5) plain = [1,0,1,1,0,0,1,0,1,1, 0,0,1,0,1]
cypher = [1,1, 1,0,1,1,1,1,0, 1,0,0,0,1,0]

Keystream = plain ⊕ cypher

KS = [0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,0, 0,0, 1,1,1]

5 stage linear recurrence

$S_i = (C_1 \cdot S_{i-1}) \oplus (C_2 \cdot S_{i-2}) \oplus (C_3 \cdot S_{i-3}) \oplus (C_4 \cdot S_{i-4}) \oplus (C_5 \cdot S_{i-5})$

$S_0 = 0 \quad S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 1 \quad S_4 = 1$

$S_5 = (C_1 \cdot S_4) \oplus (C_2 \cdot S_3) \oplus (C_3 \cdot S_2) \oplus (C_4 \cdot S_1) \oplus (C_5 \cdot S_0)$

$1 = (C_1 \cdot 1) \oplus (C_2 \cdot 1) \oplus (C_3 \cdot 0) \oplus (C_4 \cdot 1) \oplus (C_5 \cdot 0)$

$\boxed{1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4}$

$S_6 = (C_1 \cdot S_5) \oplus (C_2 \cdot S_4) \oplus (C_3 \cdot S_3) \oplus (C_4 \cdot S_2) \oplus (C_5 \cdot S_1)$

$1 = (C_1 \cdot 1) \oplus (C_2 \cdot 1) \oplus (C_3 \cdot 1) \oplus (C_4 \cdot 0) \oplus (C_5 \cdot 1)$

$\boxed{1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_5}$

$S_7 = (C_1 \cdot S_6) \oplus (C_2 \cdot S_5) \oplus (C_3 \cdot S_4) \oplus (C_4 \cdot S_3) \oplus (C_5 \cdot S_2)$

$0 = (C_1 \cdot 0) \oplus (C_2 \cdot 1) \oplus (C_3 \cdot 1) \oplus (C_4 \cdot 1) \oplus (C_5 \cdot 0)$

$\boxed{0 = C_2 \oplus C_3 \oplus C_4}$

$S_8 = (C_1 \cdot S_7) \oplus (C_2 \cdot S_6) \oplus (C_3 \cdot S_5) \oplus (C_4 \cdot S_4) \oplus (C_5 \cdot S_3)$

$1 = (C_1 \cdot 1) \oplus (C_2 \cdot 0) \oplus (C_3 \cdot 1) \oplus (C_4 \cdot 1) \oplus (C_5 \cdot 1)$

$\boxed{1 = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5}$

$S_9 = (C_1 \cdot S_8) \oplus (C_2 \cdot S_7) \oplus (C_3 \cdot S_6) \oplus (C_4 \cdot S_5) \oplus (C_5 \cdot S_4)$

$1 = (C_1 \cdot 1) \oplus (C_2 \cdot 1) \oplus (C_3 \cdot 0) \oplus (C_4 \cdot 1) \oplus (C_5 \cdot 1)$

$\boxed{1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus C_5}$

$S_8 = 1$
$S_7 = 1$
$S_6 = 0$
$S_5 = 1$
$S_4 = 1$
$S_3 = 1$
$S_2 = 0$
$S_1 = 1$
$S_0 = 0$

★ error in #5

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&1&0 \\ 1&1&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \\ 1&0&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4-R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_5-R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&-1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Swap } R_2, R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&-1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4+R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&0&2&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&-1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&0&2&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1+R_3 \\ R_2-R_3 \\ R_4-2R_3 \\ \Rightarrow \\ R_4/3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-1&1&1 \\ 0&1&0&2&-1&0 \\ 0&0&1&-1&1&0 \\ 0&0&0&1&-1/3&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+R_4 \\ R_2-2R_4 \\ R_3+R_4 \\ \Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&2/3&1 \\ 0&1&0&0&-1/3&0 \\ 0&0&1&0&2/3&0 \\ 0&0&0&1&-1/3&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1-\frac{2}{3}R_5 \\ R_2+\frac{1}{3}R_5 \\ R_3-\frac{2}{3}R_5 \\ R_4+\frac{1}{3}R_5 \\ \Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow C_1 = 1 \quad C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0$

Test

$1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0$ ✓

$1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_5 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$ ✓

$0 = C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0$

$1 = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 \oplus C_5 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$ ✓

$1 = C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \oplus C_5 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0$ ✓

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1 \\ 0&1&1&1&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$Z_{i+5} = -3Z_i + 2Z_{i+1} + 2Z_{i+2} + -Z_{i+3} + 2Z_{i+4} \pmod 2$

$\Rightarrow Z_{i+5} = Z_i + Z_{i+3}$