Вторая лаба по ЧМ

25 апреля 2023 г.

1 Задание на «пятерку»

1.1 Постановка задачи, уравнения

Рассматривается задача обжатия надувной пневматической конструкции (см. рис. 1.1). Начало координат примем на поверхности земли, ось y направлена вверх, ось x — вправо.

Форма обжатой оболочки может быть определена в результате решения следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}
x_1 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) = A_x \\
y_1 + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) = A_y \\
x_2 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) = B_x \\
y + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) = B_y \\
(\phi_1 + \phi_2)y + (x_2 - x_1) = C
\end{gathered} \tag{1}$$

Полезные соотношения:

$$\begin{gathered}
l = x_2 - x_1 \\
y = y_1 = y_2 \\
\alpha_1 + \phi_1 = \frac{3\pi}{2} \\
\alpha_2 = \frac{3\pi}{2}
\end{gathered} \tag{2}$$

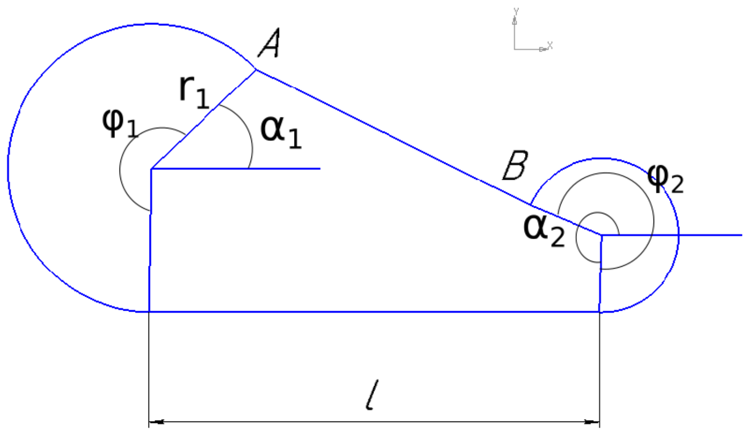

Рис. 1: Обозначения

Исходные данные:

$$
\begin{gathered}
A_x = -0.353 \quad B_x = 0.353 \\
A_y = B_y = 0.3 \\
C = \frac{3\pi}{8}
\end{gathered} \tag{3}
$$

1.2 Решение уравнений методом установления

Система (1) решается методом установления. От нелинейной системы алгебраических уравнений, которую в векторном виде можно записать как

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

перейдем к линейной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{5}$$

Допустим, что функция $\mathbf{F}$ потенциальна, то есть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\Phi(\mathbf{x})$. Тогда

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{d\Phi}{d\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = -\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi \leq 0 \tag{6}$$

Следовательно, при большом $\tau \to \infty$ решением $\mathbf{x}$ нестационарной системы (5) будет минимум потенциала Φ, то есть нуль функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, или, иначе, решение нелинейной системы (4). «Время» τ в (5) является фиктивным, вспомогательным параметром, не имеющим физического смысла.

Решим систему (5), заменив производную на конечную разность:

$$\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta\tau} + \mathbf{F}(\mathbf{x_n}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}(\mathbf{x_n})\Delta\tau \tag{7}$$

Отметим, что порядок уравнений в векторе $\mathbf{F}$ и порядок неизвестных в векторе $\mathbf{x}$ играют важную роль для сходимости итеративной процедуры (подумайте, почему это может быть). Приведем вариант нумерации (один из возможных), при котором процесс сходится:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) - A_x \\ x_2 + y\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) - B_x \\ y_1 + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \phi_1\right) - A_y \\ (\phi_1 + \phi_2)y + (x_2 - x_1) - C \\ y + y\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \phi_2\right) - B_y \end{pmatrix} \tag{8}$$

2 Задание на «восьмерку»

Предположим, что в центре линии АВ на рисунке 1.1 сосредоточена масса m. Нужно смоделировать динамику движения баллона во времени, то есть сделать «мультфильм» о том, как баллон «прыгает» на твердой поверхности.

Динамика баллона (точнее, точек $A, B, A_y = B_y$) подчиняется второму закону Ньютона:

$$m\frac{d^2A_y}{dt^2} = pl - mg, \tag{9}$$

где p — давление внутри баллона, положим, 2000 Па. Массу примем за 100 кг. $l = x_2 - x_1$ и определяется для каждого момента времени путем решения системы (1). Моделировать нужно промежуток времени от 0 до 2.5 секунд.

Рассмотрим методические аспекты решения уравнения (9). Уравнение (9) является уравнением второго порядка (там присутствует вторая производная от координаты) и эквивалентна системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dA_y}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{1}{m}\left(pl - mg\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Каждое уравнение системы (10) может быть решено аналогично тому, как решалась система (5) (то есть по формулам (7)). Таким образом, решение на $n+1$-ом шаге может быть выражено через решение на n-м шаге в виде:

$$\begin{aligned} A_y^{n+1} &= A_y^n + v_y^n \Delta t \\ v_y^{n+1} &= v_y^n + \frac{1}{m}\left(pl - mg\right)\Delta t \end{aligned} \tag{11}$$

В (11) индекс n означает, что величина вычисляется в момент времени $t_n = n\Delta t$. Шаг по времени Δt является константой и выбирается малым. Чтобы посчитать величину $l = x_2 - x_1$, необходимо на каждом шаге по времени решить систему (1).

Отличие времени t в (11) от «времени» τ в (7) состоит в том, что t — это настоящее физическое время, а τ — фиктивное «время», математический трюк, введенное для того, чтобы сделать решение нелинейной системы алгебраических уравнений (4) попроще.

Таким образом, в основе программы должно быть два цикла: внешний, по времени t, и внутренний, в котором меняется фиктивное время τ. Шаг по «настоящему» времени $\Delta t = 0.01$. Шаг по фиктивному «времени» $\Delta\tau = 0.005$.

Для построения графика и анимации могут быть полезными команды patches.Arc из matplotlib и camera.snap() и camera.animate() из celluloid.

3 Задание на «девятку»

Определить деформированную форму двухъярусной пневмооболочки, испытывающую действие давления со стороны воздушной подушки (air cushion). Контактом с опорной поверхностью пренебрегаем. Давление в воздушной подушке считать фиксированным, $p = 2000$ Па.

Исходные данные

Координаты точек крепления Ax := 0.; Ay := 0.95*2; Bx := 0.3*2; By := 0.65*2;

Координаты центров окружностей до деформации xTop := 0.; yTop := 0.65*2; xBot := 0.; yBot := 0.22*2;

Радиусы окружностей верхнего и нижнего ярусов до деформации rt := 0.3*2; rb := 0.19*2; pt0 := 12000*2; pb0 := 4000*2;

Длины дуг следующие:

$$\varphi_1^{nd} = 2.753364902$$

$$\varphi_2^{nd} = 1.182568575$$

$$\varphi_3^{nd} = 0.7764555030$$

$$\varphi_4^{nd} + \varphi_5^{nd} = 5.001905970$$

Также справедливы соотношения alpha5 := (3*Pi)/2; x5 := x4; alpha4 := (3*Pi)/2 - phi4;

В соответствии с этой моделью поперечное сечение баллонета может быть представлено в виде нескольких дуг окружностей. Растягивающие напряжения T вычисляются как $T = p_{\text{lobe}} r_{\text{lobe}}$. Обозначения радиусов и углов дуг окружностей, а также принятое расположение осей координат представлены на рис. 2. Угол α_i определен как угол между положительным направлением оси x и радиусом вектором первой конечной точки i-й дуги (против часовой стрелки). Центр i-й дуги обозначается как (x_i, y_i).

Так как материал ткани считается нерастяжимым, то длины дуг до деформации и после деформации должны быть одними и теми же. Условия сохранения длин имеют вид:

$$\begin{aligned} r_1\phi_1 &= r_t\phi_1^{\text{nd}} \\ r_2\phi_2 &= r_t\phi_2^{\text{nd}} \\ r_3\phi_3 &= r_t\phi_3^{\text{nd}} \\ r_4\phi_4 + r_5\phi_5 &= r_b(\phi_4^{\text{nd}} + \phi_5^{\text{nd}}) \end{aligned} \tag{12}$$

Далее, конечные точки соприкасающихся дуг должны совпадать. Та-

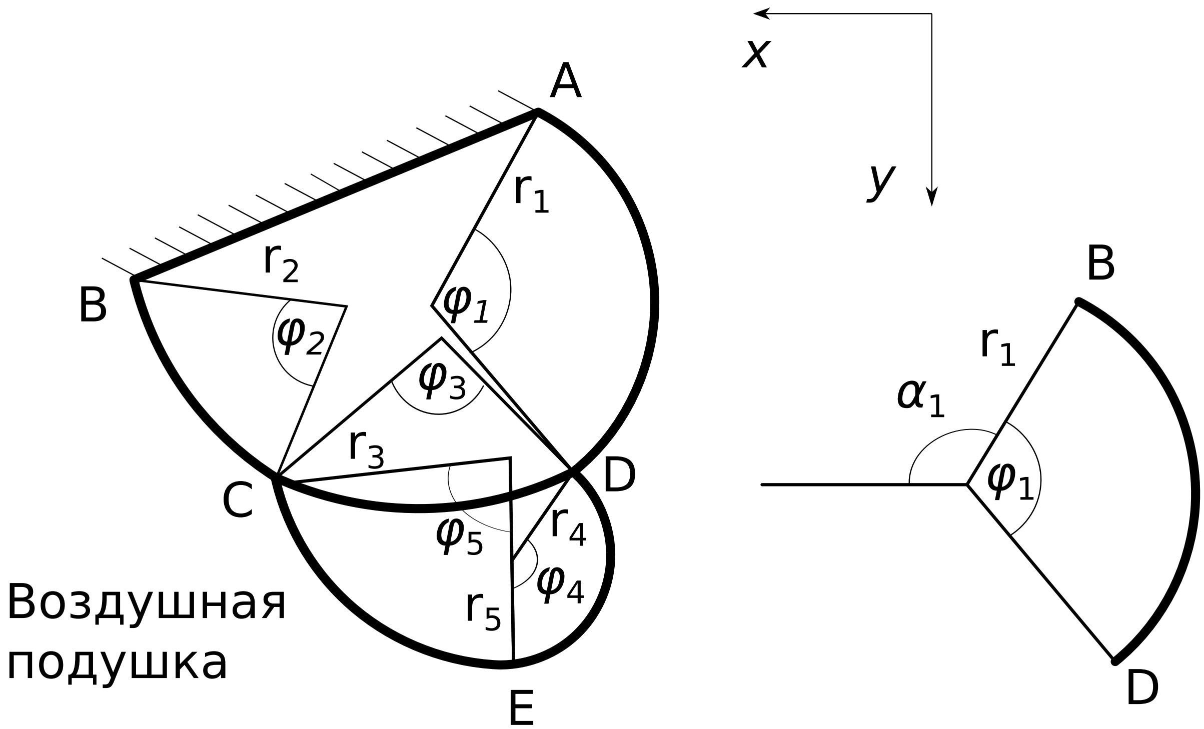

Рис. 2: Поперечное сечение баллонета

ким образом, должны выполняться условия неразрывности нити:

$$
\begin{gathered}
\text{В точке A} \\
r_1 \cos\alpha_1 + x_1 = A_x \\
r_1 \sin\alpha_1 + y_1 = A_y \\
\text{В точке B} \\
r_2 \cos(\phi_2 + \alpha_2) + x_2 = B_x \\
r_2 \sin(\phi_2 + \alpha_2) + y_2 = B_y \\
\text{В точке C} \\
r_3 \cos(\alpha_3 + \phi_3) + x_3 = r_2 \cos\alpha_2 + x_2 \\
r_3 \sin(\alpha_3 + \phi_3) + y_3 = r_2 \sin\alpha_2 + y_2 \\
r_3 \cos(\alpha_3 + \phi_3) + x_3 = r_5 \cos(\alpha_5 + \phi_5) + x_5 \\
r_3 \sin(\alpha_3 + \phi_3) + y_3 = r_5 \sin(\alpha_5 + \phi_5) + y_5 \\
\text{В точке D} \\
r_1 \cos(\alpha_1 + \phi_1) + x_1 = r_3 \cos\alpha_3 + x_3 \\
r_1 \sin(\alpha_1 + \phi_1) + y_1 = r_3 \sin\alpha_3 + y_3 \\
r_1 \cos(\alpha_1 + \phi_1) + x_1 = r_4 \cos\alpha_4 + x_4 \\
r_1 \sin(\alpha_1 + \phi_1) + y_1 = r_4 \sin\alpha_4 + y_4 \\
\text{В точке E} \\
x_4 = x_5 \\
-r_4 + y_4 = -r_5 + y_5
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Так как нить находится в положении равновесия, то силы, действующие на узлы A, B, C, D и E должны быть равны нулю. Запишем условия равновесия в виде:

$$
\begin{gathered}
\text{Точка D} \\
p_t r_1 \sin(\alpha_1 + \phi_1) - (p_t - p_b) r_3 \sin\alpha_3 - p_b r_4 \sin\alpha_4 = 0 \\
-p_t r_1 \cos(\alpha_1 + \phi_1) + (p_t - p_b) r_3 \cos\alpha_3 + p_b r_4 \cos\alpha_4 = 0 \\
\text{Точка C} \\
-(p_t - p) r_2 \sin\alpha_2 + (p_t - p_b) r_3 \sin(\alpha_3 + \phi_3) + (p_b - p) r_5 \sin(\alpha_5 + \phi_5) = 0 \\
(p_t - p) r_2 \cos\alpha_2 - (p_t - p_b) r_3 \cos(\phi_3 + \alpha_3) - (p_b - p) r_5 \cos(\alpha_5 + \phi_5) = 0 \\
\text{Точка E} \\
p_b r_4 = (p_b - p) r_5
\end{gathered}
\tag{14}
$$

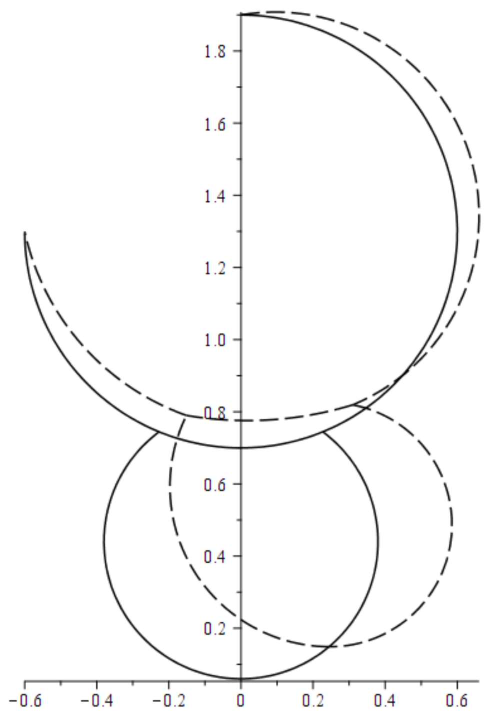

Рис. 3: Пример работы программы

В итоге программа «на девятку» должна уметь рисовать что-то вроде показанного на рис. 3.

4 Критерии оценивания

Для получения оценок 5, 8 и 9 необходимо выполнить задания на соответствующую оценку. При этом для получения оценки 9 НЕ НУЖНО делать задание на оценку 8, если работы выполняется индивидуально. Если работа выполняется в группе (2 или 3 человека), то необходимо выполнить и задание на 8, и на 9. На оценку 10 необходимо также, по аналогии с заданием на 8, сделать «мультфильм» с симуляцией болтающегося баллона под действием давления, которое меняется периодически по синусу от 0 до 2000 Па.

Защита является обязательной, без нее никакая оценка не будет выставляться.

Дедлайн — 25 апреля 23:59.