

Az informatika számítástudományi alapjai

1. feladatsor

A nem hétfőieknek egy bevezető feladat a 0. feladatsorból.

1.7. Describe each of the following infinite sets using the format $\{\underline{\hspace{1cm}} \mid n \in \mathcal{N}\}$, without using “...” in the expression on the left side of the vertical bar.

a. $\{0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$

b. $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}$

c. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}, \dots\}$

d. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{0, 1, \dots, 15\}, \{0, 1, 2, \dots, 31\}, \dots\}$

\mathcal{N} a természetes számok halmaza.

Rövid emlékeztető az előadásról, aztán néhány feladat. Az utolsó fólián lévő kettő kimaradhat, ha nem jut rá rendesen idő.

Alapfogalmak

- $V = \{a, b, c, \dots\}$: ábécé - betűk (szimbólumok) melyekből szókat lehet alkotni
- bab : egy szó a V ábécé betűiből
- szó hossza
- λ : a „nulla hosszúságú” szó (üres szó)
- Concatenáció (egyesítés):
 $ab \cdot abc = ababc$

Alapfogalom

$$V^0 = \{\lambda\}$$

$$V = \{a, b, c\}$$

$$V^1 = \{a, b, c\}, \quad V^2 = \{aa, ab, ba, bb, ac, ca, cc, bc, cb\}$$

és így tovább

- $V^* = V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 0} V^i$
- $V^+ = V^1 \cup V^2 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 1} V^i$

Műveletek nyelvekkel

unió (egyesítés, összeadás): $L_1 \cup L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ vagy } p \in L_2 \}$

metszet: $L_1 \cap L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ és } p \in L_2 \},$

különbség: $L_1 \setminus L_2 = \{ p \mid p \in L_1 \text{ és } p \notin L_2 \},$

komplementer: $\overline{L_1} = V^* \setminus L_1.$

konkatenáció, $L_1 \cdot L_2 = \{ pq \mid p \in L_1 \text{ és } q \in L_2 \}$

$$L^0 = \{ \lambda \}$$

$$L^1 = L$$

$$L^2 = L \cdot L \quad \text{és így tovább} \quad L^i = L \cdot L \cdot \dots \cdot L$$

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i, \quad L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$$

4.3. Legyen $V = \{0\}$, $W = \{1\}$. Határozzuk meg, hogy mely szavak alkotják a következő nyelveket:

- a) $(V \cup W)^*$;
- b) $(VW)^*$;
- c) V^*W^* ;
- d) $(V \cup W)^*VW$.

Mondjunk olyan szavakat, amik nincsenek az alábbi nyelvekben, ha $A = \{a\}$, $B = \{b\}$.

- $B^*(AB)^*A^*$
- $(A^* \cup B^*)(A^* \cup B^*)(A^* \cup B^*)$
- $A^*(BA^+)^*B^*$
- $B^*(A \cup BA)^*B^*$

4.8. Határozzuk meg, hogy mikor lehetnek az L^* , ill. az L^+ nyelvek végesek. Előfordulhat-e, hogy L^* vagy L^+ az üres nyelvvel egyenlő?

4.5. Legyen $V = \{0, 1\}$. Adjuk meg a következő nyelvek egy-egy meghatározását a V -ből és részhalmazáiból kiindulva úgy, hogy közben csak a nyelvek iterációját, egyesítését és szorzását használjuk:

- a) $L = \{\omega : \omega \in V^* \text{ és } \omega \text{ két egymás utáni 1-esre végződik}\};$
- b) $L = \{\omega : \omega \in V^* - \{\varepsilon\} \text{ és } \omega \text{ pontosan egy 0-t tartalmaz}\};$

4.4. Legyen adva egy V ábécé, és legyenek L_1, L_2, L_3 tetszőleges V -ből alkotott nyelvek. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket, vagy pedig adjunk meg olyan ellenpéldát, amelyre nem teljesül a tekintett egyenlőség:

- a) $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*;$
- b) $(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*;$
- c) $L_1^* (L_2 \cup L_3) = (L_1^* L_2) \cup (L_1^* L_3);$
- d) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*;$
- e) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*;$
- f) $L_1 (L_2^* \cap L_3^*) = (L_1 L_2^*) \cap (L_1 L_3^*).$

1.32. For a finite language L , let $|L|$ denote the number of elements of L . For example, $|\{\Lambda, a, ababb\}| = 3$. This notation has nothing to do with the length $|x|$ of a string x . The statement $|L_1 L_2| = |L_1||L_2|$ says that the number of strings in the concatenation $L_1 L_2$ is the same as the product of the two numbers $|L_1|$ and $|L_2|$. Is this always true? If so, give reasons, and if not, find two finite languages $L_1, L_2 \subseteq \{a, b\}^*$ such that $|L_1 L_2| \neq |L_1||L_2|$.

- 1.36.**
- Consider the language L of all strings of a 's and b 's that do not end with b and do not contain the substring bb . Find a finite language S such that $L = S^*$.
 - Show that there is no language S such that S^* is the language of all strings of a 's and b 's that do not contain the substring bb .