Az informatika számítástudományi alapjai

1. feladatsor

1.7. Describe each of the following infinite sets using the format $\{\_\_\_\_\_\_ \mid n \in \mathcal{N}\}$, without using "..." in the expression on the left side of the vertical bar.

a. $\{0, -1, 2, -3, 4, -5, \ldots\}$

b. $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\}$

c. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}, \ldots\}$

d. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{0, 1, \ldots, 15\}, \{0, 1, 2, \ldots, 31\}, \ldots\}$

$\mathcal{N}$ a természetes számok halmaza.

1.8. In each case below, find an expression for the indicated set, involving A, B, C, and any of the operations $\cup$, $\cap$, $-$, and $'$.

a. $\{x \mid x \in A$ or $x \in B$ but not both$\}$

b. $\{x \mid x$ is an element of exactly one of the three sets A, B, and $C\}$

c. $\{x \mid x$ is an element of at most one of the three sets A, B, and $C\}$

d. $\{x \mid x$ is an element of exactly two of the three sets A, B, and $C\}$

A vesszőzés a komplementerképzést jelenti, azaz A' azoknak a dolgoknak a halmazát jelöli, amik nincsenek benne A-ban.

1.12. a. How many elements are there in the set

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}\}?$$

Alapfogalmak

- $V = \{a, b, c, \dots\}$: ábécé – betűk (szimbólumok) véges halmaza
- bab : egy szó a V ábécé betűiből
- szó hossza
- λ : a „nulla hosszúságú" szó (üres szó)
- konkatenáció (egymás után írás):

  $ab \cdot abc = ababc$

Alapfogalmak

$$V = \{a, b, c\}$$

$$V^0 = \{\lambda\}$$

$$V^1 = \{a, b, c\}, \quad V^2 = \{aa, ab, ba, bb, ac, ca, cc, bc, cb\}$$

és így tovább

- $V^* = V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup \ldots = \bigcup_{i \geq 0} V^i$
- $V^+ = V^1 \cup V^2 \ldots = \bigcup_{i \geq 1} V^i$

Műveletek nyelvekkel

unió (egyesítés, összeadás): $L_1 \cup L_2 = \{\, p \mid p \in L_1 \text{ vagy } p \in L_2 \}$

metszet: $L_1 \cap L_2 = \{\, p \mid p \in L_1 \text{ és } p \in L_2 \}$,

különbség: $L_1 \setminus L_2 = \{\, p \mid p \in L_1 \text{ és } p \notin L_2 \}$,

komplementer: $\overline{L_1} = V^* \setminus L_1$.

konkatenáció $L_1 \cdot L_2 = \{\, pq \mid p \in L_1 \text{ és } q \in L_2 \}$

$L^0 = \{\lambda\}$

$L^1 = L$

$L^2 = L \cdot L$ és így tovább $L^i = L \cdot L \cdot \ldots \cdot L$

$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

Műveleti tulajdonságok

Az előadáson elfelejtettem visszatérni a kérdésre, hogy mi van \emptyset-gal, \emptyset^0–val.*

- $L_1 \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L_1 = \emptyset$,
- $L_1 \cdot \{ \lambda \} = \{ \lambda \} \cdot L_1 = L_1$ (a konkatenáció egységeleme a $\{ \lambda \}$ nyelv),
- $L_1 \cup \emptyset = \emptyset \cup L_1 = L_1$ (az unió egységeleme az $\emptyset$ nyelv),
- $L_1 \cap V^* = V^* \cap L_1 = L_1$ (a metszet egységeleme a V^* univerzális nyelv),
- $L_1^+ = L_1 \cdot L_1^* = L_1^* \cdot L_1$,
- $L_1^* = L_1^+ \cup \{ \lambda \}$,
- $(L_1^*)^* = L_1^*$ (az iteráció idempotens tulajdonsága),
- $(L_1^+)^+ = L_1^+$ (a + művelet idempotens tulajdonsága),
- $(L_1^*)^+ = (L_1^+)^* = L_1^*$.

4.3. Legyen $V = \{0\}$, $W = \{1\}$. Határozzuk meg, hogy mely szavak alkotják a következő nyelveket:

a) $(V \cup W)^*$;
b) $(VW)^*$;
c) V^*W^*;
d) $(V \cup W)^*VW$.

Mondjunk olyan szavakat, amik nincsenek az alábbi nyelvekben, ha A={a}, B={b}.

- B*(AB)*A*
- (A*u B*)(A*u B*)(A*u B*)
- A*(BA$^+$)*B*
- B*(A u BA)*B*

4.8. Határozzuk meg, hogy mikor lehetnek az L^*, ill. az L^+ nyelvek végesek. Előfordulhat-e, hogy L^* vagy L^+ az üres nyelvvel egyenlő?

4.5. Legyen $V = \{0, 1\}$. Adjuk meg a következő nyelvek egy-egy meghatározását a V-ből és részhalmazaiból kiindulva úgy, hogy közben csak a nyelvek iterációját, egyesítését és szorzását használjuk:

a) $L = \{\omega : \omega \in V^*$ és ω két egymás utáni 1-esre végződik$\}$;
b) $L = \{\omega : \omega \in V^* - \{\varepsilon\}$ és ω pontosan egy 0-t tartalmaz$\}$;

4.4. Legyen adva egy V ábécé, és legyenek L_1, L_2, L_3 tetszőleges V-ből alkotott nyelvek. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket, vagy pedig adjunk meg olyan ellenpéldát, amelyre nem teljesül a tekintett egyenlőség:

a) $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$;
b) $(L_1^*L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$;
c) $L_1^*(L_2 \cup L_3) = (L_1^*L_2) \cup (L_1^*L_3)$;
d) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$;
e) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$;
f) $L_1(L_2^* \cap L_3^*) = (L_1L_2^*) \cap (L_1L_3^*)$.

1.32. For a finite language L, let $|L|$ denote the number of elements of L. Fo example, $|\{\Lambda, a, ababb\}| = 3$. This notation has nothing to do with the length $|x|$ of a string x. The statement $|L_1L_2| = |L_1||L_2|$ says that the number of strings in the concatenation L_1L_2 is the same as the product the two numbers $|L_1|$ and $|L_2|$. Is this always true? If so, give reasons, and if not, find two finite languages $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ such that $|L_1L_2| \neq |L_1||L_2|$.

1.36. a. Consider the language L of all strings of a's and b's that do not end with b and do not contain the substring bb. Find a finite language S such that $L = S^*$.

b. Show that there is no language S such that S^* is the language of all strings of a's and b's that do not contain the substring bb.