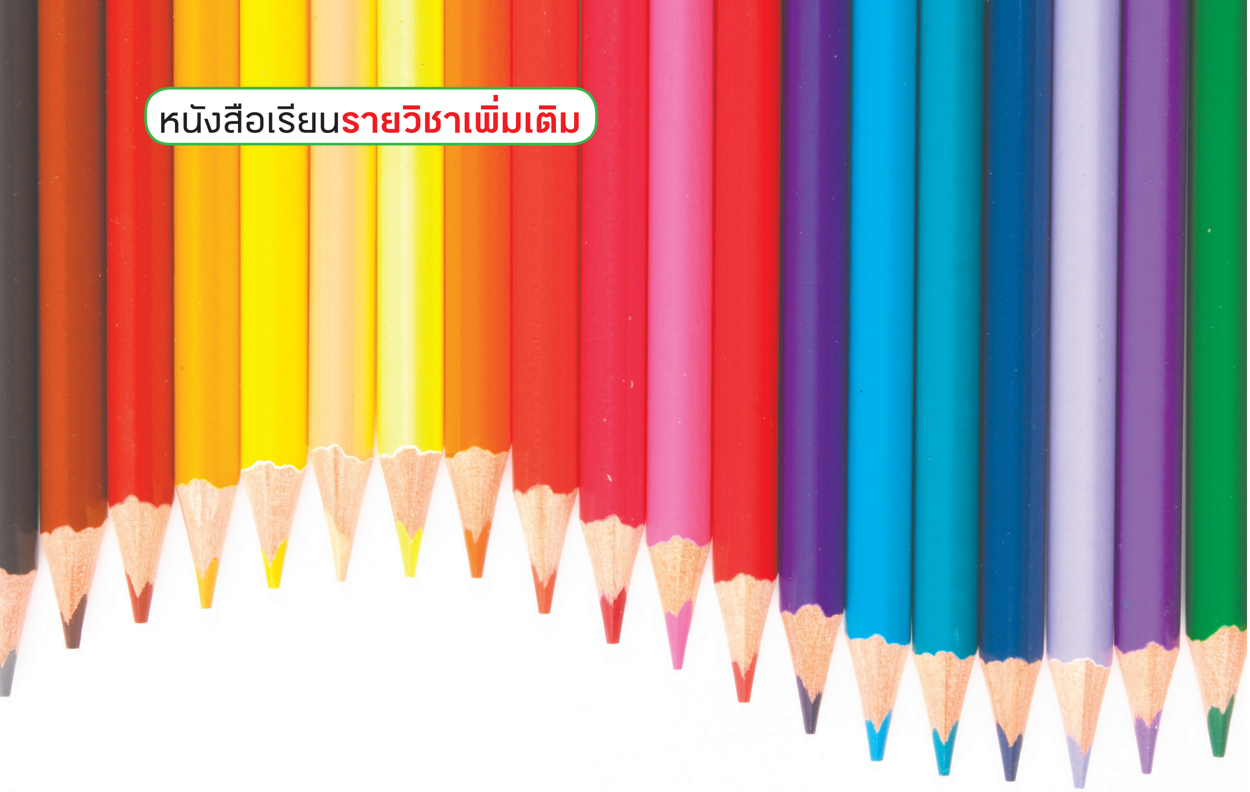
ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.5
เล่ม 1

- กนกวลี อุษณกรกุล
- ธณชัย มาเจริญทรัพย์
- อำพล ธรรมเจริญ
- วุฒิชัย ศรีวสุธากุล
- ไอศุริย สุดประเสริฐ
- นพรัตน์ วันแก้ว
- จินดา อยู่เป็นสุข
- สายสุณี สุทธิจักษ์

138.-



หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

นางกนกวลี อุษณกรกุล
นางจินดา อยู่เป็นสุข
นางนพรัตน์ วันแก้ว
รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ
นายรณชัย มาเจริญทรัพย์
นางสาวสายสุณี สุทธิจักษ์
นายไอศุริย สุดประเสริฐ
นายวุฒิชัย ศรีวสุธากุล

ผู้ตรวจ

ผศ.รุจิรา พิพิธพจนการณ์
นางสาวทองดี กุลแก้วสว่างวงศ์
นางสาวบูรนาถ เฉยฉิน

บรรณาธิการ

นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช

ปีที่พิมพ์ 2564

พิมพ์ครั้งที่ 4

จำนวนพิมพ์ 10,000 เล่ม

ISBN : 978-616-203-794-8

รหัสสินค้า 3516002

อักษร
www.aksorn.com

จัดพิมพ์และจำหน่ายทั่วประเทศโดย
บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด
142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200
โทร./แฟกซ์. 0 2622 2999 (อัตโนมัติ 20 คู่สาย)
พิมพ์ที่ : **บริษัท ไทยร่มเกล้า จำกัด** โทร. 0 2903 9101-6

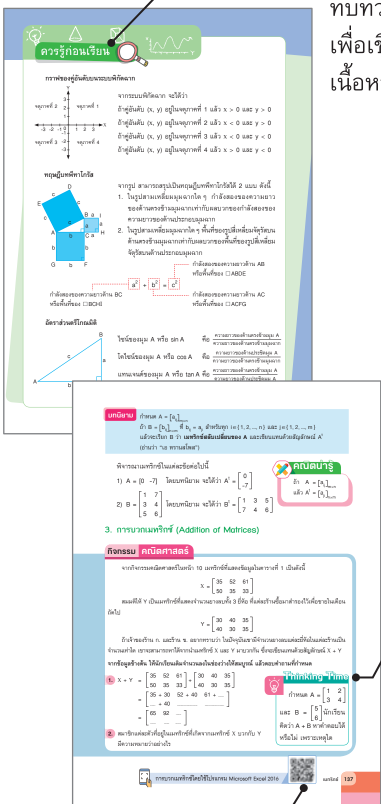
คำแนะนำในการใช้สื่อ

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 จัดทำขึ้นสำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยดำเนินการจัดทำให้สอดคล้องตามผลการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ทุกประการ ส่งเสริมทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ทั้งทักษะด้านการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา การคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสาร และการร่วมมือ เพื่อให้ผู้เรียนรู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และสภาพแวดล้อม สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นี้ คณะผู้เรียบเรียงได้จัดแบ่งออกเป็น 2 เล่ม ดังนี้

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม **คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1**	หน่วยการเรียนรู้ที่	**1 - 3**
หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม **คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2**	หน่วยการเรียนรู้ที่	**1 - 3**

องค์ประกอบต่างๆ ในแต่ละหน่วย



ควรรู้ก่อนเรียน
ทบทวนความรู้เดิม เพื่อเชื่อมโยงเข้าสู่เนื้อหาใหม่

Thinking Time
คำถามกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดต่อยอดจากเนื้อหาที่เรียน

คำถามประจำหน่วยการเรียนรู้
ที่ครอบคลุมผลการเรียนรู้ในหน่วยการเรียนรู้

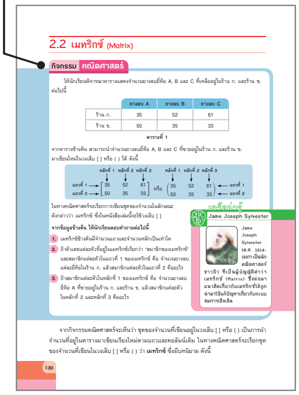
ผลการเรียนรู้
ที่สอดคล้องกับเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
ขอบข่ายเนื้อหาในหน่วยการเรียนรู้

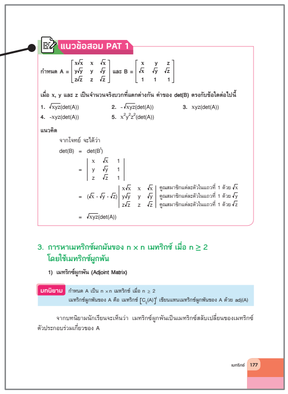
QR Code
รองรับการเรียนรู้ผ่านสื่อดิจิทัล

กิจกรรมคณิตศาสตร์

เพื่อส่งเสริมการเรียนรู้
แบบ Active Learning



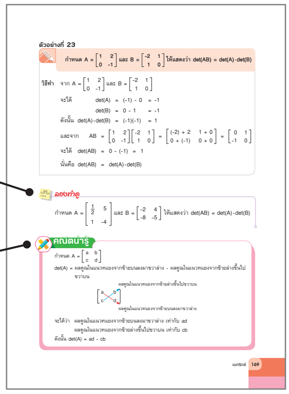
แนวข้อสอบ



เข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา เพื่อให้ผู้เรียนได้ศึกษาแนวคิดก่อนสอบจริง

ลองทำดู

เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทำจนเกิดความชำนาญ

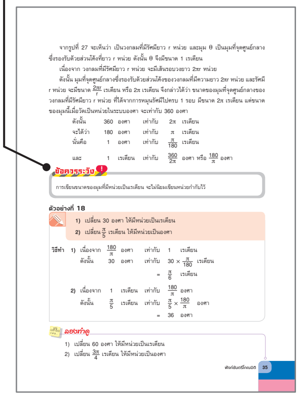


คณิตน่ารู้

เสริมความรู้ หรือข้อสังเกตที่ได้จากเนื้อหาที่เรียน

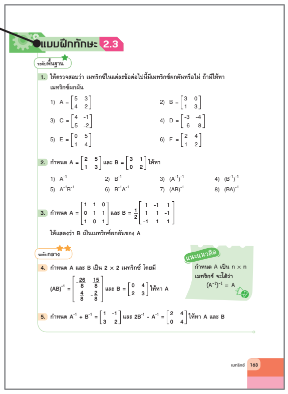
ข้อควรระวัง

อธิบายในสิ่งที่ผู้เรียน
มักเข้าใจผิดหรือคลาดเคลื่อน



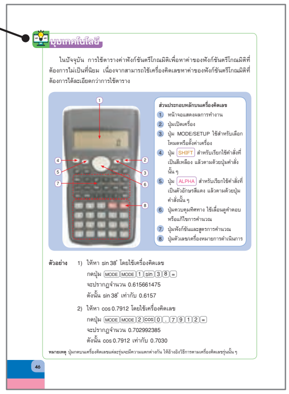
แบบฝึกทักษะ

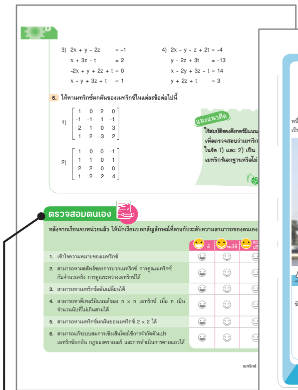
แบ่งระดับความยากง่าย เหมาะสม
กับระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน



มุมเทคโนโลยี

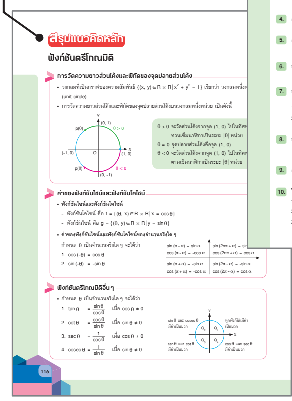
ความรู้เกี่ยวกับการใช้เทคโนโลยี
เป็นเครื่องมือเพื่อช่วยตรวจสอบคำตอบ

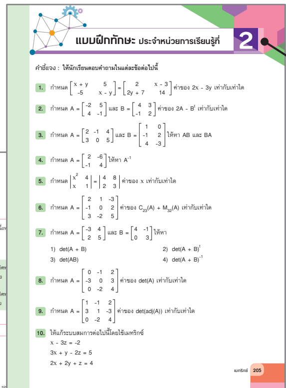




สรุปแนวคิดหลัก

โดยรวมของหน่วย
การเรียนรู้ เพื่อทบทวน
ความรู้ให้แก่ผู้เรียน





ตรวจสอบตนเอง

แบบประเมินเพื่อให้ผู้เรียน
สามารถตรวจสอบความรู้
ความเข้าใจของตนเอง

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์
ไปใช้ในชีวิตจริง

แบบฝึกทักษะประจำหน่วยการเรียนรู้

เพื่อประเมินความรู้ความเข้าใจ
ของผู้เรียนประจำหน่วย
การเรียนรู้

สารบัญ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

QR Code หน้า 42, 137, 210

คำอธิบาย รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เวลา 80 ชั่วโมง

ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของไซน์และโคไซน์ และการหาระยะทางและความสูง ระบบสมการเชิงเส้น การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม และการใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการนำเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

โดยการจัดประสบการณ์หรือสร้างสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่ใกล้ตัวให้ผู้เรียนได้ศึกษา ค้นคว้า ฝึกทักษะ โดยการปฏิบัติจริง ทดลอง สรุป รายงาน เพื่อพัฒนาทักษะ กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำประสบการณ์ด้านความรู้ ความคิด ทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์

เพื่อให้เห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานได้อย่างเป็นระบบ มีระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
4. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
5. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
6. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว
7. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
8. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวม 8 ผลการเรียนรู้

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

“GPS เป็นเทคโนโลยีที่ใช้ช่วยในการระบุตำแหน่งของวัตถุหรือบุคคลบนพื้นผิวโลกโดยใช้การส่งคลื่นสัญญาณจากพื้นผิวโลกไปยังดาวเทียม จากนั้นจึงส่งต่อกลับมายังผู้รับที่อยู่บนพื้นผิวโลกอีกครั้งหนึ่ง”

นักเรียนคิดว่า GPS มีความเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันตรีโกณมิติอย่างไร

ผลการเรียนรู้

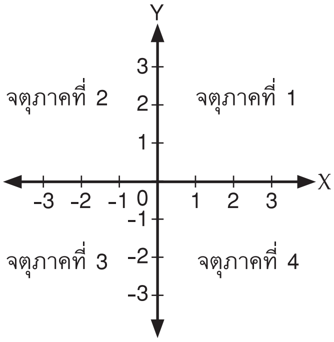
- เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
- เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ
- กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

ควรรู้ก่อนเรียน

กราฟของคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก



จากระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

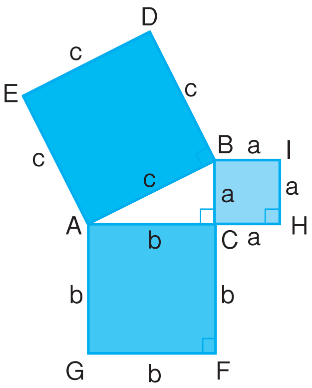
ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว $x > 0$ และ $y > 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 2 แล้ว $x < 0$ และ $y > 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 3 แล้ว $x < 0$ และ $y < 0$

ถ้าคู่อันดับ (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 4 แล้ว $x > 0$ และ $y < 0$

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส



จากรูป สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ 2 แบบ ดังนี้

1. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก
2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

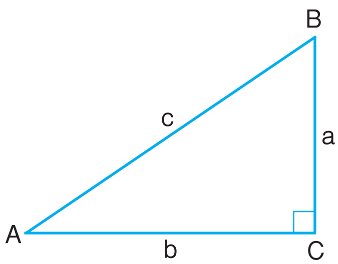
กำลังสองของความยาวด้าน AB
หรือพื้นที่ของ □ABDE

$$\boxed{a^2} + \boxed{b^2} = \boxed{c^2}$$

กำลังสองของความยาวด้าน BC
หรือพื้นที่ของ □BCHI

กำลังสองของความยาวด้าน AC
หรือพื้นที่ของ □ACFG

อัตราส่วนตรีโกณมิติ



ไซน์ของมุม A หรือ $\sin A$ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

โคไซน์ของมุม A หรือ $\cos A$ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

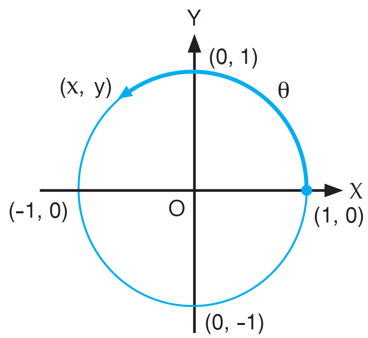
แทนเจนต์ของมุม A หรือ $\tan A$ คือ $\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน

1.1 การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

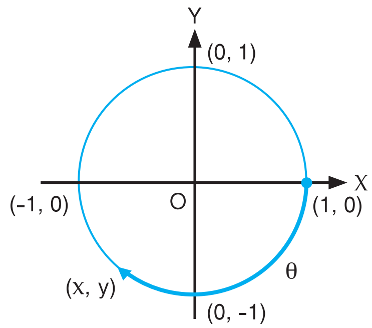
นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) รัศมียาว r หน่วย แต่ถ้าความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) รัศมียาว 1 หน่วย และมีความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 2π หน่วย เรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)

วงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะมีจุดสิ้นสุดเพียง 1 จุดเท่านั้น คือ จุดปลายส่วนโค้งคู่อันดับ (x, y) ดังรูป



รูปที่ 1 $\theta > 0$

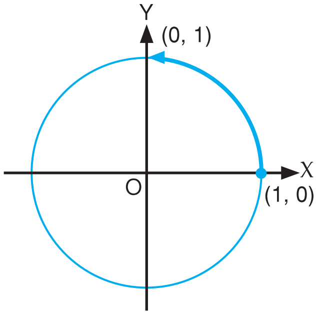
จากรูปที่ 1 ถ้า $\theta > 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ θ หน่วย



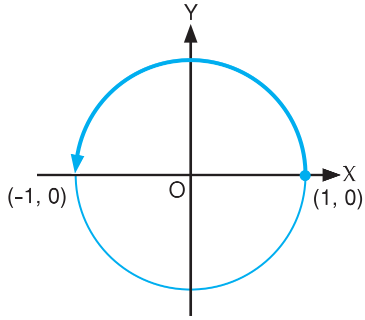
รูปที่ 2 $\theta < 0$

จากรูปที่ 2 ถ้า $\theta < 0$ ให้วัดจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

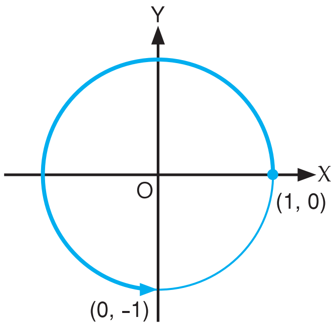
รูปต่อไปนี้ เป็นการแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน ดังนี้



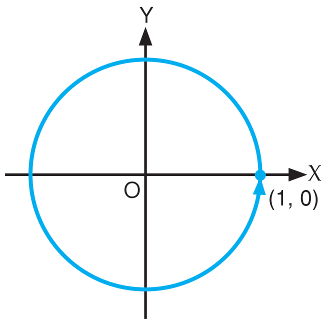
รูปที่ 3 $\theta = \frac{\pi}{2}$



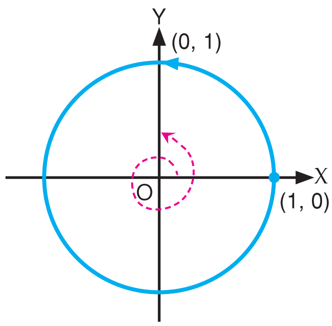
รูปที่ 4 $\theta = \pi$



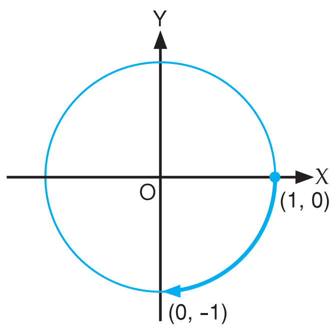
รูปที่ 5 $\theta = \frac{3\pi}{2}$



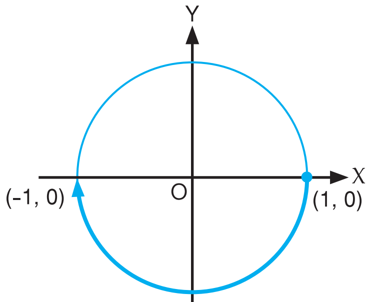
รูปที่ 6 $\theta = 2\pi$



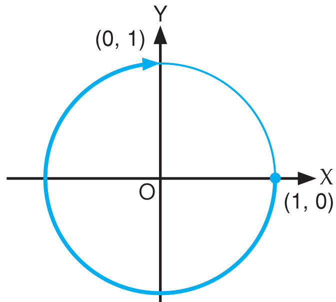
รูปที่ 7 $\theta = \frac{5\pi}{2}$



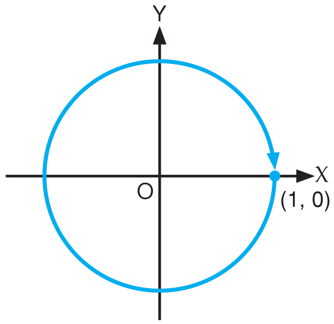
รูปที่ 8 $\theta = -\frac{\pi}{2}$



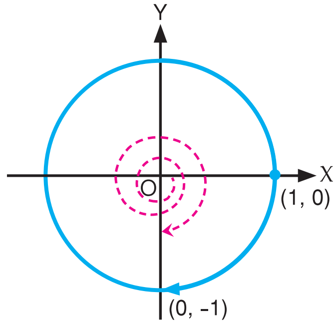
รูปที่ 9 $\theta = -\pi$



รูปที่ 10 $\theta = -\frac{3\pi}{2}$



รูปที่ 11 $\theta = -2\pi$



รูปที่ 12 $\theta = -\frac{9\pi}{2}$

จากรูปที่ 3 - 6 และ 8 - 11 จะเห็นว่า $|\theta| \leq 2\pi$ แสดงว่า วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไม่เกิน 1 รอบ แต่รูปที่ 7 และ 12 จะเห็นว่า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดความยาวส่วนโค้งจากจุด (1, 0) เกิน 1 รอบ

คณิตน่ารู้

วงกลมหนึ่งหน่วยเป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย ดังนั้น วงกลมหนึ่งหน่วยจะมีเส้นรอบวงยาวเท่ากับ $2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย

Thinking Time

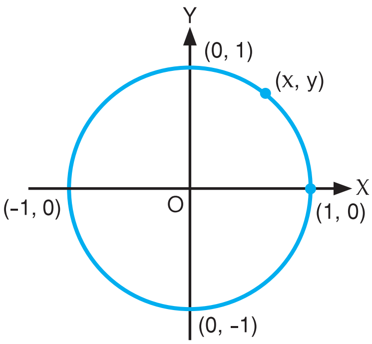
ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย บนวงกลมหนึ่งหน่วยของรูปที่ 3 - 12 เป็นเท่าใด
2) จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย บนวงกลมหนึ่งหน่วยของรูปที่ 3 - 12 รูปใดบ้างที่เป็นจุดเดียวกัน
3) ถ้าวัดระยะจากจุด (1, 0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลมเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ด้วย θ ที่แตกต่างกันหลายค่า แล้วพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งต้องใช้การเชื่อมโยงความรู้จากการหาภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ โดยมีแกน X หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

1. ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ (Sine Function and Cosine Function)



รูปที่ 13

พิจารณาพิกัดของ (x, y) จะเห็นว่า

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|0|$ มีพิกัด (1, 0)

$\theta = \frac{\pi}{2}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{\pi}{2}\right|$ มีพิกัด (0, 1)

$\theta = \pi$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\pi|$ มีพิกัด (-1, 0)

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{3\pi}{2}\right|$ มีพิกัด (0, -1)

$\theta = 2\pi$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|2\pi|$ มีพิกัด (1, 0)

จึงกล่าวได้ว่า ค่าของ θ หนึ่งค่า จะกำหนดพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงพิกัดเดียว นั่นคือ θ หนึ่งค่า กำหนดค่าของ x ได้หนึ่งค่า และกำหนดค่าของ y ได้หนึ่งค่า ดังตาราง

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

จากตารางเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ได้ ดังนี้

$$\left\{(0,\ 1),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ (\pi,\ -1),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right),\ (2\pi,\ 1)\right\}$$

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ x ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$f = \{(\theta,\ x) \in R \times R \mid x = f(\theta)\}$$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า **ฟังก์ชันโคไซน์** เมื่อ $x = \text{cosine}\,\theta$ หรือ $x = \cos\theta$

ดังนั้น $f = \{(\theta,\ x) \in R \times R \mid x = \cos\theta\}$

จากตารางเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ได้ ดังนี้

$$\left\{(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi, 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0)\right\}$$

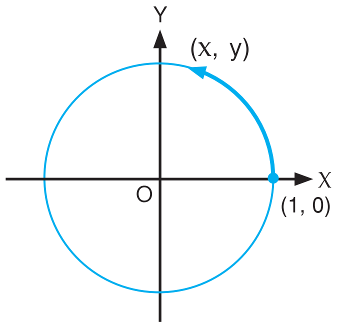
ถ้า g เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง θ กับ y ซึ่งไม่มีสองคู่อันดับใดใช้สมาชิกตัวหน้าซ้ำ จะได้ว่า

$$g = \{(\theta,\ y) \in R \times R \mid y = g(\theta)\}$$

เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า **ฟังก์ชันไซน์** เมื่อ $y = \text{sine}\,\theta$ หรือ $y = \sin\theta$

ดังนั้น $g = \{(\theta,\ y) \in R \times R \mid y = \sin\theta\}$

2. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์



รูปที่ 14

จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยและความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ จะเห็นว่า ถ้าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ มีพิกัด (x, y) แล้วพิกัด (x, y) จะเขียนแทนด้วย $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1

ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ในรูป $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

1) π **2)** $\frac{\pi}{2}$ **3)** -2π **4)** $-\frac{3\pi}{2}$

วิธีทำ **1)** $(\cos\pi,\ \sin\pi)$ **2)** $\left(\cos\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$

3) $(\cos(-2\pi),\ \sin(-2\pi))$ **4)** $\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right),\ \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)$

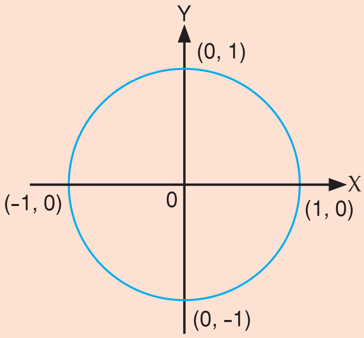
ลองทำดู

ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ในรูป $(\cos\theta,\ \sin\theta)$

1) 2π 2) $\frac{3\pi}{2}$

3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $-\pi$

ตัวอย่างที่ 2



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sin 0$ **2)** $\cos\frac{\pi}{2}$

3) $\sin\frac{3\pi}{2}$ **4)** $\cos 2\pi$

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **6)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

7) $\sin(-\pi)$ **8)** $\cos(-2\pi)$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ จะได้ว่า

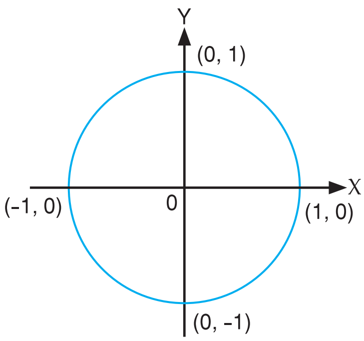
1) $\sin 0 = 0$ **2)** $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

3) $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ **4)** $\cos 2\pi = 1$

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ **6)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

7) $\sin(-\pi) = 0$ **8)** $\cos(-2\pi) = 1$

ลองทำดู



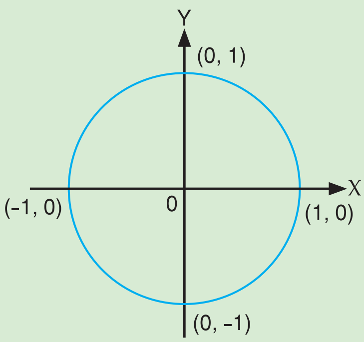
จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos 0$ 2) $\sin\frac{\pi}{2}$

3) $\cos\frac{3\pi}{2}$ 4) $\sin 2\pi$

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ 6) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

7) $\cos(-\pi)$ 8) $\sin(-2\pi)$



รูปที่ 15

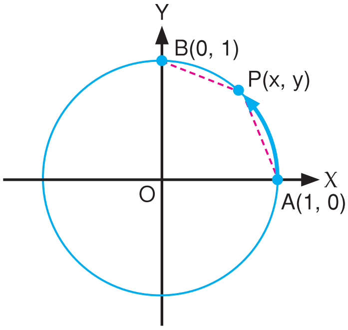
ให้ $P(\theta)$ แทนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า

$P(n\pi) = (1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

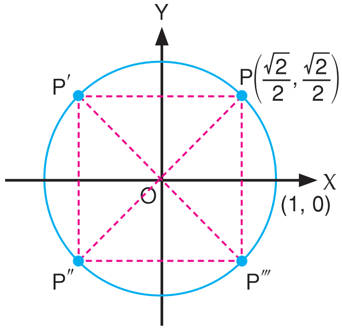
$P(n\pi) = (-1, 0)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบวก

1) การหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}$



รูปที่ 16



รูปที่ 17

จากรูปที่ 16 ให้จุด P(x, y) เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

แสดงว่า ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ซึ่งยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ว่า คอร์ด AP ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น $AP = PB$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1$$

$$x = y$$

จาก $x^2+y^2 = 1$ (สมการวงกลมของวงกลมหนึ่งหน่วย)

จะได้ $2x^2 = 1$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจาก (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ทำให้ได้ว่า $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จากรูปที่ 17 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \ldots, -\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

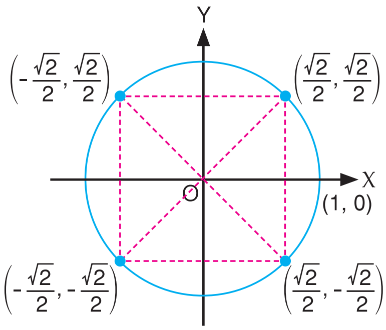
ตัวอย่างที่ 3

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\frac{3\pi}{4}$ **2)** $\sin\frac{3\pi}{4}$ **3)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **4)** $\sin\frac{5\pi}{4}$

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **6)** $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **7)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **8)** $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{4}\right|$, $\left|\frac{3\pi}{4}\right|$, $\left|\frac{5\pi}{4}\right|$ และ $\left|\frac{7\pi}{4}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0)

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{4}\right|$, $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$, $\left|-\frac{5\pi}{4}\right|$ และ $\left|-\frac{7\pi}{4}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0) เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

1) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2)** $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **4)** $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **6)** $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **8)** $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

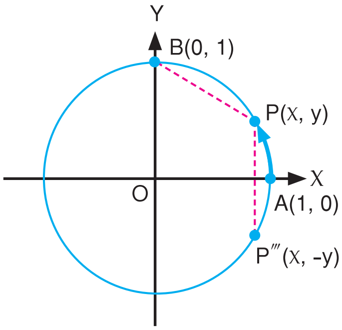
ลองทำดู

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

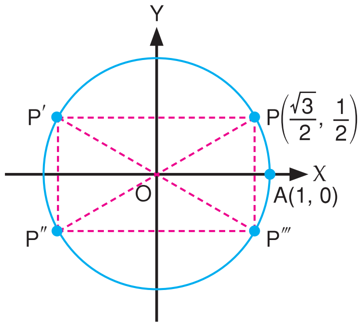
1) $\cos\frac{7\pi}{4}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{4}$ 3) $\cos\frac{11\pi}{4}$ 4) $\sin\frac{11\pi}{4}$

5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ 6) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ 7) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

2) การหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{6}$ และ $\cos\frac{\pi}{6}$



รูปที่ 18



รูปที่ 19

จากรูปที่ 18 ให้จุด P(x, y) เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

จะได้ว่า ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด $P'''(x, -y)$ เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนจุด P(x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP''' ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP''' ยาว $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

นั่นคือ ส่วนโค้ง PP''' ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB

ดังนั้น คอร์ด PP''' ยาวเท่ากับคอร์ด PB

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
PP''' &= PB \\
\sqrt{(x-x)^2 + (y+y)^2} &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \\
4y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\
4y^2 + 2y - 2 &= 0 \qquad (\text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1) \\
2y^2 + y - 1 &= 0 \\
(2y-1)(y+1) &= 0
\end{aligned}$$

เนื่องจาก (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $y = \frac{1}{2}$ และ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

จะได้ว่า $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

จากรูปที่ 19 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$, $2n\pi \pm \frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi \pm \frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{19\pi}{6}$ เป็นต้น

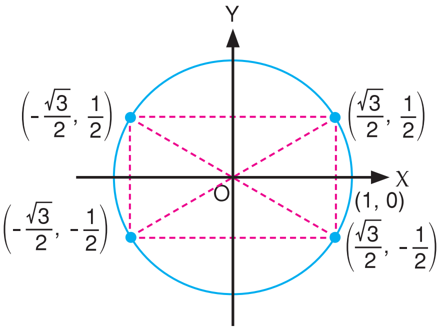
ตัวอย่างที่ 4

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\frac{5\pi}{6}$ **2)** $\sin\frac{5\pi}{6}$ **3)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **4)** $\sin\frac{7\pi}{6}$

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **6)** $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **7)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ **8)** $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{6}\right|$, $\left|\frac{5\pi}{6}\right|$, $\left|\frac{7\pi}{6}\right|$ และ $\left|\frac{11\pi}{6}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0)

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{6}\right|$, $\left|-\frac{5\pi}{6}\right|$, $\left|-\frac{7\pi}{6}\right|$ และ $\left|-\frac{11\pi}{6}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0) เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

1) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3) $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

7) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

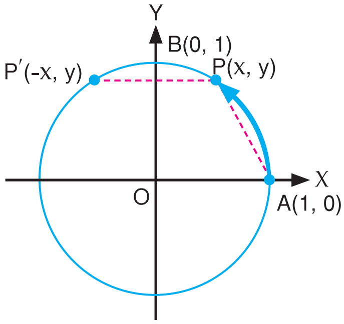
ลองทำดู

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

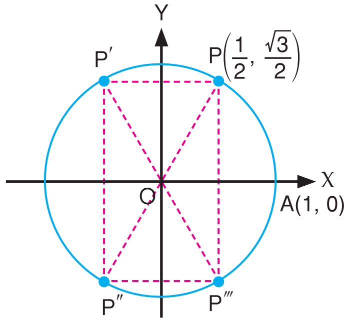
1) $\cos\frac{11\pi}{6}$ 2) $\sin\frac{11\pi}{6}$ 3) $\cos\frac{17\pi}{6}$ 4) $\sin\frac{17\pi}{6}$

5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ 6) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ 7) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ 8) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

3) การหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$



รูปที่ 20



รูปที่ 21

จากรูปที่ 20 ให้จุด P(x, y) เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย ให้จุด P′(-x, y) เป็นภาพที่เกิดจากการสะท้อนจุด P(x, y) โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน จะได้ว่า ส่วนโค้ง PP′ ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PA ซึ่งยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย
ดังนั้น คอร์ด PP′ ยาวเท่ากับคอร์ด PA

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} PP' &= AP \\ \sqrt{(x+x)^2+(y-y)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} \\ 4x^2 &= x^2-2x+1+y^2 \\ 4x^2+2x-2 &= 0 \qquad (\text{เนื่องจาก } x^2+y^2=1) \\ 2x^2+x-1 &= 0 \\ (2x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก (x, y) อยู่ในจตุภาคที่ 1 จะได้ว่า $x > 0$ และ $y > 0$

ดังนั้น $x = \frac{1}{2}$ และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

จะได้ว่า $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จากรูปที่ 21 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริง $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม เช่น $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$ เป็นต้น

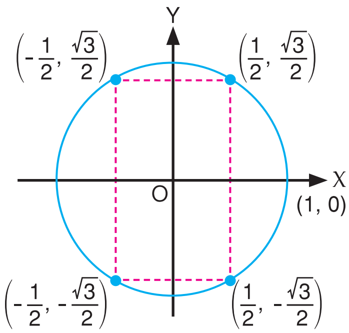
ตัวอย่างที่ 5

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sin\frac{4\pi}{3}$ **2)** $\cos\frac{4\pi}{3}$ **3)** $\sin\frac{5\pi}{3}$ **4)** $\cos\frac{5\pi}{3}$

5) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **6)** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **7)** $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **8)** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

วิธีทำ



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้ว่า จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|\frac{\pi}{3}\right|$, $\left|\frac{2\pi}{3}\right|$, $\left|\frac{4\pi}{3}\right|$ และ $\left|\frac{5\pi}{3}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0)

ในทำนองเดียวกัน จุด $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ก็เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $\left|-\frac{\pi}{3}\right|$, $\left|-\frac{2\pi}{3}\right|$, $\left|-\frac{4\pi}{3}\right|$ และ $\left|-\frac{5\pi}{3}\right|$ ตามลำดับ เมื่อวัดจากจุด (1, 0) เช่นกัน

จากความสัมพันธ์ $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย จะได้ว่า

1) $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2)** $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

3) $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **4)** $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

5) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **6)** $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **8)** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้ใช้วงกลมหนึ่งหน่วยหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sin\frac{2\pi}{3}$ 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$ 3) $\sin\frac{7\pi}{3}$ 4) $\cos\frac{7\pi}{3}$

5) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ 6) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ 7) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ 8) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

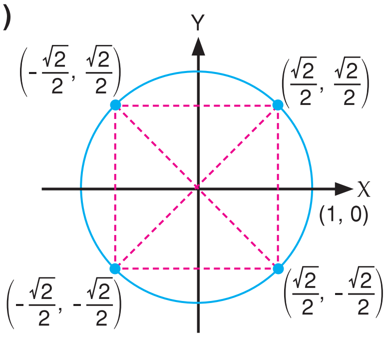
ตัวอย่างที่ 6

ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \le \theta \le 0$

2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \le \theta \le 4\pi$

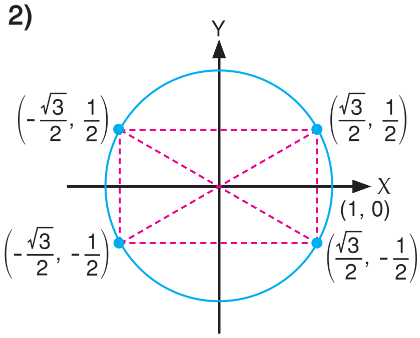
วิธีทำ **1)**



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ $-2\pi \le \theta \le 0$ จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $\left|-\frac{\pi}{4}\right|$ และ $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \le \theta \le 0$ คือ $-\frac{\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}$

2)



จากรูปวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ $0 \le \theta \le 4\pi$ จะได้ว่า จุด (x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีค่า $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อวัดจากจุด $(1, 0)$ จะมีความยาวเป็น $\left|\frac{\pi}{6}\right|$, $\left|\frac{11\pi}{6}\right|$, $\left|\frac{13\pi}{6}\right|$ และ $\left|\frac{23\pi}{6}\right|$

ดังนั้น θ ที่สอดคล้องกับ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 \le \theta \le 4\pi$ คือ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ และ $\frac{23\pi}{6}$

ลองทำดู

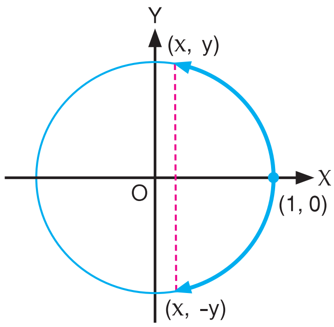
ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 \le \theta \le 4\pi$

2) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

3. ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ โดยใช้ความรู้จากการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนและใช้การสะท้อนจุด $P(x, y)$ ใด ๆ ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมีแกน X หรือแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



รูปที่ 22

จากรูปที่ 22 พิจารณา $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ให้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จึงได้ว่าจุด $(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะ $|-\theta|$ หน่วย

จากจุด $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ และ $(x, -y) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

จะได้ว่า $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ และ $x = \cos(-\theta)$ และ $-y = \sin(-\theta)$

จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

ตัวอย่างที่ 7

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

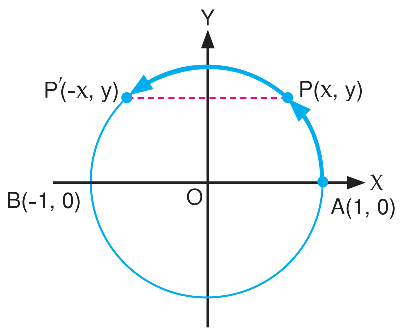
วิธีทำ จาก $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ จะได้ว่า

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

1) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



รูปที่ 23

จากรูปที่ 23 กำหนด $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และจุด $P'(-x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AP' ยาว θ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อนจากส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่ $-x = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$ และ $y = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ และ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $\sin\frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos\frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หา

1) $\sin\frac{4\pi}{5}$ **2)** $\cos\frac{4\pi}{5}$

วิธีทำ **1)** $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{5}$ (จาก $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$= 0.59$

2) $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{5}$ (จาก $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

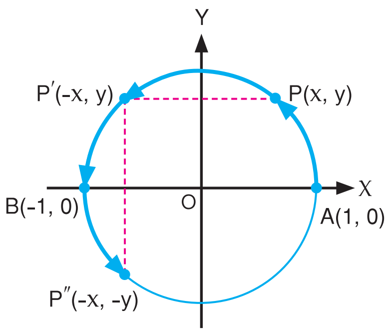
$= -0.81$

ลองทำดู

กำหนด $\sin\frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos\frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หา

1) $\sin\frac{9\pi}{10}$ 2) $\cos\frac{9\pi}{10}$

2) การหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$



รูปที่ 24

จากรูปที่ 24 กำหนด $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และจุด $P''(-x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $-x = \cos\theta$ และ $-y = \sin\theta$

ให้ $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ $\theta = \pi + \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง BP'' ยาว $\theta - \pi = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P'(-x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P''(-x, -y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อนและจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(-x, y)$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos\alpha$ และ $y = \sin\alpha$

แต่จาก $-x = \cos\theta = \cos(\pi + \alpha)$ และ $-y = \sin\theta = \sin(\pi + \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

> $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ และ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
> เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $\sin\frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos\frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หา

1) $\sin\frac{6\pi}{5}$ **2)** $\cos\frac{6\pi}{5}$

วิธีทำ **1)** $\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{5}$ (จาก $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$= -0.59$

2) $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{5}$ (จาก $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$= -0.81$

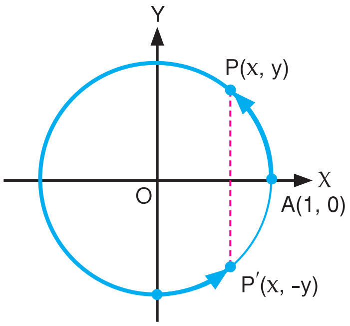
ลองทำดู

กำหนด $\sin \frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos \frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หา

1) $\sin \frac{11\pi}{10}$

2) $\cos \frac{11\pi}{10}$

3) การหาค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$



รูปที่ 25

จากรูปที่ 25 กำหนด $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ และจุด $P'(x, -y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย จะได้ว่า $x = \cos \theta$ และ $-y = \sin \theta$

ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $\theta = 2\pi - \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย จะได้ว่า ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว $2\pi - \theta = 2\pi - 2\pi + \alpha = \alpha$ หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนที่เกิดจากการสะท้อนจุด $P'(x, -y)$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย

ดังนั้น จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ α หน่วย

จะได้ว่า $x = \cos \alpha$ และ $y = \sin \alpha$

แต่จาก $x = \cos \theta = \cos(2\pi - \alpha)$ และ $-y = \sin \theta = \sin(2\pi - \alpha)$

จึงสรุปได้ว่า

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ และ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 10

กำหนด $\sin\frac{\pi}{5} = 0.59$ และ $\cos\frac{\pi}{5} = 0.81$ ให้หา

1) $\sin\frac{9\pi}{5}$ **2)** $\cos\frac{9\pi}{5}$

วิธีทำ **1)** $\sin\frac{9\pi}{5} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{5}$ (จาก $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$= -0.59$

2) $\cos\frac{9\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{5}$ (จาก $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

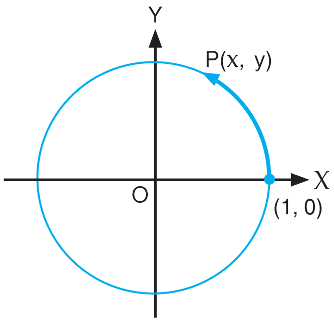
$= 0.81$

ลองทำดู

กำหนด $\sin\frac{\pi}{10} = 0.31$ และ $\cos\frac{\pi}{10} = 0.95$ ให้หา

1) $\sin\frac{19\pi}{10}$ 2) $\cos\frac{19\pi}{10}$

4) การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta > 2\pi$



คณิตน่ารู้

การหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta < -2\pi$ หาได้จากสมบัติที่ว่า

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

กำหนด $\theta > 2\pi$ และจุด P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย

จาก $\theta > 2\pi$ และเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย จะได้ว่า $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ α เป็นระยะของจุด P(x, y) ที่วัดจากจุด (1, 0) เมื่อ $0 \le \alpha < 2\pi$

จะเห็นว่า จุด P(x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย และจุด P(x, y) ที่เป็นจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ α หน่วย เป็นจุดเดียวกัน

ดังนั้น การหาจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ θ หน่วย เมื่อ $\theta > 2\pi$ สามารถหาได้จากจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ α หน่วย เมื่อ $\theta = 2n\pi + \alpha$ และ $0 \le \alpha < 2\pi$ จึงสรุปได้ว่า

$$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

ตัวอย่างที่ 11

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\frac{25\pi}{3}$ **2)** $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right)$

วิธีทำ **1)** $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\left(2(4)\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3}$ (จาก $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha,\ 0 \le \alpha < 2\pi$)

$= \frac{1}{2}$

2) $\sin\left(-\frac{61\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{61\pi}{6}\right)$ (จาก $\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \theta > 0$)

$= -\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\left(2(5)\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{6}$ (จาก $\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha,\ 0 \le \alpha < 2\pi$)

$= -\frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\frac{31\pi}{4}$ 2) $\sin\left(-\frac{50\pi}{3}\right)$

แบบฝึกทักษะ 1.2

ระดับพื้นฐาน

1. ให้เขียนจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ของ θ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูป $(\cos\theta, \sin\theta)$

1) 0　　2) 10π　　3) $-\frac{3\pi}{2}$　　4) -10π

2. ให้หาค่าของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\theta = 4\pi + \frac{\pi}{3}$　　2) $\theta = \frac{19\pi}{3}$　　3) $\theta = \frac{31\pi}{4}$　　4) $\theta = -\frac{29\pi}{6}$

3. กำหนด $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ให้หาค่าของ

1) $\sin(-\theta)$　　2) $\cos(-\theta)$

3) $\sin(\pi - \theta)$　　4) $\cos(\pi - \theta)$

5) $\sin(\pi + \theta)$　　6) $\cos(\pi + \theta)$

7) $\sin(2\pi - \theta)$　　8) $\cos(2\pi - \theta)$

9) $\sin(2\pi + \theta)$　　10) $\cos(2\pi + \theta)$

4. ให้หาจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $-4\pi \le \theta \le 4\pi$

1) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$　　2) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　3) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$　　4) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ระดับกลาง

5. ให้หาค่าของ $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\theta = 3\pi + \frac{\pi}{6}$　　2) $\theta = 5\pi - \frac{\pi}{4}$　　3) $\theta = -\pi - \frac{\pi}{4}$　　4) $\theta = -2\pi + \frac{\pi}{6}$

6. กำหนด $\sin\theta = \frac{1}{2}$ และ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ให้หาค่าของ

1) $\sin(-\pi + \theta)$　　2) $\cos(-\pi + \theta)$

3) $\sin(-\pi - \theta)$　　4) $\cos(-\pi - \theta)$

5) $\sin(-2\pi + \theta)$　　6) $\cos(-2\pi + \theta)$

7) $\sin(-2\pi - \theta)$　　8) $\cos(-2\pi - \theta)$

9) $\sin(\theta - 4\pi)$　　10) $\cos(\theta - 7\pi)$

ระดับท้าทาย

7. กำหนด $\sin\left(-\frac{91\pi}{18}\right) = 0.17$ ให้หาจำนวนจริง θ ที่ทำให้ $\sin\theta = \sin\left(-\frac{91\pi}{18}\right)$ มา 4 จำนวน เมื่อ $-10\pi \le \theta \le 10\pi$ พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อีกที่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ตามบทนิยามที่กำหนดต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันแทนเจนต์ (Tangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$\text{tangent}\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

เขียนแทน tangent θ ด้วย tan θ (อ่านว่า แทนทีตา)

ดังนั้น $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

2. ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (Cotangent Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$\text{cotangent}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

เขียนแทน cotangent θ ด้วย cot θ (อ่านว่า คอตทีตา)

ดังนั้น $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

3. ฟังก์ชันเซแคนต์ (Secant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$\text{secant}\,\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

เขียนแทน secant θ ด้วย sec θ (อ่านว่า เซคทีตา)

ดังนั้น $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

4. ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (Cosecant Function)

บทนิยาม สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$\text{cosecant}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

เขียนแทน cosecant θ ด้วย cosec θ (อ่านว่า โคเซคทีตา)

ดังนั้น $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ แยกพิจารณาจาก 4 กรณีต่อไปนี้

1) กรณี $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $0 < \sin\theta < 1$ และ $0 < \cos\theta < 1$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta > 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta > 1$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta > 0$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta > 1$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกค่ามีค่าเป็นจำนวนบวก

ตัวอย่างที่ 12

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ **2)** $\cot\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ **3)** $\sec\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ **4)** $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$

วิธีทำ

1) $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

2) $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4) $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ 2) $\cot\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ 3) $\sec\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ 4) $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

2) กรณี $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

เนื่องจาก $0 < \sin\theta < 1$ และ $-1 < \cos\theta < 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta < 0$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta < -1$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta < 0$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta > 1$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคเซแคนต์มีค่าเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มีค่าเป็นจำนวนลบ

ตัวอย่างที่ 13

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{2\pi}{3}$ **2)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **3)** $\sec\frac{2\pi}{3}$ **4)** $\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ

1) $\tan\frac{2\pi}{3} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

2) $\cot\frac{2\pi}{3} = \dfrac{\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec\frac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

4) $\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

แนะแนวคิด

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
$= \sin\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
$= -\cos\frac{\pi}{3}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{5\pi}{6}$ 2) $\cot\frac{5\pi}{6}$ 3) $\sec\frac{5\pi}{6}$ 4) $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}$

3) กรณี $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

เนื่องจาก $-1 < \sin\theta < 0$ และ $-1 < \cos\theta < 0$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta > 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta < -1$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta > 0$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta < -1$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์และฟังก์ชันโคแทนเจนต์มีค่าเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มีค่าเป็นจำนวนลบ

ตัวอย่างที่ 14

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{4\pi}{3}$ $\qquad$ **2)** $\cot\frac{4\pi}{3}$ $\qquad$ **3)** $\sec\frac{4\pi}{3}$ $\qquad$ **4)** $\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3}$

วิธีทำ

1) $$\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2) $$\cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\cos\frac{4\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3) $$\sec\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

4) $$\operatorname{cosec}\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{5\pi}{4}$ $\qquad$ 2) $\cot\frac{5\pi}{4}$ $\qquad$ 3) $\sec\frac{5\pi}{4}$ $\qquad$ 4) $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4}$

4) กรณี $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

เนื่องจาก $-1 < \sin\theta < 0$ และ $0 < \cos\theta < 1$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\tan\theta < 0$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ดังนั้น $\sec\theta > 1$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\cot\theta < 0$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ดังนั้น $\operatorname{cosec}\theta < -1$

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์และฟังก์ชันเซแคนต์มีค่าเป็นจำนวนบวก ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มีค่าเป็นจำนวนลบ

ตัวอย่างที่ 15

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{5\pi}{3}$ **2)** $\cot\frac{5\pi}{3}$ **3)** $\sec\frac{5\pi}{3}$ **4)** $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3}$

วิธีทำ **1)** $\tan\frac{5\pi}{3} = \frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

2) $\cot\frac{5\pi}{3} = \frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\sec\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

4) $\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\frac{11\pi}{6}$ 2) $\cot\frac{11\pi}{6}$ 3) $\sec\frac{11\pi}{6}$ 4) $\operatorname{cosec}\frac{11\pi}{6}$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงบางจำนวน เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

Thinking Time

ถ้า θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $\tan(-\theta)$, $\cot(-\theta)$, $\sec(-\theta)$ และ $\operatorname{cosec}(-\theta)$ มีค่าเป็นเท่าใด

ตัวอย่างที่ 16

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **2)** $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **3)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **4)** $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ

1) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

2) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

3) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

4) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 2) $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 3) $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

ตัวอย่างที่ 17

ให้หาค่า $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\frac{13\pi}{3} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{13\pi}{4} = \tan\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \tan\frac{5\pi}{4} = 1$$

$$\cot\frac{9\pi}{4} = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

จะได้ว่า $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)(1) = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) + \tan\frac{13\pi}{4}\cot\frac{9\pi}{4} = \frac{3}{4}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\sin\left(-\frac{19\pi}{4}\right)\cot\frac{13\pi}{4} - \cos\frac{31\pi}{6}\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)$

แนวข้อสอบ PAT 1

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

1. $\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\sin\frac{13\pi}{15}\sin\frac{19\pi}{15} > 0$
2. $0 \leq \sin\theta \leq 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง θ ใด ๆ
3. $\cos\frac{4\pi}{13}\sin\left(-\frac{4\pi}{13}\right) > \sin\frac{\pi}{7}\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$
4. $\cos\theta < 0$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
5. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{5} > 0$

แนวคิด

1. เนื่องจาก $0 < \frac{\pi}{15} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{7\pi}{15} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \frac{13\pi}{15} < \pi$ และ $\pi < \frac{19\pi}{15} < \frac{3\pi}{2}$

   จะได้ว่า $\sin\frac{\pi}{15} > 0$, $\sin\frac{7\pi}{15} > 0$, $\sin\frac{13\pi}{15} > 0$ และ $\sin\frac{19\pi}{15} < 0$

   ดังนั้น $\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\sin\frac{13\pi}{15}\sin\frac{19\pi}{15} < 0$

   นั่นคือ ข้อ 1. ไม่ถูกต้อง

2. เนื่องจาก $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ซึ่งน้อยกว่า 0

   ดังนั้น ข้อ 2. ไม่ถูกต้อง

3. เนื่องจาก $0 < \frac{4\pi}{13} < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$

   จะได้ว่า $\cos\frac{4\pi}{13} > 0$, $\sin\left(-\frac{4\pi}{13}\right) = -\sin\frac{4\pi}{13}$ ซึ่ง $-\sin\frac{4\pi}{13} < 0$, $\sin\frac{\pi}{7} > 0$

   และ $\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{7}$ ซึ่งมากกว่า 0

   ดังนั้น $\cos\frac{4\pi}{13}\sin\left(-\frac{4\pi}{13}\right) < 0$ และ $\sin\frac{\pi}{7}\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) > 0$

   ทำให้ได้ว่า $\cos\frac{4\pi}{13}\sin\left(-\frac{4\pi}{13}\right) < \sin\frac{\pi}{7}\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$

   นั่นคือ ข้อ 3. ไม่ถูกต้อง

4. สำหรับทุกจำนวนจริง θ ใด ๆ ที่ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

   $\cos\theta > 0$

   ดังนั้น ข้อ 4. ไม่ถูกต้อง

5. เนื่องจาก $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ และ $\pi < \frac{7\pi}{5} < \frac{3\pi}{2}$

   จะได้ว่า $\cos\frac{\pi}{5} > 0$, $\cos\frac{4\pi}{5} < 0$ และ $\cos\frac{7\pi}{5} < 0$

   ดังนั้น $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{5} > 0$

   นั่นคือ ข้อ 5. ถูกต้อง

แบบฝึกทักษะ 1.3

ระดับพื้นฐาน

1. กำหนด $\sin\theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

1) $\tan\theta$
2) $\sec\theta$
3) $\cot\theta$
4) $\operatorname{cosec}\theta$

2. กำหนด $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ และ $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

1) $\tan\theta$
2) $\sec\theta$
3) $\cot\theta$
4) $\operatorname{cosec}\theta$

3. กำหนด $\sin\theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos\theta = \frac{4}{5}$ ให้หาค่าของ

1) $\tan(-\theta)$
2) $\sec(-\theta)$
3) $\cot(-\theta)$
4) $\operatorname{cosec}(-\theta)$

4. ให้หาค่าของ

1) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}$
2) $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \tan\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$
3) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\tan\frac{3\pi}{4}$

ระดับกลาง

5. กำหนด $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ให้หาค่าของ

1) $\sin\theta + \cos\theta$
2) $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$
3) $\cos\theta - \tan\theta$
4) $\sec\theta - \cos\theta$

6. กำหนด $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \frac{2}{3}$ ให้หาค่าของ

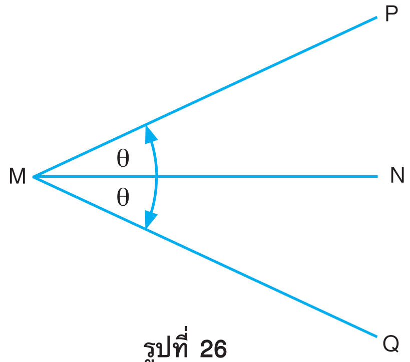
1) $\sin\theta + \cos\theta$
2) $\sin\theta - \sec\theta$
3) $\cos\theta + \cot\theta$
4) $\cos\theta - \sec\theta$

7. ให้หาค่าของ

1) $\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}$
2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\cos(-2\pi)$

1.4 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม (Trigonometric Functions of any angle)

กำหนด $\overline{MN}$ สร้าง $N\hat{M}P$ และ $N\hat{M}Q$ ให้มีขนาด θ หน่วย เท่ากัน โดยใช้โปรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ การวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและการวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังนี้



รูปที่ 26

เรียกจุด M ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

เรียก $\overline{MN}$ ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียก $\overline{MP}$ และ $\overline{MQ}$ ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) ของมุม

ดังนั้น การวัดขนาดของมุมทำได้โดยวัดจากด้านเริ่มต้นของมุมไปยังด้านสิ้นสุดของมุม ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ขนาดของมุมจะเป็นจำนวนบวก ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาขนาดของมุมจะเป็นจำนวนลบ

นักเรียนทราบมาแล้วว่าหน่วยที่ใช้ในการวัดมุม คือ องศา (degree) เขียนแทนด้วย $^{\circ}$ ซึ่งแบ่งหน่วยย่อยเป็นลิปดา ($'$) และฟิลิปดา ($''$) ดังนี้

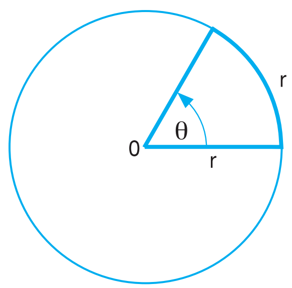
$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน (radian)

1. หน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียน

มุม 1 เรเดียน เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้น



θ มีขนาด 1 เรเดียน

รูปที่ 27

จากรูปที่ 27 จะเห็นว่า เป็นวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย และมุม θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว r หน่วย ดังนั้น θ จึงมีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจาก วงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย

ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่มีความยาว $2\pi r$ หน่วย และรัศมี r หน่วย จะมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน จึงกล่าวได้ว่า ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ที่ได้จากการหมุนรัศมีไปครบ 1 รอบ มีขนาด 2π เรเดียน แต่ขนาดของมุมนี้เมื่อวัดเป็นหน่วยในระบบองศา จะเท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น	360	องศา	เท่ากับ	2π	เรเดียน
จะได้ว่า	180	องศา	เท่ากับ	π	เรเดียน
นั่นคือ	1	องศา	เท่ากับ	$\frac{\pi}{180}$	เรเดียน
และ	1	เรเดียน	เท่ากับ	$\frac{360}{2\pi}$	องศา หรือ $\frac{180}{\pi}$ องศา

ข้อควรระวัง !

การเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน จะไม่นิยมเขียนหน่วยกำกับไว้

ตัวอย่างที่ 18

1) เปลี่ยน 30 องศา ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน
2) เปลี่ยน $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\frac{180}{\pi}$ องศา เท่ากับ 1 เรเดียน

ดังนั้น 30 องศา เท่ากับ $30 \times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

$= \frac{\pi}{6}$ เรเดียน

2) เนื่องจาก 1 เรเดียน เท่ากับ $\frac{180}{\pi}$ องศา

ดังนั้น $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{\pi}{5} \times \frac{180}{\pi}$ องศา

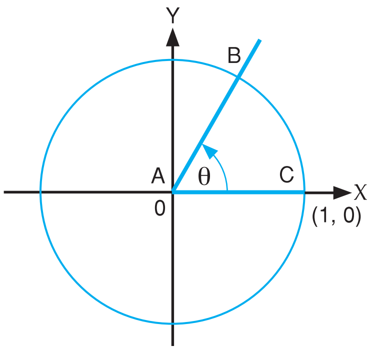
$= 36$ องศา

ลองทำดู

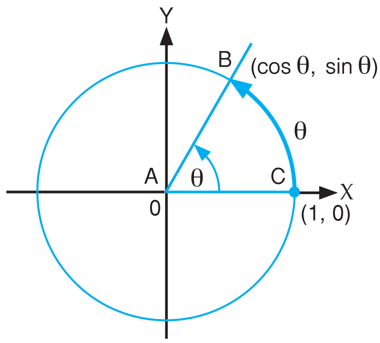
1) เปลี่ยน 60 องศา ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน
2) เปลี่ยน $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียน ให้มีหน่วยเป็นองศา

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ในหัวข้อ 1.2 นักเรียนได้ศึกษาฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งกำหนดได้จากวงกลม 1 หน่วย ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมและความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ซึ่งต้องเขียนมุมในวงกลม 1 หน่วย ดังนี้



รูปที่ 28



รูปที่ 29

จากรูปที่ 28 จะเห็นว่า $B\hat{A}C$ มีจุดยอดมุมอยู่ที่จุด (0, 0) มี $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ เป็นแขนของมุม โดย $\overline{AC}$ ทับแกน X ทางบวก เรียก $B\hat{A}C$ ว่ามุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

จากรูปที่ 29 จะเห็นว่า $B\hat{A}C$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีขนาด θ เรเดียน และจากเรื่องหน่วยการวัดมุมในระบบเรเดียนนักเรียนทราบมาแล้วว่า ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียน จะต้องยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งที่รองรับ $B\hat{A}C$ จึงยาว θ หน่วย และจะเห็นว่า $\overline{AB}$ ซึ่งเป็นแขนของ $B\hat{A}C$ ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยเพียงจุดเดียวและเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายของส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางเดียวกันกับ θ จึงกล่าวได้ว่า บนวงกลมหนึ่งหน่วย

cos ของจำนวนจริง θ หมายถึง cos ของมุม θ เรเดียน
sin ของจำนวนจริง θ หมายถึง sin ของมุม θ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 19

ให้หาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ

1) $\theta = 30^\circ$ **2)** $\theta = -60^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน และ $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน จะได้ว่า

1) $\sin\theta = \sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin\theta = \sin(-60^\circ) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \cos(-60^\circ) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

แนะแนวคิด

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

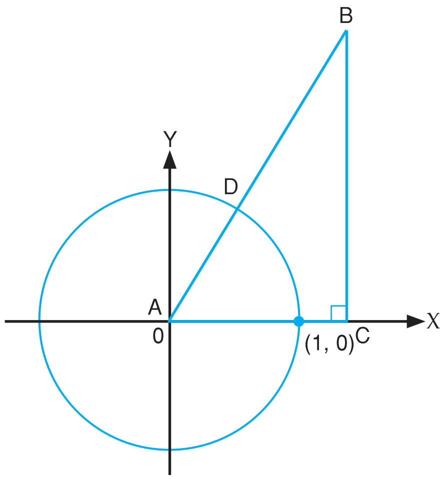
ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ

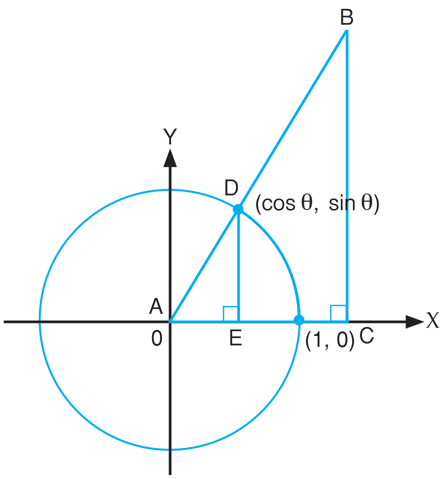
1) $\theta = 135^\circ$ 2) $\theta = -150^\circ$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ กับฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ความรู้จากวงกลมหนึ่งหน่วย มุมที่จุดศูนย์กลาง และอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ดังนี้



รูปที่ 30



รูปที่ 31

จากรูปที่ 30 มี ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก และมีมุม A เป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และแขน AB ตัดวงกลมที่จุด D

จากรูปที่ 31 ลาก $\overline{DE}$ ตั้งฉากกับแกน X จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADE ซึ่งมุม A เป็นมุมที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และจุด D จะมีคู่อันดับเป็น $(\cos\theta, \sin\theta)$

จากรูปสามเหลี่ยม ADE โดยอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า AE = $\cos\theta$, DE = $\sin\theta$ และ AD = 1

เนื่องจาก รูปสามเหลี่ยม ADE คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABC

จะได้ว่า $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ อัตราส่วนของด้านที่สมนัยกัน

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ และ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{\cos\theta}{AC} = \frac{1}{AB}$ และ $\frac{\sin\theta}{BC} = \frac{1}{AB}$

$\cos\theta = \frac{AC}{AB}$ และ $\sin\theta = \frac{BC}{AB}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{BC}{AC}$$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{BC}{AC}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งนักเรียนทราบค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ sin A, cos A และ tan A มาแล้ว ซึ่งจะมีค่า ดังนี้

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

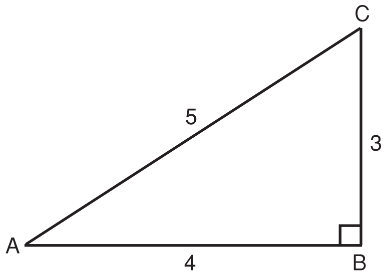
$$\sin\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

ตัวอย่างที่ 20

ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



วิธีทำ

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$$

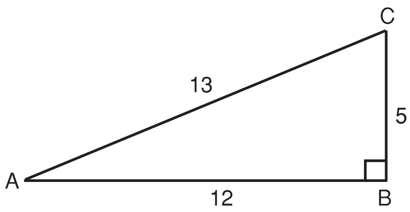
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

ลองทำดู

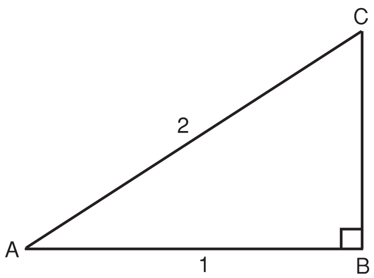
ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



ตัวอย่างที่ 21

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{1}{2}$ ให้หา sin A, tan A, cot A, sec A และ cosec A

วิธีทำ จาก $\cos A = \frac{1}{2}$ จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$2^2 = 1^2 + BC^2$$
$$BC^2 = 3$$
$$BC = \sqrt{3}$$

ดังนั้น
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = 2$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ลองทำดู

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{10}$ ให้หา sin A, tan A, cos A, sec A และ cosec A

แบบฝึกทักษะ 1.4

ระดับพื้นฐาน

1. เปลี่ยนมุม θ ในหน่วยองศาแต่ละข้อต่อไปนี้ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

1) $\theta = 75^\circ$
2) $\theta = 120^\circ$
3) $\theta = 270^\circ$
4) $\theta = -60^\circ$
5) $\theta = -135^\circ$
6) $\theta = -315^\circ$

2. เปลี่ยนมุม θ ในหน่วยเรเดียนแต่ละข้อต่อไปนี้ให้มีหน่วยเป็นองศา

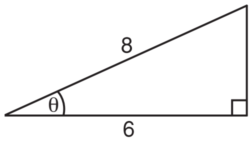
1) $\theta = \frac{\pi}{4}$
2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$
3) $\theta = \frac{5\pi}{3}$
4) $\theta = -\frac{11\pi}{6}$
5) $\theta = -\frac{7\pi}{3}$
6) $\theta = -\frac{9\pi}{2}$

3. ให้หาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

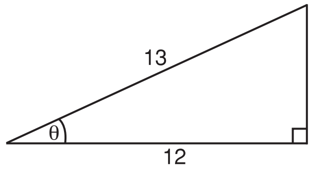
1) $\theta = 45^\circ$
2) $\theta = 120^\circ$
3) $\theta = 150^\circ$
4) $\theta = 210^\circ$
5) $\theta = -30^\circ$
6) $\theta = -135^\circ$
7) $\theta = -240^\circ$
8) $\theta = -300^\circ$

4. ให้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติทุกอัตราส่วนของมุม θ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)



2)



5. ถ้า $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ มีค่าเท่าใด

ระดับกลาง

6. ให้หาค่า $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\theta = 120^\circ$
2) $\theta = -150^\circ$
3) $\theta = 210^\circ$
4) $\theta = -300^\circ$

7. ให้หาค่าของ

1) $4\cos(-30^\circ) + \sin(-60^\circ)$
2) $5\tan 315^\circ \cos(-390^\circ)$
3) $2\sin^2(-45^\circ)\cos^2(-120^\circ)\tan^2(135^\circ)$
4) $\dfrac{\cos 420^\circ + \sin(-810^\circ)}{\cos(-450^\circ) + \sin(-270^\circ)}$

แนะแนวคิด

$\sin^2\theta = \sin\theta \cdot \sin\theta$

$\cos^2\theta = \cos\theta \cdot \cos\theta$

$\tan^2\theta = \tan\theta \cdot \tan\theta$

8. ถ้า $\tan\theta \cdot \cot^2\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ แล้ว θ มีค่าเป็นเท่าใด เมื่อ $-360^\circ \le \theta \le 360^\circ$

ระดับท้าทาย

9. กำหนด $2\sin\theta = 1$ เมื่อ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ให้หาค่าของ

1) $\sin(90^\circ - \theta)$
2) $\cos(90^\circ - \theta)$
3) $\tan(90^\circ - \theta)$
4) $\cot(90^\circ - \theta)$
5) $\sec(90^\circ - \theta)$
6) $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$

1.5 การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหกฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือของมุมบางมุมมาแล้ว เช่น $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 30°, 45°, 60°, 90° สำหรับค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมขนาดอื่น ๆ สามารถหาได้เช่นกัน แต่จะมีความยุ่งยาก นักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือมุมที่มีขนาดตั้งแต่ 0° ถึง 90° ในตารางจะแสดงค่าของฟังก์ชัน Sine, Tangent, Cotangent และ Cosine สำหรับค่าของฟังก์ชัน Cosecant และ Secant หาได้โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ตามลำดับ

ตัวอย่างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
43°	$00'$	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47°	$00'$
	$10'$	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174		$50'$
	$20'$	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145		$40'$
	$30'$	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116		$30'$
	$40'$	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087		$20'$
	$50'$	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058		$10'$
44°	$00'$	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46°	$00'$
	$10'$	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999		$50'$
	$20'$	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970		$40'$
	$30'$	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941		$30'$
	$40'$	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912		$20'$
	$50'$	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883		$10'$
45°	$00'$	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45°	$00'$
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

การเปิดตารางหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิตินักเรียนจะเห็นว่า ด้านบนและด้านล่างจะมีชื่อฟังก์ชันตรีโกณมิติแตกต่างกัน ดังนั้น การอ่านค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{4}$ หรือของมุมตั้งแต่ 0° ถึง 45° ให้อ่านทางด้านซ้ายของตารางโดยอ่านจากบนลงล่าง แต่ถ้าค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงตั้งแต่ $\frac{\pi}{4}$ ถึง $\frac{\pi}{2}$ หรือของมุมตั้งแต่ 45° ถึง 90° ให้อ่านทางขวามือของตารางโดยอ่านจากล่างขึ้นบน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 22

ให้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 43^\circ 20'$ **2)** $\cos 45^\circ 50'$ **3)** $\tan 46^\circ 10'$

4) cot 0.7941 **5)** sec 0.7738 **6)** cosec 0.8145

วิธีทำ จากตารางจะได้

1) $\sin 43^\circ 20' = 0.6862$

2) $\cos 45^\circ 50' = 0.6967$

3) $\tan 46^\circ 10' = 1.0416$

4) $\cot 0.7941 = 0.9827$

5) เนื่องจาก $\sec 0.7738 = \frac{1}{\cos 0.7738}$

จากตารางจะได้ $\cos 0.7738 = 0.7153$

ดังนั้น $\sec 0.7738 = \frac{1}{0.7153} \approx 1.3980$

6) เนื่องจาก $\operatorname{cosec} 0.8145 = \frac{1}{\sin 0.8145}$

จากตารางจะได้ $\sin 0.8145 = 0.7274$

ดังนั้น $\operatorname{cosec} 0.8145 = \frac{1}{0.7274} \approx 1.3748$

ลองทำดู

ให้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 28^\circ 40'$ 2) $\cos 64^\circ 10'$ 3) $\tan 13^\circ 30'$

4) cot 0.7127 5) sec 0.5963 6) cosec 1.3294

สำหรับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตาราง จะใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 23

ให้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 14^\circ\ 16'$ **2)** $\cos 73^\circ\ 42'$ **3)** $\tan 0.4225$

วิธีทำ 1) จากตารางจะได้ $\sin 14^\circ\ 10' = 0.2447$

$\sin 14^\circ\ 20' = 0.2476$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $6'$ ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น $\frac{0.0029}{10} \times 6 \approx 0.0017$

ดังนั้น $\sin 14^\circ\ 16' \approx 0.2447 + 0.0017 = 0.2464$

2) จากตารางจะได้ $\cos 73^\circ\ 40' = 0.2812$

$\cos 73^\circ\ 50' = 0.2784$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง 0.0028

ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $2'$ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ลดลง $\frac{0.0028}{10} \times 2 \approx 0.0006$

ดังนั้น $\cos 73^\circ\ 42' \approx 0.2812 - 0.0006 = 0.2806$

3) จากตารางจะได้ $\tan 0.4218 = 0.4487$

$\tan 0.4247 = 0.4522$

จากค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติข้างต้น จะได้ว่า

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0029 ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น 0.0035

ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0007 ค่าของฟังก์ชันแทนเจนต์เพิ่มขึ้น d

จะได้ว่า $\frac{d}{0.0035} = \frac{0.0007}{0.0029}$

$d = \frac{0.0007}{0.0029} \times 0.0035 \approx 0.0008$

ดังนั้น $\tan 0.4225 \approx 0.4487 + 0.0008 = 0.4495$

ลองทำดู

ให้หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแสดงค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 14^\circ\ 28'$ 2) $\cos 78^\circ\ 12'$ 3) $\tan 0.6759$

ข้อควรระวัง !

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือของมุมที่ไม่ได้แสดงในตารางโดยใช้ความรู้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วน ถ้าฟังก์ชันตรีโกณมิติใดมีค่าของฟังก์ชันลดลงเมื่อขนาดของมุมเพิ่มขึ้น ค่าที่ได้จากการเทียบบัญญัติไตรยางศ์หรือสัดส่วนต้องนำไปลบออกจากค่าตั้งต้น

นอกจากนี้ ยังสามารถใช้ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติหาค่าของจำนวนจริงหรือมุม เมื่อทราบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมนั้น ๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $0 \leq \theta \leq \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

1) $\cos\theta = 0.8843$ **2)** $\sin\theta = 0.4780$

วิธีทำ **1)** จากตารางจะได้ $\cos 0.4858 = 0.8843$

ดังนั้น θ มีค่า เท่ากับ 0.4858

2) เนื่องจาก $\sin\theta = 0.4780$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\sin 0.4974$ กับ $\sin 0.5003$

จากตารางจะได้ $\sin 0.4974 = 0.4772$ และ $\sin 0.5003 = 0.4797$

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0025 ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น 0.0029

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0008 ค่าของจำนวนจริงเพิ่มขึ้น d

จะได้ว่า $$\frac{d}{0.0029} = \frac{0.0008}{0.0025}$$

$$d = \frac{0.0008}{0.0025} \times 0.0029$$

$$\approx 0.0009$$

ดังนั้น $\sin(0.4974 + 0.0009) = 0.4780$

$\sin 0.4983 = 0.4780$

นั่นคือ θ มีได้ 2 ค่า คือ 0.4983 หรือ π - 0.4983

คณิตน่ารู้

เนื่องจากค่าของ $\sin\theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ มี 2 ค่า คือ $\sin\theta$ และ $\sin(\pi - \theta)$ ดังนั้น ข้อ 2) จึงได้ θ เท่ากับ 0.4983 และ π - 0.4983

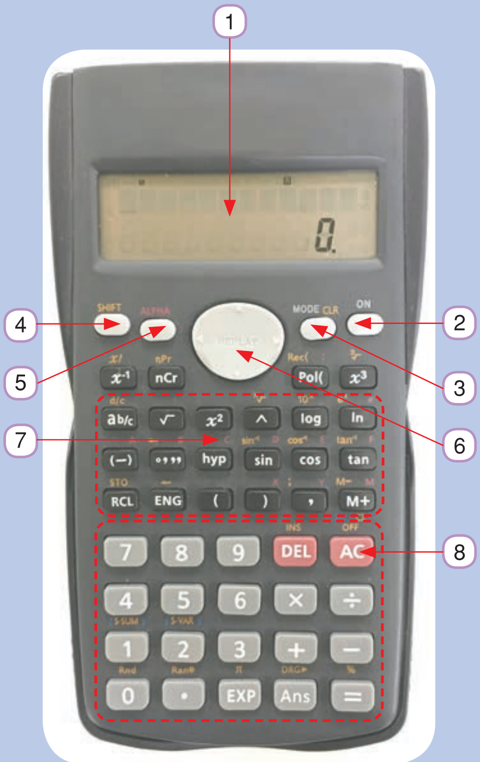
ลองทำดู

กำหนด $0 \leq \theta \leq \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

1) $\cos\theta = 0.9013$ 2) $\sin\theta = 0.6424$

มุมเทคโนโลยี

ในปัจจุบัน การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการไม่เป็นที่นิยม เนื่องจากสามารถใช้เครื่องคิดเลขหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการได้ละเอียดกว่าการใช้ตาราง



ส่วนประกอบหลักบนเครื่องคิดเลข

1. หน้าจอแสดงผลการทำงาน
2. ปุ่มเปิดเครื่อง
3. ปุ่ม MODE/SETUP ใช้สำหรับเลือกโหมดหรือตั้งค่าเครื่อง
4. ปุ่ม SHIFT สำหรับเรียกใช้คำสั่งที่เป็นสีเหลือง แล้วตามด้วยปุ่มคำสั่งนั้น ๆ
5. ปุ่ม ALPHA สำหรับเรียกใช้คำสั่งที่เป็นตัวอักษรสีแดง แล้วตามด้วยปุ่มคำสั่งนั้น ๆ
6. ปุ่มควบคุมทิศทาง ใช้เลื่อนดูคำตอบหรือแก้ไขการคำนวณ
7. ปุ่มฟังก์ชันและสูตรการคำนวณ
8. ปุ่มตัวเลข/เครื่องหมายการดำเนินการ

ตัวอย่าง 1) ให้หา sin 38° โดยใช้เครื่องคิดเลข

กดปุ่ม MODE MODE 1 sin 3 8 =

จะปรากฏจำนวน 0.615661475

ดังนั้น sin 38° เท่ากับ 0.6157

2) ให้หา cos 0.7912 โดยใช้เครื่องคิดเลข

กดปุ่ม MODE MODE 2 cos 0 . 7 9 1 2 =

จะปรากฏจำนวน 0.702992385

ดังนั้น cos 0.7912 เท่ากับ 0.7030

หมายเหตุ ปุ่มกดบนเครื่องคิดเลขแต่ละรุ่นจะมีความแตกต่างกัน ให้อ้างอิงวิธีการตามเครื่องคิดเลขรุ่นนั้น ๆ

แบบฝึกทักษะ 1.5

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\sin 38^\circ 40'$
2) $\cos 62^\circ 28'$
3) $\tan 0.1542$
4) $\cot 1.1560$
5) $\sec 41^\circ$
6) $\operatorname{cosec} 77^\circ 10'$
7) $\sin 42^\circ 18'$
8) $\tan 12^\circ 36'$

2. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้เครื่องคิดเลข

1) $\sin 63^\circ$
2) $\tan 11^\circ$
3) $\cos 0.7436$
4) $\tan 0.4558$

ระดับกลาง

3. กำหนด $0 \le \theta \le \pi$ ให้หาค่าของ θ ที่ทำให้

1) $\sin\theta = 0.3700$
2) $\cos\theta = 0.9159$
3) $\tan\theta = 0.4765$
4) $\cot\theta = 1.5204$
5) $\sec\theta = 1.2232$
6) $\operatorname{cosec}\theta = 2.7902$
7) $\tan\theta = 0.4684$
8) $\sin\theta = 1.0785$

4. ถ้า ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $C\hat{A}B$ เป็นมุมฉาก $A\hat{B}C$ เท่ากับ 32 องศา และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 14 เซนติเมตร อยากทราบว่า ความยาวของด้าน AB และ AC เป็นเท่าใด

5. ถ้า ΔPQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $R\hat{P}Q$ เป็นมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 เซนติเมตร และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 5 เซนติเมตร อยากทราบว่า $P\hat{Q}R$ และ $Q\hat{R}P$ มีขนาดเป็นเท่าใด

ระดับท้าทาย

6. เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งซึ่งมีมุม A และมุม B เป็นมุมที่อยู่ภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด ถ้า $\cot A = 1.3270$ และ $\tan B = 0.3249$ อยากทราบว่า เส้นตรงคู่นี้ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.6 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

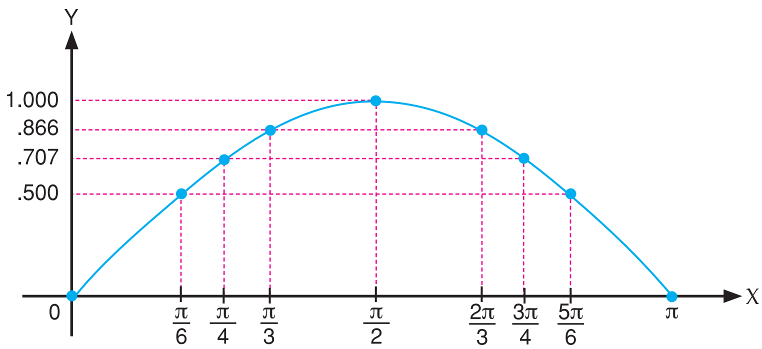
นักเรียนได้ศึกษาการเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น เช่น $y = x + 3$ และกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง เช่น $y = x^2 + x - 6$ มาแล้ว ซึ่งนักเรียนทราบแล้วว่า การเขียนกราฟของฟังก์ชันแต่ละชนิดจะต้องสมมุติค่าของตัวแปร x ให้เหมาะสมเพื่อให้ได้คู่อันดับของกราฟที่ค่อนข้างจะสมบูรณ์เพื่อนำไปเขียนกราฟ สำหรับการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะใช้หลักการเดียวกัน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. กราฟของ $y = \sin x$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟของ $y = \sin x$ ในแต่ละช่วงต่อไปนี้

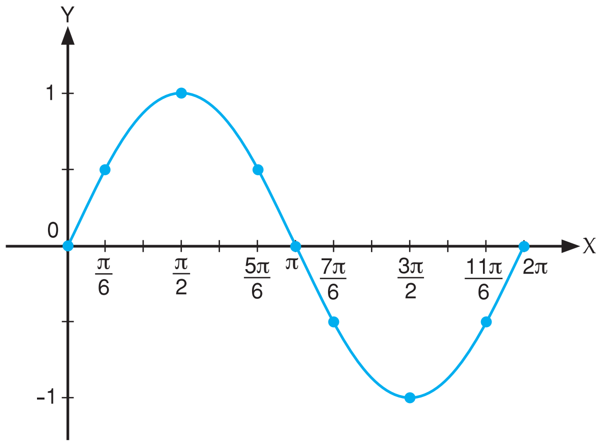
1) กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



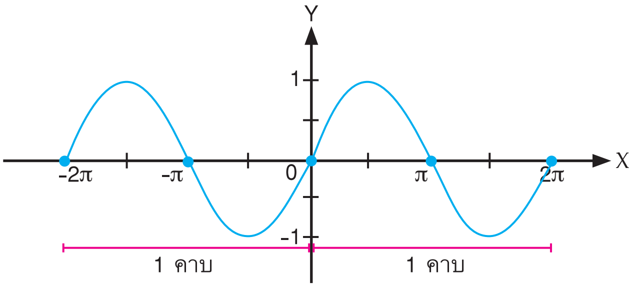
2) กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0



จาก $\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันไซน์ ดังนี้

กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-2\pi \le x \le 2\pi$



จากกราฟของ $y = \sin x$ ข้างต้น จะเห็นว่า กราฟจะแบ่งแกน X ออกเป็นช่วงย่อยที่สั้นที่สุด 2 ช่วง โดยที่ช่วงย่อยแต่ละช่วงมีความยาวเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน เรียกความยาวของช่วงย่อยดังกล่าวว่า **คาบ** (period) และเรียกฟังก์ชันของกราฟว่า **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ** (periodic function)

และจากกราฟข้างต้นเป็นกราฟที่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ซึ่งจะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดลบด้วยค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบว่า **แอมพลิจูด** (amplitude) ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

แอมพลิจูดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ เท่ากับ $\frac{\text{ค่าสูงสุด} - \text{ค่าต่ำสุด}}{2}$

จากกราฟของ $y = \sin x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน และกราฟบนช่วงนี้มีลักษณะเหมือนกัน จึงกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีคาบเท่ากับ 2π และเมื่อพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดลงด้านล่างตั้งแต่ช่วง -2π ถึง $-\pi$ ซึ่งมีค่าสูงสุด เท่ากับ 1 และเป็นกราฟเส้นโค้งเปิดขึ้นด้านบนตั้งแต่ช่วง $-\pi$ ถึง 0 ซึ่งมีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1 ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin x$ มีแอมพลิจูดเท่ากับ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

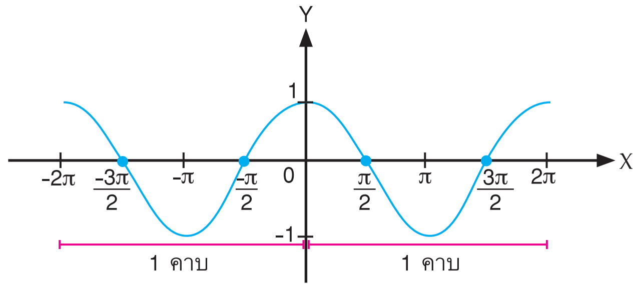
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

2. กราฟของ $y = \cos x$

กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ มีลักษณะการเขียนกราฟคล้ายกับกราฟของ $y = \sin x$

จาก $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้



จากกราฟของ $y = \cos x$ จะเห็นว่า $-2\pi \leq x \leq 0$ และ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นช่วงที่มีความยาว 2π เท่ากัน และกราฟบนช่วงนี้มีลักษณะเหมือนกัน จึงกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีคาบเท่ากับ 2π และเมื่อพิจารณากราฟในช่วง $-2\pi \leq x \leq 0$ จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันมีค่าสูงสุดเท่ากับ 1 และมีค่าต่ำสุด เท่ากับ -1 ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \cos x$ มีแอมพลิจูด เท่ากับ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $..., -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...$

กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

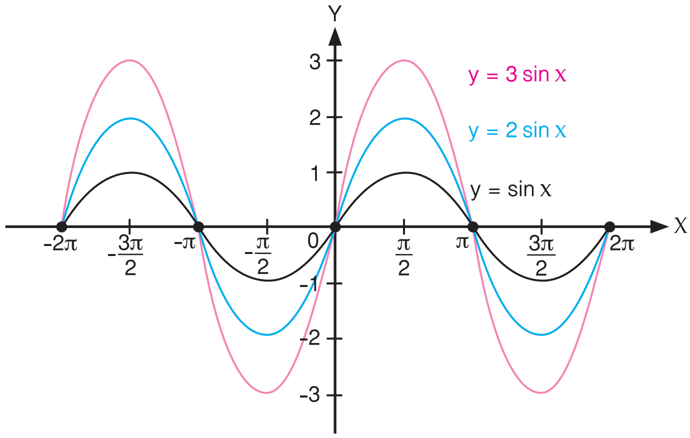
ตัวอย่างที่ 25

เขียนกราฟของ $y = \sin x$, $y = 2\sin x$ และ $y = 3\sin x$ บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อ $-2\pi \le x \le 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม

วิธีทำ

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0
$y = 2\sin x$	0	2	0	-2	0
$y = 3\sin x$	0	3	0	-3	0

จากตารางเขียนกราฟได้ ดังนี้



จากกราฟจะได้เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม ดังนี้

ฟังก์ชัน	เรนจ์	คาบ	แอมพลิจูด
$y = \sin x$	$[-1, 1]$	2π	$\frac{1-(-1)}{2} = 1$
$y = 2\sin x$	$[-2, 2]$	2π	$\frac{2-(-2)}{2} = 2$
$y = 3\sin x$	$[-3, 3]$	2π	$\frac{3-(-3)}{2} = 3$

ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$ และ $y = \frac{1}{4}\sin x$ บนระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อ $-2\pi \le x \le 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันทั้งสาม

จากตัวอย่างที่ 25 การหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันไซน์ในรูปทั่วไป เป็นดังนี้

กำหนด $f : R \rightarrow R,\ f(x) = a \sin (nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันไซน์ จะพบว่า คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$ ทำให้การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ทำได้รวดเร็วขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 26

เขียนกราฟของ $y = 4 \sin 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

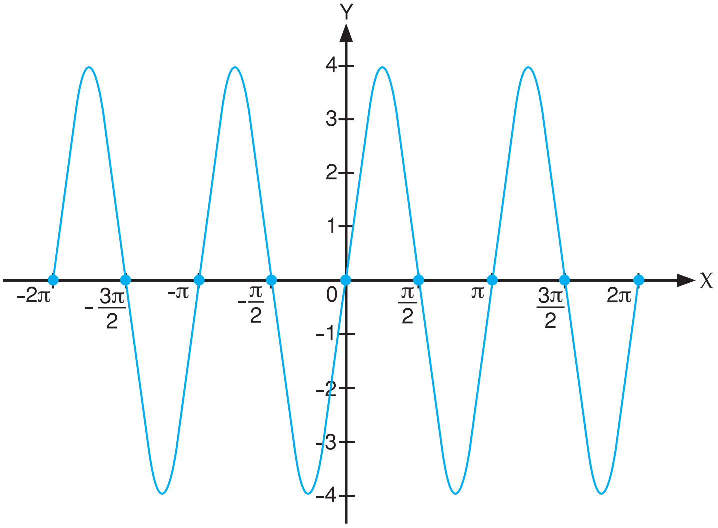
วิธีทำ จาก $y = 4 \sin 2x$ จะได้ $a = 4$ และ $n = 2$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a] = [-4, 4]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a| = |4| = 4$

เขียนกราฟของ $y = 4 \sin 2x$ ได้ ดังนี้



ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

ตัวอย่างที่ 27

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 8 \sin 6x$

วิธีทำ จาก $y = 8 \sin 6x$ จะได้ $a = 8$ และ $n = 6$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a] = [-8, 8]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a| = |8| = 8$

ลองทำดู

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 2 \sin \frac{x}{2}$

การหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันโคไซน์ในรูปทั่วไป เป็นดังนี้

กำหนด $f : R \rightarrow R,\ f(x) = a \cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a|$

ตัวอย่างที่ 28

เขียนกราฟของ $y = 2 \cos 2x$ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

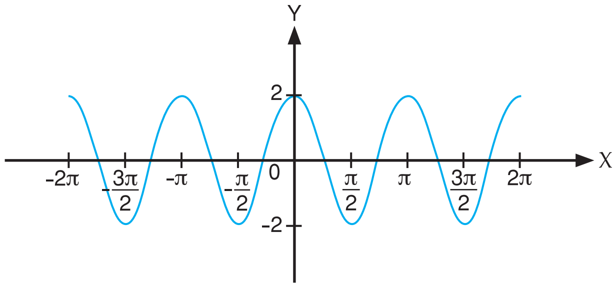
วิธีทำ จาก $y = 2 \cos 2x$ จะได้ $a = 2$ และ $n = 2$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a] = [-2, 2]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a| = |2| = 2$

เขียนกราฟของ $y = 2 \cos 2x$ ได้ ดังนี้



ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = 3\cos 3x$ เมื่อ $-2\pi \le x \le 2\pi$ พร้อมทั้งหาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูด

ตัวอย่างที่ 29

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 2\cos\frac{x}{4}$

วิธีทำ จาก $y = 2\cos\frac{x}{4}$ จะได้ $a = 2$ และ $n = \frac{1}{4}$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน เท่ากับ $[-a, a] = [-2, 2]$

คาบของฟังก์ชัน เท่ากับ $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน เท่ากับ $|a| = |2| = 2$

ลองทำดู

ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของ $y = 3\cos\frac{x}{3}$

การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชันอาจต้องใช้ความรู้เรื่องการเลื่อนขนานโดยใช้การเลื่อนขนานกราฟรูปมาตรฐานในแนวแกนนอนหรือแนวแกนตั้ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 30

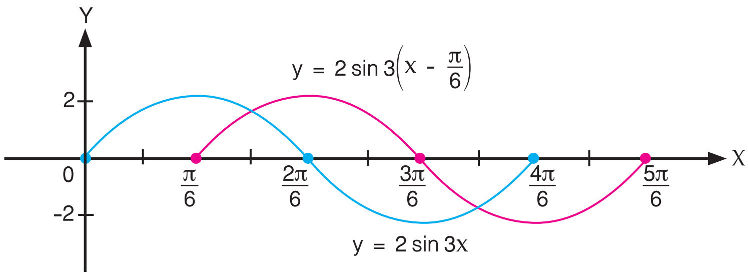
เขียนกราฟของ $y = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก กราฟของ $y = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $y = 2\sin 3x$ ไปทางขวา $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

ดังนั้น การเขียนกราฟของ $y = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ จึงมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนกราฟของ $y = 2\sin 3x$

ขั้นตอนที่ 2 เลื่อนกราฟของ $y = 2\sin 3x$ ไปทางขวา $\frac{\pi}{6}$ หน่วย จะได้กราฟของ $y = 2\sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ดังรูป



ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ตัวอย่างที่ 31

เขียนกราฟของ $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

วิธีทำ นำ $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ มาจัดรูปใหม่ จะได้ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

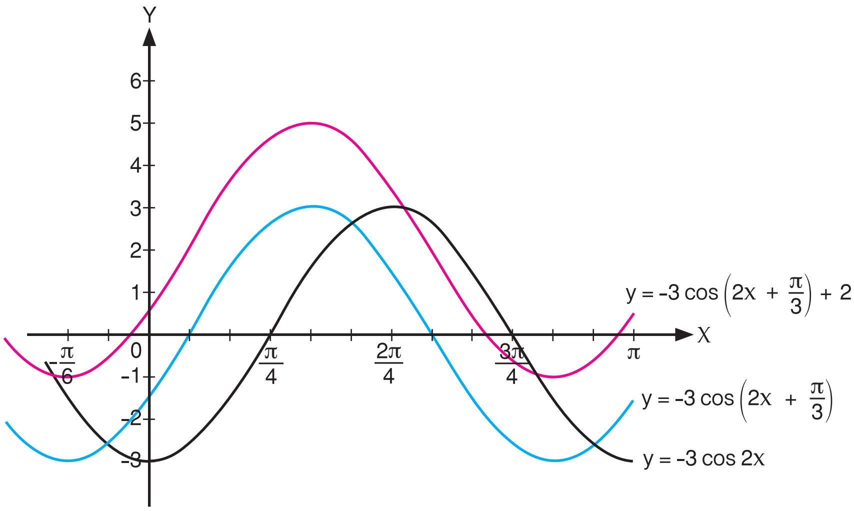
จะเป็นฟังก์ชันที่มี 1 คาบ เท่ากับ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ และ แอมพลิจูด เท่ากับ $|-3| = 3$

เนื่องจาก กราฟของ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ เป็นกราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $y = -3\cos 2x$ ไปทางซ้าย $\frac{\pi}{6}$ หน่วย แล้วเลื่อนกราฟขึ้น 2 หน่วย

ดังนั้น การเขียนกราฟของ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ จึงมีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนกราฟของ $y = -3\cos 2x$

ขั้นตอนที่ 2 เลื่อนกราฟของ $y = -3\cos 2x$ ให้ขนานกับแกน X ไปทางซ้าย $\frac{\pi}{6}$ หน่วย จะได้กราฟของ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ หรือ $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ขึ้น 2 หน่วย จะได้กราฟของ $y = -3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ หรือ $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ ดังรูป



ลองทำดู

เขียนกราฟของ $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

ในการเขียนกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นักเรียนควรทราบโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in I\}$

โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in I\}$

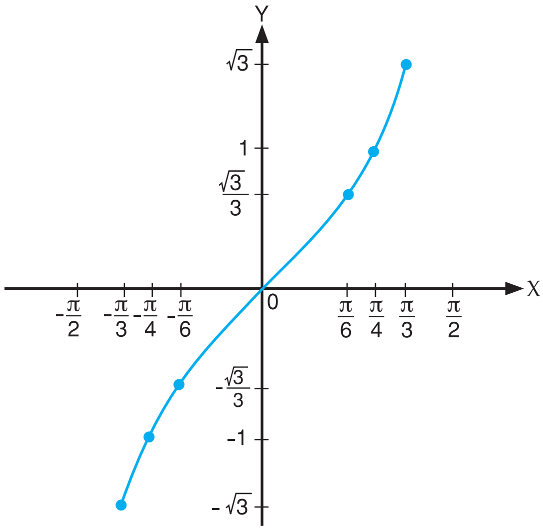
โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi,\ n \in I\}$

โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi,\ n \in I\}$

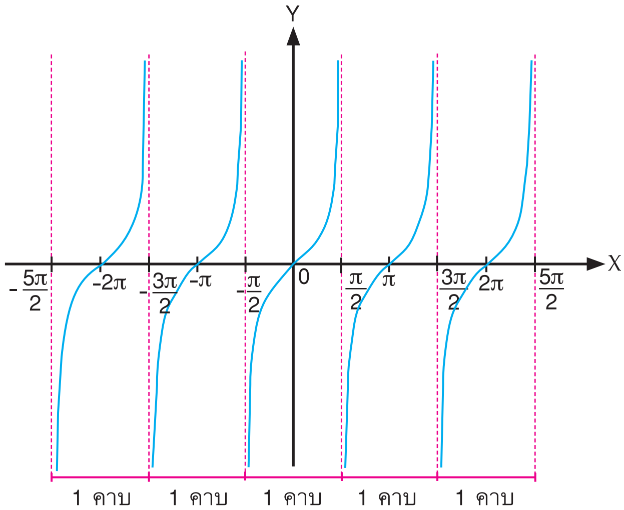
3. กราฟของ $y = \tan x$

พิจารณากราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



จาก $\tan(n\pi + \alpha) = \tan\alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้



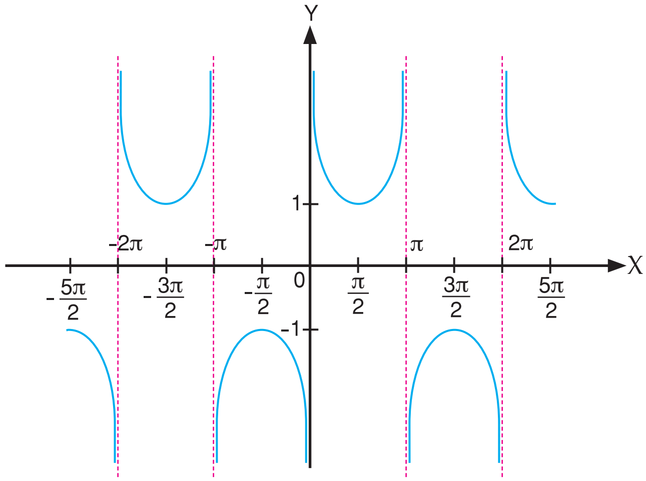
จากกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ เส้นตรง $x = -\frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{\pi}{2}$ ไม่ใช่สมาชิกของโดเมนของ $y = \tan x$ และเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = -\frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{\pi}{2}$

เมื่อพิจารณากราฟเป็นช่วงย่อยจะพบว่า กราฟของฟังก์ชันแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ซึ่งแต่ละช่วงย่อยมีความยาวเท่ากับ π ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ และมีคาบเท่ากับ π และจะเห็นว่า กราฟของ $y = \tan x$ ในแต่ละคาบไม่มีค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด ดังนั้น จึงไม่มีแอมพลิจูด

สำหรับกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ซึ่งทั้ง 3 ฟังก์ชัน เป็นส่วนกลับของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ตามลำดับ

4. กราฟของ y = cosec x

พิจารณากราฟของ y = cosec x



จากกราฟของ y = cosec x จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้นค่าระหว่าง -1 กับ 1

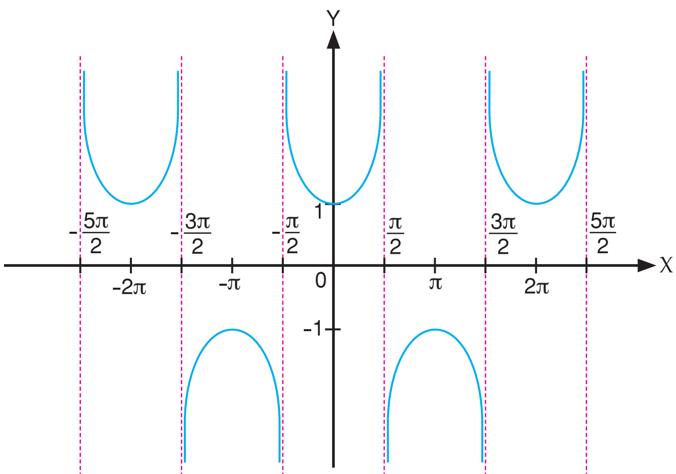
เรนจ์ของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

5. กราฟของ y = sec x

พิจารณากราฟของ y = sec x



จากกราฟของ $y = \sec x$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันเซแคนต์เป็นจำนวนจริงทุกจำนวน ยกเว้นค่าระหว่าง -1 กับ 1

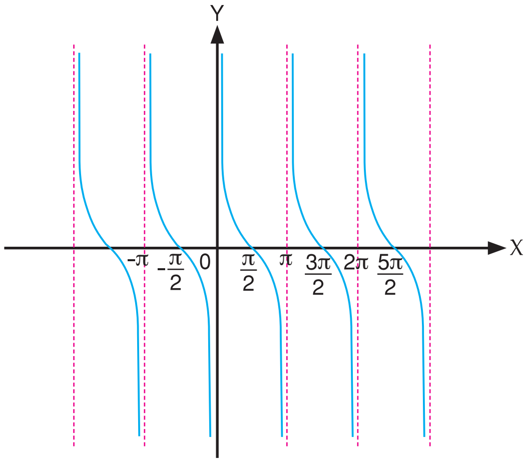
เรนจ์ของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

ฟังก์ชันเซแคนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

6. กราฟของ $y = \cot x$

พิจารณากราฟของ $y = \cot x$



จากกราฟของ $y = \cot x$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

ฟังก์ชันแทนเจนต์ไม่มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จึงไม่มีแอมพลิจูด

แบบฝึกทักษะ 1.6

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $y = 5 \sin x$
2) $y = \frac{1}{2} \sin x$
3) $y = \sin 8x$
4) $y = \sin \frac{x}{3}$
5) $y = 6 \cos \frac{x}{2}$
6) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$
7) $y = 3 \cos x$
8) $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

2. เขียนกราฟของ $y = a \sin nx$ หรือ $y = a \cos nx$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

1) $y = 4 \sin x$
2) $y = \sin 4x$
3) $y = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{2}$
4) $y = \frac{2}{5} \sin 2x$
5) $y = 6 \cos x$
6) $y = 3 \cos \frac{x}{4}$
7) $y = \cos \frac{x}{3}$
8) $y = 3 \cos 4x$

3. ให้หาเรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $y = \frac{1}{4} \sin \frac{x}{3}$
2) $y = \frac{1}{6} \sin \frac{4}{5}x$
3) $y = \frac{1}{7} \cos \frac{x}{8}$
4) $y = \frac{3}{8} \cos \frac{3}{4}x$

ระดับกลาง

4. ให้หาคาบและแอมพลิจูดของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

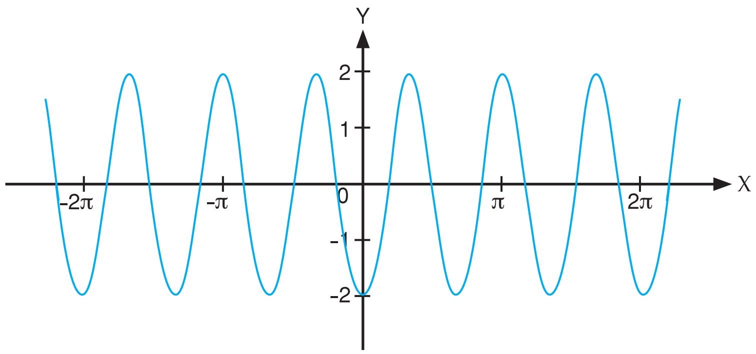
1) $y = \frac{4}{5} \sin 7x - 1$
2) $y = \frac{4}{7} \sin \left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$
3) $y = \frac{2}{7} \cos 8x + \frac{3}{5}$
4) $y = 2 \cos \left(5x + \frac{7\pi}{8}\right) + 1$

5. เขียนกราฟของ $y = a \sin nx$ หรือ $y = a \cos nx$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

1) $y = 3 \sin 2x + 3$
2) $y = 3 \sin 4\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$
3) $y = 2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$
4) $y = \frac{7}{4} \cos 3x - 2$
5) $y = \frac{2}{3} \cos \frac{x}{2} + 1$
6) $y = \frac{3}{5} \cos \left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 10$

ระดับท้าทาย

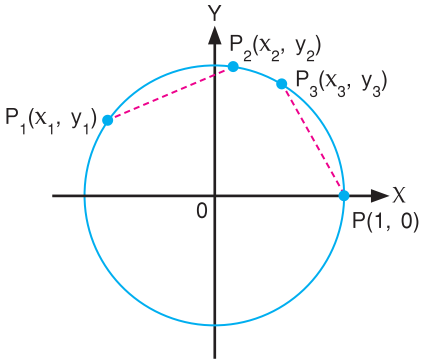
6. ให้เขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติจากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้



1.7 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวหรือของมุมเพียงมุมเดียวมาแล้ว ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม

ให้นักเรียนพิจารณาค่าของ $\cos(\alpha - \beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ ดังต่อไปนี้



กำหนดส่วนโค้ง PP_1 ยาว α หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว β หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ให้พิกัดของจุด P_1, P_2 และ P_3 เป็น (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ตามลำดับ

ซึ่งเป็นพิกัดจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α, β และ $\alpha - \beta$ ตามลำดับ

จะได้

$x_1 = \cos\alpha \qquad y_1 = \sin\alpha \qquad .....(1)$

$x_2 = \cos\beta \qquad y_2 = \sin\beta \qquad .....(2)$

$x_3 = \cos(\alpha - \beta) \qquad y_3 = \sin(\alpha - \beta) \qquad .....(3)$

เนื่องจาก ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

จะได้ว่า ความยาวของคอร์ด PP_3 เท่ากับความยาวของคอร์ด P_1P_2

ดังนั้น

$$|\overline{PP_3}| = |\overline{P_1P_2}|$$

$$\sqrt{(x_3-1)^2+(y_3-0)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$(x_3-1)^2+(y_3-0)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

$$(x_3^2-2x_3+1)+y_3^2 = (x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)+(y_1^2-2y_1y_2+y_2^2)$$

$$(x_3^2+y_3^2)-2x_3+1 = (x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2x_1x_2-2y_1y_2$$

$$1-2x_3+1 = 1+1-2x_1x_2-2y_1y_2$$

$$x_3 = x_1x_2+y_1y_2$$

เนื่องจากจุด (x_1, y_1) เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น สมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $x_1^2+y_1^2=1$

จาก (1), (2) และ (3) สรุปได้ว่า

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ซึ่งสามารถนำค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ ไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันอื่น ๆ คือ $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\sin(\alpha-\beta)$ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

การหาค่าของ $\cos(\alpha+\beta)$ ทำได้ ดังนี้

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta))\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ต่อไปจะเป็นการหาค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$ ซึ่งต้องใช้ค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ มาช่วยในการหา ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้ พิจารณาค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\\ &= 0(\cos\alpha)+1(\sin\alpha)\\ &= \sin\alpha\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

จาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

แทนค่า α ด้วย $\frac{\pi}{2} - \beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

สรุปได้ว่า

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$$

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$

จะได้

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

พิจารณาการหาค่าของ $\sin(\alpha - \beta)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\
&= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

นักเรียนสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha + \beta)$ และ $\tan(\alpha - \beta)$ ได้ เมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha + \beta)$ และ $\cos(\alpha + \beta)$ ดังนี้

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}, \text{ เมื่อ } \cos\alpha \neq 0 \text{ และ } \cos\beta \neq 0$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

สรุปได้ว่า

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Thinking Time

ให้แสดงว่า $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$ และ $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

ตัวอย่างที่ 32

ให้หาค่าของ

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)$

2) $\sin(30^\circ - 45^\circ)$

วิธีทำ **1)** จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{3\pi}{4}$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

2) จาก $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin(30^\circ - 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$$

ดังนั้น $\sin(30^\circ - 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$

2) $\cos(60^\circ + 45^\circ)$

ตัวอย่างที่ 33

ให้หาค่าของ

1) $\tan\frac{5\pi}{12}$

2) $\cos 420^\circ$

วิธีทำ **1)** จาก $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

และ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\tan\frac{2\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{2\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} - 1}{1 + (-\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{-(1 + \sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1 - 2\sqrt{3} - 3}{1 - 3}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

2) จาก $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$

และ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 360^\circ \cos 60^\circ - \sin 360^\circ \sin 60^\circ$

$$= \cos 60^\circ$$

ดังนั้น $\cos 420^\circ = \frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\tan\frac{\pi}{12}$ 2) $\cos 300^\circ$

ตัวอย่างที่ 34

ให้หาค่าของ

1) $\tan(180^\circ + \alpha)$ เมื่อ $0 < \alpha < 90^\circ$ **2)** $\cos(-225^\circ)$

วิธีทำ **1)** จาก $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

จะได้ $\tan(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\tan 180^\circ + \tan\alpha}{1 - \tan 180^\circ \tan\alpha}$

$= \dfrac{0 + \tan\alpha}{1 - 0}$

ดังนั้น $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$

2) จาก $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

จะได้ $\cos(-225^\circ) = \cos 225^\circ$

$= \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$= \cos 180^\circ \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \sin 45^\circ$

$= (-1)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0$

$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\cos(-225^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\tan(360^\circ + \alpha)$ เมื่อ $0 < \alpha < 90^\circ$ 2) $\sin 135^\circ$

นอกจากที่กล่าวมาแล้ว ยังสามารถใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม เมื่อโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ รวมทั้งโจทย์ที่ต้องแสดงการพิสูจน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

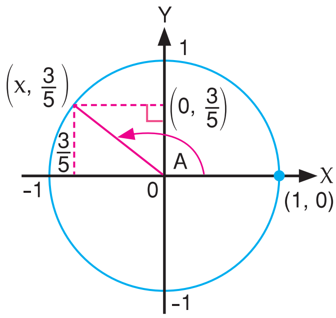
ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ ให้หา $\tan (A + B)$

วิธีทำ จาก $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1^2 \quad \text{เมื่อ } x < 0$$



$$x = \pm\frac{4}{5}$$

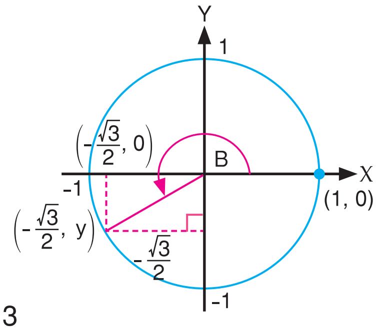
แต่ $x < 0$ จะได้ $x = -\frac{4}{5}$

ดังนั้น $\cos A = -\frac{4}{5}$

จาก $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1^2 \quad \text{เมื่อ } y < 0$$



$$y = \pm\frac{1}{2}$$

แต่ $y < 0$ จะได้ $y = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin B = -\frac{1}{2}$

จากข้อกำหนด จะได้ว่า $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12}}{1 + \frac{3\sqrt{3}}{12}}$$

$$= \frac{\frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12}}{\frac{12 + 3\sqrt{3}}{12}}$$

$$= \frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12 + 3\sqrt{3}}$$

นั่นคือ $\tan (A + B) = \frac{-9 + 4\sqrt{3}}{12 + 3\sqrt{3}}$

ลองทำดู

กำหนด $\sin A = -\frac{4}{5}$ และ $\cos B = \frac{1}{2}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หา $\tan (A - B)$

ตัวอย่างที่ 36

กำหนด $13 \sin \alpha + 5 = 0$ และ $13 \cos \beta - 12 = 0$ เมื่อ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ และ $270^\circ < \beta < 360^\circ$ ให้หาค่าของ $\cos (\alpha + \beta)$

วิธีทำ จาก $13 \sin \alpha + 5 = 0$ เมื่อ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

จะได้ $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$

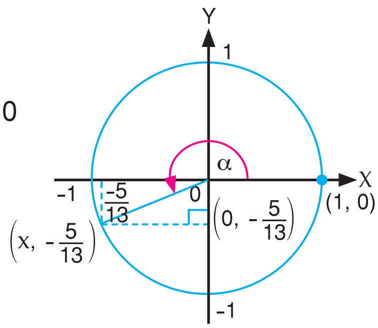
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$x^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1^2$$ เมื่อ $x < 0$

$$x = \pm\frac{12}{13}$$

แต่ $x < 0$ จะได้ $x = -\frac{12}{13}$

ดังนั้น $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$



จาก $13 \cos \beta - 12 = 0$ เมื่อ $270^\circ < \beta < 360^\circ$

จะได้ $\cos \beta = \frac{12}{13}$

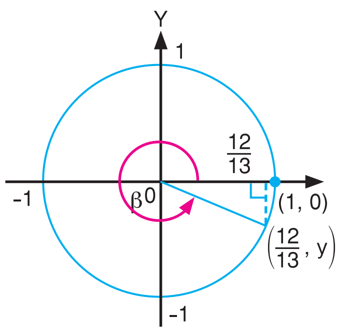
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$y^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2$$ เมื่อ $y < 0$

$$y = \pm\frac{5}{13}$$

แต่ $y < 0$ จะได้ $y = -\frac{5}{13}$

ดังนั้น $\sin \beta = -\frac{5}{13}$



จากข้อกำหนด จะได้ $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ และ $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ และ $\cos\beta = \frac{12}{13}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

นั่นคือ $\cos(\alpha+\beta) = -1$

ลองทำดู

กำหนด $5\sin A + 4 = 0$ และ $\tan B + 1 = 0$ เมื่อ $270^\circ < A < 360^\circ$ และ $90^\circ < B < 180^\circ$ ให้หาค่าของ $\sin(A+B)$

ตัวอย่างที่ 37

ให้หาค่าของ

1) $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20}$

2) $\cos 65^\circ\cos 35^\circ + \cos 25^\circ\cos 55^\circ$

วิธีทำ **1)**
$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} &= \sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3\pi}{20}\right) \\ &= \sin\frac{5\pi}{20} \\ &= \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{20} + \cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2)
$$\begin{aligned}\cos 65^\circ\cos 35^\circ + \cos 25^\circ\cos 55^\circ &= \cos 65^\circ\cos 35^\circ + \sin 65^\circ\sin 35^\circ \\ &= \cos(65^\circ - 35^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 65^\circ\cos 35^\circ + \cos 25^\circ\cos 55^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\dfrac{\tan\frac{3\pi}{8} + \tan\frac{7\pi}{24}}{1 - \tan\frac{3\pi}{8}\tan\frac{7\pi}{24}}$

2) $\sin 118^\circ \cos 25^\circ - \cos 118^\circ \sin 25^\circ$

ตัวอย่างที่ 38

ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin\alpha\cos(45^\circ - \alpha) + \cos\alpha\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha) - \sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)}$

วิธีทำ

$$\frac{\sin\alpha\cos(45^\circ - \alpha) + \cos\alpha\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha) - \sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{\sin[\alpha + (45^\circ - \alpha)]}{\cos[\alpha + (60^\circ - \alpha)]}$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

ดังนั้น $\dfrac{\sin\alpha\cos(45^\circ - \alpha) + \cos\alpha\sin(45^\circ - \alpha)}{\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha) - \sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)} = \sqrt{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin A\cos(60^\circ - A) + \cos A\sin(60^\circ - A)}{\cos A\cos(30^\circ - A) - \sin A\sin(30^\circ - A)}$

ตัวอย่างที่ 39

ให้พิสูจน์ว่า $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha$

วิธีทำ $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha)$

$$= (\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha) + (\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha)$$

$$= 2\sin 60^\circ\cos\alpha$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\alpha$$

$$= \sqrt{3}\cos\alpha$$

ดังนั้น $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{3}\cos\alpha$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\sin 4\alpha \cos \alpha + \cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \sin 2\alpha$

ตัวอย่างที่ 40

ให้พิสูจน์ว่า $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = 4$

วิธีทำ $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) + \tan(30^\circ + 45^\circ)$

$$= \left(\frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}\right) + \left(\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}\right) + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$= \frac{\left[1^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] + \left[1^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]}{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9} + 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}}{1 - \frac{3}{9}}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$= 4$$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\tan 105^\circ - \tan 15^\circ = -4$

แบบฝึกทักษะ 1.7

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

1) $\sin (60^\circ + 45^\circ)$ 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ 3) $\sin 75^\circ$

4) $\cos 15^\circ$ 5) $\tan 105^\circ$ 6) $\sin \frac{7\pi}{12}$

7) $\cos \frac{17\pi}{12}$ 8) $\tan \frac{11\pi}{12}$ 9) $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

2. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{15}$ 2) $\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{21} - \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{21}$

3) $\cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} + \sin \frac{4\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$ 4) $\sin 5^\circ \cos 25^\circ + \cos 5^\circ \sin 25^\circ$

5) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$ 6) $\cos 75^\circ \cos 45^\circ - \cos 15^\circ \cos 315^\circ$

3. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ 4) $\sin (90^\circ - A) = \cos A$

5) $\cos (270^\circ + B) = \sin B$ 6) $\tan (90^\circ - A) = \cot A$

7) $\sin (\pi + \theta) = -\sin \theta$ 8) $\cos (90^\circ + A) = -\sin A$

4. กำหนด $\sin A = \frac{1}{2}$ และ $\cos B = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หาค่าของ $\sin (A + B)$ และ $\cos (A - B)$

ระดับกลาง

5. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\cot (270^\circ + A) = -\tan A$

2) $\cot (2\pi - \theta) = -\cot \theta$

3) $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$

6. กำหนด $\tan A = -\frac{4}{3}$ และ $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$
ให้หาค่าของ $\tan (A + B)$

7. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\dfrac{\tan 13^\circ + \tan 32^\circ}{\tan 13^\circ \tan 32^\circ - 1}$

2) $\dfrac{\tan 25^\circ - \tan 85^\circ}{1 + \tan 85^\circ \tan 25^\circ}$

3) $\dfrac{-\tan 15^\circ - 1}{\tan 15^\circ - 1}$

4) $\dfrac{\cot 25^\circ \cot 20^\circ - 1}{\cot 25^\circ + \cot 20^\circ}$

5) $\tan 75^\circ - \tan 30^\circ - \tan 75^\circ \tan 30^\circ$

6) $\cot 75^\circ + \cot 60^\circ + \cot 75^\circ \cot 60^\circ$

8. ให้เขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

1) $\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

3) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan\theta}{1 - \frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}}$

9. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - A\right) = \frac{1}{2}$

2) $\sin 3\theta \cos\theta + \cos 3\theta \sin\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$

3) $\dfrac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \tan 3A} = \tan 7A$

4) $\dfrac{\cot 4\theta \cot\theta - 1}{\cot\theta + \cot 4\theta} = \dfrac{\cot 3\theta \cot 2\theta - 1}{\cot 2\theta + \cot 3\theta}$

10. กำหนด $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $0 < A < 90^\circ$ และ $0 < B < 90^\circ$
ให้หาค่าของ $A + B$

ระดับท้าทาย

11. กำหนด $\dfrac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \dfrac{5}{7}$ ให้หาค่าของ $\tan A \cdot \cot B$

1.8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

จากหัวข้อฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม นักเรียนสามารถนำความรู้ดังกล่าวมาหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุมได้ ดังนี้

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

1) การหาค่าของ $\sin 2\alpha$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

2) การหาค่าของ $\cos 2\alpha$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

กำหนด $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ .....(1)

เนื่องจาก $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

แทน $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ ใน (1)

จะได้

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

แทน $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ใน (1)

จะได้

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

3) การหาค่าของ $\tan 2\alpha$

เนื่องจาก
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

สรุปได้ว่า

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

ตัวอย่างที่ 41

กำหนด $\sin\theta = \frac{4}{5}$ และ $\cos\theta < 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ให้หาค่าของ

1) $\sin 2\theta$ **2)** $\cos 2\theta$ **3)** $\tan 2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

จะได้
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$
$$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$
$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$
$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

เนื่องจาก $\cos\theta < 0$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{\left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{4}{3}$$

1) $$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

ดังนั้น $$\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$$

2) $$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$$

ดังนั้น $$\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$$

3) $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

ดังนั้น $$\tan 2\theta = \frac{24}{7}$$

ลองทำดู

กำหนด $\cos\theta = \frac{5}{13}$ และ $\sin\theta > 0$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ

1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

ตัวอย่างที่ 42

ให้แสดงว่า $\tan\theta \sin 2\theta = 1 - \cos 2\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\tan\theta \sin 2\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(2\sin\theta\cos\theta)\\ &= 2\sin^2\theta\\ &= 1 - (1 - 2\sin^2\theta)\\ &= 1 - \cos 2\theta\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan\theta \sin 2\theta = 1 - \cos 2\theta$

ลองทำดู

ให้แสดงว่า $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสามเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

1) การหาค่าของ $\sin 3\alpha$

เนื่องจาก $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

จะได้

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha)\\ &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + (1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - \sin^3\alpha - \sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

2) การหาค่าของ $\cos 3\alpha$

เนื่องจาก $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

จะได้

$$
\begin{aligned}
\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

3) การหาค่าของ $\tan 3\alpha$

เนื่องจาก $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha + \alpha) \\
&= \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha\tan\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan\alpha + \tan\alpha(1 - \tan^2\alpha)}{1 - \tan^2\alpha}}{\dfrac{1 - \tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} \\
&= \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \\
&= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

ตัวอย่างที่ 43

กำหนด $\cos 17^\circ = 0.9563$ ให้หาค่าของ $\cos 51^\circ$

วิธีทำ จาก $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

จะได้

$$\begin{aligned} \cos 51^\circ &= \cos 3(17^\circ) \\ &= 4\cos^3 17^\circ - 3\cos 17^\circ \\ &= 4(0.9563)^3 - 3(0.9563) \\ &\approx 3.4982 - 2.8689 \\ &= 0.6293 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 51^\circ \approx 0.6293$

ลองทำดู

กำหนด $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ให้หาค่าของ $\cos 3\theta$

ตัวอย่างที่ 44

กำหนด $\tan A = \frac{3}{4}$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ $\tan 3A$

วิธีทำ จาก $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

จะได้ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} = \dfrac{3\left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\dfrac{117}{44}$

ดังนั้น $\tan 3A = -\dfrac{117}{44}$

ลองทำดู

กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

ให้หาค่าของ $\tan 3A$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

1) การหาค่าของ $\cos \frac{\alpha}{2}$

เนื่องจาก

$$\cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

สรุปได้ว่า

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

2) การหาค่าของ $\sin \frac{\alpha}{2}$

เนื่องจาก

$$\cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

สรุปได้ว่า

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Thinking Time

ให้แสดงว่า

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

ตัวอย่างที่ 45

ให้หาค่าของ $\sin 15^\circ$

วิธีทำ จาก $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

จะได้

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

ดังนั้น $\sin 15^\circ = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\cos 22.5^\circ$

แบบฝึกทักษะ 1.8

ระดับพื้นฐาน

1. **กำหนด $\cos A = \frac{8}{17}$ และ $0 < A < 90^\circ$ ให้หาค่าของ**

1) $\sin 2A$ 2) $\cos 2A$ 3) $\tan 2A$

2. **กำหนด $\sin A = \frac{5}{13}$ และ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ**

1) $\sin 3A$ 2) $\cos 3A$ 3) $\tan 3A$

3. **กำหนด $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $0 < A < 90^\circ$ ให้หาค่าของ**

1) $\sin \frac{A}{2}$ 2) $\cos \frac{A}{2}$ 3) $\tan \frac{A}{2}$

ระดับกลาง

4. **ให้หาค่าของ**

1) $\sin^2 15^\circ + \sin^2 45^\circ$

2) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ$

3) $\dfrac{\cos^3 15^\circ + \sin^3 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$

5. **กำหนด $\cot A = \frac{1}{2}$ เมื่อ $0 \le A \le 90^\circ$ ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A}$**

6. **แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง**

1) $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cot \alpha$ 2) $\dfrac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \dfrac{\alpha}{2}$

3) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ 4) $\dfrac{1 + \cot^2 \alpha}{2 \cot \alpha} = \operatorname{cosec} 2\alpha$

5) $\dfrac{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = 1 - 2 \sin 2\alpha$ 6) $\dfrac{4 \sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \dfrac{4 \cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 6$

7. **กำหนด $A + B = 55^\circ$ และ $4 \sin (A - B) \cos (A - B) = 1$ ให้หาค่าของ B**

ระดับท้าทาย

8. ให้หาค่าของ $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

9. กำหนด $\sin^2(\pi + \theta) - \cos^2(\pi - \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
ให้หาค่าของ $\sec 2\theta + \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$

10. กำหนด $\sin(A + B) = \frac{2 - \sqrt{3}}{10}$ และ $\sin(A - B) = \frac{2 + \sqrt{3}}{10}$
ให้หาค่าของ $\sin 2A \sin 2B$

แนะแนวคิด
ข้อ 8. ให้ใช้ความสัมพันธ์ของ $\cos 2\alpha$ มาช่วยในการหาคำตอบ

1.9 ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กิจกรรม คณิตศาสตร์

1. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

กำหนด $\sin(\alpha + \beta) =$ ....(1)

$\sin(\alpha - \beta) =$ ....(2)

.... + ... จะได้ $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$ ....

สรุปได้ว่า

$2\sin\alpha\cos\beta =$ ....

.... - .... จะได้ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) =$ ....

สรุปได้ว่า

$2\cos\alpha\sin\beta =$ ....

2. นักเรียนคิดว่า การหาค่าของ $2\cos\alpha\cos\beta$ และ $2\sin\alpha\sin\beta$ ต้องใช้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างใดบ้าง และมีวิธีการหาค่าอย่างไร

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad .....(1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad .....(2)$$

(1) + (2) จะได้ $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

สรุปได้ว่า

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

(1) - (2) จะได้ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

สรุปได้ว่า

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถหาค่าของ $2\cos\alpha\cos\beta$ และ $2\sin\alpha\sin\beta$ โดยใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่าของ $2\sin\alpha\cos\beta$ และ $2\cos\alpha\sin\beta$ ซึ่งมีค่า ดังนี้

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

นอกจากความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังกล่าว ยังมีความสัมพันธ์อื่น ๆ อีก ดังนี้

กำหนด $x + y = \alpha \qquad .....(1)$

$x - y = \beta \qquad .....(2)$

(1) + (2) จะได้ $2x = \alpha + \beta$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(1) - (2) จะได้ $2y = \alpha - \beta$

$$y = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

เนื่องจาก $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$

แทนค่า $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ และ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ จะได้

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

สรุปได้ว่า

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถหาค่าของ $\sin\alpha - \sin\beta$, $\cos\alpha + \cos\beta$ และ $\cos\alpha - \cos\beta$ โดยใช้วิธีเดียวกันกับการหาค่าของ $\sin\alpha + \sin\beta$ ซึ่งมีค่า ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 46

ให้หาค่าของ $2\cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

จะได้

$$\begin{aligned}
2\cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ &= [\cos(55^\circ + 5^\circ) + \cos(55^\circ - 5^\circ)] - \cos 50^\circ \\
&= (\cos 60^\circ + \cos 50^\circ) - \cos 50^\circ \\
&= \cos 60^\circ \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $2\cos 55^\circ \cos 5^\circ - \cos 50^\circ = \frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $2\cos 50^\circ \cos 70^\circ - \cos 20^\circ$

ตัวอย่างที่ 47

ให้หาค่าของ $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

จะได้

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos\theta \\
&= 2\sin\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right]\cos\left[\frac{\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) - \left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right)}{2}\right] - \cos\theta \\
&= 2\sin\frac{5\pi}{6}\cos(-\theta) - \cos\theta \\
&= 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\theta - \cos\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \theta\right) - \cos\theta = 0$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{11\pi}{6}\right)\right]\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

ตัวอย่างที่ 48

ให้หาค่าของ $\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ} &= \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{40^\circ + 80^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{40^\circ - 80^\circ}{2}\right)}{\cos 20^\circ} \\
&= \frac{2\sin 60^\circ\cos(-20^\circ)}{\cos 20^\circ} \\
&= \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ} = \sqrt{3}$

แนะแนวคิด

$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$

$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin 110^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 110^\circ + \cos 20^\circ}$

แบบฝึกทักษะ 1.9

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของ

1) $2 \sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$
2) $2 \cos 35^\circ \cos 25^\circ - \cos 10^\circ$
3) $2 \cos 50^\circ \sin 10^\circ + \sin 40^\circ$
4) $2 \sin \dfrac{7\pi}{15} \cos \dfrac{2\pi}{15} - \sin \dfrac{3\pi}{5}$

2. ให้หาค่าของ

1) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \cos 20^\circ$
2) $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \cos 170^\circ$
3) $\dfrac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}$
4) $\dfrac{\cos 70^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ - \sin 70^\circ}$

ระดับกลาง

3. กำหนด $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ให้หาค่าของ $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

4. กำหนด $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ให้หาค่าของ $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)$

5. กำหนด $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$ ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin 10\theta - \sin 6\theta}{\cos 10\theta + \cos 6\theta}$

6. กำหนด $\theta = \dfrac{\pi}{24}$ ให้หาค่าของ $\dfrac{\sin 26\theta - \sin 10\theta}{\sin 4\theta + \sin 12\theta}$

ระดับท้าทาย

7. กำหนด $\cos 35^\circ + \cos 15^\circ = a$ และ $\sin 35^\circ + \sin 15^\circ = b$
ให้หาค่าของ $\sin 50^\circ$

8. กำหนด $\sin A = k$ ให้หาค่าของ $4 \sin A \sin(60^\circ + A) \sin(60^\circ - A)$

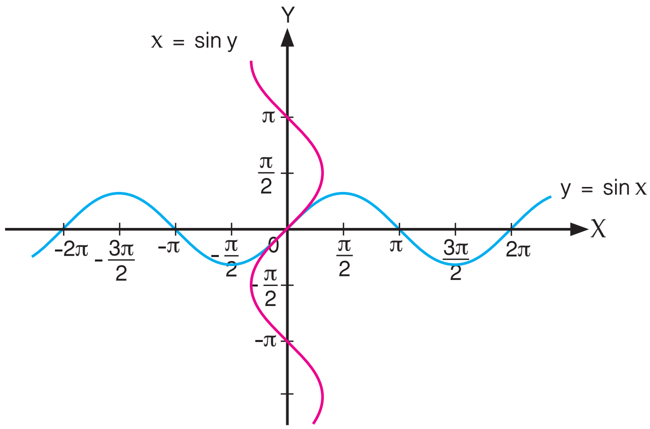
1.10 ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 และตัวผกผันของฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้นที่เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะทำให้ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชัน

1. ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-1 \le y \le 1$

และกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x = \sin y\}$



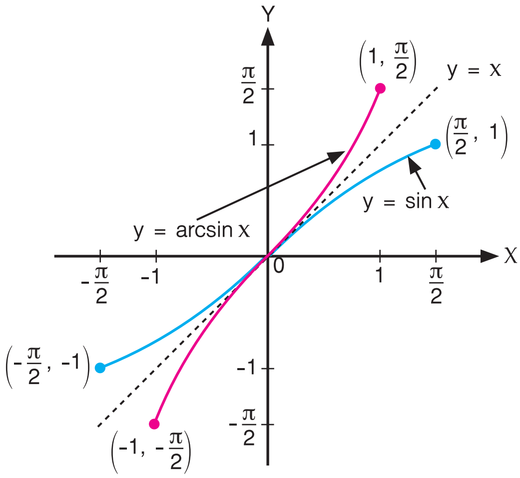
จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \sin x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \sin x$ เป็น $\left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ จะได้ว่า $\left\{(x, y) \,\middle|\, y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\left\{(x, y) \,\middle|\, x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arcsine**

บทนิยาม ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

คณิตน่ารู้

ถ้า $(x, y) \in$ arcsine จะได้ $y = \text{arcsine}\, x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arcsin x$ โดย $y = \arcsin x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \sin y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \mid y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arcsin x\}$



$y = \arcsin x, -1 \le x \le 1$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ [-1, 1] และเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 49

ให้หาค่าของ

1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ **2)** $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ **1)** ให้ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ สำหรับทุก $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

จะได้ว่า $y = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

2) ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

เนื่องจาก $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ สำหรับทุก $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

จะได้ว่า $y = -\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

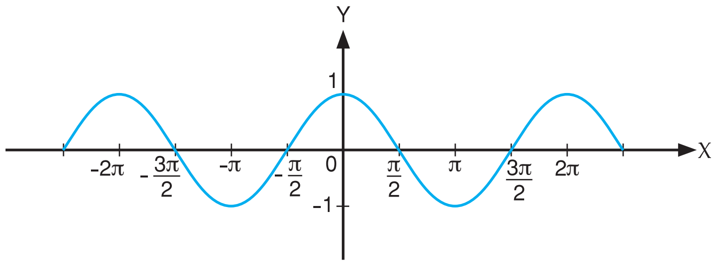
ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\arcsin\frac{1}{2}$ 2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \cos x$



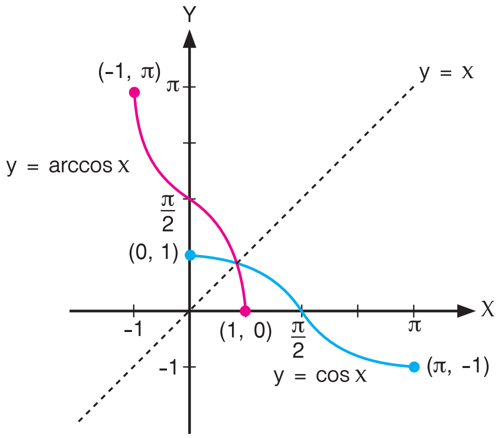
จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \cos x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \cos x$ เป็น $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ จะได้ว่า $\{(x, y) \mid y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\{(x, y) \mid x = \cos y, 0 \le y \le \pi\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arccosine**

บทนิยาม ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le y \le \pi$

คณิตน่ารู้

ถ้า $(x, y) \in$ arccosine จะได้ $y = \text{arccosine}\, x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arccos x$ โดย $y = \arccos x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \cos y$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \arccos x\}$



$y = \arccos x, -1 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le \pi$

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arccos คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arccos คือ $[0, \pi]$

ตัวอย่างที่ 50

ให้หาค่าของ

1) $\arccos 1$ **2)** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ **1)** ให้ $\arccos 1 = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\cos y = 1$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

เนื่องจาก $\cos 0 = 1$ สำหรับทุก $y \in [0, \pi]$

จะได้ว่า $y = 0$

ดังนั้น $\arccos 1 = 0$

2) ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\cos y = -\frac{1}{2}$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

เนื่องจาก $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ สำหรับทุก $y \in [0, \pi]$

จะได้ว่า $y = \frac{2\pi}{3}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

ลองทำดู

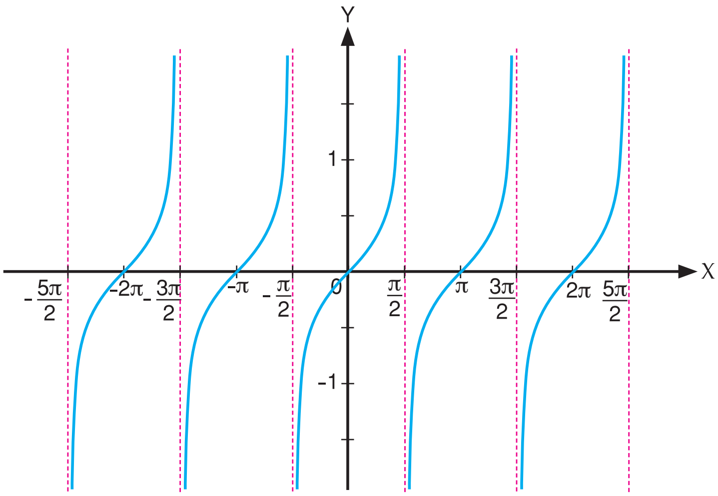
ให้หาค่าของ

1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

พิจารณากราฟของ $y = \tan x$



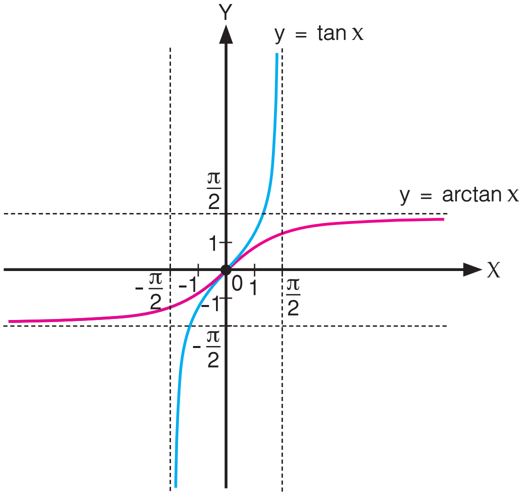
จากกราฟจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = \tan x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ถ้ากำหนดโดเมนของ $y = \tan x$ เป็น $\left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ จะได้ว่า $\left\{(x, y) \mid y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ได้ฟังก์ชันผกผัน คือ $\left\{(x, y) \mid x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า **arctangent**

บทนิยาม ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

คณิตน่ารู้

ถ้า $(x, y) \in \text{arctangent}$ จะได้ $y = \text{arctangent}\, x$ หรือเขียนสั้น ๆ ได้เป็น $y = \arctan x$ โดย $y = \arctan x$ มีความหมายเดียวกันกับ $x = \tan y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \mid y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arctan x\}$



$$y = \arctan x, -\infty < x < \infty \text{ และ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arctan คือ R และเรนจ์ของฟังก์ชัน arctan คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 51

ให้หาค่าของ

1) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ **2)** $\arctan(-1)$

วิธีทำ **1)** ให้ $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ เมื่อ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

เนื่องจาก $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ สำหรับทุก $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า $y = \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$

2) ให้ $\arctan(-1) = y$

โดยบทนิยาม จะได้ $\tan y = -1$ เมื่อ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

เนื่องจาก $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ สำหรับทุก $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ว่า $y = -\frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ

1) $\arctan \sqrt{3}$

2) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

จากบทนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ สามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ที่ทำให้แต่ละฟังก์ชันมีฟังก์ชันผกผันได้ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	R

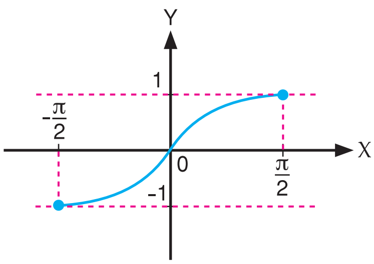
สำหรับฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

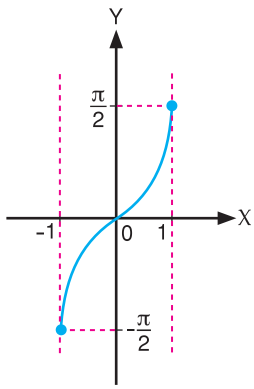
คณิตน่ารู้

ในหนังสือบางเล่มจะเขียน $y = \sin^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ $y = \tan^{-1} x$ แทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

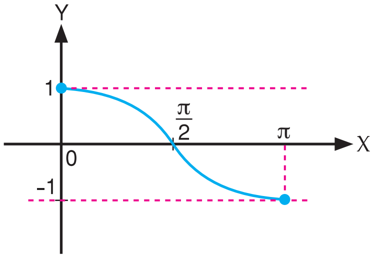
กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent และกราฟของฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



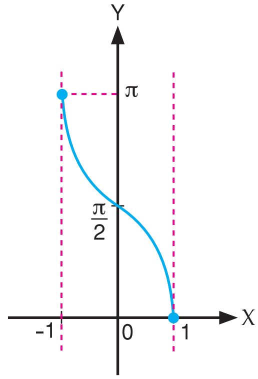
$y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



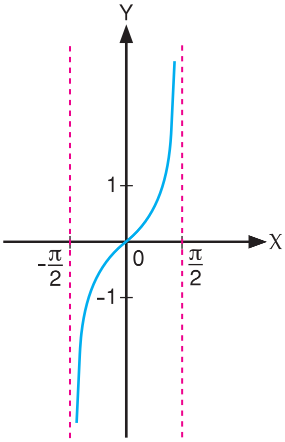
$y = \arcsin x,\ -1 \le x \le 1$



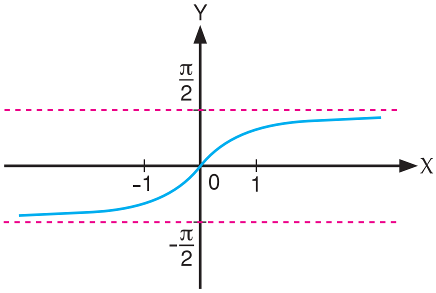
$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$



$y = \arccos x,\ -1 \le x \le 1$



$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan x,\ x \in R$

ตัวอย่างที่ 52

ให้หาค่าของ $\cos(\arctan\sqrt{3})$

วิธีทำ ให้ $\arctan\sqrt{3} = \theta$

จะได้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ เมื่อ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

เนื่องจาก $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ สำหรับทุก $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

จะได้ $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos(\arctan\sqrt{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\tan\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

สำหรับโจทย์ที่เกี่ยวกับตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติบางโจทย์ นักเรียนอาจต้องเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติหรือใช้ความรู้จากฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 53

ให้หาค่าของ arcsin 0.2079

วิธีทำ ให้ $\arcsin 0.2079 = \theta$

จะได้ $\sin\theta = 0.2079$ เมื่อ $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

จากการเปิดตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะได้ $\sin 12^\circ = 0.2079$ สำหรับทุก $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

ดังนั้น $\theta = 12^\circ$

นั่นคือ $\arcsin 0.2079 = 12^\circ$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ arctan 0.7813

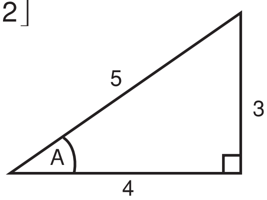
ตัวอย่างที่ 54

ให้หาค่าของ $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{3}{5} = A$

จะได้ $\sin A = \frac{3}{5}$ เมื่อ $A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

จาก $\sin A = \frac{3}{5}$ สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ ดังนี้



จะได้ $\cos A = \frac{4}{5}$

ให้ $\arccos\frac{4}{5} = B$

จะได้ $\cos B = \frac{4}{5}$ เมื่อ $B \in [0, \pi]$

เนื่องจาก $\cos A = \cos B$ จะได้ $\sin A = \sin B = \frac{3}{5}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right) &= \sin(A + B)\\ &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\\ &= \frac{24}{25}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\tan\left(\arccos\frac{5}{13} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$

ตัวอย่างที่ 55

ให้หาค่าของ $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{1}{4} = \theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ เมื่อ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) &= \cos 2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$

ลองทำดู

ให้หาค่าของ $\tan\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$

ตัวอย่างที่ 56

ให้แสดงว่า $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

วิธีทำ ให้ $\arctan\frac{1}{3} = \theta$

จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{3}$ เมื่อ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) &= \tan 2\theta \\ &= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \\ &= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

จะได้ $\tan\left(2\arctan\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$

ลองทำดู

ให้แสดงว่า $2 \arctan \frac{3}{8} = \arctan \frac{48}{55}$

แบบฝึกทักษะ 1.10

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของ

1) $\arcsin 1$ 2) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\arctan 1$

4) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$ 5) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $\arctan (-\sqrt{3})$

2. ให้หาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1) $\arcsin 0.4695$ 2) $\arcsin 0.5688$ 3) $\arccos 0.7451$

4) $\arccos 0.8158$ 5) $\arctan 0.3839$ 6) $\arctan 1.1171$

ระดับกลาง

3. ให้หาค่าของ

1) $\sin \left(\arccos \frac{1}{4}\right)$ 2) $\cos (\arctan (-3))$ 3) $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

4) $\operatorname{cosec} \left(\arcsin \frac{1}{2}\right)$ 5) $\sec \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ 6) $\cot (\arcsin 1)$

7) $\sin (\arccos 0.5640)$ 8) $\cos (\arctan 0.4348)$ 9) $\tan (\arccos (-0.7771))$

4. ให้หาค่าของ

1) $\sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)$ 2) $\cos \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}\right)$

3) $\sin \left(2 \arccos \left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ 4) $\tan \left(2 \arcsin \left(-\frac{12}{13}\right)\right)$

5. ให้หาค่าของ

1) $\sin \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right)$ 2) $\tan \left(\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{1}{3}\right)$

3) $\cos \left(\arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{4}{5}\right)$ 4) $\cos \left(\arctan \left(-\frac{4}{3}\right) + \arcsin \frac{12}{13}\right)$

ระดับท้าทาย

6. ให้แสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$ 2) $\cos (2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$

1.11 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และสมการตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities and Trigonometric Equations)

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้นำความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติมาใช้เพื่อแสดงความเท่ากันทุกประการระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติที่แตกต่างกันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป ซึ่งเรียกว่า การพิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (Trigonometric Identities)

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cos\theta + \sin\theta = 1$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

จะเห็นว่า สมการ $\cos\theta + \sin\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับบาง θ แต่สมการ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ เป็นจริงสำหรับทุก θ เรียกสมการตรีโกณมิติ ที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ว่า **เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ**

คณิตน่ารู้

สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกว่า **สมการตรีโกณมิติ**

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าค่าทั้งสองข้างของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 57

ให้พิสูจน์ว่า $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^2 x + \tan^4 x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sec^4 x - \sec^2 x &= (\sec^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)\\ &= (1 + \tan^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)\\ &= 1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x - 1 - \tan^2 x\\ &= \tan^2 x + \tan^4 x\end{aligned}$$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

ดังนั้น $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^2 x + \tan^4 x$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^4 x}$

ตัวอย่างที่ 58

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

วิธีทำ

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

ดังนั้น $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

แนะแนวคิด

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $1-\cos\theta$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

ตัวอย่างที่ 59

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} = \tan 2x$

วิธีทำ

$$\frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} = \frac{(\sin 7x - \sin 3x) - (\sin 5x - \sin x)}{(\cos 7x + \cos 3x) - (\cos 5x + \cos x)}$$
$$= \frac{2\cos 5x \sin 2x - 2\cos 3x \sin 2x}{2\cos 5x \cos 2x - 2\cos 3x \cos 2x}$$
$$= \frac{2\sin 2x(\cos 5x - \cos 3x)}{2\cos 2x(\cos 5x - \cos 3x)}$$
$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$
$$= \tan 2x$$

ดังนั้น $\frac{\sin 7x - \sin 3x - \sin 5x + \sin x}{\cos 7x + \cos 3x - \cos 5x - \cos x} = \tan 2x$

ลองทำดู

ให้พิสูจน์ว่า $\frac{\sin 4x - \sin(-2x) - \sin 6x + \sin(-4x)}{\cos(-2x) - \cos 4x - \cos(-4x) + \cos 6x} = \cot x$

ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม จะพบว่าโจทย์กำหนดเงื่อนไข เช่น "ในรูปสามเหลี่ยม ABC หรือ $A + B + C = 180^\circ$" หลักการพิสูจน์จะใช้ความสัมพันธ์ของมุมประกอบหนึ่งมุมฉาก หรือมุมประกอบสองมุมฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 60

กำหนด $A + B + C = 180^\circ$

ให้พิสูจน์ว่า $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos C \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \\
&= \left[2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2\sin^2\frac{C}{2}\right] + 1 \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \sin\frac{C}{2}\right] + 1 \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] + 1 \\
&= 2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) + 1 \\
&= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ลองทำดู

กำหนด $A + B + C = 180^\circ$

ให้พิสูจน์ว่า $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. สมการตรีโกณมิติ (Trigonometric Equations)

นักเรียนทราบมาแล้วว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยทั่วไปไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ทำให้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะมีค่าซ้ำกันได้ เช่น $\sin\frac{\pi}{6}$ และ $\sin\frac{5\pi}{6}$ มีค่าซ้ำกัน คือ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการตรีโกณมิติ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง คำตอบจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 61

แก้สมการ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า ค่าของ x ในช่วงนี้ที่ทำให้ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

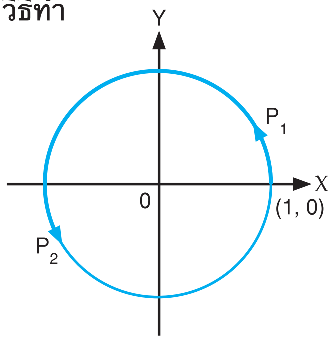
ลองทำดู

แก้สมการ $\tan x = -\sqrt{3}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

ตัวอย่างที่ 62

แก้สมการ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ



จากวงกลมหนึ่งหน่วย จะเห็นว่าค่า θ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{7\pi}{6}$

และ $\tan\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $n \in I$

$\tan\left(2n\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \tan\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เมื่อ $n \in I$

เนื่องจากโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ และ $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$ เมื่อ $n \in I$

ลองทำดู

แก้สมการ $\cos\theta = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 63

แก้สมการ $\cos 2\theta + 3\sin\theta = 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta + 3\sin\theta &= 2 \\
(1 - 2\sin^2\theta) + 3\sin\theta &= 2 \\
2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 &= 0 \\
(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = 1$

เนื่องจาก ค่า θ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

ค่า θ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin\theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ คำตอบของสมการในช่วง $[0, 2\pi]$ คือ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ และ $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $n \in I$

ลองทำดู

แก้สมการ $\cos 2\theta - 1 = 0$

ตัวอย่างที่ 64

แก้สมการ $2\cos^2 x + 2\cos 2x = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 2\cos 2x &= 1 \\ 2\cos^2 x + 2(2\cos^2 x - 1) &= 1 \\ 2\cos^2 x + 4\cos^2 x - 2 &= 1 \\ 6\cos^2 x &= 3 \\ \cos x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

จะได้ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก ค่า x เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{7\pi}{4}$

ค่า x เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ ที่ทำให้ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $\frac{3\pi}{4}$ และ $\frac{5\pi}{4}$

นั่นคือ คำตอบของสมการในช่วง $[0, 2\pi]$ คือ $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ และ $\frac{7\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ x ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$, $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ และ $2n\pi + \frac{7\pi}{4}$ เมื่อ $n \in I$

ลองทำดู

แก้สมการ $4\cos^2 x - 4\cos 2x + 2 = 5$

แบบฝึกทักษะ 1.11

ระดับพื้นฐาน

1. ให้พิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta$

2) $\sin 2\theta \cot\theta - 1 = \cos 2\theta$

3) $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta$

4) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

5) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

6) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \tan\theta$

ระดับกลาง

2. ให้พิสูจน์เอกลักษณ์ตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\cos 4x = 4\cos 2x + 8\sin^4 x - 3$

2) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

3) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4\cos x \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$

3. กำหนด $A + B + C = 180^\circ$ ให้พิสูจน์ว่า $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

4. แก้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$

1) $\cot x + 2\sin x = \operatorname{cosec} x$

2) $4\tan x \sin^2 x + 3 = 4\sin^2 x + 3\tan x$

3) $\cot x \cos 2x + \tan x \sin 2x = \cot x$

4) $\cot x - 2\cos x = 2\operatorname{cosec} x - 4$

5. แก้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$

2) $2\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta) = 2\sin\theta$

3) $2\sec\theta = \tan\theta + \cot\theta$

4) $\sin\theta + 8\cos\theta = 2\cos^3\theta + 6\cos\theta$

ระดับท้าทาย

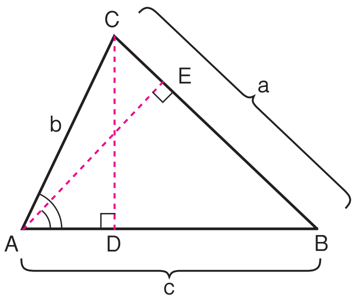
6. กำหนด $a = \sin 3x \cos 2x - 2\sin x \cos x \cos 3x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$
ให้หาค่า x ที่ทำให้ $2a^2 - 3\sqrt{3}a - 6 = 0$

1.12 กฎของไซน์และโคไซน์
(The Laws of Sines and Cosines)

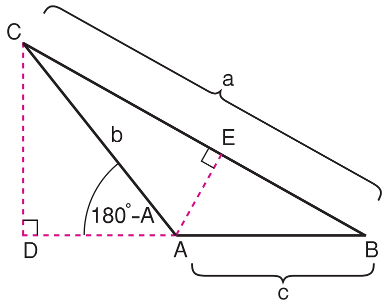
ในหัวข้อนี้ จะเป็นการศึกษากฎของไซน์และโคไซน์ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านกับขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. กฎของไซน์ (The Laws of Sines)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมและมุมป้าน จากนั้นลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D และลาก $\overline{AE}$ ตั้งฉากกับด้าน BC ที่จุด E ดังรูป



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

Thinking Time

ให้นักเรียนพิสูจน์กฎของไซน์ โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ $\sin A = \dfrac{CD}{b}$

$$CD = b\sin A$$

จากพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

จะได้ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}(AB)(CD)$

$$= \frac{1}{2}(c)(b\sin A)$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}bc\sin A$ .....(1)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ BC และ CA เป็นฐาน จะได้ว่า

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}ca\sin B$ .....(2)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}ab\sin C$ .....(3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\,bc\sin A = \frac{1}{2}\,ca\sin B = \frac{1}{2}\,ab\sin C$$

คูณด้วย $\frac{2}{abc}$ โดยตลอด จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

เรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า **กฎของไซน์**

กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ
ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ตัวอย่างที่ 65

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ b = 4 หน่วย ให้หาความยาวของ c

วิธีทำ จากกฎของไซน์ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin C}{c} \\
\frac{\sin 75^\circ}{4} &= \frac{\sin 60^\circ}{c} \\
c &= 4\left(\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}\right) \\
&= 4\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}\right) \\
&= 4\left[\frac{(\sqrt{3})(2\sqrt{2})}{2(\sqrt{3}+1)}\right] \\
&\approx 4\left(\frac{2\sqrt{6}}{5.46}\right) \\
&\approx 3.59
\end{aligned}$$

ดังนั้น c มีความยาวประมาณ 3.59 หน่วย

ลองทำดู

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ $b = 2\sqrt{3}$ หน่วย ให้หาความยาวของ c

ตัวอย่างที่ 66

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{C} = 60^\circ$, $b = 6$ หน่วย และ $c = 10$ หน่วย ให้หาขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin B}{6} = \frac{\sin 60^\circ}{10}$$

$$\sin B = \frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{10}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{10}$$

$$\approx 0.5196$$

เนื่องจาก $\sin B = 0.5196$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\sin 31^\circ 10'$ กับ $\sin 31^\circ 20'$

จากตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ $\sin 31^\circ 10' = 0.5175$

$\sin 31^\circ 20' = 0.5200$

เนื่องจาก ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0025 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $10'$

ค่าของฟังก์ชันไซน์เพิ่มขึ้น 0.0021 ค่าของมุมเพิ่มขึ้น $\frac{0.0021 \times 10}{0.0025} \approx 8'$

จะได้ว่า $\sin(31^\circ 10' + 8') = \sin 31^\circ 18' \approx 0.5196$

ดังนั้น $B \approx 31^\circ 18'$

แต่เนื่องจาก $\sin B > 0$ จะได้ว่า $0 < B < 180^\circ$

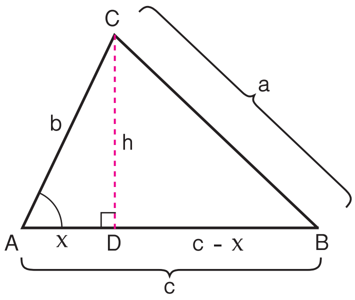
ดังนั้น $B \approx 31^\circ 18'$ หรือ $B \approx 180^\circ - 31^\circ 18' = 148^\circ 42'$

ลองทำดู

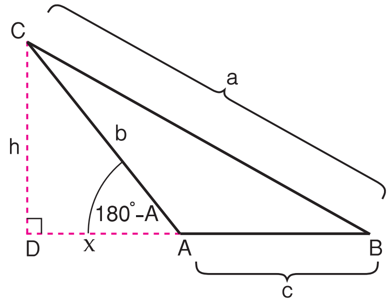
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{A} = 30^\circ$, a = 11 หน่วย และ c = 17 หน่วย ให้หาขนาดของมุม C

2. กฎของโคไซน์ (The Laws of Cosines)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมและมุมป้าน จากนั้นลาก $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D ดังนี้



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ $\cos A = \frac{x}{b}$

$$x = b\cos A$$

และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $b^2 = h^2 + x^2$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - x)^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2cx + x^2 + h^2 \\ &= c^2 - 2cx + (x^2 + h^2) \\ &= c^2 - 2cx + b^2 \\ &= c^2 + b^2 - 2cb\cos A \end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

เรียกความสัมพันธ์ดังกล่าวว่า **กฎของโคไซน์**

Thinking Time

ให้นักเรียนพิสูจน์กฎของโคไซน์ โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ
ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ตัวอย่างที่ 67

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามของมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{A} = 30^\circ$, b = 6 หน่วย และ c = 10 หน่วย ให้หาความยาวของ a

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos 30^\circ \\ &= 36 + 100 - 120\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx 32.08 \end{aligned}$$

จะได้ $a \approx 5.66$

ดังนั้น a มีค่าความยาวประมาณ 5.66 หน่วย

ลองทำดู

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามของมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $\hat{B} = 45^\circ$, a = 4 หน่วย และ c = 9 หน่วย ให้หาความยาวของ b

ตัวอย่างที่ 68

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามของมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย $a = \sqrt{10}$ หน่วย, b = 2 หน่วย และ $c = \sqrt{2}$ หน่วย ให้หาขนาดของมุม A

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้

$$\begin{aligned} (\sqrt{10})^2 &= 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(2)(\sqrt{2})\cos A \\ 10 &= 4 + 2 - 4\sqrt{2}\cos A \end{aligned}$$

$$4\sqrt{2}\cos A = 6 - 10$$

$$\cos A = \frac{-4}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น $A = 135^\circ$

ลองทำดู

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามของมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดย a = 6 หน่วย, b = 13 หน่วย และ c = 14 หน่วย ให้หาขนาดของมุม B

แบบฝึกทักษะ 1.12

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามของมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ

ระดับพื้นฐาน

1. ให้ใช้กฎของไซน์เพื่อหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ให้หาความยาวของ a เมื่อ $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ และ c = 8 หน่วย
2) ให้หาความยาวของ b เมื่อ $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ และ a = 7 หน่วย
3) ให้หาขนาดของมุม B เมื่อ $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 3\sqrt{2}$ หน่วย และ $b = 2\sqrt{3}$ หน่วย
4) ให้หาขนาดของมุม C เมื่อ $\hat{B} = 45^\circ$, $b = 2\sqrt{2}$ หน่วย และ $c = 2\sqrt{3}$ หน่วย

2. ให้ใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ให้หาความยาวของ b เมื่อ $\hat{B} = 60^\circ$, a = 3 หน่วย และ $c = 3\sqrt{3}$ หน่วย
2) ให้หาความยาวของ a เมื่อ $\hat{A} = 60^\circ$, b = 20 หน่วย และ c = 30 หน่วย
3) ให้หาขนาดของมุม A เมื่อ a = 25 หน่วย, b = 31 หน่วย และ $c = 7\sqrt{2}$ หน่วย
4) ให้หาขนาดของมุม C เมื่อ a = 15 หน่วย, b = 7 หน่วย และ c = 13 หน่วย

ระดับกลาง

3. ให้หาความยาวด้านหรือมุมภายในที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC จากสิ่งที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $a = 2,\ b = 2\sqrt{3},\ c = 2$

2) $\hat{A} = 75^\circ,\ \hat{B} = 30^\circ,\ b = \sqrt{8}$

3) $a = 4,\ \hat{B} = 135^\circ,\ b = 4$

4) $\hat{A} = 45^\circ,\ \hat{B} = 105^\circ,\ c = 5\sqrt{2}$

4. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $a = 4$ หน่วย $b = 4\sqrt{3}$ หน่วย และ $c = 4$ หน่วย ให้หาขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุด

5. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A และมุม B เป็นมุมแหลม โดย $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ และ $b = 30$ หน่วย ให้หาความยาวของ c

6. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$ และ $a = 20$ หน่วย ให้หาความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่วัดจากจุด A

7. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า โดยที่แต่ละด้านยาว 6 นิ้ว ให้หาความยาวของเส้นทแยงมุม AD และ AC

ระดับท้าทาย

8. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีมุมมุมหนึ่งมีขนาด 120 องศา และความยาวของด้านประกอบมุมนี้ยาว 4 และ 8 เซนติเมตร ให้หาความยาวของเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปนี้

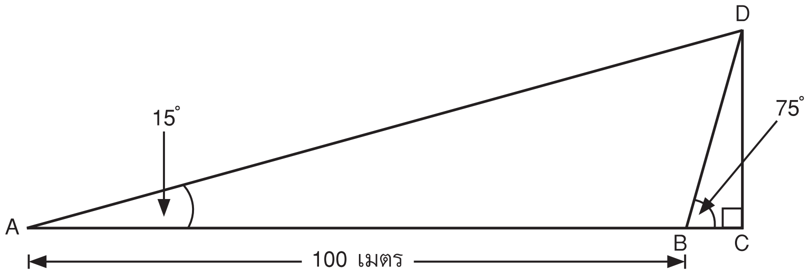
1.13 การหาระยะทางและความสูง

ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนได้ศึกษาการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 องศา 45 องศา และ 60 องศา ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง ซึ่งในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ มุมก้ม และมุมเงยมาช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 69

เก่งยืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดตึกแห่งหนึ่งเป็นมุมเงย 15 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหาตึกอีก 100 เมตร เขามองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้าเก่งสูง 185 เซนติเมตร แล้วตึกมีความสูงเท่าใด

วิธีทำ



กำหนด CD เป็นความสูงจากระดับสายตาถึงยอดตึก

จุด A เป็นจุดที่เก่งยืนมองยอดตึกในครั้งแรก

จุด B เป็นจุดที่เก่งยืนมองยอดตึกในครั้งหลัง

จาก $C\hat{B}D = 75^\circ$ จะได้ $A\hat{B}D = 105^\circ$

ดังนั้น $A\hat{D}B = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ$

พิจารณา ΔABD โดยกฎของไซน์

จะได้ $\dfrac{\sin 15^\circ}{BD} = \dfrac{\sin 60^\circ}{AB}$

ดังนั้น $BD = AB\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$

$= 100\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$

พิจารณา ΔBCD

จะได้ $\sin 75^\circ = \dfrac{CD}{BD}$

ดังนั้น $CD = BD \sin 75^\circ$

$= \left(100\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}\right)\cos 15^\circ$

$$= 100\left(\frac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}}(\sin 2(15^\circ))$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}}(\sin 30^\circ)$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 29$$

เนื่องจาก เก่งสูง 185 เซนติเมตร เท่ากับ 1.85 เมตร

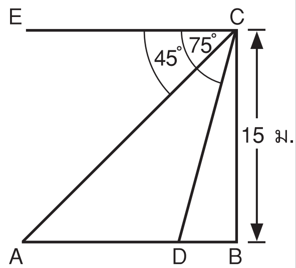
ดังนั้น ยอดตึกสูงประมาณ 29 + 1.85 = 30.85 เมตร

ลองทำดู

วิทยายืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นระเบียงของอาคารแห่งหนึ่งเป็นมุมเงย 15 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหาอาคารแห่งนั้น 80 เมตร เขามองเห็นระเบียงเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าวิทยาสูง 170 เซนติเมตร แล้วระเบียงของอาคารสูงเท่าใด

ตัวอย่างที่ 70

เจ้าหน้าที่บนหอคอยแห่งหนึ่งมองเห็นเรือสองลำลอยอยู่กลางทะเลเป็นมุมก้ม 45 องศา และ 75 องศา ตามลำดับ ถ้าหอคอยสูง 15 เมตร แล้วเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด



วิธีทำ กำหนด BC เป็นความสูงของหอคอย

CE เป็นเส้นระดับสายตา

จุด A เป็นตำแหน่งของเรือลำแรก

จุด D เป็นตำแหน่งของเรือลำที่สอง

จาก $A\hat{C}E = 45^\circ$ และ $D\hat{C}E = 75^\circ$ จะได้ $D\hat{C}A = 30^\circ$

และจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$ จะได้ $B\hat{A}C = 45^\circ$ และ $B\hat{D}C = 75^\circ$

พิจารณา ΔDBC จะได้ $\sin 75^\circ = \frac{BC}{CD}$

ดังนั้น $CD = \frac{15}{\sin 75^\circ}$

$$= \frac{15}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$

$$\approx 15.53$$

พิจารณา ΔADC โดยกฎของไซน์

จะได้ $$\frac{\sin D\hat{C}A}{AD} = \frac{\sin D\hat{A}C}{CD}$$

ดังนั้น $$AD \approx \frac{(15.53)\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$\approx \frac{(15.53)\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\approx 10.98$$

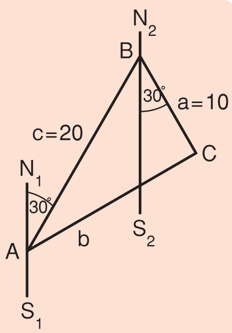
นั่นคือ เรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันประมาณ 10.98 เมตร

ลองทำดู

เจ้าหน้าที่บนหอบังคับการบินมองเห็นเครื่องบินสองลำจอดอยู่บนรันเวย์เป็นมุมก้ม 30 องศา และ 70 องศา ตามลำดับ ถ้าหอบังคับการบินสูง 130 เมตร แล้วเครื่องบินทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

ตัวอย่างที่ 71

สุชาติขับรถจากจุด A ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30 องศา กับทิศเหนือเป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังจุด B จากนั้นเขาขับรถต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30 องศา กับทิศใต้เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร ไปยังจุด C ให้หาว่า สุชาติอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น



วิธีทำ จากรูป $\overline{AN_1}$ ขนานกับ $\overline{BS_2}$ จะได้ $A\hat{B}S_2 = N_1\hat{A}B = 30^\circ$

ดังนั้น $A\hat{B}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$= 10^2 + 20^2 - 2(10)(20)\cos 60^\circ$$

$$= 100 + 400 - 200$$

$$b^2 = 300$$

$$b = 10\sqrt{3}$$

จากกฎของไซน์ $\qquad \dfrac{\sin B\hat{A}C}{a} = \dfrac{\sin A\hat{B}C}{b}$

$$\dfrac{\sin B\hat{A}C}{10} = \dfrac{\sin 60^\circ}{10\sqrt{3}}$$

$$\sin B\hat{A}C = \dfrac{10}{10\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

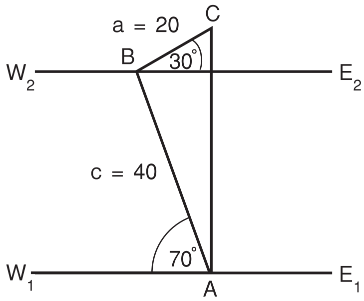
$$= \dfrac{1}{2}$$

จะได้ $B\hat{A}C = 30^\circ$ และ $N_1\hat{A}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

ดังนั้น สุชาติอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทาง $10\sqrt{3}$ กิโลเมตร ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 60 องศา กับทิศเหนือ

ลองทำดู

เอกขับรถจากจุด A ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 70 องศา กับทิศตะวันตก เป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร ไปยังจุด B จากนั้นเขาขับรถต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 30 องศา กับทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังจุด C ให้หาว่า เอกอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น



แบบฝึกทักษะ 1.13

ระดับพื้นฐาน

1. ลูกเสือสองคนยืนอยู่ในแนวทิศใต้ของเสาอากาศซึ่งสูง 95 เมตร ลูกเสือทั้งสองคนวัดมุมเงยของยอดเสาได้ 30 และ 45 องศา ตามลำดับ ลูกเสือทั้งสองคนนี้ยืนห่างกันประมาณกี่เมตร
2. นักเรียนคนหนึ่งยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 15 องศา แต่เมื่อเดินเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าเขาสูง 160 เซนติเมตร เสาธงมีความสูงเท่าใด

ระดับกลาง

3. นักสำรวจคนหนึ่งยืนอยู่ทิศตะวันออกเฉียงใต้ของภูเขาลูกหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 60 องศา เมื่อเขาเดินตรงไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 400 เมตร จะมองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 45 องศา ภูเขาลูกนี้สูงเท่าใด

4. รถยนต์ 3 คัน จอดที่จุด A, B และ C บนพื้นระดับ และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับอนุสาวรีย์แห่งหนึ่ง มุมยกขึ้นของยอดอนุสาวรีย์ เมื่อสังเกตจากจุด A, B และ C เป็น 30, 45 และ 60 องศา ตามลำดับ ถ้า BC = 20 เมตร ให้หาความสูงของอนุสาวรีย์ และระยะทางระหว่างจุด A กับอนุสาวรีย์

5. จากจุด A ที่อยู่ทางทิศใต้ของเสาไฟฟ้าและทำมุมเงย 60 องศา กับยอดเสา จุด B อยู่ทางทิศตะวันออกของจุด A มองยอดเสาไฟฟ้าเป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าระยะห่างจากจุด A และจุด B เท่ากับ 60 เมตร เสาไฟฟ้าสูงกี่เมตร

ระดับท้าทาย

6. ธีระชัยอยู่บนดาดฟ้าของตึกสูง 30 เมตร มองเห็นบุตรชายของเขาอยู่บนพื้นดินทางทิศใต้ของตึกเป็นมุมก้ม 30 องศา และเห็นบุตรสาวของเขาอยู่บนพื้นดินทางทิศตะวันออกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา บุตรชายและบุตรสาวอยู่ห่างกันกี่เมตร

ตรวจสอบตนเอง

หลังจากเรียนจบหน่วยนี้แล้ว ให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

	ดี	พอใช้	ควรปรับปรุง
1. สามารถหาจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) เป็นระยะ $\lvert\theta\rvert$ หน่วย ได้			
2. สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมได้			
3. สามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้			
4. เข้าใจและเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้			
5. แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้			
6. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้			

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

พระปรางค์วัดอรุณราชวรารามราชวรมหาวิหาร

พระปรางค์วัดอรุณราชวรารามราชวรมหาวิหาร หรือเรียกสั้น ๆ ว่า พระปรางค์วัดอรุณฯ เป็นหนึ่งในสถาปัตยกรรมที่สวยงามที่สุดแห่งหนึ่งของกรุงรัตนโกสินทร์ และมีความสูง 81.85 เมตร ซึ่งเป็นพระปรางค์ที่มีความสูงที่สุดในโลก

สถานการณ์

สุธีเดินทางไปชมพระปรางค์ที่วัดอรุณ ฯ เมื่อไปถึงเขายืนอยู่ริมฝั่งแม่น้ำเจ้าพระยาซึ่งอยู่ตรงข้ามกับพระปรางค์วัดอรุณฯ ซึ่งมีความสูง 81.85 เมตร อยากทราบว่า

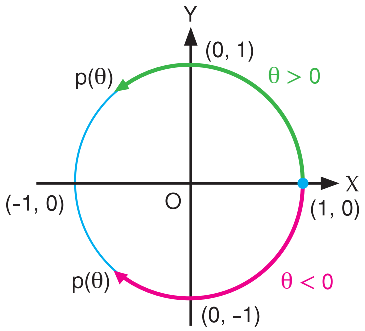
1. สุธีอยู่ห่างจากพระปรางค์เป็นระยะทางเท่าใด เมื่อเขามองไปยังยอดพระปรางค์เป็นมุมเงยเท่ากับ 75°
2. ถ้าสุธีเดินเข้าใกล้พระปรางค์ไปอีก 5 เมตร แล้วมองไปยังยอดพระปรางค์อีกครั้ง นักเรียนคิดว่าเขาจะมองเห็นยอดพระปรางค์ด้วยมุมเงยมากกว่าหรือน้อยกว่าเดิม ให้อธิบายโดยใช้หลักการของตรีโกณมิติ

สรุปแนวคิดหลัก

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้ง

- วงกลมที่เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เรียกว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)
- การวัดความยาวส่วนโค้งและพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งบนวงกลมหนึ่งหน่วย เป็นดังนี้



$\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

$\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด (1, 0)

$\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นระยะ $|\theta|$ หน่วย

ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์

- **ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์**
  - ฟังก์ชันโคไซน์ คือ $f = \{(\theta, x) \in R \times R \mid x = \cos\theta\}$
  - ฟังก์ชันไซน์ คือ $g = \{(\theta, y) \in R \times R \mid y = \sin\theta\}$
- **ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ**

  กำหนด θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

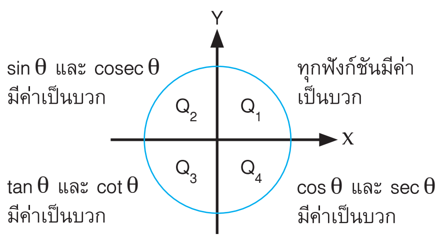
  1. $\cos(-\theta) = \cos\theta$
  2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(2n\pi + \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

- กำหนด θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

  1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$
  2. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$
  3. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$
  4. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

- การเปลี่ยนหน่วยองศาเป็นเรเดียนและการเปลี่ยนหน่วยเรเดียนเป็นองศาทำได้ ดังนี้
  1. มุมในหน่วยเรเดียน เท่ากับ มุมในหน่วยองศา $\times \frac{\pi}{180}$
  2. มุมในหน่วยองศา เท่ากับ มุมในหน่วยเรเดียน $\times \frac{180}{\pi}$

การใช้ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ถ้า $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ ใช้ค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแถวบน โดยอ่านจากบนลงล่าง
- ถ้า $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ใช้ค่าฟังก์ชันที่กำหนดในแถวล่าง โดยอ่านจากล่างขึ้นบน

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติแต่ละฟังก์ชัน เป็นดังนี้

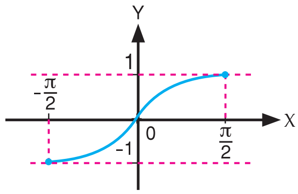
1. กราฟของ $y = \sin x$

   กำหนด $f: R \rightarrow R,\ f(x) = a\sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$

   จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $[-a, a]$

   คาบของฟังก์ชัน คือ $\frac{2\pi}{n}$

   แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ $|a|$



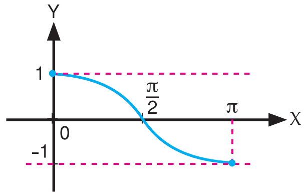
2. กราฟของ $y = \cos x$

   กำหนด $f: R \rightarrow R,\ f(x) = a\cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$

   จะได้ว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $[-a, a]$

   คาบของฟังก์ชัน คือ $\frac{2\pi}{n}$

   แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ $|a|$

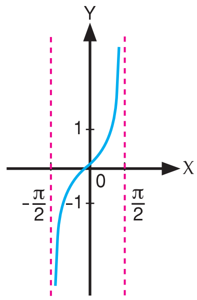


3. กราฟของ $y = \tan x$

   โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\left\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in I\right\}$

   คาบของฟังก์ชัน คือ π

   ไม่มีแอมพลิจูด



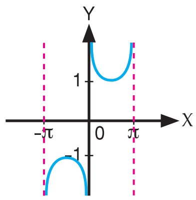
4. กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$

   โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi,\ n \in I\}$

   เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

   คาบของฟังก์ชัน คือ 2π

   ไม่มีแอมพลิจูด



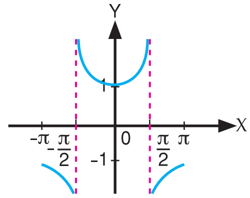
5. กราฟของ $y = \sec x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x \mid x \in R,\ x = n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in I\}$

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

คาบของฟังก์ชัน คือ 2π

ไม่มีแอมพลิจูด

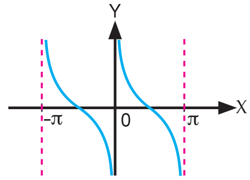


6. กราฟของ $y = \cot x$

โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{x \mid x \in R,\ x \neq n\pi,\ n \in I\}$

คาบของฟังก์ชัน คือ π

ไม่มีแอมพลิจูด



ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริง หรือมุม

- กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
7. $\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$
8. $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของสองเท่า สามเท่า และครึ่งเท่าของจำนวนจริงหรือมุม

- กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ จะได้ว่า

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$
2. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$
3. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
4. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
5. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
6. $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$
7. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$
8. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$
9. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- กำหนด α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ จะได้ว่า

1. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
2. $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
3. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
4. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
5. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
6. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
7. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
8. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- $\arcsin x$ เท่ากับ y โดยที่ $\sin y = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
- $\arccos x$ เท่ากับ y โดยที่ $\cos y = x$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$
- $\arctan x$ เท่ากับ y โดยที่ $\tan y = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

- สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกว่า **สมการตรีโกณมิติ**
- กำหนด θ เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ

เรียก สมการตรีโกณมิติที่เป็นจริงสำหรับทุก θ ว่า **เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ**

เช่น $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

กฎของไซน์และโคไซน์

- **กฎของไซน์**

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

- **กฎของโคไซน์**

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

แบบฝึกทักษะ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 1

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\tan^2 80^\circ - \cos^2 35^\circ - \operatorname{cosec}^2 57^\circ - \sec^2 80^\circ - \sin^2 35^\circ + \cot^2 57^\circ$

2) $\dfrac{3\tan^2\theta + 3}{\sec^2\theta} + \sin^2\theta\cot^2\theta - \cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + \sin^2\theta$

3) $\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\theta\right]^2 + \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin\theta\right]^2$

4) $\sin 390^\circ - \cos(-150^\circ) + \tan(-315^\circ)$

5) $\dfrac{\sin^2(-325^\circ) + \cos^2(-145^\circ)}{1 - \sin^2 240^\circ} + \dfrac{\cot^2(-225^\circ)}{1 - \operatorname{cosec}^2 405^\circ}$

6) $\dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{3} + \cos\dfrac{7\pi}{3} + \tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{11\pi}{6} + \cos\dfrac{2\pi}{3} + \tan\dfrac{7\pi}{4}}$

7) $\dfrac{\sin(4\pi - \theta)\tan(3\pi - \theta)\cot(5\pi - \theta)}{\cot(2\pi + \theta)\tan(\theta - \pi)}$

2. กำหนด $f(\theta) = \sin\left(\dfrac{\theta + \pi}{4}\right)$ ให้หาค่าของ $\left(\dfrac{f(-5\pi) + f(0)}{f(\pi)}\right)$

3. กำหนด $3\sin^2\theta + 7\cos\theta - 5 = 0$ เมื่อ $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ให้หาค่าของ $\sin(-\theta) + \tan(-\theta)$

4. แก้สมการ $\sin^2 2x + 6\cos 2x - 6 = 0$

5. กำหนด $\sin(A - B) = \dfrac{2}{5}$, $\cos(A + B) = \dfrac{1}{5}$ และ $\cos A = \dfrac{3}{5}$ เมื่อ $A, B \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
ให้หาค่าของ $\sin B$

6. ให้หาค่าของ

1) $\sin^2\theta + \sin^2(60^\circ + \theta) + \sin^2(60^\circ - \theta)$

2) $\cos^2\theta + \cos^2(60^\circ + \theta) + \cos^2(60^\circ - \theta)$

7. ให้หาค่าของ

1) $\dfrac{\sin 80^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}$

2) $\dfrac{\tan 182^\circ - \tan 47^\circ}{1 + \tan 182^\circ \tan 47^\circ}$

3) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$

8. ให้หาค่าของ $\tan 81^\circ - \tan 63^\circ - \tan 27^\circ + \tan 9^\circ$

9. กำหนด $\sin A - 2\sin B = 0$ และ $3\cos 2A - 2\cos 2B = -3$ เมื่อ $A, B \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
ให้หาค่าของ $5\sin(A - B)$

10. กำหนด $\cos A = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$
ให้หาค่าของ $\sin(A + B) + \sin(2A - B) - \sin(A - B) - \sin(2A + B)$

11. กำหนด $\arctan 3x - \arctan x = \frac{\pi}{6}$ ให้หาค่าของ $\sin(\arctan 3x + \arctan x)$

12. แก้สมการ $2\cos^2\theta + 1 = -\cos\theta + 2\sqrt{2\cos^2\theta + \cos\theta}$ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$

13. แก้สมการ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1$ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$

14. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดยมี $(a + b + c)(a - b - c) = -3bc$ และ $2a^2 = 3b^2$ ให้หาค่าของ $\sin^2(3A + 2B) + 1$

15. จากจุด A ซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของตึก หากมองขึ้นไปจะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 60 องศา แต่ถ้ามองจากจุด B ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของจุด A อีก 10 เมตร จะเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 45 องศา ให้หาความสูงของตึก

16. กล้ายืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดเสาแห่งหนึ่งเป็นมุมเงย 45 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหายอดเสาตามเนินเอียงที่ทำมุม 15 องศา กับแนวราบเป็นระยะทาง 400 เมตร เขาได้มองไปที่ยอดเสาอีกครั้งปรากฏว่า เขามองเห็นยอดเสาเป็นมุมเงย 75 องศา อยากทราบว่ายอดเสาสูงเท่าใด

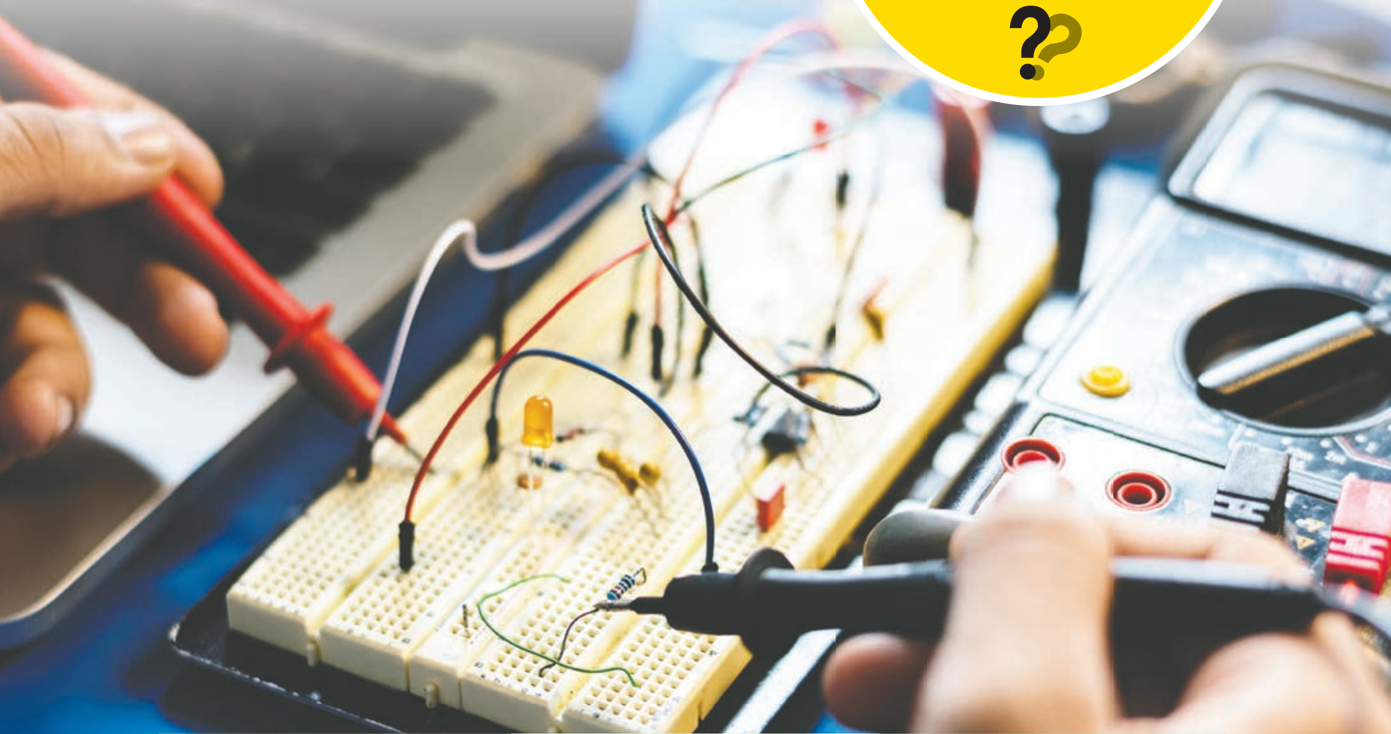
17. ชายคนหนึ่งอยู่บนหน้าผาที่ติดกับทะเล เขามองเห็นเรือสองลำเป็นมุมก้ม 35 องศา และ 80 องศา ตามลำดับ ถ้าเรือสองลำอยู่ห่างกัน 120 เมตร และชายคนนี้สูง 185 เซนติเมตร อยากทราบว่าหน้าผาสูงจากระดับน้ำทะเลเท่าใด

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2

เมทริกซ์

“การหากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าจะต้องเขียนสมการโดยอาศัยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ ซึ่งจะทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นมาชุดหนึ่ง จากนั้นจึงแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบตามที่ต้องการ”

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์มาใช้ในการหากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรไฟฟ้าได้อย่างไร ??



ผลการเรียนรู้

- เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ n × n เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
- หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2 × 2
- แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน และการดำเนินการตามแถว

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- เมทริกซ์ และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
- ดีเทอร์มิแนนต์
- การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์
- การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์
- เมทริกซ์ผกผัน

ควรรู้ก่อนเรียน

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

กำหนด a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ d, e ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียก

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

ว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสองสมการ

คำตอบของระบบสมการ คือ จำนวนที่แทน x และ y แล้วทำให้สมการเป็นจริงทั้งสองสมการ และนิยมเขียนคำตอบของระบบสมการให้อยู่ในรูป (x, y)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

$$ax + by = c \qquad .....(1)$$

$$dx + ey = f \qquad .....(2)$$

1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการแทนค่า

   จากระบบสมการข้างต้น สามารถแก้ระบบสมการโดยการแทนค่าได้ ดังนี้

   1) เลือกสมการ (1) หรือสมการ (2) เขียนตัวแปรหนึ่งในรูปของอีกตัวแปรหนึ่ง เช่น เขียน x ในรูปของ y หรือเขียน y ในรูปของ x
   2) นำสมการที่ได้จากการจัดรูปในข้อ 1) แทนที่ตัวแปรนั้นในอีกสมการหนึ่ง
   3) แก้สมการในข้อ 2) จะได้ค่าของตัวแปรหนึ่ง
   4) นำค่าของตัวแปรหนึ่งที่หาได้ไปแทนค่าสมการในข้อ 1) จะได้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง นำค่าของตัวแปรทั้งสองเขียนเป็นคู่อันดับจะเป็นคำตอบของระบบสมการ

2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยการกำจัดตัวแปร

   จากระบบสมการข้างต้น สามารถแก้ระบบสมการโดยการกำจัดตัวแปรได้ ดังนี้

   1) ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องการกำจัดให้เป็นจำนวนตรงข้ามกันโดยใช้สมบัติการคูณ
   2) ใช้สมบัติการบวกกำจัดตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์ตรงข้ามกันในข้อ 1) เมื่อกำจัดตัวแปรตัวหนึ่งออกแล้ว สมการที่ได้จะเป็นสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว
   3) หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อ 2) จะเป็นค่าของตัวแปรตัวหนึ่ง
   4) หาค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง โดยนำค่าของตัวแปรในข้อ 3) แทนค่าใน สมการ (1) หรือ สมการ (2)

แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน

2.1 ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

ความรู้ในเรื่องระบบสมการเชิงเส้น สามารถนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือปัญหาในชีวิตประจำวัน เช่น การพยากรณ์อากาศ การวางแผนการลงทุน การนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์

1. สมการเชิงเส้น (Linear Equations)

สมการเชิงเส้น คือ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวเป็นหนึ่ง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_1, a_2, ..., a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ ว่า **สมการเชิงเส้น n ตัวแปร** เมื่อ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นตัวแปร

จากบทนิยาม นักเรียนจะเห็นว่า

$-8x + 4 = 6$ เป็น**สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว** โดยที่ x เป็นตัวแปร

$3x - 2y = 5$ เป็น**สมการเชิงเส้นสองตัวแปร** โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร

$2x - 3y + z = -5$ เป็น**สมการเชิงเส้นสามตัวแปร** โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปร

การเขียนสมการเชิงเส้น n ตัวแปร นิยมใช้ตัวแปร ดังนี้

ถ้า $n = 2$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y เช่น $14x + y = -5$

ถ้า $n = 3$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y และ z เช่น $-14x - 13y + 8z = 100$

ถ้า $n = 4$ นิยมให้ตัวแปรเป็น x, y, z และ t เช่น $50x - 7y + 5z - 9t = 0$

ถ้า $n \geq 5$ นิยมให้ตัวแปรเป็น $x_1, x_2, ..., x_n$ เช่น $7x_1 - 6x_2 + ... + 10x_n = -11$

2. ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

ระบบสมการเชิงเส้น ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป ตัวอย่างเช่น

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**

โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 0 \\ -x + 5y &= 5z \\ y + 7z &= x \end{aligned}\right\}$$

เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร**

โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปร

บทนิยาม ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับแล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

รูปแบบของระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร และประกอบด้วยสมการเชิงเส้น m สมการ โดยที่ $m \geq 2$ คือ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ เป็นสมการเชิงเส้น ทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}, b_i$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สำหรับหน่วยการเรียนรู้นี้ นักเรียนจะได้ศึกษาระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรมีได้หลายวิธี เช่น การกำจัดตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง การใช้ความรู้เรื่องเมทริกซ์ การใช้ความรู้เรื่องดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษารายละเอียดในหน่วยนี้

ตัวอย่างที่ 1

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= 8 \\ x - y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ กำหนด

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 3 \quad .....(1) \\ 2x - y + z &= 8 \quad .....(2) \\ x - y + 3z &= 1 \quad .....(3) \end{aligned}$$

(1) + (2) จะได้ $3x - z = 11$ .....(4)

(1) + (3) จะได้ $2x + z = 4$ .....(5)

(4) + (5) จะได้ $5x = 15$

$x = 3$

แทน $x = 3$ ใน (5) จะได้

$$\begin{aligned} 2(3) + z &= 4 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

แทน $x = 3$ และ $z = -2$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned} 3 + y - 2(-2) &= 3 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ (3, -4, -2)

คณิตน่ารู้

คำตอบของระบบสมการนิยมเขียนในรูปของ n สิ่งอันดับ (ordered n - tuple) เช่น $(x_1, x_2, ..., x_n)$

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 5x + 4y - z &= 9 \\ x - 5y + z &= 18 \\ 6x + 3y - z &= 16 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= 8 \\ x + 2y + 7z &= 12 \\ 2x - y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

วิธีทำ กำหนด

$$x + y + 5z = 8 \quad .....(1)$$

$$x + 2y + 7z = 12 \quad .....(2)$$

$$2x - y + 4z = 4 \quad .....(3)$$

(2) - (1) จะได้ $y + 2z = 4$ .....(4)

$2 \times (4)$ จะได้ $2y + 4z = 8$ .....(5)

(2) - (5) จะได้ $x + 3z = 4$ .....(6)

จาก (4) จะได้ $y = 4 - 2z$

จาก (6) จะได้ $x = 4 - 3z$

เมื่อแทน x และ y ใน (1) จะได้

$$(4 - 3z) + (4 - 2z) + 5z = 8$$

$$8 = 8$$

เมื่อแทน x และ y ใน (2) จะได้

$$(4 - 3z) + 2(4 - 2z) + 7z = 12$$

$$12 = 12$$

เมื่อแทน x และ y ใน (3) จะได้

$$2(4 - 3z) - (4 - 2z) + 4z = 4$$

$$4 = 4$$

ดังนั้น $(4 - 3z, 4 - 2z, z)$ สอดคล้องกับสมการ (1), (2) และ (3)

จะได้ว่า คำตอบของระบบสมการ คือ $(4 - 3z, 4 - 2z, z)$ เมื่อ $z \in R$

หรือเซตของคำตอบของระบบสมการ คือ

$\{(x, y, z) \mid x = 4 - 3z, y = 4 - 2z, z \in R\}$

หรือ $\{(4 - 3z, 4 - 2z, z) \mid z \in R\}$

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$-4x - y - 6z = 3$$

$$2x + y + 5z = -2$$

$$6x - 2y - 5z = -1$$

ตัวอย่างที่ 3

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$x + 2y - z = 1$$

$$2x + 2y - 3z = 4$$

$$3x + 4y - 4z = 7$$

วิธีทำ กำหนด

$$x + 2y - z = 1 \quad .....(1)$$

$$2x + 2y - 3z = 4 \quad .....(2)$$

$$3x + 4y - 4z = 7 \quad .....(3)$$

(1) + (2) จะได้ $3x + 4y - 4z = 5$ .....(4)

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนด แล้ว (x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (1), (2) และ (3)

และถ้า (x, y, z) สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) แล้ว (x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (4)

แต่จากสมการ (3) จะเห็นว่า $3x + 4y - 4z = 7$

และจากสมการ (4) จะเห็นว่า $3x + 4y - 4z = 5$

ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า ไม่มี x, y และ z ใด ๆ ที่ทำให้สมการ (3) และ (4) เป็นจริงพร้อมกันได้

ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดไม่มีคำตอบ

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$3x + y + z = 3$$

$$4x + y + 3z = 2$$

$$7x + 2y + 4z = 9$$

จากตัวอย่างที่ 1-3 จะเห็นว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร มี 3 ลักษณะ คือ

1) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่มีคำตอบเดียว

2) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่มีหลายคำตอบ หรือเรียกว่า มีคำตอบอนันต์

3) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรที่ไม่มีคำตอบ

ระบบสมการเชิงเส้นชุดหนึ่ง ๆ จะให้คำตอบของระบบสมการเพียงลักษณะเดียวเท่านั้น

แบบฝึกทักษะ 2.1

ระดับพื้นฐาน

1. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x + 3y = 8$
$x - 2y = 3$

2) $x - 3y = 4$
$-2x + 6y = 2$

3) $x + y + z = 6$
$x - y + z = 2$
$x + y - z = 0$

4) $3x + 2y - z = 4$
$5x - 3y + z = 1$
$x - 6y + 2z = 7$

5) $x + y = 2$
$x + 3y + z = 5$
$3x + y - z = 3$

6) $2x + y - z = 2$
$2x + 2y - 4z = 5$
$4x + 3y - 5z = 9$

ระดับกลาง

2. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2x + 2y + 2z + 2t = 11$
$x + y + 2z + 2t = 5$
$2y + 5z + 2t = 5$
$x + y + 3z + 4t = 1$

2) $2x - y + 3z - w = -3$
$3x + 2y - z + w = 13$
$x - 3y + z - 2w = -4$
$-x + y + 4z + 3w = 0$

2.2 เมทริกซ์ (Matrix)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

ให้นักเรียนพิจารณาตารางแสดงจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C ที่เหลืออยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. ต่อไปนี้

	ยางลบ A	ยางลบ B	ยางลบ C
ร้าน ก.	35	52	61
ร้าน ข.	50	35	33

ตารางที่ 1

จากตารางข้างต้น สามารถนำจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. มาเขียนใหม่ในวงเล็บ [ ] หรือ ( ) ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{แถวที่ 1} \rightarrow \\ \text{แถวที่ 2} \rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}35 & 52 & 61 \\ 50 & 35 & 33\end{bmatrix}\end{array} \quad \text{หรือ} \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc}\text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3}\end{array} & \\ \begin{pmatrix}35 & 52 & 61 \\ 50 & 35 & 33\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2}\end{array}\end{array}$$

ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกการเขียนชุดของจำนวนในลักษณะดังกล่าวว่า เมทริกซ์ ซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะใช้วงเล็บ [ ]

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. เมทริกซ์ข้างต้นมีจำนวนแถวและจำนวนหลักเป็นเท่าใด

2. ถ้าตัวเลขแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์เรียกว่า “สมาชิกของเมทริกซ์” และสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในร้าน ก. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 คืออะไร

3. ถ้าสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ คือ จำนวนยางลบยี่ห้อ A ที่ขายอยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. แล้วสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ 2 และหลักที่ 3 คืออะไร

เกร็ดน่ารู้

Jame Joseph Sylvester

Jame Joseph Sylvester (ค.ศ. 1814-1897) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวยิว ที่เป็นผู้บัญญัติคำว่า เมทริกซ์ (Matrix) ซึ่งต่อมาแนวคิดเกี่ยวกับเมทริกซ์ได้ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์จะเห็นว่า ชุดของจำนวนที่เขียนอยู่ในวงเล็บ [ ] หรือ ( ) เป็นการนำจำนวนที่อยู่ในตารางมาเขียนเรียงใหม่ตามแถวและคอลัมน์เดิม ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกชุดของจำนวนที่เขียนในวงเล็บ [ ] หรือ ( ) ว่า **เมทริกซ์** ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวนที่เขียนเรียงกัน m แถว (Row) n หลัก (Column) เมื่อ n และ m เป็นจำนวนเต็มบวกภายในเครื่องหมายวงเล็บ ดังนี้

$$\begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1 } (R_1) \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2 } (R_2) \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ m } (R_m) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1 } (C_1) & \text{หลักที่ 2 } (C_2) & \text{หลักที่ n } (C_n) \end{array} & \end{array}$$

เรียก a_{ij} ว่าเป็นสมาชิก (Entry) ในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ หรือเรียกว่าเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

เรียกเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลักว่าเป็น $m \times n$ เมทริกซ์ อ่านว่า “เอ็ม คูณ เอ็น เมทริกซ์” และเรียก $m \times n$ ว่าเป็น**มิติของเมทริกซ์** (dimension of matrix)

จากบทนิยาม การแบ่งชนิดของเมทริกซ์สามารถแบ่งได้โดยใช้จำนวนแถว จำนวนหลัก และสมาชิกของเมทริกซ์ ดังนี้

1) เมทริกซ์แถว (row matrix) คือ เมทริกซ์ที่มี 1 แถว และมี n หลัก มีมิติเป็น $1 \times n$ เช่น

$[-1]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ 1 หลัก จึงมีมิติเป็น 1×1 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 1×1 เมทริกซ์

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 4 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ 2 หลัก จึงมีมิติเป็น 1×2 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 1×2 เมทริกซ์

2) เมทริกซ์หลัก (column matrix) คือ เมทริกซ์ที่มี n แถว และมี 1 หลัก มีมิติเป็น $n \times 1$ เช่น

$[-0.5]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ 1 หลัก จึงมีมิติเป็น 1×1 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 1×1 เมทริกซ์

$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว และ 1 หลัก จึงมีมิติเป็น 2×1 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 2×1 เมทริกซ์

3) เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก มีมิติเป็น $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนแถวและจำนวนหลัก เช่น

$[10]$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ 1 หลัก จึงมีมิติเป็น 1×1 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 1×1 เมทริกซ์

$\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{14} \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว และ 2 หลัก จึงมีมิติเป็น 2 × 2 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 2 × 2 เมทริกซ์

$\begin{bmatrix} 1.9 & -1.4 & 1.6 \\ \sqrt{12} & 4 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี 3 แถว และ 3 หลัก จึงมีมิติเป็น 3 × 3 และเรียกเมทริกซ์นี้ว่า 3 × 3 เมทริกซ์

4) เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix or a null matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$ เช่น

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix or unit matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงหลักเป็น 1 ทั้งหมด และสมาชิกที่ไม่ได้อยู่ในแนวทแยงหลักเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I_n เมื่อ n เป็นจำนวนแถวและจำนวนหลักของเมทริกซ์ เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

แนวทแยงหลัก

คณิตน่ารู้

กำหนดเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเป็น $n \times n$ จะกล่าวว่า แนวทแยงหลัก (Main Diagonal) ของเมทริกซ์ A ประกอบไปด้วย สมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j เมื่อ i = j สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., n\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$

การใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับเมทริกซ์ จะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C, ... แทนเมทริกซ์ และใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก a, b, c, ... ที่มีตัวเลขกำกับไว้ทางขวามือเพื่อบอกลำดับแถวและลำดับหลัก แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A, B, C, ... ตามลำดับ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A เป็น 1 × 3 เมทริกซ์ มีสมาชิก เช่น a_{11} อ่านว่า "เอ หนึ่ง หนึ่ง" เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 1 หรือเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่หนึ่ง หนึ่ง

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ B เป็น 3×3 เมทริกซ์ มีสมาชิก เช่น b_{23} อ่านว่า “บี สอง สาม” เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3 หรือเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่สอง สาม

นอกจากนี้การเขียนเมทริกซ์ในรูปแบบข้างต้น นักเรียนอาจเขียนเมทริกซ์ใด ๆ ในรูปทั่วไปอีกแบบหนึ่ง โดยใช้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ซึ่ง a_{ij} แทนสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i หลักที่ j แล้วบอกมิติของเมทริกซ์ เช่น

จากเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{1 \times 3}$ หมายถึง เมทริกซ์ A เป็น 1×3 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกตำแหน่งที่ ij เป็น a_{ij} เมื่อ $i \in \{1\}$ และ $j \in \{1, 2, 3\}$

จากเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ หมายถึง เมทริกซ์ B เป็น 3×3 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกตำแหน่งที่ ij เป็น b_{ij} เมื่อ $i \in \{1, 2, 3\}$ และ $j \in \{1, 2, 3\}$

จากการเขียนเมทริกซ์ในรูปแบบข้างต้น นักเรียนสามารถสรุปเป็นรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ หมายถึง เมทริกซ์ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ที่มีสมาชิกตำแหน่งแถวที่ i หลักที่ j เขียนเป็น a_{ij} เมื่อ $i \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$

ตัวอย่างที่ 4

กำหนด $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ และ $a_{ij} = 4$ เมื่อ $i > j$ และ $a_{ij} = 3$ เมื่อ $i < j$ และ $a_{ij} = 2$ เมื่อ $i = j$ ให้หาค่าของ $a_{21} + a_{22} - a_{13} + a_{11}$

วิธีทำ จาก $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $a_{21} + a_{22} - a_{13} + a_{11} = 4 + 2 - 3 + 2 = 5$

ลองทำดู

กำหนด $B = [b_{ij}]_{2\times3}$ และ $b_{ij} = 10$ เมื่อ $i > j$ และ $b_{ij} = -3$ เมื่อ $i < j$ และ $b_{ij} = \frac{2}{5}$ เมื่อ $i = j$ ให้หาค่าของ $b_{11} - b_{12} + b_{23} - b_{22}$

1. การเท่ากันของเมทริกซ์ (Equal Matrices)

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$
A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
และเขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย A = B

ให้นักเรียนพิจารณาเมทริกซ์ที่กำหนดให้แต่ละคู่ต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ กับ $B = \begin{bmatrix} |-3| \\ 3 + 6 \end{bmatrix}$

2) $C = [2 \quad 3 \quad 4]$ กับ $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

3) $E = [0]$ กับ $F = [0 \quad 0]$

Thinking Time

ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีมิติเดียวกัน นักเรียนคิดว่าเมทริกซ์ A และ B เท่ากันได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

จากเมทริกซ์ที่กำหนดให้ข้างต้น จะเห็นว่า

1) เมทริกซ์ A และ B มีมิติเหมือนกัน และสมาชิกแต่ละตำแหน่งของ A และ B เท่ากันทุกค่า คือ $3 = |-3|$ และ $9 = 3 + 6$ ดังนั้น A เท่ากับ B หรือ A = B

2) เมทริกซ์ C และ D มีมิติต่างกัน ดังนั้น C ไม่เท่ากับ D หรือ $C \neq D$

3) เมทริกซ์ E และ F มีมิติต่างกัน ดังนั้น E ไม่เท่ากับ F หรือ $E \neq F$

ตัวอย่างที่ 5

กำหนด $\begin{bmatrix} x - 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y + 7 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

วิธีทำ จาก $\begin{bmatrix} x - 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y + 7 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $x - 5 = 0$ และ $y + 7 = -4$

เมื่อแก้สมการ จะได้ว่า $x = 5$, $y = -11$

ดังนั้น ค่าของ x และ y ที่ทำให้เมทริกซ์ที่กำหนดเท่ากัน คือ 5 และ -11 ตามลำดับ

ลองทำดู

กำหนด $\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + y \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -x - 1 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

ตัวอย่างที่ 6

กำหนด $\begin{bmatrix} x - y \\ -2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

วิธีทำ จาก $\begin{bmatrix} x - y \\ -2x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $x - y = 3$ .....(1)

$-2x + 2y = -6$ .....(2)

จะเห็นว่า สมการ (2) ได้จากการคูณสมการ (1) ด้วย -2

ฉะนั้น สมการ (1) และ (2) มีคำตอบของสมการเป็นชุดเดียวกัน

นั่นคือ ถ้า $x - y = 3$ แล้ว $x = y + 3$ หรือ $y = x - 3$

จะได้ว่า เซตคำตอบของสมการ (1) คือ $\{(x, y) \mid x - y = 3\}$

หรือ $\{(x, x - 3) \mid x \in R\}$

หรือ $\{(y + 3, y) \mid y \in R\}$

ดังนั้น x และ y ที่ทำให้เมทริกซ์ที่กำหนดเท่ากัน คือ $(x, y) \in \{(a, b) \mid a - b = 3\}$

หรือ $(x, y) \in \{(a, a - 3) \mid a \in R\}$

หรือ $(x, y) \in \{(b + 3, b) \mid b \in R\}$

ลองทำดู

กำหนด $\begin{bmatrix} -\frac{4}{7}x + y \\ 4x - 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -28 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ x และ y

2. เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ในหน้า 130 นักเรียนทราบมาแล้วว่าจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C ที่เหลืออยู่ในร้าน ก. และร้าน ข. เป็นดังนี้

	ยางลบ A	ยางลบ B	ยางลบ C
ร้าน ก.	35	52	61
ร้าน ข.	50	35	33

ตารางที่ 2

เมื่อนำข้อมูลดังกล่าวมาเขียนใส่ตารางอีกแบบหนึ่ง โดยให้แต่ละแถวแทนจำนวนยางลบยี่ห้อ A, B และ C และแต่ละคอลัมน์แทนร้าน ก. และร้าน ข. จะได้ตารางบันทึกข้อมูลใหม่ ดังนี้

	ร้าน ก.	ร้าน ข.
ยางลบ A	35	50
ยางลบ B	52	35
ยางลบ C	61	33

ตารางที่ 3

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. เขียนเมทริกซ์ A และ B แทนข้อมูลในตารางที่ 2 และ 3 ตามลำดับ
2. เมทริกซ์ A มีจำนวนแถว จำนวนหลัก และมิติเป็นเท่าใด
3. เมทริกซ์ B มีจำนวนแถว จำนวนหลัก และมิติเป็นเท่าใด
4. ถ้า a_{ij} เมื่อ $i \in \{1, 2\}$ และ $j \in \{1, 2, 3\}$ เป็นสมาชิกของ A และ b_{ij} เมื่อ $i \in \{1, 2, 3\}$ และ $j \in \{1, 2\}$ เป็นสมาชิกของ B แล้ว a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, b_{31} และ b_{32} มีค่าเป็นเท่าใด
5. สมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์ A และ B มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า A เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 3 หลัก และมีมิติเป็น 2×3 และ B เป็นเมทริกซ์ที่มี 3 แถว 2 หลัก และมีมิติเป็น 3×2 ซึ่งสมาชิกในแถวที่ 1 จากซ้ายไปขวาของเมทริกซ์ A เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ B จากบนลงล่าง และสมาชิกในแถวที่ 2 จากซ้ายไปขวาของเมทริกซ์ A เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ 2 ของเมทริกซ์ B จากบนลงล่าง ในทางคณิตศาสตร์จะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A** ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
ถ้า $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ ที่ $b_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., n\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., m\}$
แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^t
(อ่านว่า “เอ ทรานสโพส”)

พิจารณาเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $A = [0 \ \ -7]$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า $A^t = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

คณิตน่ารู้

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$
แล้ว $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

3. การบวกเมทริกซ์ (Addition of Matrices)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ในหน้า 130 เมทริกซ์ที่แสดงข้อมูลในตารางที่ 1 เป็นดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} 35 & 52 & 61 \\ 50 & 35 & 33 \end{bmatrix}$$

สมมติให้ Y เป็นเมทริกซ์ที่แสดงจำนวนยางลบทั้ง 3 ยี่ห้อ ที่แต่ละร้านซื้อมาสำรองไว้เพื่อขายในเดือนถัดไป

$$Y = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 35 \\ 40 & 30 & 35 \end{bmatrix}$$

ถ้าเจ้าของร้าน ก. และร้าน ข. อยากทราบว่า ในปัจจุบันเขามีจำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อในแต่ละร้านเป็นจำนวนเท่าใด เขาจะสามารถหาได้จากนำเมทริกซ์ X และ Y มาบวกกัน ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ X + Y

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนเติมจำนวนลงในช่องว่างให้สมบูรณ์ แล้วตอบคำถามที่กำหนด

1. $X + Y = \begin{bmatrix} 35 & 52 & 61 \\ 50 & 35 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 40 & 35 \\ 40 & 30 & 35 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 35 + 30 & 52 + 40 & 61 + ... \\ ...... + 40 & .... & .... \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 65 & 92 & ...... \\ ...... & ...... & ...... \end{bmatrix}$

2. สมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ X บวกกับ Y มีความหมายว่าอย่างไร

Thinking Time

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ นักเรียนคิดว่า A + B หาคำตอบได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

การบวกเมทริกซ์โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel 2016

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า เมื่อนำเมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันมาบวกกัน ผลบวกที่ได้จะเป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกในแต่ละแถวและหลักเกิดจากสมาชิกที่อยู่ในแถวและหลักเดียวกันของทั้งสองเมทริกซ์มาบวกกัน ซึ่งการหาผลบวกของเมทริกซ์ในกรณีทั่วไป เป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$
เมทริกซ์ A บวกกับเมทริกซ์ B คือ $[c_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$ เขียนสัญลักษณ์แทน A บวกกับ B ด้วย $A + B$

ตัวอย่างที่ 7

ให้หาผลบวกของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -5 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -6 \\ 5 & 1\frac{4}{7} \end{bmatrix}$

วิธีทำ **1)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & 2 + 8 & 3 + (-4) \\ 7 + 5 & 7 + 10 & 7 + 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 12 & 17 & 22 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -5 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -6 \\ 5 & 1\frac{4}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} & 3 + (-6) \\ (-5) + 5 & \frac{3}{7} + 1\frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

ให้หาผลบวกของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -9 & 8 \\ \frac{11}{23} & -\sqrt{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -5 & -10 \\ -\sqrt{5} & 7 & 1\frac{6}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & \frac{13}{14} & -\sqrt{8} \\ 10 & \frac{11}{12} & -\frac{5}{21} \end{bmatrix}$

4. การคูณเมทริกซ์ (Multiplication of Matrix)

1) การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว (Multiplication of a Matrix by a Scalar)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

ถ้าแต่ละร้านต้องการสำรองจำนวนยางลบแต่ละยี่ห้อให้มีจำนวนเป็น 2 เท่า จากยอดขายของร้าน ก. และร้าน ข. ในเดือนพฤษภาคม เมื่อยอดขายยางลบแต่ละยี่ห้อของร้าน ก. และร้าน ข. ในเดือนพฤษภาคม ที่แสดงโดยเมทริกซ์ M เป็นดังนี้

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{ยี่ห้อ A} & \text{ยี่ห้อ B} & \text{ยี่ห้อ C}\end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix} \begin{array}{l}\text{ร้าน ก.} \\ \text{ร้าน ข.}\end{array}\end{array}$$

เจ้าของร้านจะสามารถหาจำนวนยางลบที่ต้องการสำรวจได้จากการนำ 2 ไปคูณกับเมทริกซ์ M ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 2M

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนเติมจำนวนลงในช่องว่างให้สมบูรณ์ แล้วตอบคำถามที่กำหนด

1. $2M = 2\begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \times 35 & 2 \times 60 & 2 \times \text{......} \\ \text{......} \times 61 & \text{......................} & \text{......................} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 70 & 120 & \text{......} \\ \text{......} & \text{......} & \text{......} \end{bmatrix}$

2. สมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในเมทริกซ์ที่เกิดจาก 2 คูณกับเมทริกซ์ M มีความหมายว่าอย่างไร

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัวทำได้โดยนำค่าคงตัวไปคูณกับสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ ซึ่งสามารถสรุปเป็นรูปทั่วไปได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นค่าคงตัว
ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ $[b_{ij}]$ เมื่อ $b_{ij} = ca_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
เขียนสัญลักษณ์แทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **และ** $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **ให้หา 3A, (-2)B และ 3A + (-2)B**

วิธีทำ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 4 \\ 3 \times 5 & 3 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 15 & 21 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(-2)B = (-2)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ (-2) \times (-1) & (-2) \times 4 \\ (-2) \times 0 & (-2) \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -8 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$3A + (-2)B = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 15 & 21 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -8 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 13 \\ 0 & -19 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -4 \\ 20 & 24 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 15 & 9 \\ -30 & 21 & 6 \end{bmatrix}$

ให้หา $2A$, $\frac{2}{3}B$ และ $2A + \frac{2}{3}B$

จากตัวอย่างที่ 8 จะเห็นว่า ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน และ α, β เป็นค่าคงตัว แล้วนักเรียนสามารถหา $\alpha A + \beta B$ ได้เสมอ ในทำนองเดียวกัน นักเรียนยังสามารถหา $\alpha A - \beta B$ ได้ เมื่อกำหนดบทนิยามของ $\alpha A - \beta B$ ดังนี้

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ และ α, β เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า
$\alpha A - \beta B = [c_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $c_{ij} = \alpha a_{ij} - \beta b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ให้หา A - B และ 2A - 3B

วิธีทำ

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-2 & 1-(-2) & -2-1 \\ -1-(-1) & 1-3 & 3-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(0)-3(2) & 2(1)-3(-2) & 2(-2)-3(1) \\ 2(-1)-3(-1) & 2(1)-3(3) & 2(3)-3(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 8 & -7 \\ 1 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 11 \\ \frac{3}{7} & 10 & -7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & \frac{5}{9} \\ -11 & 3 & 14 \end{bmatrix}$

ให้หา A - B และ $3A - \frac{1}{2}B$

Thinking Time

กำหนด A, B และ C เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ให้นักเรียนพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. A + B = B + A
2. A + (B + C) = (A + B) + C
3. A - B = B - A
4. (A - B) - C = A - (B - C)

สมบัติ **สมบัติของเมทริกซ์เกี่ยวกับการบวก การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน**

กำหนดให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์

1. $A + B$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ (สมบัติปิดของการบวก)
2. $A + B = B + A$ (สมบัติการสลับที่ของการบวก)
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก)
4. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$ (สมบัติการมีเอกลักษณ์ของการบวก)
   เรียก $\underline{0}$ ว่าเป็นเอกลักษณ์การบวกภายในเซตของเมทริกซ์มิติ $m \times n$
5. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$ (การมีตัวผกผันของการบวก)
   เรียก -A ว่าเป็นตัวผกผัน หรืออินเวอร์สการบวกของ A
6. $c(A + B) = cA + cB$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
7. $(c + d)A = cA + dA$ เมื่อ c, d เป็นค่าคงตัว
8. $(cd)A = c(dA)$ เมื่อ c, d เป็นค่าคงตัว
9. $1A = A$
10. $0A = \underline{0}$
11. $(A + B)^t = A^t + B^t$ และ $(A - B)^t = A^t - B^t$
12. $(A^t)^t = A$
13. $(cA^t) = c(A^t)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 10

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ ให้หาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $2A + X = \frac{1}{3}(X + A)$

วิธีทำ จาก $2A + X = \frac{1}{3}(X + A)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2A + X &= \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}A \\
(2A + X) - \frac{1}{3}X &= \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}A\right) - \frac{1}{3}X \\
2A + \left(X - \frac{1}{3}X\right) &= \left(\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}X\right) - \frac{1}{3}X \\
2A + \left(1 - \frac{1}{3}\right)X &= \frac{1}{3}A + \left(\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}X\right) \\
2A + \frac{2}{3}X &= \frac{1}{3}A + \underline{0} \\
2A + \frac{2}{3}X &= \frac{1}{3}A \\
\left(2A + \frac{2}{3}X\right) - 2A &= \frac{1}{3}A - 2A
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{3}X + 2A\right) - 2A = \left(\frac{1}{3} - 2\right)A$$
$$\frac{2}{3}X + (2A - 2A) = -\frac{5}{3}A$$
$$\frac{2}{3}X + \underline{0} = -\frac{5}{3}A$$
$$\frac{2}{3}X = -\frac{5}{3}A$$
$$X = -\frac{5}{2}A$$

นั่นคือ $X = -\frac{5}{2}A = -\frac{5}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -10 \\ 0 & -15 & 20 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เมทริกซ์ X คือ $\begin{bmatrix} -5 & 5 & -10 \\ 0 & -15 & 20 \end{bmatrix}$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \sqrt{3} \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ ให้หาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $-\frac{4}{7}A + 2X = \frac{3}{7}(X + A)$

2) การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ (Multiplication of a Matrix by another Matrix)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้า 139 เรารู้แล้วว่า ยอดขายยางลบแต่ละยี่ห้อของร้าน ก. และร้าน ข. ในเดือนพฤษภาคม เป็นดังนี้

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ยี่ห้อ A} & \text{ยี่ห้อ B} & \text{ยี่ห้อ C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ร้าน ก.} \\ \text{ร้าน ข.} \end{array}$$

สมมติว่ายางลบยี่ห้อ A ราคาก้อนละ 10 บาท ยี่ห้อ B ก้อนละ 15 บาท และยี่ห้อ C ก้อนละ 20 บาท เมื่อนำราคายางลบแต่ละยี่ห้อมาเขียนใส่เมทริกซ์โดยให้สมาชิกในแต่ละแถวแทนยี่ห้อยางลบ และสมาชิกในแต่ละหลักแทนราคายางลบ จะได้เมทริกซ์ที่มีมิติ 3 × 1 ดังนี้

$$N = \begin{array}{c} \text{ราคา} \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ยี่ห้อ A} \\ \text{ยี่ห้อ B} \\ \text{ยี่ห้อ C} \end{array}$$

ถ้าเจ้าของร้านต้องการทราบยอดขายยางลบของแต่ละร้านในเดือนพฤษภาคม เขาสามารถทำได้โดยนำเมทริกซ์ M คูณกับ N ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ MN

จากข้อมูลข้างต้น ให้นักเรียนเติมจำนวนลงในช่องว่างให้สมบูรณ์ แล้วตอบคำถามที่กำหนด

1. $MN = \begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (35 \times 10) + (60 \times 15) + (50 \times \ldots\ldots) \\ (\ldots\ldots \times 10) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$

2. สมมติว่า P เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากเมทริกซ์ M คูณกับ N อยากทราบว่า เมทริกซ์ M, N และ P มีมิติเป็นเท่าใด และมิติของแต่ละเมทริกซ์มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

3. นักเรียนคิดว่าเงื่อนไขใดบ้างที่จะทำให้เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใด ๆ คูณกันได้

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า

M เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 3 หลัก และมีมิติเป็น 2×3

N เป็นเมทริกซ์ที่มี 3 แถว 1 หลัก และมีมิติเป็น 3×1

P เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 1 หลัก และมีมิติเป็น 2×1

จะสังเกตได้ว่า จำนวนแถวของเมทริกซ์ P เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ M และจำนวนหลักของเมทริกซ์ P เท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ N

คณิตน่ารู้

กำหนด A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $p \times q$ ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$

$$\begin{array}{l} \\ \text{ร้าน ก.} \\ \text{ร้าน ข.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ยี่ห้อ A} & \text{ยี่ห้อ B} & \text{ยี่ห้อ C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{ราคา} \\ \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ยี่ห้อ A} \\ \text{ยี่ห้อ B} \\ \text{ยี่ห้อ C} \end{array} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\boxed{M}$ มีมิติเป็น 2×3 $\quad$ $\boxed{N}$ มีมิติเป็น 3×1 $\quad$ $\boxed{P}$ มีมิติเป็น 2×1

จำนวนหลัก = จำนวนแถว

เมื่อพิจารณาการคูณของเมทริกซ์ M และ N จะพบว่ามีขั้นตอน ดังนี้

1) นำสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ M คูณกับสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ N สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของเมทริกซ์ M คูณกับสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ N และสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 3 ของเมทริกซ์ M คูณกับสมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ N จากนั้นนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน และผลบวกที่ได้จะเป็นสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ P

$$\overset{\boxed{M}}{\begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix}} \overset{\boxed{N}}{\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}} = \overset{\boxed{P}}{\begin{bmatrix} (35 \times 10) + (60 \times 15) + (50 \times 20) \\ b \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}250 \\ b \end{bmatrix}$$

2) นำสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ M คูณกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ N ในทำนองเดียวกันกับขั้นตอนก่อนหน้านี้ จากนั้นนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน และผลบวกที่ได้จะเป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของเมทริกซ์ P

$$\overset{\boxed{M}}{\begin{bmatrix} 35 & 60 & 50 \\ 61 & 44 & 37 \end{bmatrix}} \overset{\boxed{N}}{\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}} = \overset{\boxed{P}}{\begin{bmatrix} 2{,}250 \\ (61 \times 10) + (44 \times 15) + (37 \times 20) \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}250 \\ 2{,}010 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลคูณของเมทริกซ์ M กับ N คือ $P = \begin{bmatrix} 2{,}250 \\ 2{,}010 \end{bmatrix}$

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ จะได้ว่า
$AB = [c_{ij}]_{m \times r}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
และ $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kr} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kr} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่างที่ 11

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) AB   2) BA

วิธีทำ 1) เนื่องจาก A เป็น 2×2 เมทริกซ์ และ B เป็น 2×3 เมทริกซ์
จะได้ว่า จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B
ดังนั้น AB หาค่าได้ ดังนี้

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (2 \times 1) & (1 \times 0) + (2 \times 2) & (1 \times 4) + (2 \times 3) \\ (0 \times 2) + (1 \times 1) & (0 \times 0) + (1 \times 2) & (0 \times 4) + (1 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2) เนื่องจาก B เป็น 2×3 เมทริกซ์ และ A เป็น 2×2 เมทริกซ์
จะได้ว่า จำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A
ดังนั้น ไม่สามารถหา BA ได้

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 3 \\ \frac{2}{5} & 3 & 10 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) AB   2) BA

จากตัวอย่างที่ 11 จะเห็นว่า AB $\neq$ BA กล่าวได้ว่า เมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ของการคูณ

ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$

ให้หา AB, BC, A(BC) และ (AB)C

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(5) + 2(10) & 1(6) + 2(9) & 1(7) + 2(8) \\ 4(5) + 3(10) & 4(6) + 3(9) & 4(7) + 3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 24 & 23 \\ 50 & 51 & 52 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(11) + 6(12) + 7(13) \\ 10(11) + 9(12) + 8(13) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 218 \\ 322 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 218 \\ 322 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(218) + 2(322) \\ 4(218) + 3(322) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 862 \\ 1,838 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 25 & 24 & 23 \\ 50 & 51 & 52 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25(11) + 24(12) + 23(13) \\ 50(11) + 51(12) + 52(13) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 862 \\ 1,838 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด A = $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ และ C = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

ให้หา AB, BC, A(BC) และ (AB)C

จากตัวอย่างที่ 12 จะเห็นว่า A(BC) = (AB)C กล่าวได้ว่า เมทริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ตัวอย่างที่ 13

กำหนด A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ C = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ให้หา A(B + C), AB + AC, (A + B)C และ AC + BC

วิธีทำ

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(3) + 1(1) & 4(-2) + 1(3) \\ 0(3) + (-1)(1) & 0(-2) + (-1)(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4(1) + 1(2) & 4(0) + 1(3) \\ 0(1) + (-1)(2) & 0(0) + (-1)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4(2) + 1(-1) & 4(-2) + 1(0) \\ 0(2) + (-1)(-1) & 0(-2) + (-1)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5(2) + 1(-1) & 5(-2) + 1(0) \\ 2(2) + 2(-1) & 2(-2) + 2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AC + BC = \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4(2) + 1(-1) & 4(-2) + 1(0) \\ 0(2) + (-1)(-1) & 0(-2) + (-1)(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1(2) + 0(-1) & 1(-2) + 0(0) \\ 2(2) + 3(-1) & 2(-2) + 3(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

ให้หา $(A + B)C$, $AC + BC$, $A(B + C)$ และ $AB + AC$

จากตัวอย่างที่ 13 จะเห็นว่า $A(B + C) = AB + AC$ และ $(A + B)C = AC + BC$ กล่าวได้ว่า เมทริกซ์มีสมบัติการแจกแจง

ตัวอย่างที่ 14

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ให้หา $(AB)^t$ และ B^tA^t

วิธีทำ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(0)+1(1) & 1(-3)+1(4) \\ 2(0)+0(1) & 2(-3)+0(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(1)+1(1) & 0(2)+1(0) \\ -3(1)+4(1) & -3(2)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ให้หา $(AB)^t$ และ B^tA^t

จากตัวอย่างที่ 14 จะเห็นว่า $(AB)^t = B^tA^t$

บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ กำหนด $I_n = [I_{jk}]_{n \times n}$ เมื่อ j และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่งมีสมาชิก ดังนี้

$$I_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } j = k \\ 0 & \text{เมื่อ } j \neq k \end{cases}$$

เรียก I_n ว่า **เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n × n**

ในกรณีที่ไม่เกิดความสับสนเกี่ยวกับเมทริกซ์แล้ว อาจเขียน I แทน I_n ได้

จากบทนิยาม จะได้ว่า $I_1 = [1]$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 1 × 1

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 2 × 2

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3 × 3

ตัวอย่างที่ 15

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า $AI = IA = A$

วิธีทำ $AI = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1)+5(0) & 4(0)+5(1) \\ -1(1)+(-3)(0) & -1(0)+(-3)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4)+0(-1) & 1(5)+0(-3) \\ 0(4)+1(-1) & 0(5)+1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $AI = IA = A$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า $AI = IA = A$

Thinking Time

"ถ้า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $AI_n = I_mA = A$"
นักเรียนคิดว่าข้อความดังกล่าวเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

สมบัติ

สมบัติของเมทริกซ์เกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ และเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

กำหนด $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ และ $C = [c_{ij}]_{p\times q}$

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
3. $AI_n = A$, $I_mA = A$ เมื่อ I_n และ I_m เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์
4. $A\underline{0} = \underline{0}$, $\underline{0}A = \underline{0}$
5. $(AB)^t = B^tA^t$
6. $(A + E)B = AB + EB$ เมื่อ E เป็น $m \times n$ เมทริกซ์
7. $A(B + D) = AB + AD$ เมื่อ D เป็น $n \times p$ เมทริกซ์

ในการคูณเมทริกซ์บางครั้งอาจคูณเมทริกซ์ใด ๆ กับตัวเอง เช่น เมทริกซ์ A คูณกับเมทริกซ์ A ผลลัพธ์ที่ได้จะเขียนเป็น AA เพื่อสะดวกอาจเขียนเป็น A^2 ได้ ซึ่งในที่นี้จะมีการใช้สัญลักษณ์ดังกล่าวต่อไปนี้

ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว

A^1 หมายถึง A

A^k หมายถึง AA^{k-1} เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

นั่นคือ $A^2 = AA^{2-1} = AA$

$A^3 = AA^{3-1} = AA^2 = AAA$

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ให้หา A^2, A^3 และ A^4

วิธีทำ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(2) + 0(-1) & 2(0) + 0(1) \\ (-1)(2) + 1(-1) & (-1)(0) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AA^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(4) + 0(-3) & 2(0) + 0(1) \\ (-1)(4) + 1(-3) & (-1)(0) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = AA^3$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(8) + 0(-7) & 2(0) + 0(1) \\ (-1)(8) + 1(-7) & (-1)(0) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ให้หา A^2, A^3 และ A^4

ตัวอย่างที่ 17

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) $(A + B)^2$ **2)** $A^2 + 2AB + B^2$

3) $A^2 - B^2$ **4)** $(A - B)(A + B)$

วิธีทำ **1)**

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4(4) + 0(0) & 4(0) + 0(-1) \\ 0(4) + (-1)(0) & 0(0) + (-1)(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(3) + 0(1) & 3(0) + 0(2) \\ 1(3) + 2(1) & 1(0) + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1) + 0(-1) & 1(0) + 0(-3) \\ (-1)(1) + (-3)(-1) & (-1)(0) + (-3)(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(1) + 0(-1) & 3(0) + 0(-3) \\ 1(1) + 2(-1) & 1(0) + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9 + 6 + 1 & 0 + 0 + 0 \\ 5 - 2 + 2 & 4 - 12 + 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

4) $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$(A - B)(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(4) + 0(0) & 2(0) + 0(-1) \\ 2(4) + 5(0) & 2(0) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ให้หา $(A + B)^2$, $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 - B^2$ และ $(A - B)(A + B)$

จากตัวอย่างที่ 17 จะเห็นว่า $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ และ $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$

Thinking Time

กำหนด A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ให้แสดงว่า

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB = BA$

แบบฝึกทักษะ 2.2

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ที่ทำให้ A = B

1) $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} x & 7 & 5 \\ 3 & y & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & x - 2 & y \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & z \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} x + y & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & x - y \end{bmatrix}$

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) A + B
2) B + A
3) (A + B) + C
4) A + (B + C)

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) 2A + 2B
2) 2(A + B)
3) 3A + 5A

4. ให้หาผลคูณของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$

ระดับกลาง

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & 3 \\ x & y^4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -y & 1 \end{bmatrix}$
ให้หาจำนวนจริง x และ y ที่ทำให้ A = B

6. ให้หาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. ให้หาเมทริกซ์ X จากสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $5X + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2X$

3) $2A + X = B - 2X$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ให้หา $A^2 - 2A + I_2$

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ a & 4 & -6 \end{bmatrix}$

1) ให้หา AB และ BA

2) ถ้า $AB = \begin{bmatrix} -8 & 72 & -14 \\ -5 & 17 & -8 \\ 37 & -61 & 57 \end{bmatrix}$ แล้ว a และ b มีค่าเป็นเท่าใด

ระดับท้าทาย

10. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ให้หา $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$ ที่ทำให้ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

2.3 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse of a Matrix)

กิจกรรม คณิตศาสตร์

1. **ให้นักเรียนเติมจำนวนลงในช่องว่างให้สมบูรณ์ และตอบคำถามที่กำหนด**

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (1 \times 7) + [3 \times (-2)] & [1 \times (-3)] + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \\ (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + [7 \times (-2)] & (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$

2) $BA = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (7 \times 1) + [(-3) \times 2)] & (7 \times 3) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \\ (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + (1 \times 2) & (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$

2. **ผลคูณของ AB และ BA ในข้อ 1. มีความสัมพันธ์กันอย่างไร**

จากกิจกรรมคณิตศาสตร์ จะเห็นว่า A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่ง AB เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ BA เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า AB และ BA มีค่าเท่ากันและเท่ากับ I_2 ในเรื่องเมทริกซ์ จะเรียก B ว่าเป็น **เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A** โดยมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ที่มีสมบัติว่า

$$AB = BA = I_n$$

แล้วจะเรียก B ว่าเป็น **เมทริกซ์ผกผัน**ของ A และเขียนแทน B ด้วย A^{-1}

จากบทนิยาม จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

วิธีทำ สมมติ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

จากบทนิยามเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2b_{11} + 3b_{21} & 2b_{12} + 3b_{22} \\ 4b_{11} + 6b_{21} & 4b_{12} + 6b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$2b_{11} + 3b_{21} = 1 \quad .....(1)$$

$$4b_{11} + 6b_{21} = 0 \quad .....(2)$$

พิจารณาสมการ (2) จะได้ว่า

$$2(2b_{11} + 3b_{21}) = 0$$

$$2(1) = 0 \quad \text{(จากสมการ (1), } 2b_{11} + 3b_{21} = 1\text{)}$$

$$2 = 0 \quad \text{ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

แสดงว่า สมการ (1) และ (2) ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ไม่มีเมทริกซ์ B ที่มีมิติ 2×2 ซึ่งทำให้ $AB = I_2$

นั่นคือ A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 19

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ให้แสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

วิธีทำ สมมติ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

โดยบทนิยามเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า $AB = BA = I_3$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8-8+3 & 10-16+6 & -6+6+0 \\ -4+4+0 & -5+8+0 & 3-3+0 \\ 0-4+4 & 0-8+8 & 0+3+0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8-5+0 & -8+5+3 & -12+0+12 \\ 8-8+0 & -8+8+3 & -12+0+12 \\ -2+2+0 & 2-2+0 & 3+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ให้แสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

เนื่องจาก เมทริกซ์ไม่มีสมบัติสลับที่ของการคูณ จึงทำให้เมทริกซ์บางเมทริกซ์ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้น การหาเมทริกซ์ผกผันจึงมีความยุ่งยากและมีวิธีหาได้หลายวิธี ดังต่อไปนี้

พิจารณาการหา A^{-1} เมื่อกำหนด $A = [a]$ และ $a \neq 0$

ให้ $A^{-1} = [x]$

จะได้ $AA^{-1} = A^{-1}A = I_1$

ดังนั้น $[a][x] = [1]$ และ $[x][a] = [1]$

$[ax] = [1]$

จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$x = \frac{1}{a}$$

นำไปตรวจสอบผลคูณ จะพบว่า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_1$$

จึงได้ข้อสรุปว่า ถ้า $A = [a]$ และ $a \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน

และ $$A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$$

เมทริกซ์ผกผันของ 1×1 เมทริกซ์ จะมีสมาชิกเป็นส่วนกลับของเมทริกซ์นั้น ที่ไม่เท่ากับ 0

Thinking Time

กำหนด $A = [-2]$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

ให้หา A^{-1}, B^{-1} และ C^{-1}

พิจารณาการหา A^{-1} เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$

ให้ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\quad AA^{-1} = I_2$ และ $A^{-1}A = I_2$

ดังนั้น
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า

$$ax_1 + bx_3 = 1 \qquad .....(1)$$
$$cx_1 + dx_3 = 0 \qquad .....(2)$$
$$ax_2 + bx_4 = 0 \qquad .....(3)$$
$$cx_2 + dx_4 = 1 \qquad .....(4)$$

$((1) \times d) - ((2) \times b)$; $(adx_1 + bdx_3) - (bcx_1 + bdx_3) = d - 0$

$$adx_1 - bcx_1 = d$$
$$(ad - bc)x_1 = d$$
$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}$$

$((2) \times a) - ((1) \times c)$; $(acx_1 + adx_3) - (acx_1 + cbx_3) = 0 - c$

$$adx_3 - bcx_3 = -c$$
$$(ad - bc)x_3 = -c$$
$$x_3 = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$((3)\times d)-((4)\times b)\ ;\ (adx_2+bdx_4)-(bcx_2+bdx_4) = 0-b$$
$$adx_2-bcx_2 = -b$$
$$(ad-bc)x_2 = -b$$
$$x_2 = \frac{-b}{ad-bc}$$
$$((4)\times a)-((3)\times c)\ ;\ (acx_2+adx_4)-(acx_2+bcx_4) = a-0$$
$$adx_4-bcx_4 = a$$
$$(ad-bc)x_4 = a$$
$$x_4 = \frac{a}{ad-bc}$$

จะได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

นำไปตรวจสอบผลคูณ จะพบว่า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$$

จึงได้ข้อสรุปว่า ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - cd \neq 0$ แล้ว A มีเมทริกซ์ผกผัน

และ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Thinking Time

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

ให้หา A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} และ D^{-1}

1) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ใช้ได้เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ 2×2 เท่านั้น

2) การหา A^{-1} ควรตรวจสอบทุกครั้งว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$ หรือไม่ เมื่อ A เป็น 2×2 เมทริกซ์

แบบฝึกทักษะ 2.3

ระดับพื้นฐาน

1. ให้ตรวจสอบว่า เมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้มีเมทริกซ์ผกผันหรือไม่ ถ้ามีให้หาเมทริกซ์ผกผัน

1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

4) $D = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

5) $E = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

6) $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) A^{-1}
2) B^{-1}
3) $(A^{-1})^{-1}$
4) $(B^{-1})^{-1}$
5) $A^{-1}B^{-1}$
6) $B^{-1}A^{-1}$
7) $(AB)^{-1}$
8) $(BA)^{-1}$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ให้แสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ระดับกลาง

4. กำหนด A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ โดยมี

$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{26}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{4}{8} & -\frac{2}{8} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ให้หา A

แนะแนวคิด

กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า

$(A^{-1})^{-1} = A$

5. กำหนด $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $2B^{-1} - A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ให้หา A และ B

2.4 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)

นักเรียนได้ทราบความหมายของเมทริกซ์ การหาผลลัพธ์ของการบวกของเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ การหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน และการหาเมทริกซ์ผกผันของ 2×2 เมทริกซ์ ในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม

1. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 1×1

บทนิยาม กำหนด $A = [a]_{1\times1}$ เรียก a ว่าเป็นดีเทอร์มิแนนต์ของ A
เขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$

เช่น กำหนด $A = [1]$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\det(A) = 1$

$B = [-4]$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า $\det(B) = -4$

2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

1) ไมเนอร์ (Minor)

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}(A)$

ตัวอย่างที่ 20

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **ให้หา**

1) ไมเนอร์ของสมาชิกทุกตัวของ A

2) $M_{22}(A) + M_{21}(A) - M_{12}(A)$

3) $M_{21}(A) - M_{11}(A) + M_{22}(A)$

วิธีทำ **1)** จาก $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ โดยบทนิยาม จะได้ว่า

$M_{11}(A) = |5| = 5, \quad M_{12}(A) = |0| = 0$

$M_{21}(A) = |-3| = -3, \quad M_{22}(A) = |4| = 4$

2) $M_{22}(A) + M_{21}(A) - M_{12}(A) = 4 + (-3) - 0 = 1$

3) $M_{21}(A) - M_{11}(A) + M_{22}(A) = -3 - 5 + 4 = -4$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 4 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) ไมเนอร์ของสมาชิกทุกตัวของ A

2) $M_{12}(A) - M_{22}(A) - M_{11}(A)$

3) $M_{11}(A) + M_{21}(A) + M_{22}(A)$

จากบทนิยามไมเนอร์ จะเห็นว่า การหาไมเนอร์ของสมาชิกของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ จะต้องมีการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ด้วย ซึ่งในตอนนี้นักเรียนได้รู้เพียงการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 1×1 เมทริกซ์ นักเรียนจึงสามารถหาไมเนอร์ของสมาชิก 2×2 เมทริกซ์ได้เท่านั้น ซึ่งการหาไมเนอร์ของสมาชิก $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n > 2$ จะต้องมีการกำหนดทฤษฎีบทและบทนิยามเพื่อใช้หาดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งนักเรียนจะได้เรียนในลำดับถัดไป

2) ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (Cofactor)

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ กับ $M_{ij}(A)$ เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}(A)$

จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j}M_{ij}(A)$

ตัวอย่างที่ 21

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ให้หาตัวประกอบร่วมเกี่ยวของสมาชิกทุกตัวของ A

วิธีทำ จาก $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_{11}(A) &= (-1)^{1+1}M_{11}(A) = M_{11}(A) = 8 \\ C_{12}(A) &= (-1)^{1+2}M_{12}(A) = -M_{12}(A) = -7 \\ C_{21}(A) &= (-1)^{2+1}M_{21}(A) = -M_{21}(A) = -6 \\ C_{22}(A) &= (-1)^{2+2}M_{22}(A) = M_{22}(A) = 5 \end{aligned}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -0.5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ให้หาตัวประกอบร่วมเกี่ยวของสมาชิกทุกตัวของ A

บทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ

$a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + a_{i3}C_{i3}(A) + ... + a_{in}C_{in}(A)$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

$a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + a_{3j}C_{3j}(A) + ... + a_{nj}C_{nj}(A)$ เมื่อ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

เขียนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย det(A) หรือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

จากบทนิยาม การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ โดยหาผลลัพธ์ของ $a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + a_{i3}C_{i3}(A) + ... + a_{in}C_{in}(A)$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ จะเรียกว่า การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยกระจายตามแถวที่ i และการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ โดยหาผลลัพธ์ของ $a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + a_{3j}C_{3j}(A) + ... + a_{nj}C_{nj}(A)$ เมื่อ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ เรียกว่า การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยกระจายตามหลักที่ j

จากบทนิยาม กำหนด $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ จะได้ det(A) ดังนี้

(1) กระจายตามแถวที่ i

กรณี $i = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}(A) + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}(A) \\ &= a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

กรณี i = 2 จะได้ว่า

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}C_{21}(A) + a_{22}C_{22}(A)$$
$$= a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}(A) + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22}(A)$$
$$= -a_{21}|a_{12}| + a_{22}|a_{11}|$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(2) กระจายตามหลักที่ j

กรณี j = 1 จะได้ว่า

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11}(A) + a_{21}C_{21}(A)$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}(A) + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}(A)$$
$$= a_{11}|a_{22}| - a_{21}|a_{12}|$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

กรณี j = 2 จะได้ว่า

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}C_{12}(A) + a_{22}C_{22}(A)$$
$$= a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}(A) + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22}(A)$$
$$= -a_{12}|a_{21}| + a_{22}|a_{11}|$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

จะเห็นว่า การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 2×2 เมทริกซ์โดยกระจายตามแถวที่ i เมื่อ i = {1, 2} หรือกระจายตามหลักที่ j เมื่อ j = {1, 2} จะได้ค่าคงตัวเท่ากัน คือ

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ตัวอย่างที่ 22

กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) det(A) **2)** det(B) **3)** det(C)

วิธีทำ **1)** เนื่องจาก A เป็น 2 × 2 เมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= (-1)(10) - (4)(-5) \\ &= -10 + 20 \\ &= 10 \end{aligned}$$

2) เนื่องจาก B เป็น 2 × 2 เมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \\ &= (3)(-1) - (1)(-2) \\ &= -3 + 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

3) เนื่องจาก C เป็น 2 × 2 เมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(C) &= c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} \\ &= (-8)(2) - (-4)(4) \\ &= -16 + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) det(A) 2) det(B) 3) det(C)

คณิตน่ารู้

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว det(A) อาจเป็นจำนวนลบ หรือศูนย์ หรือจำนวนบวก

ตัวอย่างที่ 23

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

วิธีทำ จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(A) = (-1) - 0 = -1$

$\det(B) = 0 - 1 = -1$

ดังนั้น $\det(A) \cdot \det(B) = (-1)(-1) = 1$

และจาก $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) + 2 & 1 + 0 \\ 0 + (-1) & 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(AB) = 0 - (-1) = 1$

นั่นคือ $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$ ให้แสดงว่า $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

คณิตน่ารู้

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A)$ = ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง − ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง

จะได้ว่า ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง เท่ากับ ad

ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน เท่ากับ cb

ดังนั้น $\det(A) = ad - cb$

จากตัวอย่างที่ 23 การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กำหนด A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

ต่อไปนี้จะแสดงการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 3×3 เมทริกซ์ โดยใช้บทนิยาม

กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$

จากบทนิยาม ถ้าหา det(A) โดยกระจายตามแถวที่ i เมื่อ i = 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}(A) + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}(A) + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}(A) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้านักเรียนหา det(A) โดยการกระจายตามแถวที่ i เมื่อ $i \in \{2, 3\}$ หรือกระจายตามหลักที่ j เมื่อ $j \in \{1, 2, 3\}$ จะได้

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

นอกจากการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A โดยใช้บทนิยาม นักเรียนอาจหาดีเทอร์มิแนนต์ของ A ได้จากขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อจากหลักที่ 3 ของ A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ขั้นที่ 2 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

ขั้นที่ 3 หาผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

$$a_{31}a_{22}a_{13} \quad a_{32}a_{23}a_{11} \quad a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

ขั้นที่ 4 นำผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่างลบด้วยผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน จะได้ผลลัพธ์เป็น det(A)

$$\overbrace{a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}}^{\text{ผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน}}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{ผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง}}$$

จากรูป ให้ p แทนผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง

q แทนผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

จะได้ det(A) = p - q

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ให้หา det(A)

วิธีทำ การหา det(A) ทำได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 หา det(A) โดยใช้บทนิยาม

จากบทนิยามหา det(A) โดยกระจายตามแถวที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) \\ &= (1)(-1)^{1+1}M_{11}(A) + (2)(-1)^{1+2}M_{12}(A) + (3)(-1)^{1+3}M_{13}(A) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (0 - (-2)) - 2(4 - 10) + 3(-4 - 0) \\ &= 2 + 12 - 12 \\ &= 2 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หา det(A) โดยการนำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อจากหลักที่ 3 ของ A จากนั้นนำผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง ลบด้วยผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ \hline & & 0 & 20 & -12 \end{array}$$

$\det(A) = (0 + 20 - 12) - (0 - 2 + 8) = 8 - 6 = 2$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -7 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ ให้หา det(A)

นักคณิตศาสตร์ได้แบ่งประเภทของเมทริกซ์จัตุรัส โดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) เมื่อ $\det(A) = 0$

A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-Singular Matrix) เมื่อ $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 25

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) det(A) และ $\det(A^t)$ **2)** det(B) และ det(C)

วิธีทำ **1)** จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\det(A) = (1 - 1 + 4) - (2 - 2 + 1) = 3$

$\det(A^t) = (1 + 4 - 1) - (2 - 2 + 1) = 3$

2) จากโจทย์ จะได้ $\det(B) = (2 - 2 + 8) - (4 - 4 + 2) = 6$

$\det(C) = (-3 + 3 - 12) - (-6 + 6 - 3) = -9$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 30 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & -12 & -3 \\ 1 & -12 & 5 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

ให้หา

1) det(A) และ $\det(A^t)$ 2) det(B) และ det(C)

จากตัวอย่างที่ 25 ข้อ 1) จะเห็นว่า $\det(A) = \det(A^t)$ และข้อ 2) จะเห็นว่า เมทริกซ์ B เกิดจากการนำ 2 คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ B ที่ได้เท่ากับ 2det(A) และเมทริกซ์ C เกิดจากการนำ -3 คูณสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ C ที่ได้เท่ากับ -3det(A)

ตัวอย่างที่ 26

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ให้หา det(A), det(B) และ det(C)

วิธีทำ

$$\det(A) = (-2 + 0 + 0) - (0 + 0 + 1) = -3$$

$$\det(B) = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 - 2) = 3$$

$$\det(C) = (0 + 0 + 1) - (0 - 2 + 0) = 3$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ให้หา det(A), det(B) และ det(C)

จากตัวอย่างที่ 26 จะเห็นว่า เมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวที่ 1 กับ 2 ของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ C ได้มาจากการสลับหลักที่ 2 กับ 3 ของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ B และดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ C ที่ได้เท่ากับ **จำนวนตรงข้าม**ของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่างที่ 27

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

ให้หา det(A), det(B) และ det(C)

วิธีทำ

$$\det(A) = (-1 + 2 - 1) - (1 + 1 + 2) = -4$$

$$\det(B) = (1 + 4 - 3) - (3 - 1 + 4) = -4$$

$$\det(C) = (-3 + 0 + 1) - (3 - 1 + 0) = -4$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0.5 & 2 \\ -7 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -7 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 7 & 0.5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ให้หา det(A), det(B) และ det(C)

จากตัวอย่างที่ 27 จะเห็นว่า เมทริกซ์ B เกิดจากการนำ 2 คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 2 แล้วนำผลคูณบวกกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 1 ที่เป็นหลักเดียวกันของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ C เกิดจากการนำ -2 คูณสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 1 แล้วนำผลคูณบวกกับสมาชิกทุกตัวในหลักที่ 2 ที่เป็นแถวเดียวกันของเมทริกซ์ A ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และเมทริกซ์ C มีค่า**เท่ากัน**

สมบัติ

สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

1. ถ้า A มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ทุกตัว แล้ว det(A) = 0
2. ถ้า B ได้จากการสลับแถว 2 แถว หรือสลับหลัก 2 หลักของ A
   แล้ว det(B) = -det(A)
3. ถ้า A มีสมาชิกของแถวสองแถวหรือหลักสองหลักเหมือนกัน แล้ว det(A) = 0
4. $\det(A^t) = \det(A)$
5. ถ้านำค่าคงตัว c คูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A
   แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้ เท่ากับ $c \cdot \det(A)$
6. ถ้านำค่าคงตัว c คูณกับสมาชิกทุกตัวของ A จะได้ว่า $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$
7. ถ้า B ได้จาก A โดยเปลี่ยนเฉพาะสมาชิกในแถวที่ j ของ A โดยใช้ค่าคงตัว c คูณกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ของ A เมื่อ $i \neq j$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ j ของ A นั่นคือ $b_{jk} = ca_{ik} + a_{jk}$ สำหรับทุก $k \in \{1, 2, ..., n\}$
   แล้ว det(B) = det(A)
8. ถ้า B ได้จาก A โดยเปลี่ยนเฉพาะสมาชิกในหลักที่ i ของ A โดยใช้ค่าคงตัว c คูณกับสมาชิกทุกตัวในหลักที่ j ของ A เมื่อ $j \neq i$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในหลักที่ i ของ A นั่นคือ $b_{ki} = ca_{kj} + a_{ki}$ สำหรับทุก $k \in \{1, 2, ..., n\}$
   แล้ว det(B) = det(A)

จากสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ที่กล่าวมา นักเรียนสามารถนำมาใช้ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 28

กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, $B = [b_{ij}]_{3\times3}$, $\det(A) = 2$ และ $\det(B) = -4$ ให้หา

1) $\det(A^t)$ **2)** $\det(AB)$

3) $\det(2AB)$ **4)** $\det(A^2B^{-1})$

วิธีทำ **1)** จากสมบัติข้อ 4 จะได้ว่า

$$\det(A^t) = \det(A) = 2$$

2) จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(A)\cdot\det(B)\\ &= (2)(-4)\\ &= -8\end{aligned}$$

3) จากสมบัติข้อ 6 และทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(2AB) &= \det(2A)\cdot\det(B)\\ &= 2^3\det(A)\cdot\det(B)\\ &= (8)(2)(-4)\\ &= -64\end{aligned}$$

4) จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\det(A^2B^{-1}) &= \det(AAB^{-1})\\ &= \det(A)\cdot\det(A)\frac{1}{\det(B)}\\ &= (2)(2)\left(\frac{1}{-4}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

แนะแนวคิด

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

เมื่อ $n \geq 2$ **จะได้ว่า**

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

เมื่อ $\det(A) \neq 0$

ลองทำดู

กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, $B = [b_{ij}]_{3\times3}$, $\det(A) = \frac{1}{5}$ และ $\det(B) = -3$ ให้หา

1) $\det((BA)^t)$ 2) $\det(2A^{-1})$

3) $\det(5B^{-1}A)$ 4) $\det(B^tA^2)$

แนวข้อสอบ PAT 1

กำหนด $A = \begin{bmatrix} x\sqrt{x} & x & \sqrt{x} \\ y\sqrt{y} & y & \sqrt{y} \\ z\sqrt{z} & z & \sqrt{z} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ \sqrt{x} & \sqrt{y} & \sqrt{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวกที่แตกต่างกัน ค่าของ det(B) ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{xyz}(\det(A))$ **2.** $-\sqrt{xyz}(\det(A))$ **3.** $xyz(\det(A))$

4. $-xyz(\det(A))$ **5.** $x^2y^2z^2(\det(A))$

แนวคิด

จากโจทย์ จะได้ว่า

$$\det(B) = \det(B^t)$$

$$= \begin{vmatrix} x & \sqrt{x} & 1 \\ y & \sqrt{y} & 1 \\ z & \sqrt{z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{z})\begin{vmatrix} x\sqrt{x} & x & \sqrt{x} \\ y\sqrt{y} & y & \sqrt{y} \\ z\sqrt{z} & z & \sqrt{z} \end{vmatrix}$$

คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย $\sqrt{x}$
คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2 ด้วย $\sqrt{y}$
คูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 3 ด้วย $\sqrt{z}$

$$= \sqrt{xyz}(\det(A))$$

3. การหาเมทริกซ์ผกผันของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ โดยใช้เมทริกซ์ผูกพัน

1) เมทริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)

บทนิยาม กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$
เมทริกซ์ผูกพันของ A คือ เมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^t$ เขียนแทนเมทริกซ์ผูกพันของ A ด้วย adj(A)

จากบทนิยามนักเรียนจะเห็นว่า เมทริกซ์ผูกพันเป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ A

ตัวอย่างที่ 29

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ให้หา det(A), adj(A), Aadj(A) และ adj(A)A

วิธีทำ จาก $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(A) = (0 - 2 - 0) - (8 + 0 + 3)$

$= -13$

หา $C_{ij}(A)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$

จาก $\mathrm{adj}(A) = [C_{ij}(A)]^t$

จะได้
$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} M_{11}(A) & -M_{12}(A) & M_{13}(A) \\ -M_{21}(A) & M_{22}(A) & -M_{23}(A) \\ M_{31}(A) & -M_{32}(A) & M_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

เนื่องจาก $M_{11}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $M_{12}(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$,

$M_{13}(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, $M_{21}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$,

$M_{22}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$, $M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

$M_{31}(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $M_{32}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$

และ $M_{33}(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$

จะได้ว่า
$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Aadj(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= (-13)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \cdot I_3$$

$$= I_3 \det(A)$$

$$adj(A)A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 5 & -4 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= (-13)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \cdot I_3$$

$$= I_3 \det(A)$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ให้หา det(A), adj(A), Aadj(A) และ adj(A)A

จากตัวอย่างที่ 29 จะเห็นว่า Aadj(A) = adj(A)A = I_3det(A) ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2 กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$Aadj(A) = adj(A)A = I_n \det(A)$$

2) การหาเมทริกซ์ผกผันของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ โดยใช้เมทริกซ์ผูกพัน

ทฤษฎีบท 3 กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า
A มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
ในกรณี $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$

ตัวอย่างที่ 30

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & -10 & -5 \end{bmatrix}$ ให้หา A^{-1} (ถ้ามี)

วิธีทำ จาก $\det(A) = (0 + 42 + 60) - (0 - 80 + 15) = 167$

โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$

$$= \frac{1}{167}\begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{167}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -10 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{167}\begin{bmatrix} 20 & 9 & 10 \\ -45 & -62 & 61 \\ 6 & -14 & 3 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{167}\begin{bmatrix} 20 & -45 & 6 \\ 9 & -62 & -14 \\ 10 & 61 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{167} & \frac{-45}{167} & \frac{6}{167} \\ \frac{9}{167} & -\frac{62}{167} & -\frac{14}{167} \\ \frac{10}{167} & \frac{61}{167} & \frac{3}{167} \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ให้หา A^{-1} (ถ้ามี)

แบบฝึกทักษะ 2.4

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. ให้ตรวจสอบว่า เมทริกซ์ในข้อใดเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และหาเมทริกซ์ผกผัน

1) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ และ $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ ซึ่ง $\det(A) = 5$ และ $\det(B) = -2$

ให้หาดีเทอร์มิแนนต์ในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

1) $\det(A^t)$ 2) $\det(B^t)$ 3) $\det(A^{-1})$ 4) $\det(AB)$

5) $\det(2A)$ 6) $\det(2B)$ 7) $\det((B^2)^t)$ 8) $\det((A^2)^t)$

ระดับกลาง

4. ให้หาค่าของ x จากดีเทอร์มิแนนต์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{vmatrix} 2x & x-3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$

2) $\begin{vmatrix} x-3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2x & -3 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

5. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -8 & b & -1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0.5 \end{bmatrix}$

ถ้า $C_{12}(A) = 5$ และ $C_{23}(A) = -40$ แล้ว a และ b มีค่าเป็นเท่าใด

6. กำหนด $A = \begin{bmatrix} x & y+2 & -1 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x, y \in R$ โดยที่ $M_{11}(A) = 9$ และ $M_{23}(A) = 2$

ให้หา $\det(A)$

7. กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, $B = [b_{ij}]_{3\times3}$ และ $C = [c_{ij}]_{3\times3}$ โดยที่ $\det(A) = -1$, $\det(B) = 2$

และ $\det(C) = 1$ ให้หาดีเทอร์มิแนนต์ในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

1) $\det(ABC)$ 2) $\det(A^tB^tC^t)$

3) $\det(A^2B^2)$ 4) $\det(A^3B^3C^3)$

5) $\det(2ABC^{-1})$ 6) $\det(2A^2B^{-1}C)$

ระดับท้าทาย

8. กำหนด $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -x & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ $x, y \in R$ ที่ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$

ถ้า $B^{-1}(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} -\frac{13}{9} & -\frac{14}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(3B^2A^t)$ เป็นเท่าใด

2.5 การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

นักเรียนทราบมาแล้วว่า การแก้ระบบสมการเชิงเส้นมีหลายวิธี เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยการแทนค่าหรือการกำจัดตัวแปร แต่ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ ซึ่งมีหลายวิธี ดังนี้

1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น นักเรียนสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร เขียนแทนด้วย $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปร เขียนแทนด้วย $X = [x_{i1}]_{n\times 1}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

และ B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัว เขียนแทนด้วย $B = [b_{i1}]_{n\times 1}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

จาก $AX = B$ จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ถ้า det(A) ≠ 0 จะได้ $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

ดังนั้น สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นได้จาก $X = A^{-1}B$ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 31

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

$$2x + y = 7$$

$$3x + 2y = 11$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}}$$

จะได้ $\det(A) = 2(2) - 3(1) = 1$

นั่นคือ $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 - 11 \\ -21 + 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (3, 1)

แนะแนวคิด

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

$$-x - 2y = 1$$

$$4x + 3y = -9$$

ตัวอย่างที่ 32

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

$$2x + y - z = 1$$

$$x - 2y + z = 2$$

$$3x + 3y = z + 3$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ ดังนี้

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

จะได้ $\det(A) = (4 + 3 - 3) - (6 + 6 - 1) = 4 - 11 = -7$

นั่นคือ $A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$

$$= \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -1 - 4 - 3 \\ 4 + 2 - 9 \\ 9 - 6 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{12}{7} \end{bmatrix}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ $\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right)$

แนะแนวคิด

กำหนด $A = [a_{ij}]_{3\times3}$

จะได้ว่า

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

$x + 2y - z = 1$

$3x - 4y - z = 5$

$-x + 3y + 4z = -3$

2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

ทฤษฎีบท 4 **กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)**

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดย AX = B เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้น และ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ($\det(A) \neq 0$)

ให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$, ..., $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$

เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., n\}$

ตัวอย่างที่ 33

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$x = 3y + 4$$

$$x = 4y - 1$$

วิธีทำ จัดรูประบบสมการเชิงเส้นใหม่เพื่อที่จะแก้ระบบสมการโดยใช้กฎของคราเมอร์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ x - 4y &= -1 \end{aligned}$$

เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น AX = B เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

จาก $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = 1(-4) - 1(-3) = -1 \neq 0$

โดยกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{-16 - 3}{-1} = 19$

$$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \dfrac{-1 - 4}{-1} = 5$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (19, 5)

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$y = -2x - 2$

$y = -3x + 1$

ตัวอย่างที่ 34

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -9 \\ 5y + 7z &= 26 \\ 9x - 4z &= -30 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -9 \\ 26 \\ -30 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det(A) = (-40 - 315 - 0) - (0 + 0 + 0) = -355 \neq 0$

โดยกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -5 & 0 \\ 26 & 5 & 7 \\ -30 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$= \frac{(180 + 1{,}050 + 0) - (0 + 0 + 520)}{-355}$$

$$= -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -9 & 0 \\ 0 & 26 & 7 \\ 9 & -30 & -4 \end{vmatrix}}{-355}$$

$$= \frac{(-208 - 567 + 0) - (0 - 420 + 0)}{-355}$$

$$= 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 26 \\ 9 & 0 & -30 \end{vmatrix}}{-355}$$

$$= \frac{(-300 - 1{,}170 + 0) - (-405 + 0 + 0)}{-355}$$

$$= 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (-2, 1, 3)

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$2x + y = 5$

$-y + z = -4$

$x - 2z = 8$

3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว

1) เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

บทนิยาม กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) ของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

จากบทนิยาม จะเห็นว่า เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร เป็นเมทริกซ์ที่มี m แถว และ n + 1 หลัก โดยสมาชิกในแต่ละแถวของหลักที่ 1 ถึงหลักที่ n คือ สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นในแต่ละแถว และสมาชิกในแต่ละแถวของหลักที่ n + 1 คือ ค่าคงตัวของระบบสมการเชิงเส้นในแต่ละแถว ซึ่งสามารถเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวในรูป $[A \mid B]$

พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

เขียนเป็นเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right]$ หรือ $[A|B]$

2) การดำเนินการตามแถว (Row Operation)

การดำเนินการตามแถวเป็นการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์แต่งเติม พัฒนารูปแบบมาจากการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยการกำจัดตัวแปร ซึ่งต้องใช้สมบัติของจำนวนจริง เช่น สมบัติการสลับที่ สมบัติการเท่ากันของการบวกและการคูณ สมบัติการมีตัวผกผันของการคูณ

บทนิยาม n $\times$ n เมทริกซ์ เรียกการดำเนินการต่อไปนี้ว่าเป็นการดำเนินการตามแถว กับเมทริกซ์ A

(1) สลับแถวที่ i และ k ของ A เขียนแทนด้วย $R_i \rightarrow R_k$ หรือ R_{ik}

(2) คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ที่ $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_i

(3) เปลี่ยนสมาชิกในแถวที่ i ของ A โดยนำค่าคงตัว c คูณสมาชิกในแถวที่ k $(k \neq i)$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ i เขียนแทนด้วย $R_i + cR_k$

การดำเนินการตามแถว นิยมใช้เพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่สมมูลแบบแถวและมีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว ซึ่งมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากเมทริกซ์ A โดยการดำเนินการตามแถวแล้วจะกล่าวว่า B สมมูลแบบแถว (Row Equivalent) กับ A เขียนแทน B สมมูลแบบแถวกับ A ด้วย $A \sim B$

บทนิยาม ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะกล่าวว่า A มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว (Row-Echelon Form) เมื่อ A มีสมบัติต่อไปนี้

(1) ถ้า A มีแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เท่ากับ 0 แล้วสมาชิกตัวแรก (จากซ้ายไปขวา) ที่ไม่ใช่ 0 ต้องเป็น 1 เรียก 1 ตัวนี้ว่าเป็น 1 ตัวนำ (Leading 1) ในแถว

(2) ถ้า A มีแถวที่มีสมาชิกทุกตัวในแถวเท่ากับ 0 แล้วแถวเหล่านี้ต้องอยู่ด้านล่างของแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เท่ากับ 0

(3) ถ้า a_{ij} เป็น 1 ตัวนำในแถวที่ i และ $a_{(i+1)k}$ เป็น 1 ตัวนำในแถวที่ i + 1 แล้ว $j < k$

ตัวอย่างของเมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว ได้แก่

$$\underline{0},\ I_n,\ \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถวทำได้โดยเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ แล้วใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว โดยเมทริกซ์ที่ได้จะเป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่มีคำตอบเป็นชุดเดียวกันกับคำตอบของระบบสมการที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 35

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= 11 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนด เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

จากเมทริกซ์แต่งเติม ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_3$$

จะได้ $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ เป็นเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ

$$x + 4z = 21$$

$$y - 3z = -14$$

$$z = 2$$

ดังนั้น $z = 2$, $y = 3(2) - 14 = -8$ และ $x = -4(2) + 21 = 13$

เนื่องจาก คำตอบของระบบสมการนี้เป็นคำตอบชุดเดียวกันกับคำตอบของระบบสมการที่กำหนด

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (13, -8, 2)

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$3x - 3y - 7z = 4$

$-x + 2y - z = -21$

$x + 5y + 2z = 5$

จากตัวอย่างที่ 35 ถ้านักเรียนใช้การดำเนินการตามแถวทำให้เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเป็นเมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวที่มีสมบัติว่า ถ้า 1 ตัวนำอยู่ในหลักใด แล้วสมาชิกตัวอื่นในหลักนั้นต้องเป็นศูนย์ จากนั้นจึงหาระบบสมการที่มีเมทริกซ์นั้นเป็นเมทริกซ์แต่งเติม จะทำให้หาคำตอบของระบบสมการได้ง่ายและเร็วขึ้น ซึ่งจะได้ศึกษาเพิ่มเติมจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 36

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$
\begin{aligned}
w + 3x - 2y + z &= -4 \\
3w + 4x - 4y + 8z &= -9 \\
4w + 7x - 4y + 17z &= 3 \\
w + 7x - 5y - 3z &= -12
\end{aligned}
$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นข้างต้น เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
3 & 4 & -4 & 8 & -9 \\
4 & 7 & -4 & 17 & 3 \\
1 & 7 & -5 & -3 & -12
\end{array}\right]
$$

จากเมทริกซ์แต่งเติม ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวได้ ดังนี้

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
3 & 4 & -4 & 8 & -9 \\
4 & 7 & -4 & 17 & 3 \\
1 & 7 & -5 & -3 & -12
\end{array}\right]
\sim
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
0 & -5 & 2 & 5 & 3 \\
0 & -5 & 4 & 13 & 19 \\
0 & 4 & -3 & -4 & -8
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
R_2 - 3R_1 \\
R_3 - 4R_1 \\
R_4 - R_1
\end{array}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
0 & -5 & 2 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 2 & 8 & 16 \\
0 & 4 & -3 & -4 & -8
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\\
R_3 - R_2 \\
\\
\end{array}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & -2 & 1 & -4 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 8 \\
0 & 4 & -3 & -4 & -8
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
-R_2 - R_4 \\
\frac{1}{2}R_3 \\
\\
\end{array}
$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-5&4&-19\\0&1&1&-1&5\\0&0&1&4&8\\0&0&-7&0&-28\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-3R_2\\ \\ \\ R_4-4R_2\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&24&21\\0&1&0&-5&-3\\0&0&1&4&8\\0&0&1&0&4\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1+5R_3\\ R_2-R_3\\ \\ -\frac{1}{7}R_4\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&24&21\\0&1&0&-5&-3\\0&0&1&4&8\\0&0&0&-4&-4\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \\ R_4-R_3\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&24&21\\0&1&0&-5&-3\\0&0&1&4&8\\0&0&0&1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ \\ -\frac{1}{4}R_1\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-3\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1-24R_4\\ R_2+5R_4\\ R_3-4R_4\\ \\ \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ (-3, 2, 4, 1)

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned} w + x + 3y + 8z &= 40 \\ -2w - x - y + z &= -4 \\ 2w + x + 2y + 2z &= 17 \\ -4w - x + 5y + 9z &= 26 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 37

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$x - 2y - 3z = 4$$
$$2x - 3y + z = 5$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนด เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

จากเมทริกซ์แต่งเติม ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right] R_2 - 2R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right] R_1 + 2R_2$$

นำเมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวที่ได้เขียนเป็นระบบสมการได้ ดังนี้

$$x + 11z = -2$$
$$y + 7z = -3$$

จะเห็นว่า สมการทั้งสองมี x และ y สัมพันธ์กับ z จึงจัด x และ y ในรูปของ z ได้ ดังนี้

$$x = -11z - 2$$
$$y = -7z - 3$$

จะได้ว่า คำตอบของระบบสมการมีจำนวนอนันต์

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการที่กำหนด คือ $(-11z - 2, -7z - 3, z)$ เมื่อ $z \in R$

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$4x - y + z = 7$$
$$-x + y + 2z = 3$$

ตัวอย่างที่ 38

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 4y - 8z &= 5 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนด เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & -8 & 5 \end{array}\right]$$

จากเมทริกซ์แต่งเติม ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวได้ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & -8 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

นำเมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวที่ได้เขียนเป็นระบบสมการได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ 0x + y + 5z &= 8 \\ 0x - 0y + 0z &= -1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง x, y, z ที่สอดคล้องกับสมการ $0x + 0y + 0z = -1$ ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดไม่มีคำตอบ

ลองทำดู

แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned} -2x + y - 3z &= 3 \\ 3x + 6y - 3z &= -1 \\ x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 38 จะเห็นว่า ถ้าได้เมทริกซ์ที่มีแถวใดแถวหนึ่งในรูป $[0 \ 0 \ 0 \ \dots \ \vdots \ C]$ จะได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคำตอบ

เมทริกซ์แต่งเติมและการดำเนินการตามแถว นอกจากจะช่วยในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นแล้ว ยังสามารถใช้หาเมทริกซ์ผกผันได้ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาจากรายละเอียดต่อไปนี้

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $\det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0$ ดังนั้น A^{-1} หาค่าได้

ให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w + 2y & x + 2z \\ 3w + 4y & 3x + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากสมการเมทริกซ์ข้างต้น เขียนให้อยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ ดังนี้

$$w + 2y = 1 \qquad .....(1)$$

$$x + 2z = 0 \qquad .....(2)$$

$$3w + 4y = 0 \qquad .....(3)$$

$$3x + 4z = 1 \qquad .....(4)$$

นักเรียนสามารถหาค่า w และ y ซึ่งเป็นสมาชิกของ A^{-1} ได้จากการเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่ประกอบไปด้วยสมการ (1) และ (3) จากนั้นใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

จากระบบสมการ (1) และ (3) เขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถวได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

จะได้ว่า $(w, y) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$

ในทำนองเดียวกัน นักเรียนสามารถหาค่า x และ z ซึ่งเป็นสมาชิกของ A^{-1} ได้จากการเขียนเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการที่ประกอบไปด้วยสมการ (2) และ (4) จากนั้นใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบขั้นบันไดแบบแถว

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

จะได้ว่า $(x, z) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ โดยที่ $\det(A) \neq 0$
A^{-1} หาได้จากเขียนเมทริกซ์แต่งเติม $[A \mid I_n]$ แล้ว
ใช้การดำเนินการตามแถวจนได้เมทริกซ์แต่งเติม $[I_n \mid B]$
จะได้ว่า $B = A^{-1}$

คณิตน่ารู้

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ว่า

$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$

ตัวอย่างที่ 39

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

ให้หาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยใช้การดำเนินการตามแถว (ถ้ามี)

วิธีทำ เนื่องจาก $\det(A) = -20 + 15 = -5 \neq 0$ จะได้ว่า A^{-1} หาค่าได้

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc:cc} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right]$$

ดังนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

ลองทำดู

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

ให้หาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยใช้การดำเนินการตามแถว (ถ้ามี)

แบบฝึกทักษะ 2.5

ระดับพื้นฐาน

1. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

1) $5x + 3y = 24$
$3y - 5x = 5$

2) $7x + y = 10$
$-5x - 5y = -20$

2. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

1) $x + 2y + z = 0$
$3x + y - 2z = 5$
$2x - 3y - 3z = 9$

2) $2x + 4y + z = 1$
$x + 2y = -2$
$-x - 3y + 2z = 3$

3) $x + 2y - 2z = 1$
$2x + 2y - z = 4$
$3x + 4y = 6$

4) $y + z = x$
$3x = 2y$
$2x + 3z = 2 + y$

3. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

1) $y = 3x + 5$
$4y + 12x = 20$

2) $x - 2y = 10$
$-2x + 4y = -20$

3) $-3x + y - z = 4$
$6x - 2y + 2z = 1$
$x + 2y + 3z = 7$

4) $x + y + z = 0$
$2y - z + t - 4 = 0$
$y - 2z - 2t - 3 = 0$
$2y - z - 2t + 2 = 0$

4. ให้หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว (ถ้ามี)

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

ระดับกลาง

5. แก้ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้การดำเนินการตามแถว

1) $0.5x - y + 3z = 12.1$
$-3x + \frac{1}{5}y + z = 5$
$x + 0.2y + 2z = 9.6$

2) $2x + y - z - 3t = 10$
$x - 3y - z - 2t = -2$
$3x - 2y + 3z + 4t = 4$
$2x + y + z + 3t = 6$

3) $\begin{aligned} 2x + y - 2z \quad &= -1 \\ x + 3z - t \quad &= 2 \\ -2x + y + 2z + t &= 0 \\ x - y + 3z + t \quad &= 1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x - y - z + 2t &= -4 \\ y - 2z + 3t \quad &= -13 \\ x - 2y + 3z - t &= 14 \\ y + 2z + t \quad &= 3 \end{aligned}$

6. **ให้หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้**

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

แนะแนวคิด

ใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์เพื่อตรวจสอบว่าเมทริกซ์ในข้อ 1) และ 2) เป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือไม่

ตรวจสอบตนเอง

หลังจากเรียนจบหน่วยแล้ว ให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

	ดี	พอใช้	ควรปรับปรุง
1. เข้าใจความหมายของเมทริกซ์			
2. สามารถหาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ได้			
3. สามารถหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้			
4. สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสามได้			
5. สามารถหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2 ได้			
6. สามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การกำจัดตัวแปร เมทริกซ์ผกผัน กฎของคราเมอร์ และการดำเนินการตามแถวได้			

คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสตรงโดยใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์

กฎของเคอร์ชอฟฟ์เป็นกฎที่ช่วยในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสตรง ซึ่งมีหลักการ ดังนี้

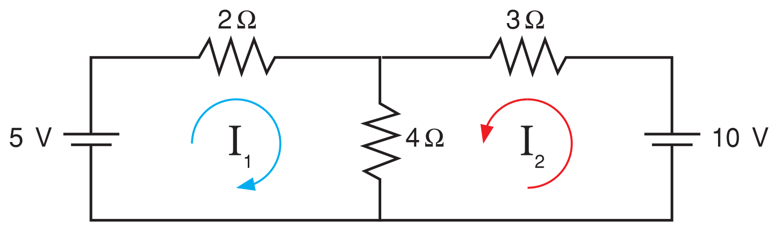
1) กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ กล่าวว่า “กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าจุดใดจุดหนึ่งในวงจรไฟฟ้าจะเท่ากับกระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุดนั้น” ซึ่งสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$$\sum I_{\text{กระแสไหลเข้า}} - \sum I_{\text{กระแสไหลออก}} = \sum I = 0$$

2) กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ กล่าวว่า “ผลบวกของแรงดันไฟฟ้าที่จ่ายให้ในวงจรไฟฟ้าปิดจะมีค่าเท่ากับผลบวกของแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมความต้านทานในวงใจไฟฟ้าปิดนั้น” ซึ่งสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$$\sum E = 0$$

สถานการณ์ วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งวงจรหนึ่งประกอบด้วยแรงดันไฟฟ้าขนาด 5 โวลต์ และ 10 โวลต์ ตัวต้านทานขนาด 2 โอห์ม 3 โอห์ม และ 4 โอห์ม และมีทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้าในวงจร ดังนี้



โดยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ จะเขียนสมการได้ ดังนี้

Loop 1

$$2I_1 + 4I_1 + 4I_2 = 5$$

$$6I_1 + 4I_2 = 5 \quad .....(1)$$

Loop 2

$$3I_2 + 4I_2 + 4I_1 = 10$$

$$4I_1 + 7I_2 = 5 \quad .....(2)$$

ให้นักเรียนแก้ระบบสมการข้างต้นโดยการกำจัดตัวแปรและใช้กฎของคราเมอร์ เพื่อหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัว

สรุปแนวคิดหลัก

เมทริกซ์

ระบบสมการเชิงเส้น

- ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots, a_nx_n$ ว่า สมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นตัวแปร
- ระบบสมการเชิงเส้นประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป
- คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นมี 3 ลักษณะ คือ ระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบเดียว ระบบสมการเชิงเส้นที่มีหลายคำตอบ หรือเรียกว่า มีคำตอบเป็นอนันต์ และระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีคำตอบ

เมทริกซ์

- เมทริกซ์ คือ ชุดของจำนวนที่เขียนเรียงกัน m แถว (Row) n หลัก (Column) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกภายในเครื่องหมายวงเล็บ ดังนี้

สมาชิกของเมทริกซ์

หลัก

แถว

$$\begin{array}{ccl} \boxed{A} = & \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1 } (R_1) \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2 } (R_2) \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ m } (R_m) \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ n} \\ (C_1) & (C_2) & (C_n) \end{array} & \end{array}$$

A เป็นเมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก มีมิติเป็น $m \times n$ เรียกเมทริกซ์ A ว่า $m \times n$ เมทริกซ์ และเขียนแทน A ด้วย $[a_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

การเท่ากันของเมทริกซ์

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

  A และ B เป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

  1) A และ B มีมิติเดียวกัน
  2) สมาชิกของ A และ B ในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

- ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ แล้วเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A คือ $[a_{ij}]_{n\times m}$ เขียนแทนด้วย A^t อ่านว่า “เอทรานสโพส” เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

การบวกเมทริกซ์

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$
  A และ B จะหาผลบวกได้ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน
  และผลบวกของ A และ B คือ $[c_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$ เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $cA = [b_{ij}]_{m \times n}$
  เมื่อ $b_{ij} = ca_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, ..., n\}$ เช่น

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{22} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

- กำหนด A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $p \times q$
  ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ (จำนวนหลักของ A เท่ากับ จำนวนแถวของ B) และเมทริกซ์ที่เป็นผลคูณจะมีมิติเป็น $m \times q$ เช่น

$$\underset{\text{มีมิติเป็น } \boxed{2} \times \boxed{2}}{\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}} \underset{\text{มีมิติเป็น } \boxed{2} \times \boxed{1}}{\overset{B}{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}}} = \underset{\text{มีมิติเป็น } \boxed{2} \times \boxed{1}}{\overset{C}{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{bmatrix}}}$$

จำนวนหลัก = จำนวนแถว

สมบัติของเมทริกซ์เกี่ยวกับการบวก การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงตัว การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $D = [d_{ij}]_{n \times p}$, $E = [e_{ij}]_{p \times q}$
  และ c, d เป็นค่าคงตัว

1) $A + B$ เป็น $m \times n$ เมทริกซ์
2) $A + B = B + A$
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$
4) $A + \underline{0}_{m \times n} = \underline{0}_{m \times n} + A = A$
5) $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}_{m \times n}$
6) $c(A + B) = cA + cB$
7) $(c + d)A = cA + dA$
8) $(cd)A = c(dA)$
9) $1A = A$
10) $0A = \underline{0}_{m \times n}$
11) $A(DE) = (AD)E$
12) $(cA)D = A(cD) = c(AD)$
13) $AI_n = A$, $I_mA = A$
14) $A\underline{0}_{n \times p} = \underline{0}_{m \times p}$, $\underline{0}_{r \times m}A = \underline{0}_{r \times n}$
15) $(AD)^t = D^tA^t$
16) $(A + B)D = AD + BD$
17) $A(D + E) = AD + AE$
18) $(A + B)^t = A^t + B^t$ และ $(A - B)^t = A^t - B^t$
19) $(A^t)^t = A$
20) $(cA)^t = c(A^t)$

เมทริกซ์ผกผัน

เมทริกซ์ผกผันของ n × n เมทริกซ์

- กำหนด A และ B เป็น n × n เมทริกซ์
  B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A ก็ต่อเมื่อ
  $AB = BA = I_n$
  เขียนแทน B ด้วย A^{-1}

เมทริกซ์ผกผันของ 2 × 2 เมทริกซ์

- กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

  จะได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มิแนนต์

ไมเนอร์

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$
  $M_{ij}(A)$ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก

ตัวประกอบร่วมเกี่ยว

- กำหนด $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$
  จะได้ว่า $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j}M_{ij}(A)$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ 2 × 2 เมทริกซ์

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน เท่ากับ cb

ผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง เท่ากับ ad

ให้ p แทนผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง
q แทนผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

จะได้ว่า det(A) = p - q

ดีเทอร์มิแนนต์ของ 3 × 3 เมทริกซ์

ผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

gec + hfa + idb

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$

aei + bfg + cdh

ผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง

ให้ p แทนผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง
q แทนผลบวกของผลคูณในแนวทแยงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

จะได้ว่า det(A) = p - q

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ n × n เมื่อ n ≥ 2

- กำหนด $[a_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ
  $a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \ldots + a_{in}C_{in}(A)$ เมื่อ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
  หรือ $a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + \ldots + a_{nj}C_{nj}(A)$ เมื่อ $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

เมทริกซ์เอกฐาน

กำหนด A เป็น n × n เมทริกซ์

- A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน เมื่อ det(A) = 0
- A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน เมื่อ det(A) ≠ 0

เมทริกซ์ผกผัน

กำหนด A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$

- $A\,adj(A) = adj(A)A = I_n det(A)$
- $adj(A) = [C_{ij}(A)]^t$

เมทริกซ์ผกผันของ $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$

- $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ เมื่อ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ และ $det(A) \neq 0$

การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

ใช้เมทริกซ์ผกผัน

- เขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแปร X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัว คำตอบของระบบสมการหาได้จาก $X = A^{-1}B$

ใช้กฎของคราเมอร์

- คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร โดย $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้น คือ $x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}$, $x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$, ..., $x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$
  เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B
  สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

ใช้การดำเนินการตามแถว

- ถ้าเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่ง คือ $[A|B]$ แล้วคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหาได้โดยใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อให้ได้เมทริกซ์แต่งเติม $[I|C]$ จะได้ C เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นคำตอบของระบบสมการ

สมบัติและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์

- ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ จะได้ว่า
  1) ถ้าสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A เป็นศูนย์ทุกตัว แล้ว $det(A) = 0$
  2) ถ้า B ได้จากการสลับแถว 2 แถว หรือสลับหลัก 2 หลักของ A แล้ว $det(B) = -det(A)$
  3) ถ้า A มีสมาชิกของแถวสองแถวหรือหลักสองหลักเหมือนกัน แล้ว $det(A) = 0$
  4) $det(A^t) = det(A)$
  5) ถ้านำค่าคงตัว c คูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้ เท่ากับ $c \cdot det(A)$
  6) $det(cA) = c^n \cdot det(A)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
  7) $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
  8) ถ้า B ได้จาก A โดยเปลี่ยนเฉพาะสมาชิกในแถวที่ j ของ A โดยใช้ค่าคงตัว c คูณกับสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i ของ A เมื่อ $i \neq j$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ j ของ A นั่นคือ $b_{jk} = ca_{ik} + a_{jk}$ สำหรับทุก $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ แล้ว $det(B) = det(A)$ สมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนจากแถวเป็นหลัก

แบบฝึกทักษะ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 2

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. กำหนด $\begin{bmatrix} x + y & 5 \\ -5 & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x - 3 \\ 2y + 7 & 14 \end{bmatrix}$ ค่าของ $2x - 3y$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ค่าของ $2A - B^t$ เท่ากับเท่าใด

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ให้หา AB และ BA

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ให้หา A^{-1}

5. กำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & 4 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

6. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ค่าของ $C_{23}(A) + M_{32}(A)$ เท่ากับเท่าใด

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) $\det(A + B)$
2) $\det(A + B)^t$
3) $\det(AB)$
4) $\det(A + B)^{-1}$

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(A)$ เท่ากับเท่าใด

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(\operatorname{adj}(A))$ เท่ากับเท่าใด

10. ให้แก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์

$x - 3z = -2$

$3x + y - 2z = 5$

$2x + 2y + z = 4$

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

เวกเตอร์ในสามมิติ

“ป้ายบอกทางเป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แสดงถึงทิศทาง
และระยะทางจากป้ายบอกทางไปยังจุดหมาย
ซึ่งแสดงถึงแนวคิดเกี่ยวกับเวกเตอร์”

**อยากทราบว่าวัดโพธิ์
อยู่ห่างจากป้ายบอกทาง
เป็นระยะทางเท่าใด**

??

ผลการเรียนรู้

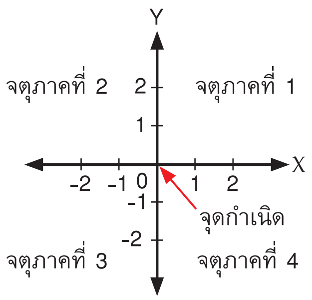
- หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
- นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- เวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์
- การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ควรรู้ก่อนเรียน

กราฟของคู่อันดับบนระบบพิกัดฉาก



1) ระบบพิกัดฉากสองมิติ เป็นระบบที่ใช้แสดงตำแหน่งของจุดต่าง ๆ บนระนาบสองมิติที่เกิดจากเส้นจำนวนในแนวนอนและแนวตั้งตัดกันเป็นมุมฉากที่ตำแหน่งของจุดที่แทนด้วยศูนย์ (0) เรียกจุดที่เส้นจำนวนทั้งสองตัดกันว่า **จุดกำเนิด (origin)** แทนด้วย O

2) ตำแหน่งของจุดใด ๆ บนระบบพิกัดฉาก สามารถหาได้จากระยะห่างของจุดนั้นกับแกนแต่ละแกน

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2 × 2

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow cb \\ \searrow ad \end{matrix}$

$= ad - cb$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 3 × 3

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det A = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + a_{i3}C_{i3}(A)$ เมื่อ $i = \{1, 2, 3\}$

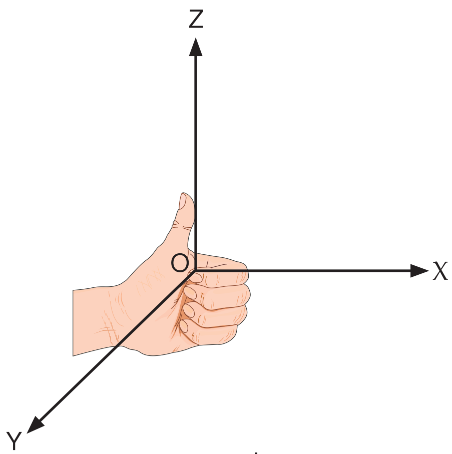
หรือ $\det A = a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + a_{3j}C_{3j}(A)$ เมื่อ $j = \{1, 2, 3\}$

แบบทดสอบพื้นฐานก่อนเรียน

3.1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ (Three-Dimensional Coordinate Systems)

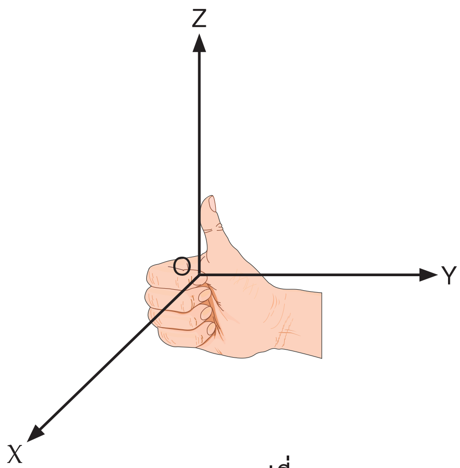
ระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นระบบที่มีการกำหนดให้มีเส้นตรงสามเส้น โดยแต่ละเส้นตั้งฉากซึ่งกันและกันและตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง เรียกจุดนี้ว่า **จุดกำเนิด (origin)** เขียนแทนด้วยจุด O และเรียกเส้นตรงทั้งสามเส้นว่า **แกน X แกน Y และแกน Z**

การเขียนแกนในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะเขียนโดยยึดมือซ้ายและมือขวา เรียกว่า **กฎมือซ้าย** (left-handed rule) และ**กฎมือขวา** (right-handed rule) ดังรูปที่ 1 และ 2



รูปที่ 1

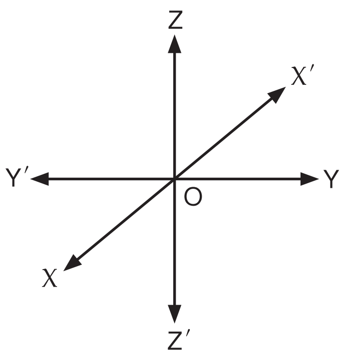
กฎมือซ้าย



รูปที่ 2

กฎมือขวา

จากกฎมือซ้ายและกฎมือขวา จะเห็นว่า เมื่องอนิ้วทั้งสี่เข้าหาข้อแขนและงอนิ้วโป้งให้ตั้งฉากกับสันนิ้วทั้งสี่ที่งอและตั้งฉากกับข้อแขน จะทำให้ได้ระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยกำหนดนิ้วโป้งแทนด้วยแกน Z ข้อแขนแทนด้วยแกน Y และสันนิ้วทั้งสี่งอแทนด้วยแกน X



รูปที่ 3

จากรูปที่ 3 เรียก $\overleftrightarrow{OX}$ ว่า **แกน X ทางบวก** (positive x-axis)

$\overleftrightarrow{OX'}$ ว่า **แกน X ทางลบ** (negative x-axis)

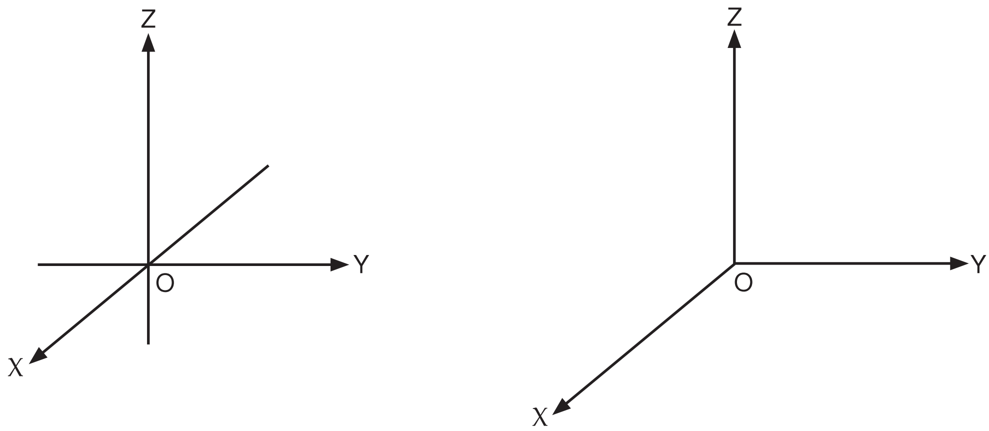
$\overleftrightarrow{OY}$ ว่า **แกน Y ทางบวก** (positive y-axis)

$\overleftrightarrow{OY'}$ ว่า **แกน Y ทางลบ** (negative y-axis)

$\overleftrightarrow{OZ}$ ว่า **แกน Z ทางบวก** (positive z-axis)

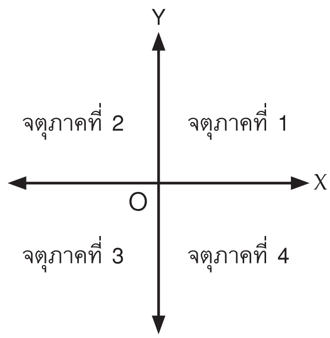
$\overleftrightarrow{OZ'}$ ว่า **แกน Z ทางลบ** (negative z-axis)

การเขียนระบบพิกัดฉากสามมิติโดยทั่วไปนิยมเขียนแกน X แกน Y และแกน Z เฉพาะทางบวก ซึ่งมีลูกศรกำกับ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

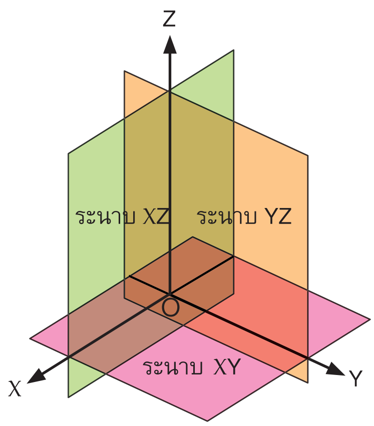
ในระบบพิกัดฉากสองมิติ แกน X และแกน Y จะแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า **จตุภาค (quadrant)** ซึ่งการบอกลำดับจตุภาคที่ 1 จตุภาคที่ 2 จตุภาคที่ 3 และจตุภาคที่ 4 ใช้ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X และแกน Y ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

สำหรับระบบพิกัดฉากสามมิติ แกน X แกน Y และแกน Z จะแบ่งระนาบออกเป็น 8 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า **อัฐภาค (octant)** ซึ่งการบอกลำดับอัฐภาคใช้ในทำนองเดียวกับระบบพิกัดฉากสองมิติ

แต่มีการกำหนดระนาบสามระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง** เพื่อให้การกำหนดลำดับอัฐภาคได้ชัดเจนขึ้น ดังรูปที่ 6



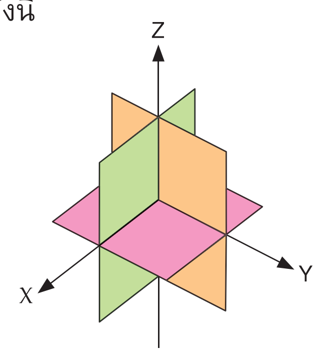
รูปที่ 6

จากรูปที่ 6 กำหนดระนาบสามระนาบได้ ดังนี้

1) ระนาบอ้างอิง XY หรือระนาบ XY เป็นระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Y
2) ระนาบอ้างอิง XZ หรือระนาบ XZ เป็นระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z
3) ระนาบอ้างอิง YZ หรือระนาบ YZ เป็นระนาบที่กำหนดด้วยแกน Y และแกน Z

การกำหนดลำดับอัฐภาค จะพิจารณาโดยใช้ระนาบ XY ดังนี้

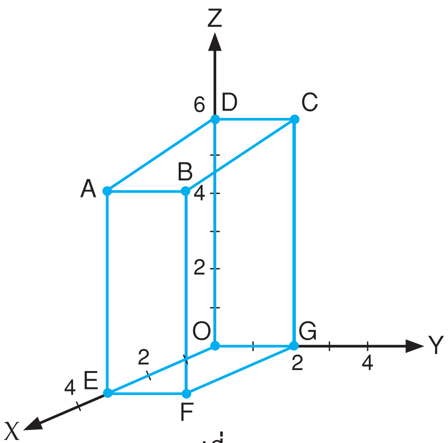
อัฐภาคที่ 1 ถึงอัฐภาคที่ 4 เป็นบริเวณที่อยู่เหนือระนาบ XY หรือแกน Z ทางบวก โดยการเรียกลำดับของอัฐภาคจะนับทวนเข็มนาฬิกาไปตามลำดับเช่นเดียวกับระบบพิกัดฉากสองมิติ และอัฐภาคที่ 5 ถึงอัฐภาคที่ 8 เป็นบริเวณที่อยู่ใต้ระนาบ XY หรือแกน Z ทางลบ ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

1. การกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จุดในแต่ละอัฐภาคจะเขียนแทนด้วยจำนวนจริงสามจำนวน ซึ่งเป็นจำนวนบวก หรือจำนวนลบ หรือจำนวนศูนย์ เขียนเรียงลำดับกันตามแนวแกน X แกน Y และแกน Z เรียกว่า **สามสิ่งอันดับ (ordered triple)** ตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้นักเรียนเข้าใจการบอกพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ให้นักเรียนพิจารณาทรงเรขาคณิต ABCDEFGO ต่อไปนี้



รูปที่ 8

จากรูปที่ 8 นักเรียนจะเห็นว่า มีจุดยอด 3 จุด อยู่บนระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ได้แก่ **จุด F จุด A** และ**จุด C** ตามลำดับ

มีจุดยอด 3 จุด อยู่บนแกน X แกน Y และแกน Z ได้แก่ **จุด E จุด G** และ**จุด D** ตามลำดับ

มีจุดยอด 1 จุด ซึ่งไม่อยู่บนระนาบทั้งสามและไม่อยู่บนแกนทั้งสาม ได้แก่ **จุด B**

จุด F อยู่บนระนาบ XY ห่างจากระนาบ YZ ตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย และห่างจากระนาบ XZ ตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย ดังนั้น จุด F มีพิกัด **(3, 2, 0)** เขียนแทนด้วย **F(3, 2, 0)**

จุด A อยู่บนระนาบ XZ ห่างจากระนาบ YZ ตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย และห่างจากระนาบ XY ตามแนวแกน Z เป็นระยะ 6 หน่วย ดังนั้น จุด A มีพิกัด **(3, 0, 6)** เขียนแทนด้วย **A(3, 0, 6)**

จุด C อยู่บนระนาบ YZ ห่างจากระนาบ XZ ตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย และห่างจากระนาบ XY ตามแนวแกน Z เป็นระยะ 6 หน่วย ดังนั้น จุด C มีพิกัด **(0, 2, 6)** เขียนแทนด้วย **C(0, 2, 6)**

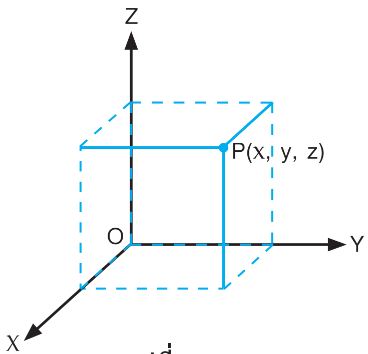
จุด E อยู่บนแกน X ห่างจากระนาบ YZ เป็นระยะ 3 หน่วย ดังนั้น จุด E มีพิกัด **(3, 0, 0)** เขียนแทนด้วย **E(3, 0, 0)**

จุด G อยู่บนแกน Y ห่างจากระนาบ XZ เป็นระยะ 2 หน่วย ดังนั้น จุด G มีพิกัด **(0, 2, 0)** เขียนแทนด้วย **G(0, 2, 0)**

จุด D อยู่บนแกน Z ห่างจากระนาบ XY เป็นระยะ 6 หน่วย ดังนั้น จุด D มีพิกัด **(0, 0, 6)** เขียนแทนด้วย **D(0, 0, 6)**

จุด B ไม่อยู่บนแกนทั้งสามและไม่อยู่บนระนาบทั้งสาม แต่ห่างจากระนาบ YZ ตามแนวแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย ห่างจากระนาบ XZ ตามแนวแกน Y เป็นระยะ 2 หน่วย และห่างจากระนาบ XY ตามแนวแกน Z เป็นระยะ 6 หน่วย ดังนั้น จุด B มีพิกัด **(3, 2, 6)** เขียนแทนด้วย **B(3, 2, 6)**

กำหนดจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ดังนี้



รูปที่ 9

จากรูปที่ 9 P(x, y, z) มีความหมาย ดังนี้

จุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ตามแนวแกน X ทางบวกหรือทางลบเป็นระยะ $|x|$ หน่วย

จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ตามแนวแกน Y ทางบวกหรือทางลบเป็นระยะ $|y|$ หน่วย

จุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ตามแนวแกน Z ทางบวกหรือทางลบเป็นระยะ $|z|$ หน่วย

ถ้า $z = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนระนาบ XY เขียนแทนด้วย $P(x, y, 0)$

ถ้า $y = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนระนาบ XZ เขียนแทนด้วย $P(x, 0, z)$

ถ้า $x = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนระนาบ YZ เขียนแทนด้วย $P(0, y, z)$

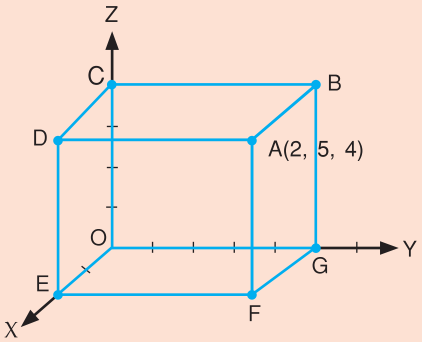
ถ้า $y = 0$ และ $z = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนแกน X เขียนแทนด้วย $P(x, 0, 0)$

ถ้า $x = 0$ และ $z = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนแกน Y เขียนแทนด้วย $P(0, y, 0)$

ถ้า $x = 0$ และ $y = 0$ แสดงว่า จุดนั้นเป็นจุดที่อยู่บนแกน Z เขียนแทนด้วย $P(0, 0, z)$

เรียก **(x, y, z)** หรือ **P(x, y, z)** ว่า **พิกัด**ของจุด P

ตัวอย่างที่ 1



ให้หาพิกัดของจุด B, C, D, E, F และ G

วิธีทำ B เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ YZ จึงมี $x = 0$

ดังนั้น จุด B มีพิกัดเป็น $(0, 5, 4)$

C เป็นจุดที่อยู่บนแกน Z จึงมี $x = 0$ และ $y = 0$

ดังนั้น จุด C มีพิกัดเป็น $(0, 0, 4)$

D เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ XZ จึงมี $y = 0$

ดังนั้น จุด D มีพิกัดเป็น $(2, 0, 4)$

E เป็นจุดที่อยู่บนแกน X จึงมี $y = 0$ และ $z = 0$

ดังนั้น จุด E มีพิกัดเป็น $(2, 0, 0)$

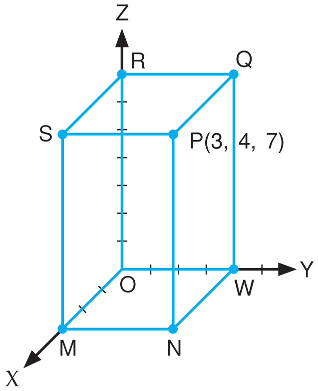
F เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ XY จึงมี $z = 0$

ดังนั้น จุด F มีพิกัดเป็น $(2, 5, 0)$

G เป็นจุดที่อยู่บนแกน Y จึงมี $x = 0$ และ $z = 0$

ดังนั้น จุด G มีพิกัดเป็น $(0, 5, 0)$

ลองทำดู

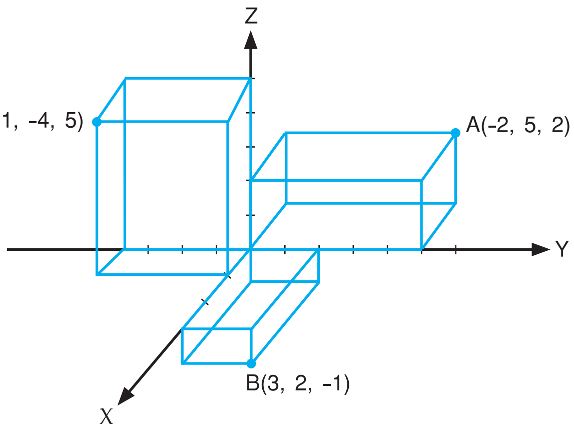


ให้หาพิกัดของจุด Q, R, S, M, N และ W

ตัวอย่างที่ 2

ให้เขียนจุด A(-2, 5, 2), B(3, 2, -1) และ C(1, -4, 5) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

วิธีทำ จุด A(-2, 5, 2) เป็นจุดที่ห่างจากระนาบทั้งสามตามแนวแกน X ทางลบเป็นระยะ 2 หน่วย แกน Y ทางบวกเป็นระยะ 5 หน่วย และแกน Z ทางบวกเป็นระยะ 2 หน่วย จุด B(3, 2, -1) เป็นจุดที่ห่างจากระนาบทั้งสามตามแนวแกน X ทางบวกเป็นระยะ 3 หน่วย แกน Y ทางบวกเป็นระยะ 2 หน่วย และแกน Z ทางลบเป็นระยะ 1 หน่วย จุด C(1, -4, 5) เป็นจุดที่ห่างจากระนาบทั้งสามตามแนวแกน X ทางบวกเป็นระยะ 1 หน่วย แกน Y ทางลบเป็นระยะ 4 หน่วย และแกน Z ทางบวกเป็นระยะ 5 หน่วย เขียนจุด A, B และ C ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ ดังนี้

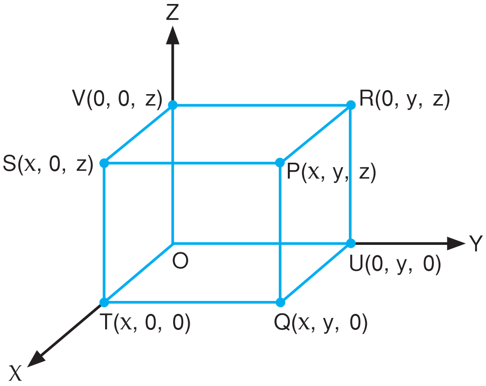


ลองทำดู

ให้เขียนจุด A(-1, 5, 3), B(6, 3, -2,) และ C(2, -5, 3) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

2. ภาพฉายของจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

พิจารณาทรงเรขาคณิตสามมิติที่กำหนด



รูปที่ 10

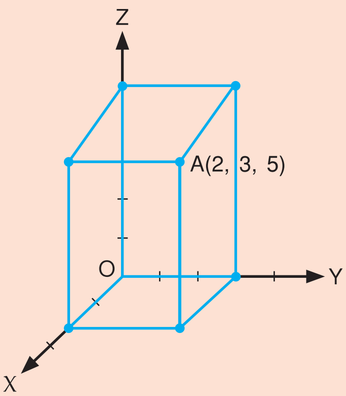
จากรูปที่ 10 จะเห็นว่า Q(x, y, 0) เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ XY และอยู่ตรงข้ามกับจุด P(x, y, z) เรียกจุด Q(x, y, 0) ว่าเป็น**ภาพฉาย (projection)** ของจุด P บนระนาบ XY

ในทำนองเดียวกัน เรียกจุด R(0, y, z) ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ และเรียก S(x, 0, z) ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ และเรียกจุด T(x, 0, 0), U(0, y, 0) และ V(0, 0, z) ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

คณิตน่ารู้

ภาพฉายของจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นเส้นตั้งฉากจากจุดนั้นกับระนาบใดระนาบหนึ่ง จึงทำให้จุดที่เป็นภาพฉายจะมีพิกัด X หรือพิกัด Y หรือพิกัด Z ค่าใดค่าหนึ่งเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 3



จากรูป ให้หาภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน X แกน Y แกน Z ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ

วิธีทำ ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน X คือ จุด (2, 0, 0)

ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน Y คือ จุด (0, 3, 0)

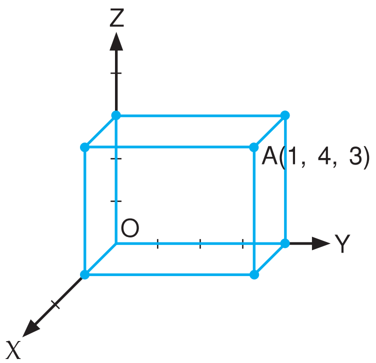
ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนแกน Z คือ จุด (0, 0, 5)

ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนระนาบ XY คือ จุด (2, 3, 0)

ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนระนาบ YZ คือ จุด (0, 3, 5)

ภาพฉายของจุด A(2, 3, 5) บนระนาบ XZ คือ จุด (2, 0, 5)

ลองทำดู

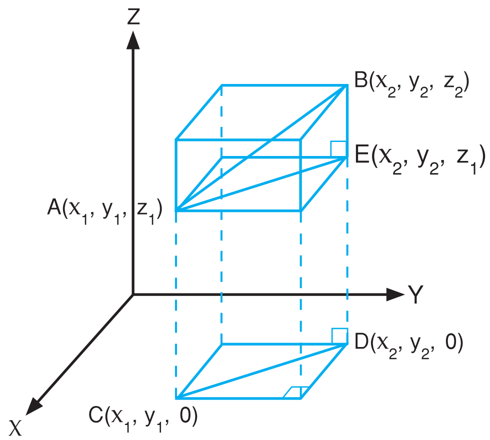


จากรูป ให้หาภาพฉายของจุด A(1, 4, 3) บนแกน X แกน Y แกน Z ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ

3. ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ทำได้โดยใช้ความรู้จากภาพฉายของจุดทั้งสองบนระนาบ XY และความรู้จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

ให้จุด C และจุด D เป็นภาพฉายของจุด A และจุด B บนระนาบ XY ตามลำดับ แล้วสร้างทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABE ดังรูปที่ 11



รูปที่ 11

จากความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดบนระนาบ XY

จะได้ $\quad CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

เนื่องจาก $\quad AE = CD$ และ $BE = |z_2 - z_1|$

และ $\quad AB^2 = AE^2 + BE^2$

ดังนั้น $\quad AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

นั่นคือ **ระยะทางระหว่างจุด $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$**

หรือ **AB เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$** หน่วย

ทฤษฎีบท 1 ระยะทางระหว่างจุด A (x_1, y_1, z_1) และ B(x_2, y_2, z_2)

หรือ AB เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 4

ให้หาระยะทางระหว่างจุด A(-1, 3, 0) และ B(5, 1, 3)

วิธีทำ จากสูตร $\quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

จะได้ $\quad AB = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (1 - 3)^2 + (3 - 0)^2}$

$= \sqrt{36 + 4 + 9}$

$= \sqrt{49}$

$= 7$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A(-1, 3, 0) และ B(5, 1, 3) เท่ากับ 7 หน่วย

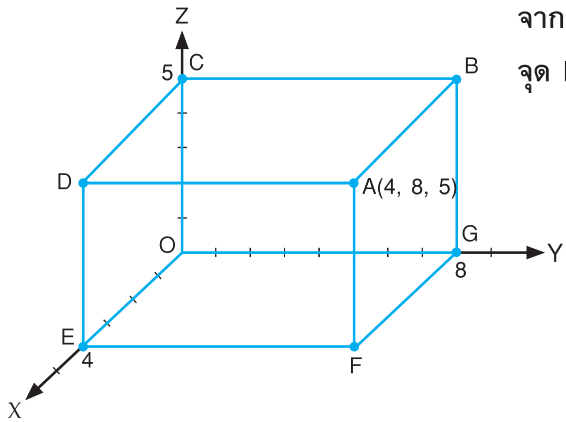
ลองทำดู

ให้หาระยะทางระหว่างจุด A(3, -1, 4) และ B(0, 2, -1)

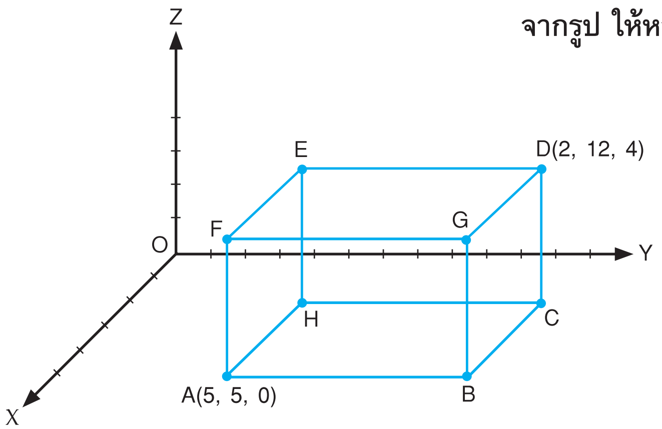
แบบฝึกทักษะ 3.1

ระดับพื้นฐาน

1. จากรูป กำหนดจุด A(4, 8, 5) ให้หาพิกัดของจุด B, C, D, E, F และ G



2. จากรูป ให้หาพิกัดของจุดยอดมุมที่เหลือ



ระดับกลาง

3. ให้เขียนจุด A(-2, 3, 5), B(4, 2, -1) และ C(1, -4, 2) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

4. ให้หาภาพฉายของจุด A(2, -5, 8) และ B(-1, 4, 3) บนระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ตามลำดับ

5. ให้หาภาพฉายของจุด P(-5, -1, 7) บนแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

6. ให้หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) A(-3, 1, 0) กับ B(0, 2, -5)

2) A(0, 0, 0) กับ B(2, 2, 2)

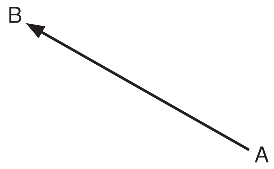
3) A(-1, 0, 2) กับ B(0, -3, 0)

3.2 เวกเตอร์ (Vector)

ปริมาณแบ่งออกเป็นสองประเภท ประเภทหนึ่งใช้บอกขนาดว่า มากหรือน้อยเพียงใด เช่น บ้านของนิธิศมีพื้นที่ 50 ตารางวา น้ำผลไม้ในขวดมีปริมาตร 750 ลูกบาศก์เซนติเมตร นายธเนศมีน้ำหนัก 58 กิโลกรัม ส่วนปริมาณอีกประเภทหนึ่งใช้บอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น น้ำใสเดินทางไปทิศใต้เป็นระยะทาง 1 กิโลเมตร ตะวันขับรถไปจังหวัดเชียงใหม่ด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

บทนิยาม ปริมาณที่มีขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity)**
ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)**
หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **เวกเตอร์**

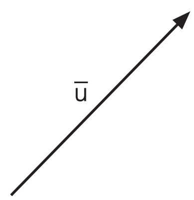
ปริมาณสเกลาร์แสดงด้วยจำนวนจริง ส่วนปริมาณเวกเตอร์แสดงด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง (directed line segment) โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์ และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์ ดังรูปที่ 12



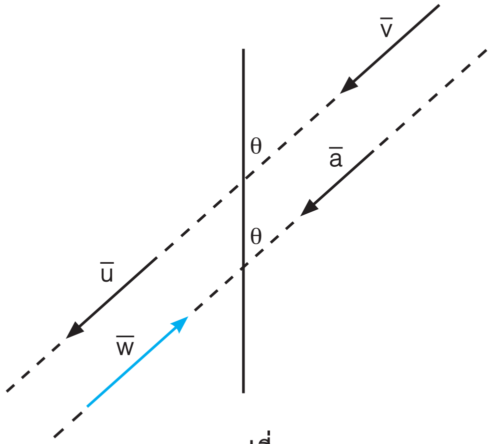
รูปที่ 12

รูปที่ 12 แสดงเวกเตอร์จาก A ไป B อ่านว่า **เวกเตอร์ เอบี** เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overline{AB}$ เรียก A ว่า **จุดเริ่มต้น** (initial point) ของเวกเตอร์ และเรียก B ว่า **จุดสิ้นสุด** (terminal point) ของเวกเตอร์ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB หรือ BA คือ ขนาดของเวกเตอร์ AB เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

ในกรณีที่ต้องการกล่าวถึงเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจะใช้ตัวอักษรเพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งมีเครื่องหมาย “⟶” หรือ “—” กำกับไว้ เช่น $\overrightarrow{u}$ หรือ $\overline{u}$ และใช้สัญลักษณ์ $|\overline{u}|$ แทนขนาดของ $\overline{u}$ ดังรูปที่ 13



รูปที่ 13

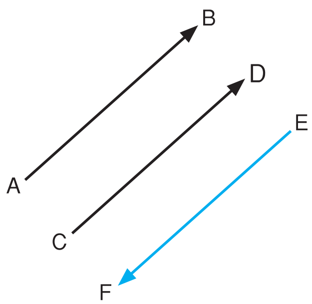


รูปที่ 14

จากรูปที่ 14 $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน $\bar{u}$ กับ $\bar{a}$ และ $\bar{v}$ กับ $\bar{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน เรียก $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$, $\bar{u}$ กับ $\bar{a}$ และ $\bar{v}$ กับ $\bar{a}$ ว่า**เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน**

ส่วน $\bar{w}$ กับ $\bar{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แต่มีหัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม $\bar{w}$ กับ $\bar{u}$ และ $\bar{w}$ กับ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน แต่มีหัวลูกศรไปทางตรงกันข้าม เรียก $\bar{w}$ กับ $\bar{a}$, $\bar{w}$ กับ $\bar{u}$ และ $\bar{w}$ กับ $\bar{v}$ ว่า**เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม**

บทนิยาม $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ **ขนานกัน** ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม เขียนแทนด้วย $\bar{u}$ **//** $\bar{v}$



รูปที่ 15

จากรูปที่ 15 กำหนด $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{EF}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน จะเห็นว่า $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{CD}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน แต่ $\overrightarrow{EF}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$

ซึ่งกล่าวว่า $\overrightarrow{AB}$ **เท่ากับ** $\overrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{EF}$ เป็น**นิเสธ**กับ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{CD}$ การเท่ากันของเวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์มีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม $\bar{u}$ **เท่ากับ** $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\bar{u} = \bar{v}$

บทนิยาม **นิเสธ** ของ $\bar{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$

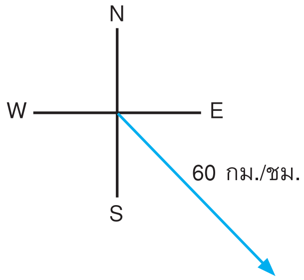
ตัวอย่างที่ 5

ดนัยขับรถจักรยานยนต์ไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ ใช้เวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง ด้วยความเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ให้เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของดนัย

วิธีทำ เวลา $1\frac{1}{2}$ ชั่วโมง ดนัยขับรถได้ระยะทาง 90 กิโลเมตร

เขียนเวกเตอร์โดยใช้มาตราส่วน 1 ซม. : 30 กม.

ขนาดของเวกเตอร์เท่ากับ 3 เซนติเมตร

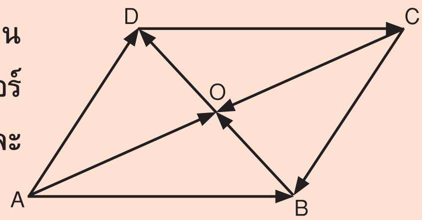


ลองทำดู

ชาติชายขับรถยนต์ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือใช้เวลา 1 ชั่วโมง ด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ให้เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของชาติชาย

ตัวอย่างที่ 6

กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดังรูป ให้หาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เวกเตอร์ที่เท่ากัน และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกันอย่างละ 2 คู่



วิธีทำ เนื่องจาก ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

จะได้ $\overline{AB} = \overline{DC}$, AB // DC, $\overline{AD} = \overline{CB}$, AD // CB, $\overline{BO} = \overline{OD}$ และ $\overline{AO} = \overline{CO}$

จากรูป เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน คือ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{DC}$ และ $\overrightarrow{BO}$ กับ $\overrightarrow{OD}$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม คือ $\overrightarrow{AD}$ กับ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{AO}$ กับ $\overrightarrow{CO}$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่เท่ากัน คือ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{DC}$ และ $\overrightarrow{BO}$ กับ $\overrightarrow{OD}$

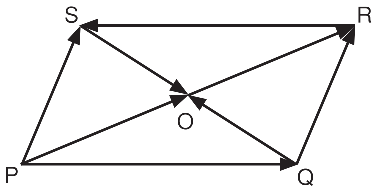
เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน คือ $\overrightarrow{AD}$ กับ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{AO}$ กับ $\overrightarrow{CO}$

คณิตน่ารู้

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาวไม่เท่ากัน แต่แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ลองทำดู

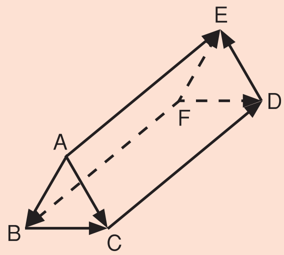
กำหนด PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป



ให้หาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม เวกเตอร์ที่เท่ากัน และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกันอย่างละ 2 คู่

ตัวอย่างที่ 7

กำหนด ABCDEF เป็นปริซึมสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป



1) ให้หาเวกเตอร์ที่เท่ากันกับ $\overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{BC}$

2) ให้หาเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$

วิธีทำ **1)** เวกเตอร์ที่เท่ากันกับ $\overrightarrow{AE}$ คือ $\overrightarrow{CD}$ และเวกเตอร์ที่เท่ากันกับ $\overrightarrow{BC}$ คือ $\overrightarrow{FD}$

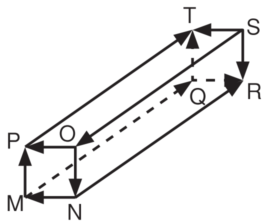
2) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{FE}$ และเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{AC}$ คือ $\overrightarrow{DE}$

ลองทำดู

กำหนด MNOPQRST เป็นปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป

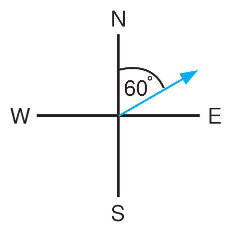
1) ให้หาเวกเตอร์ที่เท่ากันกับ $\overrightarrow{MP}$

2) ให้หาเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{NM}$ และ $\overrightarrow{NR}$



คณิตน่ารู้

การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว จะใช้ขนาดของมุมเป็นองศาในการบอกทิศทาง โดยเริ่มวัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกาตามขนาดของมุมที่กำหนด โดยขนาดของมุมที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 100 องศา จะเป็น 0 นำหน้า เช่น ขนาดของมุม 60 องศา เขียนแทนด้วย 060 องศา ซึ่งเขียนเวกเตอร์ได้ ดังรูป



แบบฝึกทักษะ 3.2 ก

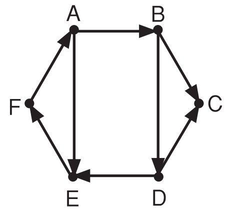
ระดับพื้นฐาน

1. ให้พิจารณาข้อความที่กำหนดต่อไปนี้ ว่าเป็นปริมาณสเกลาร์หรือปริมาณเวกเตอร์

1) ตู้เสื้อผ้าใบหนึ่งสูง 210 เซนติเมตร
2) แตงโมผลหนึ่งมีน้ำหนัก 3 กิโลกรัม
3) เสือตัวหนึ่งวิ่งไปทางทิศใต้ด้วยความเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
4) ปกรณ์เดินไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 300 เมตร
5) คมสันต์ออกแรงผลักโต๊ะไปข้างหน้าเป็นระยะทาง 25 เมตร
6) ปรานีใช้เวลาทำการบ้าน 35 นาที

2. กันยาขับรถไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นเวลา 45 นาที ให้เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของกันยา

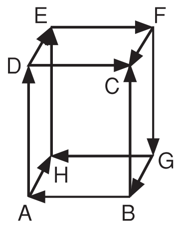
3. **กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป**



ให้หาเวกเตอร์ที่กำหนดต่อไปนี้

1) เวกเตอร์ที่ขนานกัน 2 คู่
2) เวกเตอร์ที่เท่ากัน 2 คู่
3) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน 2 คู่

4. **กำหนดเวกเตอร์ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป**



1) ให้หาเวกเตอร์ที่เท่ากันกับ $\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{AH}$
2) ให้หาเวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกับ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{BA}$

ระดับกลาง

5. **ให้เขียนส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์ที่กำหนดต่อไปนี้**

1) 90 เมตร ไปทางทิศใต้
2) 45 กิโลเมตร ไปทางทิศ 045 องศา
3) 60 เมตร ไปทางทิศ 320 องศา
4) 20 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ

6. **ชัยทัศน์ปั่นจักรยานไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร แล้วปั่นจักรยานไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร ให้หาว่าชัยทัศน์อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าใด และอยู่ในทิศใดของจุดเริ่มต้น**

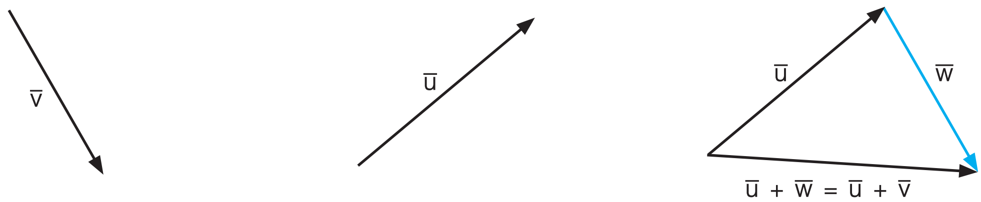
7. **ถ้า $\overline{w}$ แทนการเดินทาง 40 กิโลเมตร ไปทางทิศ 060 องศา ให้อธิบายการเดินทางที่แทนด้วย $-\overline{w}$**

1. การบวกและการลบเวกเตอร์ (Addition and Subtraction of Vector)

จากแนวคิดการบวกและการลบของจำนวนจริง ซึ่งเป็นการนับต่อหรือหักออกจากตัวตั้ง และใช้บทนิยามการเท่ากันของเวกเตอร์ที่เท่ากับตัวบวกหรือตัวลบมานิยามการบวกและการลบเวกเตอร์

1) การบวกเวกเตอร์ (Addition of Vector)

ให้นักเรียนพิจารณาการบวก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่กำหนดดังรูปที่ 16 การหาผลบวกของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ เป็นตัวตั้ง และ $\bar{v}$ เป็นตัวบวก ทำได้โดยสร้างเวกเตอร์ $\bar{w}$ ที่เท่ากับ $\bar{v}$ แล้วนำจุดเริ่มต้นของ $\bar{w}$ มาต่อกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ จะได้**ผลบวกของเวกเตอร์หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์** ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ ไปยังจุดสิ้นสุดของ $\bar{w}$

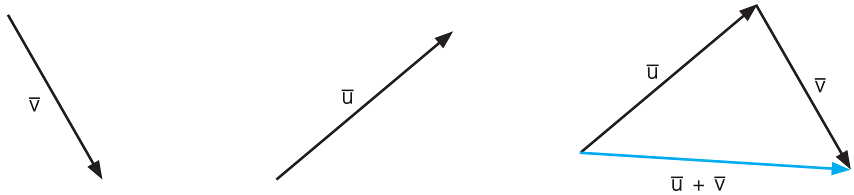


รูปที่ 16

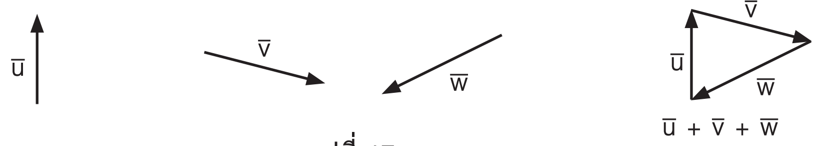
บทนิยาม ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ
ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

คณิตน่ารู้

นักเรียนอาจหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยการนำจุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$ มาต่อกับจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ ผลบวกของเวกเตอร์หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$



พิจารณาการบวกเวกเตอร์ $\overline{u}$, $\overline{v}$ และ $\overline{w}$ ที่กำหนด ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17

จากรูปที่ 17 จะเห็นว่า ผลบวกของ $\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector)

บทนิยาม **เวกเตอร์ศูนย์** คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนด้วย $\mathbf{\overline{0}}$

Thinking Time

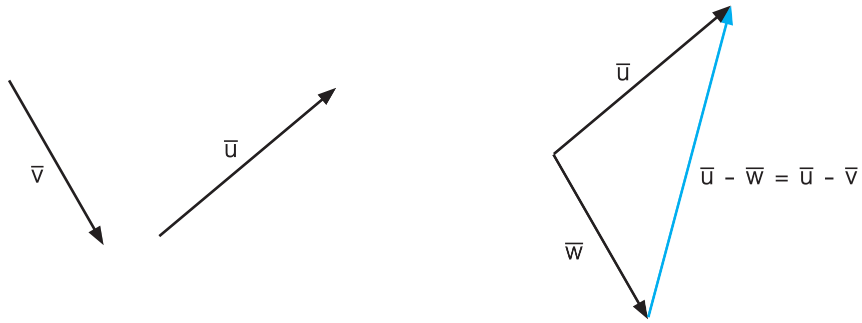
กำหนดจุด A ดังนี้

• A

นักเรียนคิดว่า จุด A เป็นเวกเตอร์ศูนย์หรือไม่

2) การลบเวกเตอร์ (Subtraction of Vector)

ให้นักเรียนพิจารณาการลบ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ที่กำหนด ดังรูปที่ 18 การหาผลลบของ $\overline{u}$ กับ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{\overline{u} - \overline{v}}$ โดยที่ $\overline{u}$ เป็นตัวตั้ง และ $\overline{v}$ เป็นตัวลบ ให้สร้างเวกเตอร์ $\overline{w}$ ที่เท่ากับ $\overline{v}$ แล้วนำจุดเริ่มต้นของ $\overline{w}$ มาต่อกับจุดเริ่มต้นของ $\overline{u}$ จะได้**ผลลบของเวกเตอร์หรือเวกเตอร์ผลลัพธ์** เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นจากจุดสิ้นสุดของ $\overline{w}$ ไปยังจุดสิ้นสุดของ $\overline{u}$

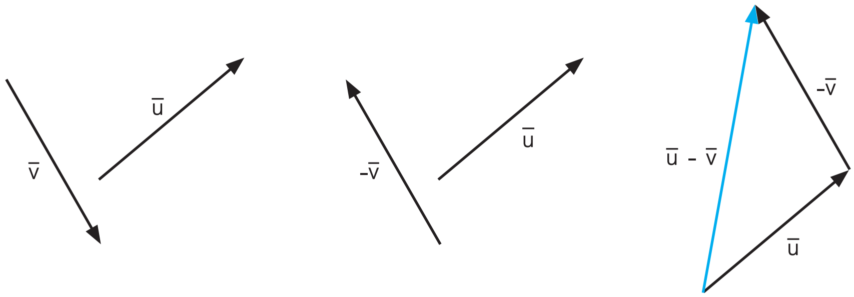


รูปที่ 18

บทนิยาม ให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ
ผลลบของ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{\overline{u} - \overline{v}}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\overline{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\overline{u}$

คณิตน่ารู้

นักเรียนอาจหาผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยการหาผลบวกของ $\bar{u}$ และนิเสธของ $\bar{v}$ ดังนี้



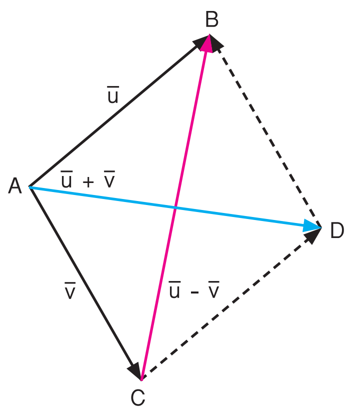
ดังนั้น $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$

นอกจากการหาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์โดยใช้บทนิยามแล้ว นักเรียนยังสามารถหาผลบวกและผลลบของเวกเตอร์โดยใช้วิธีการที่เรียกว่า **กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** ซึ่งมีวิธีการดังต่อไปนี้

กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ดังรูปที่ 19

รูปที่ 19

การหาผลบวกและผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำได้โดยกำหนดจุด A เป็นจุดเริ่มต้น จากนั้นหาจุด B และจุด C ที่ทำให้ $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\bar{v} = \overrightarrow{AC}$ ตามลำดับ แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABDC ดังรูปที่ 20



รูปที่ 20

จากรูปที่ 20 จะเห็นว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABDC จะเป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ ดังนี้

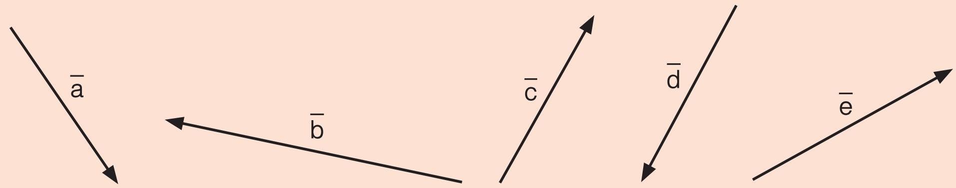
เส้นทแยงมุม AD จะเป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\overline{u} + \overline{v}$ กล่าวคือ $\overrightarrow{AD} = \overline{u} + \overline{v}$

เส้นทแยงมุม CB จะเป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\overline{u} - \overline{v}$ กล่าวคือ $\overrightarrow{CB} = \overline{u} - \overline{v}$

เส้นทแยงมุม BC จะเป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\overline{v} - \overline{u}$ กล่าวคือ $\overline{BC} = \overline{v} - \overline{u}$

ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ และ $\overline{e}$ ดังนี้

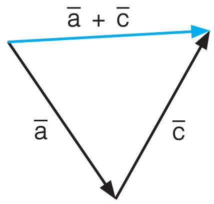


ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ

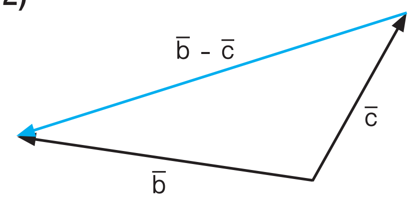
1) $\overline{a} + \overline{c}$ **2)** $\overline{b} - \overline{c}$ **3)** $\overline{a} + \overline{e} + \overline{b}$

4) $\overline{b} - \overline{e} - \overline{c}$ **5)** $\overline{a} + \overline{e} - \overline{c}$

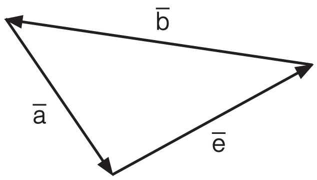
วิธีทำ **1)**



2)

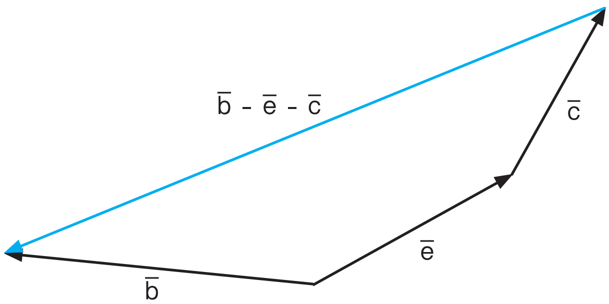


3)

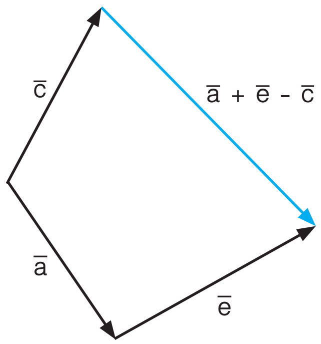


$\overline{a} + \overline{e} + \overline{b} = \overline{0}$

4)

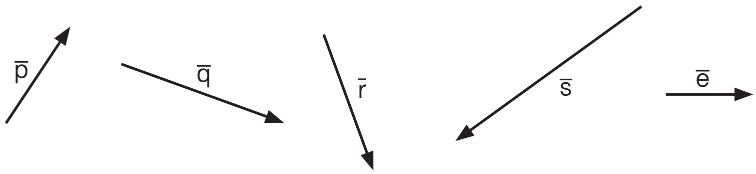


5)



ลองทำดู

กำหนด $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$ และ $\bar{e}$ ดังนี้



ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ

1) $\bar{p} + \bar{q}$ 2) $\bar{r} - \bar{s}$ 3) $\bar{p} + \bar{q} + \bar{s}$

4) $\bar{q} - \bar{r} - \bar{e}$ 5) $\bar{e} + \bar{q} - \bar{r}$

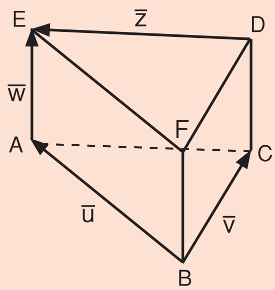
ตัวอย่างที่ 9

จากปริซึมสามเหลี่ยม ABCDEF

กำหนด $\overrightarrow{BA} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AE} = \bar{w}$

และ $\overrightarrow{DE} = \bar{z}$ ให้หา $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{FC}$

ในรูปของ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ และ $\bar{z}$



วิธีทำ จาก ABCDEF เป็นปริซึมสามเหลี่ยม

จะได้ AB = EF, AC = ED, BC = FD และ AE = BF = CD

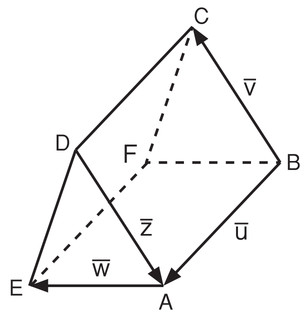
ดังนั้น $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\bar{u} + \bar{v}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AE} = -\bar{z} + \bar{w}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = -\bar{w} + \bar{v}$

ลองทำดู

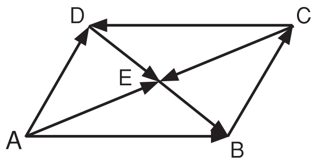
จากปริซึมสามเหลี่ยม ABCDEF กำหนด $\overrightarrow{BA} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AE} = \bar{w}$ และ $\overrightarrow{DA} = \bar{z}$ ให้หา $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CF}$ และ $\overrightarrow{FB}$ ในรูปของ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, และ $\bar{z}$



แบบฝึกทักษะ 3.2 ข

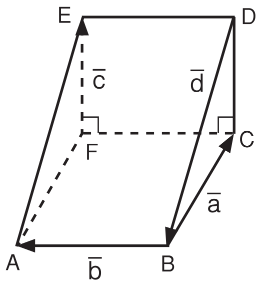
ระดับพื้นฐาน

1. **กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด E ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้**



1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD}$
2) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BE}$
3) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
4) $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DE}) - (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$

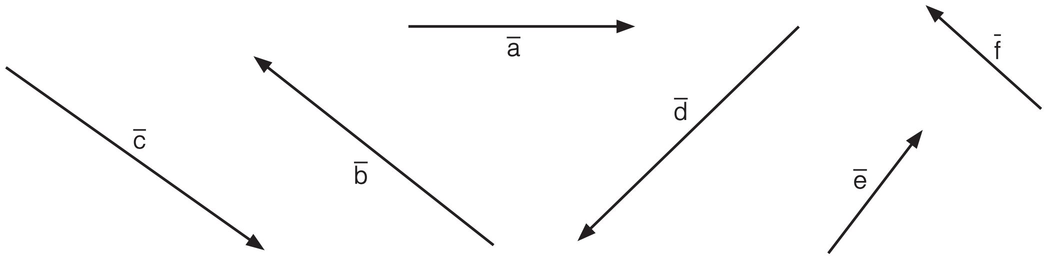
2. **จากรูป กำหนด $\overrightarrow{BC} = \bar{a}$, $\overrightarrow{BA} = \bar{b}$, $\overrightarrow{FE} = \bar{c}$ และ $\overrightarrow{DB} = \bar{d}$ ให้เขียนเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ในรูปของ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ และ $\bar{d}$**



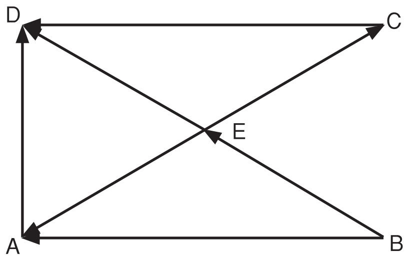
1) $\overrightarrow{BF}$
2) $\overrightarrow{AE}$
3) $\overrightarrow{AD}$
4) $\overrightarrow{BE}$

ระดับกลาง

3. **จากรูป ให้เขียนเวกเตอร์ที่กำหนดต่อไปนี้เป็นเวกเตอร์ศูนย์ให้อยู่ในรูป $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$ และ $\bar{f}$**



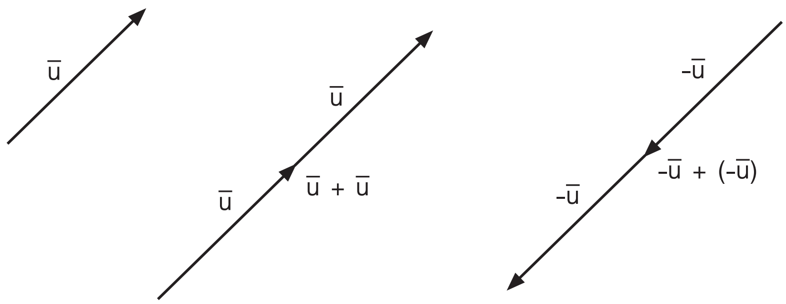
4.



จากรูป ให้หาผลบวกของ $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EA}$

2. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Scalar Multiple of a Vector)

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะใช้แนวคิดจากการบวกเวกเตอร์ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากัน



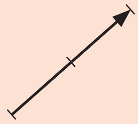
จากรูป พิจารณาผลบวกของ $\bar{u} + \bar{u}$ และ $(-\bar{u}) + (-\bar{u})$ จะพบว่า $\bar{u} + \bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานและมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ แต่ขนาดของ $\bar{u} + \bar{u}$ เป็นสองเท่าของขนาดของ $\bar{u}$ แต่ $(-\bar{u}) + (-\bar{u})$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{u}$ ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$ ซึ่งมีขนาดเท่ากับขนาดของ $\bar{u} + \bar{u}$ นิยามได้ ดังนี้

บทนิยาม ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ **ผลคูณของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วยสเกลาร์ a** เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$
2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และ**มีทิศทางเดียว**กับ $\bar{u}$
3) ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ แต่**มีทิศทางตรงกันข้าม**กับ $\bar{u}$

ตัวอย่างที่ 10

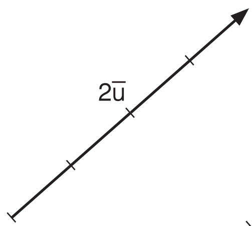
กำหนด $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี $|\bar{u}| = 2$ หน่วย ซึ่งมีทิศทาง ดังรูป



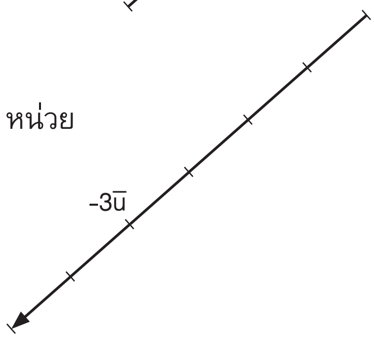
ให้หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแสดงเวกเตอร์

1) $2\bar{u}$ **2)** $-3\bar{u}$

วิธีทำ **1)** เนื่องจาก $2 > 0$
ดังนั้น $2\bar{u}$ มีขนาดเท่ากับ $|2||\bar{u}| = |2||2| = 4$ หน่วย
และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

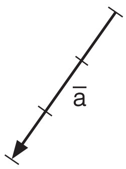


2) เนื่องจาก $-3 < 0$
ดังนั้น $-3\bar{u}$ มีขนาดเท่ากับ $|-3||\bar{u}| = |-3||2| = 6$ หน่วย
แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$



ลองทำดู

กำหนด $\bar{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี $|\bar{a}| = 3$ หน่วย ซึ่งมีทิศทาง ดังรูป



ให้หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแสดงเวกเตอร์

1) $3\bar{a}$ 2) $-4\bar{a}$

ตัวอย่างที่ 11

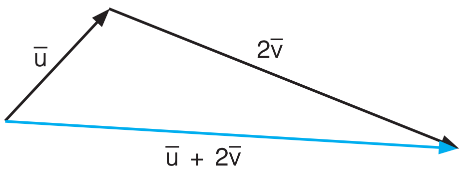
กำหนด $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ดังนี้

ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

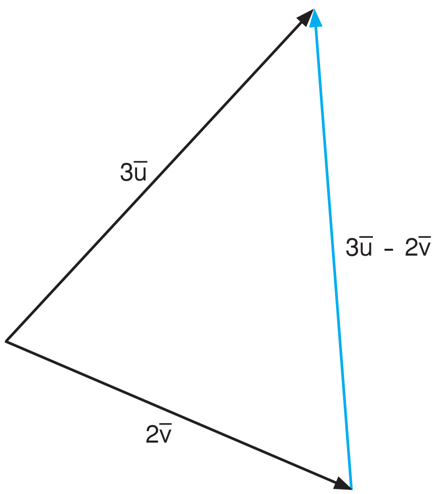
1) $\overline{u} + 2\overline{v}$

2) $3\overline{u} - 2\overline{v}$

วิธีทำ 1)

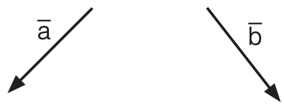


2)



ลองทำดู

กำหนด $\overline{a}$ และ $\overline{b}$ ดังนี้

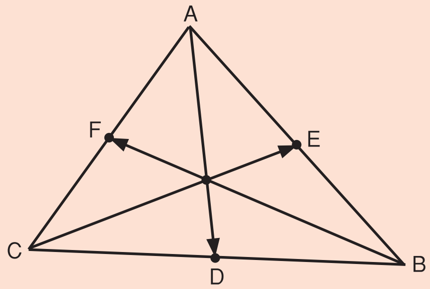


ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $2\overline{a} + \overline{b}$

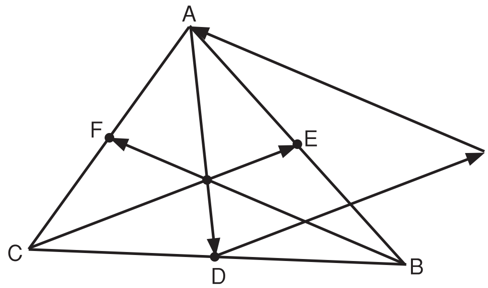
2) $5\overline{a} - 2\overline{b}$

ตัวอย่างที่ 12



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด D จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ ให้เขียนเวกเตอร์แทนการบวกของ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF}$

วิธีทำ **แบบที่ 1** ใช้บทนิยามการบวกเวกเตอร์ สร้างเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่เป็นตัวบวก โดยให้จุดเริ่มต้นของตัวบวกกับจุดสิ้นสุดของตัวตั้งเป็นจุดเดียวกัน



จากรูป จะเห็นว่า $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF} = \vec{0}$

แบบที่ 2 ใช้บทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ของ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF}$

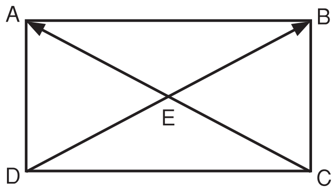
จากจุด D จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{CA}$ ตามลำดับ และ $BD = |\overrightarrow{BD}|$, $BE = |\overrightarrow{BE}|$ และ $AF = |\overrightarrow{AF}|$

เมื่อใช้บทนิยามของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะได้

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}) \\
&= \overrightarrow{CB} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= \overrightarrow{CB} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \\
&= \bar{0}
\end{aligned}$$

ลองทำดู



กำหนดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD

ให้เขียนเวกเตอร์แทนการบวกของ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$

ทฤษฎีบท 2 ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ บนระนาบ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$
$\bar{u}$ **ขนาน**กับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $a \neq 0$ ที่ทำให้ $\bar{u} = a\bar{v}$

ทฤษฎีบท 3 ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ บนระนาบ โดยที่ $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$
$\bar{u}$ **ไม่ขนาน**กับ $\bar{v}$ ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว $a = 0$ **และ** $b = 0$

ตัวอย่างที่ 13

กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ให้แสดงว่า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ เมื่อ $4\bar{u} - 3\bar{v} = 2\bar{v}$ และ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{w}$ เมื่อ $3\bar{u} - 2\bar{w} = \bar{w} + 5\bar{u}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
4\bar{u} - 3\bar{v} &= 2\bar{v} \\
4\bar{u} &= 2\bar{v} + 3\bar{v} \\
4\bar{u} &= 5\bar{v} \\
\bar{u} &= \frac{5}{4}\bar{v}
\end{aligned}
\qquad \text{และ} \qquad
\begin{aligned}
3\bar{u} - 2\bar{w} &= \bar{w} + 5\bar{u} \\
3\bar{u} - 5\bar{u} &= \bar{w} + 2\bar{w} \\
-2\bar{u} &= 3\bar{w} \\
\bar{u} &= -\frac{3}{2}\bar{w}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ และ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{w}$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{a}$, $\bar{b}$ และ $\bar{c}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ให้แสดง $\bar{a}$ ขนานกับ $\bar{b}$ เมื่อ $2\bar{a} - 5\bar{b} = \bar{b}$ และ $\bar{a}$ ขนานกับ $\bar{c}$ เมื่อ $2\bar{a} + 3\bar{c} = \bar{c} - \bar{a}$

แนวข้อสอบ PAT 1

กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกันและไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ให้หาค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $6\bar{u} + 8\bar{v} = (2x^2 + x)\bar{u} - 3\bar{v}$

แนวคิด

จากโจทย์

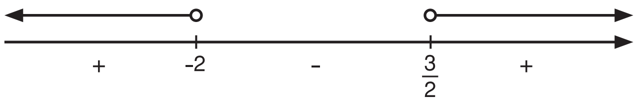
$$\begin{aligned} 6\bar{u} + 8\bar{v} &= (2x^2 + x)\bar{u} - 3\bar{v} \\ 8\bar{v} + 3\bar{v} &= 2x^2\bar{u} + x\bar{u} - 6\bar{u} \\ 11\bar{v} &= (2x^2 + x - 6)\bar{u} \\ \bar{u} &= \left(\frac{11}{2x^2 + x - 6}\right)\bar{v} \end{aligned}$$

โดยมี $\frac{11}{2x^2 + x - 6}$ เป็นจำนวนจริง

จากทฤษฎีบท 2 ถ้า $\bar{u} = a\bar{v}$ และ $a > 0$ แล้ว $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ และมีทิศทางเดียวกัน

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{11}{2x^2 + x - 6} &> 0 \\ \frac{11}{(2x - 3)(x + 2)} &> 0 \quad \text{เมื่อ } x \neq \frac{3}{2} \text{ หรือ } x \neq -2 \\ 11(2x - 3)(x + 2) &> 0 \\ (2x - 3)(x + 2) &> 0 \end{aligned}$$

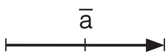


ดังนั้น $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

แบบฝึกทักษะ 3.2 ข

ระดับพื้นฐาน

1. กำหนด $\bar{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี $|\bar{a}| = 2$ หน่วย ซึ่งมีทิศทาง ดังรูป

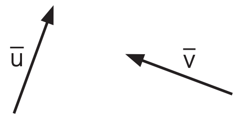


ให้หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแสดงเวกเตอร์

1) $-4\bar{a}$

2) $3\bar{a}$

2. กำหนด $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ดังนี้



ให้หาเวกเตอร์ผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2\overline{u} + 3\overline{v}$ 2) $\overline{v} - 3\overline{u}$ 3) $\overline{u} - 2\overline{v}$

ระดับกลาง

3. กำหนด $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\overline{u} = a\overline{v}$ ให้หาค่า a เมื่อ $|\overline{u}| = 2$ และ $|\overline{v}| = 4$

4. กำหนด $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ให้แสดงว่า $\overline{u}$ ขนานกับ $\overline{v}$

1) $2\overline{u} = 7\overline{v}$ 2) $8\overline{u} + 6\overline{v} = \overline{0}$

3) $5\overline{u} + 6\overline{v} = 4\overline{u} + 2\overline{v}$ 4) $2\overline{u} + 5\overline{v} = 4\overline{u} - \overline{v}$

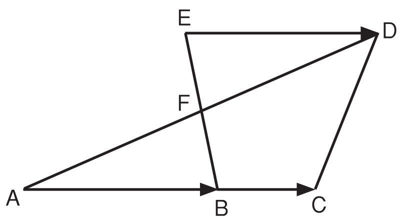
5. กำหนด $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ไม่ขนานกันและไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ให้หาค่าของ a และ b ที่ทำให้ $(2a + 3b - 1)\overline{u} + (3a - 2b - 3)\overline{v} = \overline{0}$

6. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมีจุด M และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ตามลำดับ ให้แสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overline{u} - \frac{2}{3}\overline{v}$ เมื่อ $\overline{u} = \overrightarrow{AM}$ และ $\overline{v} = \overrightarrow{AN}$

7. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ที่มีจุด E จุด F จุด G และจุด H เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ ตามลำดับ ให้หาผลบวกของ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BH}$

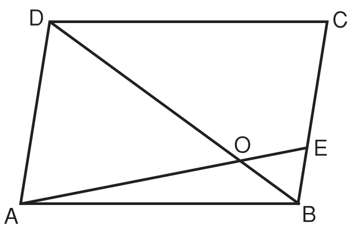
ระดับท้าทาย

8.



จากรูป กำหนด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overrightarrow{AD}$ และ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$ ให้หาค่าของ a + b ที่ทำให้ $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{DC}$

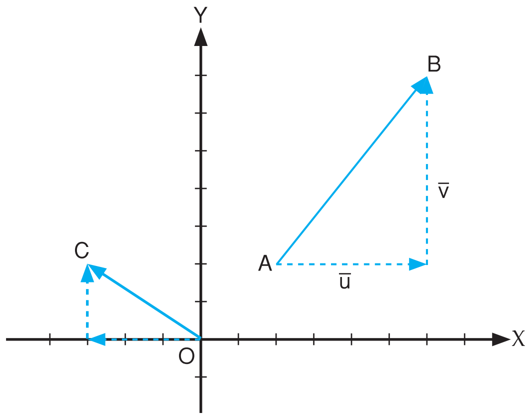
9.



กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และให้ $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{DB}$ ให้หาค่าของ a และ b

3.3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (Vectors and Coordinate Systems)

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากเป็นเวกเตอร์ที่เขียนในรูปของผลบวกของเวกเตอร์ที่มีทิศทางในแนวแกนอ้างอิงในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ



รูปที่ 21

1. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

จากรูปที่ 21 จะเห็นว่า $\overrightarrow{AB}$ เป็นผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยที่ $\bar{u}$ มีขนาด 4 หน่วย ทิศทางขนานกับแกน X ไปทางขวา และ $\bar{v}$ มีขนาด 5 หน่วย ทิศทางขนานกับแกน Y ไปข้างบน เขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน X เป็นระยะ 4 หน่วย และทิศทางตามแนวแกน Y เป็นระยะ 5 หน่วย ด้วย $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ หรือ [4, 5]

สำหรับ $\overrightarrow{OC}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O(0, 0) ซึ่งเรียกว่า **เวกเตอร์ในตำแหน่งมาตรฐาน** ที่เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย มีทิศทางขนานกับแกน X ไปทางซ้าย กับเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย มีทิศทางขนานกับแกน Y ไปข้างบน เขียนแทน $\overrightarrow{OC}$ ด้วย $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

การเขียนเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติโดยทั่วไป เขียนแทนด้วย $\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ คือ

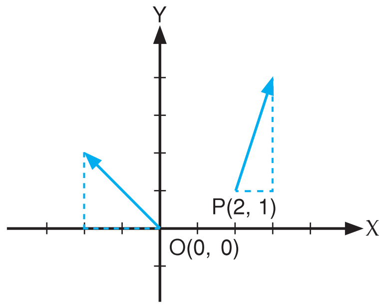
เวกเตอร์ $\bar{u}$ มีขนาด $|\mathbf{a}|$ หน่วย ถ้า $\mathbf{a} > 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน X ไปทาง**ขวา** ถ้า $\mathbf{a} < 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน X ไปทาง**ซ้าย**

เวกเตอร์ $\bar{v}$ มีขนาด $|\mathbf{b}|$ หน่วย ถ้า $\mathbf{b} > 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน Y ไปข้างบน ถ้า $\mathbf{b} < 0$ เวกเตอร์นี้จะมีทิศทางขนานกับแกน Y ไปข้างล่าง

ตัวอย่างที่ 14

ให้เขียน $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด O(0, 0) และจุด P(2, 1) ตามลำดับ

วิธีทำ



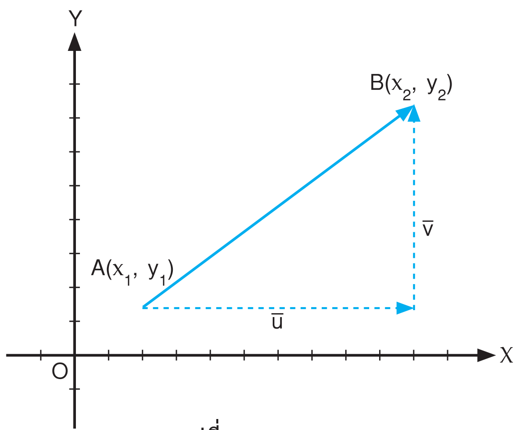
ลองทำดู

ให้เขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุด O(0, 0) และจุด P(2, -3) ตามลำดับ

คณิตน่ารู้

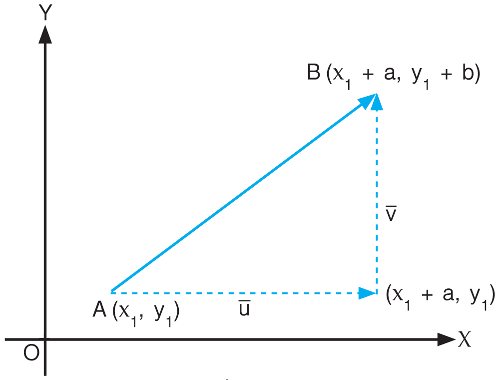
เมื่อ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O จะมีจุดสิ้นสุดที่จุด (a, b)

ในกรณีทั่วไป เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \bar{u} + \bar{v}$ ซึ่ง $|\bar{u}| = a$, $|\bar{v}| = b$ และ $\bar{u}$, $\bar{v}$ ขนานกับแกน X และแกน Y ตามลำดับ ดังรูปที่ 22



รูปที่ 22

สำหรับ $\bar{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และ $|\bar{u}| = a$ จะได้พิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ คือ $(x_1 + a, y_1)$ และจาก $\bar{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $(x_1 + a, y_1)$ และ $|\bar{v}| = b$ จะได้พิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ คือ $(x_1 + a, y_1 + b)$ ดังรูปที่ 23



รูปที่ 23

จะเห็นว่า จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ เป็นจุดสิ้นสุดของ $\overrightarrow{AB}$ เช่นกัน

ดังนั้น $\quad x_1 + a = x_2 \quad$ และ $\quad y_1 + b = y_2$

$$a = x_2 - x_1 \qquad\qquad b = y_2 - y_1$$

ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ ถ้า $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

แล้ว $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 15

กำหนด A มีพิกัด (-3, 2), B มีพิกัด (4, 3) และ C มีพิกัด (0, -5) ให้หา

1) $\overrightarrow{AB}$ **2)** $\overrightarrow{BC}$ **3)** $\overrightarrow{CA}$

วิธีทำ **1)** $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4 - (-3) \\ 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 0 - 4 \\ -5 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} -3 - 0 \\ 2 - (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$

ลองทำดู

กำหนด A มีพิกัด (2, 5), B มีพิกัด (5, 0) และ C มีพิกัด (-2, 3) ให้หา $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{CA}$

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(3, 2) ให้หาพิกัดของจุด B

วิธีทำ ให้จุด B มีพิกัด (x_1, y_1)

จาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(3, 2)

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ y_1 - 2 \end{bmatrix}$ แสดงว่า $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ y_1 - 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $-5 = x_1 - 3$ และ $3 = y_1 - 2$

$x_1 = -2$ $y_1 = 5$

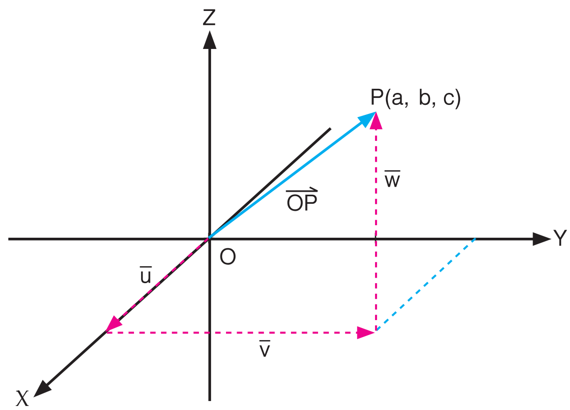
นั่นคือ จุด B มีพิกัด (-2, 5)

ลองทำดู

กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(-3, 1) ให้หาพิกัดของจุด B

2. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จากเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติได้มีการนำแนวคิดมาพัฒนาเป็นเรื่องเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ดังรูปที่ 24



รูปที่ 24

จากรูป ใช้บทนิยามการบวกเวกเตอร์ จะได้ $\overrightarrow{OP} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ซึ่งเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติมีบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ว่า **เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ** หรือ**เวกเตอร์ในสามมิติ**

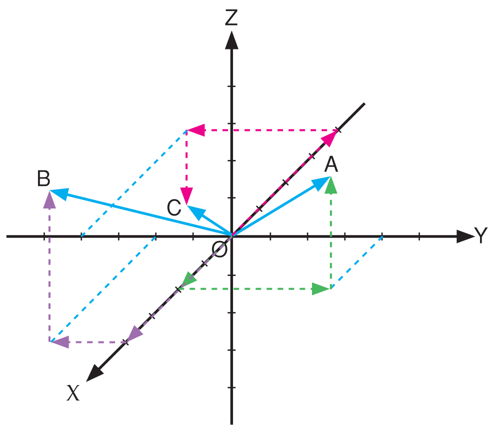
ตัวอย่างที่ 17

ให้หาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดสิ้นสุดที่จุด A(2, 4, 3), จุด B(4, -2, 4) และจุด C(-4, -4, -2) พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์ที่ได้ลงในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ และ } \overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

เขียนเวกเตอร์ลงในระบบพิกัดฉากได้ ดังนี้



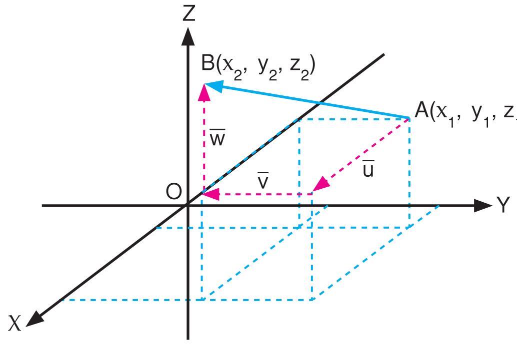
ลองทำดู

ให้หาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และมีจุดสิ้นสุดที่จุด A(4, 3, 5), จุด B(-3, 4, 6) และจุด C(-2, -3, -4) พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์ที่ได้ลงในระบบพิกัดฉาก

คณิตน่ารู้

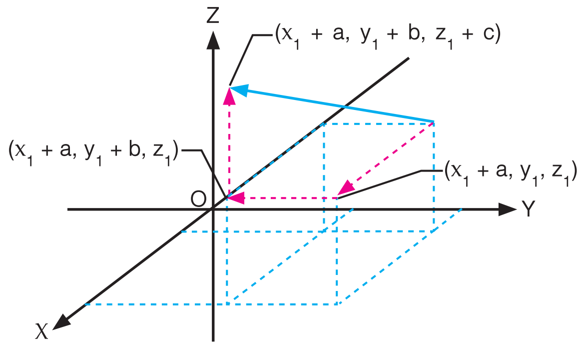
เมื่อเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O จะมีจุดสิ้นสุดที่จุด (a, b, c)

ในกรณีทั่วไป เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้น $A(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุด $B(x_2, y_2, z_2)$ โดย $\overrightarrow{AB} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ ซึ่ง $|\bar{u}| = a$, $|\bar{v}| = b$ และ $|\bar{w}| = c$ และ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ขนานกับแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ ดังรูปที่ 25



รูปที่ 25

สำหรับ $\bar{u}$ มีจุดเริ่มต้น $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $|\bar{u}| = a$ จะได้พิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ คือ $(x_1 + a, y_1, z_1)$ จาก $\bar{v}$ มีจุดเริ่มต้น $(x_1 + a, y_1, z_1)$ และ $|\bar{v}| = b$ จะได้พิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ คือ $(x_1 + a, y_1 + b, z_1)$ และจาก $\bar{w}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $(x_1 + a, y_1 + b, z_1)$ และ $|\bar{w}| = c$ จะได้พิกัดของจุดสิ้นสุดของ $\bar{w}$ คือ $(x_1 + a, y_1 + b, z_1 + c)$ ดังรูปที่ 26



รูปที่ 26

ซึ่งจุดสิ้นสุดของ $\bar{w}$ เป็นจุดสิ้นสุดของ $\overrightarrow{AB}$ เช่นกัน ดังนั้น

$x_1 + a = x_2$	$y_1 + b = y_2$	$z_1 + c = z_2$
$a = x_2 - x_1$	$b = y_2 - y_1$	$c = z_2 - z_1$

ทำให้ได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ ถ้า $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนด A มีพิกัด (-4, 2, 6), B มีพิกัด (0, 4, -3) และ C มีพิกัด (5, -2, 0) ให้หา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BC}$

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 - (-4) \\ 4 - 2 \\ -3 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 5 - 0 \\ -2 - 4 \\ 0 - (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

ลองทำดู

กำหนด A มีพิกัด (5, 0, -4), B มีพิกัด (-4, 3, -2) และ C มีพิกัด (0, -4, 6) ให้หา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BC}$

ตัวอย่างที่ 19

กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ โดยมี A เป็นจุดเริ่มต้นที่มีพิกัด (2, 1, 2) ให้หาพิกัดของจุดสิ้นสุด B

วิธีทำ ให้ B มีพิกัด (x_1, y_1, z_1) และจาก A เป็นจุดเริ่มต้นที่มีพิกัด (2, 1, 2)

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ y_1 - 1 \\ z_1 - 2 \end{bmatrix}$ แสดงว่า $\begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ y_1 - 1 \\ z_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x_1 - 2 = 3$ | $y_1 - 1 = -5$ | $z_1 - 2 = 4$

$x_1 = 5$ | $y_1 = -4$ | $z_1 = 6$

นั่นคือ B มีพิกัด (5, -4, 6)

ลองทำดู

กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ โดยมี A เป็นจุดเริ่มต้นที่มีพิกัด (-1, 3, 0) ให้หาพิกัดของจุดสิ้นสุด B

สำหรับการเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ จะเป็นไปตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - d \\ b - e \\ c - f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริงใด ๆ	$\lambda\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 20

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $\bar{v} = -2\bar{w}$

ให้หา $\bar{u} + \bar{v}$, $\bar{v} - \bar{w}$, $-\bar{v}$ และ $\bar{u} + \bar{w}$

วิธีทำ จาก $\bar{v} = -2\bar{w}$ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $x = 2$, $y = 4$ และ $z = -2$ นั่นคือ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

ทำให้ได้ว่า

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} - \bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$-\bar{v} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} + \bar{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ โดยที่ $\bar{v} = -2\bar{u}$

ให้หา $\bar{u} + \bar{v}$, $\bar{u} - \bar{v}$, $\bar{v} + \bar{w}$, และ $\bar{u} - \bar{w}$

แบบฝึกทักษะ 3.3 ก

ระดับ**พื้นฐาน**

1. ให้หา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนดพิกัดจุด A และจุด B ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) A(4, -5), B(-3, 1)
2) A(5, 4), B(7, 3)
3) A(-3, 8), B(9, -4)
4) A(5, 0, 2), B(6, -2, 5)
5) A(-6, 7, 0) B(1, 1, 3)
6) A(0, 2, 9), B(-6, 5, 2)

2. กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ให้หาพิกัดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) พิกัดของ A เมื่อ B มีพิกัด (6, -4)
2) พิกัดของ B เมื่อ A มีพิกัด (2, -6)
3) พิกัดของ P เมื่อ Q มีพิกัด (7, 3, 2)
4) พิกัดของ Q เมื่อ P มีพิกัด (-4, 0, 8)

ระดับกลาง

3. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{q} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$ ให้หาเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2\bar{u} + \bar{v}$
2) $\bar{u} - 3\bar{v}$
3) $-\bar{p} + 2\bar{q}$
4) $5\bar{p} - 2\bar{q}$
5) นิเสธของ $3\bar{u} + 4\bar{v}$
6) นิเสธของ $4\bar{p} - 3\bar{q}$

4. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ และ $\bar{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$
ให้หาค่าของ a และ b ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$
2) $\bar{u} + a\bar{v} + b\bar{w} = \bar{0}$
3) $b\bar{r} = a\bar{p} - \bar{q}$
4) $\bar{r} = a\bar{p} - b\bar{q}$

5. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ให้เขียน $\begin{bmatrix} 18 \\ 17 \end{bmatrix}$ ในรูป $a\bar{u} + b\bar{v}$

6. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ให้เขียน $\begin{bmatrix} -11 \\ 6 \\ 19 \end{bmatrix}$ ในรูป $a\bar{u} + b\bar{v}$

ระดับท้าทาย

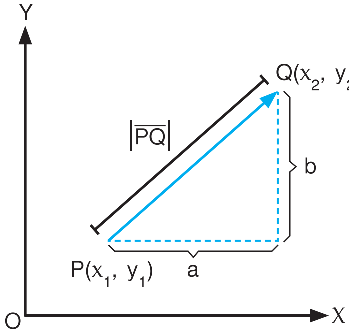
7. พิจารณาว่าเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -3 \\ -12 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3. ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

ขนาดของเวกเตอร์ใด ๆ หมายถึง ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทนเวกเตอร์นั้น ๆ



จากรูป กำหนดจุด P มีพิกัดเป็น (x_1, y_1)

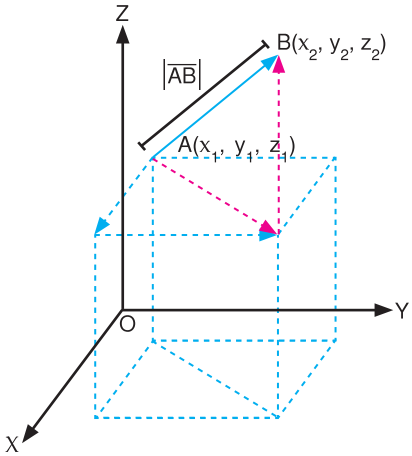
จุด Q มีพิกัดเป็น (x_2, y_2)

จะได้ $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะได้ว่า

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



จากรูป กำหนดจุด A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1)

จุด B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2)

จะได้ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท 1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ และ $z_2 - z_1 = c$ จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ตัวอย่างที่ 21

ให้หาขนาดของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB}$ **โดยที่ A มีพิกัดเป็น (1, -2, 8) และ B มีพิกัดเป็น (-1, 2, 4)**

วิธีทำ **1)** เนื่องจากเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$

ดังนั้น $|\bar{u}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$

2) จาก A มีพิกัดเป็น (1, -2, 8) และ B มีพิกัดเป็น (-1, 2, 4)

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 - 1 \\ 2 - (-2) \\ 4 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

เนื่องจากเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

ลองทำดู

ให้หาขนาดของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A มีพิกัดเป็น (2, 1, -3) และ B มีพิกัดเป็น (-1, 4, 2)

4. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

บทนิยาม เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

พิจารณา $\bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix}$ และ $\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} \\ -\frac{24}{25} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $|\bar{u}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

$|\bar{v}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$

$|\bar{w}| = \sqrt{\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(-\frac{24}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{625} + \frac{576}{625}} = \sqrt{\frac{625}{625}} = 1$

ซึ่งสามารถเขียน $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ในรูปการคูณสเกลาร์กับเวกเตอร์ใด ๆ ได้ ดังนี้

$\bar{u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ได้จากการคูณสเกลาร์ $\frac{1}{5}$ กับ $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\bar{v} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ได้จากการคูณสเกลาร์ $\frac{1}{13}$ กับ $\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\bar{w} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 \\ -24 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ได้จากการคูณสเกลาร์ $\frac{1}{25}$ กับ $\begin{bmatrix} 7 \\ -24 \end{bmatrix}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} 7 \\ -24 \end{bmatrix}$

ในกรณีทั่วไป จะได้ว่า สำหรับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย **ที่มีทิศทางเดียว**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย **ที่มีทิศทางตรงกันข้าม**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย **ที่ขนาน**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ k หน่วย **ที่ขนาน**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm\frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยกับเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติมีแนวคิดเช่นเดียวกับการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ในกรณีทั่วไป จะได้ว่า สำหรับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ จะมีขนาดเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย **ที่มีทิศทางเดียว**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

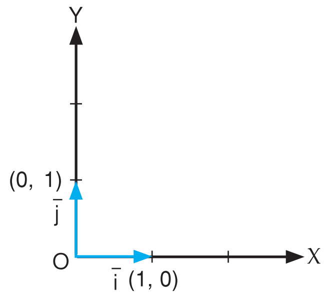
เวกเตอร์ 1 หน่วย **ที่มีทิศทางตรงกันข้าม**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ

$-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่**ขนาน**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ k หน่วย ที่**ขนาน**กับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

พิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติ

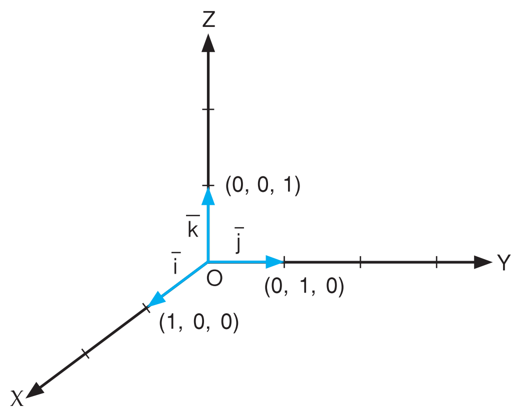


เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติที่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญและเป็นพื้นฐานของการเขียนเวกเตอร์ใด ๆ คือ

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X เขียนแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน Y เขียนแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$

พิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ



เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญและเป็นพื้นฐานของการเขียนเวกเตอร์ใด ๆ คือ

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X เขียนแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน Y เขียนแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน Z เขียนแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$

การเขียนเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{i}$, $\bar{j}$ หรือ $\bar{k}$

พิจารณา $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

ดังนั้น จึงสามารถเขียน $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ได้

นั่นคือ
$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณา $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

ดังนั้น จึงสามารถเขียน $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ได้

นั่นคือ
$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

ตัวอย่างที่ 22

กำหนดเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่ P(3, 2) จุดสิ้นสุดที่ Q(-4, 1) ให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และเขียนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูป $\bar{i}$ และ $\bar{j}$

วิธีทำ จากเวกเตอร์ที่กำหนดมีจุดเริ่มต้นที่ P(3, 2) และจุดสิ้นสุดที่ Q(-4, 1)

จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -4 - 3 \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ คือ $\pm\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{10}\begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}$

หรือ $-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\bar{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{10}\bar{j}$ และ $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\bar{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{10}\bar{j}$

ลองทำดู

กำหนดเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่ P(-3, 6) จุดสิ้นสุดที่ Q(-1, 3) ให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และเขียนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูป $\bar{i}$ และ $\bar{j}$

ตัวอย่างที่ 23

กำหนดเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่ P(1, 2, 3) จุดสิ้นสุดที่ Q(-3, -2, -1) ให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และเขียนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

วิธีทำ จากเวกเตอร์ที่กำหนดมีจุดเริ่มต้นที่ P(1, 2, 3) และจุดสิ้นสุดที่ Q(-3, -2, -1)

จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3 - 1 \\ -2 - 2 \\ -1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ คือ $\pm\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{12}\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

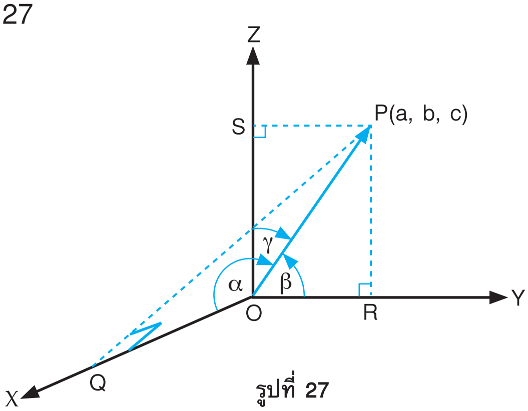
หรือ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{j} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{k}$ และ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{j} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\bar{k}$

ลองทำดู

กำหนดเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่ P(2, 4, 0) จุดสิ้นสุดที่ Q(-2, 0, 4) ให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และเขียน $\overrightarrow{PQ}$ ให้อยู่ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

5. โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction Cosines)

การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์นั้น นอกจากกำหนดด้วยพิกัดของเวกเตอร์แล้ว ยังกำหนดด้วยมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกนพิกัดทั้งสาม คือ แกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวก (ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) ดังรูปที่ 27



รูปที่ 27

จากรูปที่ 27 กำหนดจุด P(a, b, c) จะได้ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และกำหนด $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เป็นขนาดของมุมที่วัดจากแกนพิกัดทางด้านบวกของแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ ไปยัง $\overrightarrow{OP}$ จะได้

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a}{|\overrightarrow{OP}|}, \quad \cos\beta = \frac{OR}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{b}{|\overrightarrow{OP}|}, \quad \cos\gamma = \frac{OS}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{c}{|\overrightarrow{OP}|}$$

โดยที่ OQ, OR และ OS คือ ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

เรียก α, β, γ ว่า **มุมกำหนดทิศทาง** (direction angle) **ของ $\overrightarrow{OP}$** ซึ่งเป็นขนาดของมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านบวก ตามลำดับ และเรียก **$\cos\alpha$, $\cos\beta$** และ **$\cos\gamma$** ว่า **โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\overrightarrow{OP}$** ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ใด ๆ ดังนี้

บทนิยาม ให้ $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ **โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$** เทียบกับแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงลำดับ ดังนี้ $\frac{a}{|\bar{v}|}, \frac{b}{|\bar{v}|}, \frac{c}{|\bar{v}|}$

จากบทนิยาม จะเห็นว่า $\frac{a}{|\bar{v}|}$, $\frac{b}{|\bar{v}|}$ และ $\frac{c}{|\bar{v}|}$ อาจมีค่าเท่ากันหรือไม่เท่ากันได้ขึ้นอยู่กับขนาดของ α, β และ γ

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ จะได้ $|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ หรือ $\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{14}$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u}$

ตัวอย่างที่ 25

ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P(1, 1, -4) และมีจุดสิ้นสุดที่ Q(-3, -2, 0)

วิธีทำ จาก P(1, 1, -4) และ Q(-3, -2, 0) จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3 - 1 \\ -2 - 1 \\ 0 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

และ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $-\frac{4}{\sqrt{41}}, -\frac{3}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}$

หรือ $-\frac{4\sqrt{41}}{41}, -\frac{3\sqrt{41}}{41}, \frac{4\sqrt{41}}{41}$

ลองทำดู

ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P(-1, 2, 1) และมีจุดสิ้นสุดที่ Q(-3, -2, 0)

จากที่นักเรียนได้ศึกษาโคไซน์แสดงทิศทางมาแล้ว ต่อไปนักเรียนจะได้ศึกษาการใช้โคไซน์แสดงทิศทางเพื่อสรุปความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม เวกเตอร์สองเวกเตอร์**มีทิศทางเดียวกัน** ก็ต่อเมื่อ **มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน** และ**มีทิศทางตรงกันข้าม** ก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็น**จำนวนตรงข้าม**กับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

ตัวอย่างที่ 26

ให้ตรวจสอบว่าเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางตรงกันข้าม และเวกเตอร์คู่ใดขนานกัน

1) $\overrightarrow{MN}$ มีจุดเริ่มต้นที่ M(-2, 1, -3) มีจุดสิ้นสุดที่ N(4, 3, -2)

2) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(-6, -3, 1) มีจุดสิ้นสุดที่ Q(6, 1, 3)

3) $\bar{v} = -6\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$

วิธีทำ **1)** จากจุดเริ่มต้น M(-2, 1, -3) และจุดสิ้นสุด N(4, 3, -2)

จะได้ $\overrightarrow{MN} = \begin{bmatrix} 4-(-2) \\ 3-1 \\ -2-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{41}$

นั่นคือ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{MN}$ คือ $\frac{6}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}$ หรือ $\frac{6\sqrt{41}}{41}, \frac{2\sqrt{41}}{41}, \frac{\sqrt{41}}{41}$

2) จากจุดเริ่มต้น P(-6, -3, 1) และจุดสิ้นสุด Q(6, 1, 3)

จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 6-(-6) \\ 1-(-3) \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{41}$

นั่นคือ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{12}{2\sqrt{41}}, \frac{4}{2\sqrt{41}}, \frac{2}{2\sqrt{41}}$

หรือ $\frac{6\sqrt{41}}{41}, \frac{2\sqrt{41}}{41}, \frac{\sqrt{41}}{41}$

3) จาก $\bar{v} = -6\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$

จะได้ $|\bar{v}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36 + 4 + 1} = \sqrt{41}$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$ คือ $-\frac{6}{\sqrt{41}}, -\frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{1}{\sqrt{41}}$

หรือ $-\frac{6\sqrt{41}}{41}, -\frac{2\sqrt{41}}{41}, -\frac{\sqrt{41}}{41}$

จากข้อ 1), 2) และ 3) จะเห็นว่า

- $\overrightarrow{MN}$ และ $\overrightarrow{PQ}$ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน
  ดังนั้น $\overrightarrow{MN}$ และ $\overrightarrow{PQ}$ มีทิศทางเดียวกัน
- $\overrightarrow{MN}$ และ $\bar{v}$ กับ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{v}$ มีโคไซน์แสดงทิศทางเป็นจำนวนตรงข้ามกัน
  ดังนั้น $\overrightarrow{MN}$ และ $\bar{v}$ กับ $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
- $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน

ลองทำดู

ให้ตรวจสอบว่าเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางเดียวกัน เวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางตรงกันข้าม และเวกเตอร์คู่ใดขนานกัน

1) $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(4, -2, 5) มีจุดสิ้นสุดที่ B(3, 1, 2)

2) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(-3, 4, 0) มีจุดสิ้นสุดที่ Q(-2, 1, 3)

3) $\bar{u} = -2\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$

แบบฝึกทักษะ 3.3 ข

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาขนาดของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 15 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อพิกัดของ P คือ (1, 2) และพิกัดของ Q คือ (-3, 4)

4) $\overrightarrow{MN}$ เมื่อมีจุดเริ่มต้นที่ M(4, -3, 2) และมีจุดสิ้นสุดที่ N(-2, 1, -3)

2. ให้หาขนาดของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} + \bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

2) $2\bar{u} - 3\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

3) $\bar{u} - \bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = 4\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$

3. ให้หาค่า x ที่ทำให้ $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ เมื่อ

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ x \end{bmatrix}$

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 3 \end{bmatrix}$

4. ให้หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดในแต่ละต่อไปนี้ โดยเขียนในรูปของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเขียนในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
2) $\bar{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
3) $\overrightarrow{MN}$ โดยที่ M(-2, 5) และ N(4, -3)
4) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P(1, -2, 4) และ Q(-3, -1, 0)

ระดับกลาง

5. ให้หาเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. ให้หาเวกเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ ที่มี A(5, -3) และ B(2, -6)

7. ให้หาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

8. ให้หาเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P(-1, 2, 3) และ Q(-2, 4, -3)

9. ให้หาเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด ดังนี้

1) จุดเริ่มต้น P(2, 3, 4) และจุดสิ้นสุด Q(2, -3, 1)
2) จุดเริ่มต้น P(-1, 4, 2) และจุดสิ้นสุด Q(-2, 4, 3)

10. ให้ตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดในแต่ละต่อไปนี้ เวกเตอร์ใดบ้างเป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน มีทิศทางตรงกันข้าม และขนานกัน

1) เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ P(-2, 4, -3) และมีจุดสิ้นสุดที่ Q(4, 2, -1)
2) เวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และมีจุดสิ้นสุดที่ A(-6, 2, -2)
3) $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ระดับท้าทาย

11. รูปสามเหลี่ยม ABC มี A(x, y), B(6, 4) และ C(2, 3) เป็นจุดยอดมุม ถ้าจุด P เป็นจุดบนด้าน AB และอยู่ห่างจากจุด A เท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะระหว่าง A กับ B ถ้า $\overrightarrow{CP} = \bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว xy เท่ากับเท่าไร

3.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ ผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ซึ่งนิยามในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ดังนี้

บทนิยาม ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ แล้ว

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\mathbf{x_1x_2 + y_1y_2}$

ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ แล้ว

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\mathbf{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$

เขียนแทนผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\mathbf{\bar{u}\cdot\bar{v}}$

จากบทนิยาม จะพบว่า

1) ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เมื่อ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$

เนื่องจาก $x_1\bar{i} + y_1\bar{j} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ และ $x_2\bar{i} + y_2\bar{j} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$

2) ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เมื่อ $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

เนื่องจาก $x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ และ $x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

ตัวอย่างที่ 27

กำหนด $\bar{u} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -5\bar{i} + 8\bar{j}$ ให้หาค่าของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้

$$\begin{aligned} \bar{u}\cdot\bar{v} &= (4\bar{i} + 3\bar{j})\cdot(-5\bar{i} + 8\bar{j}) \\ &= (4)(-5) + (3)(8) \\ &= (-20) + 24 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = -6\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 5\bar{i} - 7\bar{j}$ ให้หาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$

ตัวอย่างที่ 28

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-5)(-2) + 6(-3) + (-9)(1)$$

$$= 10 - 18 - 9$$

$$= -17$$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$

Thinking Time

นักเรียนคิดว่า $\bar{u} \cdot \bar{v}$ และ $\bar{v} \cdot \bar{u}$ มีค่าเท่ากันหรือไม่

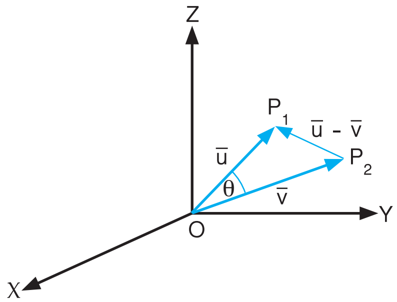
สมบัติ

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1) ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า
   (1) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
   (2) $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
   (3) $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (a\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (a\bar{v})$
   (4) $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$
   (5) $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$
   (6) $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$
   $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$
2) ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\mathbf{\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos \theta}$
   (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ทั้งสอง)
3) ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว **$\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$**

ในที่นี้ จะยกตัวอย่างการพิสูจน์สมบัติข้อ 2 และข้อ 3 ดังนี้

2) ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ โดยที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$



พิสูจน์ กำหนด $\overrightarrow{OP_1} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{OP_2} = \bar{v}$

จะได้ $\overrightarrow{P_2P_1} = \bar{u} - \bar{v}$

ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\bar{u} - \bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix}$

จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$(P_2P_1)^2 = (OP_1)^2 + (OP_2)^2 - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta$$

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

นั่นคือ $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

เนื่องจาก $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$

จะได้ว่า $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

และจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

3) ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์แล้ว $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

พิสูจน์ กำหนด θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ โดยที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

จาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ จะได้ มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ 90°

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos 90^\circ = |\bar{u}||\bar{v}|(0) = 0$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ แล้ว $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

ดังนั้น **$\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$**

ตัวอย่างที่ 29

ให้พิจารณาว่าเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

1) $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}$

วิธีทำ **1)**

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix} &= 3(-2) + 5(6)\\ &= -6 + 30\\ &= 24\end{aligned}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

2)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix} &= 4(5) + 5(-4)\\ &= 20 - 20\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}5\\-4\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

3)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} &= 3(1) + (-3)(3) + 1(6)\\ &= 3 - 9 + 6\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

ลองทำดู

ให้พิจารณาว่าเวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

1) $\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$

คณิตน่ารู้

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 30

กำหนด $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 9\bar{i} + 6\bar{j}$ ให้หามุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = 9\bar{i} + 6\bar{j} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$

จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3(9) + 2(6) = 27 + 12 = 39$

$|\bar{u}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|\bar{v}| = \sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

จะได้ว่า $39 = \sqrt{13}\cdot 3\sqrt{13}\cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{39}{3(13)} = 1$

เนื่องจาก $\cos 0^\circ = 1$

ดังนั้น $\theta = 0^\circ$

นั่นคือ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 0 องศา

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = 4\bar{i} + 10\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ ให้หามุม θ ซึ่งเป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ตัวอย่างที่ 31

ให้แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด P(2, -2, -3), Q(3, 0, 4) และ R(1, -5, -2) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ จากโจทย์ P(2, -2, -3), Q(3, 0, 4) และ R(1, -5, -2)

จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 0-(-2) \\ 4-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ -5-(-2) \\ -2-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

และ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1(-1) + 2(-3) + 7(1) = 0$

นั่นคือ $\overrightarrow{PQ}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{PR}$

ดังนั้น PQR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ลองทำดู

ให้แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด P(3, 4, 0), Q(3, 4, 12) และ R(6, 8, 0) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 32

กำหนด $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 7$ ให้หาค่าของ $|\bar{u} + \bar{v}|$

วิธีทำ จากสมบัติ $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|\bar{u} - \bar{v}|^2 &= (\bar{u} - \bar{v})\cdot(\bar{u} - \bar{v}) \\
&= \bar{u}\cdot\bar{u} - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v} \\
&= |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$ .....(1)

แทน $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 7$ ใน (1) จะได้

$$
\begin{aligned}
7^2 &= 3^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 4^2 \\
49 &= 9 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 16 \\
2\bar{u}\cdot\bar{v} &= -24 \\
\bar{u}\cdot\bar{v} &= -12
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$ .....(2)

แทน $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = -12$ ใน (2) จะได้

$$
\begin{aligned}
|\bar{u} + \bar{v}|^2 &= 3^2 + 2(-12) + 4^2 \\
&= 9 - 24 + 16 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $|\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{1} = 1$

ลองทำดู

กำหนด $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 4$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 5$ ให้หาค่าของ $|\bar{u} + \bar{v}|$

คณิตน่ารู้

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว

1) $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$

2) $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$

แบบฝึกทักษะ 3.4

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาค่าของ $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2) $\bar{u} = 4\bar{i} - 9\bar{j}$, $\bar{v} = -2\bar{i} + 3\bar{j}$

3) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

4) $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = -3\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$

2. ให้หาขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + 6\bar{j}$

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

3) $\bar{u} = -\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$

4) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$

2) $(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$

3) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v})$

4. กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าเช่นเดียวกับข้อ **3.**

5. ให้พิจารณาว่าเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

1) $\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. กำหนด $|\bar{u}| = 8$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u} + \bar{v}| = 5$ ให้หาค่าของ $|\bar{u} - \bar{v}|$

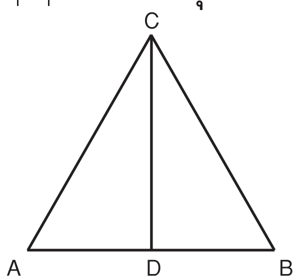
ระดับกลาง

7. ให้หาค่า a ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} -5 \\ a \\ -2 \end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. กำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุมกัน 120° และ $|\bar{u}| = 4$, $|\bar{v}| = 3$ ให้หามุมระหว่าง $\bar{u} + \bar{v}$ และ $\bar{u}$

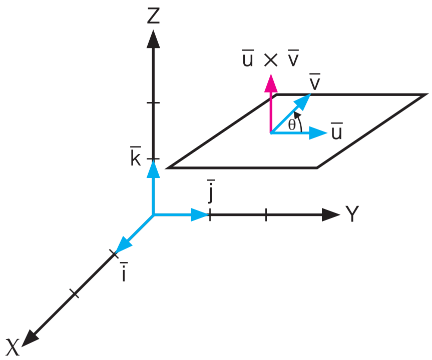
ระดับท้าทาย

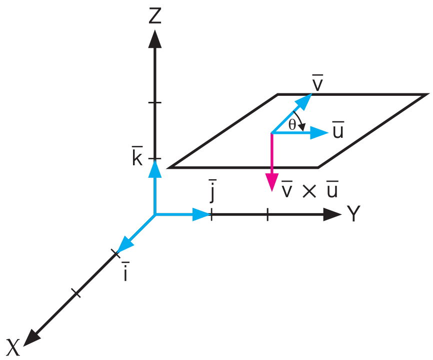
9. จากรูป ให้แสดงว่า เส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐาน



3.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product)

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ซึ่งเรียกว่า ผลคูณเชิงสเกลาร์ โดยในหัวข้อนี้ นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ เรียกว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์ที่เป็นผลลัพธ์นี้จะต้องเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ทั้งสอง ดังรูป





การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ จะต้องนำความรู้จากสมบัติ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรมาใช้ เช่น ให้ $\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้สมการ $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$ และ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$ จัดรูปสมการสองสมการและแก้ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปรจะได้เวกเตอร์ $\bar{w}$ ซึ่งได้มีการนำความรู้เกี่ยวกับการหาดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้การตัดแถวและตัดหลักมาเขียนเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในรูป $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ตามบทนิยาม ดังนี้

บทนิยาม

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ คือ

$$\begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

เขียนแทนผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์วี**

คณิตน่ารู้

การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์สามารถหาได้ในเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 33

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{bmatrix} -1(1) - 6(5) \\ 6(-3) - 2(1) \\ 2(5) - (-1)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 30 \\ -18 - 2 \\ 10 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 \\ -20 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$

ตัวอย่างที่ 34

กำหนด $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}$ และ $\bar{v} = -4\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\bar{u} \times \bar{v} &= \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\bar{k} \\
&= (-1 - 5)\bar{i} - (3 + 20)\bar{j} + (3 - 4)\bar{k} \\
&= -6\bar{i} - 23\bar{j} - \bar{k} \\
\bar{v} \times \bar{u} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\bar{k} \\
&= (5 + 1)\bar{i} - (-20 - 3)\bar{j} + (4 - 3)\bar{k} \\
&= 6\bar{i} + 23\bar{j} + \bar{k}
\end{aligned}$$

คณิตน่ารู้

จากตัวอย่างที่ 34 จะเห็นว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$ เป็นนิเสธซึ่งกันและกัน

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$

Thinking Time

กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้า $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{u} \times \bar{w}$ แล้ว $\bar{v} = \bar{w}$

ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $k = -2$ ให้หา $(k\bar{u}) \times \bar{v}$ และ $k(\bar{u} \times \bar{v})$

วิธีทำ จาก $k\bar{u} = (-2)\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $(k\bar{u}) \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\bar{k} = 48\bar{i} - 24\bar{j}$

และจาก $\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\bar{k} = -24\bar{i} + 12\bar{j}$

จะได้ $k(\bar{u} \times \bar{v}) = -2(-24\bar{i} + 12\bar{j}) = 48\bar{i} - 24\bar{j}$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $k = 3$ ให้หา $(k\bar{u}) \times \bar{v}$ และ $k(\bar{u} \times \bar{v})$

จากตัวอย่างที่ 34-35 จะเห็นว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์เป็นจริงตามสมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญต่อไปนี้

สมบัติ

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1) $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า
   (1) $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$
   (2) $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = (\bar{u} \times \bar{w}) + (\bar{v} \times \bar{w})$
   (3) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) + (\bar{u} \times \bar{w})$
   (4) $\bar{u} \times (k\bar{v}) = k(\bar{u} \times \bar{v})$
   (5) $(k\bar{u}) \times \bar{v} = k(\bar{u} \times \bar{v})$
   (6) $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$
   (7) $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$
2) ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
   แล้ว $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$
3) ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$
   เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
4) ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{u} \times \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ในที่นี้ จะยกตัวอย่างการพิสูจน์สมบัติข้อ 3) ดังนี้

3) ถ้า $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $\bar{v} \neq \bar{0}$ แล้ว $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

พิสูจน์ ให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

จะได้ $$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

ดังนั้น $$|\bar{u} \times \bar{v}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$

$$= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 - |\bar{u}\cdot\bar{v}|^2$$

$$= |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 - |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 \sin^2\theta$$

ทำให้ได้ว่า $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta > 0$ แสดงว่า $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

ดังนั้น $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

ตัวอย่างที่ 36

กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ ให้หาไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= (6 - 0)\bar{i} - (3 - 0)\bar{j} + (-1 - 4)\bar{k}$$
$$= 6\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k}$$

จะได้ว่า $|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 9 + 25} = \sqrt{70}$

จาก $|\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$|\bar{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

และ $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$

จะได้ว่า $\sqrt{70} = \sqrt{5}\sqrt{14} \sin\theta$

ดังนั้น $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{70}}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = 1$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j}$ ให้หาไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

ตัวอย่างที่ 37

กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{k}$ ให้หาค่า $\bar{u}\cdot(\bar{u} \times \bar{v})$ และ $\bar{v}\cdot(\bar{u} \times \bar{v})$

วิธีทำ จาก $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{k}$

จะได้ว่า
$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= (2 - 0)\bar{i} - (1 + 6)\bar{j} + (0 - 6)\bar{k}$$
$$= 2\bar{i} - 7\bar{j} - 6\bar{k}$$

ดังนั้น
$$\bar{u}\cdot(\bar{u} \times \bar{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-7) + (-2)(-6) = 0$$

และ
$$\bar{v}\cdot(\bar{u} \times \bar{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} = 3(2) + 0(-7) + 1(-6) = 0$$

ลองทำดู

กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + 3\bar{k}$ ให้หา $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$ และ $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$

คณิตน่ารู้

ถ้า $\bar{u}$ **ขนานกับ** $\bar{v}$ แล้ว $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$

ถ้า $\bar{u} \times \bar{v}$ **เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ** $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้ว่า $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$ และ $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

แบบฝึกทักษะ 3.5

ระดับพื้นฐาน

1. ให้หาเวกเตอร์ $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$ เมื่อกำหนด

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

3) $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j}$

4) $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \bar{v} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}$

2. เวกเตอร์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดขนานกัน

1) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

2) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}, \bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

4) $\bar{u} = \bar{i} - \frac{1}{4}\bar{j} - \frac{1}{4}\bar{k}, \bar{v} = 8\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$

ระดับกลาง

3. กำหนด $\bar{u} = 3\bar{i} + a\bar{j} - 2\bar{k}$ ขนานกับ $\bar{v} = -4\bar{i} - 9\bar{j} + \frac{8}{3}\bar{k}$ ให้หาค่า a

4. กำหนด $\bar{u} = 5\bar{i} - x\bar{j} + 3\bar{k}$ ขนานกับ $\bar{v} = -10\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$ ให้หาค่า x

5. กำหนด $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ และ $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ให้หาไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

ระดับท้าทาย

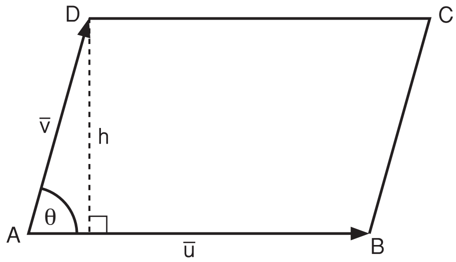
6. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เท่ากับ 135° ให้หาค่า $|\bar{u} \times \bar{v}|$

7. กำหนด $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 4$ และ $|\bar{u} \times \bar{v}| = 6$ ให้หามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

3.6 การนำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

ในหัวข้อนี้นักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องเวกเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา เช่น การใช้เวกเตอร์หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

1. การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



จากรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$, h เป็นความสูง และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เนื่องจาก $\quad \sin\theta = \dfrac{h}{|\bar{v}|}$

จะได้ว่า $\quad h = |\bar{v}|\sin\theta$

ทำให้ได้ว่า **พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** = ความยาวฐาน × ความสูง

$$= |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$$

$$= |\bar{u} \times \bar{v}|$$

ดังนั้น $|\bar{u} \times \bar{v}|$ ในทางเรขาคณิต**เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน**ที่มี $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นด้านประชิด

ตัวอย่างที่ 38

ให้หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{AD} = 3\bar{j} + 4\bar{k}$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

จาก
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\bar{k}$$
$$= (-8 - 0)\bar{i} - (12 - 0)\bar{j} + (9 - 0)\bar{k}$$
$$= -8\bar{i} - 12\bar{j} + 9\bar{k}$$

จะได้ว่า
$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 9^2} = \sqrt{289} = 17$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ 17 ตารางหน่วย

ลองทำดู

ให้หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 2\bar{i} - \bar{j}$ และ $\overrightarrow{AD} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$

ตัวอย่างที่ 39

รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด A(9, 12, 6), B(0, 2, 2) และ C(8, 8, -2) เป็นจุดยอด ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

จาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 - 9 \\ 2 - 12 \\ 2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 8 - 9 \\ 8 - 12 \\ -2 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} (-10)(-8) - (-4)(-4) \\ (-4)(-1) - (-9)(-8) \\ (-9)(-4) - (-10)(-1) \end{bmatrix}$

$= (80 - 16)\bar{i} + (4 - 72)\bar{j} + (36 - 10)\bar{k} = 64\bar{i} - 68\bar{j} + 26\bar{k}$

ดังนั้น $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{64^2 + (-68)^2 + 26^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(32 \cdot 2)^2 + (34 \cdot 2)^2 + (13 \cdot 2)^2}$

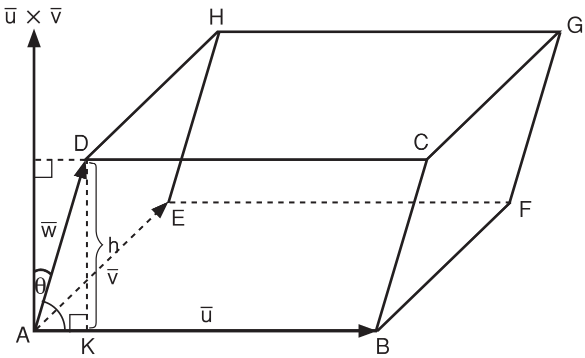
$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2(32^2 + 34^2 + 13^2)} = \sqrt{2,349} = 9\sqrt{29}$

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $9\sqrt{29}$ ตารางหน่วย

ลองทำดู

รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด A(2, 6, 2), B(1, 9, 6) และ C(4, 2, 8) เป็นจุดยอด ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้

2. การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



จากรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCDEFGH กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AE} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{w}$, h เป็นความสูง และมีพื้นที่ฐานของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\bar{u} \times \bar{v}|$ ตารางหน่วย และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{w}$ และ $\bar{u} \times \bar{v}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AKD

จะได้ $\cos\theta = \frac{AK}{AD} = \frac{h}{|\bar{w}|}$

$h = |\bar{w}|\cos\theta$

จากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน = พื้นที่ฐาน $\times$ ความสูง

$$= |\bar{u} \times \bar{v}||\bar{w}|\cos\theta$$

$$= \bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$$

เนื่องจาก ปริมาตรต้องเป็นบวก

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})|$ ลูกบาศก์หน่วย และในทางเรขาคณิต $|\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})|$ เท่ากับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นด้านของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

คณิตน่ารู้

- ถ้า $\bar{u}$ $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน แล้วผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{w}$ กับ $\bar{u} \times \bar{v}$ เท่ากับ $\bar{0}$ นั่นคือ $\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$
- จากเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ ที่เท่ากัน จะได้ $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{v}) = 0$ และ $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{u}) = 0$

ตัวอย่างที่ 40

ให้หาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{w} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ เป็นด้าน

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})|$

จะได้ว่า

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= (3 - 4)\bar{i} - (2 + 4)\bar{j} + (-2 - 3)\bar{k}$$

$$= -\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k}$$

ดังนั้น

$$|\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})| = |(\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) \cdot (-\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k})|$$

$$= |1(-1) + 1(-6) + 2(-5)|$$

$$= |-1 - 6 - 10|$$

$$= |-17|$$

$$= 17$$

นั่นคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ 17 ลูกบาศก์หน่วย

ลองทำดู

ให้หาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{v} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{w} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ เป็นด้าน

เกร็ดน่ารู้

Sir. Willam Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton (ค.ศ. 1805-1885) เป็นผู้คิดค้นควอเทอร์เนียน (Quaternion) ซึ่งทำให้ได้ทางออกของการคูณเวกเตอร์ในระบบสามมิติ โดยได้รับการพิสูจน์และยอมรับว่าเป็นพื้นฐานของวิชาพีชคณิตสมัยใหม่ ควอเทอร์เนียนเป็นจำนวนที่เขียนในรูป w + ix + jy + kz โดยที่ W, X, Y และ Z เป็นจำนวนจริง

กิจกรรม คณิตศาสตร์

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 4 กลุ่ม กลุ่มละเท่า ๆ กัน แล้วช่วยกันทำกิจกรรมต่อไปนี้

อุปกรณ์

1. ก้านลูกโป่ง
2. กระดาษกาว
3. ปากกาเคมีคละสี
4. กรรไกร

1. ให้แต่ละกลุ่มสร้างระบบพิกัดฉากสามมิติโดยใช้ก้านลูกโป่งในการสร้างแกน X แกน Y และแกน Z โดยใช้กระดาษกาวในการยึดแกน
2. ให้ตัวแทนแต่ละกลุ่มออกมาจับสลากจุดในระบบพิกัดฉากโดยกำหนดจุด ดังนี้

   A (1, -3, 2) B (2, 0, -5)
   C (-3, 4, -1) D (7, -2, 6)
   E (2, 2, -6)

3. สร้างพิกัดจุดจากสลากที่จับได้จากข้อ 2. แล้วใช้ก้านลูกโป่งในการสร้างพิกัดโดยให้แต่ละหลอดขนานกับแกน X แกน Y และแกน Z
4. ส่งตัวแทนกลุ่มออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

แบบฝึกทักษะ 3.6

ระดับพื้นฐาน

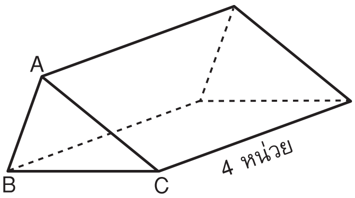
1. ให้หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 7\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\overrightarrow{AD} = 5\bar{i} + \bar{j}$
2. ให้หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\overrightarrow{PS} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$
3. ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ $\overrightarrow{AB} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$
4. ให้หาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{v} = 4\bar{i} - 2\bar{k}$ และ $\bar{w} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$ เป็นด้าน

ระดับกลาง

5. รูปสามเหลี่ยม PQR มีจุด P(0, 2, 1), Q(1, -1, 2) และ R(2, 0, -1) เป็นจุดยอด ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้
6. ให้หาปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี AB, AC และ AD เป็นด้านประกอบ เมื่อ A(1, 1, 1), B(2, 0, 3), C(3, -1, -2) และ D(4, 1, 7)

ระดับท้าทาย

7. ให้หาปริมาตรของปริซึม ดังรูป ที่มี $\overrightarrow{AB} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\overrightarrow{AC} = 4\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ เป็นด้าน



ตรวจสอบตนเอง

หลังจากเรียนจบหน่วยแล้ว ให้นักเรียนบอกสัญลักษณ์ที่ตรงกับระดับความสามารถของตนเอง

	ดี	พอใช้	ควรปรับปรุง
1. เข้าใจและสามารถหาเวกเตอร์ และนิเสธของเวกเตอร์ได้			
2. สามารถหาผลลัพธ์การบวกการลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้			
3. หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้			
4. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาได้			

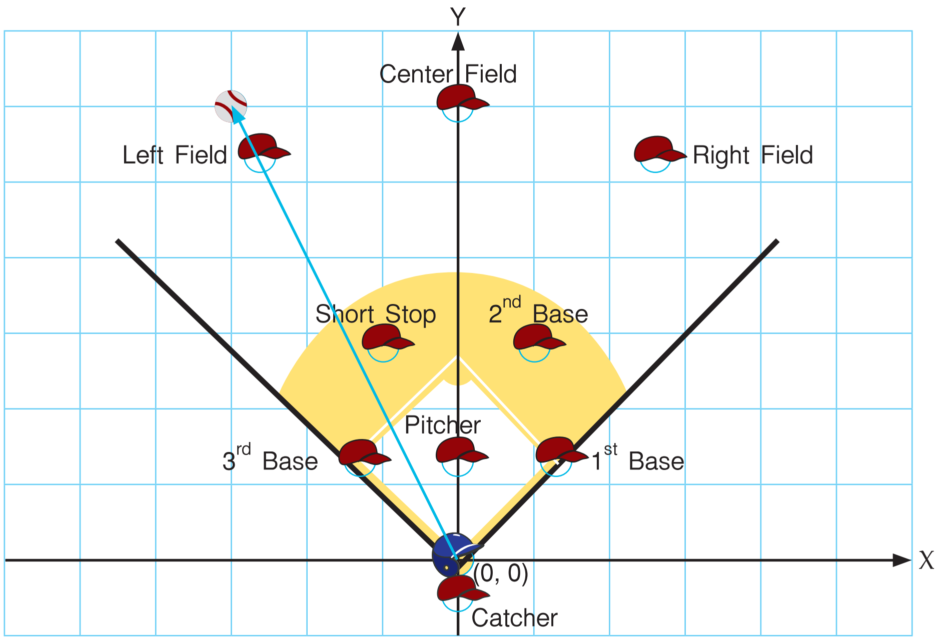
คณิตศาสตร์ในชีวิตจริง

กีฬาเบสบอล (baseball)

เบสบอล เป็นกีฬาประเภททีม โดยแบ่งออกเป็น 2 ทีม คือ ทีมรุกและทีมรับ ซึ่งขณะทำการแข่งขัน 1 ทีม จะมีผู้เล่นทีมละ 9 คน โดยทีมรุกจะขึ้นมาตีลูกทีละหนึ่งคน เรียกว่า ผู้ตี (batter) และทีมรับมีหน้าที่ยับยั้งการทำคะแนนของทีมรุก โดยการทำคะแนนในเกมนั้นจะเกิดจากการที่ผู้ตีวิ่งไปสัมผัสฐาน หรือเบส (base) ซึ่งวางอยู่ตามจุดต่าง ๆ 4 จุด ตามลำดับ

สถานการณ์

ในการแข่งขันกีฬาเบสบอลรายการหนึ่งปรากฏว่า ผู้ตี (batter) จากทีมหนึ่งซึ่งยืนอยู่ที่จุด (0, 0) ตีลูกออกไปจากสนามด้านซ้ายที่จุด (-3, 6) ดังรูป



อยากทราบว่าลูกบอลจะมีขนาดและทิศทางเป็นเท่าใด

สรุปแนวคิดหลัก

เวกเตอร์ในสามมิติ

ระบบพิกัดฉากสามมิติ

- **ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ**

  ระยะทางระหว่างจุด $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ หรือ

  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

เวกเตอร์

- **การบวกเวกเตอร์**

  ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

  ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\bar{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$

- **การลบเวกเตอร์**

  ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

  ผลลบของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\bar{u} - \bar{v}$ คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{v}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$

- **การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์**

  ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ โดยที่

  1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = 0$

  2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

  3) ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

- ถ้า $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

  แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ หรือ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- ถ้า $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

  แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ หรือ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
- เวกเตอร์ 1 หน่วย แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
- เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
- เวกเตอร์ k หน่วย ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\pm\dfrac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
- **โคไซน์แสดงทิศทาง**
  - ให้ $\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{v}$ เทียบกับแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ คือ $\dfrac{a}{|\bar{v}|}, \dfrac{b}{|\bar{v}|}, \dfrac{c}{|\bar{v}|}$
  - เวกเตอร์สองเวกเตอร์**มีทิศทางเดียวกัน** ก็ต่อเมื่อ **มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน** และ**มีทิศทางตรงกันข้ามกัน** ก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็น**จำนวนตรงข้าม**กับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

ผลคูณเชิงสเกลาร์

- ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2$
  ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ เขียนแทนผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$
- ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$
  ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ โดยที่ $\bar{u} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ และ $\bar{v} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$

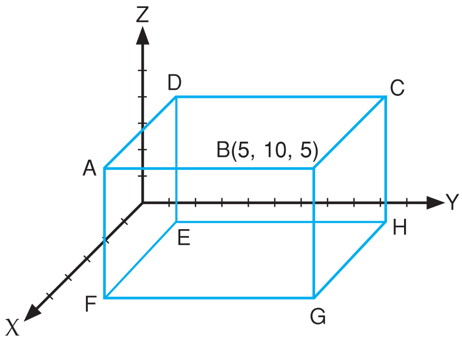
การนำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

- พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\bar{u} \times \bar{v}|$ เมื่อ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นด้านประกอบมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$
- ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\bar{w}\cdot(\bar{u} \times \bar{v})|$ เมื่อ $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นด้านของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

แบบฝึกทักษะ ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่ 3

คำชี้แจง : ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จากรูป ให้หาพิกัดของจุด A, C, D, E, F และ G เมื่อกำหนดจุด B(5, 10, 5)



2. ให้หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) A(-2, 1, 5) กับ B(1, 3, 0)

2) A(2, 3, -2) กับ B(4, 5, 6)

3) A(-1, 1, 7) กับ B(8, 5, 2)

4) A(2, 1, -5) กับ B(0, 2, -1)

3. ให้พิจารณาข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้ ว่าเป็นปริมาณสเกลาร์หรือปริมาณเวกเตอร์

1) ใบเฟิร์นหนัก 45 กิโลกรัม

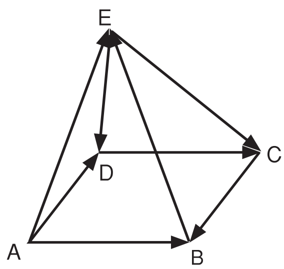
2) โบมีที่ดิน 2 ไร่ กับอีก 1 งาน

3) สมยศขับรถไปจังหวัดชุมพรด้วยความเร็ว 120 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

4) วารีออกแรงดึงหนังสติ๊กเป็นเวลา 30 วินาที

5) ส้มซื้อผลไม้ไปฝากคุณยายที่บ้านอยู่ห่างกันไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทาง 500 เมตร

4. จากปริซึมฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ให้หาเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้



1) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน

2) เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน

3) เวกเตอร์ที่เท่ากัน

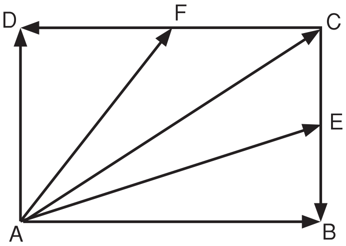
5. กำหนด $\bar{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ ให้หา

1) $3\bar{p} + \bar{q}$

2) นิเสธของ $5\bar{p} - 2\bar{q}$

3) $-4\bar{u} + 5\bar{v}$

4) นิเสธของ $3\bar{u} - \bar{v}$

6. 

จากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีจุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ตามลำดับ ให้หาผลบวกของ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}$

7. ให้หา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนด A และ B ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) A(3, -2), B(6, 5)
2) A(-1, 4), B(2, 7)
3) A(1, 3, 5), B(3, -2, 8)
4) A(-5, -1, 0), B(1, 1, 2)

8. ให้หาขนาดของเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$
2) $\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$
3) $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
4) $9\bar{i} - 2\bar{j}$
5) $\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$
6) $-4\bar{i} + 5\bar{k}$

9. ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ เมื่อกำหนดจุด M และ N ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) M(3, -3, -4), N(1, -2, 5)
2) M(4, 5, -1), N(-3, 0, 6)
3) M(2, -3, 1), N(-6, 0, 1)
4) M(7, 2, -1), N(-8, 6, 2)

10. ให้หา $\bar{u} \cdot \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{v} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$
2) $\bar{u} = -3\bar{j} + 7\bar{k}$, $\bar{v} = \bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$
3) $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{k}$

11. ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\bar{u} = -\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$
2) $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = 4\bar{i} + \bar{j} - 6\bar{k}$
3) $\bar{u} = -7\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$

12. ให้หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน MNOP เมื่อ $\overrightarrow{MN} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ และ $\overrightarrow{MP} = 5\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$

13. ให้หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(1, 3, -1), B(2, 0, -3) และ C(-4, 1, 2)

14. ให้หาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{v} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{w} = -6\bar{i} + 6\bar{j} + 8\bar{k}$ เป็นด้าน

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
0°	00′	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90°	00′
	10′	.0029	.0029	.0029	343.77	1.0000	1.5679		50′
	20′	.0058	.0058	.0058	171.89	1.0000	1.5650		40′
	30′	.0087	.0087	.0087	114.59	1.0000	1.5621		30′
	40′	.0116	.0116	.0116	85.940	.9999	1.5592		20′
	50′	.0145	.0145	.0145	68.750	.9999	1.5563		10′
1°	00′	.0175	.0175	.0175	57.290	.9998	1.5533	89°	00′
	10′	.0204	.0204	.0204	49.104	.9998	1.5504		50′
	20′	.0233	.0233	.0233	42.964	.9997	1.5475		40′
	30′	.0262	.0262	.0262	38.188	.9997	1.5446		30′
	40′	.0291	.0291	.0291	34.368	.9996	1.5417		20′
	50′	.0320	.0320	.0320	31.242	.9995	1.5388		10′
2°	00′	.0349	.0349	.0349	28.636	.9994	1.5359	88°	00′
	10′	.0378	.0378	.0378	26.432	.9993	1.5330		50′
	20′	.0407	.0407	.0407	24.542	.9992	1.5301		40′
	30′	.0436	.0436	.0437	22.904	.9990	1.5272		30′
	40′	.0465	.0465	.0466	21.470	.9989	1.5243		20′
	50′	.0495	.0494	.0495	20.206	.9988	1.5213		10′
3°	00′	.0524	.0523	.0524	19.081	.9986	1.5184	87°	00′
	10′	.0553	.0552	.0553	18.075	.9985	1.5155		50′
	20′	.0582	.0581	.0582	17.169	.9983	1.5126		40′
	30′	.0611	.0610	.0612	16.350	.9981	1.5097		30′
	40′	.0640	.0640	.0641	15.605	.9980	1.5068		20′
	50′	.0669	.0669	.0670	14.924	.9978	1.5039		10′
4°	00′	.0698	.0698	.0699	14.301	.9976	1.5010	86°	00′
	10′	.0727	.0727	.0729	13.727	.9974	1.4981		50′
	20′	.0756	.0756	.0758	13.197	.9971	1.4952		40′
	30′	.0785	.0785	.0787	12.706	.9969	1.4923		30′
	40′	.0814	.0814	.0816	12.251	.9967	1.4893		20′
	50′	.0844	.0843	.0846	11.826	.9964	1.4864		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
5°	00′	.0873	.0872	.0875	11.430	.9962	1.4835	85°	00′
	10′	.0902	.0901	.0904	11.059	.9959	1.4806		50′
	20′	.0931	.0929	.0934	10.712	.9957	1.4777		40′
	30′	.0960	.0958	.0963	10.385	.9954	1.4748		30′
	40′	.0989	.0987	.0992	10.078	.9951	1.4719		20′
	50′	.1018	.1016	.1022	9.7882	.9948	1.4690		10′
6°	00′	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84°	00′
	10′	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632		50′
	20′	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603		40′
	30′	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573		30′
	40′	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544		20′
	50′	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515		10′
7°	00′	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83°	00′
	10′	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457		50′
	20′	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9918	1.4428		40′
	30′	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399		30′
	40′	.1338	.1334	.1346	7.4287	.9911	1.4370		20′
	50′	.1367	.1363	.1376	7.2687	.9907	1.4341		10′
8°	00′	.1396	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.4312	82°	00′
	10′	.1425	.1421	.1435	6.9682	.9899	1.4283		50′
	20′	.1454	.1449	.1465	6.8269	.9894	1.4254		40′
	30′	.1484	.1478	.1495	6.6912	.9890	1.4224		30′
	40′	.1513	.1507	.1524	6.5606	.9886	1.4195		20′
	50′	.1542	.1536	.1554	6.4348	.9881	1.4166		10′
9°	00′	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81°	00′
	10′	.1600	.1593	.1614	6.1970	.9872	1.4108		50′
	20′	.1629	.1622	.1644	6.0844	.9868	1.4079		40′
	30′	.1658	.1650	.1673	5.9758	.9863	1.4050		30′
	40′	.1687	.1679	.1703	5.8708	.9858	1.4021		20′
	50′	.1716	.1708	.1733	5.7694	.9853	1.3992		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
10°	00′	.1745	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.3963	80°	00′
	10′	.1774	.1765	.1793	5.5764	.9843	1.3934		50′
	20′	.1804	.1794	.1823	5.4845	.9838	1.3904		40′
	30′	.1833	.1822	.1853	5.3955	.9833	1.3875		30′
	40′	.1862	.1851	.1883	5.3093	.9827	1.3846		20′
	50′	.1891	.1880	.1914	5.2257	.9822	1.3817		10′
11°	00′	.1920	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.3788	79°	00′
	10′	.1949	.1937	.1974	5.0658	.9811	1.3759		50′
	20′	.1978	.1965	.2004	4.9894	.9805	1.3730		40′
	30′	.2007	.1994	.2035	4.9152	.9799	1.3701		30′
	40′	.2036	.2022	.2065	4.8430	.9793	1.3672		20′
	50′	.2065	.2051	.2095	4.7729	.9787	1.3643		10′
12°	00′	.2094	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.3614	78°	00′
	10′	.2123	.2108	.2156	4.6382	.9775	1.3584		50′
	20′	.2153	.2136	.2186	4.5736	.9769	1.3555		40′
	30′	.2182	.2164	.2217	4.5107	.9763	1.3526		30′
	40′	.2211	.2193	.2247	4.4494	.9757	1.3497		20′
	50′	.2240	.2221	.2278	4.3897	.9750	1.3468		10′
13°	00′	.2269	.2250	.2309	4.3315	.9744	1.3439	77°	00′
	10′	.2298	.2278	.2339	4.2747	.9737	1.3410		50′
	20′	.2327	.2306	.2370	4.2193	.9730	1.3381		40′
	30′	.2356	.2334	.2401	4.1653	.9724	1.3352		30′
	40′	.2385	.2363	.2432	4.1126	.9717	1.3323		20′
	50′	.2414	.2391	.2462	4.0611	.9710	1.3294		10′
14°	00′	.2443	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.3265	76°	00′
	10′	.2473	.2447	.2524	3.9617	.9696	1.3235		50′
	20′	.2502	.2476	.2555	3.9136	.9689	1.3206		40′
	30′	.2531	.2504	.2586	3.8667	.9681	1.3177		30′
	40′	.2560	.2532	.2617	3.8208	.9674	1.3148		20′
	50′	.2589	.2560	.2648	3.7760	.9667	1.3119		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
15°	00′	.2618	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.3090	75°	00′
	10′	.2647	.2616	.2711	3.6891	.9652	1.3061		50′
	20′	.2676	.2644	.2742	3.6470	.9644	1.3032		40′
	30′	.2705	.2672	.2773	3.6059	.9636	1.3003		30′
	40′	.2734	.2700	.2805	3.5656	.9628	1.2974		20′
	50′	.2763	.2728	.2836	3.5261	.9621	1.2945		10′
16°	00′	.2793	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.2915	74°	00′
	10′	.2822	.2784	.2899	3.4495	.9605	1.2886		50′
	20′	.2851	.2812	.2931	3.4124	.9596	1.2857		40′
	30′	.2880	.2840	.2962	3.3759	.9588	1.2828		30′
	40′	.2909	.2868	.2994	3.3402	.9580	1.2799		20′
	50′	.2938	.2896	.3026	3.3052	.9572	1.2770		10′
17°	00′	.2967	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.2741	73°	00′
	10′	.2996	.2952	.3089	3.2371	.9555	1.2712		50′
	20′	.3025	.2979	.3121	3.2041	.9546	1.2683		40′
	30′	.3054	.3007	.3153	3.1716	.9537	1.2654		30′
	40′	.3083	.3035	.3185	3.1397	.9528	1.2625		20′
	50′	.3113	.3062	.3217	3.1084	.9520	1.2595		10′
18°	00′	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72°	00′
	10′	.3171	.3118	.3281	3.0475	.9502	1.2537		50′
	20′	.3200	.3145	.3314	3.0178	.9492	1.2508		40′
	30′	.3229	.3173	.3346	2.9887	.9483	1.2479		30′
	40′	.3258	.3201	.3378	2.9600	.9474	1.2450		20′
	50′	.3287	.3228	.3411	2.9319	.9465	1.2421		10′
19°	00′	.3316	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.2392	71°	00′
	10′	.3345	.3283	.3476	2.8770	.9446	1.2363		50′
	20′	.3374	.3311	.3508	2.8502	.9436	1.2334		40′
	30′	.3403	.3338	.3541	2.8239	.9426	1.2305		30′
	40′	.3432	.3365	.3574	2.7980	.9417	1.2275		20′
	50′	.3462	.3393	.3607	2.7725	.9407	1.2246		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
20°	00′	.3491	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.2217	70°	00′
	10′	.3520	.3448	.3673	2.7228	.9387	1.2188		50′
	20′	.3549	.3475	.3706	2.6985	.9377	1.2159		40′
	30′	.3578	.3502	.3739	2.6746	.9367	1.2130		30′
	40′	.3607	.3529	.3772	2.6511	.9356	1.2101		20′
	50′	.3636	.3557	.3805	2.6279	.9346	1.2072		10′
21°	00′	.3665	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.2043	69°	00′
	10′	.3694	.3611	.3872	2.5826	.9325	1.2014		50′
	20′	.3723	.3638	.3906	2.5605	.9315	1.1985		40′
	30′	.3752	.3665	.3939	2.5386	.9304	1.1956		30′
	40′	.3782	.3692	.3973	2.5172	.9293	1.1926		20′
	50′	.3811	.3719	.4006	2.4960	.9283	1.1897		10′
22°	00′	.3840	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.1868	68°	00′
	10′	.3869	.3773	.4074	2.4545	.9261	1.1839		50′
	20′	.3898	.3800	.4108	2.4342	.9250	1.1810		40′
	30′	.3927	.3827	.4142	2.4142	.9239	1.1781		30′
	40′	.3956	.3854	.4176	2.3945	.9228	1.1752		20′
	50′	.3985	.3881	.4210	2.3750	.9216	1.1723		10′
23°	00′	.4014	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.1694	67°	00′
	10′	.4043	.3934	.4279	2.3369	.9194	1.1665		50′
	20′	.4072	.3961	.4314	2.3183	.9182	1.1636		40′
	30′	.4102	.3987	.4348	2.2998	.9171	1.1606		30′
	40′	.4131	.4014	.4383	2.2817	.9159	1.1577		20′
	50′	.4160	.4041	.4417	2.2637	.9147	1.1548		10′
24°	00′	.4189	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.1519	66°	00′
	10′	.4218	.4094	.4487	2.2286	.9124	1.1490		50′
	20′	.4247	.4120	.4522	2.2113	.9112	1.1461		40′
	30′	.4276	.4147	.4557	2.1943	.9100	1.1432		30′
	40′	.4305	.4173	.4592	2.1775	.9088	1.1403		20′
	50′	.4334	.4200	.4628	2.1609	.9075	1.1374		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
25°	00′	.4363	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.1345	65°	00′
	10′	.4392	.4253	.4699	2.1283	.9051	1.1316		50′
	20′	.4422	.4279	.4734	2.1123	.9038	1.1286		40′
	30′	.4451	.4305	.4770	2.0965	.9026	1.1257		30′
	40′	.4480	.4331	.4806	2.0809	.9013	1.1228		20′
	50′	.4509	.4358	.4841	2.0655	.9001	1.1199		10′
26°	00′	.4538	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.1170	64°	00′
	10′	.4567	.4410	.4913	2.0353	.8975	1.1141		50′
	20′	.4596	.4436	.4950	2.0204	.8962	1.1112		40′
	30′	.4625	.4462	.4986	2.0057	.8949	1.1083		30′
	40′	.4654	.4488	.5022	1.9912	.8936	1.1054		20′
	50′	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025		10′
27°	00′	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63°	00′
	10′	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0966		50′
	20′	.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0937		40′
	30′	.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	1.0908		30′
	40′	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879		20′
	50′	.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850		10′
28°	00′	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821	62°	00′
	10′	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	1.0792		50′
	20′	.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	1.0763		40′
	30′	.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	1.0734		30′
	40′	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705		20′
	50′	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676		10′
29°	00′	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647	61°	00′
	10′	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617		50′
	20′	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588		40′
	30′	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559		30′
	40′	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530		20′
	50′	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
30°	00′	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60°	00′
	10′	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443		50′
	20′	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414		40′
	30′	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385		30′
	40′	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356		20′
	50′	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327		10′
31°	00′	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59°	00′
	10′	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268		50′
	20′	.5469	.5200	.6088	1.6426	.8542	1.0239		40′
	30′	.5498	.5225	.6128	1.6319	.8526	1.0210		30′
	40′	.5527	.5250	.6168	1.6212	.8511	1.0181		20′
	50′	.5556	.5275	.6208	1.6107	.8496	1.0152		10′
32°	00′	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58°	00′
	10′	.5614	.5324	.6289	1.5900	.8465	1.0094		50′
	20′	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0061		40′
	30′	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036		30′
	40′	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007		20′
	50′	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977		10′
33°	00′	.5760	.5446	.6494	1.5399	.8387	.9948	57°	00′
	10′	.5789	.5471	.6536	1.5301	.8371	.9919		50′
	20′	.5818	.5495	.6577	1.5204	.8355	.9890		40′
	30′	.5847	.5519	.6619	1.5108	.8339	.9861		30′
	40′	.5876	.5544	.6661	1.5013	.8323	.9832		20′
	50′	.5905	.5568	.6703	1.4919	.8307	.9803		10′
34°	00′	.5934	.5592	.6745	1.4826	.8290	.9774	56°	00′
	10′	.5963	.5616	.6787	1.4733	.8274	.9745		50′
	20′	.5992	.5640	.6830	1.4641	.8258	.9716		40′
	30′	.6021	.5664	.6873	1.4550	.8241	.9687		30′
	40′	.6050	.5688	.6916	1.4460	.8225	.9657		20′
	50′	.6080	.5712	.6959	1.4370	.8208	.9628		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
35°	00′	.6109	.5736	.7002	1.4281	.8192	.9599	55°	00′
	10′	.6138	.5760	.7046	1.4193	.8175	.9570		50′
	20′	.6167	.5783	.7089	1.4106	.8158	.9541		40′
	30′	.6196	.5807	.7133	1.4019	.8141	.9512		30′
	40′	.6225	.5831	.7177	1.3934	.8124	.9483		20′
	50′	.6254	.5854	.7221	1.3848	.8107	.9454		10′
36°	00′	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54°	00′
	10′	.6312	.5901	.7310	1.3680	.8073	.9396		50′
	20′	.6341	.5925	.7355	1.3597	.8056	.9367		40′
	30′	.6370	.5948	.7400	1.3514	.8039	.9338		30′
	40′	.6400	.5972	.7445	1.3432	.8021	.9308		20′
	50′	.6429	.5995	.7490	1.3351	.8004	.9279		10′
37°	00′	.6458	.6018	.7536	1.3270	.7986	.9250	53°	00′
	10′	.6487	.6041	.7581	1.3190	.7969	9221		50′
	20′	.6516	.6065	.7627	1.3111	.7951	.9192		40′
	30′	.6545	.6088	.7673	1.3032	.7934	.9163		30′
	40′	.6574	.6111	.7720	1.2954	.7916	.9134		20′
	50′	.6603	.6134	.7766	1.2876	.7898	.9105		10′
38°	00′	.6632	.6157	.7813	1.2799	.7880	.9076	52°	00′
	10′	.6661	.6180	.7860	1.2723	.7862	.9047		50′
	20′	.6690	.6202	.7907	1.2647	.7844	.9018		40′
	30′	.6720	.6225	.7954	1.2572	.7826	.8988		30′
	40′	.6749	.6248	.8002	1.2497	.7808	.8959		20′
	50′	.6778	.6271	.8050	1.2423	.7790	.8930		10′
39°	00′	.6807	.6293	.8098	1.2349	.7771	.8901	51°	00′
	10′	.6836	.6316	.8146	1.2276	.7753	.8872		50′
	20′	.6865	.6338	.8195	1.2203	.7735	.8843		40′
	30′	.6894	.6361	.8243	1.2131	.7716	.8814		30′
	40′	.6923	.6383	.8292	1.2059	.7698	.8785		20′
	50′	.6952	.6406	.8342	1.1988	.7679	.8756		10′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine			
40°	00′	.6981	.6428	.8391	1.1918	.7660	.8727	50°	00′
	10′	.7010	.6450	.8441	1.1847	.7642	.8698		50′
	20′	.7039	.6472	.8491	1.1778	.7623	.8668		40′
	30′	.7069	.6494	.8541	1.1708	.7604	.8639		30′
	40′	.7098	.6517	.8591	1.1640	.7585	.8610		20′
	50′	.7127	.6539	.8642	1.1571	.7566	.8581		10′
41°	00′	.7156	.6561	.8693	1.1504	.7547	.8552	49°	00′
	10′	.7185	.6583	.8744	1.1436	.7528	.8523		50′
	20′	.7214	.6604	.8796	1.1369	.7509	.8494		40′
	30′	.7243	.6626	.8847	1.1303	.7490	.8465		30′
	40′	.7272	.6648	.8899	1.1237	.7470	.8436		20′
	50′	.7301	.6670	.8952	1.1171	.7451	.8407		10′
42°	00′	.7330	.6691	.9004	1.1106	.7431	.8378	48°	00′
	10′	.7359	.6713	.9057	1.1041	.7412	.8348		50′
	20′	.7389	.6734	.9110	1.0977	.7392	.8319		40′
	30′	.7418	.6756	.9163	1.0913	.7373	.8290		30′
	40′	.7447	.6777	.9217	1.0850	.7353	.8261		20′
	50′	.7476	.6799	.9271	1.0786	.7333	.8232		10′
43°	00′	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47°	00′
	10′	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174		50′
	20′	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145		40′
	30′	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116		30′
	40′	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087		20′
	50′	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058		10′
44°	00′	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46°	00′
	10′	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999		50′
	20′	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970		40′
	30′	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941		30′
	40′	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912		20′
	50′	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883		10′
45°	00′	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45°	00′
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees	

อภิธานศัพท์

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันเป็นคาบ
(periodic function)

ฟังก์ชันค่าจริง f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ทำให้ $f(x + a) = f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนเรียกจำนวน a ข้างต้นที่เป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุดว่า คาบ (period) ของฟังก์ชัน

มุมก้ม
(angle of depression)

มุมที่มีแขนข้างหนึ่งอยู่ในแนวระดับสายตา ส่วนแขนอีกข้างหนึ่งอยู่ในแนวเส้นตรงจากตาของผู้สังเกตไปยังวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าแนวระดับสายตาของผู้สังเกต

มุมเงย
(angle of elevation)

มุมที่มีแขนข้างหนึ่งอยู่ในแนวระดับสายตา ส่วนแขนอีกข้างหนึ่งอยู่ในแนวเส้นตรงจากตาของผู้สังเกตไปยังวัตถุที่อยู่สูงกว่าแนวระดับสายตาของผู้สังเกต

เรเดียน
(radian)

หน่วยของการวัดมุมบนระนาบ โดยกำหนด 1 เรเดียน คือ ขนาดของมุมที่เกิดที่จุดศูนย์กลางของวงกลม เมื่อความยาวของส่วนของเส้นรอบวงที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนี้มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

วงกลมหนึ่งหน่วย
(unit circle)

วงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์

เมทริกซ์จัตุรัส
(square matrix)

เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน

เมทริกซ์แต่งเติม
(augmented matrix)

เมทริกซ์ที่ได้จากเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น โดยการเพิ่มหลักสุดท้ายด้วยหลักที่ประกอบด้วยค่าคงตัวทางด้านขวาของเครื่องหมาย = ในระบบสมการ

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) — เมทริกซ์ที่ดีเทอร์มิแนนต์มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ หรือเมทริกซ์ที่สามารถหาอินเวอร์สของเมทริกซ์นั้นได้

เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) — เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$

เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) — เมทริกซ์จัตุรัส A ใด ๆ ที่ det (A) มีค่าเป็นศูนย์

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (unit matrix or identity matrix) — เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมจากบนซ้ายถึงล่างขวาเป็นตัวเลข 1 โดยตลอด และสมาชิกในตำแหน่งอื่นเป็นศูนย์

ไมเนอร์ (minor) — ไมเนอร์ของสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์จัตุรัส A คือ ตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออก

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ในสามมิติ

ขนาดของเวกเตอร์ (magnitude of a vector) — ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีทิศทางแทนเวกเตอร์นั้น โดยวัดจากจุดเริ่มต้นถึงจุดปลายของเวกเตอร์

ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) — ปริมาณที่บอกทั้งขนาด และทิศทาง

ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) — ปริมาณที่มีแต่ขนาด ไม่มีทิศทาง

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector, null vector) — เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) — เวกเตอร์ซึ่งมีขนาด 1 หน่วย

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และคณะ. (2560). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2.** พิมพ์ครั้งที่ 4. นนทบุรี : ไทยร่มเกล้า.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และคณะ. (2560). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 3.** พิมพ์ครั้งที่ 5. นนทบุรี : ไทยร่มเกล้า.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 10. กรุงเทพมหานคร : นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

_______. (2559). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 11. นนทบุรี : สหมิตรพริ้นติ้งแอนด์พับลิสชิ่ง.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, สถาบัน. (2555). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6.** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

_______. (2556). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6.** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

Jennifer Nolan et al. (2013). **Maths Quest 12: Specialist Mathematics VCE Mathematics Units 3 and 4.** Singapore: John Wiley & Sons Australia Ltd.

V.K. Raman, S.N. Sharma and Y.P.Johri. (2005). **Secondary Certificate MATHEMATICS-I.C.S.E. PART II.** Noida: Kewal Ram Gupta & Sons Pvt. Ltd.

Robert Merrigan, Helen Haralambous, Mark Hyland and Lucy Nin. (1997). **Profile Mathematics Year 10.** Australia: Australian Print Group, Maryborough.

ใบประกันคุณภาพสื่อการเรียนรู้รายวิชาเพิ่มเติม

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เล่มนี้ บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด เป็นผู้จัดพิมพ์เผยแพร่ และจำหน่าย โดยได้จัดทำคำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติมที่มีทั้งผลการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติมและองค์ประกอบสำคัญอื่นที่สำนักพิมพ์จัดทำขึ้น เพื่อให้สถานศึกษาได้เทียบเคียงกับหลักสูตรของสถานศึกษา และพิจารณาเลือกใช้หนังสือนี้ประกอบการจัดการเรียนรู้ ให้สอดคล้องกับหลักสูตรสถานศึกษาของตนได้ตามความเหมาะสม

ผู้เรียบเรียง
1. **นางกนกวลี อุษณกรกุล**
2. **รศ. ดร.อำพล ธรรมเจริญ**
3. **นายไอศุริย สุดประเสริฐ**
4. **นางจินดา อยู่เป็นสุข**
5. **นายรณชัย มาเจริญทรัพย์**
6. **นายวุฒิชัย ศรีวสุธากุล**
7. **นางนพรัตน์ วันแก้ว**
8. **นางสาวสายสุณี สุทธิจักษ์**

ผู้ตรวจ
1. **ผศ. รุจิรา พิพิธพจนการณ์**
2. **นางสาวทองดี กุลแก้วสว่างวงศ์**
3. **นางสาวบูรนาถ เฉยฉิน**

บรรณาธิการ **นางสาวจันทร์เพ็ญ ชุมคช**

บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด ขอรับรองว่า ผู้เรียบเรียง ผู้ตรวจ และบรรณาธิการดังกล่าว เป็นผู้ที่มีความรู้ความสามารถในการจัดทำหนังสือนี้ให้มีความถูกต้อง และมีคุณภาพในการจัดการเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ของรายวิชาเพิ่มเติมที่กำหนด

หากผู้ใช้หนังสือหรือสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานพบว่า หนังสือเล่มนี้ มีข้อบกพร่องเนื้อหาไม่ถูกต้อง เกิดผลเสียหายต่อการเรียนรู้ ส่งผลกระทบทั้งด้านคุณธรรม จริยธรรม และความมั่นคงของชาติ เมื่อบริษัทฯ ได้ทราบแล้ว บริษัทฯ ยินดีงดการจำหน่ายทันที และเรียกเก็บหนังสือที่จำหน่ายทั้งหมดเพื่อแก้ไขให้ถูกต้อง ตลอดจนชดใช้ค่าเสียหายที่เกิดขึ้นจริงให้กับผู้ที่ได้รับความเสียหายนั้น ทั้งนี้ ให้เป็นไปตามพระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค พ.ศ. 2522 พระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2541 และพระราชบัญญัติคุ้มครองผู้บริโภค (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2556 รวมทั้งยินยอมให้สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานถอดถอนรายชื่อหนังสือนี้ออกจากบัญชีกำหนดสื่อการเรียนรู้สำหรับเลือกใช้ในสถานศึกษาไปก่อนจนกว่าจะได้รับแจ้งว่ามีการแก้ไขแล้ว พร้อมทั้งการแจ้งประชาสัมพันธ์ให้สถานศึกษาทราบ

(นายชัยณรงค์ ลิมป์กิตติสิน)
กรรมการผู้จัดการ บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด

อักษรเจริญทัศน์ อจท.
บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด
142 ถนนตะนาว เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร 10200
โทร./แฟกซ์. 02 6222 999 (อัตโนมัติ 20 คู่สาย)
www.aksorn.com Aksorn ACT

นร. คณิตศาสตร์ ม.5 ล.1
ISBN : 978 - 616 - 203 - 794 - 8
9 786162 037948
138.-