

旋轉倒單擺模型建立技術報告

學生：國立臺灣大學電機工程學系 許益綸

日期：110/01/10

摘要：經由拉格朗日力學的方式建立旋轉倒單擺動態模型，並且在 Simscape Multibody™ 上建立模型與驗證，完成完整的動態分析，在實務上提供設計參考值。

1 簡介

旋轉倒單擺 (Furuta pendulum) 在 1992 年由 Katsuhisa Furuta 所發明 [1] [2] [3]，這種複雜非線系統的例子在控制理論上受到廣泛的討論。在控制倒單擺系統時可分兩階段，分別為甩上控制 (Swing-up control) 跟平衡控制 (Balance control)，在甩上控制方面，可以應用非線性控制法則去控制，比如：順滑模態控制 (Sliding mode control)、非線性最佳化控制等等；而在平衡控制上，可以應用線性控制理論設計控制器，比如：狀態迴授控制 (State feedback control)、線性二次調節控制 (Linear quadratic control)、根軌跡 (Root locus) 等等設計方法。因此，是個很適合用來練習設計控制器的一個系統。在實務上，如果需要應用到基於模型設計控制器的方法，則需要推導系統的物理模型，因此，以下篇幅會討論旋轉倒單擺基於拉格朗日力學做物理模型推導以及控制系統設計。

2 旋轉倒單擺

本章節主要介紹旋轉倒單擺如何透過拉格朗日動力學去建立物理數學模型，其模型圖如 Figure 1 所示。旋轉倒單擺主要是由一顆馬達、一支懸臂與一支單擺所構成，其運作原理是由馬達帶動懸臂轉動，使得單擺左右甩動，而控制目標是要把單擺甩成垂直於懸臂的位置，並且受到輕微的碰撞擾動還能穩定在垂直的狀態。

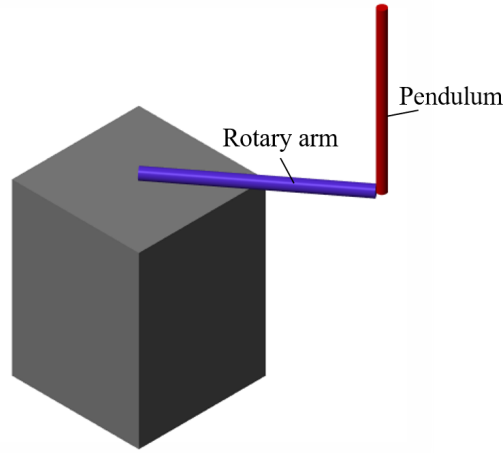


Figure 1: 旋轉倒單擺模型。

2.1 基本假設

在導數學模型之前，需針對單擺系統做一些推導時的假設，假設條件如下：

1. 單擺以及懸臂皆是鋼體 (Rigid body)。
2. 單擺與懸臂質量皆是均勻質量。
3. 旋轉關節只包含阻尼摩擦的物理現象。
4. 馬達是線性的直流馬達。
5. 馬達沒有飽和限制 (Saturation limit)。

旋轉倒單擺數學模型參數，如 Figure 2 所示，其參數值列於 Table 1 中。

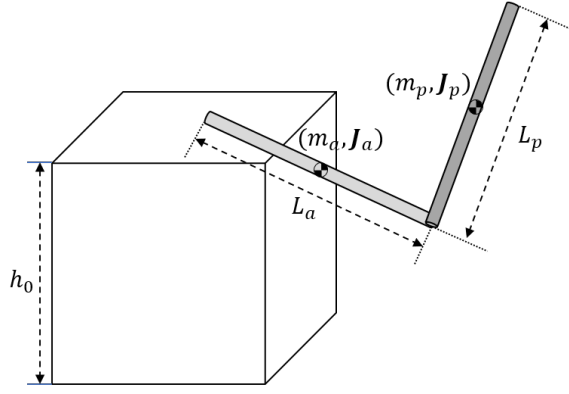


Figure 2: 旋轉倒單擺參數圖。

Table 1: Parameters of Rotary Inverted Pendulum

Parameter	Symbol	Value	Unit
Mass of arm	m_a	0.12	kg
Length of arm	L_a	0.16	m
Moment of inertia of arm	\mathbf{J}_a	\mathbf{J}_a^*	kg·m ²
Mass of pendulum	m_p	0.021	kg
Length of pendulum	L_p	0.15	m
Moment of inertia of pendulum	\mathbf{J}_p	\mathbf{J}_p^*	kg·m ²
Vertical height of arm	h_0	0.15	m

$$\mathbf{J}_a^* := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m_a L_a^2 + m_p L_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_a L_a^2 + m_p L_a^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_p^* := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m_p L_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m_p L_p^2 \end{bmatrix}.$$

2.2 座標轉換

在旋轉倒單擺的例子中，需針對空間、懸臂以及單擺定義坐標系，如 Figure 3 中所示，其中 $X^I Y^I Z^I$ 為空間座標系， $X^m Y^m Z^m$ 為懸臂座標系， $X^B Y^B Z^B$ 為單擺主體座標系。在上述的座標系當中，存在兩個座標轉矩陣 \mathbf{R}_{Im} 與 \mathbf{R}_{IB} ，下標 Im 表示從懸臂座標系轉換至空間座標系，下標 IB 表示從單擺主體座標系轉換至空間座標系，而轉換矩陣分別表示於 Eq. (1) 與 Eq. (2)。

$$\mathbf{R}_{Im} = \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) & 0 \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_{IB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \cos \theta(t) & \sin \alpha(t) \sin \theta(t) \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \cos \theta(t) & -\cos \alpha(t) \sin \theta(t) \\ 0 & \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

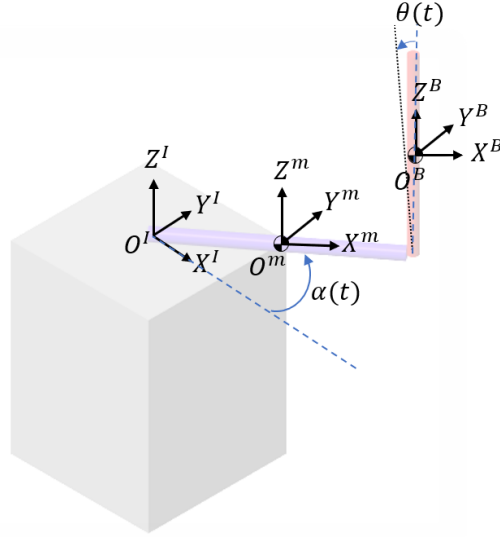


Figure 3: 單擺主體座標與空間座標轉換圖。

2.3 旋轉倒單擺數學模型

滿足前章節 2.1 的假設，則可以開始推導數學模型，首先，定義廣義座標與廣義速率分別如下：

廣義座標 ($\mathbf{q}(t)$)：

$$\mathbf{q}(t) = [\alpha(t) \quad \theta(t)]^T \quad (3)$$

其中 $\alpha(t)$ 為懸臂相對於 X^I 軸的角度， $\theta(t)$ 為單擺相對於 Z^m 軸的角度。

廣義速率 ($\mathbf{u}(t)$)：

$$\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{\alpha}(t) \quad \dot{\theta}(t)]^T \quad (4)$$

當定義完廣義坐標系之後，接下來定義單擺主體位置與懸臂主體位置。如 Figure 4 所示為定義主體位置時所需的向量，其數學式子表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,a}^m &= \begin{bmatrix} -\frac{L_a}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{r}_{2,a}^m &= \begin{bmatrix} \frac{L_a}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{r}_{1,p}^B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_p}{2} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{r}_{2,p}^B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{L_p}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (5)$$

在將上述的向量，透過轉移矩陣，轉換至以空間座標系表示：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1,a}^I &= \mathbf{R}_{Im} \cdot \mathbf{r}_{1,a}^m \\ \mathbf{r}_{2,a}^I &= \mathbf{R}_{Im} \cdot \mathbf{r}_{2,a}^m \\ \mathbf{r}_{1,p}^I &= \mathbf{R}_{IB} \cdot \mathbf{r}_{1,p}^B \\ \mathbf{r}_{2,p}^I &= \mathbf{R}_{IB} \cdot \mathbf{r}_{2,p}^B \end{aligned} \quad (6)$$

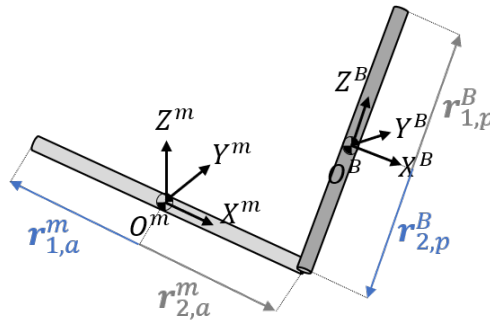


Figure 4: 旋轉倒單擺的向量定義圖。

最後，則可以導出單擺主體位置向量與懸臂主體位置向量，分別如 Eq. (7) 與 Eq. (8) 所示。

$$\mathbf{q}_B = [0 \quad 0 \quad h_0]^T + \mathbf{r}_{2,a}^I - \mathbf{r}_{1,a}^I - \mathbf{r}_{2,p}^I \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_a = [0 \quad 0 \quad h_0]^T - \mathbf{r}_{1,a}^I \quad (8)$$

並定義其速率向量為：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_B &= \dot{\mathbf{q}}_B \\ \mathbf{u}_a &= \dot{\mathbf{q}}_a \end{aligned} \quad (9)$$

接下來，開始定義動能以及位能，如下：

動能 (T):

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_a^T \cdot \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & m_a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_B^T \cdot \begin{bmatrix} m_p & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_B + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{w}_a^T \cdot \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{w}_a + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{w}_B^T \cdot \mathbf{J}_p \cdot \mathbf{w}_B \quad (10)$$

位能 (V):

$$V(\mathbf{q}, t) = m_p \cdot g \cdot [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \mathbf{q}_B \quad (11)$$

由於旋轉軸包含旋轉阻尼，所以還會有一項散逸能量 (Dissipative Energy, W) 的產生，如下式 Eq. (12)。
散逸能量 (W):

$$W(\mathbf{u}, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^T \cdot \begin{bmatrix} c_a & 0 \\ 0 & c_p \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (12)$$

再將散逸能量對廣義速率做偏微分可得散逸力量 (Dissipative force, \mathbf{Q}_d)，如 Eq. (13) 所示。
散逸力量 (\mathbf{Q}_d):

$$\mathbf{Q}_d = \left(\frac{\partial W(\mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \quad (13)$$

將上述動能、位能與散逸力量帶入拉格朗日方程，如下 Eq. (14) 所示，展開拉格朗日方程後可得 Eq. (15)，再進一步整理可以寫成動態方程 Eq. (16)，則可以解得 $\dot{\mathbf{u}}$ ，如 Eq. (17) 所示。
拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right)^T - \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = -\mathbf{Q}_d \quad (14)$$

其中 $L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) = T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - V(\mathbf{q}, t)$ 。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}^2} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{u}} = & -\mathbf{Q}_d + \left(\frac{\partial T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial V(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ & - \frac{\partial^2 T(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (15)$$

動態方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (16)$$

動態方程 $\dot{\mathbf{u}}$ 的解:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) \quad (17)$$

3 模擬結果

4 結論

5 未來發展

References

- [1] Furuta, K., Yamakita, M., & Kobayashi, S. (1992). Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 206(4), 263-269.
- [2] Xu, Y., Iwase, M., & Furuta, K. (2001). Time optimal swing-up control of single pendulum. J. Dyn. Sys., Meas., Control, 123(3), 518-527.
- [3] Furuta, K., & Iwase, M. (2004). Swing-up time analysis of pendulum. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 153-163.