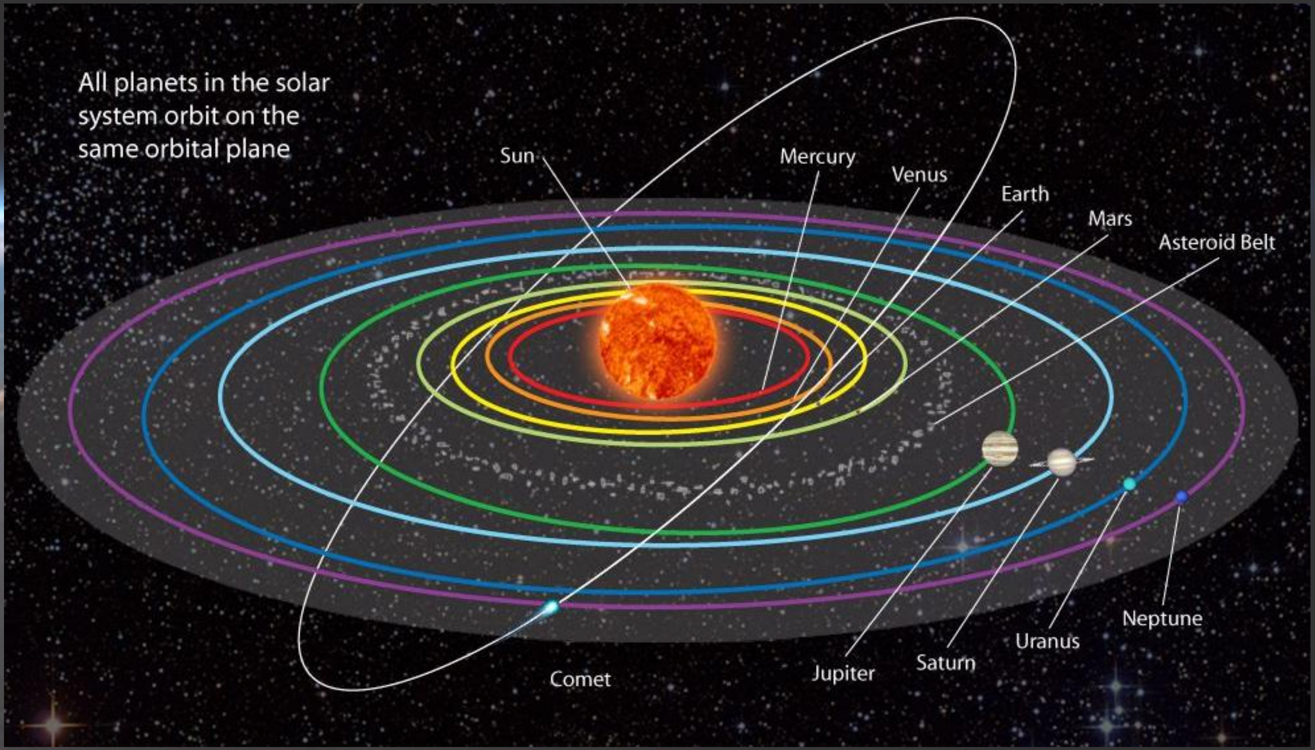
Mechanika Nieba

Formalizm Lagrange'a



Filip Perczyński

Plan prezentacji

1. Czym jest formalizm Lagrange'a?
2. Współrzędne uogólnione
3. Prędkości uogólnione
4. Równania Lagrange'a II rodzaju
5. Ruch cząstki w potencjale radialnym
6. Twierdzenie Lagrange'a
7. Punkty libracyjne Lagrange'a
8. Zadania

Czym jest formalizm Lagrange'a?

Formalizm Lagrange'a polega na opisywaniu układów dynamicznych za pomocą:

1. Współrzędnych i prędkości uogólnionych
2. Funkcji Lagrange'a
3. Równań ruchu Lagrange'a II rodzaju

Współrzędne uogólnione

Układ n punktów materialnych jest opisany, w dowolnym momencie czasu, 3n współrzędnymi:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &\equiv (x_1, y_1, z_1) \\
\vec{r}_2 &\equiv (x_2, y_2, z_2) \\
&\vdots \\
\vec{r}_n &\equiv (x_n, y_n, z_n)
\end{aligned}
$$

W miejsce tych współrzędnych wprowadzamy współrzędne uogólnione q, które mogą być dowolnymi funkcjami r i mogą zależeć jawnie od czasu.

Prędkości uogólnione

Prędkości uogólnione uzyskujemy różniczkując po czasie współrzędne uogólnione, w efekcie mamy:

$$\begin{cases} q_i = q_i(\vec{r}, t) \\ \dot{q}_i = \dot{\vec{r}} \cdot \nabla q_i + \dfrac{\partial q_i}{\partial t} \end{cases}$$

gdzie i=1,2,…,N (N jest liczbą stopni swobody)

Funkcja Lagrange'a

Funkcja Lagrange'a , czyli potencjał kinetyczny:

$$L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) = T\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right) - V\left(\vec{q}, t\right)$$

Gdzie,

T - jest energią kinetyczną układu, równą sumie energii kinetycznych poszczególnych cząstek,

V - energia potencjalna układu cząstek zależna od ich położeń

Równania Lagrange'a II rodzaju

Znając potencjał kinetyczny układu o N stopniach swobody możemy otrzymać równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots, N$$

Równania Lagrange'a nie ulegają zmianie podczas transformacji zmiennych uogólnionych (czyli zmianie układu odniesienia).

Równania Lagrange'a II rodzaju

Można zdefiniować transformację do N nowych zmiennych $y_1, y_2, \ldots, y_N$:

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - V(\vec{q}, t)$$

stąd potencjał kinetyczny:

$$L\left(q_i\left(y_j\right), \dot{q}_i\left(y_j, \dot{y}_j\right), t\right) = \tilde{L}\left(y_i, \dot{y}_i, t\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial y_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Zależności można przepisać w postaci:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial y_k} \qquad k = 1,2,\ldots, N$$

Ponieważ q_i nie zależą od pochodnych y_k:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial y_k} \qquad k = 1,2,\ldots, N$$

Oraz można zauważyć, że:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial y_k}\dot{y}_k \qquad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{y}_k} = \frac{\partial q_i}{\partial y_k}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Uwzględniając te zależności w równaniu Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial y_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial y_k}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial y_k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial y_k}$$

Ze względu na zależności:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Otrzymujemy:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_k}\right) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

Co oznacza, że równania Lagrange'a nie ulegają zmianie przy zmianie układu współrzędnych.

Ruch cząstki w potencjale radialnym

Potencjał posiadający symetrię sferyczną ma ogólną postać V=V(r).

Zapisując za pomocą współrzędnych biegunowych:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \lambda, \quad q_3 = \varphi$$

Transformacja między układami współrzędnych:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Po zróżniczkowaniu

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\frac{x}{r} - \dot{\lambda}y - \dot{\varphi}z\cos\lambda \\ \dot{r}\frac{y}{r} - \dot{\lambda}x - \dot{\varphi}z\sin\lambda \\ \dot{r}\frac{z}{r} + \dot{\varphi}\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Ruch cząstki w potencjale radialnym

Funkcja Lagrange'a na jednostkę masy

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\cos\varphi)^2\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V$$

Korzystając z niej możemy napisać równania ruchu cząstki:

$$\ddot{r} - r\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2 - r\dot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \lambda}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) + r^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\lambda}^2 = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Ruch cząstki w potencjale radialnym

W przypadku potencjału radialnego mamy:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

Wtedy dwa ostatnie równania ruchu przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\varphi}\right) + r^2 \sin\varphi \cos\varphi \dot{\lambda}^2 = 0$$

Ruch cząstki w potencjale radialnym

Dla potencjału o symetrii sferycznej:

1. Wszystkie orbity są krzywymi płaskimi – zawsze istnieje rozwiązanie trywialne φ=0, dφ/dt=0, które otrzymamy przez odpowiedni wybór płaszczyzny odniesienia

2. Każde zagadnienie posiada całkę pól:

$$r^2\dot{\lambda} = \mathrm{const}$$

Równania planetarne Lagrange'a

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0},$$

$$\frac{d\bar{\lambda}_0}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{(1-e^2)^{1/2}[1-(1-e^2)^{1/2}]}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}$$

$$+ \frac{\tan(I/2)}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I},$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}[1-(1-e^2)^{1/2}]\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi},$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan(I/2)}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\lambda}_0} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi}\right) - \frac{(1-e^2)^{-1/2}}{na^2 \sin I}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}\sin I}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}.$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}},$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = n - \frac{2}{na}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathcal{M}} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega},$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cot I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{(1-e^2)^{-1/2}}{na^2 \sin I}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot I}{na^2(1-e^2)^{1/2}}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{-1/2}}{na^2 \sin I}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}.$$

Twierdzenie Lagrange’a

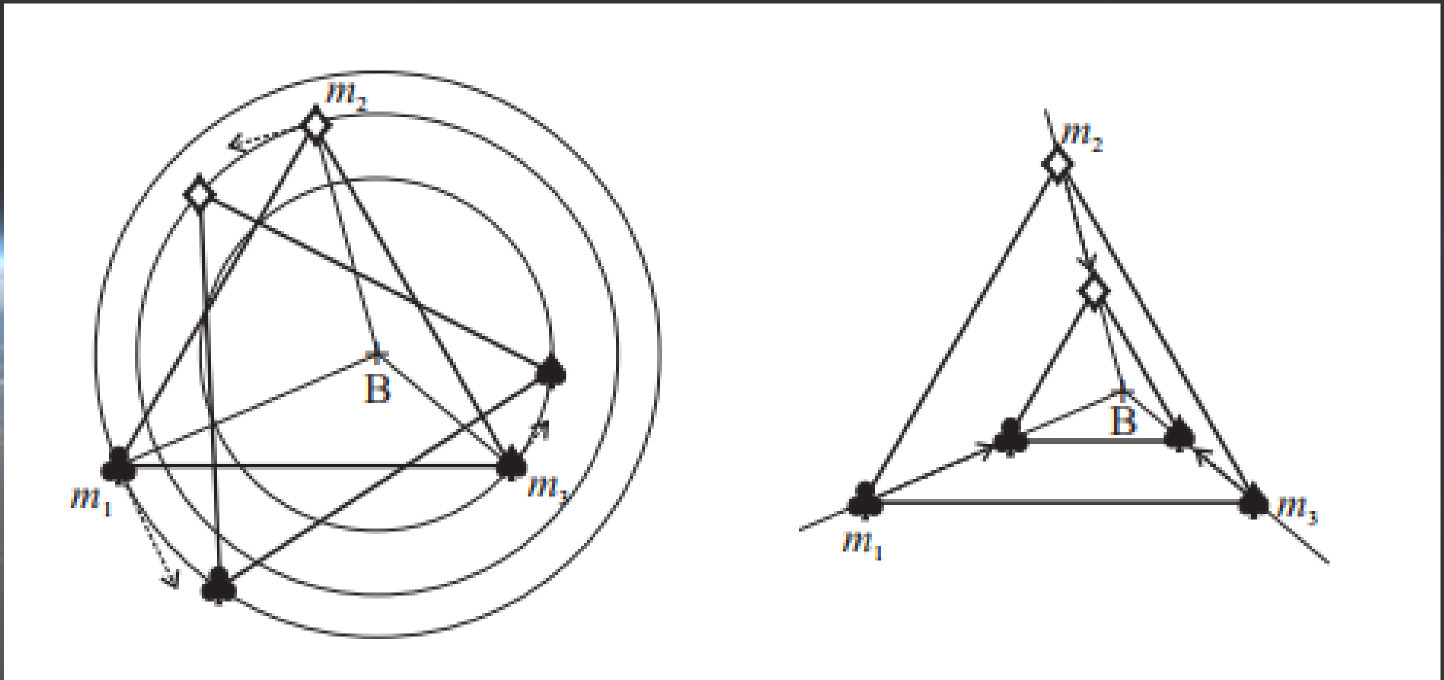
W zagadnieniu trzech ciał o dowolnych masach istnieją rozwiązania dokładne o następujących właściwościach:

1. Ciała poruszają się we wspólnej płaszczyźnie zachowującej stałą orientację w przestrzeni.
2. Wypadkowa siła przyciągania działająca na każde z ciał jest skierowana do barycentrum układu i wprost proporcjonalna do barycentrycznej odległości ciała.

3. W barycentrycznym układzie współrzędnych prędkości trzech mas tworzą jednakowe kąty z ich promieniami wodzącymi i są wprost proporcjonalne do odpowiednich odległości barycentrycznych.
4. Jeżeli ciała tworzą trójkąt, to jest on równoboczny.
5. Ciała poruszają się po orbitach keplerowskich względem barycentrum

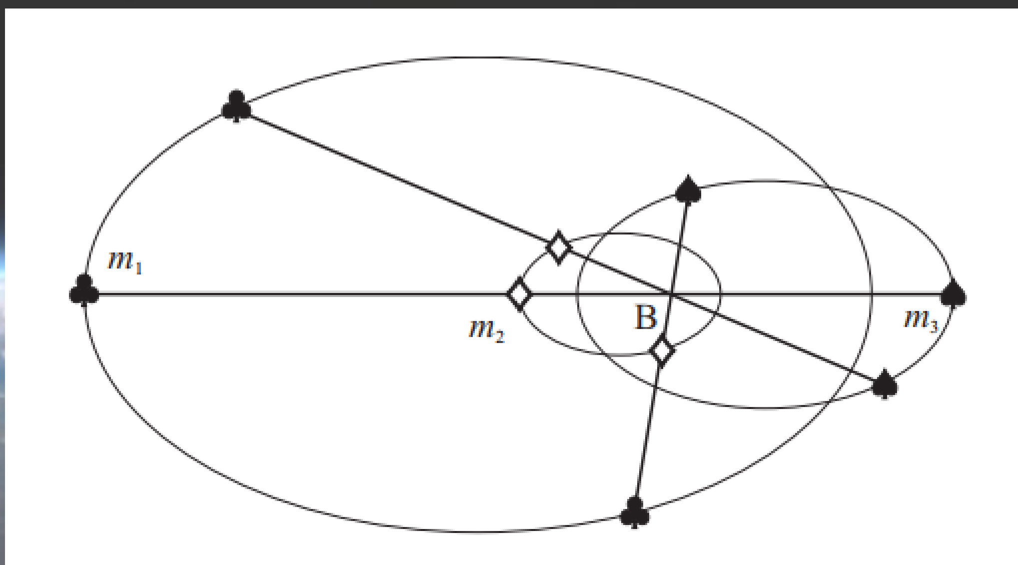
Twierdzenie Lagrange’a

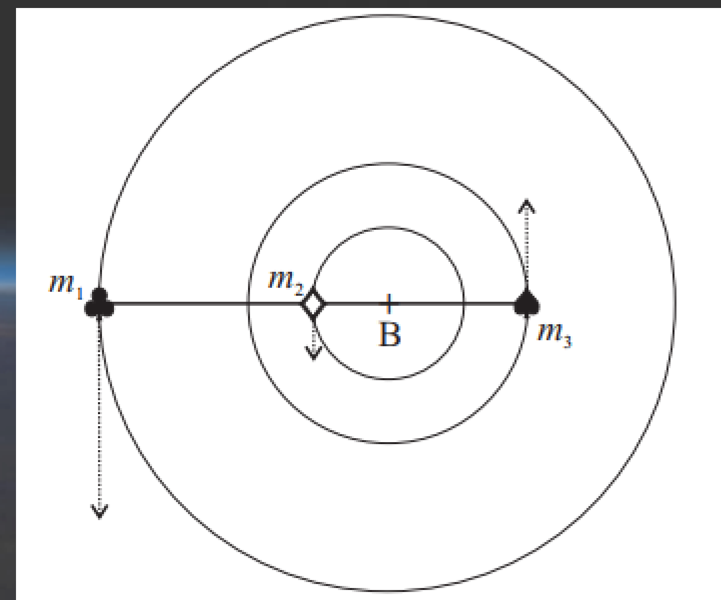
Przykłady homograficznych rozwiązań trójkątnych Lagrange'a



Twierdzenie Lagrange’a

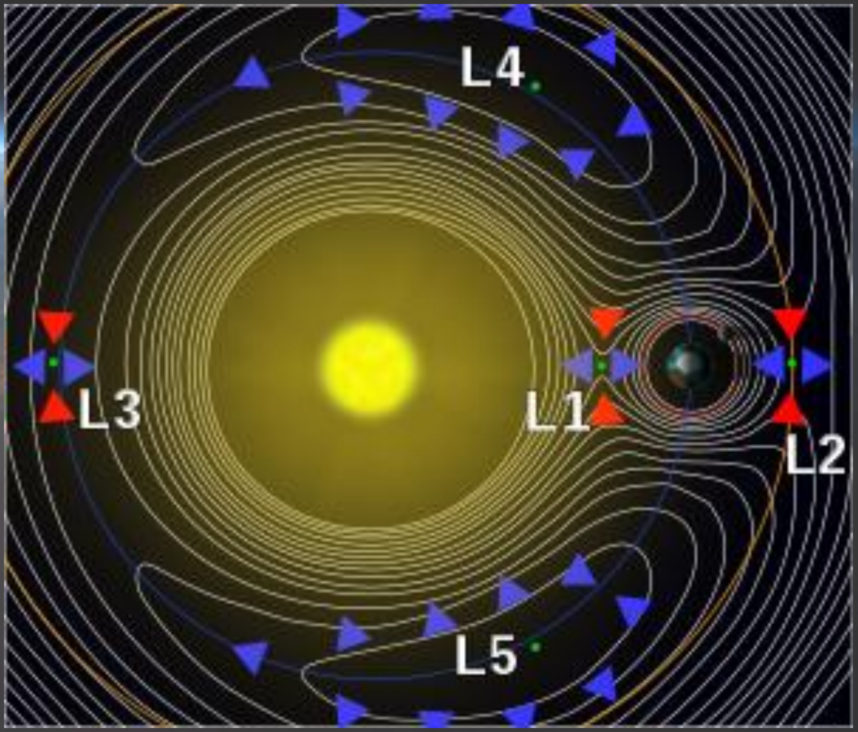
Przykłady homograficznych rozwiązań kolinearnych Lagrange'a





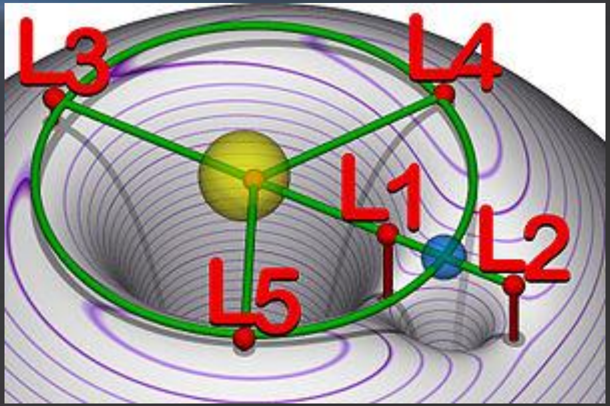
Punkty libracyjne Lagrange'a

Punkt libracyjny – miejsce w przestrzeni, w układzie dwóch ciał powiązanych grawitacją, w którym ciało o pomijalnej masie może pozostawać w spoczynku względem ciał układu.



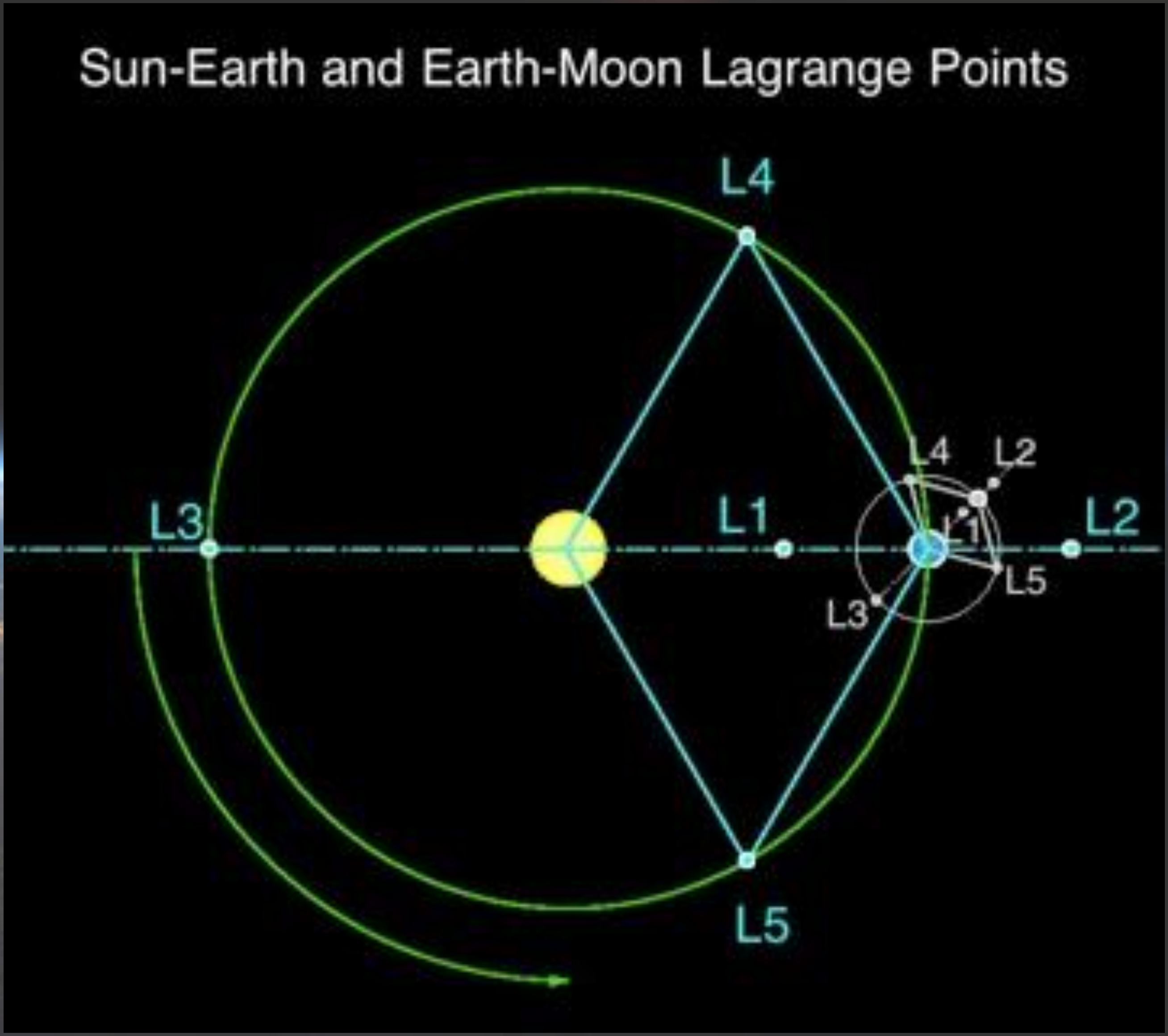
Punkty libracyjne Lagrange’a

Dla każdego układu trzech ciał występuje pięć takich punktów, oznaczanych na ogół od L_1 do L_5.
Punkty L_1–L_3 znajdują się na linii przechodzącej przez ciała układu i są one niestabilne.
Punkty L_4 i L_5tworzą wraz z dwoma większymi ciałami trójkąt równoboczny i są liniowo stabilne, a dla niektórych stosunków niestabilne.

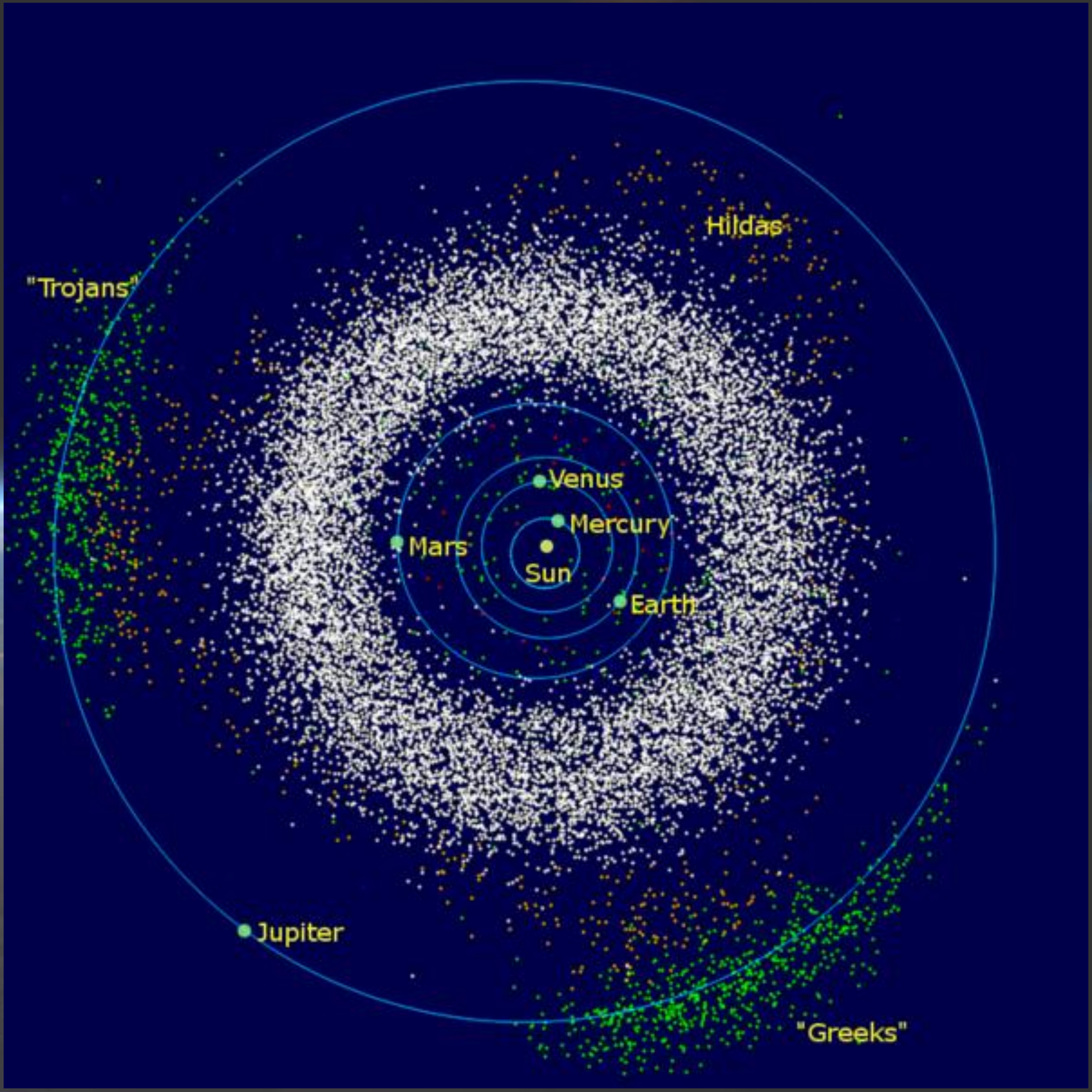


Stabilność w tym przypadku oznacza, że jeżeli ciało będzie miało parametry ruchu niewiele różniące się parametrów punktu, to pozostanie w okolicy tego punktu dowolnie długo. Niestabilność oznacza, że ciało takie oddali się od punktu libracyjnego.

Punkty libracyjne



Punkty libracyjne



Zadanie 1

Zapisać równania ruchu za pomocą formalizmu Lagrange'a dla układu gwiazdy o masie M i planety o masie m, gdzie m<<M. Ciała oddziałują na siebie w potencjale grawitacyjnym $V(r)=-G(mM)/r$, gdzie r to odległość między ciałami.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Given the symmetry of the problem, it is most convenient to write in polar coordinates, with r being the distance between the star and the planet, and θ the angle of our planet around its orbit.

The kinetic energy of the planet is given by $T = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\left(r\dot{\theta}\right)^2$.

Thus our Lagrangian is given by

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\left(r\dot{\theta}\right)^2 + G\frac{Mm}{r}.$$

Now, it is possible for both r and θ to vary, so we have two Euler equations to set up. The one for r is given by

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \\ m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - G\frac{Mm}{r^2}, \end{aligned}$$

which is the equation of motion we expect for r.

For θ we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) &= 0. \end{aligned}$$

The Euler equation for θ tells us something remarkable. It says that the quantity in parentheses, the angular momentum of the planet, is a constant of the motion.

Zadanie 2

Obliczyć położenie punktów Lagrange’a w układzie Ziemia – Księżyc.

Literatura

[1] V. A. Chobotov, *Orbital Mechanics, Third Edition*. 2002.

[2] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students, third edition*. 2013.

[3] “Basic Lagrangian mechanics.” [Online]. Available: http://www.physicsinsights.org/lagrange_1.html. [Accessed: 24-Jan-2018].

[4] “Deriving Kepler’s Laws | Brilliant Math & Science Wiki.” [Online]. Available: https://brilliant.org/wiki/deriving-keplers-laws/#radial-and-centripetal-relation. [Accessed: 24-Jan-2018].

[5] “File:Lagrangian points equipotential.jpg - Wikipedia.” [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Lagrangian_points_equipotential.jpg. [Accessed: 24-Jan-2018].

[6] “Earth-Moon Lagrange Points.” [Online]. Available: http://www.astrotecture.com/E-M_Lagrange_Points.html. [Accessed: 24-Jan-2018].

[7] “File:InnerSolarSystem-en.png - Wikimedia Commons.” [Online]. Available: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:InnerSolarSystem-en.png. [Accessed: 24-Jan-2018].

[8] “Lagrangian Mechanics | Brilliant Math & Science Wiki.” [Online]. Available: https://brilliant.org/wiki/lagrangian-formulation-of-mechanics/. [Accessed: 24-Jan-2018].

[9] “Alternative forms of Lagrange planetary equations.” [Online]. Available: https://farside.ph.utexas.edu/teaching/celestial/Celestial/node155.html. [Accessed: 24-Jan-2018].

[10] “Matematyczne podstawy mechaniki nieba,” 2017.