



# UNIVERSIDAD LA SALLE A.C.

FACULTAD DE INGENIERÍA

Con reconocimiento de validez oficial de estudios  
según decreto presidencial del  
29 de mayo de 1987, Clave: 2004.

**“Caracterización de un Método de Interpolación  
para Funciones en Variables Separables  
y su Aplicación a la Ecuación de Conductividad Eléctrica  
Bidimensional: Estudio sobre Funciones Exactas”**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS,  
ÁREA CIBERNÉTICA

P R E S E N T A:

**Ing. César Marco Antonio Robles González**

Asesor de Tesis: Dr. Marco Pedro Ramírez Tachiquín

México, D.F. 2012

México D. F., 09 de enero del 2012

MTRO. RAÚL ALBERTO HAUSER LUNA  
DIRECTOR DE GESTIÓN ESCOLAR  
UNIVERSIDAD LA SALLE, A.C.  
P R E S E N T E

Le informo que el Sr. César Marco Antonio Robles González, inscrito en la Facultad de Ingeniería de la Universidad La Salle, en la Maestría en Ciencias, Área Cibernética, con reconocimiento de validez oficial de estudios según decreto presidencial del 29 de mayo de 1987, clave: 2004, ha elaborado el trabajo titulado "**CARACTERIZACIÓN DE UN MÉTODO DE INTERPOLACIÓN PARA FUNCIONES EN VARIABLES SEPARABLES Y SU APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DE CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA BIDIMENSIONAL: ESTUDIO SOBRE FUNCIONES EXACTAS**" de conformidad con la modalidad de titulación aprobada por esta maestría.

Le comunico además que el trabajo que fue desarrollado bajo mi conducción tiene la calidad suficiente para ser la base de sustentación de su examen profesional.

A T E N T A M E N T E

DR. MARCO PEDRO RAMÍREZ TACHIQUÍN  
ASESOR DE TESIS

DR. JOSÉ AMBROSIO BASTIÁN  
JEFE DE PROCESOS ACADÉMICOS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS, ÁREA CIBERNÉTICA

Aprobación  
DR. EDUARDO GÓMEZ RAMÍREZ  
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD LA SALLE

**Dedicatoria:**

*A mis padres, Marco Antonio Robles García y Silvia González Bernal, por su apoyo incondicional brindado para terminar con éxito mis estudios, y seguir adelante con la investigación que me apasiona.*

*A mi hermano, David Isai Robles González, por su comprensión y ayuda brindada en los momentos más difíciles.*

*A mi asesor, tutor, profesor, colega y sobre todo amigo, Marco Pedro Ramírez Tachiquín, por su apoyo y guía, en estos últimos años para dar fin a este proyecto.*

*A mi alma matter, por brindarme la oportunidad de especializarme y continuar con mis estudios.*

# Abstract

The Electrical Impedance Tomography is a boundary value problem posed in 1980 by A. P. Calderon, in which specifies that search a solution for this problem, it was impossible to achieve, at least for the methods existed, but in 2006, the inverse boundary value problem, using the Theory of Pseudoanalytic Functions a solution could be approximated using the Taylor Series in Formal Powers. The proposed method in this work used the Pseudoanalytic Function Theory, to generate a conductivity function in piecewise separable variables, which let us approximated the inverse boundary value problem, for an interpolation method using the Taylor series in Formal Powers to achieve a reconstruction of a mathematical known expression.

This work tries to characterize the interpolation method using piecewise separable variables for the conductivity function, in which it studied two points of view, the first one computing an error function that implies an absolute error and a percentage error, to know how does the method will behaves, and the second part of this method tries to reconstruct the conductivity function in piecewise separable variables and compare between the original conductivity function and the interpolated function using this method.

In this method we have been used a set of functions of the mathematical analysis for the functions with an analytic representation it knows, those functions are from the exponential case, polynomial case, sinusoidal case and Gaussian case, that it will be the backbone of the interpolation method using piecewise separable variables of conductivity function, where the methodology proposed will be, the creation of conductivity space, divide this space in  $n$  number of regions and any amount of trials points, that it will be denominated interpolated conductivity, using the differences between the original conductivity functions and the interpolated conductivity function, compute an error and the possible reconstruction.

# Resumen

La Tomografía por Impedancia Eléctrica, es un problema con valores en la frontera que fue propuesto en forma matemáticamente correcta en 1980 por Alberto Pedro Calderón [4]. Se trata de un problema inverso para la ecuación de conductividad de corrientes

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0,$$

donde  $\sigma$  es una función que depende de las tres variables espaciales, y  $u$  es la función de potencial eléctrico. De hecho, durante al menos tres décadas, se pensó que obtener una solución general para dicha ecuación era imposible, pero en el año 2006, gracias a la Teoría de las Funciones Pseudoanalíticas [2], fue posible expresar la solución para el caso de dos dimensiones, mediante el uso de las series de Taylor en Potencias Formales.

El método que se propone en este trabajo permite obtener una clase especial de funciones en términos de variables separables, como lo requiere la Teoría de las Funciones Pseudoanalíticas, para generar soluciones de la ecuación diferencial anterior, que nos provean nuevos puntos de vista para proponer algoritmos que aproximen la solución del problema inverso.

La propuesta central de este trabajo es caracterizar el método de interpolación en variables separables, desde dos puntos de vista diferentes. El primero será calculando una función de error, absoluto y porcentual, para estimar el comportamiento del método de interpolación respecto a las funciones originales.

Por otra parte, se estudiará (basado en las funciones de error generadas) una reconstrucción de las funciones analíticas en variables separables, y se buscará una comparación entre la conductividad original y la conductividad generada a través del proceso de interpolación propuesto.

En este trabajo se propone emplear un conjunto de funciones que forman parte del Análisis Matemático, cuyas representaciones analíticas son conocidas. Se consideran funciones del tipo exponencial, polinomial, senoidal y

gausseano. Ellas serán la columna vertebral del método de interpolación en variables separables que se propone, donde la metodología básica a seguir, será: crear un espacio de conductividades; emplear otra conductividad que será denominado conductividad interpolada, y mediante la diferencia entre la conductividad original y la interpolada; se buscará una función de error, así como una posible reconstrucción gráfica.

# Índice

<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Conceptos Generales . . . . .	5
1.2 Elementos de funciones pseudoanalíticas . . . . .	8
1.3 Potencias Formales . . . . .	13
1.3.1 Aproximación de las integrales en el sentido de Bers . .	13
1.3.2 Construcción de una base de función ortonormal para problemas con valores en la frontera . . . . .	17
1.3.3 Aplicación a la ecuación de la impedancia eléctrica . .	18
1.3.4 Caso exponencial . . . . .	21
1.3.5 Caso polinomial . . . . .	21
1.3.6 Caso gaussiano . . . . .	22
1.3.7 Caso senoidal . . . . .	23
<b>2 Construcción en Variables Separables</b>	<b>25</b>
2.1 Función en variables separables . . . . .	26
<b>3 Resultados</b>	<b>28</b>
3.1 Estimación Errores . . . . .	28
3.1.1 Metodología . . . . .	28
3.1.2 Conductividad exponencial . . . . .	31
3.1.3 Conductividad polinomial . . . . .	33
3.1.4 Conductividad senoidal . . . . .	37

3.1.5	Conductividad gaussiana . . . . .	41
3.2	Tablas de errores absolutos y porcentuales . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Reconstrucción Funciones</b>	<b>48</b>
4.0.1	Metodología . . . . .	48
4.0.2	Conductividad en forma exponencial . . . . .	49
4.0.3	Conductividad con forma polinomial . . . . .	49
4.0.4	Conductividad con forma senoidal . . . . .	53
4.0.5	Conductividad con forma gaussiana . . . . .	61
<b>Conclusiones</b>		<b>70</b>
4.1	Sumario de contenidos . . . . .	71
4.2	Publicaciones internacionales . . . . .	72
4.3	Trabajo futuro . . . . .	73
<b>Anexo A</b>		<b>74</b>
<b>Referencias</b>		<b>79</b>
<b>Índice alfabetico</b>		<b>82</b>

# Índice de tablas

3.1	Error absoluto exponencial. . . . .	45
3.2	Error porcentual exponencial. . . . .	45
3.3	Error absoluto polinomial. . . . .	46
3.4	Error porcentual polinomial. . . . .	46
3.5	Error absoluto senoidal. . . . .	46
3.6	Error porcentual senoidal. . . . .	47
3.7	Error absoluto gaussiana. . . . .	47
3.8	Error porcentual gaussiana. . . . .	47

# Índice de figuras

1.1	Tomografía por Impedancia Eléctrica . . . . .	5
1.2	Comparación entre TIE y MRI . . . . .	7
1.3	Trazos Radiales . . . . .	15
1.4	Disisión del radio . . . . .	16
1.5	División de intervalos . . . . .	17
1.6	Función exponencial . . . . .	21
1.7	Conductividad polinomial . . . . .	22
1.8	Función Gaussiana . . . . .	23
1.9	Función de conductividad senoidal . . . . .	24
3.1	Metodología empleada para la interpolación. . . . .	29
3.2	Error absoluto caso exponencial 1 . . . . .	32
3.3	Error porcentual caso exponencial 1 . . . . .	32
3.4	Error absoluto caso exponencial 2 . . . . .	33
3.5	Error porcentual caso exponencial 2 . . . . .	34
3.6	Error absoluto caso polinomial 1 . . . . .	35
3.7	Error porcentual caso polinomial 1 . . . . .	35
3.8	Error absoluto caso polinomial 2 . . . . .	36
3.9	Error porcentual caso polinomial 2 . . . . .	37
3.10	Error absoluto caso senoidal 1 . . . . .	38
3.11	Error porcentual caso senoidal 1 . . . . .	39
3.12	Error absoluto caso senoidal 2 . . . . .	40
3.13	Error porcentual caso senoidal 2 . . . . .	41
3.14	Error absoluto caso gaussiano 1 . . . . .	42
3.15	Error absoluto caso gaussiano 2 . . . . .	43
3.16	Error porcentual caso gaussiano 2 . . . . .	43
4.1	Reconstrucción exponencial caso 1 . . . . .	50

## *ÍNDICE DE FIGURAS*

xi

4.2	Reconstrucción exponencial caso 2 . . . . .	51
4.3	Reconstrucción polinomial caso 1 . . . . .	52
4.4	Reconstrucción polinomial caso 2 . . . . .	54
4.5	Reconstrucción senoidal caso 1 . . . . .	56
4.6	Reconstrucción senoidal caso 2 . . . . .	57
4.7	Reconstrucción senoidal caso 17 . . . . .	59
4.8	Reconstrucción senoidal caso 18 . . . . .	60
4.9	Reconstrucción gausseana caso 1 . . . . .	62
4.10	Reconstrucción gausseana caso 2 . . . . .	63
4.11	Reconstrucción gausseana caso 3 . . . . .	65
4.12	Reconstrucción gausseana caso 4 . . . . .	66
4.13	Reconstrucción gausseana caso 5 . . . . .	67
4.14	Reconstrucción gausseana caso 6 . . . . .	68

# Introducción

La presente tesis está dirigida a un público con conocimientos avanzados de la Física Matemática, especialmente para ingenieros en Biomedicina, Cibernética, Mecánica, Electrónica, Mecatrónica y, en general, a todos aquellos que tengan un conocimiento detallado en el área.

Se propone un método de interpolación que aproxima conductividades en términos de funciones polinomiales, definidas por partes. Las conductividades brindan la oportunidad de calcular soluciones numéricas para la ecuación de Conductividad de Corrientes.

El método de interpolación se emplea sobre funciones de variables separables con representación exacta, donde el objetivo es reconstruirlas para examinar el comportamiento de ciertos criterios de error, conforme varían los parámetros de interpolación.

Se debe tener presente que existen métodos de interpolación que realizan y reconstruyen tanto figuras geométricas como funciones en el plano de dos dimensiones, pero gracias a una revisión detallada de la bibliografía especializada, se pudo determinar que no existe publicación alguna sobre métodos de interpolación en variables separables. Por tal motivo, los resultados de esta tesis adquieren una singular relevancia, pues bien podrían sentar las bases de una nueva rama de los métodos numéricos modernos.

Entonces, la razón de examinar éste método de interpolación es fácilmente perceptible, además de tener una clara aplicación en el campo de las ingenierías, como se podrá apreciar en los capítulos 1 y 2.

De manera más particular, debe notarse que en la actualidad existen muchos métodos de monitoreo clínico para enfermedades, y otras afecciones que alteran significativamente la composición anatómica del cuerpo humano, como las tumoraciones.

Dichos métodos pueden ser clasificados como *invasivos* o como *no invasivos*, dependiendo de la manera en que su aplicación altere la anatomía o

fisiología de los tejidos que se examinan.

Por ejemplo, las técnicas de imagenología médica como la Resonancia Magnética (TRM), el Ultrasonido y la Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE), pueden clasificarse como no invasivas, mientras que la Tomografía Axial Coputarizada o las impresiones por Rayos X se consideran invasivas.

En general, dichos métodos tienen como objetivo poder conocer las características de tejidos que se encuentran dentro del cuerpo de un paciente, sin necesidad de intervenirlo quirúrgicamente.

Específicamente, la TIE ha cobrado importancia en el monitoreo clínico durante las últimas décadas, debido a que es una técnica no invasiva, siempre que se inyecta un flujo de energía eléctrica de muy pequeñas magnitudes que, al viajar dentro del cuerpo, hace posible reconstruir su interior, recolectando valores de voltaje al rededor del cuerpo, y con ellas resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales.

El problema de TIE, fue planteado matemáticamente por el científico argentino Alberto Pedro Calderón [4], y el presente trabajo se desarrolla por ser una parte esencial para la reconstrucción de imágenes médicas en TIE, empleando herramientas matemáticas modernas. Como parte del proceso, se buscará caracterizar un nuevo método de interpolación que permita obtener funciones de conductividad en forma de variables separables, y así poder establecer un punto de partida para futuras investigaciones que versen sobre el tema.

Se buscará mostrar que el método es capaz de reconstruir una función cuya representación analítica es conocida, por lo que se necesitará una función de error que garantice la exactitud en la reconstrucción.

El método arroja funciones en variables separables, definidas por partes, sirviendo como base para estudiar en un trabajo alternativo las diferentes conductividades que pueden presentarse dentro de un cuerpo, debido a las distintas resistencias que existen en la piel, el músculo, los órganos internos, etc.

El método de interpolación en variables separables sirve como base para buscar la solución al problema directo de la TIE, empleando la teoría moderna de funciones pseudoanalíticas. El estudio muestra hasta qué punto resulta adecuado aproximar cuatro distintas familias de funciones analíticas en dos dimensiones: funciones exponenciales, gaussianas, polinomiales y senoidales.

La selección se basó en un conjunto de funciones cuya representación analítica fuese conocida y suficientemente diversa, y de esta manera lograr una caracterización del método, construyendo un algoritmo que fuese capaz

de reconstruir una función y obtener imágenes como lo haría un tomógrafo basado en esta nueva técnica, además de ver su respectivo error con respecto de la gráfificación original de la propia función.

Brevemente, la dificultad de la TIE reside en el problema inverso, cuando en la ecuación de conductividad eléctrica

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0.$$

No se tiene una conductividad  $\sigma$  constante, lo que provoca que se usen diferentes métodos para aproximar la solución: reconstruir  $\sigma$  a partir de un conjunto finito de valores en la frontera  $\Gamma$  del potencial eléctrico.

El problema inverso puede plantearse como sigue: se conoce el potencial  $u$  en la frontera  $\Gamma$ , pero se desconoce la conductividad  $\sigma$  al interior. Entonces se efectúa un proceso iterativo en el cual se propone una conductividad original  $\sigma_0$ , de la que se obtiene una conductividad interpolada y se calcula la  $u_0$  que le corresponde.

Luego se compara con la  $u$  en la frontera y se establece un error. El objetivo es modificar la conductividad  $\sigma_0$  hasta minimizar dicho error.

Es sencillo apreciar que esta clase de algoritmos tendrán un incremento en el costo computacional, así como en el tiempo de cómputo, como se ha podido apreciar en otros métodos, como lo es el elemento finito.

En la realización de la tesis se buscará tener una reconstrucción de las diferentes funciones a estudiar, y determinar si la metodología empleada es capaz de desarrollar una buena alternativa, que sirva como base para aproximar la solución al problema en trabajos futuros.

La presente tesis, contendrá tres capítulos en los que se darán los fundamentos del problema de investigación, además de una breve introducción donde se explicará lo que es el problema de Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE).

En el capítulo uno se tienen los preliminares matemáticos, en donde se explicarán los conceptos de la Teoría de las Funciones Pseudoanalíticas, una explicación de las Potencias Formales, y su aproximación a través de las integrales en el sentido de Bers. Posteriormente se detallaran algunos ejercicios que fundamentan el empleo de estas ecuaciones.

En el capítulo dos se tiene un explicación más a detalle sobre la construcción en variables separables para la función de conductividad y algunas funciones obtenidas empleando esta caracterización.

En el capítulo tres versa sobre los resultados obtenidos, empezando con una breve metodología para la estimación del error absoluto y porcentual, y

la caracterización del método empleando estos resultados. Se describirá con un conjunto de tablas los errores máximos obtenidos, y por último se explicará la metodología a seguir para poder reconstruir una función en variables separables, así como las reconstrucciones obtenidas para cada caso.

Por último, se tendrá una sección de conclusiones donde se detallará lo que se obtuvo en el desarrollo del trabajo, desde las publicaciones generadas, hasta una breve descripción de los alcances del propio trabajo.

Cabe señalar que se usaron algunas imágenes elaboradas por la Ing. Ariana Bucio Ramírez, presentadas en el artículo [3].

Se agradece al CONACyT por la beca que fue otorgada para la culminación de los estudios a nivel maestría, así como de los artículos publicados durante el período que duró la Maestría en Ciencias, Área Cibernética.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Conceptos generales

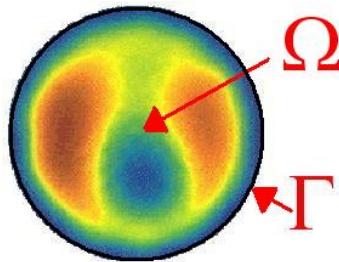
El matemático argentino A. P. Calderón planteó en [4] un problema inverso con valores en la frontera para la Ecuación de Impedancia Eléctrica (EIE):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad (1.1)$$

donde  $\sigma$  representa la conductividad y  $u$  denota el potencial eléctrico.

El principal objetivo es aproximar, dentro de un dominio acotado  $\Omega$  en el espacio de dos dimensiones, el valor de la conductividad  $\sigma$ , cuando los valores del potencial  $u$  están dados en la frontera  $\Gamma$ , como se ve en la figura 1.1.

A ésta condición de frontera se le denotará como  $u|_{\Gamma}$ .



**Figura 1.1:** Tomografía por Impedancia Eléctrica

El problema llegó a ser inmediatamente de gran interés para la Imagenología Médica, porque puede ser usado como una herramienta auxiliar en el

diagnóstico de una gran variedad de enfermedades, como las tumoraciones. Por otro lado, cuando se compara con otras técnicas de imagen, la Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE) posee la cualidad de ser un procedimiento no invasivo. Esto es, no afecta al tejido orgánico que se examina, debido a los bajos niveles de corriente eléctrica que se aplican en el cuerpo cuando se realizan mediciones.

En general, se prefiere utilizar fuentes de corriente no mayores a 10mA[8]. No obstante, la máxima resolución que los métodos computacionales pueden alcanzar, no es satisfactoria aún para establecer la Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE) como un método estándar para la reconstrucción de imágenes, que se empleen efectivamente para diagnóstico médico.

Esta limitante se debe principalmente a que el problema inverso de la ecuación (1.1) se considera *inestable*. Esto es, debido a que no puede ser resuelto por una extensión matemática de la función en la frontera  $u|_{\Gamma}$ , como es posible para otros problemas en el análisis complejo [14] , la solución para el problema inverso de (1.1) debe ser aproximada resolviendo el problema directo a través de un procedimiento iterativo, que puede ser brevemente descrito como sigue:

Una vez que la función de conductividad  $\sigma$  es propuesta, debemos resolver (1.1) para obtener el potencial eléctrico  $u$ ; realizando una comparación entre la  $u|_{\Gamma}$  aproximada y los datos recolectados en la frontera, en busca de una función de error que pueda ser empleada para modificar la conductividad  $\sigma$ , tratando de disminuir el error en cada iteración.

El procedimiento continuará hasta que la función de error satisfaga los criterios de mínimo.

La inestabilidad se debe a que pequeñas variaciones en la conductividad  $\sigma$ , que producen severas alteraciones en la  $u|_{\Gamma}$  calculada, y la selección de una función de error se torna en extremo difícil.

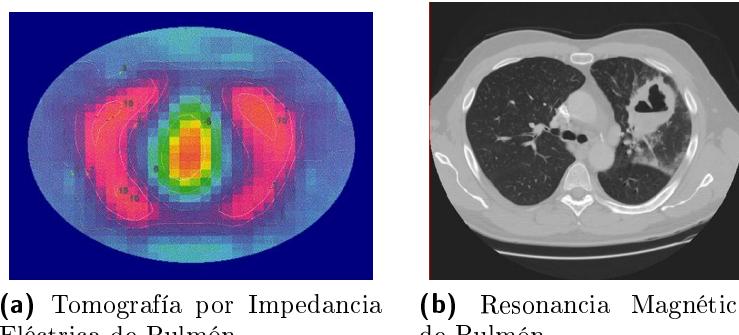
Más aún, la propia complejidad matemática de la ecuación (1.1) es tal que muchos expertos habían sugerido que obtener su solución general (1.1) era imposible (ver [23], Capítulo 10, Sección 10.2.3).

Debido a lo anterior, los métodos numéricos han sido una herramienta fundamental para aproximar soluciones, primero para el problema directo (dada una  $\sigma$  calcular la  $u|_{\Gamma}$ ) y, posteriormente para el problema inverso (dada una  $u|_{\Gamma}$ , calcular la  $\sigma$ ).

Es posible afirmar que, virtualmente, todos los algoritmos conocidos para estudiar el problema inverso de (1.1) son variaciones del Método del Elemento Finito (MEF). Esto podría considerarse, desde cierta perspectiva, como un

hecho natural, debido a que las técnicas basadas en este método han mostrado gran efectividad al emplearse para estudiar otros sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, correspondientes a la Teoría Electromagnética .

Empero, la inestabilidad se hace evidente en casi todas las variantes de este método.



**Figura 1.2:** Comparación entre TIE y MRI

Una segunda pregunta se localiza en torno al ajuste de la función de conductividad  $\sigma$ , cuando se ha seleccionado cierta función de error. No se trata de un problema trivial, ya que (en general) ninguna función de error ha logrado mejorar la calidad de las imágenes obtenidas a partir de la TIE.

Para ilustrar esta afirmación, basta observar las figuras 1.2a y 1.2b, donde aparece una imagen de pulmón obtenida mediante Resonancia Magnética (TRM), y otra obtenida por Impedancia Eléctrica (TIE).

La idea central de esta tesis gira en torno a el estudio de un método numérico de interpolación que permita, en estudios posteriores, mejorar la resolución del problema directo de la ecuación (1.1), cuando la conductividad  $\sigma$  tiene distintas representaciones matemáticas analíticas.

Una de las características que soportan esta afirmación, es la existencia de *patrones* de cambio cuando se introducen modificaciones en la función de conductividad [16]. Con base en éstas observaciones, en un trabajo posterior e independiente, se podrán desarrollar nuevos algoritmos de reconstrucción para el problema inverso.

## 1.2 Elementos de la teoría de las funciones pseudoanalíticas

En 2006, K. Astala y L. Päivärinä [1] descubrieron que la ecuación (1.1), para el caso de dos dimensiones, y siempre que  $\sigma$  pueda ser representada como una función de variables separables

$$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y),$$

está estrechamente relacionada con una ecuación del tipo de *Vekua* de la forma:

$$\partial_{\bar{z}}W - \frac{\partial_{\bar{z}}p}{p}\overline{W} = 0. \quad (1.2)$$

Aquí

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} u - i\sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} u, \\ \overline{W} &= \operatorname{Re}W - i\operatorname{Im}W, \\ p &= \frac{\sqrt{\sigma_2(y)}}{\sqrt{\sigma_1(x)}}, \end{aligned}$$

y

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}.$$

Como es usual,  $i^2 = -1$ , y a pesar de que normalmente  $\partial_{\bar{z}}$  se introduce con el factor  $\frac{1}{2}$ , resultará un tanto más conveniente omitirlo aquí.

Tan solo un año después, V. Kravchenko y H. Oviedo publicaron en [12] un resultado que puede ser considerado como la primera solución general en forma analítica para la ecuación (1.2), y en consecuencia para el caso en dos dimensiones de (1.1), para un cierto tipo de  $\sigma$ .

Esto fue, de hecho, un gran avance para la teoría de la Tomografía por Impedancia Eléctrica (TIE), como fue mencionado en la introducción, puesto que se logró presentar una solución general de (1.1) en forma analítica por primera ocasión.

La solución general propuesta en [12] fue expresada en términos de las Series de Taylor en potencias formales, para las cuales la teoría fue desarrollada por L. Bers [2].

Siguiendo el trabajo original de L. Bers [2], generalizado posteriormente para diversas ramas de las Matemáticas Aplicadas por V. Kravchenko [10], se consideran un par de funciones de valores complejos  $(F, G)$  tal que satisfagan la condición

$$\operatorname{Im}(\overline{F}G) > 0,$$

donde  $\overline{F}$  representa la conjugación compleja de  $F$ :  $\overline{F} = \operatorname{Re}F - i\operatorname{Im}F$ . Al par  $(F, G)$  se le llamará *par generador*. En este sentido, una función con valores complejos  $W$  puede ser expresada por medio de la combinación lineal de las funciones pertenecientes al par generador:

$$W = \phi F + \psi G,$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones con valores reales. El profesor L. Bers también introdujo la noción de la  $(F, G)$ -derivada de  $W$  (algunas veces referida en la literatura moderna como *derivada en el sentido de Bers*).

Tendrá la forma:

$$\partial_{(F,G)} W = (\partial_z \phi) F + (\partial_z \psi) G, \quad (1.3)$$

donde  $\partial_z = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$ , y habrá de existir sí y solo sí

$$(\partial_{\bar{z}} \phi) F + (\partial_{\bar{z}} \psi) G = 0. \quad (1.4)$$

Introduciendo las notaciones

$$\begin{aligned} A_{(F,G)} &= \frac{\overline{G} \partial_z F - \overline{F} \partial_z G}{\overline{F} G - F \overline{G}}, \\ a_{(F,G)} &= \frac{\overline{G} \partial_{\bar{z}} F - \overline{F} \partial_{\bar{z}} G}{F \overline{G} - \overline{F} G}, \\ B_{(F,G)} &= \frac{G \partial_z F - F \partial_z G}{\overline{F} G - F \overline{G}}; \\ b_{(F,G)} &= \frac{F \partial_{\bar{z}} G - G \partial_{\bar{z}} F}{F \overline{G} - \overline{F} G}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

la expresión (1.3) puede ser reescrita de la forma:

$$\partial_{(F,G)} W = \partial_z W - A_{(F,G)} W - B_{(F,G)} \overline{W},$$

mientras que (1.4) se convertirá en:

$$\partial_{\bar{z}} W - a_{(F,G)} W - b_{(F,G)} \overline{W} = 0. \quad (1.6)$$

Esta última expresión es conocida como la *ecuación de Vekua* [22], y será de suma importancia en diversas aplicaciones de ingeniería. De hecho, cada función  $W$  solución de (1.7) es una *función  $(F, G)$ -pseudoanalítica*. Los elementos en (1.5) son llamados *coeficientes característicos del par generador*  $(F, G)$ .

**Nota 1.** *Sea  $\sigma$  una función que no se desvanezca dentro de un dominio acotado  $\Omega$ , y sea*

$$F = \sqrt{\sigma}, G = \frac{i}{\sqrt{\sigma}}. \quad (1.7)$$

*Los coeficientes característicos correspondientes al par generador serán*

$$\begin{aligned} A_{(F,G)} &= a_{(F,G)} = 0, \\ B_{(F,G)} &= \frac{\partial_z \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}, \\ b_{(F,G)} &= \frac{\partial_{\bar{z}} \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}. \end{aligned}$$

**Definición 1.** *Sean  $(F_0, G_0)$  y  $(F_1, G_1)$  dos pares generadores de la forma (1.7), y sus coeficientes característicos satisfagan la condición*

$$B_{(F_0, G_0)} = -b_{(F_1, G_1)}.$$

*Entonces  $(F_1, G_1)$  será llamado par sucesor de  $(F_0, G_0)$ , mientras que  $(F_0, G_0)$  será llamado predecesor de  $(F_1, G_1)$ .*

**Definición 2.** *Sean los elementos del conjunto  $\{(F_m, G_m)\}$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  pares generadores, y sea cada  $(F_{m+1}, G_{m+1})$  un par sucesor de  $(F_m, G_m)$ ; entonces el conjunto  $\{(F_m, G_m)\}$  será llamado secuencia generadora.*

*En particular, si  $(F, G) = (F_0, G_0)$ , entonces se dirá que  $(F, G)$  está embedido en  $\{(F_m, G_m)\}$ . Más aún, si  $(F_m, G_m) = (F_{m+k}, G_{m+k})$ , la secuencia  $\{(F_m, G_m)\}$  será llamada periódica, con período  $k$ .*

**Nota 2.** *Sea  $(F, G)$  un par generador de la forma (1.7), y sea la función  $\sigma$  de variables separables:  $\sigma(x, y) = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$ .*

*Entonces,  $(F, G)$  está contenido dentro de una secuencia generadora periódica con período 2.*

Específicamente

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}}, \\ G_m &= i \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2}}; \end{aligned}$$

cuando  $m$  es impar, y

$$\begin{aligned} F_m &= \sqrt{\sigma_1} \sqrt{\sigma_2}, \\ G_m &= \frac{i}{\sqrt{\sigma_1} \sqrt{\sigma_2}}; \end{aligned}$$

cuando  $m$  es par.

L. Bers también introdujo el concepto de *integral en el sentido de Bers* de una función  $W$ .

**Definición 3.** Sea  $(F_m, G_m)$  un par generador. Su par adjunto será definido de acuerdo a las fórmulas:

$$F^* = \frac{2\bar{F}}{\bar{F}G - F\bar{G}}, \quad G^* = \frac{2\bar{G}}{F\bar{G} - \bar{F}G}.$$

**Definición 4.** La integral en el sentido de Bers de una función con valores complejos  $W$  (cuando existe) tendrá la forma:

$$\int_{z_0}^z W d_{(F_m, G_m)} z = F_m \operatorname{Re} \int_{z_0}^z G_m^* W dz + G_m \operatorname{Re} \int_{z_0}^z F_m^* W dz.$$

Especialmente, cuando se considera la integral en el sentido de Bers de la  $(F_m, G_m)$ -derivada de  $W$ , se obtendrá:

$$\int_{z_0}^z \partial_{(F_m, G_m)} W d_{(F_m, G_m)} z = W - \phi(z_0) F_m - \psi(z_0) G_m,$$

pero debido a  $\partial_{(F_m, G_m)} F_m = \partial_{(F_m, G_m)} G_m = 0$  [2], la última expresión integral puede ser considerada como la antiderivada en el sentido de Bers de la función  $\partial_{(F_m, G_m)} W$ .

**Definición 5.** Una función  $W$  definida en un dominio  $\Omega$  será llamada  $(F, G)$ -integrable si para cada curva cerrada  $\Gamma$  que se encuentre en un subdominio simplemente conexo de  $\Omega$ , se cumple que:

$$\oint_{\Gamma} W d_{(F,G)} z = 0.$$

**Teorema 1.** La  $(F, G)$ -derivada  $\partial_{(F_m, G_m)} W$  de una función  $(F, G)$ -pseudoanalítica  $W$  es  $(F, G)$ -integrable.

**Definición 6.** La potencia formal  $Z_m^{(0)}(a_0, z_0; z)$ , con exponente 0, coeficiente complejo  $a_0$ , centro en  $z_0$ , dependiendo de  $z = x + iy$ , y perteneciendo al par generador  $(F_m, G_m)$ , está definida de acuerdo a la expresión:

$$Z_m^{(0)}(a_0, z_0; z) = \mu F_m + \lambda G_m,$$

donde las constantes reales  $\mu$  y  $\lambda$  satisfacen la condición:

$$\mu F_m(z_0) + \lambda G_m(z_0) = a_0.$$

Las potencias formales con exponentes altos son aproximados por la siguiente fórmula recursiva:

$$Z_m^{(n)}(a_n, z_0; z) = n \int_{z_0}^z Z_{m-1}^{(n-1)}(a_n, z_0; z) d_{(F_m, G_m)} z,$$

donde por supuesto ésta expresión integral son antiderivadas en el sentido de Bers.

**Nota 3.** Cualquier función  $(F_m, G_m)$ -pseudoanalítica  $W$  puede ser expandida por medio de las series de Taylor en potencias formales

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} Z_m^{(n)}(a_n, z_0; z).$$

En este sentido, la última expansión es de hecho una representación analítica de su solución general de la ecuación de Vekua

**Nota 4.** Es sencillo verificar que la ecuación de Vekua correspondiente a un par generador de la forma (1.7) tendrá la forma:

$$\partial_{\bar{z}} W - \frac{\partial_{\bar{z}} p}{p} \bar{W} = 0. \quad (1.8)$$

Este es un importante caso especial, debido a su relación con muchos sistemas diferenciales parciales de la Física moderna, así como las ecuaciones de Maxwell (ver e.g. [12]), la Ecuación de Impedancia Eléctrica (EIE) (ver. e.g. [15]), la ecuación de Dirac con una cierta clase de potenciales [13], y la ecuación de Sturm-Liouville [11], entre otras.

### 1.3 Sobre la construcción numérica de las potencias formales

El lector podrá verificar fácilmente que la construcción de las potencias formales con exponentes de valores grandes, en muchos casos, no pueden ser aproximadas en forma exacta, por lo que, las aproximaciones numéricas proporcionarán una de las mejores herramientas para las ciencias aplicadas.

Se procederá a describir una técnica numérica que ha mostrado su efectividad en numerosas aplicaciones modernas de la Teoría de la Funciones Pseudoanalíticas (ver e.g. [5] y [6]), y que se ha expuesto a detalle en el trabajo [3].

#### 1.3.1 Aproximación de las integrales en el sentido de Bers

Siguiendo [3], de la Teoría de las Funciones Pseudoanalíticas [2], se sabe que las siguientes propiedades se cumplen para cualquier potencia formal:

$$Z_m^{(n)}(a'_n + ia''_n, z_0; z) = a'_n Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a''_n Z_m^{(n)}(i, z_0; z),$$

donde  $a'_n$  y  $a''_n$  son constantes reales.

Esto implica que sólo se tiene que aproximar las potencias formales  $Z_m^{(n)}$  con coeficientes 1 e  $i$ , por lo que todos las demás potencias formales pueden ser construidas por una combinación lineal de estas potencias formales. Ahora

se puede considerar la ecuación de Vekua en la forma (1.8), para la cual un par generador es:

$$F_0 = \frac{\sqrt{\sigma_2(y)}}{\sqrt{\sigma_1(x)}}, G_0 = i \frac{\sqrt{\sigma_1(x)}}{\sqrt{\sigma_2(y)}}, \quad (1.9)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son funciones reales positivas que no se desvanecen, y se analizará, por ejemplo, la aproximación de  $Z_m^{(0)}(1, z_0; z)$ .

De acuerdo a la Definición 6, la primera potencia formal, con centro en  $z_0 = 0$ , deberá construirse basándose en la igualdad:

$$\mu F_0(0) + \lambda G_0(0) = 1.$$

Debido a que  $\mu$  y  $\lambda$  son constantes reales, y de acuerdo a (1.9),  $F_0$  es puramente real y  $G_0$  es puramente imaginario, tendremos que  $\mu = F_0(0)^{-1}$  y  $\lambda = 0$ . Entonces:

$$Z_0^{(0)}(1, 0; z) = \frac{F_0(z)}{F_0(0)} = \frac{\sqrt{\sigma_1(0)}}{\sqrt{\sigma_2(0)}} \frac{\sqrt{\sigma_2(y)}}{\sqrt{\sigma_1(x)}}.$$

Siguiendo un procedimiento idéntico se obtiene:

$$Z_0^{(0)}(i, 0; z) = \frac{G_0(z)}{G_0(0)} = i \frac{\sqrt{\sigma_2(0)}}{\sqrt{\sigma_1(0)}} \frac{\sqrt{\sigma_1(x)}}{\sqrt{\sigma_2(y)}}.$$

A la luz del procedimiento expuesto, es sencillo verificar que las primeras potencias formales pertenecientes al par sucesor  $(F_1, G_1)$  de  $(F_0, G_0)$  son:

$$\begin{aligned} Z_1^{(0)}(1, 0; z) &= \sqrt{\sigma_1(0)\sigma_2(0)}\sqrt{\sigma_1(x)\sigma_2(y)}, \\ Z_1^{(0)}(i, 0; z) &= i \frac{1}{\sqrt{\sigma_1(0)\sigma_2(0)}\sqrt{\sigma_1(x)\sigma_2(y)}}. \end{aligned}$$

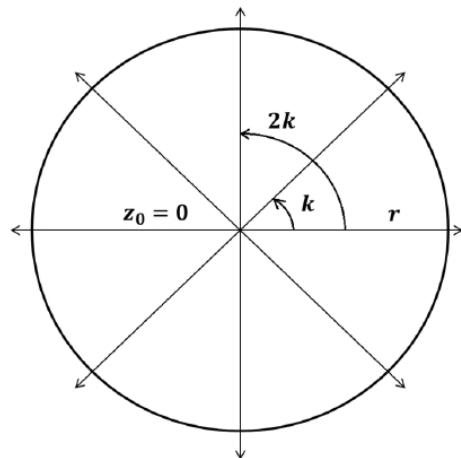
Ahora es posible construir potencias formales con exponentes mayores, por medio de una aproximación numérica de las integrales en el sentido de Bers correspondientes a las últimas expresiones. Analizando el caso de las potencias formales con coeficiente igual con 1, remarcando que procedimientos idénticos pueden ser aplicados para el estudio del caso relacionado con el coeficiente  $i$ .

La potencia formal  $Z_0^{(1)}(1, 0; z)$ , de acuerdo a la Definición 5, es:

$$\begin{aligned}
 Z_0^{(1)}(1, 0; z) &= \sqrt{\sigma_1(0)\sigma_2(0)} \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}} \operatorname{Re} \int_0^z \sigma_1(x) dz - \\
 &- i\sqrt{\sigma_1(0)\sigma_2(0)} \frac{\sqrt{\sigma_1(x)}}{\sqrt{\sigma_2(y)}} \operatorname{Re} \int_0^z i\sigma_2(y) dz. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Obsérvese que los operadores integrales, son integrales de línea, y pueden ser resueltas por una gran variedad de caminos acotados. Por simplicidad, en esta tesis la aproximación se hará dentro del círculo unitario. De hecho, esto es un caso muy importante, con un historial de logros para muchos problemas con valores en la frontera interesantes (ver e.g. [9]).

Tomando, por ejemplo, la primera integral de línea en su lado derecho de la última expresión. Por definición [10], el resultado será independiente de la trayectoria de integración, entonces considerando un conjunto finito de trayectorias radiales que parten desde  $z_0 = 0$ , incrementando el radio en  $R = 1 + \varepsilon$ , donde  $\varepsilon > 0$  es un número pequeño, que se empleará para reducir el error numérico inherentemente debido a las técnicas de interpolación empleadas durante los cálculos.



**Figura 1.3:** Trazos Radiales para  $K = 8$ . Imagen tomada del artículo [3].

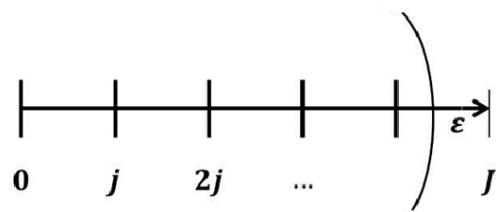
Básicamente, trazaremos  $K$  radios, cada uno en un ángulo de  $\frac{2\pi(k-1)}{K}$ ;  $k = 1, 2, \dots, K$ ; como se muestra en la figura 1.3. Cada radio será dividido en

$J$  subsecciones, cada una con una longitud  $j$ , igualmente distribuidas dentro de un intervalo cerrado  $[0, R]$ ; por lo que es posible evaluar las funciones  $\sigma_1(x)$  y  $\sigma_2(y)$  en cada punto sobre el radio.

Obteniéndose, un conjunto de  $J + 1$  valores:

$$\{p(\alpha j)\}_{\alpha=0}^J,$$

que serán interpolados empleando polinomios cúbicos, para construir una



**Figura 1.4:** Radio dividido en  $j$  subsecciones. Imagen tomada del artículo [3].

función auxiliar  $p(r)$ , donde  $r \in [0, R]$  (nótese que  $\varepsilon$  ha sido agregado solo para desplazar el error numérico lejos del perímetro del círculo unitario). La división del radio es ilustrado en la figura 1.4.

Después, se divide cada intervalo  $j$  en  $Q$  subsecciones espaciadas de igual longitud  $q$ , y empleando la función auxiliar  $p(r)$ , es posible obtener otro conjunto de valores:

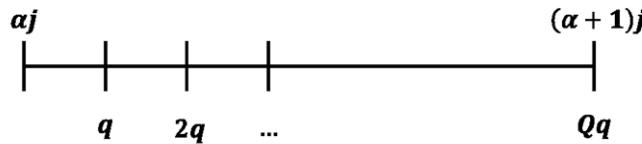
$$\{p(\alpha j + \beta q)\}_{\beta=0}^Q, \quad (1.11)$$

como son representados en la figura 1.5.

La colección de valores que conforman cada conjunto de la forma (1.11), son precisamente estos, que se usarán para aproximar el primer operador integral de la expresión (1.10), y es evidente que igualmente funcionará para el segundo caso.

El lector se dará cuenta que dados los conjuntos de valores, muchos métodos de integración numéricos pueden aplicarse. Por ejemplo, en muchas discusiones, se usarán en la integración trapezoidal.

De esta manera, para cada sección  $j$ , se aplicarán métodos trapezoidales para obtener el valor de la potencia formal  $Z_0^{(1)}(1, 0; z)$  en el punto  $z$  cuya representación polar es dada por  $r = (\alpha + 1)j$ , con ángulo  $2\pi(k - 1)/K$ .



**Figura 1.5:** Intervalos  $j$  divididos en  $Q$  subsecciones. Imagen tomada del artículo [3]

Se mostrará que el último intervalo  $j$  no deberá ser evaluado de  $j = J - 1$  hasta  $j = J$ , pero de  $j = J - 1$  hasta 1, por que corresponde exactamente al perímetro del círculo unitario.

Esta técnica básica, cuando se itera para obtener potencias formales con exponentes elevados (como se describe en la Definición 6), permitirá construir tantas potencias formales como se necesiten. Por supuesto, el error absoluto decrementará cuando el número de radios  $K$ , secciones  $J$ , y subsecciones  $Q$ , crezcan, pero el requerimiento computacional se elevará.

Se discutirá ahora un método para aproximar un conjunto completo de funciones ortonormales, definidas en la frontera del círculo unitario [10]. Este sistema completo es especialmente relevante cuando estudiamos problemas con valores en la frontera para ecuaciones elípticas en derivadas parciales, y su aplicación a la ingeniería.

### 1.3.2 Construcción de una base de función ortonormal para problemas con valores en la frontera

Como se ha probado en trabajos previos [5] y [10], al considerar la parte real de un conjunto de potencias formales:

$$\left\{ Z_0^{(n)}(1, 0; z), Z_0^{(n)}(i, 0; z) \right\}_{n=0}^{\infty},$$

en la frontera de la región cerrada  $\Omega$ , se puede obtener un sistema completo para aproximar soluciones a problemas con valores en la frontera.

Es claro que, desde que se están obteniendo cálculos numéricos, solo se tomará en cuenta  $n = 0, 1, \dots, N$  exponentes formales.

Para obtener este conjunto, se ejecutarán cálculos numéricos descritos en la sección posterior, considerando  $2N$  potencias formales (esto es,  $N$  potencias formales para el coeficiente 1 y  $N$  para  $i$ ), cada uno con  $K$  valores complejos, igualmente distribuidos en el perímetro del círculo unitario. Se deberá entonces aproximar el conjunto:

$$\left\{ \operatorname{Re}Z_0^{(n)}(1, 0; z)|_{\Gamma}, \operatorname{Re}Z_0^{(n)}(i, 0; z)|_{\Gamma} \right\}_{n=0}^N;$$

donde  $\Gamma$  denota la frontera del círculo, considerando solo la parte real de cada potencia formal  $Z_0^{(n)}$  en la frontera  $\Gamma$ .

Aplicando una vez más la interpolación polinomial cúbica, se obtendrá un conjunto de funciones continuas  $\vartheta_0^{(n)}(l)$ ,  $l \in [0, 2\pi]$ , cada una correspondiente a cada  $Z_0^{(n)}$ .

Entonces, es posible introducir un producto interno para el conjunto de funciones  $\vartheta_0^{(n)}(l)$  basado en la integral de Lebesgue [5]:

$$\langle \vartheta_0^{(n_1)}, \vartheta_0^{(n_2)} \rangle = \int_0^{2\pi} \vartheta_0^{(n_1)} \vartheta_0^{(n_2)} dl. \quad (1.12)$$

La norma al cuadrado  $\|\vartheta_0^{(n)}(l)\|^2$  será definida de la forma tradicional:

$$\|\vartheta_0^{(n)}(l)\|^2 = \langle \vartheta_0^{(n)}, \vartheta_0^{(n)} \rangle = \int_0^{2\pi} \left( \vartheta_0^{(n)} \right)^2 dl.$$

Finalmente, se aplicará el proceso estándar de la ortonormalización de Gram-Schmidt, para obtener un sistema ortonormal de  $2N + 1$  elementos:

$$\{u_s(l)\}_{s=0}^{2N}. \quad (1.13)$$

### 1.3.3 Aplicación a la ecuación de la impedancia eléctrica

El método numérico planteado anteriormente, ha sido empleado para aproximar soluciones en una amplia variedad de problemas para ecuaciones elípticas (ver e.g. [5] y [6]).

Sin embargo, para la presente tesis será conveniente enfocar nuestra atención en un problema clásico de la Teoría Electromagnética que tiene especial

relevancia en la imagen médica: el estudio de las soluciones para la Ecuación de la Impedancia Eléctrica (EIE):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad (1.14)$$

donde  $\sigma$  representa la función de conductividad y  $u$  denota el potencial eléctrico, que es de crucial importancia para el problema inverso de (1.14), conocido como TIE.

Tal y como se mencionó antes, considerando el caso en dos dimensiones, y asumiendo que la función de conductividad puede ser representada por medio de una función de variables separables:

$$\sigma = \sigma_1(x) \sigma_2(y),$$

si se introduce las notaciones:

$$W = \sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} u - i \sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} u, \quad p = \frac{\sqrt{\sigma_2(y)}}{\sqrt{\sigma_1(x)}}, \quad (1.15)$$

la ecuación (1.14) puede ser reescrita en la ecuación de Vekua de la forma (1.8). Como se mostró en la Nota 4, una secuencia generadora con período 2 puede ser construida explícitamente, y en consecuencia, todos los procedimientos expuestos anteriormente pueden ser aplicados para obtener una base ortonormal de la forma (1.13).

De hecho, ya en [7], se mostró que la solución de un problema con valores en la frontera para un dominio no circular, considerando una conductividad  $\sigma = e^y$ , y una condición fronteriza  $u_\Gamma = e^x$ , puede ser aproximada empleando solo 22 potencias formales, alcanzando un error absoluto alrededor de  $1.433 \times 10^{-9}$ .

Para examinar el rendimiento de los métodos numéricos propuestos, se presentará algunos resultados obtenidos cuando se consideran cuatro casos de funciones de conductividad diferentes:

1.

$$\sigma = e^{sx+sy},$$

para  $s \in [1, 3]$ .

2.

$$\sigma = (x^3 + 11sx^2 + x + 25s)(y + 3),$$

para  $s \in [1, 3]$ .

3.

$$\sigma = \left( \frac{1}{(x+s)^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{(y+s)^2 + 1} \right),$$

para  $s \in \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ .

4.

$$\begin{aligned} \sigma &= (10 + \cos 2\pi sx + \cos 4\pi sx + \cos 6\pi sx + \cos 8\pi sx) \cdot \\ &\quad \cdot (10 + \sin 2\pi sy + \sin 4\pi sy + \sin 6\pi sy + \sin 8\pi sy), \end{aligned}$$

para  $s \in [1, 3]$ .

Estos casos son seleccionados basados en una variedad significativa de los sistemas ortonormales correspondientes. Es muy importante enfatizar que el comportamiento de los potenciales eléctricos  $u_p$ , que emergen de la ecuación (1.14) cuando se emplean técnicas matemáticas clásicas, es considerado *ines-table* [23]. Esto es, cambios significativos de  $u_p$  son observados en la frontera  $\Gamma$  cuando pequeños cambios en la conductividad  $\sigma$  tomarán lugar dentro del dominio.

Aun cuando este no es el tema principal de la tesis, el lector apreciará que la perspectiva clásica podría ser reconsiderada cuando el potencial eléctrico  $u_p$  se analiza desde el punto de vista de las potencias formales.

También es posible mostrar que el producto interno (1.13) trabajará como un operador *antigradiente* en la frontera, pues de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell para el caso estático, el vector del campo eléctrico  $\vec{E} = -\nabla u$ , y tomando en cuenta (1.15), se tendrá que:

$$\vec{E} = - \left( \sqrt{\sigma^{-1}} \operatorname{Re} Z_0^{(n)}, \sqrt{\sigma^{-1}} \operatorname{Im} Z_0^{(n)} \right).$$

Es importante mencionar que todos los experimentos serán realizados considerando un radio con  $K = 10^3$ ,  $J = 10^3$  secciones, y  $Q = 10^3$  subsecciones. Se establece el máximo grado formal  $n = 10$ , obteniendo  $p = 21$  funciones ortonormales  $u_p$ .

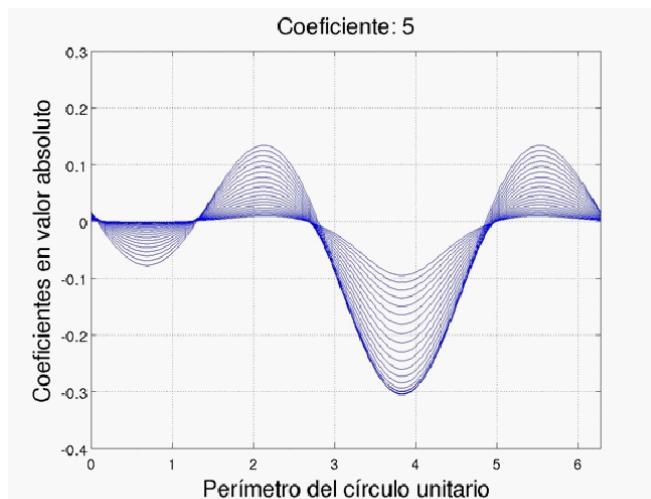
Para el propósito de esta tesis, se mostrarán las gráficas que ilustran el comportamiento de un  $u_p$  seleccionada para cada caso listado, garantizando que los patrones de cambio observados de las funciones resultantes se preservan.

Siguiendo pasos consecutivos, se incrementa  $s$  en 5% del total de los intervalos de las magnitudes correspondientes a cada ejemplo, mostrando 20 casos por figura.

### 1.3.4 Caso exponencial

Este es uno de los ejemplos que exhibe algunos de los cambios uniformes en los patrones en cada aproximación  $u_p$ . Se debe seleccionar  $p = 4$  por que permite apreciar una clara evolución en el comportamiento, empezando con la *onda*, posee una amplitud más grande en  $\sigma = e^{x+y}$ , y terminando con la más pequeña en  $\sigma = e^{3x+3y}$ .

La figura 1.6 muestra el valor de 20 casos para  $u_4$ , como se menciona anteriormente. El eje horizontal corresponde al perímetro del círculo unitario, yendo desde 0 hasta  $2\pi$ .



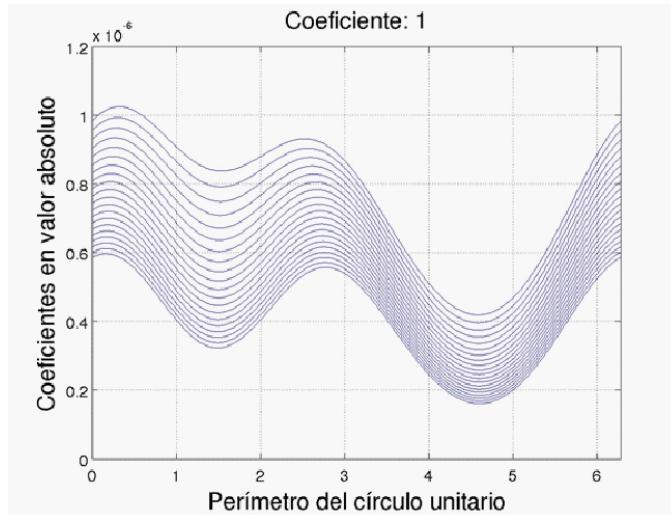
**Figura 1.6:** Familia de funciones  $u_0$  cuando la conductividad es una función exponencial. Imagen tomada del artículo [3]

### 1.3.5 Caso polinomial

Este ejemplo es relevante porque los polinomios cúbicos son justamente el método de interpolación que se usará para aproximar una sección de la función en variables separables, dando un conjunto de valores de conductividad dentro de un dominio acotado [18].

Se debe seleccionar el conjunto de funciones a mostrar  $u_0$  por que se ilustra un comportamiento estable de los potenciales en la frontera, cuando

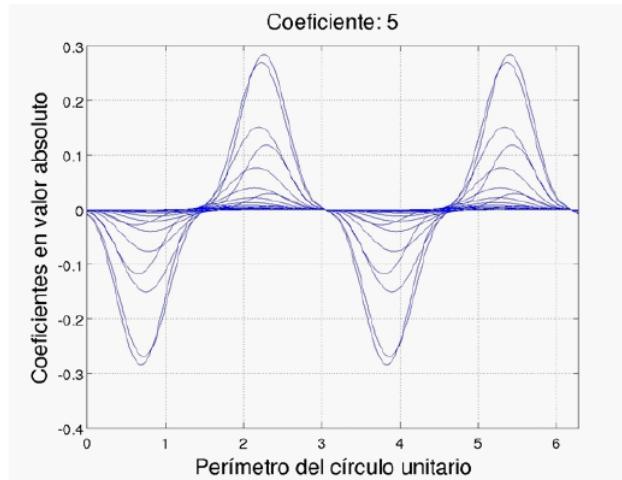
las variaciones de  $\sigma$  se llevan a cabo. Para este caso, la función de mayor amplitud de las curvas representan el caso cuando  $s = 1$ , y aquella más cercana al eje horizontal corresponde a  $s = 3$ . Como se puede apreciar en la figura 1.7.



**Figura 1.7:** Funciones  $u_0$  cuando la conductividad es una polinomial  $\sigma = (x^3 + 11sx^2 + x + 25)(y + 3)$ . Imagen tomada del artículo [3]

### 1.3.6 Caso gaussiano

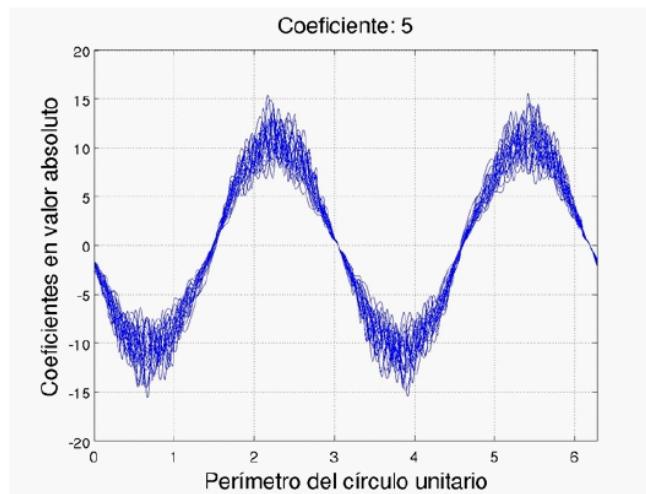
El detalle de patrones de cambio para  $u_4$ , como para el resto de todas las funciones ortonormales perteneciendo a esta clase, está quizás fuera del rango de esta tesis, porque el caso gaussiano es mejor comprendido aplicando el análisis de Fourier. Sin embargo, se debe incluir la gráfica para exhibir el comportamiento estable de los potenciales cuando se desplaza el *centro* de la gaussiana en dos dimensiones  $\sigma$  dentro del círculo unitario. Así como se ve en la figura 1.8.



**Figura 1.8:** Funciones  $u_4$  cuando la conductividad es una gaussiana  $\sigma = \left(\frac{1}{(x+s)^2+1}\right) \left(\frac{1}{(y+s)^2+1}\right)$ . Imagen tomada del artículo [3]

### 1.3.7 Caso senoidal

Este caso es quizá uno de los más interesantes, por lo que estas variaciones son tal vez las más complicadas, tal como corresponde a los ejemplos mostrados con anterioridad, y provocando potenciales que pueden ser cercanos a aquellos que se obtienen en imagen médica. Las curvas mostradas pertenecen a la función  $u_4$ , y todas ellas pueden ser bien descritas como una onda *senoidal*, en la cual otras funciones senoidales, con una pequeña amplitud, son añadidas. Remarcando que las frecuencias de todas las ondas no están armónicamente relacionadas a cualquier otra. El patrón de cambio para éste caso es localizado alrededor de las amplitudes y frecuencias de pequeñas ondas. Fácilmente apreciado en la figura 1.9.



**Figura 1.9:** Funciones  $u_4$  cuando la conductividad es una Senoidal  
 $\sigma = (10 + \sin(2\pi sx) + \sin(4\pi sx) \sin(6\pi sx) \sin(8\pi sx))(10 + \cos(2\pi sy) + \cos(4\pi sy) + \cos(6\pi sy) + \cos(8\pi sy))$ . Imagen tomada del artículo [3]

# Capítulo 2

## Construcción de funciones de conductividad en variables separables.

Se analizará una técnica para obtener secciones de una función de conductividad en variables separables, el cual empleará un método estándar de interpolación en polinomios cúbicos.

El objetivo principal es hacer posible en la práctica, mediante el empleo de la Teoría de las Funciones Pseudoanalíticas en la imagenología médica, que permita la construcción de soluciones numéricas, en términos de las series de Taylor en potencias formales, de la Ecuación de Impedancia Eléctrica en dos dimensiones.

Como se mencionó antes, una alternativa interesante para resolver (1.1) apareció cuando K. Astala y L. Päivärinä [1] notaron por primera vez que el caso en dos dimensiones de (1.1) tiene una relación directa con una clase especial de la ecuación de Vekua [22], y V. V. Kravchenko et al. [12] plantearon la estructura general de las series de Taylor en potencias formales, desarrollado por L. Bers [2].

También se hará énfasis en que el uso de éstas nuevas herramientas matemáticas permiten aproximar la solución del problema directo con valores en la frontera para (1.1) con una precisión muy alta, una vez que  $\sigma$  es planteada como una función en variables separables [6].

Estos nuevos resultados son muy relevantes para una mejor comprensión de la dinámica de la Ecuación de Impedancia Eléctrica (EIE). Por lo tanto, un camino natural a seguir, es investigar los métodos de interpolación que

permitan aplicar estas técnicas novedosas cuando se estudié casos situados en imagenología médica.

Este trabajo está dedicado al análisis de un método de interpolación planteado en [15], que permite obtener una función  $\sigma$  en variables separables cuando un conjunto finito de valores de conductividad esté propiamente definido dentro de un dominio acotado.

## 2.1 Funciones de conductividad en variables separables definidas por partes.

Considérese un dominio circular acotado con radio igual a 1, y separase dicho dominio en un conjunto finito de subregiones creadas a través del trazo de líneas paralelas al eje  $x_2$ . Por simplicidad se asumirá que las líneas paralelas tienen la misma distancia entre ellas, y están simétricamente distribuidas dentro del dominio circular.

Después del procedimiento de seccionar, se observará  $q$  subregiones creadas por el trazo de  $q - 1$  líneas paralelas. Ahora se trazará un nuevo conjunto de líneas paralelas al eje  $x_2$ , atravesando precisamente la mitad del primer conjunto de líneas. Seleccione en cada nueva línea paralela un conjunto finito de  $a$  puntos igualmente distribuidos sobre la línea y dentro del dominio, asignando a cada punto un valor de conductividad constante.

Teniendo entonces un conjunto finito de  $a \times q$  valores de conductividad distribuidos a través de líneas paralelas, cada una de ellas localizada sobre una subregión del círculo. Siguiendo las ideas planteadas en [15], en la función en variables separables definida por partes tendrá la siguiente forma:

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_1(x_1)\sigma_2(x_2) = \begin{cases} \frac{(x_1+A)}{(\xi_1+A)} f_1(x_2); & 1 \geq x_1 > 1 - \frac{2}{q}; \\ \frac{(x_1+A)}{(\xi_2+A)} f_2(x_2); & 1 - \frac{2}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{4}{q}; \\ \frac{(x_1+A)}{(\xi_3+A)} f_3(x_2); & 1 - \frac{4}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{6}{q}; \\ \frac{(x_1+A)}{(\xi_4+A)} f_4(x_2); & 1 - \frac{6}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{8}{q}; \\ \dots \\ \frac{(x_1+A)}{(\xi_q+A)} f_q(x_2); & -1 + \frac{2}{q} \geq x_1 > -1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aquí,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$  representa las coordenada  $x_1$  común a cada conjunto de puntos localizados sobre la línea cruzando cada subregión, y  $A$  es una constante real tal que  $x_1 + A \neq 0$  dentro del círculo.

Por otro lado,  $f_k(x_2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$  son simplemente funciones creadas por el uso de algoritmos estándares de polinomios cúbicos, cada uno correspondiente a la colección de puntos seleccionados sobre las líneas paralelas.

Por simplicidad, se construirá el tramo de función  $p^2 = F_0^2 = \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_2)}$  de acuerdo a la expresión:

$$F_0^2 = \frac{\sigma(x_2)}{\sigma(x_1)} = \begin{cases} \frac{(\xi_1+A)}{(x_1+A)} f_1(x_2); & 1 \geq x_1 > 1 - \frac{2}{q}; \\ \frac{(\xi_2+A)}{(x_1+A)} f_2(x_2); & 1 - \frac{2}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{4}{q}; \\ \frac{(\xi_3+A)}{(x_1+A)} f_3(x_2); & 1 - \frac{4}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{6}{q}; \\ \frac{(\xi_4+A)}{(x_1+A)} f_4(x_2); & 1 - \frac{6}{q} \geq x_1 > 1 - \frac{8}{q}; \\ \dots \\ \frac{(\xi_q+A)}{(x_1+A)} f_q(x_2); & -1 + \frac{2}{q} \geq x_1 > -1. \end{cases} \quad (2.2)$$

# Capítulo 3

## Resultados de simulaciones: estimaciones de error.

### 3.1 Estimación del error absoluto y porcentual

#### 3.1.1 Metodología

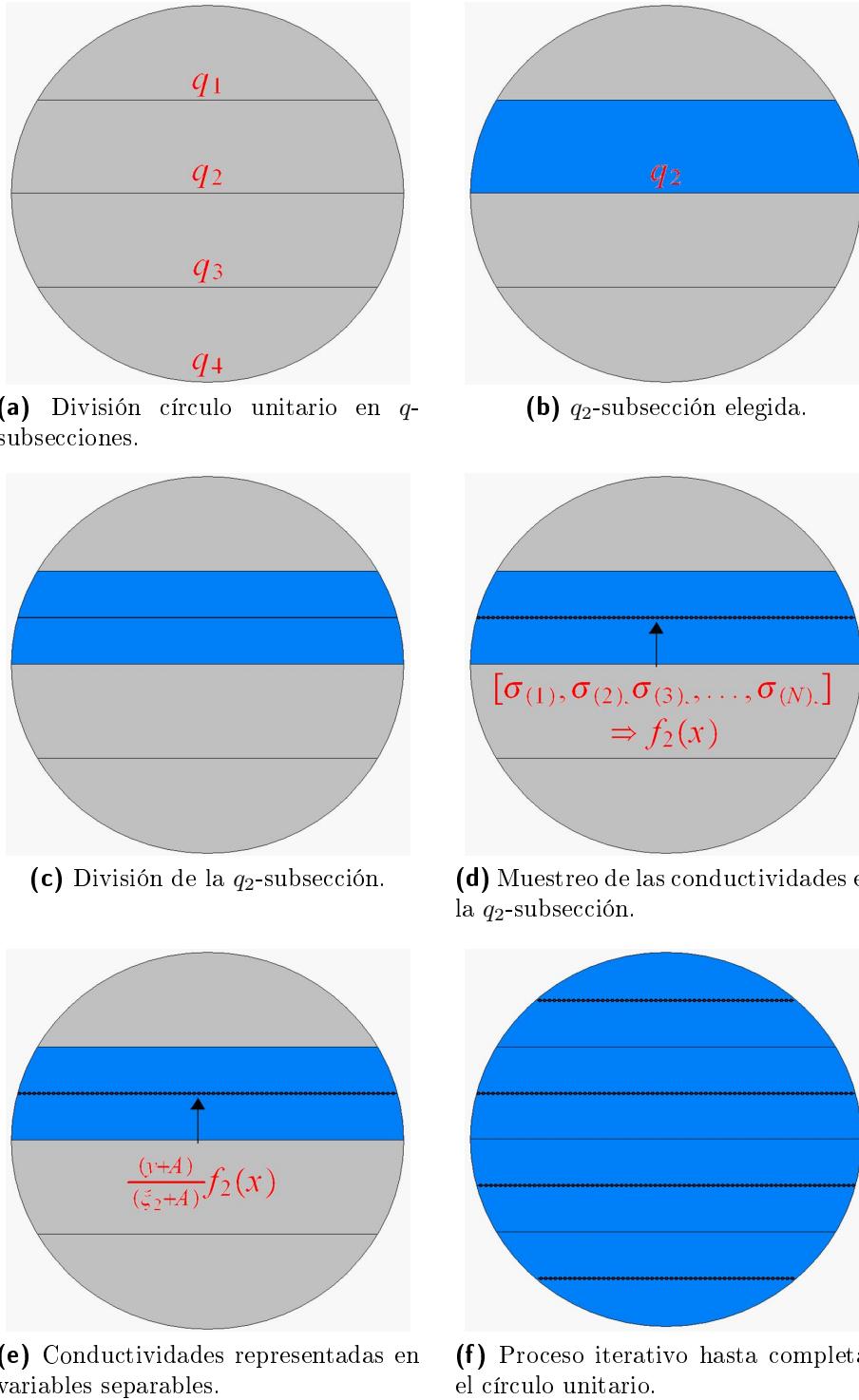
Se inicia generando un conjunto de conductividades que, se puede decir, es significativo por su diversidad. Cada conjunto estará conformado por un número determinado de regiones. Las regiones representarán el eje coordenado  $y$  en el espacio creado de conductividades, y para cada región se creará un determinado número de puntos muestra, que estará determinando el eje coordenado  $x$ .

Con ello se creará un espacio muestra que se denominá *conductividad original*. Este conjunto de muestras va a servir como parámetro de comparación, y el ejercicio toma lugar cuando se calcula un espacio de conductividades que se denominará *conductividad interpolada*.

Para el cálculo de la conductividad interpolada, dentro de un dominio que para este método será el círculo unitario, se realiza una serie de divisiones, que se denotarán como *q-subsecciones*. En cada subsección se realiza una división que representa un conjunto de conductividades. Este conjunto de conductividades puede ser definido por el usuario, que será denominado *puntos muestra por región*.

Siendo este un proceso iterativo, se realizará hasta terminar de completar el dominio que se esta empleando.

Este número de regiones y de puntos muestra por región, determinarán el



**Figura 3.1:** Metodología empleada para la construcción del método de interpolación.

costo computacional del método. Entonces se crean dos matrices de conductividad, una original y otra interpolada, entre las que se efectúa una resta matricial.

En resumen, se siguen los pasos:

1. Seleccionar un dominio, el cual será dividido en  $q$ -subsecciones.
2. Seleccionamos una subsección.
3. Se divide la subsección.
4. Las muestras que se obtienen representan la conductividad para esa sección en particular.
5. Las conductividades mostradas son forzadas a presentarse en términos de variables separables.
6. Y el proceso se repite hasta completar el dominio que se selecciono.

Este procedimiento es ilustrado en las gráficas de la figura 3.1.

Se debe recordar que la conductividad original está basada en una función cuya representación analítica es conocida, y pertenece a un conjunto de funciones que se consideran entre los más relevantes:

$$\sigma = \sigma_1(x) \sigma_2(y).$$

Una vez que se selecciona la función del conjunto, se elige el número de regiones totales y puntos muestra por región, y se obtiene el error absoluto:

$$\mathcal{E}_{ABS} = \sqrt{(\sigma_{\text{or}} - \sigma_{\text{int}})^2} \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{E}_{ABS}$  es el error absoluto,  $\sigma_{\text{or}}$  estará determinando a la conductividad original y la  $\sigma_{\text{int}}$  estará representando a la conductividad interpolada.

Esta función de error otorga una matriz por la diferencia entre la conductividad original y la interpolada.

Para garantizar que el método funciona de forma correcta, se decidió obtener, por cada iteración, el máximo error absoluto. Esto debido a que este punto ayudará a aproximar poco a poco una mejor función de interpolación.

Así se obtendrá una conductividad aproximada con mejor definición, ya que se modifica poco a poco hasta acercarse lo suficiente a la conductividad original desde el punto de vista numérico.

Entonces, obteniendo una matriz que contiene el tamaño máximo de regiones y el tamaño máximo de puntos muestra por región, llena de los errores máximos calculados por la diferencia entre la conductividad original y la interpolada, de acuerdo con (3.1). Esta matriz de error absoluto presentará un punto máximo en el menor número de muestras y regiones, y dicho error máximo eventualmente irá decreciendo conforme aumenten el número de regiones y de puntos muestra por región.

Por otro lado, para el error porcentual se aplica el mismo procedimiento que en el error absoluto, solo que se multiplica por 100 y se divide entre la conductividad original, lo que proporciona un error en términos de porcentaje:

$$\mathcal{E}_{POR} = \frac{\sqrt{(\sigma_{or} - \sigma_{int})^2}}{\sigma_{or}} \times 100. \quad (3.2)$$

El lector puede apreciar que se está usando la misma expresión que en el caso del error absoluto (3.1), alterada por un factor de 100.

Estas ecuaciones proporcionan el comportamiento de la función de conductividad interpolada, a partir de la representación analítica que es conocida.

Entonces la simulación comienza eligiendo un conjunto de funciones con representación analítica, recordando que se tendrán, por cada caso, dos alternativas: el número de regiones, y el número de muestras por región.

### 3.1.2 Conductividad con forma exponencial

El primer caso es:

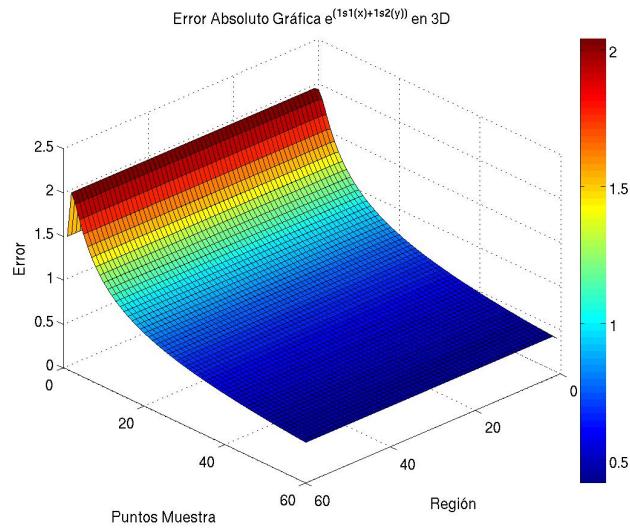
$$\sigma = e^{x+y}.$$

Las gráficas que se muestran a continuación representan el primer caso de las funciones exponenciales. Estas gráficas 3.2 muestran el error absoluto de la ecuación que se emplea. El error porcentual se ilustra en la figura 3.3.

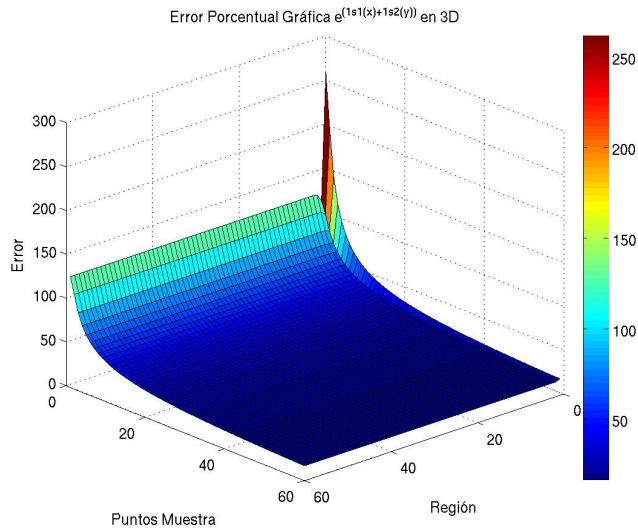
Como se puede ver, el error máximo se presenta en los casos correspondientes a pocos puntos muestra y pocas regiones, y va disminuyendo considerablemente conforme se aumentan.

Un experimento complementario, necesario para calcular las potencias formales, corresponde a la expresión:

$$\sigma = e^{x-y}.$$

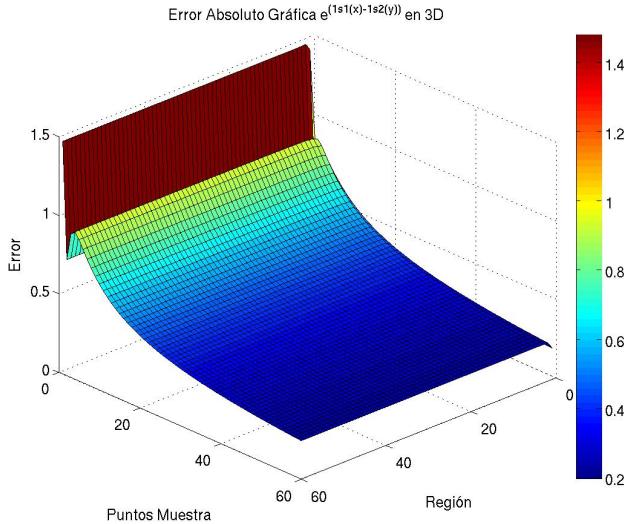


**Figura 3.2:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = e^{x+y}$ .



**Figura 3.3:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = e^{x+y}$ .

Para este caso, los experimentos del máximo error de acuerdo a regiones



**Figura 3.4:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = e^{x-y}$ .

y puntos muestran arrojan las siguientes gráficas 3.4. Y presentando el error porcentual en la figura 3.5.

Como se puede ver, de nuevo el error máximo se presenta en las primeras regiones y puntos muestra, y va disminuyendo considerablemente conforme se aumenta el número de regiones.

Con estos datos, el lector podrá darse cuenta que la reconstrucción de la función para este caso en particular también es aceptable.

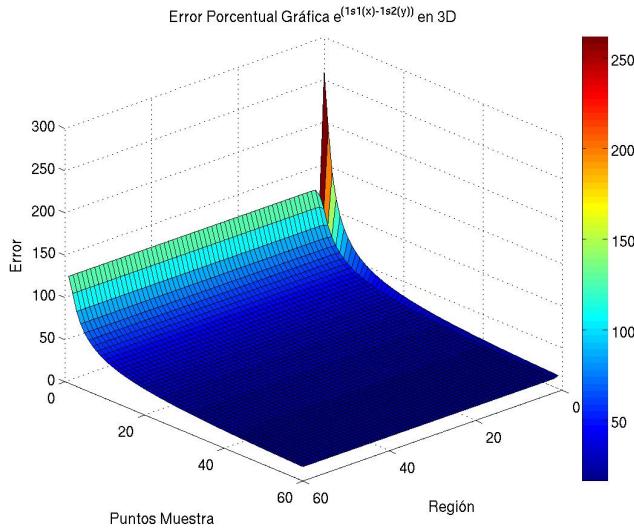
El mismo comportamiento se presenta al considerar las parejas de funciones:

$$\{e^{2x+2y}, e^{2x-2y}\}, \quad \{e^{3x+3y}, e^{3x-3y}\}, \quad \{e^{4x+4y}, e^{4x-4y}\}.$$

Con base en esto se puede afirmar que la reconstrucción de la función exponencial en variables separables, puede llevarse a cabo y arrojar buenos resultados. Más adelante habrán de mostrarse mayores detalles al respecto.

### 3.1.3 Conductividad con forma polinomial

Continuando con la dinámica del ejercicio anterior, la atención ahora se centra en el caso de una conductividad polinomial. Específicamente, de polinomio cúbico, variando únicamente uno de sus coeficientes, para llegar a los



**Figura 3.5:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = e^{x-y}$ .

resultados que se mostrarán a continuación.

Similar al caso exponencial, en cada caso se tendrá dos ecuaciones, en donde una sección muestra la multiplicación de dos polinomios, y en otra su razón o división.

Esto corresponde al hecho de que estos dos casos componen el conjunto completo de información necesaria para aproximar la secuencia generadora.

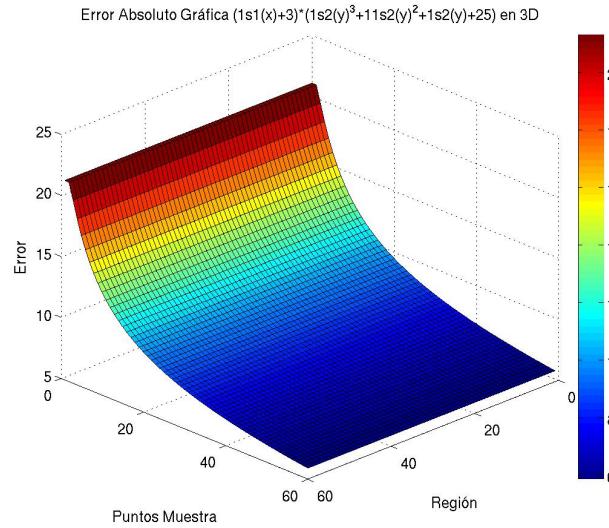
Para el primer caso se empleará la expresión:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\alpha y + \beta)(ax^3 + bx^2 + cx + d); \\ \text{donde } &\alpha = 1, \beta = 3, a = 1, b = 11, c = 1, d = 25. \end{aligned}$$

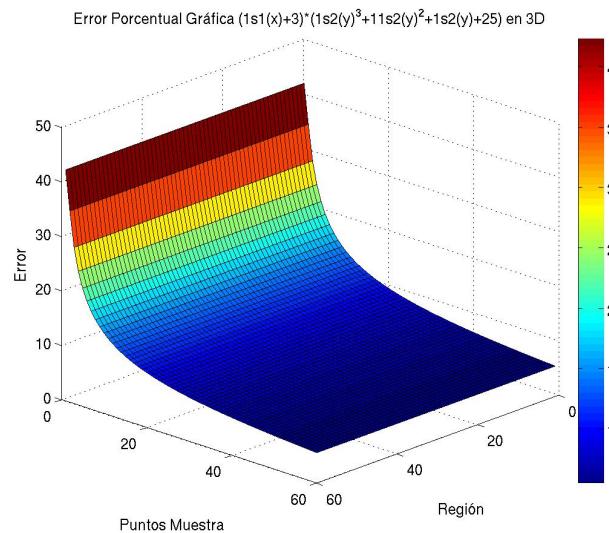
Las gráficas generadas en la figura 3.6 para el error absoluto y en la figura 3.7 para el error porcentual, muestran que el error máximo se encuentra en las primeras regiones y puntos muestra, lo que permite suponer que el comportamiento será similar a los ejercicios antes mencionados del caso exponencial.

Por ello se puede mencionar que el error continuará disminuyendo mientras vaya aumentando el número de regiones.

Si bien las gráficas obtenidas en el error porcentual mostradas en la figura 3.7 son muy similares a las mostradas en el error absoluto en la figura 3.6,



**Figura 3.6:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = (1y + 3)(1x^3 + 11x^2 + 1x + 25)$ .



**Figura 3.7:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = (1y + 3)(1x^3 + 11x^2 + 1x + 25)$ .

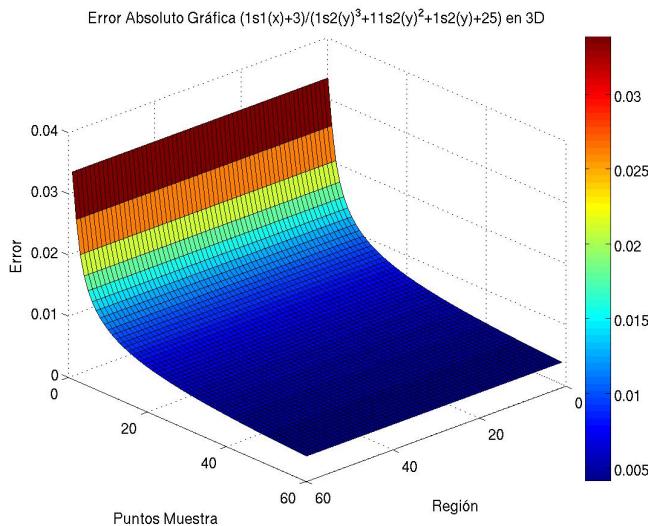
no son iguales. Sin embargo se puede apreciar que el error va disminuyendo mientras el número de regiones y puntos va aumentando.

Por otro lado se tiene:

$$\sigma = \frac{(\alpha y + \beta)}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)};$$

donde  $\alpha = 1, \beta = 3, a = 1, b = 11, c = 1, d = 25$ .

Para hacer énfasis en que no es un ejercicio trivial, se están empleando los mismos coeficientes, pero está vez todo lo que está con respecto a  $x$  se presenta dividiendo en la ecuación. Para este caso particular las gráficas de error absoluto se pueden observar en la figura 3.8, y el error porcentual como se aprecia en la figura 3.9.

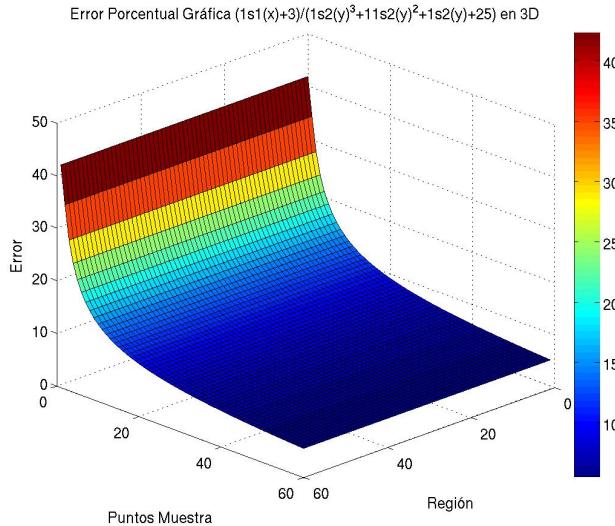


**Figura 3.8:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = \frac{(1y+3)}{(1x^3+11x^2+1x+25)}$ .

Es fácil percibir que las gráficas mostradas en la figura 3.8 ilustran el mismo comportamiento que el del ejemplo anterior.

El mismo comportamiento se puede verificar para los casos  $b = 11, 50, 100$ .

A partir de estos ejemplos, el lector puede percibir que lo que se busca en estos ejercicios no es solo caracterizar el método de interpolación, sino



**Figura 3.9:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = \frac{(1y+3)}{(1x^3+11x^2+1x+25)}$ .

comenzar a sustentar la reconstrucción de la función de conductividad.

### 3.1.4 Conductividad con forma senoidal

Para la presente caracterización se debe tener una expresión que presente comportamiento distinto con base en el estudio de los potenciales en la frontera [16]. Por esta razón ahora se estudiará el caso senoidal.

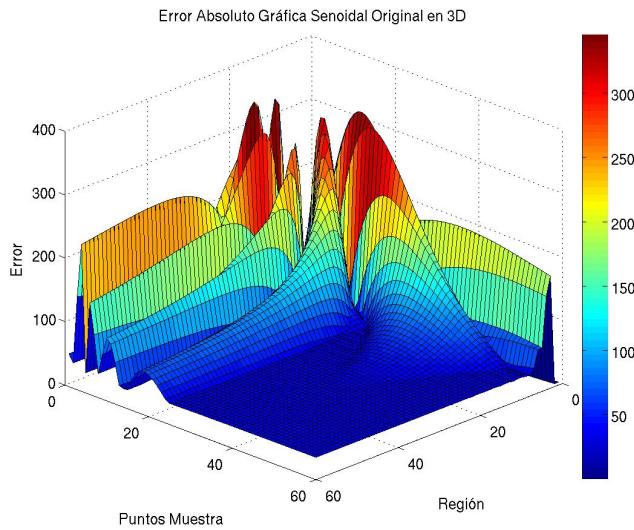
Es bien sabido que el comportamiento de las funciones trigonométricas seno y coseno es regular, empero no es sencillo prever como se comportará una conductividad representada por la combinación de estas funciones para cada uno de los ejercicios.

Para investigar su comportamiento, se seguirá con la dinámica de los ejercicios anteriores. Recordando que el seno y el coseno se desvanecen para ciertos argumentos, y para evitar que la conductividad se desvanezca o se indetermine en un punto, se sumará una constante.

Para nuestro primer caso, se emplea una expresión de la forma:

$$\begin{aligned}\sigma &= (K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x)) \\ &\cdot (K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y)); \\ &\cdot \alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10.\end{aligned}$$

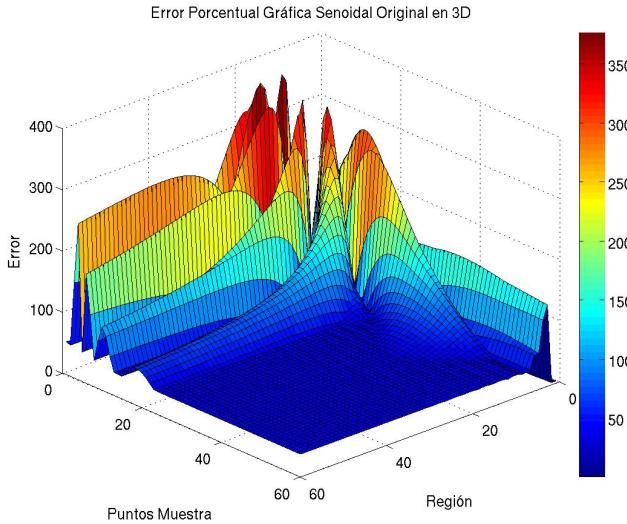
Las gráficas para error absoluto se presentan en las figuras 3.10 y 3.11.



**Figura 3.10:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = (10 + \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x) + \sin(6\pi x) + \sin(8\pi x))(10 + \cos(2\pi y) + \cos(4\pi y) + \cos(6\pi y) + \cos(8\pi y))$

Aquí es fácil ver que el error absoluto se comporta de manera distinta a los casos anteriores, lo que refuerza la singularidad del ejemplo considerado. También se puede observar que el error va disminuyendo, como ya se había mostrado en ejercicios previos, pero lo hace de una manera muy diferente respecto a los ejercicios antes vistos. Empero, una vez superados cierto número de regiones y de puntos muestra por región, las gráficas muestran que el error disminuye, por lo que la aproximación se puede considerar factible. En 3.11 se tiene el error porcentual.

Siguiendo con el método experimental, y considerando la razón entre las funciones que dependen de  $x$  y las que dependen de  $y$ , de forma tal que



**Figura 3.11:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = (10 + \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x) + \sin(6\pi x) + \sin(8\pi x))(10 + \cos(2\pi y) + \cos(4\pi y) + \cos(6\pi y) + \cos(8\pi y))$

$$\sigma = \frac{(K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x))}{(K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y))};$$

•  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10.$

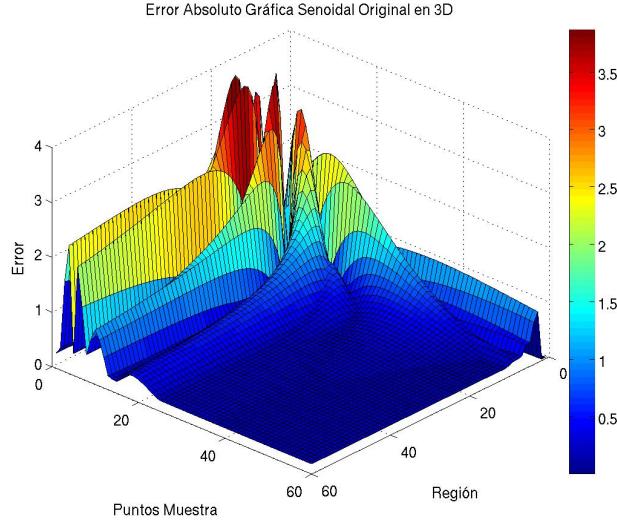
El comportamiento del error se presentan en las figuras 3.12 y 3.13.

En las gráficas porcentuales generadas, se puede ver de nuevo que mientras mayor es el número de regiones y de puntos muestra por región, mejor será la reconstrucción.

Comportamientos muy similares se presentan para la pareja de funciones:

$$\begin{aligned} \sigma &= (K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + 10 \sin(\gamma x) + \sin(\delta x)) \cdot \\ &\quad \cdot (K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y)); \\ \text{donde } &\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{(K + \sin(\alpha y) + \sin(\beta y) + 10 \sin(\gamma y) + \sin(\delta y))}{(K + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) + \cos(\gamma x) + \cos(\delta x))}; \\ \text{donde } &\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10; \end{aligned}$$



**Figura 3.12:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = \frac{(10+\cos(2\pi y)+\cos(4\pi y)+\cos(6\pi y)+\cos(8\pi y))}{(10+\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x)+\sin(6\pi x)+\sin(8\pi x))}$ .

así como para

$$\sigma = (K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + 100 \sin(\gamma x) + \sin(\delta x))$$

donde  $(K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y));$

•  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10.$

$$\sigma = \frac{(K + \sin(\alpha y) + \sin(\beta y) + 100 \sin(\gamma y) + \sin(\delta y))}{(K + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) + \cos(\gamma x) + \cos(\delta x))};$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10;$

y también para

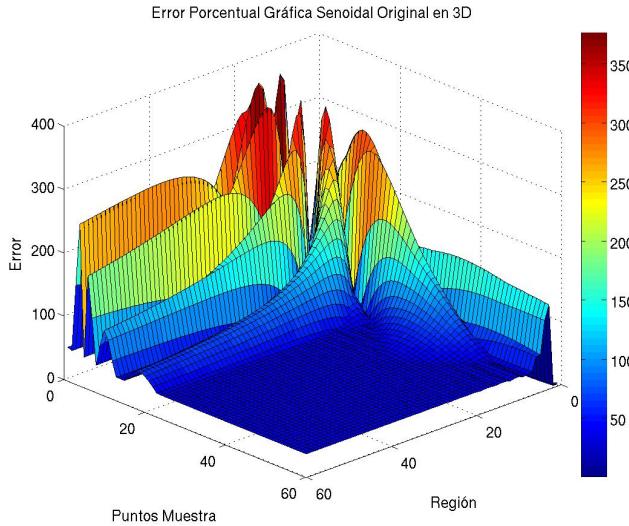
$$\sigma = (K + \sin(\alpha y) + \sin(\beta y) + \sin(\gamma y) + \sin(\delta y))$$

•  $(K + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) + 10 \cos(\gamma x) + \cos(\delta x));$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10;$

$$\sigma = \frac{(K + \sin(\alpha y) + \sin(\beta y) + \sin(\gamma y) + \sin(\delta y))}{(K + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x) + 10 \cos(\gamma x) + \cos(\delta x))};$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10.$



**Figura 3.13:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = \frac{(10+\cos(2\pi y)+\cos(4\pi y)+\cos(6\pi y)+\cos(8\pi y))}{(10+\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x)+\sin(6\pi x)+\sin(8\pi x))}$ .

Es relevante mencionar que este caso fue muy interesante, por que permitió observar excepciones para la convergencia del método usando un número relativamente pequeño de muestras y regiones. Esto puede inferirse de las técnicas fundamentales de muestreo de señales, pues al aumentar la frecuencia de las componentes senoidales, también deben aumentarse las regiones y los puntos muestra. De otra manera, el comportamiento del error de la reconstrucción se torna por demás irregular.

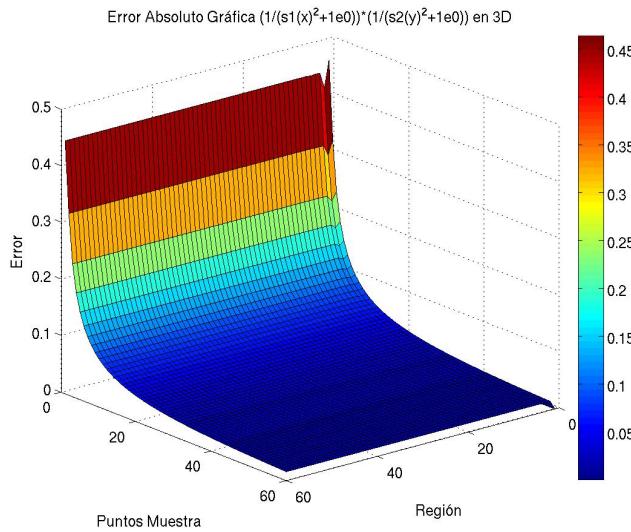
### 3.1.5 Conductividad con forma gaussiana

Como el lector puede inferir, para esta función deben existir varios casos de análisis, debido a que se buscó que la gaussiana siempre tuviera su máximo o mínimo en el centro, antes de variar la posición de la función.

Esto garantiza poder apreciar cómo se comporta el error absoluto y porcentual, determinando si es posible realizar la reconstrucción. Para ello, se plantearon seis diferentes ecuaciones, donde la conductividad original se multiplica y se divide, siguiendo la metodología ya antes presentada.

Para el desarrollo de este ejercicio emplearemos la siguiente expresión:

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 1} \right).$$



**Figura 3.14:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 1} \right)$ .

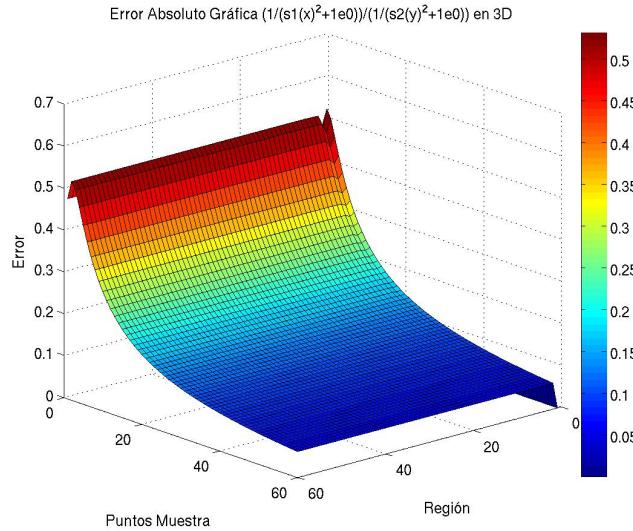
En la gráfica 3.14 es fácil apreciar que el patrón antes detectado se preserva, pues el error disminuye conforme el número de regiones y puntos muestra aumentan. Esto se observa en todos los casos, por lo que se puede inferir que la reconstrucción de la función será correcta.

Empleando las reglas que se han usado en todos los casos anteriores, se analiza la expresión:

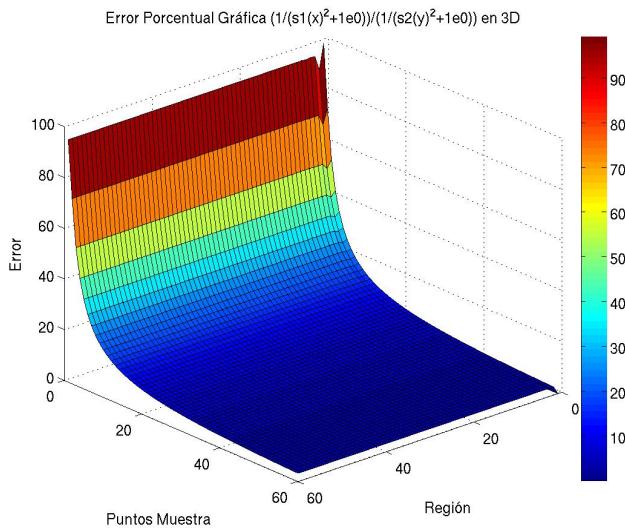
$$\sigma = \frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}$$

Es posible apreciar en las gráficas el error absoluto mostradas en 3.15, que el error disminuye conforme el número de regiones aumenta. De nuevo, se infiere que la reconstrucción será correcta.

El patrón de decrecimiento de error se preserva para los pares de casos:



**Figura 3.15:** Error absoluto de la estimación de la función  $\sigma = \frac{y^2+1}{x^2+1}$ .



**Figura 3.16:** Error porcentual de la estimación de la función  $\sigma = \frac{y^2+1}{x^2+1}$ .

- Caso 1

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 10} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 10} \right);$$

$$\sigma = \frac{x^2 + 10}{y^2 + 10};$$

- Caso 2

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 0.01} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 0.01} \right);$$

$$\sigma = \frac{x^2 + 0.01}{y^2 + 0.01};$$

- Caso 3

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 100} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 100} \right).$$

$$\sigma = \frac{x^2 + 100}{y^2 + 100}.$$

Se infiere un comportamiento similar para casos sucesivos.

Si bien el caso gaussiano fue de gran interés debido a que con él se pueden modelar algunas de las afecciones del cuerpo humano, este caso además proporcionó muchas cosas de que hablar, como el hecho de poder intentar una reconstrucción sabiendo que el error estimado era demasiado alto, y que podía disminuir con procedimientos similares a los casos anteriores.

## 3.2 Tablas de errores absolutos y errores porcentuales

A continuación se presentan tablas con los errores obtenidos en cada ejercicio, de acuerdo a la expresión matemática empleada, para poder compararlas entre sí y ver como se va comportando el error.

El objetivo es mostrar el máximo error encontrado en una región, y punto muestra por región, para poder establecer una comparación que ilustre el comportamiento de las funciones de interpolación empleadas.

Como se ha podido apreciar en el cálculo de los errores tanto absolutos como porcentuales, el error máximo solo se encuentra en las primeras regiones y puntos muestra, y se obtiene el error mínimo conforme se va aumentando el número de regiones y puntos muestra.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	2.0398	2.0398
caso 2	12.1682	12.1682
caso 3	59.5876	59.5876
caso 4	267.1187	267.1187

**Tabla 3.1:** Error absoluto exponencial.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	250.1632	261.6952
caso 2	2.11E+003	2.18E+003
caso 3	1.59E+004	1.64E+004
caso 4	1.17E+005	1.21E+005

**Tabla 3.2:** Error porcentual exponencial.

Ahora bien, en el estudio de las funciones exactas, es fácil establecer el alcance del método en cuanto a los errores obtenidos, y esto permite determinar el comportamiento de las expresiones, viendo las gráficas y las tablas de error de dichas funciones.

Es fácil apreciar que el método arroja buenos resultados, lo que indica que el ejercicio permitirá hacer la reconstrucción de la función empleando el método propuesto.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	21.3103	21.3103
caso 2	31.1672	31.1672
caso 3	47.3113	47.3113

**Tabla 3.3:** Error absoluto polinomial.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	37.7994	42.3376
caso 2	37.7994	42.3376
caso 3	37.7994	42.3376

**Tabla 3.4:** Error porcentual polinomial.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	345.3914	345.3914
caso 2	2.48E+003	2.48E+003
caso 3	3.03E+004	3.03E+004
caso 4	672.6043	672.6043
caso 5	3.94E+003	3.94E+003
caso 6	3.79E+004	3.79E+004
caso 7	6.45E+004	6.45E+004
caso 8	361.1821	361.1821
caso 9	376.9062	376.9062

**Tabla 3.5:** Error absoluto senoidal.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	364.21	376.4824
caso 2	1.85E+006	1.86E+006
caso 3	6.05E+006	6.07E+006
caso 4	374.21	376.6043
caso 5	374.21	376.4824
caso 6	4.66E+004	4.68E+004
caso 7	5.88E+004	5.88E+004
caso 8	374.21	376.4824
caso 9	374.21	376.9062

**Tabla 3.6:** Error porcentual senoidal.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	0.4644	0.4644
caso 2	7.13E-004	7.13E-004
caso 3	9.35E+003	9.35E+003
caso 4	1.61E-006	1.61E-006
caso 5	9.45E+007	9.45E+007
caso 6	1.61E-010	1.61E-010

**Tabla 3.7:** Error absoluto gaussiana.

	$\sigma = \sigma_1(x)\sigma_2(y)$	$\sigma = \frac{\sigma_2(y)}{\sigma_1(x)}$
caso 1	92.8895	99.242
caso 2	7.8426	11.3942
caso 3	9.61E+003	9.76E+003
caso 4	1.6071	2.6094
caso 5	1.05E+006	1.06E+006
caso 6	1.6071	1.6431

**Tabla 3.8:** Error porcentual gaussiana.

# Capítulo 4

## Reconstrucción empleando el método de interpolación.

### 4.0.1 Metodología

Siguiendo un procedimiento idéntico al descrito en la subsección 3.1.1, se ilustrará el método de interpolación empleando cromatogramas dentro del círculo unitario, que ha sido el dominio por excelencia en este texto.

El objetivo es ilustrar el proceso iterativo para la reconstrucción de una función de conductividad, permitiendo una apreciación gradual en forma gráfica. Comenzando en 11 regiones y en 11 puntos muestra por región, y terminando en 201 regiones y 201 puntos por región, el lector podrá apreciar el procedimiento que permite la interpolación en variables separables, columna vertebral de esta tesis.

Para ello, se evocan las ilustraciones de las figuras 3.1, citando de nueva cuenta los pasos que describen el algoritmo:

1. Seleccionar un dominio, el cual será dividido en  $q$ -subsecciones.
2. Seleccionamos una subsección.
3. Se divide la subsección.
4. Las muestras que se obtienen representan la conductividad para esa sección en particular.
5. Las conductividades mostradas son forzadas a presentarse en términos de variables separables.

6. Y el proceso se repite hasta completar el dominio que se selecciono.

#### 4.0.2 Conductividad con forma exponencial

Este primer caso se ocupa de la función

$$\sigma = e^{x+y},$$

ilustrando el procedimiento en 4.1.

Es fácil observar como se va aproximando la conductividad interpolada conforme se avance en el número de regiones y puntos muestra por región, y prácticamente deja de notarse un cambio alguno a partir de la región 101 y puntos muestra 101.

Continuando con lo ya descrito, la nueva ecuación a emplear es:

$$\sigma = e^{x-y}$$

El conjunto de gráficas que se generan debido al empleo de dicha ecuación, se puede apreciar en la figura 4.2.

Los mismos patrones de convergencia se observan para los casos:

1.

$$\sigma = e^{2x+2y}, \quad \sigma = e^{2x-2y};$$

2.

$$\sigma = e^{3x+3y}, \quad \sigma = e^{3x-3y}; \quad \text{etc.}$$

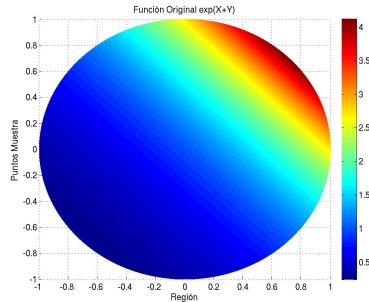
#### 4.0.3 Conductividad con forma polinomial

Si bien hay polinomios más complejos que el que se esta empleando, se decidió emplear éste debido a la complejidad y el costo computacional que representa para las herramientas matemáticas empleadas.

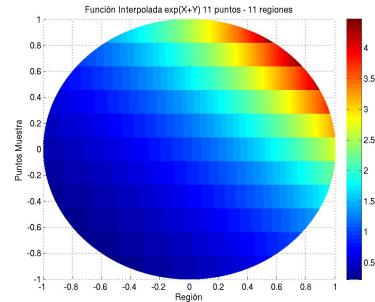
A continuación se presentan algunos casos particulares para poder ver el comportamiento de la función. Para este caso se decidió emplear:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\alpha y + \beta)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ \text{donde } \alpha &= 1, \beta = 3, a = 1, b = 11, c = 1, d = 25; \end{aligned}$$

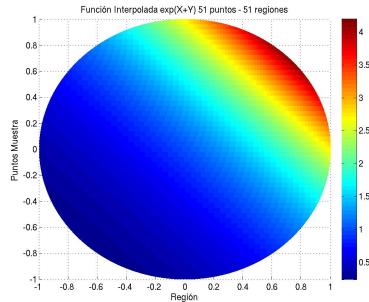
Luego se obtuvieron las siguientes gráficas mostradas en la figura 4.3.



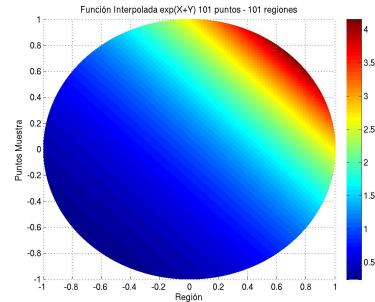
(a) Conductividad Original



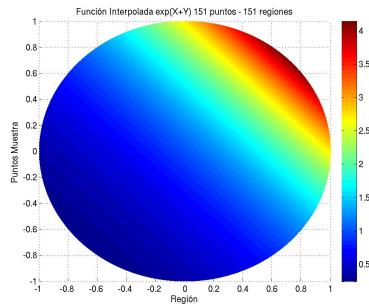
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



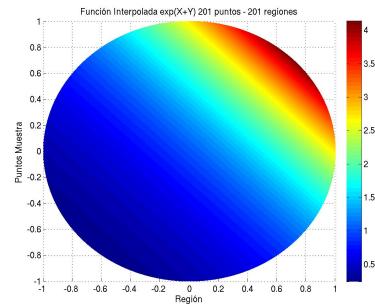
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra

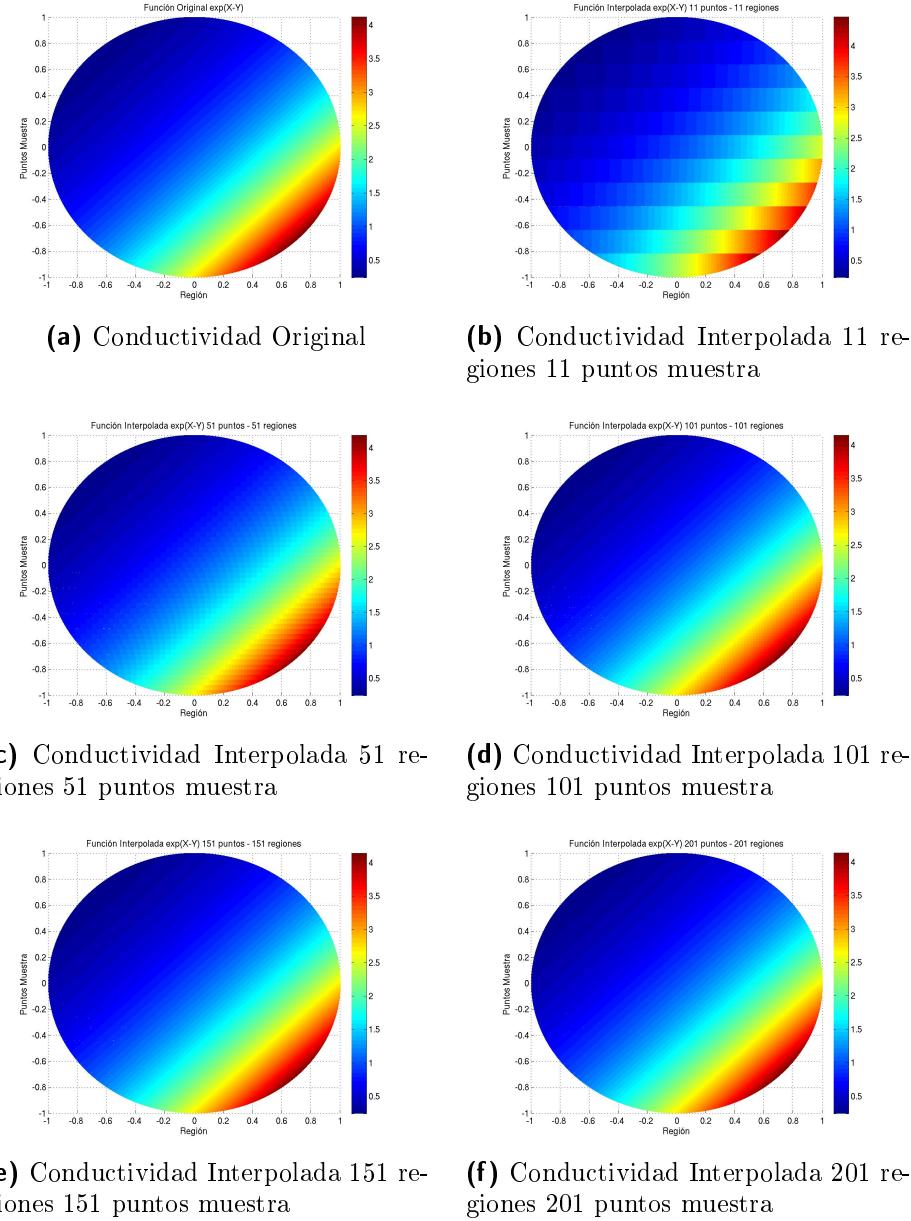


(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra

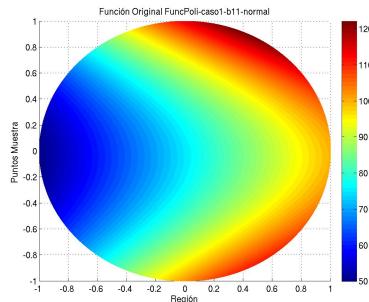


(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

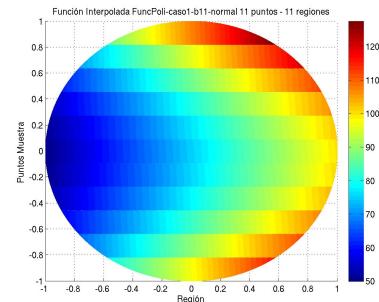
**Figura 4.1:** Secuencia de reconstrucción  $e^{x+y}$



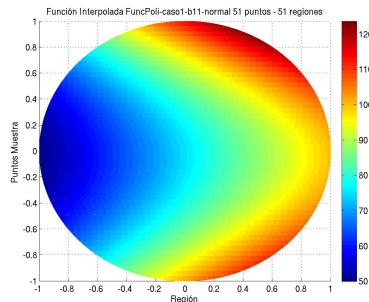
**Figura 4.2:** Secuencia de reconstrucción  $e^{x-y}$



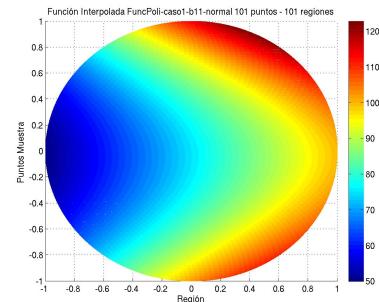
(a) Conductividad Original



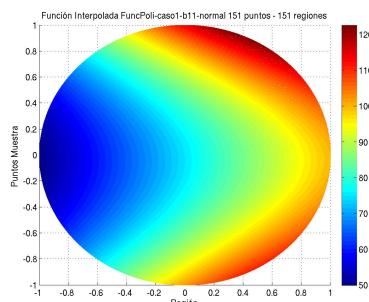
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



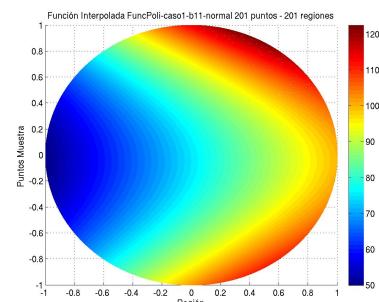
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra



(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

**Figura 4.3:** Secuencia de reconstrucción  $(\alpha y + \beta)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

En el estudio de las gráficas, es fácil darse cuenta que la aproximación obtenida en la conductividad interpolada contra la conductividad original presenta un error mínimo en la región 201 y puntos muestra por región en 201, mostrado en el conjunto de gráficas de arriba, por otro lado se presenta la peor simulación y el error más alto de la simulación en la región 11 y puntos muestra por región en 11, a pesar de ello se puede ver y comparar contra la conductividad original y ya es reconocible. El error es imperceptible a partir de la región 101 y puntos muestra por región 101.

Para continuar con la metodología descrita en esta ocasión se empleará una modificación a la ecuación como se muestra a continuación:

$$\sigma = \frac{(\alpha y + \beta)}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

donde  $\alpha = 1, \beta = 3, a = 1, b = 11, c = 1, d = 25;$

Donde se genera la simulación que es representada en el siguiente conjunto de gráficas ilustradas en la figura 4.4.

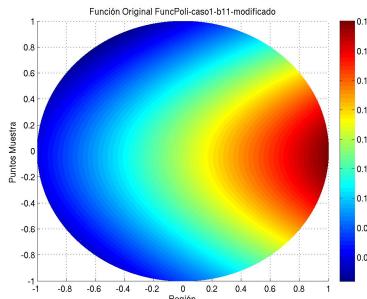
La simulación de estos ejercicios, permitió confirmar que, la peor reconstrucción se ubica en la región 11 y 11 puntos muestra por región, y mostrando la mejor reconstrucción cuando se tienen 201 regiones y 201 puntos muestra por región, ya que el error entre la conductividad original y la interpolada es muy pequeño para ser percibido por el ojo humano, pero a partir de la simulación con 101 regiones y 101 puntos muestra por región ya casi no se puede ver la diferencia, demostrando la efectividad del método.

#### 4.0.4 Conductividad con forma senoidal

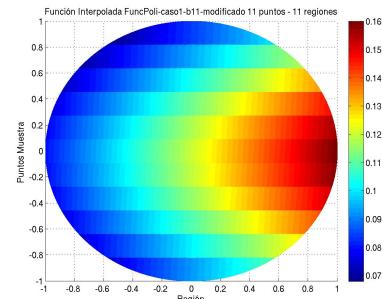
Uno de los casos más estudiados, debido a que las ecuaciones aquí empleadas tienen un comportamiento muy peculiar. Por lo general, lleva a generar circunferencias como se podrá ver en los casos que se estudiaran en esta sección.

Existe una razón muy importante por la cual esta clase de ejercicios se vuelven obligatorios dentro de un proceso de caracterización, ya que muchas veces llega a presentar problemas debido a que en estas funciones trigonométricas pueden tener un poco de oscilaciones.

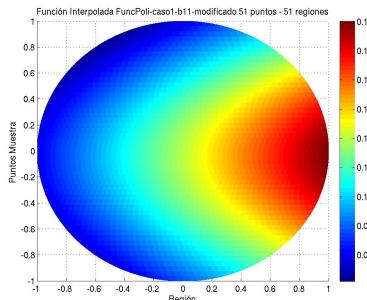
Para este caso se empleará la siguiente ecuación, con los coeficientes que



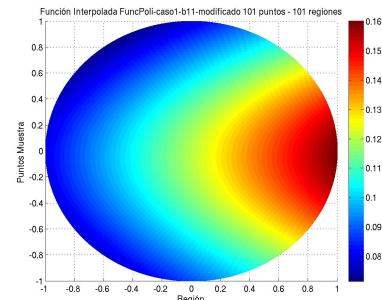
(a) Conductividad Original



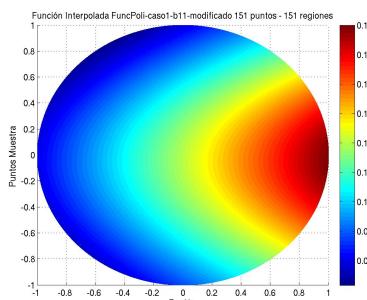
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



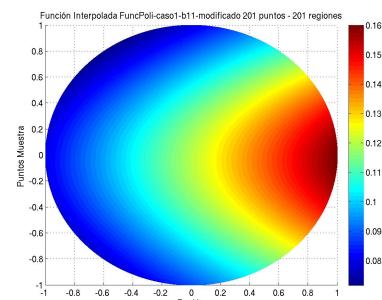
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra



(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

**Figura 4.4:** Secuencia de reconstrucción  $\frac{\alpha y + \beta}{ax^3 + bx^2 + cx + d}$

se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}\sigma &= (K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x)) \\ &\cdot (K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y))\end{aligned}$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10$ .

En la siguiente simulación se obtiene el siguiente conjunto de gráficas ilustradas en la figura 4.5.

Para este sencillo ejercicio se puede ver que se tiene la mejor aproximación al momento de usar 201 regiones y 201 puntos muestra por región, en esta gráfica el error es mínimo lo que hace que a simple vista la reconstrucción haya sido perfecta. Lejos de esto es debido a la diferencia mínima que existe entre la conductividad original y la conductividad interpolada, como ya se había mencionado anteriormente se realiza una serie de iteraciones para aproximar la conductividad interpolada a la original esto debido a que la ecuación que rige este estudio es un problema de tipo inverso.

Por lo mismo en la primera iteración que empieza en 11 regiones y 11 puntos muestra por región se muestra la peor aproximación teniendo un error considerable ya que aquí se puede ver a simple vista que la reconstrucción es buena.

Ahora continuando con la metodología se emplea la siguiente ecuación con los mismos coeficientes:

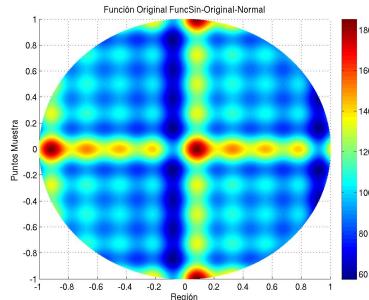
$$\sigma = \frac{(K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(\gamma y) + \cos(\delta y))}{(K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x))}$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10$ .

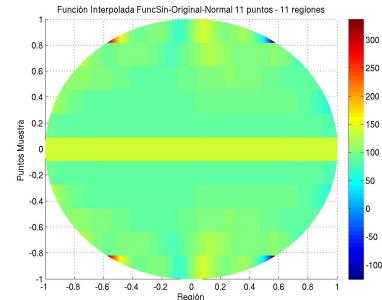
En la siguiente simulación que se muestra en 4.6.

Ahora bien como ya se había mostrado en la sección de estimación del error, se confirma que era posible reconstruir la función teniendo su peor gráfica en 11 regiones y 11 puntos muestra por región, y la mejor en 201 regiones y 201 puntos muestra por región, en esta simulación de igual forma se puede apreciar que a partir de la región 101 y 101 puntos muestra por región la diferencia entre la conductividad original y la conductividad interpolada es mínima lo que la hace imperceptible a simple vista.

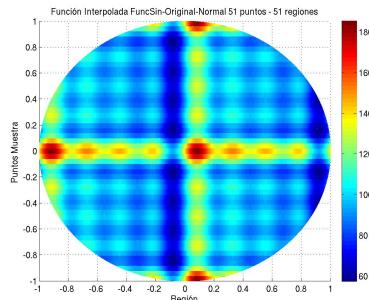
Un caso que vale la pena mencionar, continuando con las simulaciones,



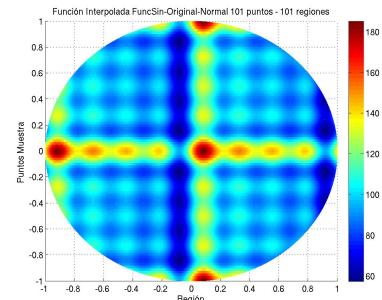
(a) Conductividad Original



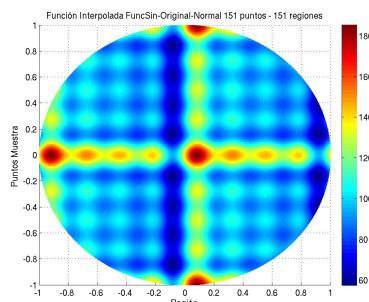
(b) Conductividad Interpolada 11 re-giones 11 puntos muestra



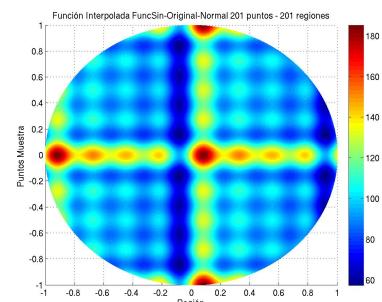
(c) Conductividad Interpolada 51 re-giones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 re-giones 101 puntos muestra

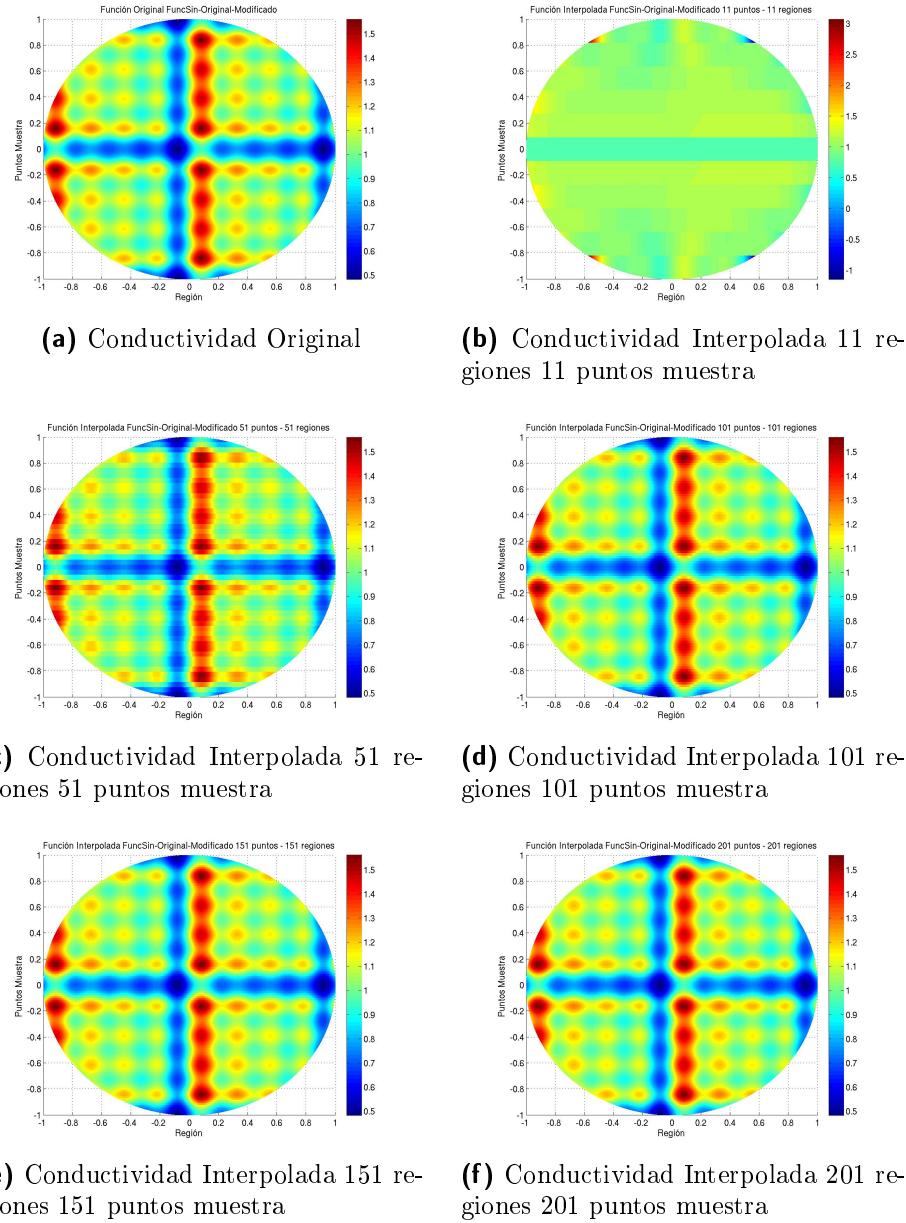


(e) Conductividad Interpolada 151 re-giones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 re-giones 201 puntos muestra

**Figura 4.5:** Secuencia de reconstrucción  $(K + \sin(\alpha\pi x) + \sin(\beta\pi x) + \sin(\gamma\pi x) + \sin(\delta\pi x))(K + \cos(\alpha\pi x) + \cos(\beta\pi x) + \cos(\gamma\pi x) + \cos(\delta\pi x))$



**Figura 4.6:** Secuencia de reconstrucción  $\frac{(K+\cos(\alpha\pi y)+\cos(\beta\pi y)+\cos(\gamma\pi y)+\cos(\delta\pi y))}{(K+\sin(\alpha\pi x)+\sin(\beta\pi x)+\sin(\gamma\pi x)+\sin(\delta\pi x))}$

corresponde a:

$$\begin{aligned}\sigma &= (K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x)) \\ &\cdot (K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(100\gamma y) + \cos(\delta y))\end{aligned}$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10$

En donde al emplear la expresión arriba descrita se genera el conjunto de gráficas que se pueden observar en la figura 4.7.

Una vez más, al momento de la reconstrucción del método, casi se llegó al objetivo. Es decir, se puede ver que la reconstrucción necesitaba por lo menos otras 50 regiones, pero dadas las condiciones de la experimentación, se decidió mantener este número de regiones y de puntos.

No se realizaron más simulaciones empleando más regiones por que el costo computacional se elevó considerablemente, pero se está viendo la posibilidad de estudiar de mejor forma este caso en particular.

Ahora continuando con la metodología se emplea la siguiente ecuación con los mismos coeficientes:

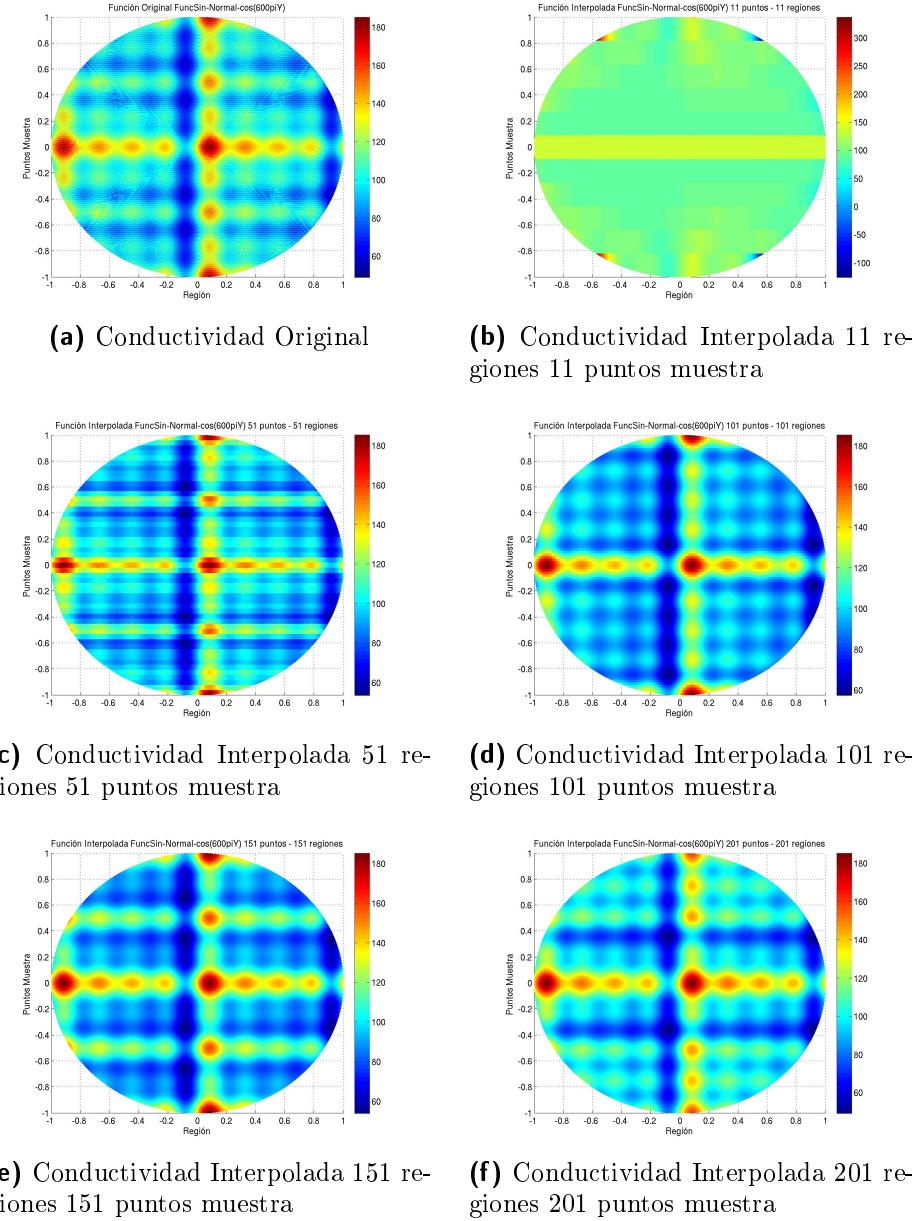
$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{(K + \cos(\alpha y) + \cos(\beta y) + \cos(100\gamma y) + \cos(\delta y))}{(K + \sin(\alpha x) + \sin(\beta x) + \sin(\gamma x) + \sin(\delta x))}\end{aligned}$$

donde  $\alpha = 2\pi, \beta = 4\pi, \gamma = 6\pi, \delta = 8\pi, K = 10$

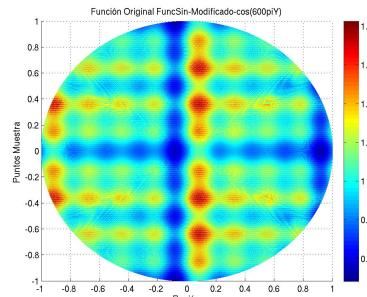
Al emplear la expresión arriba descrita se llega a la simulación en donde se obtiene 4.8.

Este caso en particular proporcionó mucha información por que permitió un análisis sobre la posibilidad de ir aumentando el número de regiones y el número de puntos muestra por región y así poder tener una mejor reconstrucción y un error cada vez más pequeño. Por otro lado el costo computacional aumenta considerablemente, si bien la aproximación que se realizó fue muy buena, la información que se presenta gracias a la secuencia de gráficas, permite inferir que se requieren más regiones y puntos muestra.

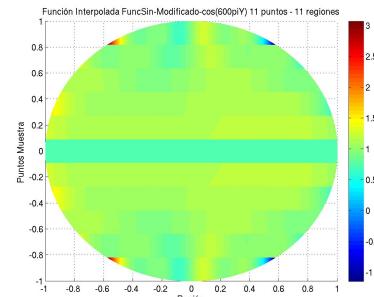
Si bien este conjunto de casos que conforman la parte de las funciones senoidales fue muy particular, permitió inferir un poco en la forma en la que se plantea la ecuación. Al momento de que se elige la ecuación y se pone en términos de variables separables, se pasa al método de interpolación para reconstruirla, lo que proporciona muchísima información y se planea continuar estudiando estos casos, debido a la importancia médica que se tiene.



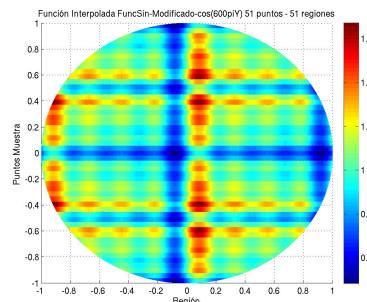
**Figura 4.7:** Secuencia de reconstrucción  $(K + \sin(\alpha\pi x) + \sin(\beta\pi x) + 100 \sin(\gamma\pi x) + \sin(\delta\pi x))(K + \cos(\alpha\pi x) + \cos(\beta\pi x) + \cos(100\gamma\pi x) + \cos(\delta\pi x))$



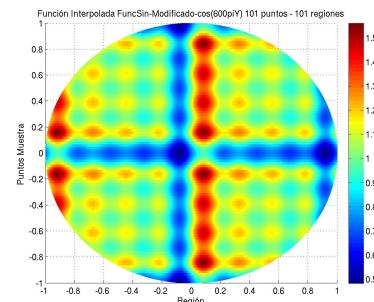
(a) Conductividad Original



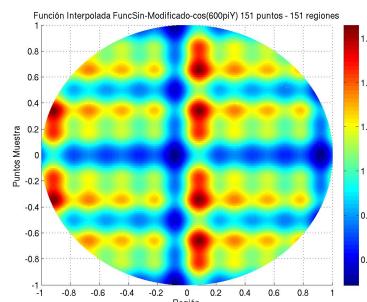
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



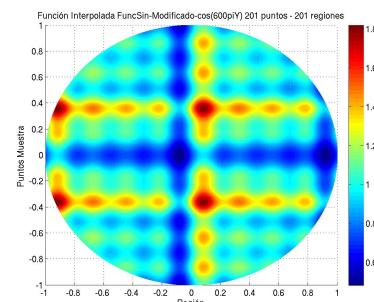
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra



(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

**Figura 4.8:** Secuencia de reconstrucción

$$\frac{(K+\cos(\alpha\pi y)+\cos(\beta\pi y)+\cos(100\gamma\pi y)+\cos(\delta\pi y))}{(K+\sin(\alpha\pi x)+\sin(\beta\pi x)+\sin(\gamma\pi x)+\sin(\delta\pi x))}$$

Lo más interesante del método y lo que más aportes dio, fue el estudio de las identidades trigonométricas y la búsqueda de funciones que en variables separables puedan igualar dichas ecuaciones.

#### 4.0.5 Conductividad con forma gaussiana

Este conjunto de ecuaciones formarán parte de la caracterización que tiene por objeto ver hasta donde es capaz de llegar el método de reconstrucción empleando la interpolación en variables separables.

Una sencilla y obvia expresión se puede seguir para este caso al emplear la siguiente ecuación, que describe una gaussiana con centro en el origen:

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 1} \right).$$

A continuación las gráficas generadas por la simulación empleando el método de interpolación en variables separables como se puede observar en la figura 4.9.

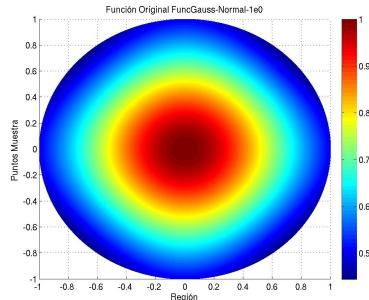
Para este caso es posible ver que la reconstrucción fue hecha de forma correcta, lo que comprueba que es posible reconstruir las funciones de este tipo. Sin embargo, se está tratando con el caso básico. Se puede ver que se tiene una reconstrucción buena a partir de las 101 regiones y 101 puntos muestra por región, teniendo como resultado la mejor aproximación en las 201 regiones y 201 puntos totales y encontrándose la peor en las 11 regiones y 11 puntos muestra por región.

Ahora una modificación a la ecuación usada en este caso:

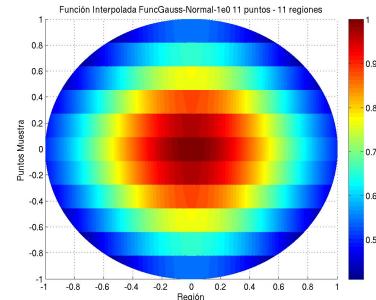
$$\sigma = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

A continuación se presentan las gráficas generadas por la simulación 4.10.

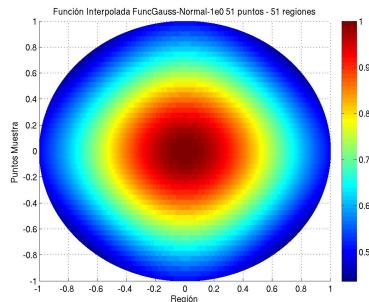
Ahora como se puede inferir en este ejercicio de reconstrucción, por una parte se tiene que la peor reconstrucción es lograda al emplear 11 regiones y 11 puntos muestra por región, teniendo como la mejor reconstrucción la generada cuando se usan 201 regiones y 201 puntos muestra, por otro lado a partir de la región 101 y 101 puntos muestra por región se puede apreciar que el error obtenido de la diferencia entre la conductividad original y la conductividad interpolada es mínima.



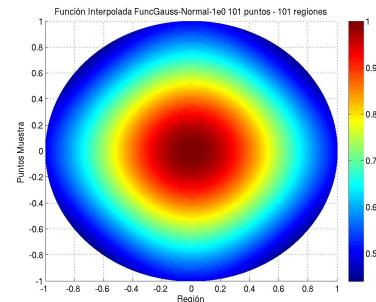
(a) Conductividad Original



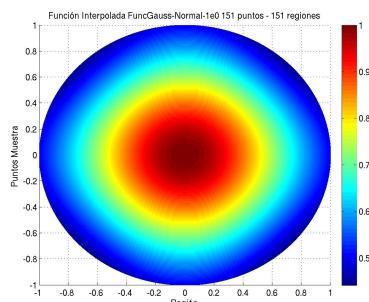
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



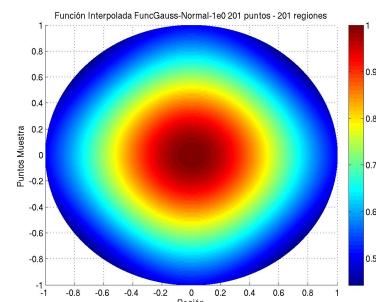
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra

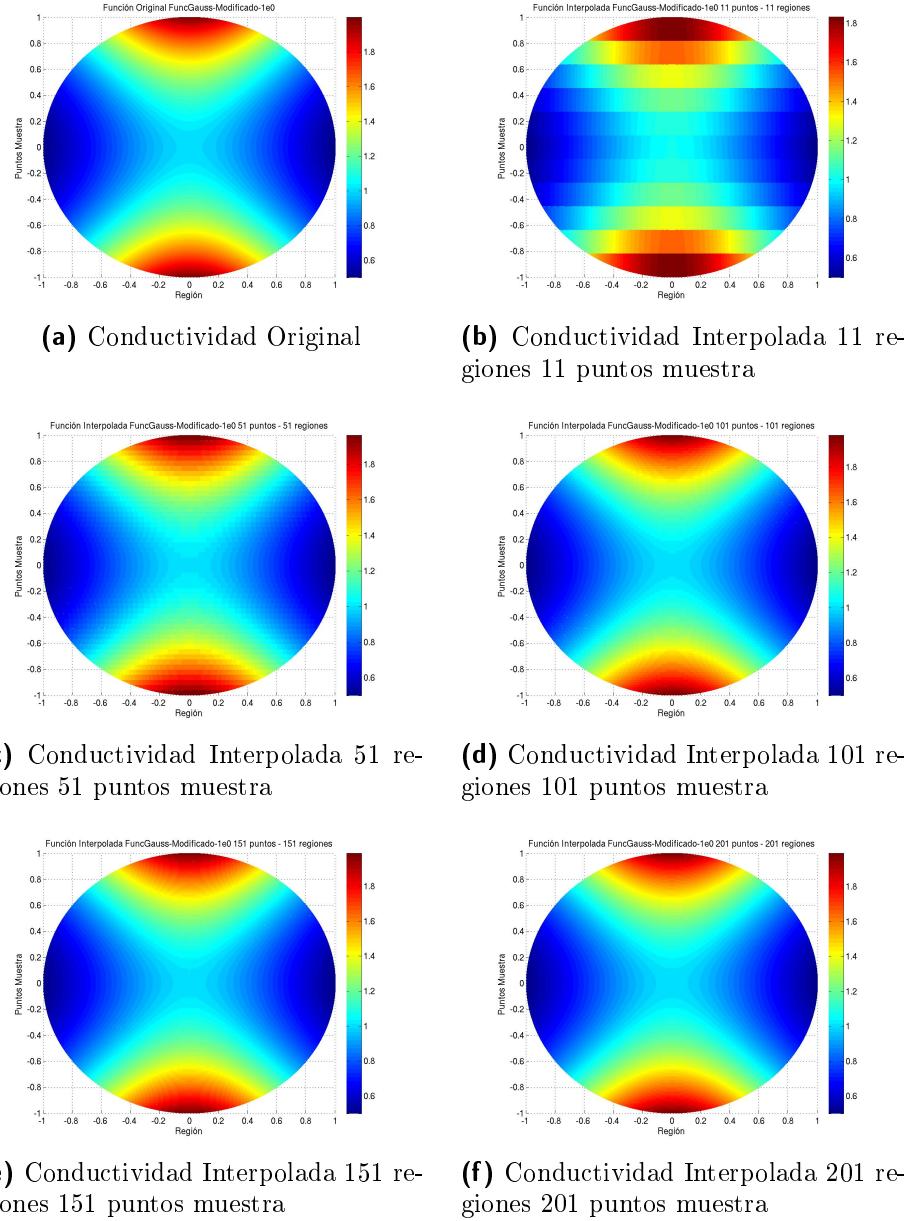


(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

**Figura 4.9:** Secuencia de reconstrucción  $(\frac{1}{x^2+1})(\frac{1}{y^2+1})$



**Figura 4.10:** Secuencia de reconstrucción  $\frac{x^2+1}{y^2+1}$

Continuando con los experimentos ahora una variación toma lugar para este caso en donde la siguiente ecuación describe una gaussiana con centro en el origen:

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 10} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 10} \right).$$

A continuación las gráficas generadas por la simulación empleando el método de interpolación en variables separables que se puede apreciar en la figura 4.11.

En este ejercicio como se puede ver en las gráficas obtenidas en la simulación fácilmente apreciada en la figura 4.11, no hay mucha diferencia contra la mostrada en el caso anterior, esto debido a que sigue siendo una gaussiana en el origen y la amplitud de su circunferencia no varía mucho, pero es posible ver que se trata de un ejercicio diferente por la ecuación empleada.

Ahora una modificación a la ecuación usada en este caso:

$$\sigma = \frac{x^2 + 10}{y^2 + 10}.$$

A continuación las gráficas generadas por la simulación empleando el método de interpolación en variables separables que se puede seguir en la figura 4.12.

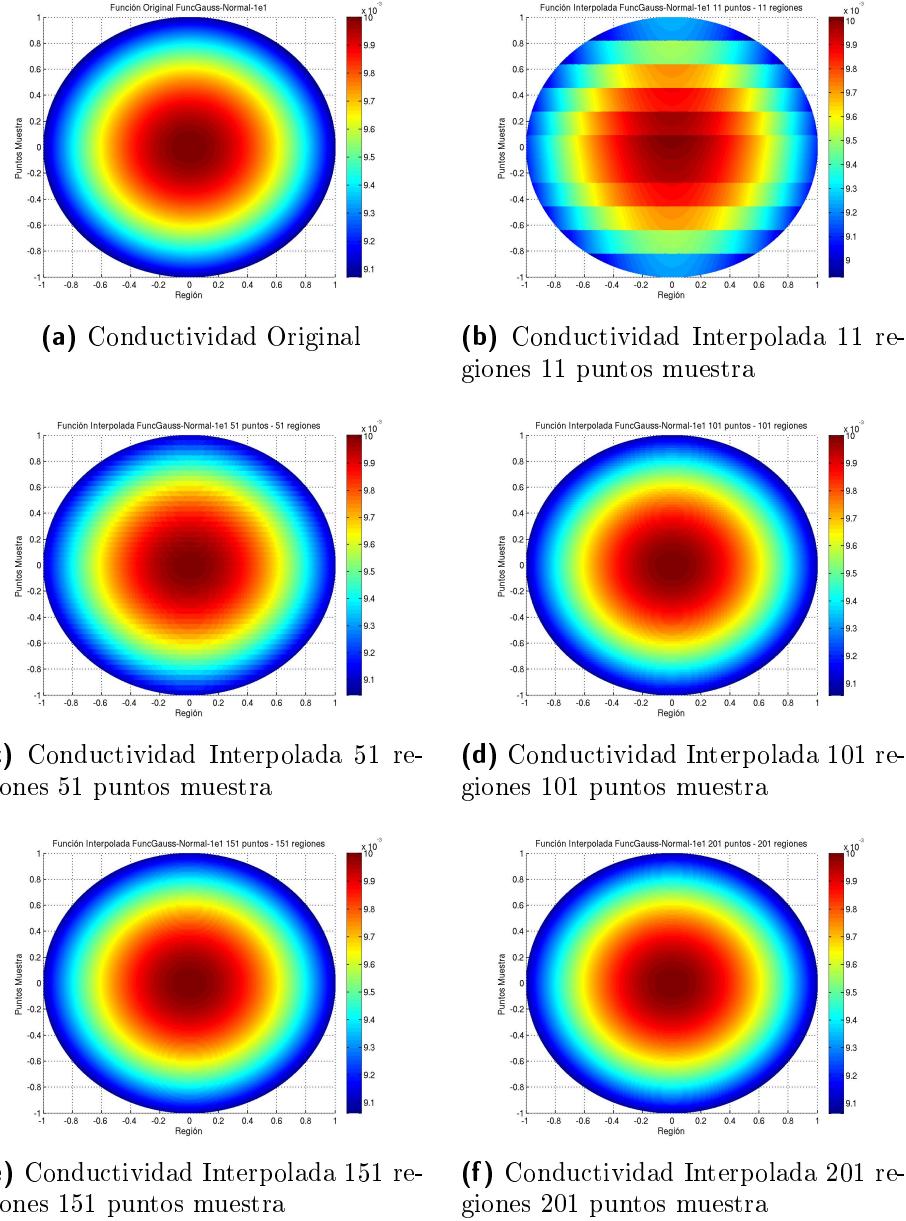
A continuación las gráficas generadas por la simulación empleando el método de interpolación en variables separables y se puede observar en la imagen 4.13, correspondientes a:

$$\sigma = \left( \frac{1}{x^2 + 0.01} \right) \left( \frac{1}{y^2 + 0.01} \right).$$

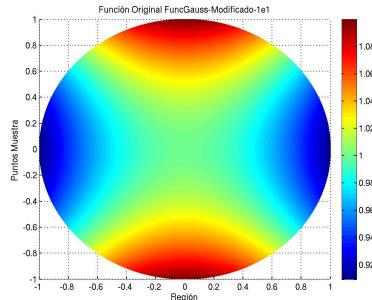
Aquí se ve una gran diferencia contra los casos anteriores por que ahora lo que se hizo es tomar una circunferencia muy pequeña como se ve en la ecuación, dadas las condiciones de la presente secuencia de gráficas es posible ver que el método fue capaz de reconstruir la función empleando 201 regiones y 201 puntos muestra por región como se confirmó con la estimación del error y sugiriendo que es posible reconstruir a pesar de que el pico generado sea pequeño.

Ahora una modificación a la ecuación usada en este caso:

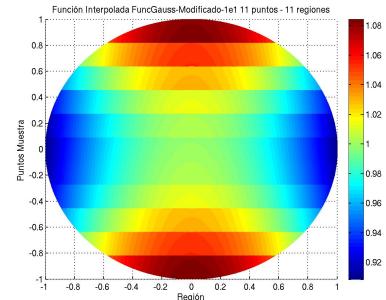
$$\sigma = \frac{x^2 + 0.01}{y^2 + 0.01},$$



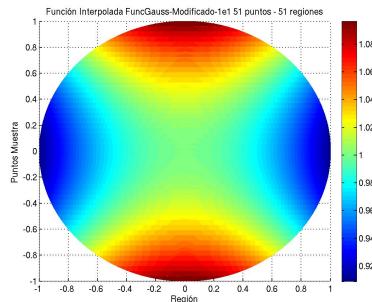
**Figura 4.11:** Secuencia de reconstrucción  $(\frac{1}{x^2+1e^{-1}})(\frac{1}{y^2+1e^{-1}})$



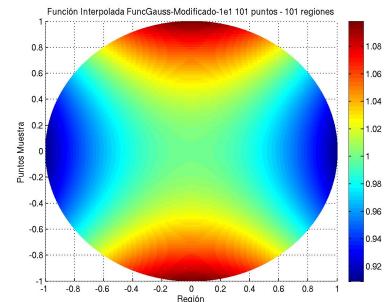
(a) Conductividad Original



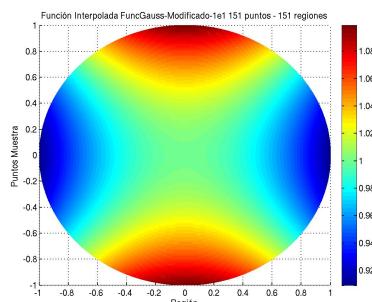
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



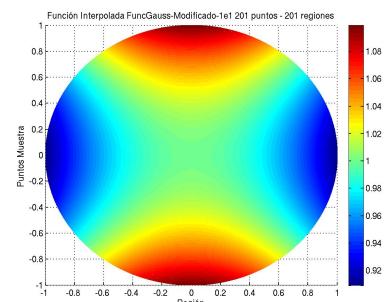
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra

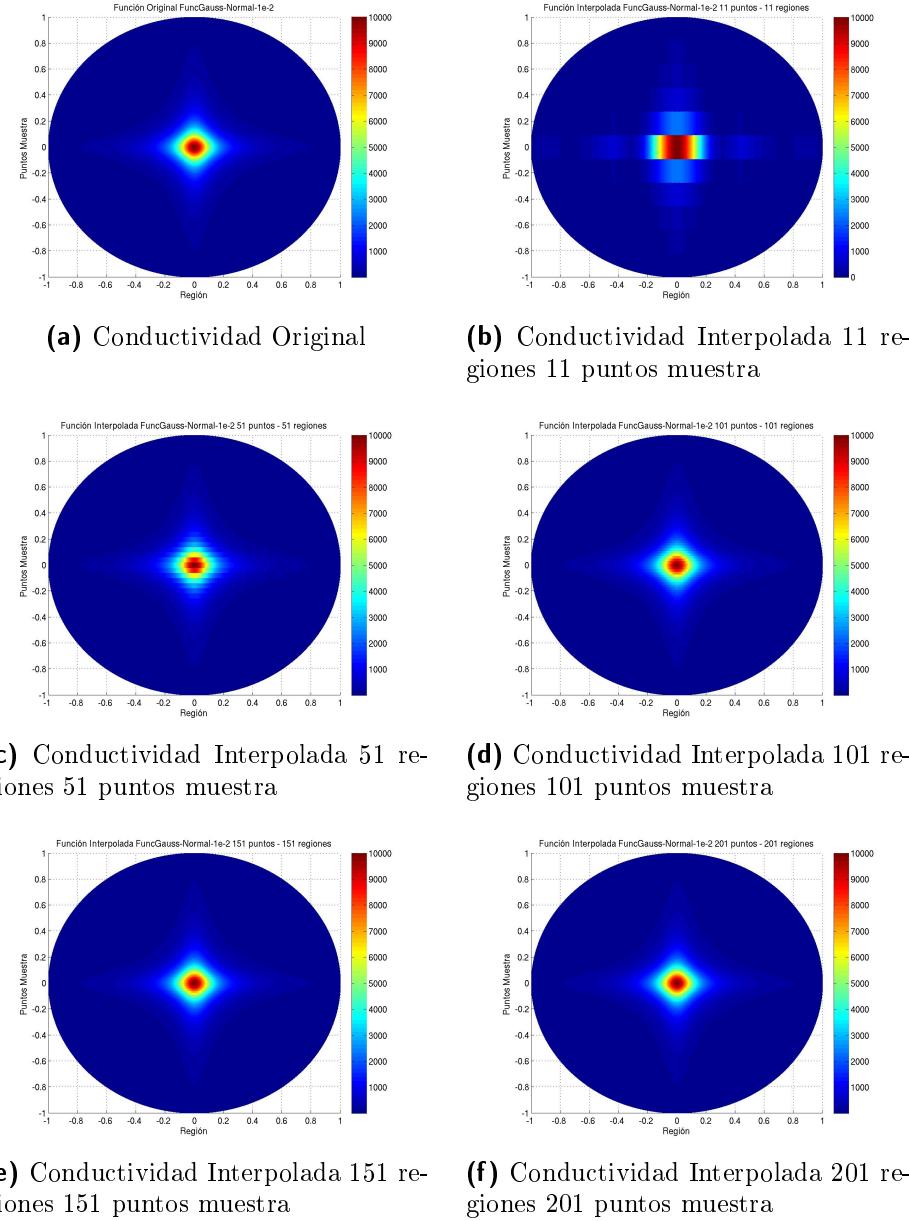


(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra

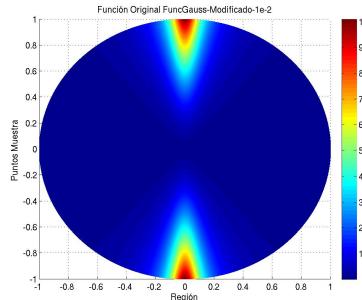


(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

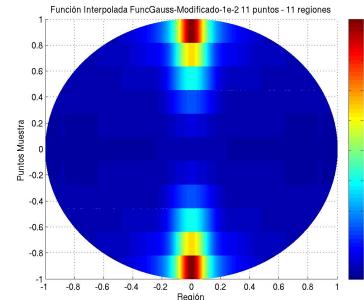
**Figura 4.12:** Secuencia de reconstrucción  $\sigma = \frac{x^2+10}{y^2+10}$



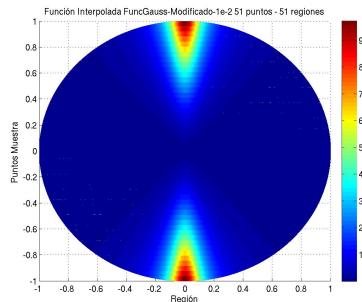
**Figura 4.13:** Secuencia de reconstrucción  $\left(\frac{1}{x^2+1e^{-2}}\right)\left(\frac{1}{y^2+1e^{-2}}\right)$



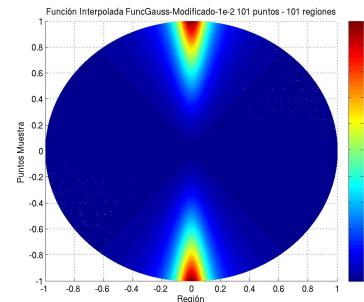
(a) Conductividad Original



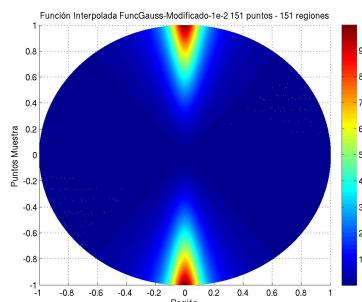
(b) Conductividad Interpolada 11 regiones 11 puntos muestra



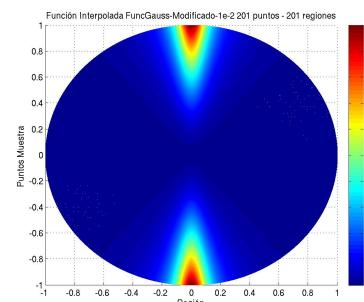
(c) Conductividad Interpolada 51 regiones 51 puntos muestra



(d) Conductividad Interpolada 101 regiones 101 puntos muestra



(e) Conductividad Interpolada 151 regiones 151 puntos muestra



(f) Conductividad Interpolada 201 regiones 201 puntos muestra

**Figura 4.14:** Secuencia de reconstrucción  $\sigma = \frac{x^2+0.01}{y^2+0.01}$ .

que genera las gráficas 4.14.

A lo largo de las diferentes simulaciones que se desarrollaron para la expresión gaussiana, se pudo determinar que el error va disminuyendo conforme se aumente el número de regiones y puntos muestra por región. Lo que demuestra que teniendo 11 regiones y 11 puntos muestra por región se obtendrá una reconstrucción mala, pero al emplear 201 regiones y 201 puntos muestra por región se puede alcanzar la mejor reconstrucción. Esto nos dice que el método que se propone en este texto es capaz de mostrar buenos resultados, para expresiones del tipo gaussianas. Mostrando que el aumento de las regiones y de los puntos muestra por región, provocará una mejor reconstrucción, en donde cabe mencionar que el método funciona.

# Conclusiones

A lo largo de las simulaciones que tenían como objetivo estimar el error absoluto y porcentual, permitió observar un patrón en donde el número de regiones y puntos muestra por región, fue relevante para poder establecer una comparativa y una comprensión del comportamiento de la dinámica de las expresiones empleadas.

Se puede señalar que el patrón para la mayoría de las simulaciones fue constante, es decir mientras mayor fuese el número de regiones y puntos muestra por región, menor sería el error, y en caso contrario al momento de que se emplearon pocas regiones y puntos muestra por regón, el error se incremento considerablemente. Todo esto puede ser observado y apreciado en la sección que versa sobre la estimación de los errores absoluto y porcentual.

La estimación de los errores absoluto y porcentual, nos permitió conocer como método *a priori* que la reconstrucción seria posible, e inclusive permitió hacer predicciones sobre el comportamiento que tendría el proceso de reconstrucción de las funciones exactas empleadas.

Teniendo como base que la estimación del error absoluto y porcentual, dió como resultado la posibilidad de emplear la función estudiada, para buscar una posible reconstrucción empleando el método aquí propuesto.

En donde, cabe mencionar que el patrón que se buscó fue, que a mayor número de regiones y mayor número de puntos muestra por región, mejor sería la reconstrucción empleando este método. Con se puede afirmar que mientras el número de regiones así como el número de puntos muestra por región aumenten, se logrará una mejor reconstrucción.

En todos los casos mostrados en este texto, se pudo demostrar que el método de interpolación seria posible, teniendo como base que la función a ser estudiada fuese en variables separables. En las expresiones exponenciales no se presentó problema alguno tanto en la estimación del error absoluto y porcentual así como en la reconstrucción. Para las expresiones polinomiales

no se presentó problema alguno al momento de estimarse el error absoluto y porcentual, pudiendo demostrar que la reconstrucción es factible. En el caso de las expresiones gaussianas, se pudo determinar el mismo patrón constante en todos las simulaciones desarrolladas, mostrando un error absoluto y porcentual, así como reconstrucciones aceptables. Por otro lado el reto fue encontrar una función en variables separables para el caso de las expresiones senoidales, puesto que no siempre se puede garantizar que la expresión sea en términos de variables separables, y debido a las oscilaciones que se pueden presentar cuando se altera uno de los argumentos de la expresión, resultó un tanto interesante el desarrollo de las simulaciones. En donde se pudo determinar que las simulaciones desarrolladas fueron exitosas para los casos aquí mostrados.

## 4.1 Sumario de contenidos

Para este trabajo, se tiene una serie de capítulos que detallan a grandes rasgos en el contexto matemático, como se desarrolló el método de interpolación en variables separables. Teniendo su principal fundamento en el capítulo 1, donde se habla sobre los conceptos generales, detallando sobre la construcción de las potencias formales, basados en los elementos de la funciones pseudoanalíticas.

Dando paso así a una breve explicación que versa sobre la construcción del método de interpolación en variables separables, donde se puede apreciar de forma más clara la razón de por qué se emplean dos tipos de ecuaciones: se tiene una clara multiplicación y en otra su razón o división. Teniendo esto en cuenta, se puede observar que al emplear funciones matemáticas exactas, es necesario contar con un capítulo de resultados donde se explique la metodología que se siguió para poder obtener, primero, una estimación del error absoluto y porcentual, demostrando que el método es factible.

Con ello, se llega a un capítulo más donde se versa sobre el método de reconstrucción de las funciones matemáticas cuya representación analítica es conocida, demostrando su efectividad para un conjunto de expresiones exponenciales, gaussianas, senoidales y polinomiales.

Mencionado esto, en la parte de la simulación se pudo observar que en la reconstrucción es necesario tener por lo menos 100 regiones y 100 puntos muestra por región para la mayoría de los casos. La parte de la estimación del error se puede emplear para estimar *a priori* la efectividad del método

sobre el cual versa este texto.

## 4.2 Publicaciones internacionales

Durante la presente tesis se llevaron a cabo varios trabajos de investigación y publicaciones, dentro de las cuales cabe mencionar la que se presentó en el 7th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE 2010) en Tuxtla Gutiérrez México, llevado a cabo del 8 al 10 de septiembre del 2010 con el título de "*On the Computational Methods Employed in Two-Dimensional Electrical Impedance Tomography*", donde se presentó un estado del arte sobre los métodos computacionales que se emplean en la tomografía por impedancia eléctrica, presentando ponencia y obteniendo un certificado sobre la conferencia dada.

Posteriormente se tuvo una segunda publicación para congreso Electrical Impedance Tomography 2011, Department Electronic & Electrical Engineering, en la Universidad de Bath en Londres, Inglaterra que tuvo lugar en el mes de mayo del 2011, versando "*On a numerical interpolation technique for obtaining picewise separable-variables conductivity functions*".

Una publicación más tuvo lugar en el World Congress of Engineering 2011 (WCE 2011) que tuvo lugar en Londres Inglaterra, en la fecha del 6 al 8 de julio del 2011, tratando "*On the Construction of Separable-Variables Conductivity Functions, and Their Application for Approaching Numerical Solutions of the Two-Dimensional Electrical Impedance Equation*", presentando una ponencia como lector sobre el tema de DCT-compresnssive Sampling of Frecuency-sparse Audio Signals, del Dr. Mauricio Martinez en colobaración con el M. en C. Rodolfo Moreno.

Durante el curso de la maestría se llevaron acabo varias conferencias una de ella para el Seminario Los miércoles en la cibernética con la Ponencia: "*Sobre los métodos computacionales aplicados en la Tomografía por Impedancia Eléctrica*" el día 2 de Marzo del 2011 y una constancia de participación por la ponencia en la semana de ingeniería el día 15 de Marzo del 2011 versando la ponencia sobre un "*Sistema de Alerta Sísmica en Redes Neuronales*".

### 4.3 Trabajo futuro

En el contexto de este texto desarrollado, se logró crear un método en variables separables para la ecuación de corriente eléctrica, lejos de terminar la investigación se presentan nuevos retos. En donde se pueden tener los siguientes retos:

- Emplear el método de interpolación en variables separables, y fusionarlo con el método de las series de Taylor en potencias formales.
- Probar el método de interpolación para expresiones que no se presenten en variables separables.
- Ampliar la familia de funciones matemáticas usadas en la presente tesis.
- Buscar un método de interpolación para figuras geométricas y usarlo en conjunto con el método de las series de Taylor en potencias formales.
- Trabajar con diferentes tipos de dominios diferentes al círculo unitario.
- Buscar otro método de interpolación tanto para figuras geométricas como para funciones matemáticas exactas.

## Anexo A: Publicaciones internacionales



# On the Computational Methods Employed in Two-Dimensional Electrical Impedance Tomography

M.P. Ramirez T., M. C. Robles G., R. A. Hernandez-Becerril  
 Escuela de Ingeniería de la Universidad La Salle  
 Benjamin Franklin 47, Del. Cuauhtemoc, C.P. 06140,  
 Mexico D.F., Mexico.  
 email: marco.ramirez@lasallistas.org.mx

**Abstract**—We analyze the State of Art in computational methods, employed for analyzing the two-dimensional Electrical Impedance Tomography problem (EIT). We broach an assortment of techniques that may be considered among the most important innovations on this area, emphasizing that the Finite Element Method has played a central role for solving the forward problem of the Electrical Impedance Equation, backbone of EIT. We finally study a novel numerical method, based onto the modern theory of Pseudoanalytic Functions, that could well improve the quality of the reconstructed images, when applied in lieu of the Finite Element Method.

**Keywords**- Electrical Impedance Tomography, Pseudoanalytic Functions.

## I. INTRODUCTION

The Argentine mathematician A. P. Calderon posed in 1980 [1] a boundary valued problem for the Electrical Impedance Equation

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0, \quad (1)$$

where  $\sigma$  represents the conductivity and  $u$  denotes the electric potential. The goal is to approach  $\sigma$  inside some domain  $\Omega$  when the values of the potential  $u$  are given at the boundary  $\Gamma$ . This problem immediately became of great interest for medical imaging, because it could be used as an auxiliary tool for the diagnosis of a wide class of diseases. Beside, when compared to another imaging techniques, the *Electrical Impedance Tomography* (EIT) -as the Calderon problem is actually referred in the medical terminology- possesses the quality of being a noninvasive procedure, due to the low ranges of electrical currents used on it.

Nonetheless, the maximum resolution that the computational methods can achieve is not satisfactory yet for establishing EIT as a standard method for medical image reconstruction. And, in many senses, this is because the inverse problem for equation (1) can not be solved bias a *mathematical extension* of the boundary function  $u|_{\Gamma}$ , as it is possible to do for other boundary value problems of partial differential equations (e.g. the Laplace equation [2]).

The inverse problem for the Electrical Impedance Equation (1) might be approached by solving the forward problem through an iterative procedure, that could be briefly described as follows: Once a conductivity function  $\sigma$  is proposed, we must solve (1) in order to obtain the corresponding electric

potential  $u$  with the highest possible accuracy. Then, a comparison between the approached  $u$  and the collected data will take place, reaching an error function that may be used for modifying  $\sigma$  in order to minimize such error. The procedure will continue until the error function fulfills some minimum criteria.

The first interesting problem lies at the very beginning of the algorithm, because the mathematical complexity of equation (1) is considerable. Moreover, many experts suggested that to achieve the general solution for (1) was impossible (see [3], Chap. 10, Sec. 10.2.3), even for the simplest cases of  $\sigma$  (excluding the constant case, of course). Due to this fact, the numerical methods have played a central role on these matters during the last three decades, being the variations of the *Finite Element Method* some of the most often used, since it had already shown its effectiveness when approaching solutions for a wide variety of partial differential equations of Electromagnetic Theory.

The second interesting question is located around the adjustment of the conductivity function  $\sigma$  when an error is estimated. This is a major challenge since the EIT problem is considered to be very unstable, as well as ill-posed. It is about this second topic that we will start our discussion, because the variety of techniques suggested for better modifying the function  $\sigma$  is extensive, and none of them should be considered less important than the rest. The selection of the presented methods was based onto their clinical applications, and their achieved image resolution, leaving the computational complexity for further discussions.

We will close our study with a brief review of a recently posed method for solving (1), that (despite the fact its application is not as general as the Finite Element Method) opens a new path for solving the Electrical Impedance Equation with considerable grown profits of accuracy.

## II. METHODS FOR APPROACHING THE CONDUCTIVITY FUNCTION $\sigma$

### A. Variations of Sparse Matrix Method

Let us establish a finite set of points  $\{z_k\}_{k=1}^N$  belonging to the boundary  $\Gamma$  of the domain  $\Omega$ , and let  $\{u_k\}_{k=1}^N$  be the values of the electric potential  $u$  at such points. Let the unitary vector  $\vec{n}_k$  be tangent to some point  $z_k \in \{z_k\}_{k=1}^N$ . The Neumann

# On a numerical interpolation technique for obtaining piecewise separable-variables conductivity functions

M. P. Ramirez T., R. A. Hernandez-Becerril, C. M. Robles G.

Facultad de Ingeniería de la Universidad La Salle,

Benjamin Franklin 47, Mexico D.F., C.P. 06140, Mexico.

marco.ramirez@lasallistas.org.mx

## 1 Introduction and Preliminaries

A complete new theory for the Electrical Impedance Equation has raised since K. Astala and L. Paivarinta [1] noticed the biunique relation between the two-dimensional Electrical Impedance Equation

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0, \quad (1)$$

where  $\sigma$  denotes the conductivity and  $u$  is the electric potential, and a Vekua equation [9] of the form

$$\partial_{\bar{z}} W - \frac{\partial_{\bar{z}} f}{f} \bar{W} = 0, \quad (2)$$

where  $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $W = \sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_2} u + i \sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_1} u$ ,  $\bar{W}$  is the complex conjugation of  $W$ :  $\bar{W} = \operatorname{Re} W - i \operatorname{Im} W$ ,  $i$  is the standard imaginary unit  $i^2 = -1$ ,  $f$  is an exponential function

$$f = e^{- \int \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\sigma_1} dx_1 + \int \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\sigma_2} dx_2},$$

and  $z = x_2 + ix_1$ .

Moreover, it was through this relation that in [1] was proved the existence and uniqueness of the solution for the Calderon Problem [3], very often named Electrical Impedance Tomography.

One of the main achievements of this discovering, was to trace a new path for applying the Theory of Pseudoanalytic Function [2] in order to approach the general solution of (2) in analytic form, bias the Taylor series in formal powers:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z),$$

originally called like that by L. Bers [2] when he showed that  $Z^{(n)}(a_n, z_0; z) \rightarrow a_n(z - z_0)^n$  while  $z \rightarrow z_0$ . It appears that it was V. Kravchenko et al. [6], who first expressed the general solution in exact form of (1) for a certain class of  $\sigma$ , using new results in Pseudoanalytic Function Theory [5].

# On the Construction of Separable-Variables Conductivity Functions, and Their Application for Approaching Numerical Solutions of the Two-Dimensional Electrical Impedance Equation

M.P. Ramirez T., IAENG Member, M. C. Robles G., R. A. Hernandez-Becerril

**Abstract**—We analyze a technique for obtaining piecewise separable-variables conductivity functions, employing standard cubic polynomial interpolation. Our goal is to start making possible the practical use of the Pseudoanalytic Function Theory in medical imaging, by allowing the construction of numerical solutions, in terms of Taylor series in formal powers, of the two-dimensional Electrical Impedance Equation.

**Keywords:** Electrical Impedance Equation, pseudoanalytic functions

## I. INTRODUCTION

The analysis of the two-dimensional Electrical Impedance Equation

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0, \quad (1)$$

is the departure point for any proper study of the Electrical Impedance Tomography problem.

As a matter of fact, we will find that the complexity of this governing equation, appears just at the very beginning, when the selection of the mathematical representation for the conductivity  $\sigma$  takes place.

There exists a wide collection of interesting methods for approaching the electric potential  $u$  once  $\sigma$  has been chosen. Many of them are based upon variations of the well known Finite Element Method (see e.g. [9]), which effectiveness has been well proved in many classes of boundary value problems belonging to the Electromagnetic Theory.

Still, most of the known variations of the Finite Element Method present instability when approaching solutions for the inverse problem of (1), and it is not clear yet how to overpass this situation.

An interesting alternative for solving (1) appeared when K. Astala and L. Paivarinta [1] first noticed that the two-dimensional case of (1) was directly related with a special class of Vekua equation [11], and V. Kravchenko et al. [6] posed the structure of its general solution in analytic form by means of Taylor series in formal powers, employing elements of the Pseudoanalytic Function Theory developed by L. Bers [2].

We may also remark that the use of this new mathematical tools allowed to approach the solution of the direct boundary

Facultad de Ingeniería de la Universidad La Salle, A.C., B. Franklin 47, C.P. 06140, Mexico D.F., Mexico. email: marco.ramirez@lasallistas.org.mx

The authors would like to acknowledge the support of CONACyT project 106722, Mexico.

value problem for (1), with high accuracy, once  $\sigma$  was posed as a separable-variables function [4].

These new results are, with no doubt, relevant for better understanding the dynamics of the Electrical Impedance Equation. Thus, a natural path to follow, is to search for the interpolating methods that will allow us to apply these novel techniques, when studying cases situated nearer to the medical imaging engineering.

This work is dedicated to analyze one interpolating method posed in [7], that allows to obtain separable-variables functions  $\sigma$  when a finite set of conductivity values is properly defined within a bounded domain.

Specifically, after reviewing a collection of statements corresponding to the Pseudoanalytic Function Theory, we will discuss how to construct a piecewise polynomial separable-variables function by using standard interpolation methods.

Starting with the case used in [4], for approaching solutions of the boundary value problem for (1), we present the results of performing a basic numerical analysis, in order to test the convergence of the interpolation method. We illustrate the behavior of a certain class of maxima errors, taking into account the number of subregions in which we divided a unitary circle, and the number of points considered within every subregion.

We close with a brief discussion about the validity and use of these preliminary results, emphasizing the necessary work before we can use effectively this interpolation method in medical imaging.

## II. PRELIMINARIES

Following [2], let the pair of complex-valued functions  $(F, G)$  fulfil the condition

$$\text{Im}(\bar{F}G) > 0, \quad (2)$$

where  $\bar{F}$  denotes the complex conjugation of  $F$ . Thus any complex function  $W$  can be expressed by means of the linear combination of  $F$  and  $G$ :

$$W = \phi F + \psi G.$$

Here  $\phi$  and  $\psi$  are real functions. A pair of functions satisfying (2) is named a *Bers generating pair*. Indeed, L. Bers introduced a derivative based upon the generating pair  $(F, G)$ . It has the form

$$\partial_{(F,G)} W = (\partial_z \phi) F + (\partial_z \psi) G, \quad (3)$$

# **First characterization of a new method for numerically solving the Dirichlet problem of the two-dimensional Electrical Impedance Equation**

**M. P. Ramirez T., C. M. A. Robles G. and R. A. Hernandez-Becerril**

Communications and Digital Signal Processing Group, Faculty of Engineering, La Salle University, B. Franklin 47, C.P. 06140, Mexico.

E-mail: [marco.ramirez@lasallistas.org.mx](mailto:marco.ramirez@lasallistas.org.mx)

**Abstract.** Based upon elements of the modern Pseudoanalytic Function Theory, we analyse a new method for numerically approaching the solution of the Dirichlet boundary value problem, corresponding to the two-dimensional Electrical Impedance Equation. The analysis is performed by interpolating piecewise separable-variables conductivity functions, that are eventually used in the numerical calculations in order to obtain finite sets of orthonormal functions, whose linear combinations succeed to approach the imposed boundary conditions. To warrant the effectiveness of the numerical method, we study six different examples of conductivity. The boundary condition for every case is selected considering one exact solution of the Electrical Impedance Equation. The work intends to discuss the contributions of these results into the field of the Electrical Impedance Tomography.

AMS classification scheme numbers: 35M12,35Q05,35Q61,35R30

*Keywords:* Electrical Impedance Equation, Pseudoanalytic Functions, Tomography.

# Bibliografía

- [1] K. Astala, L. Päivärinä (2006), "*Calderon's inverse conductivity problem in the plane*", Annals of Mathematics, Vol. 163, pp-265-299.
- [2] L. Bers (1953), "*Theory of Pseudoanalytic Functions*", IMM, New York University.
- [3] A. Bucio R., R. Castillo-Perez, M.P. Ramirez T., "*On the Numerical Construction of Formal Powers and their Application to the Electrical Impedance Equation*", 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control 2011 (Accepted for publication), 2011.
- [4] A. P. Calderón (1980), "*On an inverse boundary value problem*", Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasil. Mat., pp 65-73.
- [5] H. M. Campos, R. Castillo-Perez, V. V. Kravchenko (2010), "*Construction and use of reproducing kernels for boundary and eigenvalue problems in the plane using pseudoanalytic function theory*", Proceedings of the 13th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Ukraine. IEEE Catalog Number. CFP10761-CDR, ISBN: 978-1-4244-8860-5.
- [6] R. Castillo P., V. V. Kravchenko, R. Resendiz V. (2011), "*Solution of boundary and eigenvalue problems for second-order elliptic operators in the plane using pseudoanalytic formal powers*", Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 34, Issue 4, pp.445-468.
- [7] R. Castillo-Perez., V. Kravchenko, R. Resendiz V. (2011), "*Solution of boundary value and eigenvalue problems for second order elliptic oper-*

- ators in the plane using pseudoanalytic formal powers”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 34, Issue 4.*
- [8] J. Cuan-Lee, R. Martinez-Alonso, R.G. Moreno-Alvarado, J.J. Gutiérrez C., M.P. Ramirez T. (2011), *”On a new electronic design for data acquisition and conditioning for Electrical Impedance Tomography measurements”, Proceeding of the 12th International Conference in Electrical Impedance Tomography EIT 2011, Bath, U.K.*
  - [9] J. Kim, G. Webster, W. J. Tomkins (1983), *”Electrical impedance imaging of the thorax”, Microwave Power, 18:245-257.*
  - [10] V. V. Kravchenko (2009), *”Applied Pseudoanalytic Function Theory”, Series: Frontiers in Mathematics, ISBN: 978-3-0346-0003-3.*
  - [11] V. V. Kravchenko (2008), *”A representation for solutions of the Sturm-Liouville equation”, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 53, No. 8.*
  - [12] V.V. Kravchenko, H. Oviedo.(2007), *”On the explicity solvable Vekua equations and explicit solution of the stationary Schrödinger equations and of the equation  $\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0$  ”, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 52, No. 5, pp. 353-366.*
  - [13] V. V. Kravchenko, M. P. Ramirez T. (2000), *”New exact solutions of the massive Dirac Equation with electric or scalar potential”, Mathematical Methods in the Applied Sciences.*
  - [14] D.L. Powers (2010), *”Boundary Value Problems and Partial Differential Equations”, Academic Press, Elsvier.*
  - [15] M. P. Ramirez T. (2010), *”On the electrical current distribution for the generalized Ohm’s Law”, Submited for plubication to Applied Mathematics and Computation, Elsevier, 2010. Available in electronic format at <http://www.arxiv.com>*
  - [16] M. P. Ramirez T., R. Castillo P., Basic Study of the Boundary Potentials for the Electrical Impedance Equation: A Pseudoanalytic Approach, Physiological Measurements, IOP, 2011 (Enviado para publicación).

- [17] M. P. Ramirez T., C. M. A. Robles G., R. A. Hernandez-Becerril, (2011), *"First characterization of a new method for numerically solving the Dirichlet problem of the two-dimensional Electrical Impedance Equation"*, Physiological Measurements, IOP, 2011 (Enviado para publicación).
- [18] M. P. Ramirez T., M. C. Robles G., R. A. Hernandez-Becerril. (2011), *"On the Construction of Separable-Variables Conductivity Functions, and Their Application for Approaching Numerical Solutions of the Two-Dimensional Electrical Impedance Equation"*, Proceedings of the World Congress on Engineering 2011, Vol. III, ISBN: 978-988-19251-5-2, ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online), U.K.
- [19] M. P. Ramirez T., R. A. Hernandez-Becerril, M. C. Robles G. (2011), *"On a numerical interpolation technique for obtaining picewise separable-variables conductivity functions"*, Proceedings of the 12th International Conference in Electrical Impedance Tomography, Bath, U.K.
- [20] M. P. Ramirez T., M. C. Robles G., R. A. Hernandez-Becerril (2010), *"On the Computational Methods Employed in Two-Dimensional Electrical Impedance Tomography"*, Proceedings of the 7th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), IEEE Catalog Number: CFP09827, ISBN:978-4244-4689-6.
- [21] M. P. Ramirez T., V. D. Sanchez N., O. Rodriguez T., A. Gutierrez S. (2009), *"On the General Solution for Two-Dimensional Electrical Impedance Equation in Terms of Taylor Series in Formal Powers"*, IAENG International journal of Applied Mathematics, 39:4, IJAM\_39\_4\_13, Volume 39 Issue 4, ISSN: 1992-9986 (online version); 1992-9978 (print version).
- [22] I.N. Vekua (1962), *"Generalized Analytic Functions"*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, PergamonPress.
- [23] J.G. Webster (1990), *"Electrical Impedance Tomography"*, Adam Hilger, New York.

# Índice Alfabético

- ( $F, G$ )-derivada, 9
- ( $F_m, G_m$ )-derivada, 11
- Astala, K., 8
- Bers,
  - antiderivada en el sentido de, 11
  - derivada en el sentido de, 9
  - Integral en el sentido de, 11
  - integrales en el sentido de, 14
- Bers, L., 9
- círculo unitario, 16
- Calderón, A.P., 5
- coeficientes característicos del par generador, 10
- complejo,
  - análisis, 6
- computacionales,
  - métodos, 6
- conductividad, 3, 5, 6, 25
- conjugación compleja, 9
- derivadas parciales, 17
- Dirac,
  - ecuación de, 13
- directo,
  - problema, 6
- Ecuación de Impedancia Eléctrica, 5, 13, 19, 25
- Elementos de la Teoría de la Funciones Pseudoanalíticas, 8
- error absoluto,
  - estimación, 28
- error porcentual,
  - estimación, 28
- error,
  - función, 7
- Exponencial,
  - Conductividad, 31
- exponentes formales, 17
- función ( $F, G$ )-pseudoanalítica, 10
- función en variables separables, 8
- Gaussiana,
  - Conductividad, 41
- Gram-Schmidt, ortogonalización de, 18
- Imagenología Médica, 5
- inestable, 6, 20
- integración,
  - trapezoidal, 16
- integrales de línea, 15
- interpolación,
  - método, 36
  - método, 21, 64
- interpolación,
  - en polinomios cúbicos, 25
  - en variables separables, 61

## ÍNDICE ALFABÉTICO 83

- función de, 30
- método, 25, 26
- método, 2, 61
- polinomial cúbica, 18
- técnicas, 15
- invasivo, 1
- inverso,
  - problema, 6
- Kravchenko, V., 8
- Lebesgue,
  - integral de, 18
- Método del Elemento Finito, 6
- Maxwell,
  - ecuaciones de, 13
- númericos,
  - métodos, 6
  - no invasivo, 6
  - no invasivos, 1
  - norma al cuadrado, 18
  - numéricas,
    - aproximaciones, 13
  - ortonormal,
    - base, 19
  - ortonormales,
    - funciones, 17
- Oviedo, H., 8
- Päivärintä, L, 8
- par adjunto, 11
- par generador, 9
- par predecesor, 10
- par sucesor, 10
- pares generadores, 10
- Polinomial,
  - Conductividad, 33
- polinomios cúbicos, 21
- potencial eléctrico, 3, 5, 6
- Rayos X, 2
- representaciones matemáticas analíticas, 7
- secuencia generadora, 10
- Senoidal,
  - Conductividad, 37
- series de Taylor en potencias formales, 8
- Sturm-Liouville,
  - ecuación de, 13
- subdominio, 12
- Teoría Electromagnética, 7
- Tomografía Axial Computarizada, 2
- Tomografía por Impedancia Eléctrica, 2, 6–8, 19
- Tomografía por Resonancia Magnética, 2, 7
- trayectorias de integración, 15
- Ultrasonido, 2
- variables separables,
  - función en, 25
  - funcion de conductividad en, 25
- variables serapables,
  - funcion de, 10
- Vekua,
  - ecuación de, 10, 13