

3. Vecteurs aléatoires discrets

MTH2302D

S. de Montigny en collaboration avec S. Le Digabel
École Polytechnique de Montréal

A2017

(v2)

Plan

1. Distributions conjointes et marginales
2. Distributions conditionnelles
3. Espérances conditionnelles
4. Indépendance
5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation
6. Combinaisons linéaires

1. Distributions conjointes et marginales

2. Distributions conditionnelles

3. Espérances conditionnelles

4. Indépendance

5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation

6. Combinaisons linéaires

Vecteurs aléatoires

Définition

Un *vecteur aléatoire* est un vecteur $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ composé de n variables aléatoires définies sur le même espace échantillon.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas $n = 2$ où les variables aléatoires sont de même nature, les deux discrètes ou continues.

- Un vecteur aléatoire $[X, Y]$ est *discret* si X et Y sont des v.a. discrètes.
- Un vecteur aléatoire $[X, Y]$ est *continu* si X et Y sont des v.a. continues (pas considéré ici).

Distribution conjointe (masse conjointe)

Si $[X, Y]$ est un vecteur aléatoire **discret**, alors sa *fonction de masse conjointe* est, pour tout $(x, y) \in R_X \times R_Y$:

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

(parfois noté *fonction de probabilité conjointe* et $p_{X,Y}$).

Propriétés

1. $p(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in R_X \times R_Y$.
2. $\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} p(x, y) = 1$.
3. $P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p(x, y)$ pour tous $A \subseteq R_X$ et $B \subseteq R_Y$.

Fonction de répartition conjointe

Définition

$$F(x, y) = F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) .$$

- Cas discret :
$$F(x, y) = \sum_{\substack{u \in R_X \\ u \leq x}} \sum_{\substack{v \in R_Y \\ v \leq y}} p(u, v).$$

Exemple 1

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

La fonction de masse conjointe de X et Y est donnée par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0				
1				

Remplir le tableau puis calculer $P(X \geq 1, Y < 1)$ et $P(X \leq 2)$.

Distributions marginales

Pour étudier chacune des v.a. d'un vecteur aléatoire, on a recours aux distributions marginales.

Définition

Si $[X, Y]$ est un vecteur aléatoire **discret** de masse conjointe p alors les *distributions marginales* sont

- $p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p(x, y)$ pour tout $x \in R_X$.
- $p_Y(y) = \sum_{x \in R_X} p(x, y)$ pour tout $y \in R_Y$.

Ce sont des masses : $\sum_{x \in R_X} p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_Y(y) = 1$.

Exemple 2

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

Les distributions marginales peuvent être calculées en additionnant les lignes et les colonnes du tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	—

Espérance et variance de X et Y

En utilisant les distributions marginales pour le vecteur aléatoire $[X, Y]$, on peut calculer l'espérance et la variance des v.a. individuelles X et Y .

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xp_X(x) \quad \text{et} \quad V(X) = \sum_{x \in R_X} x^2 p_X(x) - [E(X)]^2.$$

$$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} yp_Y(y) \quad \text{et} \quad V(Y) = \sum_{y \in R_Y} y^2 p_Y(y) - [E(Y)]^2.$$

Exemple 3

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	—

Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, et $V(Y)$.

1. Distributions conjointes et marginales

2. Distributions conditionnelles

3. Espérances conditionnelles

4. Indépendance

5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation

6. Combinaisons linéaires

Distributions conditionnelles

Si $[X, Y]$ est un vecteur aléatoire **discret**, de masse conjointe p , alors on définit les *fonctions de masse conditionnelles* par

- $p_{X|Y=y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$ si $p_Y(y) \neq 0$, pour tout $x \in R_X$.
- $p_{Y|X=x}(y) = P(Y = y|X = x) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)}$ si $p_X(x) \neq 0$, pour tout $y \in R_Y$.
- Ce sont des fonctions de masse :

$$\sum_{x \in R_X} p_{X|Y=y}(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{Y|X=x}(y) = 1 .$$

Exemple 4

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	—

Calculer les distributions conditionnelles $p_{X|Y=1}$ et $p_{Y|X=2}$ et vérifier que ce sont des masses.

Remarques

- Dans le cas discret, il y a autant de distributions conditionnelles de X qu'il y a de valeurs possibles pour Y (et vice-versa).
- En général on a

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

$$\text{et } P(Y \in B | X \in A) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(X \in A)}.$$

- Généralisation de la formule des probabilités totales :

$$P(Y \in B) = \sum_{x \in R_X} P(Y \in B | X = x) p_X(x).$$

1. Distributions conjointes et marginales

2. Distributions conditionnelles

3. Espérances conditionnelles

4. Indépendance

5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation

6. Combinaisons linéaires

Espérances conditionnelles

Soit $[X, Y]$ un vecteur aléatoire **discret** de masse conjointe p .

L'*espérance conditionnelle* de l'une des variables lorsque l'autre est fixée est

- $E(X|Y = y) = \sum_{x \in R_X} xp_{X|Y=y}(x).$
- $E(Y|X = x) = \sum_{y \in R_Y} yp_{Y|X=x}(y).$

Notons que $E(X|Y = y)$ est une fonction de y et que $E(Y|X = x)$ est une fonction de x .

Exemple 5

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	—

Calculer les espérances conditionnelles $E(X|Y = 0)$ et $E(Y|X = 2)$.

1. Distributions conjointes et marginales

2. Distributions conditionnelles

3. Espérances conditionnelles

4. Indépendance

5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation

6. Combinaisons linéaires

Indépendance

Les deux variables du vecteur discret $[X, Y]$ de masse p sont indépendantes si $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ **pour tout** x élément de R_X et y élément de R_Y .

Exemple 6

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
1	0	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	—

Remarques

- Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes alors on peut déterminer leur distribution conjointe à l'aide des distributions marginales des v.a. de X et Y en faisant le produit de celles-ci.
- Ce n'est *pas* le cas si X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Distributions conjointes et marginales

2. Distributions conditionnelles

3. Espérances conditionnelles

4. Indépendance

5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation

6. Combinaisons linéaires

Fonctions de v.a. (cas discret)

$$E[H(X, Y)] = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} H(x, y)p(x, y).$$

Exemple 7 :

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

Calculer $E(XY)$.

Covariance et corrélation

Ce sont des mesures du degré d'association linéaire entre deux variables aléatoires.

Définition

Soit $[X, Y]$ un vecteur aléatoire. La *covariance* entre X et Y est

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Remarques

- On a $\text{Cov}(X, X) = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$.
- Si X, Y indépendantes, on peut montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Covariance et corrélation (suite)

Définition

Soit $[X, Y]$ un vecteur aléatoire. Le *coefficient de corrélation* entre X et Y est

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} .$$

Propriétés :

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
2. Si X et Y sont indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\rho(X, Y) = 0$ (l'inverse n'est pas forcément vrai).
3. Si $Y = a + bX$ alors
 - $\rho(X, Y) = -1$ si $b < 0$.
 - $\rho(X, Y) = +1$ si $b > 0$.

Exemple 8

On lance une pièce 3 fois et on note le résultat. Soit

X : le nombre total de PILES obtenus.

Y : le nombre de PILES obtenus au premier lancer.

Calculer la covariance et le coefficient de corrélation entre X et Y .

1. Distributions conjointes et marginales
2. Distributions conditionnelles
3. Espérances conditionnelles
4. Indépendance
5. Fonctions de v.a., covariance et corrélation
- 6. Combinaisons linéaires**

Combinaison linéaire de v.a. : espérance et variance

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires et

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n,$$

où les a_i sont des constantes. Alors

- $E(Y) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$, et
- $$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \sum a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Si les v.a. X_i sont indépendantes alors $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ et

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i).$$

Exemple 9

Exprimer $V(X - Y)$.

Exemple 10

Quatre composants sont montés en série. La résistance électrique de chaque composant est une v.a. X_i de moyenne 10 et de variance 4.

La résistance totale du système est la somme des résistances des composants.

On peut supposer que les résistances des composants sont indépendantes.

Calculer la moyenne et la variance de la résistance du système.

Exemple 11

Un assemblage consiste à superposer deux pièces d'équipement A et B .

Les pièces de type A ont un poids de 10 kg en moyenne avec un écart-type de 0.01 kg.

Les pièces de type B ont un poids de 15 kg en moyenne avec un écart-type de 0.05 kg.

Les pièces A et B proviennent de procédés de fabrication indépendants.

1. Calculer la moyenne et l'écart-type du poids total de l'assemblage.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type de la différence de poids entre une pièce de type A et une pièce de type B .