学号 WA2214014　专业 人工智能　姓名 杨跃浙
实验日期 **24.12.20**　教师签字　成绩

实验报告

【实验名称】 实验二——线性方程的解法

【实验目的】

1. **掌握线性方程组的数值解法**

通过实验，学习和实现常用的线性方程组数值解法，包括列主元消去法、全主元消去法、LU 分解法、追赶法和 Gauss-Seidel 法。

2. **理解数值方法的基本原理**

理解不同算法的核心思想与计算过程，并通过编程实现这些算法，进一步熟悉它们的适用场景与优缺点。

3. **验证算法的稳定性与效率**

比较不同方法在求解线性方程组中的稳定性、计算效率和精度，培养数值计算的分析能力。

4. **提高编程与实际问题解决能力**

通过 MATLAB 编程，实现各类数值算法，提升工程计算能力，并将理论应用于实际问题求解。

5. **增强数值计算结果的可视化与解释能力**

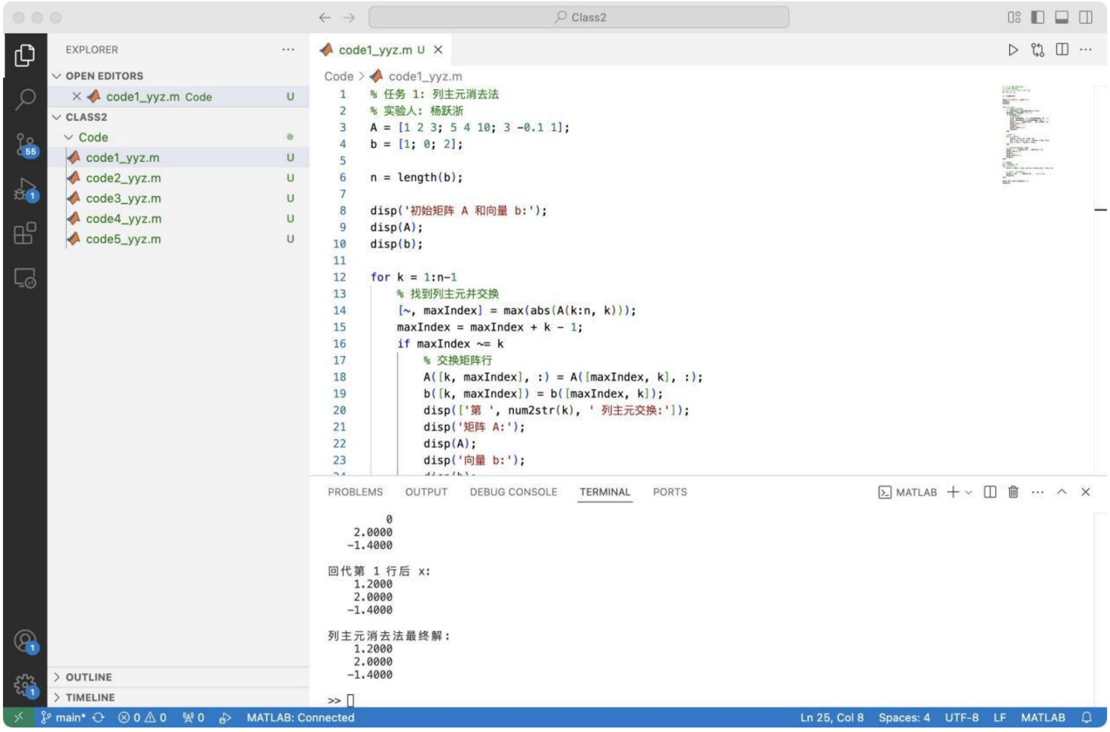
在每一步算法的实现过程中，清晰显示解题步骤和中间结果，帮助理解算法的解题过程，并为后续实验分析提供依据。

【实验内容】

1. 编程实现列主元或全主元消去法，求解下列方程组。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 10 \\ 3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

代码：（列主元消去法）




```matlab
% 任务 1: 列主元消去法
% 实验人: 杨跃浙
A = [1 2 3; 5 4 10; 3 -0.1 1];
b = [1; 0; 2];

n = length(b);

disp('初始矩阵 A 和向量 b:');
disp(A);
disp(b);

for k = 1:n-1
% 找到列主元并交换
[~, maxIndex] = max(abs(A(k:n, k)));
maxIndex = maxIndex + k - 1;
if maxIndex ~= k
% 交换矩阵行
A([k, maxIndex], :) = A([maxIndex, k], :);
b([k, maxIndex]) = b([maxIndex, k]);
disp(['第 ', num2str(k), ' 列主元交换:']);
disp('矩阵 A:');
disp(A);
disp('向量 b:');
```

```
disp(b);
end
% 消元过程
for i = k+1:n
factor = A(i, k) / A(k, k);
A(i, k:n) = A(i, k:n) - factor * A(k, k:n);
b(i) = b(i) - factor * b(k);
end
% 显示消元后的矩阵和向量
disp(['第 ', num2str(k), ' 列消元后:']);
disp('矩阵 A:');
disp(A);
disp('向量 b:');
disp(b);
end

% 回代求解
x1 = zeros(n, 1);
for i = n:-1:1
x1(i) = (b(i) - A(i, i+1:n) * x1(i+1:n)) / A(i, i);
% 显示每一步回代结果
disp(['回代第 ', num2str(i), ' 行后 x:']);
disp(x1);
end

disp('列主元消去法最终解:');
disp(x1);
```

结果:

```
>> code1_yyz

初始矩阵 A 和向量 b:
    1.0000    2.0000     3.0000
    5.0000    4.0000    10.0000
    3.0000   -0.1000     1.0000

     1
     0
     2

第 1 列主元交换:
矩阵 A:
    5.0000    4.0000    10.0000
```

```
    1.0000    2.0000    3.0000
    3.0000   -0.1000    1.0000
```

向量 b:

```
     0
     1
     2
```

第 1 列消元后:

矩阵 A:

```
    5.0000    4.0000   10.0000
         0    1.2000    1.0000
         0   -2.5000   -5.0000
```

向量 b:

```
     0
     1
     2
```

第 2 列主元交换:

矩阵 A:

```
    5.0000    4.0000   10.0000
         0   -2.5000   -5.0000
         0    1.2000    1.0000
```

向量 b:

```
     0
     2
     1
```

第 2 列消元后:

矩阵 A:

```
    5.0000    4.0000   10.0000
         0   -2.5000   -5.0000
         0         0   -1.4000
```

向量 b:

```
         0
    2.0000
    1.9600
```

回代第 3 行后 x:

```
         0
         0
   -1.4000
```

回代第 2 行后 x:

```
         0
    2.0000
   -1.4000
```

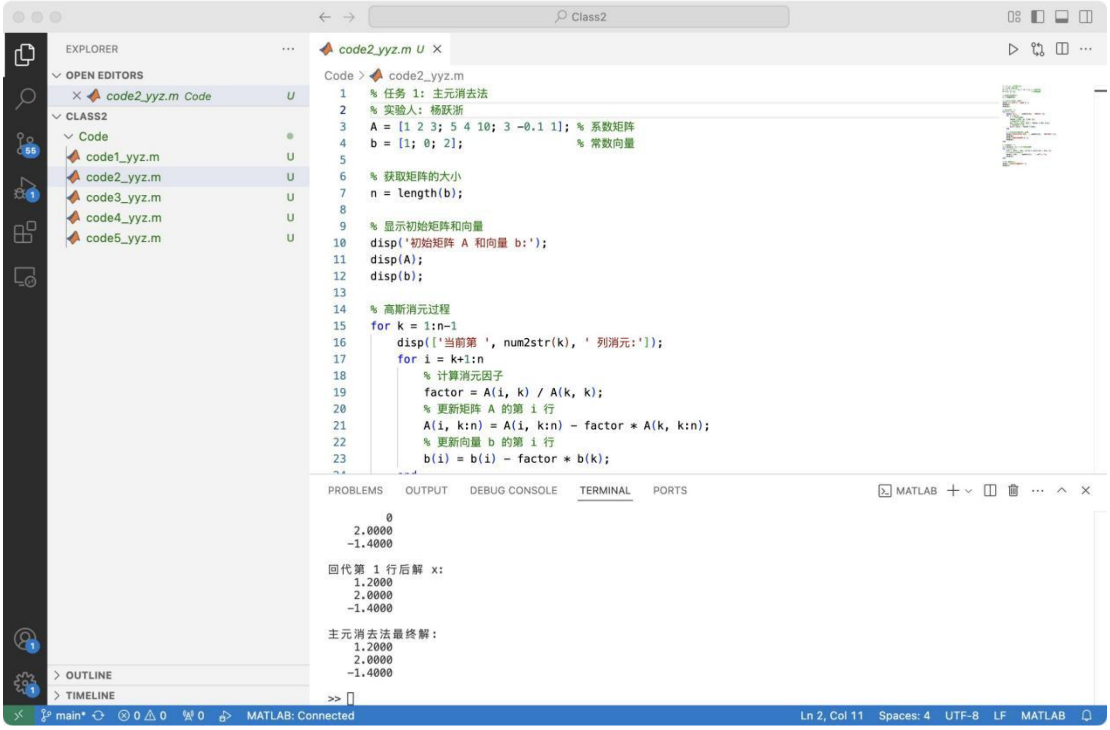
回代第 1 行后 x:

```
    1.2000
    2.0000
   -1.4000
```

列主元消去法最终解:

```
    1.2000
    2.0000
   -1.4000
```

代码：（全主元消去法）




```
% 任务 1: 主元消去法
% 实验人: 杨跃浙
A = [1 2 3; 5 4 10; 3 -0.1 1]; % 系数矩阵
b = [1; 0; 2]; % 常数向量

% 获取矩阵的大小
n = length(b);

% 显示初始矩阵和向量
disp('初始矩阵 A 和向量 b:');
disp(A);
disp(b);

% 高斯消元过程
for k = 1:n-1
disp(['当前第 ', num2str(k), ' 列消元:']);
for i = k+1:n
% 计算消元因子
factor = A(i, k) / A(k, k);
% 更新矩阵 A 的第 i 行
A(i, k:n) = A(i, k:n) - factor * A(k, k:n);
% 更新向量 b 的第 i 行
```

```
b(i) = b(i) - factor * b(k);
end
% 显示消元后的矩阵和向量
disp(['消元后矩阵 A（第 ', num2str(k), ' 列完成）：']);
disp(A);
disp('更新后的向量 b:');
disp(b);
end

% 回代求解过程
x = zeros(n, 1); % 初始化解向量
for i = n:-1:1
x(i) = (b(i) - A(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / A(i, i);
% 显示当前回代结果
disp(['回代第 ', num2str(i), ' 行后解 x:']);
disp(x);
end

% 输出最终结果
disp('主元消去法最终解:');
disp(x);
```

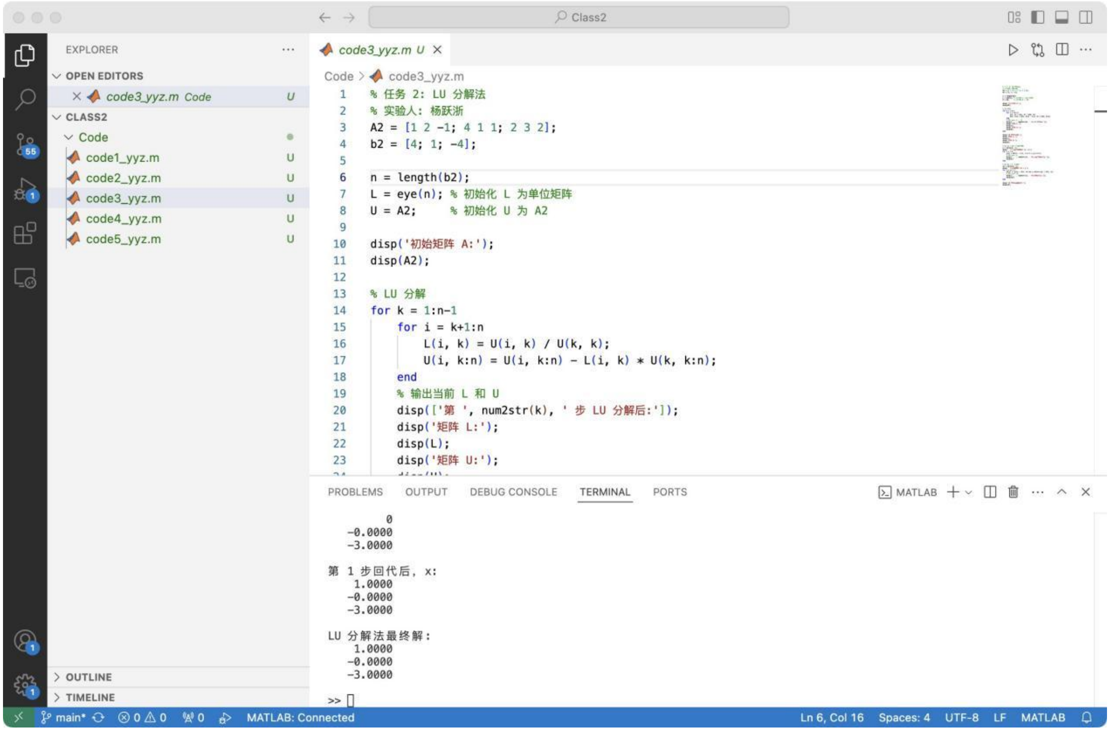
结果:

```
>> code2_yyz

初始矩阵 A 和向量 b:
    1.0000    2.0000    3.0000
    5.0000    4.0000   10.0000
    3.0000   -0.1000    1.0000

     1
     0
     2

当前第 1 列消元:
消元后矩阵 A（第 1 列完成）：
    1.0000    2.0000    3.0000
         0   -6.0000   -5.0000
         0   -6.1000   -8.0000

更新后的向量 b:
     1
    -5
    -1

当前第 2 列消元:
消元后矩阵 A（第 2 列完成）：
```

```
    1.0000    2.0000    3.0000
         0   -6.0000   -5.0000
         0         0   -2.9167

更新后的向量 b:
    1.0000
   -5.0000
    4.0833

回代第 3 行后解 x:
         0
         0
   -1.4000

回代第 2 行后解 x:
         0
    2.0000
   -1.4000

回代第 1 行后解 x:
    1.2000
    2.0000
   -1.4000

主元消去法最终解:
    1.2000
    2.0000
   -1.4000

>>
```

2.编程实现LU分解，求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

代码:




```
% 任务 2: LU 分解法
% 实验人: 杨跃浙
A2 = [1 2 -1; 4 1 1; 2 3 2];
b2 = [4; 1; -4];

n = length(b2);
L = eye(n); % 初始化 L 为单位矩阵
U = A2; % 初始化 U 为 A2

disp('初始矩阵 A:');
disp(A2);

% LU 分解
for k = 1:n-1
for i = k+1:n
L(i, k) = U(i, k) / U(k, k);
U(i, k:n) = U(i, k:n) - L(i, k) * U(k, k:n);
end
% 输出当前 L 和 U
disp(['第 ', num2str(k), ' 步 LU 分解后:']);
disp('矩阵 L:');
disp(L);
disp('矩阵 U:');
```

```
disp(U);
end

disp('LU 分解完成:');
disp('矩阵 L:');
disp(L);
disp('矩阵 U:');
disp(U);

% 解 Ly = b2 (前向替代)
y = zeros(n, 1);
disp('开始前向替代求解 Ly = b');
for i = 1:n
y(i) = b2(i) - L(i, 1:i-1) * y(1:i-1);
% 输出当前 y
disp(['第 ', num2str(i), ' 步前向替代后, y:']);
disp(y);
end

% 解 Ux = y (回代)
x2 = zeros(n, 1);
disp('开始回代求解 Ux = y');
for i = n:-1:1
x2(i) = (y(i) - U(i, i+1:n) * x2(i+1:n)) / U(i, i);
% 输出当前 x2
disp(['第 ', num2str(i), ' 步回代后, x:']);
disp(x2);
end

disp('LU 分解法最终解:');
disp(x2);
```

结果:

```
>> code3_yyz
初始矩阵 A:
     1     2    -1
     4     1     1
     2     3     2


第 1 步 LU 分解后:
矩阵 L:
```

```
     1     0     0
     4     1     0
     2     0     1

矩阵 U:
     1     2    -1
     0    -7     5
     0    -1     4



第 2 步 LU 分解后:
矩阵 L:
    1.0000         0         0
    4.0000    1.0000         0
    2.0000    0.1429    1.0000



矩阵 U:
    1.0000    2.0000   -1.0000
         0   -7.0000    5.0000
         0         0    3.2857

LU 分解完成:
矩阵 L:
    1.0000         0         0
    4.0000    1.0000         0
    2.0000    0.1429    1.0000



矩阵 U:
    1.0000    2.0000   -1.0000
         0   -7.0000    5.0000
         0         0    3.2857

开始前向替代求解 Ly = b
第 1 步前向替代后，y:
     4
     0
     0



第 2 步前向替代后，y:
     4
   -15
     0

第 3 步前向替代后，y:
    4.0000
  -15.0000
   -9.8571

开始回代求解 Ux = y
第 3 步回代后，x:
         0
```

```
         0
   -3.0000
```

第 2 步回代后，x:

```
         0
   -0.0000
   -3.0000
```

第 1 步回代后，x:

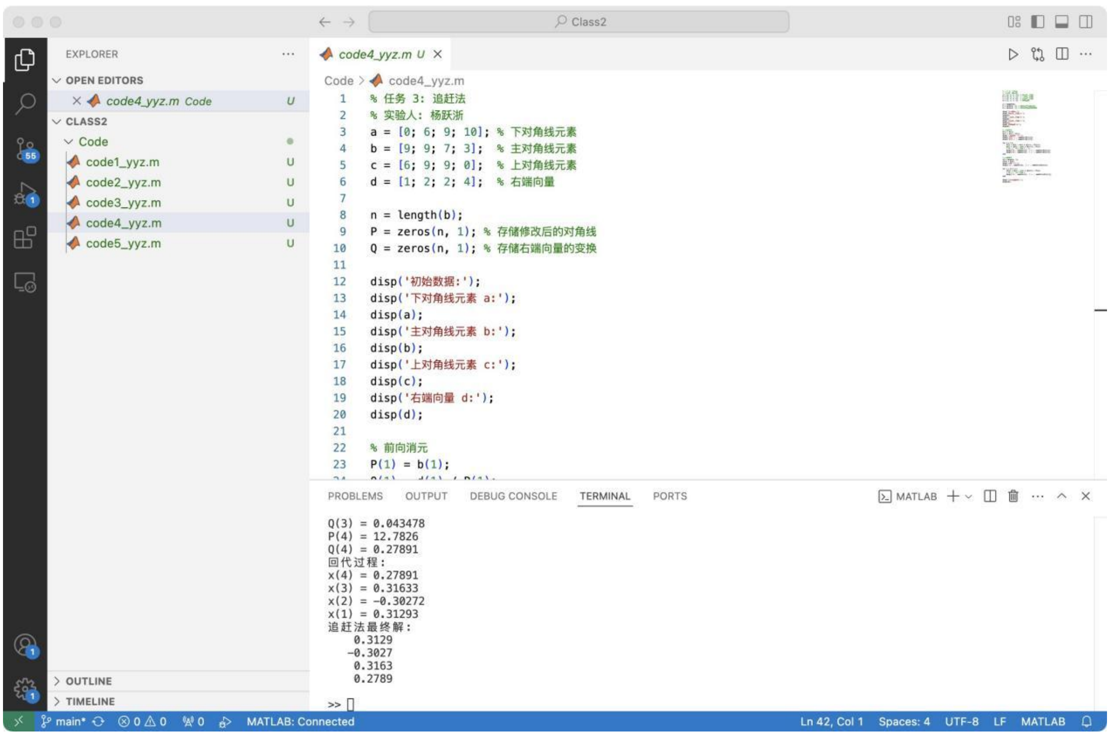
```
    1.0000
   -0.0000
   -3.0000
```

LU 分解法最终解:

```
    1.0000
   -0.0000
   -3.0000

>>
```

3. 编程实现追赶法，求三对角方程组 $\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 = 1 \\ 6x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 2 \\ 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 2 \\ 10x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

代码:




```
% 任务 3: 追赶法
% 实验人: 杨跃浙
```

```
a = [0; 6; 9; 10]; % 下对角线元素
b = [9; 9; 7; 3]; % 主对角线元素
c = [6; 9; 9; 0]; % 上对角线元素
d = [1; 2; 2; 4]; % 右端向量

n = length(b);
P = zeros(n, 1); % 存储修改后的对角线
Q = zeros(n, 1); % 存储右端向量的变换

disp('初始数据:');
disp('下对角线元素 a:');
disp(a);
disp('主对角线元素 b:');
disp(b);
disp('上对角线元素 c:');
disp(c);
disp('右端向量 d:');
disp(d);

% 前向消元
P(1) = b(1);
Q(1) = d(1) / P(1);
disp('前向消元过程:');
disp(['P(1) = ', num2str(P(1))]);
disp(['Q(1) = ', num2str(Q(1))]);

for i = 2:n
P(i) = b(i) - a(i) * c(i-1) / P(i-1);
Q(i) = (d(i) - a(i) * Q(i-1)) / P(i);
% 输出每一步计算的 P 和 Q
disp(['P(', num2str(i), ') = ', num2str(P(i))]);
disp(['Q(', num2str(i), ') = ', num2str(Q(i))]);
end

% 回代求解
x3 = zeros(n, 1);
x3(n) = Q(n);
disp('回代过程:');
disp(['x(', num2str(n), ') = ', num2str(x3(n))]);
```

```
for i = n-1:-1:1
x3(i) = Q(i) - c(i) * x3(i+1) / P(i);
% 输出每一步计算的 x
disp(['x(', num2str(i), ') = ', num2str(x3(i))]);
end

disp('追赶法最终解:');
disp(x3);
```

结果:

```
>> code4_yyz
初始数据:
下对角线元素 a:
     0
     6
     9
    10

主对角线元素 b:
     9
     9
     7
     3

上对角线元素 c:
     6
     9
     9
     0

右端向量 d:
     1
     2
     2
     4

前向消元过程:
P(1) = 9
Q(1) = 0.11111
P(2) = 5
Q(2) = 0.26667
P(3) = -9.2
Q(3) = 0.043478
P(4) = 12.7826
Q(4) = 0.27891
回代过程:
x(4) = 0.27891
x(3) = 0.31633
x(2) = -0.30272
x(1) = 0.31293
追赶法最终解:
    0.3129
   -0.3027
    0.3163
```

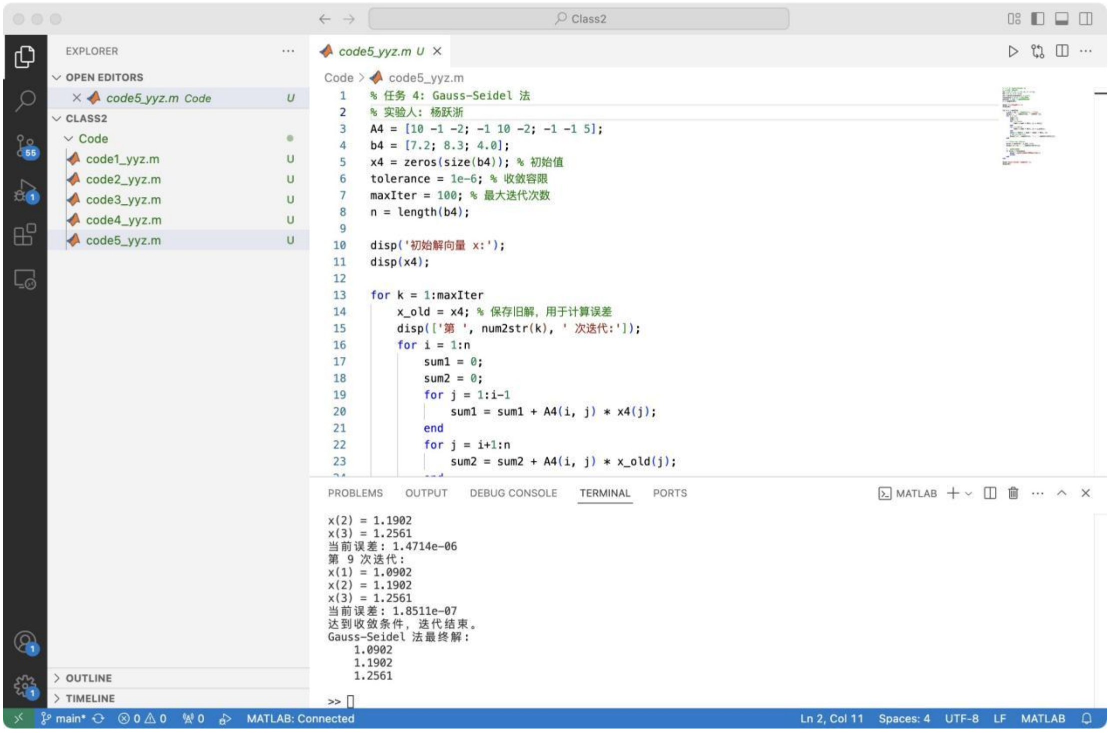
0.2789

>>

4.编程实现 Gauss - Seidel 法，求方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 42 \end{cases}$$

代码：




```
% 任务 4: Gauss-Seidel 法
% 实验人: 杨跃浙
A4 = [10 -1 -2; -1 10 -2; -1 -1 5];
b4 = [7.2; 8.3; 4.0];
x4 = zeros(size(b4)); % 初始值
tolerance = 1e-6; % 收敛容限
maxIter = 100; % 最大迭代次数
n = length(b4);

disp('初始解向量 x:');
disp(x4);
```

```
for k = 1:maxIter
x_old = x4; % 保存旧解，用于计算误差
disp(['第 ', num2str(k), ' 次迭代:']);
for i = 1:n
sum1 = 0;
sum2 = 0;
for j = 1:i-1
sum1 = sum1 + A4(i, j) * x4(j);
end
for j = i+1:n
sum2 = sum2 + A4(i, j) * x_old(j);
end
x4(i) = (b4(i) - sum1 - sum2) / A4(i, i);
% 输出当前的 x(i)
disp(['x(', num2str(i), ') = ', num2str(x4(i))]);
end
% 计算当前误差并显示
error = norm(x4 - x_old, inf);
disp(['当前误差: ', num2str(error)]);
% 检查收敛条件
if error < tolerance
disp('达到收敛条件，迭代结束。');
break;
end
end

disp('Gauss-Seidel 法最终解:');
disp(x4);
```

结果:

```
>> code5_yyz
初始解向量 x:
     0
     0
     0

第 1 次迭代:
x(1) = 0.72
x(2) = 0.902
x(3) = 1.1244
当前误差: 1.1244
```

第 2 次迭代:
x(1) = 1.0351
x(2) = 1.1584
x(3) = 1.2387
当前误差: 0.31508
第 3 次迭代:
x(1) = 1.0836
x(2) = 1.1861
x(3) = 1.2539
当前误差: 0.048498
第 4 次迭代:
x(1) = 1.0894
x(2) = 1.1897
x(3) = 1.2558
当前误差: 0.0058191
第 5 次迭代:
x(1) = 1.0901
x(2) = 1.1902
x(3) = 1.2561
当前误差: 0.00074098
第 6 次迭代:
x(1) = 1.0902
x(2) = 1.1902
x(3) = 1.2561
当前误差: 9.2929e-05
第 7 次迭代:
x(1) = 1.0902
x(2) = 1.1902
x(3) = 1.2561
当前误差: 1.1699e-05
第 8 次迭代:
x(1) = 1.0902
x(2) = 1.1902
x(3) = 1.2561
当前误差: 1.4714e-06
第 9 次迭代:
x(1) = 1.0902
x(2) = 1.1902
x(3) = 1.2561
当前误差: 1.8511e-07
达到收敛条件，迭代结束。
Gauss-Seidel 法最终解:
    1.0902
    1.1902
    1.2561

>>

【小结或讨论】

在本次实验中，我通过编程实现了多种求解线性方程组的数值方法，包括列主元消去法、全主元消去法、LU 分解法、追赶法和

Gauss-Seidel 法，并通过 MATLAB 验证了每种方法的正确性和效率。以下是各方法的分析与讨论：

1. 列主元和全主元消去法

列主元消去法和全主元消去法均基于高斯消元的思想，通过逐列消元将系数矩阵 A 化为上三角矩阵，从而利用回代过程求解方程组。两者的区别在于主元选择策略：

- 列主元消去法选择当前列中绝对值最大的元素作为主元，主要用于提高计算的数值稳定性。
- 全主元消去法不仅在列中选择主元，还在行中寻找最优位置交换，进一步提高算法的稳定性，但实现复杂度更高。

主元消去法的数学过程如下：

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= \frac{A_{ij}}{A_{ii}} \ (i > j) \\
A[i,j] &= A[i,j] - L_{ij} \cdot A[j,i],\ b[i] = b[i] - L_{ij} \cdot b[j].
\end{aligned}
$$

结果表明，列主元消去法和全主元消去法在正确性上均表现良好，但在某些特殊矩阵中，全主元法的稳定性更高。

2. LU 分解法

LU 分解法通过将矩阵 A 分解为一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U ，从而将原方程组的求解分为两步：

1.求解 $Ly = b$ (前向替代)。

2.求解 $Ux = y$ (回代)。

LU 分解的公式如下：

$$A = L \cdot U, \ L_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{jj}}, \ U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}.$$

LU 分解法适用于系数矩阵较大且需要多次求解的情况，因为矩阵分解只需要计算一次，而前向替代和回代的计算量较小。

实验结果表明，LU 分解法的结果与主元消去法一致，并且在矩阵重复使用的情况下效率更高。

3. **追赶法**

追赶法是一种专门用于三对角矩阵的数值方法。通过简化高斯消元的过程，追赶法利用矩阵的稀疏性特点，大幅降低计算复杂度（从 $O(n^3)$ 降至 $O(n)$）。其主要过程如下：

前向消元：

$$P_i = b_i - a_i \frac{c_{i-1}}{P_{i-1}}, \ Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{P_i}$$

其中 $P_1 = b_1, Q_1 = d_1/P_1$。

回代求解：

$$x_n = Q_n, \ x_i = Q_i - \frac{c_i x_{i+1}}{P_i} \ (i = n-1, n-2, \ldots, 1).$$

实验结果表明，追赶法在解决三对角矩阵时计算量显著减少，效率远高于一般的高斯消元法。

4. Gauss-Seidel 法

Gauss-Seidel 法是一种迭代法，适用于系数矩阵条件较好（如对角占优矩阵）的情况。通过不断迭代更新解向量，直至收敛满足精度要求：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+1}^{n} A_{ij}x_j^{(k)}),$$

其中 k 表示迭代次数。

实验中，我通过设置误差限 $\epsilon = 10^{-6}$ 控制收敛条件，迭代结果表明 Gauss-Seidel 法可以快速收敛到高精度解。但其收敛速度和稳定性较强依赖于矩阵的特性。

5. 各方法的比较与总结

方法	特点	计算量	适用场景
列主元消去法	稳定性较高，适合一般矩阵求解	$O(n^3)$	一般线玶方程组
全主元消去法	最稳定，但操作但杂，适合数值问题敏感的场景	$O(n^3)$	稳定性要求较高的线性方程组

LU 分解法	矩阵分解后多次求解效率高，适合重复求解场景	$O(n^3)$	矩阵不变，右端向量变化的线性方程组
追赶法	高效，适合三对角矩阵	$O(n)$	三对角郑阵，如有限差分法中的离散方程
Gauss-Seidel 法	迭代法，适合对角占优矩阵或稀疏矩阵，需满足收敛条件	$O(kn)$	稀疏矩阵、对角占优矩阵

通过本次实验，我不仅掌握了多种线性方程组求解方法，还对它们的优缺点、适用场景有了更深刻的认识。在实际应用中，应根据问题特点选择合适的求解方法，以兼顾效率与稳定性。