# Exame - Época Normal 16/17

1) • **Variáveis de decisão**

$x_1 \to$ nº de inspeções por semana a casas

$x_2 \to$ " " " " " " empresas

• **Função objetivo**

Maximizar o nº de inspeções completas por semana

$$Max\ Z = x_1 + x_2$$

• **Restrições**

| | Isolamento | Inst. Elé. | Sist. água |
|---|---|---|---|
| $x_1 \to$ | 4 h | 2 h | 4 h |
| $x_2 \to$ | 2 h | 6 h | 6 h |
| Disponib. | 28 h | 30 h | 36 h |

$4x_1 + 2x_2 \leq 28$

$2x_1 + 6x_2 \leq 30$

$4x_1 + 6x_2 \leq 36$

2) $\min\ Z = 4x_1 + 3x_2 = 12 \quad (3,0)\ (0,4)$

s.a.

$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (-4,0)\ (0,2) \quad (1)$

$2x_1 - 2x_2 \geq 6 \quad (3,0)\ (0,-3) \quad (2)$

$2x_1 + 2x_2 = 10 \quad (5,0)\ (0,5) \quad (3)$

$x \geq 0,\ x_2 \geq 0$

$$x-1\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \quad (-) \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

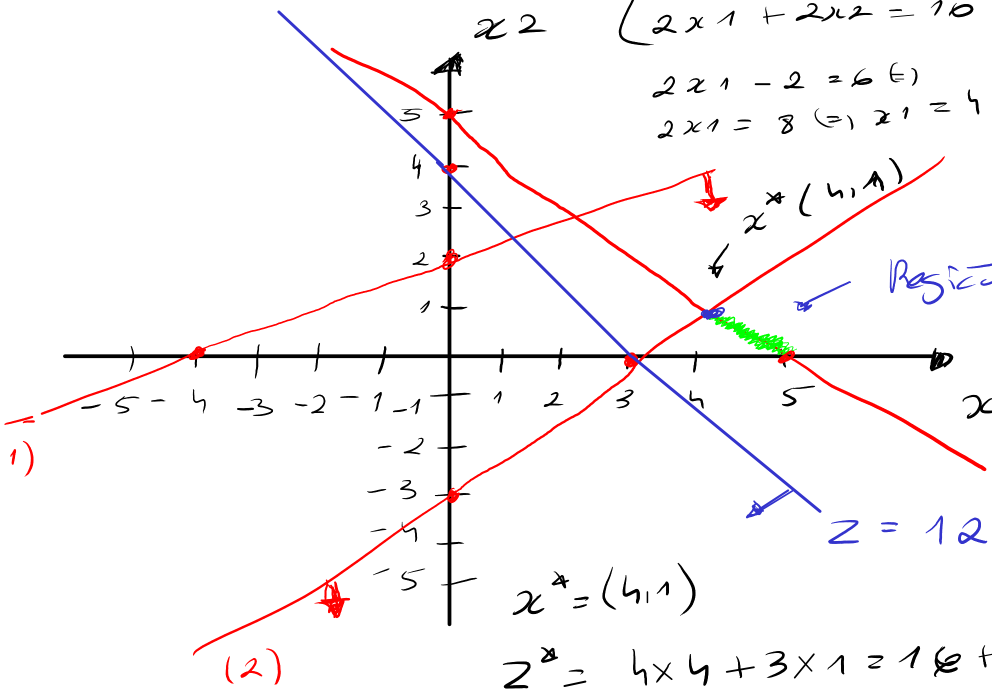
$4x_2 = 4$

$x_2 = 1$

$2x_1 - 2 = 6 \Leftrightarrow$

$2x_1 = 8 \Leftrightarrow x_1 = 4$

a)




$x^* = (4,1)$

$Z^* = 4 \times 4 + 3 \times 1 = 16 + 3 = 19$

2) $\min\ z = 4x_1 + 3x_2 \ (=)\ \max z' = -4x_1 - 3x_2$

s.a

$-x_1 + 2x_2 \le 4$ $\qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ slack

$2x_1 - 2x_2 \ge 6$ $\qquad 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 6$ artificial, surplus

$2x_1 + 2x_2 = 10$ $\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_6 = 10$ artificial

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$\le$ + slack

$\ge$ - surplus + artif

$=$ + artificial

## 1ª Fase

$\text{Max } Z_{1^a\,Fase} = -x_5 - x_6$

| | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | b | | |
| $x_3$ | 0 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | x | (1) |
| $x_5$ | -1 | 2 | -2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6 | 6/2 = 3 | (2) |
| $x_6$ | -1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 10/2 = 5 | (3) |
| $z_j - c_j$ | | -4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -16 | | |

SBNA x: (0, 0, 4, 0, 6, 10) → Z = -16

| | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | b | | |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | -1/2 | 1/2 | 0 | 7 | 7 | (1)' = (1) + (2)' |
| $x_1$ | 0 | 1 | -1 | 0 | -1/2 | 1/2 | 0 | 3 | x | (2)' = 1/2 (2) |
| $x_6$ | -1 | 0 | 4 | 0 | 1 | -1 | 1 | 4 | 1 | (3)' = (3) - 2 (2)' |
| $z_j - c_j$ | | 0 | -4 | 0 | -1 | 2 | 0 | -4 | | |

SBNA x: (3, 0, 7, 0, 0, 4) → Z = -4

|  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | |
| $x_3$ 0 | 0 | 0 | 1 | $-3/4$ | $3/4$ | $-1/4$ | 6 |
| $x_1$ 0 | 1 | 0 | 0 | $-1/4$ | $-1/8$ | $1/4$ | 4 |
| $x_2$ 0 | 0 | 1 | 0 | $1/4$ | $-1/4$ | $1/4$ | 1 |
| $z_j - c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

$(1)'' = (1)' - (3)''$

$(2)'' = (2)' + (3)''$

$(3)'' = 1/4\,(3)'$

$SBA_{1^a\ Fase}\ x = (4, 1, 6, 0, 0, 0).\ z = 0$

## 2 Fase

$\text{Max } z' = -4x_1 - 3x_2$

|  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $c_j$ | -4 | -3 | 0 | 0 | |
| $x_3$ 0 | 0 | 0 | 1 | $-3/4$ | 6 |
| $x_1$ -4 | 1 | 0 | 0 | $-1/4$ | 4 |
| $x_2$ -3 | 0 | 1 | 0 | $1/4$ | 1 |
| $z_j - c_j$ | 0 | 0 | 0 | $1/4$ | -19 |

SBA $x^* = (4, 1, 6, 0, 0, 0)$

$z'^* = -19,\ z^* = 19$

c) Duas SBAs são adjacentes quando diferem apenas numa variável não básica.

Deste modo, as soluções básicas admissíveis correspondentes a quadros do método Simplex obtidos em iterações sucessivas são adjacentes.

3) Max $Z = x_1 - Mx_4$

s.a

$2x_1 + x_2 \leq 2$ $\overset{\times -1}{\Leftrightarrow}$ $-2x_1 - x_2 \geq -2$ $\qquad -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3 \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 \leq 3$ $\qquad x_1 + 3x_2 + x_5 = 3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Surplus artificial

slack

a)

| | | 1 | 0 | 0 | -M | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
| $x_4$ | -M | -2 | -1 | -1 | 1 | 0 | -2 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $z_j - c_j$ | | 2M - 1 | M | M | 0 | 0 | 2M |

(1)

(2)

| | | 1 | 0 | 0 | -M | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
| $x_1$ | 1 | 1 | 1/2 | 1/2 | -1/2 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 5/2 | -1/2 | 1/2 | -1 | 2 |
| $z_j - c_j$ | | 0 | 1/2 | 1/2 | -1/2 M | 0 | 1 |

$(1)' = -1/2\,(1)$

$(2)' = (2) - (1)'$

Quadro ótimo porque a coluna do b já só tem valores positivos.

$x^* = (1, 0, 0, 0, 2) \quad z^* = 1$

b) **Primal**

Max $z = x_1$

s.a

$2x_1 + x_2 \leq 2 \leftarrow u_1$

$x_1 + 3x_2 \leq 3 \leftarrow u_2$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

**Dual**

Min $Z_D = 2u_1 + 3u_2$

$2u_1 + u_2 \geq 1$

$u_1 + 3u_2 \geq 0$

$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$

4) Oferta = 21 + 18 + 11 = 50

Procura = 15 + 20 + 10 = 45

} OFERTA > Procura

a)

| | L1 | L2 | L3 | L3 (Fictícia) | |
|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 15 (1) | 6 (2) | X (5) | X (0) | ~~21~~ ~~6~~ 0 |
| A2 | X (8) | 14 (3) | 4 (1) | X (0) | ~~18~~ ~~4~~ 0 |
| A3 | X (4) | X (9) | 6 (6) | 5 (0) | ~~11~~ ~~5~~ 0 |
| | ~~15~~ 0 | ~~20~~ ~~14~~ 0 | ~~10~~ ~~6~~ 0 | ~~5~~ 0 | |

Custo da solução

$Z = 15 \times 1 + 6 \times 2 + 14 \times 3 + 4 \times 1 + 6 \times 6 + 5 \times 0 = 109$ €

b)

| | $V_1 = 1$ | $V_2 = 2$ | $V_3 = 0$ | $V_4 = -6$ (Fictícia) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1 = 0$ | 15 (1) | 6 (2) | (5) | (0) | 21 |
| $U_2 = 1$ | (8) | 14 (3) | 4 (1) | (0) | 18 |
| $U_3 = 6$ | (4) | (9) | 6 (6) | 5 (0) | 11 |
| | 15 | 20 | 10 | 5 | |

Células desocupadas

(1,3) : $0 + 0 \leq 5$ ✓

(1,4) : $0 - 6 \leq 0$ ✓

(2,1) : $1 + 1 \leq 8$ ✓

(2,4) : $1 - 6 \leq 0$ ✓

(3,1) : $6 + 1 \leq 4$ F

(3,2) : $6 + 2 \leq 9$ ✓

$\min = \{6, 15, 14\} = 6$

| | $V_1 = 1$ | $V_2 = 2$ | $V_3 = 0$ | $V_4 = -3$ (Fictícia) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1 = 0$ | 9 (1) | 12 (2) | (5) | (0) | 21 |
| $U_2 = 1$ | (8) | 8 (3) | 10 (1) | (0) | 18 |
| $U_3 = 3$ | 6 (4) | (9) | (6) | 5 (0) | 11 |
| | 15 | 20 | 10 | 5 | |

Células desocupadas

(1,3) : $0 + 0 \leq 5$ ✓

(1,4) : $0 - 3 \leq 0$ ✓

(2,1) : $1 + 1 \leq 8$ ✓

(2,4) : $1 - 3 \leq 0$ ✓

(3,2) : $3 + 2 \leq 9$ ✓

(3,3) : $3 + 0 \leq 6$ ✓

Quadro ótimo:

$x_{11}^* = 9$; $x_{12}^* = 12$;

$x_{22}^* = 8$; $x_{23}^* = 10$;

$x_{31}^* = 6$; $x_{34}^* = 5$

Custo mín do transporte

$Z^* = 9 + 12 \times 2 + 8 \times 3 + 10 + 6 \times 4 + 5 \times 0 = 91$ €

c) $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 21$ Porque OFERTA > PROCURA

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 18$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 11$