ISCTE School of Technology and Architecture
University Institute of Lisbon

**Departamento de Matemática**

Ano Letivo 2018 - 2019

# Competências Numéricas

**Sérgio Mendes**

# Conteúdo

# 1 Conjuntos de números

Começamos por recordar alguns conjuntos de números.

- Conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1 \ldots\}$$

- Conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- Conjunto dos números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

- Conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$

Os números reais são um pouco mais difíceis de definir. Podemos dizer que são formados por "limites"de sucessões de números racionais. Por exemplo, a sucessão de números racionais

$$1\,;\ \frac{14}{10} = 1,4\,;\ \frac{141}{100} = 1,41\,;\ \frac{1414}{1000} = 1,414\,;\ \frac{14142}{10000} = 1,4142\,;\ \frac{141421}{100000} = 1,41421\,;\ \ldots$$

tem por "limite"o valor $\sqrt{2}$ (confirme com a ajuda de uma calculadora que $\sqrt{2} = 1,41421356237\ldots$), que não é um número racional.

Nestes conjuntos estão definidas operações aritméticas, a mais elementar das quais é a soma. Por exemplo, em $\mathbb{N}$ podemos somar dois elementos e obter ainda um elemento de $\mathbb{N}$, ou seja, se $m, n$ são elementos de $\mathbb{N}$ então $m + n$ é um elemento de $\mathbb{N}$. Podemos também fazer o produto dos dois números $m, n$ e ter a garantia de que $m \times n$ é um elemento de $\mathbb{N}$. Por isso, dizemos que $\mathbb{N}$ é fechado para a soma e para o produto. No entanto, em $\mathbb{N}$ apenas podemos subtrair números menores a números maiores para garantir que o resultado está em $\mathbb{N}$:

$$7 - 4 = 3\ ,\ 3 - 1 = 2\ \text{ mas }\ 8 - 23 = -15$$

e $-15$ não é um elemento de $\mathbb{N}$. Analogamente, em $\mathbb{N}$ só podemos dividir alguns elementos por outros. Por exemplo, $2, 3, 4$ são elementos de $\mathbb{N}$ e $4 \div 2 = 2$ é um elemento de $\mathbb{N}$ mas $3 \div 2$ não é um elemento de $\mathbb{N}$. Nesse caso dizemos que $\mathbb{N}$ não é fechado para a subtração ou para a divisão. Precisamente, para obter um conjunto de números no qual possamos fazer diferenças de quaisquer elementos, é necessário alargar o conjunto $\mathbb{N}$ ao conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, que é constituído não só pelos naturais mas também pelo zero e pelos simétricos dos naturais.

**Definição 1.1.** *Um número diz-se simétrico de outro se a soma dos dois for* $0$*:*

$$n + (-n) = 0$$

*Escrevemos* $-n$ *para denotar o simétrico de* $n$*.*

Notar que o simétrico de um número é único. Por exemplo, $-12$ é o simétrico de $12$ (e vice-versa) porque $12 + (-12) = 0$.

**Observação 1.2.** *O conceito de simétrico permite interpretar a subtração como uma soma:*

$$a - b = a + (-b)$$

*ou seja subtrair o número* $b$ *ao número* $a$ *é o mesmo que somar ao número* $a$ *o simétrico de* $b$*.*

Para obtermos um conjunto de números no qual é possível fazer as quatro operações aritméticas, ou seja, para além da soma, subtração e produto (ou multiplicação) também a divisão, temos de alargar novamente o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e formar os números racionais $\mathbb{Q}$. A divisão está associada ao conceito de inverso de um número diferente de zero.

**Definição 1.3.** *Um número diz-se inverso de outro se o produto dos dois for a unidade* $1$*:*

$$p \times \frac{1}{p} = 1$$

*Escrevemos* $\dfrac{1}{p}$ *ou* $p^{-1}$ *para denotar o inverso de* $p$*.*

O inverso de um número diferente de zero é único. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é o inverso de $2$ (e vice-versa) porque $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

**Observação 1.4.** *O conceito de inverso permite interpretar a divisão como um produto:*

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}$$

*ou seja dividir o número* $a$ *por* $b$ *é o mesmo que multiplicar* $a$ *pelo inverso de* $b$*.*

## 1.1 Os números racionais

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são <u>frações</u> da forma

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

$m$ é designado por <u>numerador</u> e $n$ por <u>denominador</u> da fração. O símbolo "$\in$", usado anteriormente na definição dos racionais, lê-se "pertence". Também existe um símbolo para não pertence, "$\notin$". Por exemplo,

$$-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q} \quad \text{mas} \quad -\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Notar que a fração $\dfrac{m}{n}$ representa a divisão de $m$ por $n$.

**Exemplo 1.5.** *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$,

$$1 = \frac{n}{n}$$

*e*

$$0 = \frac{0}{n}$$

*(Dividir* $n$ *pedaços de um bolo por* $n$ *pessoas dá um pedaçoa a cada um; dividir nenhum bolo por* $n$ *pessoas, cada pessoa não recebe pedaço algum.)*

*Mas...*

$$\frac{m}{0}$$

*não está definido (dividir algo por ninguém não faz muito sentido!) ou seja,* $0$ *nunca pode ser denominador de qualquer fração.*

Mais geralmente, se $k \in \mathbb{Z}$ é um inteiro qualquer, então

$$k = \frac{k}{1} \in \mathbb{Q}$$

ou seja, qualquer inteiro é um número racional. Dizemos que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ e escrevemos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

**Observação 1.6.** *Se um conjunto* $A$ *é subconjunto de outro conjunto* $B$*, ou seja, se*

$$A \subset B$$

*dizemos que* $A$ *está contido em* $B$*. O símbolo "*$\subset$*"designa-se por* <u>*inclusão*</u>*. Também podemos dizer que* $B$ *contém* $A$*, o que se traduz pelo símbolo*

$$B \supset A$$

*Dizer que* $A$ *está contido em* $B$ *é o mesmo que dizer: todo o elemento* $x$ *que pertence a* $A$ *também pertence a* $B$*:*

$$\textit{se } \ x \in A \ \textit{ então } \ x \in B \tag{1.1}$$

*Há ainda uma forma simbólica de representar (1.1):*

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

*O símbolo "*$\Rightarrow$*"representa a implicação. Por exemplo,*

$$p \Rightarrow q$$

*pode ler-se "*$p$ *implica* $q$*"ou "se* $p$ *então* $q$*". Em particular, temos as seguintes inclusões de conjuntos:*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Regra: Uma fração $\dfrac{m}{n}$ representa um número inteiro se $n$ for divisor de $m$

Notar que, dizer que $n$ é um divisor de $m$ é o mesmo que dizer que $m$ é um múltiplo de $n$, isto é,

$$m = kn$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

**Exemplo 1.7.** *6 é múltiplo de 3, uma vez que podemos decompor 6 no seguinte produto*

$$6 = 2 \times 3 \tag{1.2}$$

*Neste caso, $m = 6$, $n = 3$ e $k = 2$. Tabém podemos dizer que 3 é divisor de 6. Notar que, da equação (1.2), concluímos que 6 é também múltiplo de 2, ou seja, 2 é também divisor de 6.*

Como surgem os números racionais? Os números racionais surgem naturalmente quando pretendemos dividir a unidade em várias partes iguais. Vejamos alguns casos concretos.

Consideremos como unidade uma pizza e suponhamos que a dividimos em 4 partes iguais. As figuras seguintes representam várias frações da pizza total: $\dfrac{1}{4}$ de pizza, ou seja, uma das quatro partes em que foi dividida, $\dfrac{2}{4}$ de pizza, ou seja, duas das quatro partes, $\dfrac{3}{4}$ de pizza e, finalmente, $\dfrac{4}{4}$ de pizza que representa a totalidade da pizza, isto é, a unidade (recorde que $\dfrac{4}{4} = 1$, uma vez que o numerador e o denominador são iguais).

$\frac{1}{4}$ de pizza $\quad$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ de pizza $\quad$ $\frac{3}{4}$ de pizza $\quad$ $\frac{4}{4} = 1$ de pizza

Note que, a partir da figura, percebemos que é possível representar o mesmo número racional de diversas maneiras. Já vimos que $\dfrac{4}{4}$ representa a unidade. Outro exemplo é $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ Tais frações dizem-se equivalentes.

**Definição 1.8.** *Duas frações dizem-se equivalentes se representam o mesmo número, ou seja*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

O símbolo "$\Leftrightarrow$"designa-se por equivalência e lê-se "se, e só se". É com ele que separamos os dois membros de uma equação ou de uma inequação, como veremos mais à frente no curso. Formalmente, uma equivalência é uma dupla implicação, ou seja

$$p \Leftrightarrow q \quad \text{significa} \quad (p \Rightarrow q \ \text{ e } \ q \Rightarrow p)$$

**Exemplo 1.9.**

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \times 2 = 1 \times 4$$
$$\frac{9}{6} = \frac{12}{8} \Leftrightarrow 8 \times 9 = 6 \times 12 = 72$$
$$\frac{20}{5} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3 \times 20 = 4 \times 15 = 60$$

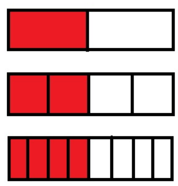
Procuremos um modelo geométrico para representar frações equivalentes. As três frações seguintes são equivalentes

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

uma vez que

$$4 \times 1 = 2 \times 2 \ \text{ e } \ 8 \times 2 = 4 \times 4$$

A figura abaixo permite interpretar este conceito de frações equivalentes. As partes sombreadas indicam sempre a mesma grandeza, apesar de se dividir a unidade (aqui representada por um retângulo) primeiro em 2 partes, depois em 4 partes e finalmente em 8 partes:



$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

Notar que o processo de obter as várias frações equivalentes consiste em multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo valor

$$\frac{1}{2} \curvearrowright^{\times 2} \frac{2}{4} \curvearrowright^{\times 2} \frac{4}{8}$$

Regra: Obtemos frações equivalentes se multiplicarmos o numerador e o denominador pelo mesmo valor $n$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n} = \frac{an}{bn}$$

ou então, se $k$ é um fator comum ao numerador e denominador, $a = ks$ e $b = kr$, obtemos uma fração equivalente dividindo o numerador e o denominador por $k$:

$$\frac{a}{b} = \frac{ks}{kr} = \frac{s}{r}$$

Também podemos obter frações equivalentes dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo valor:

$$\frac{4}{8} \overset{\div 2}{\curvearrowright} \frac{2}{4} \overset{\div 2}{\curvearrowright} \frac{1}{2}$$

Note que estre as várias frações equivalentes,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

a que representa menor numerador e menor denominador é $\frac{1}{2}$. Dizemos que é uma fração irredutível, porque não é possível dividir mais o numerador e o denominador por um fator comum a ambos.

**Definição 1.10.** *A fração $\frac{a}{b}$ diz-se irredutível se $a$ e $b$ não tiverem divisores comuns. Nesse caso, também dizemos que $a$ e $b$ são primos entre si.*

**Exemplo 1.11.** *A fração $\frac{60}{40}$ não é irredutível. Decompondo* 60 *e* 40 *em fatores:*

$$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times 3 \times \mathbf{5} \tag{1.3}$$

$$40 = 4 \times 10 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times 2 \times \mathbf{5} \tag{1.4}$$

*concluimos que* 2 *é divisor de* 60 *e de* 40*. Então, dividindo o numerador e denominador por* 2 *obtemos uma fração equivalente*

$$\frac{30}{20}$$

*que ainda não é irredutível! Para ser irredutível temos que dividir pelo máximo divisor comum, que neste caso é, como se percebe nos números a bold em (1.3) e (1.4):*

$$\mathbf{2 \times 2 \times 5 = 20}$$

*Finalmente, dividindo* 60 *por* 20 *e* 40 *também por* 20*, obtemos*

$$\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

*sendo* $\frac{3}{2}$ *uma fração equivalente irredutível.*

### Representação dos números racionais

Há duas maneiras de representar os números racionais: através de frações, como vimos até aqui, e representação decimal. Voltando há analogia com as pizzas, suponhamos que pretendemos dividir uma pizza por três pessoas em três partes iguais:

$\frac{1}{3}$ de pizza

Se tentarmos fazer a divisão de 1 por 3 (à mão ou usando uma calculadora), obtemos:

$$\frac{1}{3} = 0,333333333333\ldots = 0,(3)$$

ou seja, os 3's à direita da vírgula repetem-se indefinidamente. Para indicar essa repetição escrevemos $\frac{1}{3} = 0,(3)$. Dizemos que a representação decimal de $\frac{1}{3}$ é uma dízima infinita periódica. Alguns números racionais admitem uma representação decimal em forma de dízima finita, como por exemplo $\frac{1}{8} = 0,125$. Eventualmente, acrescentando zeros à direita de 5 voltamos a obter uma dízima infinita periódica, onde o dígito que se repete indefenidamente é zero:

$$\frac{1}{8} = 0,125 = 0,1250000000000\ldots = 0,125(0)$$

ou seja, podemos ver as dízimas finitas como um caso especial de dízima infinita periódica. Todos os números racionais são dízimas finitas ou infinitas periódicas.

### Frações próprias e impróprias

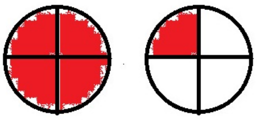
Introduzimos agora os símbolos $>$ (maior), $\geq$ (maior ou igual), $<$ (menor) e $\leq$ (menos ou igual).

**Definição 1.12.** *Uma fração diz-se própria quando o numerador for estritamente menor que o denominador. Caso contrário, ou seja, se o numerador for maior ou igual que o denominador, diz-se imprópria.*

Regra: $\dfrac{m}{n} < 1 \Leftrightarrow m < n$ e $\dfrac{m}{n} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq n$

**Exemplo 1.13.** *A fração* $\frac{5}{4}$ *é imprópria porque* $5 > 4$.

Suponhamos que encomendávamos duas pizzas. Então, $\frac{5}{4}$ representa a seguinte fração das duas pizzas:



$\frac{5}{4}$ de pizza

Regra: Toda a fração imprópria é a soma de um inteiro com uma fração própria, ou seja, se $m > n$, então existem $k, r$ com $r < n$ tais que

$$\frac{m}{n} = k + \frac{r}{n}$$

**Exemplo 1.14.**

$$\frac{5}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

### Comparar frações

Voltando novamente às várias frações de pizza, percebe-se que

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} = 1 \tag{1.5}$$

(qualquer pessoa que goste de pizza prefere 3 pedaços do que apeas 1!)

É fácil comparar frações positivas, com o mesmo denominador: quanto maior o numerador, maior a fração. As frações (1.5) estão por ordem crescente. Também as podemos escrever por ordem decrescente:

$$1 = \frac{4}{4} > \frac{3}{4} > \frac{2}{4} > \frac{1}{4} \tag{1.6}$$

É também fácil comparar frações positivas com o mesmo numerador e denominador diferente: quanto maior o denominador, menor a fração. Por exemplo,

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

De um modo geral, temos:

<u>Regra:</u> Dados números inteiros $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \Leftrightarrow a < c$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \Leftrightarrow c < b$$

Como comparar frações positivascom denominadores diferentes? Simplesmente, reduzimos ao mesmo denominador, obtendo frações equivalentes fáceis de comparar.

<u>Regra:</u> Para comparar $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, fazemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \quad ; \quad \frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

e comparamos as frações equivalentes com o mesmo denominador

$$\frac{ad}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{bc}{bd}$$

**Exemplo 1.15.** *Comparar* $\frac{7}{4}$ *e* $\frac{6}{5}$. *Tem-se:*

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 5}{4 \times 5} = \frac{35}{20} \quad e \quad \frac{6}{5} = \frac{6 \times 4}{5 \times 4} = \frac{24}{20}$$

*Como* $\frac{24}{20} < \frac{35}{20}$ *concluímos que* $\frac{6}{5} < \frac{7}{4}$.

**Exemplo 1.16.** *Comparar* $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{7}{15}$. *Começamos por procurar frações equivalentes, todas com o mesmo denominador:*

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15} \ , \ \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

*Portanto,*

$$\frac{3}{15} < \frac{7}{15} < \frac{10}{15}$$

*ou seja,*

$$\frac{1}{5} < \frac{7}{15} < \frac{2}{3}$$

**Observação 1.17.** *Para representar frações na reta numérica basta reduzi-las todas ao mesmo denominador e considerar a unidade dividida em tantas partes quanto o denominador comum a cada uma das frações equivalentes.*

## 1.2 Operações em $\mathbb{Q}$

Vamos agora definir as 4 operações aritméticas nos racionais: adição (ou soma), subtração, multiplicação (ou produto) e divisão.

### 1) Adição

Começamos com o caso mais simples quando os denominadores são iguais.

**Definição 1.18** (Denominadores iguais). *Dados* $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

**Exemplo 1.19.**

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

E quando os denominadores são diferentes?

**Definição 1.20** (Denominadores diferentes). *Dados* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad+bc}{bd}$$

**Exemplo 1.21.**

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

### 2) Subtração

A subtração é a operação inversa da adição.

**Definição 1.22** (Denominadores iguais). *Dados* $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

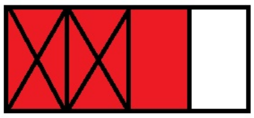
**Definição 1.23** (Denominadores diferentes). *Dados* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

**Exemplo 1.24.**

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

*Podemos ilustrar a operação de subtração anterior através de uma figura, na qual* "$\times$"*representa os* $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *subtraidos a* $\frac{3}{4}$.



Tendo em conta que subtrair é adicionar o simétrico, é válida a seguinte regra prática para a adição de números racionais com o mesmo sinal ou sinais diferentes.

> Regra: (Adição de números racionais)
>
> Para adicionar números com o mesmo sinal, adicionam-se os valores absolutos e mantém-se o sinal.
>
> Para adicionar números com sinais diferentes, subtraem-se os valores absolutos, o menor ao maior, e dá-se ao resultado o sinal do maior em valor absoluto.

**Exemplo 1.25.**

$$(-3) + (-7) = -10$$

$$(+2) + (+5) = +7$$

$$(-5) + (+9) = +4$$

$$-1 + 0,4 = -0,6$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

### 3) Multiplicação

**Definição 1.26** (Multiplicar frações por um inteiro)**.** *Dados* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$,

$$n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$$

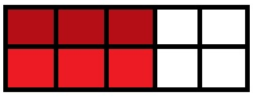
**Definição 1.27** (Multiplicar frações por frações)**.** *Dados* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

**Exemplo 1.28.**

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$

*A figura seguinte representa o produto anterior:*



*A parte colorida, considerando simultaneamente as partes mais escura e mais clara, representa* $\frac{3}{5}$ *do total. A linha horizontal corresponde a dividir a figura em 2 partes, ou seja, a multiplicar por* $\frac{1}{2}$*. Finalmente, o resultado de multiplicar as duas frações corresponde à parte colorida mais escura, ou seja,* $\frac{3}{10}$ *do total.*

### 4) Divisão

A divisão é a operação inversa da multiplicação.

**Definição 1.29** (Dividir frações por um inteiro)**.** *Dados* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \div n = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n} = \frac{a}{b \times n}$$

**Definição 1.30** (Dividir frações por frações)**.** *Dados* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

**Exemplo 1.31.**

$$\frac{3}{2} \div \frac{7}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{14}$$

Por vezes, é útil considerar a divisão de frações como uma fração de duas frações. Nesse caso, tem-se:

(a) $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

(b) $\dfrac{a}{b} \div n = \dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{n}{1}} = \dfrac{a}{bn}$

(c) $n \div \dfrac{a}{b} = \dfrac{\dfrac{n}{1}}{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{nb}{a}$

**Exemplo 1.32.**

$$\frac{1}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{21}$$

$$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{6}$$

$$2 \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$$

Já vimos que dividir é multiplicar pelo inverso. É válida a seguinte regra prática para a multiplicação de números racionais com o mesmo sinal ou sinais diferentes.

> Regra: (Multiplicação de números racionais - regra dos sinais)
>
> O produto de dois números com o mesmo sinal é um número positivo.
>
> O produto de dois números com sinais diferentes é um número negativo.

**Exemplo 1.33.**

$$\left(+\frac{1}{3}\right) \times \left(+\frac{1}{5}\right) = +\frac{1}{15}$$

$$\left(-\frac{6}{7}\right) \times \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{12}{35}$$

$$(-4) \times \left(-\frac{9}{2}\right) = +\frac{36}{2} = +18$$

Salientam-se as seguintes propriedades da aritmética dos números racionais:

1) $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b}$

2) $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{a-a}{b} = \frac{0}{b} = 0$

3) $0 \times \frac{a}{b} = \frac{0 \times a}{b} = \frac{0}{b} = 0$

4) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$

## 2 Potências de expoente inteiro

Seja $a$ um número real. Uma potência de expoente natural é uma forma abreviada de escrever um produto:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ vezes}}$$

Chama-se base da potência ao número real $a$ e expoente ao número natural $n$.

**Exemplo 2.1.** *O número 64 pode ser representado como potência de base 2 e expoente 6, ou como uma potência de base 4 e expoente 3 ou ainda como uma potência de base 8 e expoente 2:*

$$64 = 2^6 = 4^3 = 8^2$$

Convenciona-se que $a^0 = 1$, para qualquer $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

**Definição 2.2** (expoentes negativos)**.** *Dados $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e dado $n \in \mathbb{N}$, define-se:*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

**Exemplo 2.3.**

$$3^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

### Propriedades das potências de expoentes ineiros

Como a potência $0^0$ não está definida, nas propriedades seguintes está subentendido que não podemos ter, simultaneamente, a base e o expoente iguais a zero.

1) $a^p \times a^q = a^{p+q}$, $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Z}$;

2) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$;

3) $a^p \times b^p = (a \times b)^p$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Z}$;

4) $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $p \in \mathbb{Z}$;

5) $(a^p)^q = a^{pq}$, $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

As propriedades anteriores são fáceis de demonstrar, tendo em conta a definição de potência de um número. A título de exemplo, vejamos a propriedade 1):

$$a^p \times a^q = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{p} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{q} = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{p+q} = a^{p+q}$$

Notar que a propriedade 5) torna bastante claro que há uma distinção entre $(a^p)^q$ e $a^{p^q}$. Em geral, são números diferentes.

**Exemplo 2.4.**
$$(2^2)^3 = 2^6 = 64 \neq 2^{2^3} = 2^8 = 256$$

Ainda relativamente à propriedade 5), conclui-se que

$$(a^p)^q = (a^q)^p = a^{pq}$$

no entanto, se $p \neq q$,
$$a^{p^q} \neq a^{q^p}$$

Por exemplo,
$$2^{2^3} = 2^8 \neq 2^{3^2} = 2^9$$

**Observação 2.5.** *Das propriedades enunciadas anteriormente, decorrem os seguintes casos particulares:*

*(i)* $1^n = 1\,,\ \forall n \in \mathbb{Z}$;

*(ii)* $0^n = 0\,,\ \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

*(iii)* $0^0$ *não está definido;*

*(iv)* $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \left(\dfrac{a}{1}\right)^{-n} = a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\,,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ n \in \mathbb{Z}$;

*(v)* $10^n = 1\,\underbrace{0\ldots0}_{n\ zeros}$;

*(vi)* $10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots0}_{n\ zeros}1$;

## A notação científica

Por vezes precisamos de representar números ou muito grandes ou muito pequenos. Como os exemplos seguintes demonstram, não é muito conveniente escrever estes números da maneira habitual.

**Exemplo 2.6.** *O diâmetro da nossa galáxia mede aproximadamente* 100000 *anos-luz (um ano-luz é a distância que a luz percorre durante um ano). Sabendo que um ano-luz mede* $9460730472580,8km$*, qual o diâmetro* $D_{gal}$ *da galáxia em metros? Naturalmente, temos de multiplicar a medida de um ano-luz por* 100000*, e depois converter quilómetros em metros, ou seja, multiplicar novamente por* 1000*, chegando ao valor:*

$$D_{gal} = 9460730472580,8 \times 100000 \times 1000 = 946073047258080000000\,m$$

**Exemplo 2.7.** *A massa do Sol,* $m_{Sol}$*, em quilogramas é aproximadamente*

$$m_{Sol} = 1989000000000000000000000000000\,Kg$$

**Exemplo 2.8.** *O diâmetro $D_{atm}$ de um átomo de hidrogénio em metros é aproximadamente*

$$D_{atm} = 0,0000000000746\, m$$

A notação científica permite escrever qualquer número como o produto de um número compreendido entre 1 (inclusive) e 10 (exclusive) por uma potência de 10:

$$d \times 10^n \;\; 1 \leq d < 10 \;\; (n \in \mathbb{Z})$$

Revisitando os exemplos anteriores, podemos escrever cada um dos números em notação científica, obtendo assim:

$$\begin{aligned} D_{gal} =& 9,4607304725808 \times 10^{20} m \\ m_{Sol} =& 1,989 \times 10^{30} Kg \\ D_{atm} =& 7,46 \times 10^{-11}\, m \end{aligned}$$

### Prefixos do Sistema Internacional de Unidades

Os prefixos do Sistema Internacional de Unidades (abreviadamente, S.I) precedem uma unidade básica para indicar múltiplos ou frações decimais dessa unidade, permitindo omotir a potência correspondente. Vejamos alguns dos exemplos mais importantes.

| Potência | Nome | Prefixo |
|---|---|---|
| $10^{12}$ | Tera | T |
| $10^9$ | Giga | G |
| $10^6$ | Mega | M |
| $10^3$ | Quilo | K |
| $10^2$ | hecto | h |
| 10 | deca | da |
| $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{-12}$ | pico | p |

# 3 Módulo de um número

A cada número real $a \in \mathbb{R}$ podemos associar um número não negativo: o seu módulo (ou valor absoluto). Vejamos como se define.

**Definição 3.1.** *O <u>módulo</u> ou <u>valor absoluto</u> de número real $a \in \mathbb{R}$ define-se como sendo*

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.** *Consideremos $a = 2$. Então, $|2| = 2$, porque $2 > 0$. Por outro lado, se $a = -3$, então $|-3| = -(-3) = 3$, uma vez que $-3 < 0$.*

### Interpretação geométrica

Seja $a \in \mathbb{R}$. Uma vez que $|a| = |-a|$, o valor $|a|$ representa, na reta real, a distância de $a$ e de $-a$ à origem.

Como vimos, se $a \neq 0$ os elementos $a$ e $-a$ designam-se por simétricos. Concluímos que elementos simétricos estão à mesma distância da origem. Notar que a cada número real $a$ podemos associar igualmente um valor não positivo: o simétrico do seu módulo, ou seja, $-|a|$.

**Definição 3.3.** *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ o módulo $|a - b|$ representa a distância, na reta real, entre os pontos $a$ e $b$.*

Naturalmente,

$$|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$$

ou seja, a distância entre $a$ e $b$ é igual à distância entre $b$ e $a$.

### Propriedades dos módulos

As seguintes propriedades são consequência imediata da definição de módulo. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$;
2. $|xy| = |x||y|$;
3. $|x| = |-x|$;
4. Se $y \neq 0$,

   $$|\frac{1}{y}| = \frac{1}{|y|}$$

   e, mais geralmente,

   $$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$$

5. (desigualdade triangular) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

6. $|x-y| \geq ||x| - |y||$

### Equações e inequações com módulos

Seja $a > 0$. Tem-se:

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$;

2. $|x| < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a$;

3. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge x \geq -a$;

4. $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$.

5. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$.

Se $a < 0$, tem-se:

6. $|x| = a$ é uma equação impossível (o valor absoluto de um número não pode ser negativo);

7. $|x| < a$ é uma inequação impossível (o valor absoluto de um número não pode ser menor que um valor negativo);

8. $|x| > a$ é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$ (o valor absoluto de um número é sempre maior que qualquer valor negativo).

**Exemplo 3.4.**

$$\begin{aligned}
|x-2| < 3 &\Leftrightarrow x - 2 < 3 \wedge x - 2 > -3 \\
&\Leftrightarrow x < 3 + 2 \wedge x > -3 + 2 \\
&\Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -1 \\
&\Leftrightarrow -1 < x < 5
\end{aligned}$$

**Exemplo 3.5.**

$$\begin{aligned}
|x + \frac{1}{3}| \geq 2 &\Leftrightarrow x + \frac{1}{3} \geq 2 \vee x + \frac{1}{3} \leq -2 \\
&\Leftrightarrow x \geq 2 - \frac{1}{3} \vee x \leq -2 - \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3} \vee x \leq -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

# 4 Radicais

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

**Definição 4.1.** *Designa-se por raíz de índice $n$ de $a$ todo o número $x$ que satisfaz a equação*

$$x^n = a$$

Se $n$ é ímpar, a equação $x^n = a$ tem uma e uma só solução, denotada por

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Se $n$ é par e $a > 0$, a equação $x^n = a$ tem precisamente duas soluções, uma positiva e uma negativa, denotadas respetivamente por

$$x_1 = \sqrt[n]{a} \ , \ x_2 = -\sqrt[n]{a}$$

Conclui-se assim que:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & , \ n \text{ par} \\ |a| & , \ n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Notar que, se $n$ for par e $a < 0$, a equação $x^n = a$ não tem solução em $\mathbb{R}$, e se $n$ for par ou ímpar, a equação $x^n = 0$ tem como única solução $x = 0$.

Designamos:

- $\sqrt[n]{a}$ – radical
- $a$ – radicando
- $n$ – índice do radical
- $\sqrt{\ }$ – símbolo de radical

No caso particular em que $n = 2$, denotamos simplesmente

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

**Exemplo 4.2.** *O número $\sqrt{4}$ representa o inteiro $\sqrt{4} = 2$. Efetivamente, $2^2 = 4$. Notar, porém, que ao resolvermos a equação $x^2 = 4$ obtemos as duas soluções positiva e negativa*

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} \vee x = -\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

*Notar que:*

$$2^2 = (-2)^2 = 4$$

**Exemplo 4.3.** *O número $\sqrt[3]{-27}$ representa o inteiro $\sqrt[3]{-27} = -3$, uma vez que*

$$(-3)^3 = -27$$

*Além disso, ao resolvermos a equação $x^3 = -27$ obtemos a única solução*

$$x^3 = -27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-27} \Leftrightarrow x = -3$$

**Propriedades dos radicais**
São válidas as seguintes propriedades:

1. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ , $a \geq 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$;
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ , $a, b \geq 0$;
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ , $a \geq 0, b > 0$;
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ , $a \geq 0$;
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$ , $a \geq 0$.

# 5 Expressões algébricas e equações

As equações estão presentes em todas as áreas do conhecimento humano. Inúmeras fórmulas são expressas através de equações, tendo algumas delas ficado famosas ao ponto de fazerem já parte do nosso património cultural. Vejamos alguns exemplo:

• Matemática (e literatura!): Fernando Pessoa ficou seduzido pela fórmula do binómio de Newton, à qual se refere num famosos poema (ver transcrição abaixo):

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ representa as combinações de $n$ elementos $i$ a $i$. (O símbolo $n!$ designa-se por fatorial do número natural $n$ e é dado por $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$, com a convenção $0! = 1$. Por exemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.)

*O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.*
*O que há é pouca gente para dar por isso.*
*óóóó - óóóóóóóóó - óóóóóóóóóóóóóóó*
*(O vento lá fora).*
*Poesias de Álvaro de Campos. Fernando Pessoa.*

• Física: a célebre equação de Einstein, que estabelece a equivalência entre massa e energia, mudou radicalmente a nossa concepção do universo:

$$E = mc^2$$

onde $E$ representa a energia, $m$ a massa de um corpo e $c$ é a velocidade da luz no vazio.

• Geometria (e arquitetura): há muitas fórmulas conhecidas em geometria. Um exemplo elementar é a equação que estabelece a área de um triângulo

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

onde $A$ representa a área do triângulo, $b$ a sua base e $h$ a altura. Outro exemplo, também muito conhecido, é a característica de Euler, que relaciona o números $V$ de vértices, $A$ de arestas e $F$ de faces de um poliedro convexo:

$$V - A + F = 2$$

Por exemplo, um cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces, donde $8 - 12 + 6 = 2$.

• Economia: o PIB (Produto Interno Bruto) é uma medida da riqueza de um país. A sua fórmula é dada por:

$$PIB = C + I + G + X - M$$

onde $C$ representa o consumo privado, $I$ o total de investimentos realizados, $G$ os gastos governamentais, $X$ o volume de exportações e $M$ o volume de importações.

• Biologia: a fórmula de Malthus prevê o crecimento exponencial de uma determinada população de indivíduos

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

onde $t$ representa o tempo, $N(t)$ é o número de indivíduos da população num instante $t$, $N_0$ é o número de indivíduos no instante inicial $t = 0$, $e$ é uma constante designada por número de Neper ($e \simeq 2,7183$) e $r$ é a taxa de crescimento intrínseco da população.

As equações são constituídas por dois membros, separados pelo símbolo "=". Na equação $A = B$, o primeiro membro é dado por $A$ e o segundo membro é dado por $B$:

$$\underbrace{A}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \underbrace{B}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Em inglês, é usada uma terminologia mais sugestiva: left hand side e right hand side ((lado esquerdo e lado direito da igualdade). As equações têm geralmente incógnitas $x, y, z, t, ...$ e o objetivo é determinar o conjunto-solução, ou seja, todos os valores das incógnitas que satisfazem a equação. Cada membro é formado por uma expressão algébrica.

## 5.1 Expressões algébricas

Já vimos como simplificar expressões numéricas, isto é, sequências de números e operações aritméticas (somas, subtrações, multiplicações e divisões). Vimos também que as multiplicações e divisões dão origem aos conceitos de potência e de radical de um número, que por sua vez permitem formar novas expressões numéricas. Vamos agora generalizar estes conceitos de modo a incluir variáveis.

**Definição 5.1.** *Designa-se por expressão algébrica a uma sequência de números, operações e variáveis (ou incógnitas, ou indeterminadas), representadas por letras.*

Podemos classificar as expressões algébricas como sendo:

($a$) Radicias (ou irracionais): têm radicais com incógnitas.

$$\text{Exemplo:} \quad \sqrt[3]{x-1}+\frac{2}{x^2+1}$$

($b$) Racionais: não têm radicais com incógnitas. As expressões racionais podem, por sua vez, ser classificadas em duas subclasses:

($b$.1) Racionais fracionárias: têm incógnitas no denominador.

$$\text{Exemplo:} \quad \sqrt[3]{10}\,x-\frac{3x+y}{x-2}$$

($b$.2) Racionais inteiras (ou polinómios): não têm incógnitas no denominador.

$$\text{Exemplo:} \quad \frac{\sqrt[5]{27}}{8}x^2y-\frac{2}{9}xy^2+3xy-2x+7$$

Dada uma expressão, podemos calcular o seu valor numérico, substituindo a incógnita (ou incógnitas) por números reais e efetuando as operações.

**Exemplo 5.2.** *O valor numérico da expressão algébrica* $\dfrac{7xy}{x-\sqrt{y}}$ *para* $x=-2$ *e* $y=25$ *é:*

$$\frac{7\times(-2)\times 25}{-2-\sqrt{25}}=\frac{-7\times 50}{-7}=50$$

*Mas, por exemplo, para* $x=2$ *e* $y=4$ *não é possível calcular o valor numérico da expressão algébrica porque teríamos*

$$\frac{7\times 2\times 4}{2-\sqrt{4}}=\frac{56}{0}$$

*e, como sabemos, a divisão por zero não está definida.*

Para resolver o problema suscitado pelo exemplo anterior introduzimos o conceito de domínio de uma expressão algébrica como sendo o conjunto dos valores que as incógnitas podem assumir de modo a podermos calcular o valor numérico correspondente. Este conceito será estudado com mais detalhe no capítulo das funções. Para já basta lembrar apenas os dois casos seguintes: não é possível dividir por zero e não é possível extrair uma raíz de índice par de um número negativo. Por exemplo, o domínio da expressão algébrica $\dfrac{1}{x-5}$ será todos os números reais exceto $x=5$. Já a expressão numérica $\sqrt{x+1}$ terá como domínio os números reais $x$ tais que $x+1\geq 0$, ou seja, $x\geq -1$, obtendo-se assim o intervalo $[-1,+\infty[$.

Um termo algébrico de uma expressão algébrica é formado por um número (coeficiente) a multiplicar por uma parte literal (constituída por uma ou mais incógnitas).

**Exemplo 5.3.** *A expressão algébrica* $5\sqrt{x} - 2xy^2 + 4x^{-1}$ *é constituída por três termos:* $5\sqrt{x}$, $-2xy^2$ *e* $4x^{-1}$.

*Nas expressões algébricas radicais ou racionais também chamamos genericamente termos a expressões algébricas mais simples, que por sua vez são constituídos por outros termos. Por exemplo, a expressão algébrica*

$$\sqrt{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} + 3x$$

*é constituída pelos termos* $\sqrt{x^2-1}$, $\dfrac{x+1}{x-1}$ *e* $3x$.

Chamamos termos semelhantes aos termos que têm parte literal igual. Por exemplo, os termos $\frac{1}{5}xy^2$ e $-xy^2$ são termos semelhantes mas o termo $2x^2y$ já não é semelhante a estes. Igualmente, os termos $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ e $\frac{15}{\sqrt{x+1}}$ são semelhantes. Este conceito é importante porque podemos somar e subtrair termos semelhantes (e apenas estes) de modo a obter expressões algébricas mais simples.

**Exemplo 5.4.** *Na expressão algébrica*

$$3x^2y - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x+1} + 4\sqrt{9x} - \frac{7}{x+1} + xy - \frac{1}{2}x^2y$$

*podemos agrupar os termos semelhantes e simplificar a expressão, obtendo:*

$$\begin{aligned} &3x^2y - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x+1} + 4\sqrt{9x} - \frac{7}{x+1} + xy - \frac{1}{2}x^2y = \\ &= (3x^2y - \frac{1}{2}x^2y) + (-2\sqrt{x} + 4\sqrt{9x}) + (\frac{1}{x+1} - \frac{7}{x+1}) + xy \\ &= \frac{5}{2}x^2y + 10\sqrt{x} - \frac{6}{x+1} + xy \end{aligned}$$

*(Notar que* $4\sqrt{9x} = 4\sqrt{9} \times \sqrt{x} = 4 \times 3\sqrt{x} = 12\sqrt{x}$*).*

No caso particular das expressões racionais inteiras, que designaremos preferencialmente por polinómios, os termos são designados por monómios e são caracterizados pelo seu grau. O grau de um monómio é dado pela soma das potências (naturais) da sua parte literal. Assim, um polinómio é uma soma de monómios. Ao maior grau dos monómios que ocorrem num polinómio chamamos grau do polinómio.

**Exemplo 5.5.** *O polinómio* $p = 8x^5 - \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 + 6$ *é constituído pelos monómios* $8x^5$ *(grau* $5$*),* $-\frac{7}{3}x^3$ *(grau* $3$*),* $2x^2$ *(grau* $2$*) e* $6$ *(grau* $0$*). Notar que* $6 = 6x^0$ *e por isso as constantes têm grau zero (exceto a constante* $0$ *que, por convenção, tem grau* $-\infty$*). Como o monómio de maior grau que ocorre no polínómio é de grau* $5$*, dizemos que o polinómio tem grau* $5$.

**Exemplo 5.6.** *O polinómio*

$$p = 2m^3n^4t - 3m^6n^2 + 2m^2n^3t^2 + 12mt + n$$

*tem como incógnitas* $m, n, t$*. É constituído pelos monómios* $2m^3n^4t$ *(grau* $8$*),* $-3m^6n^2$ *(grau* $8$*),* $2m^2n^3t^2$ *(grau* $7$*),* $12mt$ *(grau* $2$*) e* $n$ *(grau* $1$*). Os monómios de maior grau que ocorrem no polinómio são de grau* $8$*. Portanto, o grau do polinómio é* $8$*.*

Podemos fazer dois tipos de operações com expressões algébricas:

(1) Fatorizar em produtos (particularmente útil para determinar os zeros das expressões algébricas, isto é, as incógnitas que ao substituir na expressão numérica produzem o valor numérico 0);

(2) Desenvolver em somas ou subtrações de termos algébricos.

As operações anteriores são inversas uma da outra. Na fatorização procuramos escrever a expressão como um produto de fatores. Por exemplo,

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x^2 + 10x + 25) = x^2(x + 5)^2$$

Para desenvolver em somas e subtrações, ou seja, fazer a operação inversa a fatorizar, multiplicamos termo a termo, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à soma. Por exemplo:

$$(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz$$

São particularmente úteis os chamados casos notáveis da multiplicação:

$(i)$ (quadrado da soma) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(ii)$ (quadrado da diferença) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(iii)$ (diferença de quadrados) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

A demonstração dos casos notáveis é imediata fazendo a multiplicação termo a termo:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

## 5.2 A Equação do primeiro grau

A forma geral da equação do primeiro grau é dada por

$$ax + b = c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, e tem como solução geral

$$x = \frac{c - b}{a}$$

que se obtem por aplicação das seguintes regras básicas, aplicáveis a qualquer tipo de equação:

($i$) A solução de uma equação não se altera se adicionarmos a ambos os membros da equação o mesmo valor;

($i$) A solução de uma equação não se altera se multiplicarmos ambos os membros da equação pelo mesmo valor não nulo.

Assim,

$$\begin{aligned} ax + b = c &\Leftrightarrow ax + b + (-b) = c + (-b) \\ &\Leftrightarrow ax = c - b \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \times (ax) = \frac{1}{a} \times (c - b) \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{a}x = \frac{c - b}{a} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{c - b}{a} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.7.** *A equação* $\dfrac{x}{2} - \frac{2}{3} = -4$ *tem como solução:*

$$\frac{x}{2} - \frac{2}{3} = -4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -4 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{20}{3}$$

## 5.3 A Equação do segundo grau

Começamos por recordar a seguinte regra:

<u>Regra:</u> (Lei do anulamento do produto)

Um produto de fatores é zero se, e só se, pelo menos um deles é zero, ou seja,

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$$

A regra generaliza-se a um produto de $n$ fatores:

$$A_1 ... A_n = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0 \vee A_2 = 0 \vee ... \vee A_n = 0$$

A forma geral da equação do segundo grau é dada por

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Antes de deduzir a fórmula geral que dá a solução da equação, começamos por analisar os casos mais simples em que a equação é incompleta, ou seja, quando $b = 0$ ou $c = 0$.

• Se $c = 0$, podemos fatorizar, colocando $x$ em evidência:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$$

A lei do anulamento do produto diz-nos que um produto de fatores é zero quando pelo menos um deles é zero, ou seja:

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

Notar que tivemos que resolver uma equação do primeiro grau: $ax + b = 0$.

• Se $b = 0$, a equação reduz-se a:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

Se $-\frac{c}{a} < 0$ a equação não tem solução em $\mathbb{R}$. Se $-\frac{c}{a} = 0$, isto é, se $c = 0$, a equação tem uma única solução, $x = 0$. Se $-\frac{c}{a} > 0$,a equação tem duas soluções dadas por:

$$x = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Às soluções da equação chamamos também raízes da equação (porque a solução é dada em geral por radicais, isto é, raízes quadradas).

• Caso geral.

Para deduzir a fórmula resolvente aplicamos as prorpiedades básicas das equações, enunciadas aquando da equação do primeiro grau. Como $a \neq 0$, podemos multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Adicionando a cada membro o valor $(\frac{b}{2a})^2$, obtem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Chamamos discriminante da equação ao valor

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O sinal do discriminante vai determinar a solubilidade da equação do segundo grau, ou seja, se tem ou não solução em $\mathbb{R}$. De fato, como $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, tem-se:

$(i)$ Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes distintas em $\mathbb{R}$;

$(ii)$ Se $\Delta = 0$, a equação tem uma única raíz em $\mathbb{R}$ (dizemos que é uma raíz dupla);

$(iii)$ Se $\Delta < 0$, a equação não tem solução em $\mathbb{R}$.

Para determinar a solução basta agora resolver

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Esta equação tem solução se, e só se, $\Delta \geq 0$ e é dada pela fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Supor que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais $x = \alpha$ e $x = \beta$. Então, podemos fatorizar a equação do seguinte modo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

Aplicando a lei do anulamento do produto concluímos que a solução é dada simplesmente por:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \vee x - \beta = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \vee x = \beta$$

No caso de $\Delta = 0$, dizemos que a equação tem uma raíz dupla, ou seja, $\alpha = \beta$ é a única solução da equação. Nesse caso, a fatorização fica

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

**Exemplo 5.8.** *Consideremos a equação*

$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$

*Pretende-se calcular as suas raízes, isto é a sua solução. Começamos por analisar o sinal do discriminante:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 + 96 = 121 > 0$$

*Logo, a equação tem duas raízes, que podemos calcular pela fórmula resolvente:*

$$6x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \times 6} = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 - 11}{12} \vee x = \frac{-5 + 11}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Como a fórmula resolvente é muito simples de aplicar, por vezes não analisamos o sinal do discriminante e passamos logo ao cálculo.

**Exemplo 5.9.** *A equação*

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

*tem como solução*

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

*Ou seja, $x = 2$ é uma raíz dupla e a equação tem uma única solução.*

**Exemplo 5.10.** *Mas nem sempre a equação do segundo grau tem raízes reais. A equação*

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

*tem discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$, e portanto não tem raízes em $\mathbb{R}$.*

Claro que, em muitos casos, a solução é dada por radicais e não por números racionais.

**Exemplo 5.11.** *A equação*

$$x^2 - x - 1 = 0$$

*tem a seguinte solução:*

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

*Portanto, as raízes são:*

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

A fórmula resolvente pode ser empregue em casos particulares para resolver equações de grau superior.

**Exemplo 5.12.** *A equção*

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = 0$$

*pode ser fatorizada, colocando $x^3$ em evidência:*

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 + x - 2) = 0$$

*Aplicando a lei do anulamento do produto, vem:*

$$\begin{aligned} x^3(x^2 + x - 2) = 0 &\Leftrightarrow x^3 = 0 \vee x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 - 3}{2} \vee x = \frac{-1 + 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

*Apesar de ser uma equação do 5º grau, trata-se de um caso especial que se pôde resolver por aplicação da lei do anulamento do produto e da fórmula resolvente para equações do 2º grau.*

Vejamos outro exemplo com uma técnica diferente.

**Exemplo 5.13.** *A equação*

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

*é do 4º grau, e portanto fora do alcance da fórmula resolvente do 2º grau. No entanto, usando uma técnica que podemos designar por mudança de variável, podemos convertê-la numa equação do 2º grau: fazendo $t = x^2$, e substituindo na equação, obtem-se uma equação do 2º grau em $t$*

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$$

*Podemos agora aplicar a fórmula resolvente a esta nova equação*

$$\begin{aligned} t^2 - 2t - 3 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{2 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{2 - 4}{2} \vee t = \frac{2 + 4}{2} \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{2}{2} = -1 \vee t = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

*Substituindo os valores de $t$ em $x^2 = t$, concluímos que*

$$x^2 = -1 \quad \text{não tem solução em } \mathbb{R}$$

*enquanto que*

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

*Estas são as raízes em $\mathbb{R}$ da equação original do 4º grau.*

Suponhamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são duas raízes não nulas de uma equação do segundo grau. Como já vimos, podemos recuperar a equação a partir das suas raízes:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = 0$$

Ou seja

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

Uma leitura atenta da fórmula anterior permite concluir que o coeficiente de grau 1 é dado pelo simétrico da soma das raízes e o coeficiente de grau zero é dado pelo produto das raízes. Denotando $P = \alpha + \beta$ e $S = \alpha\beta$, obtemos assim a seguinte interpretação da equação do 2º grau:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

**Exemplo 5.14.** *Sabemos que a soma das raízes de uma dada equação do segundo grau é 1 e que o produto das raízes é $-6$. Obter a equação e determinar as suas raízes. De acordo com a discussão anterior, $S = 1$ e $P = -6$. Logo, a equação é dada por*

$$x^2 - x - 6 = 0$$

*Pela fórmula resolvente, vem*

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1+5}{2} = 3 \vee x = \frac{1-5}{2} = -2 \end{aligned}$$

Apesar de existirem fórmulas gerais para resolver equações do 3º e do 4º grau, através de radicais, estas envolvem números complexos e são geralmente pouco usadas na prática. No século XIX, um brilhante matemático francês mostrou que não é possível resolver a equação geral do 5º grau através de radicais (apesar de se poderem resolver, naturalmente, casos particulares). Chamava-se Évariste Galois e morreu muito jovem, com apenas 20 anos, num duelo de espada. Apesar da idade, Galois deixou um impressionante legado matemático conhecido como teoria de Galois. A abordagem de Galois, extremamente inovadora, baseia-se na noção de simetria e continua a inspirar a matemática atual.

## 5.4 Equações racionais e equações com radicais

As equações com radicais e as equações racionais (não polinomiais) são estudadas caso a caso. Importa, no entanto, ter em consideração o seguinte:

- Uma expressão algébrica racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é zero se, e só se, o numerador for zero. Além disso, só podemos considerar os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $q(x) \neq 0$, isto é:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \wedge q(x) \neq 0$$

- Uma expressão algébrica radical da forma $\sqrt[n]{p(x)}$ é zero se, e só se, $p(x) = 0$, para qualquer índice $n \in \mathbb{N}$.
- Por vezes, ao resolver equações com radicais, são encontradas pseudo-soluções, ou seja, valores de $x$ que não são solução da equação original. Deste modo, torna-se sempre necessário verificar as soluções encontradas na equação original (ver exemplos).
- Caso a equação não tenha solução, o conjunto-solução é o conjunto vazio.

Uma notação usual quando determinamos a solução de uma equação é definir $S \subset \mathbb{R}$ como sendo o conjunto solução. Se a equação não tiver solução, dizemos que o seu conjunto-solução é vazio e escrevemos $S = \emptyset$.

**Definição 5.15.** *Uma equação diz-se solúvel se tiver solução, ou seja, se o seu conjunto-solução for não vazio. Caso contrário diz-se insolúvel.*

Vejamos alguns exemplos de equações racionais.

**Exemplo 5.16.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x}$$

*Começa-se por passar tudo para o 1º membro:*

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} = 0$$

*Agora devemos reduzir tudo ao mesmo denominador. Para isso, multiplicamos a primeira fração por $x$ e a segunda fração por $x-1$. Tem-se:*

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{(x+1)x-(x-1)}{x(x-1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 0 \end{aligned}$$

*Um quociente é zero se, e só se, o numerador é zero. Portanto:*

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x(x-1)} = 0 &\Leftrightarrow x^2+1=0\\ &\Leftrightarrow x^2=-1\end{aligned}$$

*Como obtivemos uma condição impossível (um quadrado não pode ser negativo), concluímos que a equação não tem solução, ou seja, $S=\emptyset$.*

**Exemplo 5.17.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\frac{2x^2+1}{x^2+5} = 1$$

*Passando tudo para o primeiro membro, vem*

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+1}{x^2+5} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{x^2+5} - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2+1-x^2-5}{x^2+5} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+5} = 0\\ &\Leftrightarrow x^2-4=0\\ &\Leftrightarrow x^2=4\\ &\Leftrightarrow x=-2 \vee x=2\end{aligned}$$

*Assim, $S=\{-2,2\}$.*

**Exemplo 5.18.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x}{x-2}$$

*Tem-se:*

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x+1} = \frac{x}{x-2} &\Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} - \frac{x}{x-2} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2)-x(x+1)}{(x+1)(x-2)} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{-6}{(x+1)(x-2)} = 0\\ &\Leftrightarrow -6=0\end{aligned}$$

*Como $-6 \neq 0$, então $S=\emptyset$.*

**Exemplo 5.19.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$x - 1 = \frac{2x}{x+1}$$

*Passando tudo para o primeiro membro, vem*

$$\begin{aligned}
x - 1 = \frac{2x}{x+1} &\Leftrightarrow x - 1 - \frac{2x}{x+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1) - 2x}{x+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

*Portanto,* $S = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

Eis alguns exemplos de equações com radicais.

**Exemplo 5.20.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\sqrt{x^2 - 3} = x - 1$$

*Tem-se:*

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - 3} = x - 1 &\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 3})^2 = (x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 3 = x^2 - 2x + 1 \\
&\Leftrightarrow -3 = -2x + 1 \\
&\Leftrightarrow x = 2
\end{aligned}$$

*Substituindo na equação original o valor* $x = 2$*, obtem-se:*

$$\sqrt{2^2 - 3} = \sqrt{1} = 1 = 2 - 1$$

*Logo,* $x = 2$ *é solução da equação, isto é,* $S = \{2\}$

**Exemplo 5.21.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\sqrt{4x^2+9}+9=2x$$

*Tem-se:*

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+9}=2x-9 &\Rightarrow (\sqrt{4x^2+9})^2=(2x-9)^2\\ &\Leftrightarrow 4x^2+9=4x^2-36x+81\\ &\Leftrightarrow 9=-36x+81\\ &\Leftrightarrow 36x=72\\ &\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

*Substituindo na equação original o valor $x=2$, obtem-se:*

$$\sqrt{4\times 2^2+9}+9=\sqrt{25}+9=5+9=14\neq 2\times 2=4$$

*Logo, $x=2$ não é solução da equação, ou seja, $S=\emptyset$.*

Por vezes, pode haver aparentemente duas soluções mas apenas uma delas satisfaz a equação original.

**Exemplo 5.22.** *Determinar o conjunto-solução da equação*

$$\sqrt{1-8x}=x+1$$

*Tem-se:*

$$\begin{aligned}\sqrt{1-8x}=x+1 &\Rightarrow (\sqrt{1-8x})^2=(x+1)^2\\ &\Leftrightarrow 1-8x=x^2+2x+1\\ &\Leftrightarrow x^2+10x=0\\ &\Leftrightarrow x(x+10)=0\\ &\Leftrightarrow x=0\vee x=-10\end{aligned}$$

*Substituindo na equação original o valor $x=0$:*

$$\sqrt{1-8\times 0}=\sqrt{1}=1=0+1$$

*Logo, $x=0$ é solução da equação original. Por outro lado, substituindo na equação original o valor $x=-10$:*

$$\sqrt{1-8\times(-10)}=\sqrt{81}=9\neq -10+1=-9$$

*Portanto, $x=-10$ não é solução da equação original. Assim, o conjunto-solução é $S=\{0\}$.*

## 6 Razões, taxas e proporções

Razões, taxas e proporções são conceitos relacionados entre si. Neste contexto, designamos por grandeza toda a entidade que é suscetível de medida.

**Definição 6.1.** *Uma razão é uma relação entre duas grandezas, expressa como o quociente entre elas.*

Representamos a razão entre uma grandeza $a$ e uma grandeza $b$ como o quociente

$$\frac{a}{b}$$

**Exemplo 6.2.** *Num grupo de* 54 *alunos,* 18 *são rapazes. Qual a razão entre o número de raparigas e o número total de alunos? Podemos obter o número de raparigas subtraindo* 18 *ao total. Assim,*

$$\frac{54-18}{54}=\frac{36}{54}=\frac{9\times 4}{9\times 6}=\frac{2}{3}$$

*Dizemos que a razão é de* 2 *para* 3*, ou seja, que há* 2 *raparigas por cada* 3 *estudantes. Notar que, apesar de podermos representar o número* $\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$ *na forma decimal como*

$$\frac{36}{54}=\frac{2}{3}=0,66666...=0,(6)$$

*ou seja, uma dízima infinita periódica, quando pretendemos determinar a razão entre o número de raparigas e o número total de estudantes, há mais informação em indicar* $\frac{2}{3}$*, porque estamos a comparar* 2 *e* 3 *e não a calcular o valor da divisão de* 2 *por* 3*.*

**Exemplo 6.3.** *Um cesto contém* 8 *laranjas e* 6 *maçãs. Qual a razão de maçãs para laranjas?*

$$\frac{6}{8}=\frac{2\times 3}{2\times 4}=\frac{3}{4}$$

*A razão é de* 3 *para* 4*.*

O caso de uma razão cujo denominador é 100 designa-se por <u>percentagem</u>:

$$\frac{n}{100}=n\%$$

Por exemplo, 10% significa que em 100 unidades de uma grandeza consideram-se 10 unidades:

$$10\%=\frac{10}{100}=0,1$$

Para calcular $n\%$ de uma grandeza $m$ fazemos o produto:

$$n\% \text{ de } m=\frac{n\times m}{100}$$

**Exemplo 6.4.** *Num campeonato regional de natação, uma equipa disputou* 5 *partidas na primeira fase e venceu* 4*. Qual a percentagem de vitórias dessa equipa na primeira fase do campeonato?*

$$x\% \;\; de \;\; 5 = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{100} \times 5 = 4 \Leftrightarrow 5x = 400 \Leftrightarrow x = \frac{400}{5} = 80\%$$

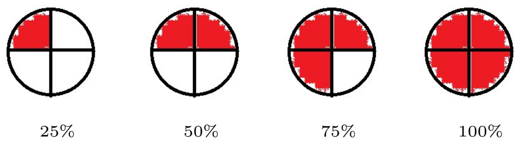
*A equipa venceu* 80% *das provas da primeira fase.*

Voltemos ao exemplo da pizza do capítulo 1. A divisão da pizza em 4 partes iguais pode ser descrita usando percentagens. A unidade, ou seja, $\frac{4}{4}$, corresponde a 100%:

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{100}{100} = 100\%$$

enquanto que

$$\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\% \;\; ; \;\; \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\% \;\; ; \;\; \frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = 75\%$$

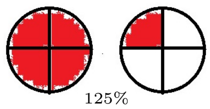



O que acontece quando o numerador é maior que o denominador? Qual o significado de uma percentagem superior a 100%? O seguinte exemplo é ilustrativo. Se encomendarmos duas pizzas, a fração $\frac{5}{4}$ tem o numerador maior que o denominador, o que quer dizer que foi ultrapassada a unidade (1 unidade = 1 pizza = $\frac{4}{4}$), neste caso, em $\frac{1}{4}$:

$$\frac{5}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

Em termos de percentagem, $\frac{5}{4}$ representa 100% mais 25%, ou seja, 125%. De fato,

$$\frac{5}{4} = 1,25 = \frac{125}{100} = 125\%$$



125%

As taxas estão relacionadas com a rapidez de mudança de um determinado fenómeno, ou seja, quantificam a variação de algo que acontece.

**Definição 6.5.** *Uma taxa é uma variação de uma medida a em função da variação de uma medida b.*

**Exemplo 6.6.** *Um carro viaja à velocidade de* $35km/h$*. A velocidade do carro é uma taxa, dada pelo quociente entre a distância percorrida (*$35km$*) no intervalo de tempo de* $1h$*:*

$$velocidade = \frac{dist\hat{a}ncia}{tempo} = \frac{35km}{1h} = 35km/h$$

**Exemplo 6.7.** *Vejamos um problema sobre taxas de juro. Uma loja vende um portátil a pronto pagamento por 450€, ou a 5 prestações mensais, ficando o custo final em 654€. Sabendo que a diferença entre o pronto pagamento e o pagamento a prestações se deve exclusivamente aos juros, qual a taxa mensal de juros aplicada?*

*Fazendo a diferença, obtem-se*

$$654 - 450 = 204$$

*e, dividindo por 5 meses, vem*

$$\frac{204}{5} = 40,8$$

*Como 450 representa 100% do valor, precisamos de saber qual a percentagem de* $40,8$ *em 450:*

$$\frac{x}{100} \times 450 = 40,8 \Leftrightarrow x = \frac{40,8 \times 100}{450} \simeq 9,07$$

*Concluímos que a taxa de juro mensal é de aproximadamente* $9,07\%$*.*

**Definição 6.8.** *Uma proporção é uma igualdade entre duas razões:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Duas grandezas $x, y$ dizem-se <u>diretamente proporcionais</u> se existe uma constante $k$ tal que

$$\frac{y}{x} = k \Leftrightarrow y = kx$$

Ou seja, se $x$ aumenta, $y$ aumenta na mesma proproção, se $x$ diminui, $y$ diminui na mesma proporção. Duas grandezas $x, y$ dizem-se <u>inversamente proporcionais</u> se existe uma constante $k$ tal que

$$xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

Ou seja, se $x$ aumenta, $y$ diminui na mesma proproção, se $x$ diminui, $y$ aumenta na mesma proporção.

| tempo (em minutos) | altura (em cm) |
|---|---|
| 15 | 50 |
| 30 | 100 |
| 45 | 150 |

**Exemplo 6.9.** *A tabela seguinte regista a subida da maré numa praia:*

*Quando o tempo duplica, ao fim de* 30 *minutos, o nível da água também duplica, passando para* $100cm$*. Quando o tempo triplica, ao fim de* 45 *minutos, o nível da água também triplica, passando para* $150cm$*. Ou seja:*

$$\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \ e \ \frac{30}{45} = \frac{100}{150} = \frac{1}{2}$$

*O tempo $t$ e a subida da maré $m$ são grandezas diretamente proporcionais, relacionadas pela fórmula*

$$m = \frac{10}{3}t$$

*A fórmula anterior é determinada resolvendo:*

$$50 = k15 \Leftrightarrow k = \frac{50}{15} = \frac{5 \times 10}{5 \times 3} = \frac{10}{3}$$

**Exemplo 6.10.** *Uma escola instituiu um prémio literário, selicionando até* 4 *finalistas, de acordo com a seguinte tabela:*

| $n^o$ de finalistas | valor (em euros) por finalista |
|---|---|
| 1 | 2400 |
| 2 | 1200 |
| 3 | 800 |
| 4 | 600 |

*De acordo com a tabela conclui-se que quando o $n^o$ de finalistas duplica, o valor do prémio cai para metade por finalista; quando o $n^o$ de finalistas triplica, o valor do prémio cai para a terça parte por finalista; quando o $n^o$ de finalistas quadruduplica, o valor do prémio cai para a quarta parte por finalista. Ou seja, o valor do prémio $y$ e o $n^o$ de finalistas $x$ são inversamente proporcionais, estando relacionados pela fórmula*

$$y = \frac{2400}{x}$$

Um exemplo importante de proporções é dado pela escala associada a cada mapa. Os mapas são uma representação da realidade. Para representar distâncias muito grandes, na ordem de centenas ou milhares de quilómetros, utiliza-se uma escala que converte quilómetros em centímetros ou mesmo milímetros, consoante o que se pretende representar (região, país, continente, planisfério, etc).

**Exemplo 6.11.** *Um determinado mapa contém uma escala que indica*

$$7cm : 10km$$

*(lê-se "7cm para 10km"). Significa portanto que 7cm no mapa correspondem a 10km no mundo real. Supondo que a distância entre duas cidades é de 50km, quanto distam essas cidades, em centímetros, no mapa?*

$$\frac{7cm}{10km} = \frac{d}{50km} \Leftrightarrow \frac{50km \times 7cm}{10km} = 7 \times 5 = 35cm$$

Existe uma regra prática, designada por regra de três simples, onde, dos quatro elementos que compõe uma proporção, três são conhecidos e o quarto é uma incógnita. Escrevemos:

| | | |
|---|---|---|
| 7cm | —– | 10km |
| d | —– | 50km |

A leitura da tabela anterior é: $7cm$ está para $10km$ assim como $d$ (a incógnita) está para $50km$. Obtemos assim

$$7cm \times 50km = d \times 10km \Leftrightarrow d = \frac{7cm \times 50km}{10km} = 35cm$$

No exemplo 6.4, podemos usar a seguinte regra de três simples, tendo em conta que 5 representa a totalidade, ou seja, 100% dos jogos da primeira fase:

| | | |
|---|---|---|
| 5 | —– | 100% |
| 4 | —– | x |

Portanto,

$$x = \frac{4 \times 100}{5} = 80\%$$

**Exemplo 6.12.** *Um ano-luz é a distância que a luz percorre (no vazio) durante um ano. Quantos quilómetros são 1 ano-luz, sabendo que a velocidade da luz no vazio é aproximadamente $c = 299792,5km/s$?*

*Precisamos de saber quantos segundos tem um ano. Tendo em conta que um ano tem 365,25 dias (daí a necessidade de introduzir um ano bissexto de 4 em 4 anos com 366 dias), que cada dia tem 24 horas e que cada hora tem $1h = 60 \times 60 = 3600s$, um ano terá*

$$1\ ano = 365,25 \times 24 \times 3600 = 31557600s$$

*Assim,*

$$\frac{299792,5km}{1s} = \frac{x}{31557600}$$

*ou seja*

$$x = 299792,5 \times 31557600 = 9460731798000 \simeq 9,46 \times 10^{12}km$$

# 7 Sistemas de equações lineares

Designamos por equação linear nas variáveis (incógnitas) $x, y$ a uma equação da forma

$$ax + by = c$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. O número real $a$ é o coeficiente da variável $x$, o real $b$ é o coeficiente da variável $y$ e $c$ é o termo independente.

Muitos problemas consistem na procura da solução simultânea de várias equações lineares, ou seja, de sistemas de equações lineares.

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas $x, y$ tem a forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Uma solução do sistema anterior é um par ordenado $(x_0, y_0)$ que satisfaz as duas equações que constituem o sistema:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$$

**Exemplo 7.1.** *O sistema*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

*tem* $(x, y) = (2, -1)$ *como solução. Efetivamente,*

$$\begin{cases} 2 \times (2) + (-1) = 3 \\ (2) + 3 \times (-1) = -1 \end{cases}$$

*Notar que, neste caso, a solução é única.*

## 7.1 Resolução de sistemas de equações lineares

No exemplo 7.1 mostrou-se que $(x, y) = (2, -1)$ é solução do sistema. Claro que a pergunta fundamental é: dado um sistema de equações lineares, como calcular a sua solução? Há essencialmente dois métodos elementares:

1. Método por eliminação.

   Este método é baseado nas seguintes regra básica

2. Método por substituição.

   Este método consiste simplesmente em resolver o sistema relativamente a uma das variáveis e substituir na outra equação (ou equações).

Como ilustração dos métodos anteriores, vamos resolver o sistema do exemplo 7.1.

Regra:

Se substituirmos uma equação do sistema pela sua soma com um múltiplo de outra equação, obtemos um sistema equivalente.

**Exemplo 7.2.** *Considere-se o sistema*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

*Comecemos pelo método 1, ou seja, por eliminação. Notar que podemos multiplicar a 2ª equação por $-2$, obtendo um sistema equivalente:*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -2x - 6y = 2 \end{cases}$$

*Somando as duas equações obtemos:*

$$\underbrace{(2x + y) + (-2x - 6y)}_{\text{1º membro}} = \underbrace{(3) + (2)}_{\text{2º membro}} \Leftrightarrow \underbrace{-5y = 5}_{\text{nova equação}}$$

*De acordo com a regra anterior, podemos substituir a 2ª equação (ou a 1ª) pela nova equação, obtendo um novo sistema equivalente:*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -5y = 5 \end{cases}$$

*Agora, basta resolver a última equação em ordem à variável $y$ e depois substituir na 1ª equação para encontrarmos a solução:*

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -5y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (-1) = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

*Apliquemos agora o método 2, isto é, o método de substituição. Resolvendo a 1ª* *equação em ordem a $y$ e substituindo na $2^a$ equação obtemos:*

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ x+3(3-2x)=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ x+9-6x=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ -5x=-10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2(2) \\ x=2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Note-se que, no método de substituição, é indiferente a escolha da variável e da equação. (Podemos resolver a 1ª em ordem a $x$ e substituir na 2ª, ou a 1ª em ordem a $y$ e substituir na 2ª, ou a 2ª em ordem a $x$ e substituir na 1ª, ou a 2ª em ordem a $y$ e substituir na 1ª.)

Podemos classificar os sistemas de equações lineares quanto à existência de solução do seguinte modo:

$$\begin{cases} \text{Sistema Possível} \begin{cases} \text{Sistema Possível e Determinando} \,(SPD) \\ \\ \text{Sistema Possível e Indeterminado} \,(SPI) \end{cases} \\ \\ \\ \text{Sistema Impossível} \,(SI) \end{cases}$$

Um sistema é possível se tiver solução. Se a solução for única, diz-se sistema possível e determindado (abreviadamente, SPD); se tiver mais de uma solução diz-se sistema possível e indeterminado (abreviadamente, SPI). Se um sistema não tiver solução, diz-se impossível (abreviadamente, SI).

Já vimos um exemplo de um sistema com uma única solução, istop é, de um SPD. Vejamos agora um exemplo de um sistema com mais de uma solução ou SPI.

**Exemplo 7.3.** *O sistema*

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$$

*é equivalente a:*

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 6x-3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 3\times(2x-y)=3\times 3 \end{cases}$$

*ou seja,*

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3\times(2x-y)=3\times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x-y=3$$

*O sistema resume-se a uma única equação!*

*Resolvendo em ordem à variável $y$, vem:*

$$\begin{aligned} 2x - y = 3 &\Leftrightarrow -y = -2x + 3 \\ &\Leftrightarrow y = 2x - 3 \end{aligned}$$

*O sistema tem portanto mais do que uma solução. Cada vez que damos um valor a $x$ (variável independente) obtemos um valor de $y$ (variável dependente). A tabela seguinte apresenta algumas soluções do sistema:*

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-3$ |
| $1$ | $-1$ |
| $1/2$ | $-2$ |
| $3/2$ | $0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

*Concluímos que o sistema tem na realidade infinitas soluções, dados por todos os pares $(x, y)$ que stisfazem a equação da reta $y = 2x - 3$.*

**Exemplo 7.4.** *Considere-se o sistema*

$$\begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

*Podemos resolver pelo método de eliminação, multiplicando a $2^a$ equação por 2 e somando à $1^a$ equação de modo a obter*

$$(4x - 2y) + (-4x + 2y) = (-2) + (4) \Leftrightarrow 0 = 2$$

*o que é impossível. Concluímos que o sistema é impossível, ou seja, não tem solução.*

*Vamos resolver o mesmo sistema pelo método de substituição. Resolvendo em ordem a $y$ na $2^a$ equação e substituindo na $1^a$ equação, vem:*

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ -2x + y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2(2x + 2) = -2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4x - 4 = -2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

*O sistema é impossível porque, naturalmente, $-4 \neq -2$.*

## 7.2 Modelação matemática

Chama-se modelação matemática à tradução, em liguagem matemática, e sua resolução, de um problema do mundo real. Os sistemas de equações lineares são exemplo de uma classe de problemas cuja modelação é bastante simples e com muitas aplicações a situações reais do quotidiano.

**Exemplo 7.5.** *O valor do ingresso numa picina é de* 2€ *para crianças e* 3€ *para adultos. Num determinado dia,* 120 *utentes frequentaram a piscina, tendo sido cobrado um total de* 270€ *de entradas. Quantas crianças e quantos adultos frequentaram a piscina nesse dia?*

*Designemos por* $a$ *o número de adultos e por* $c$ *o número de crianças que frequentaram a piscina nesse dia. Então, a equação*

$$a + c = 270$$

*traduz o fato de o número total de utentes (ou seja, adultos e crianças) ser de* 120*. Por outro lado, a equação*

$$3a + 2c = 270$$

*diz-nos que cada adulto pagou* 3€ *e cada criança pagou* 2€ *de ingresso, num total de* 270€*. A solução do problema consiste em resolver o seguinte sistema de duas equações lineares nas incógnitas* $a, c$*:*

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a + c = 120 \\ 3a + 2c = 270 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 - c \\ 3(120 - c) + 2c = 270 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 - c \\ 360 - 3c + 2c = 270 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 - c \\ -c = 270 - 360 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 - c \\ -c = -90 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 120 - 90 \\ c = 90 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 \\ c = 90 \end{cases}
\end{aligned}$$

*Concluímos que nesse dia frequentaram a piscina* 90 *crianças e* 30 *adultos.*

**Exemplo 7.6.** *Uma quinta agrícola é especializada na produção de galinhas e vacas. O filho do produtor fez uma contagem e concluiu que, no total dos animais, há* 96 *cabeças e* 242 *patas. Quantas galinhas e quantas vacas tem a quinta?*

*Designemos por* $G$ *o número de galinhas e por* $V$ *o número de vacas. A equação*

$$G + V = 96$$

*diz-nos o fato óbvio de que cada animal tem uma cabeça, enquanto que a equação*

$$2G + 4V = 242$$

*traduz uma diferença anatómica entre galinhas e vacas: as primeiras têm duas patas e as segundas têm quatro. A solução do problema consiste em resolver o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas $G, V$:*

$$\begin{cases} G + V = 96 \\ 2G + 4V = 242 \end{cases}$$

*Multiplicando a 1ª equação por $-2$ e somando à segunda, obtem-se:*

$$(-2G - 2V) + (2G + 4V) = (-192) + (242) \Leftrightarrow 2V = 150 \Leftrightarrow V = 75$$

*Substituindo a 2ª equação por esta última, obtem-se o sistema equivalente:*

$$\begin{aligned} \begin{cases} G + V = 96 \\ 2G + 4V = 242 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} G + V = 96 \\ V = 75 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} G = 96 - 75 \\ V = 75 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} G = 21 \\ V = 75 \end{cases} \end{aligned}$$

*Assim, a quinta tem 21 galinhas e 75 vacas.*

**Exemplo 7.7.** *No mercado, há duas semanas atrás, o custo de 2kg de maçãs e 1kg de bananas era de 3€. E, na semana passada, 6kg de maçãs e 3kg de bananas custaram 15€. Qual o preço por quilograma de maçãs e de bananas?*

*Seja $m$ o preço de 1kg de maçãs e seja $b$ o preço de 1kg de bananas. Temos que resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 2m + b = 3 \\ 6m + 3b = 15 \end{cases}$$

*Por substituição, vem:*

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = 3 - 2m \\ 6m + 3(3 - 2m) = 15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2m \\ 6m + 9 - 6m = 15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2m \\ 9 = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

*Obtivemos um sistema impossível. Podemos tentar dar uma explicação para este resultado. Provavelmente os preços alteraram-se de uma semana para a outra, pelo que não é possível determinar os valores de $m$ e $b$ através do sistema de equações lineares.*

**Exemplo 7.8.** *Consideremos o problema anterior, mas com a seguinte alteração: o valor da primeira compra foi de 5€ (e não de 3€). Neste caso, o sistema fica:*

$$\begin{cases} 2m + b = 5 \\ 6m + 3b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2m \\ 6m + 15 - 6m = 15 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2m \\ 15 = 15 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow b = 5 - 2m.$$

*ou seja, o sistema resume-se a uma única equação. As soluções são todos os pares* $(m, b)$ *que satisfazem a equação*

$$2m + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - 2m$$

*Dando valores a* $m$*, obtemos o respetivo valor de* $b$*:*

| $m$ | $b$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 3 |
| 3 | 1 |

*Claro que fazendo, por exemplo,* $m = 3$ *o problema deixa de ter uma interpretação real porque viria* $b = -1$ *e o custo não pode ser negativo. Notar que a 2ª equação indica apenas o seguinte:*

$$6m + 3b = 15 \Leftrightarrow 3 \times (2m + b) = 3 \times 5$$

*isto é, ao comprarmos o triplo das quantidades de maçãs e bananas, pagamos o triplo* ($3 \times 5 = 15$€)*, o que é verdade, independentemente do preço de cada um dos frutos.*

A teoria que apresentámos sobre resolução de sistemas de equações lineares é válida para qualquer número de equações e de incógnitas. No entanto, a sua resolução fica mais demorada com os dois métodos descritos anteriormente. É necessário introduzir técnicas novas, baseadas na teoria das matrizes (tal como fizemos na aula a título de exemplo). Vamos resolver um sistema de 3 equações e três incógnitas mas num caso suficientemente simples para os métdodos anteriores serem de fácil aplicação.

**Exemplo 7.9.** *Consideremos o seguinte problema do peso. Existe num armazém* 3 *sacos de arroz. O primeiro e o segundo pesam juntos* $110kg$*, o primeiro e o terceiro pesam juntos* $120kg$ *e o segundo e terceiro pesam juntos* $112kg$*. Quanto pesa cada saco?*

*Seja* $x_1$ *o peso do primeiro saco,* $x_2$ *o peso do segundo saco e* $x_3$ *o peso do terceiro saco. Os dados anteriores traduzem-se no seguinte sistema de equações lineares, que* *podemos resolver por substituições sucessivas:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 110 \\ x_1 + x_3 = 120 \\ x_2 + x_3 = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 110 - x_1 \\ x_1 + x_2 = 120 \\ 110 - x_1 + x_3 = 112 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ x_1 + x_3 = 120 \\ -x_1 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ x_1 = 120 - x_3 \\ -(120 - x_3) + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ -120 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ 2x_3 = 132 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -- \\ x_3 = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ x_1 = 120 - 66 \\ x_3 = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 110 - 54 \\ x_1 = 54 \\ x_3 = 66 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 54 \\ x_2 = 56 \\ x_3 = 66 \end{cases}$$

*(Notar que, para simplificar, representámos por $--$ as equações que permanecem inalteradas num dado passo da resolução).*

# 8 As funções logaritmo e exponencial

O objetivo deste capítulo é introduzir as funções exponencial e logaritmo e as suas propriedades.

## 8.1 Generalidades sobre funções

Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Uma <u>correspondência</u> entre $A$ e $B$ é uma regra que a cada elemento de $A$ associa um elemento de $B$. O conjunto $A$ designa-se por conjunto de partida e o conjunto $B$ por conjunto de chegada. Escrevemos

$$r : A \to B$$

para designar uma correspondência $r$ que tem $A$ como conjunto de partida e $B$ como conjunton de chegada. Se $a \in A$, denotamos por $b = r(a) \in B$ um elemento de $B$ que lhe corresponda por $r$. Nesse caso, $b$ diz-se uma imagem por $r$ de $a$. Outra notação usual é $r : a \mapsto b$ ou simplesmente $a \mapsto b$.

**Exemplo 8.1.** *Considere-se o conjunto:*

$$A = \{Portugal\,, \ Reino\ Unido\,, \ Japão\,, \ Brasil\}$$

*e o conjunto*

$$B = \{Lisboa\,, \ Londres\,, \ Porto\,, \ São\ Paulo\,, \ Hamamatsu\,, \ Brasília\,, \ Tóquio\,, \ Bristol\}$$

*É fácil estabelecer uma correspondência entre $A$ e $B$. Seja $r$ a correspondência que a cada país associa uma cidade nesse país. Então, $r$ pode ser descrita explicitamente:*

$$r : \ Portugal \mapsto Lisboa \quad e \quad Portugal \mapsto Porto$$

$$r : \ Reino\ Unido \mapsto Londres \quad e \quad Reino\ Unido \mapsto Bristol$$

$$r : \ Japão \mapsto Tóquio \quad e \quad Japão \mapsto Hamamatsu$$

$$r : \ Brasil \mapsto Brasília \quad e \quad Brasil \mapsto São\ Paulo$$

*Ou seja, neste exemplo, a cada país correspondem duas cidades.*

**Definição 8.2.** *Uma função $f : A \to B$ é uma correspondência que a cada elemento de a faz corresponder uma única imagem.*

**Exemplo 8.3.** *Voltando ao exemplo dos países e cidades, podemos definir uma função $f$, que a cada país associa a sua capital:*

$$f : \ Portugal \mapsto Lisboa$$

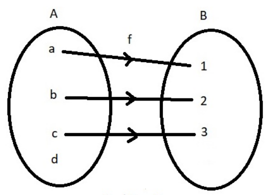
$$f : \ Reino\ Unido \mapsto Londres$$

$$f : \ Japão \mapsto Tóquio$$

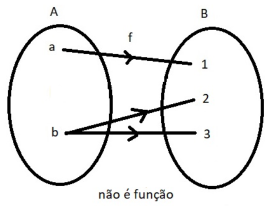
$$f : \ Brasil \mapsto Brasília$$

**Exemplo 8.4.** *A correspondência que a cada racional $\frac{p}{q}$ associa o par de inteiros $(p, q)$ não é uma função. Efetivamente, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ mas $(1, 2) \neq (2, 4)$.*

Uma maneira de representar correspondências e funções é através de diagramas de Venn. As seguintes figuras ilustram duas correspondências que não são funções, utilizando diagramas de Venn.



não é função



não é função

**Exemplo 8.5.** *Para cada conjunto $A$ podemos definir a função identidade $id_A$ que a cada elemento a associa o mesmo elemento, isto é:*

$$id_A : A \to A\,,\; id_A(a) = a$$

Como exercício tente representar a correspondência $r$ e a função $f$ dos exemplos 8.1 e 8.3 através de diagrmas de Venn.

Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto de partida designa-se por <u>domínio</u> de $f$. Ao subconjunto de $B$ dado pelas imagens de $A$ por $f$ chamamos <u>contradomínio</u> de $f$, que denotamos por:

$$f(A) = \{f(a) \in B : a \in A\} \subset B$$

**Definição 8.6.** *Uma função $f : A \to B$ diz-se:*

(a) <u>*injetiva*</u> *se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$*

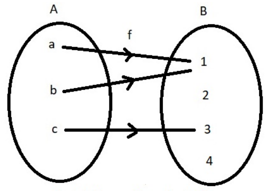
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

*(ou, de maneira equivalente, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)*

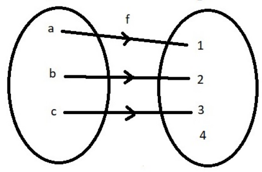
(b) <u>*sobrejetiva*</u> *se, dado $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(a)$*

(c) <u>*bijetiva*</u> *se é simultanemanete injetiva e sobrejetiva, ou seja, se verifica: dado $y \in B$, existe um e um só $x \in A$ tal que $y = f(a)$*

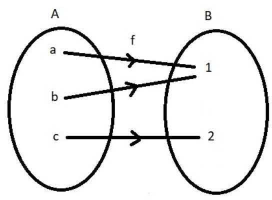
Notar que há funções que não são nem injetivas nem sobrejetivas. Os seguintes exemplos ilustram, através de diagramas de Venn, os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade.



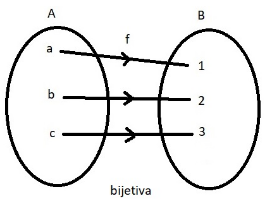
não injetiva e não sobrejetiva



injetiva mas não sobrejetiva



não injetiva mas sobrejetiva



bijetiva

Chama-se <u>função real de variável real</u> a toda a função $f$ cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e que toma valores em $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ ou um subconjunto de $\mathbb{R}$. É comum representar o domínio de uma função real de variável real $f$ por $D_f$ ou simplesmente $D$:

$$f : D \to \mathbb{R}$$

**Exemplo 8.7.** *Seja*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

*uma função polinomial (isto é, a sua expressão designatória é um polinómio, neste caso de grau $n$). Então, o seu domínio é $D_p = \mathbb{R}$.*

*Se considerarmos uma função racional*

$$f(x) = \frac{s(x)}{p(x)}$$

*o seu domínio será*

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\}$$

*No caso de uma função radical de índice $n$ par*

$$g(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

*o seu domínio é dado por*

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0\}$$

*As restrições anteriores generalizam-se: se uma função for um quociente, não necessariamente de polinómios, temos que garantir que o denominador não se anula. Se for um radical de índice par e o radicando não for necessariamente um polinómio, temos que garantir que esse radicando é maior ou igual a zero.*

A partir de agora, sempre que nos referimos a uma função está subentendido que se trata de uma função real de variável real. Introduzimos a seguinte notação:

$$]0, +\infty[= \mathbb{R}^+ \ ; \ [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$$

Para cada função $f : D \to \mathbb{R}$, é possível associar dois conjuntos:

- o conjunto dos zeros de $f$, dado por

$$\{x \in D : f(x) = 0\}$$

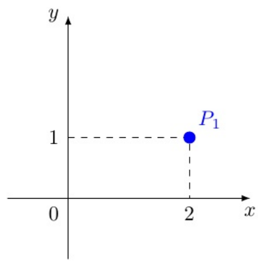
e para o qual não existe notação especial (notar que, para certas funções, o conjunto dos seus zeros é o conjunto vazio);

- o gráfico de $f$, definido como sendo o subconjunto $Gr(f)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

Nem sempre é fácil obter o gráfico de uma função sem recurso a um computador. Mas é útil conhecer e memorizar alguns gráficos de funções elementares, uma vez que nos dão toda a informação sobre essas funções.

**Observação 8.8.** *O plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é formado por duas retas perpendiculares, que designamos por eixo $Ox$ (reta horizontal) e por eixo $Oy$ (reta vertical). Cada um dos eixos representa o conjunto $\mathbb{R}$, daí o nome de reta real. O domínio da função está contido no eixo $Ox$ e o contradomínio no eixo $Oy$. O eixo $Oy$ é o conjunto de chegada da função. Cada ponto do plano cartesiano é fomado por um par $(x, y)$. A $x$ chamamos a abcissa do ponto e a $y$ a ordenada do ponto. Os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$, onde abcissa $x$ é um elemento do domínio $D$ de $f$. Os zeros da função correspondem, no gráfico, às abcissas dos pontos que intersetam o eixo $Ox$. A seguinte figura mostra a representação de um ponto $P$ de coordenadas $(2, 1)$ no plano cartesiano.*




**Exemplo 8.9.** *A função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tem domínio $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $f(D) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$. Além disso, como*

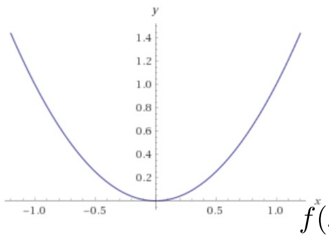
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

*o conjunto dos seus zeros é o conjunto unitário $\{0\}$.*

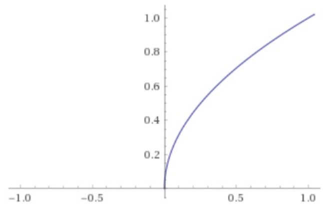
**Exemplo 8.10.** *A função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ tem domínio $D = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$ e contradomínio $f(D) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$. Como*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

*o conjunto dos seus zeros é simplesmente $\{0\}$.*



$f(x) = x^2$

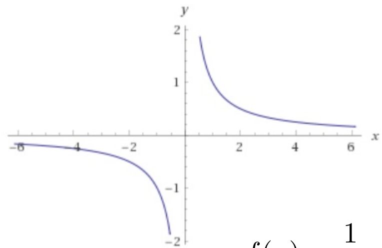


$f(x) = \sqrt{x}$

**Exemplo 8.11.** *A função* $f : D \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *tem domínio* $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e contradomínio* $f(D) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Como*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$$

*é uma condição impossível, o conjunto dos seus zeros é o conjunto vazio* $\emptyset$*. O gráfico de* $f$ *é dado por*



$f(x) = \dfrac{1}{x}$

Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ tais que $g(D_g) \subset D_f$, define-se a função $f$ composta com $g$,

$$f \circ g : D \to \mathbb{R}\,,$$

como sendo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio da composta $D = D_{f\circ g}$ é dado por

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

**Exemplo 8.12.** *A função composta* $f \circ g : D \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = x^2 + 1$ *é a função:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

*O seu domínio é todo o* $\mathbb{R}$*, uma vez que* $D_g = \mathbb{R}$ *(*$g$ *é um polinómio e os polinómios têm domínio* $\mathbb{R}$*) e* $g(x) = x^2 + 1 \geq 1$*, logo* $g(x) \in D_f = [0, +\infty[$*. Portanto,* $D = \mathbb{R}$*.*

*o conjunto dos zeros da composta é, neste caso, vazio. Efetivamente,*

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

*o que é impossível.*

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injetiva. Por definição, a função, que continuaremos a designar por $f$,

$$f : D \to f(D)$$

é bijetiva (note-se que tomámos o contradomínio de $f$ como o novo conjunto de chegada). Uma função bijetiva admite inversa

$$f^{-1} : f(D) \to D$$

A inversa $f^{-1}$ define-se como sendo a única função tal que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Conclui-se que,

$$f \circ f^{-1} = id_{f(D)} \text{ e } f^{-1} \circ f = id_D$$

A condição anterior significa simplesmente que:

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ e } f^{-1}(f(x)) = x.$$

Note que o domínio de $f$ é o contradomínio de $f^{-1}$ e o domínio de $f^{-1}$ é o contradomínio de $f$.

**Exemplo 8.13.** *Considere a função $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por $f(x) = x^2$. Então, $f$ é bijetiva, pelo que admite inversa. Determinemos $f^{-1}$.*

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

*Logo, $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ é a função $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Se preferirmos, podemos usar a variável $x$. Usa-se a variável $y$ quando consideramos em simultâneo a função e a sua inversa, para distinguir domínio e contradomínio.*

*Note-se que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $g(x) = x^2$ não admite inversa porque, no seu domínio, não é injetiva. Por exemplo, $g(-1) = g(1) = 1$ mas $-1 \neq 1$.*

**Exemplo 8.14.** *Determine a função inversa de $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Caracterize ainda os domínios e contradomínios. Começamos por determinar o domínio de $f$, que será igual ao contradomínio de $f^{-1}$.*

$$D = D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

*Para determinar a inversa de $f$ temos que resolver a seguinte equação em ordem a $x$:*

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x + 1 = y(x-2) \Leftrightarrow x + 1 = yx - 2y$$

$$\Leftrightarrow x - yx = -1 - 2y \Leftrightarrow yx - x = 2y + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1$$

*Resolvendo agora em ordem a $x$, obtemos*

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

*Ou seja,*

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

*Concluímos assim que o domínio de $f^{-1}$, que é igual ao contradomínio de $f$, é dado por:*

$$D_{f^{-1}} = f(D) = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

**Definição 8.15.** *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se:*

(a) *crescente em $S \subset D$ se*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\,, \forall x_1, x_2 \in S$$

(b) *estritamente crescente em $S \subset D$ se*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\,, \forall x_1, x_2 \in S$$

(c) *decrescente em $S \subset D$ se*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,, \forall x_1, x_2 \in S$$

(d) *estritamente decrescente em $S \subset D$ se*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\,, \forall x_1, x_2 \in S$$

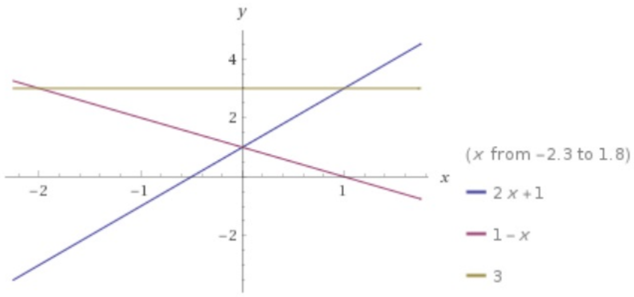
*Uma função diz-se monótona se for crescente ou decrescente.*

**Exemplo 8.16.** *Consideremos a função afim:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f(x) = ax + b$$

*O seu gráfico é uma reta. Vamos distinguir três casos:*

- *Caso $a = 0$: a função é constante, $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O seu gráfico é uma reta paralela ao eixo $Ox$. Não tem zeros, exceto se $b = 0$ e nesse caso é a função identicamente nula.*
- *Caso $a > 0$: a função é estritamente crescente, com um zero em $x = -\dfrac{b}{a}$.*
- *Caso $a < 0$: a função é estritamente decrescente, com um zero em $x = -\dfrac{b}{a}$.*




*Notar que para determinar os zeros de $f$ basta resolver a equação do primeiro grau:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

*A seguinte figura mostra o gráfico das funções $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -x+2$ e $h(x) = 3$:*

**Definição 8.17.** *Dizemos que a função $f : D \to \mathbb{R}$ tem:*

$(a)$ *um* *<u>máximo</u>* *local em $a \in D$ se*

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[ \subset D$$

$(b)$ *um* *<u>mínimo</u>* *local em $a \in D$ se*

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[ \subset D$$

*Se $f$ tem um máximo local ou um mínimo local dizemos que tem um* *<u>extremo local</u>*. *Se em $(a)$ valer a desigualdade $>$ e em $(b)$ $<$, dizemos que $f$ tem, respetivamente, um máximo estrito e um mínimo estrito.*

A função afim do exemplo 8.16 não tem máximos nem mínimos estritos. Mas, no caso da função constante, podemos dizer que todos os pontos são simultaneamente máximos e mínimos (em sentido lato), ou que não tem extremos (em sentido estrito).

**Exemplo 8.18.** *Uma função da forma*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

*é designada por* *<u>função quadrática</u>*. *O seu gráfico é uma* *<u>parábola</u>*. *A parábola é caracterizada por ter um vértice, que é atingido no ponto de abcissa $x = -\dfrac{b}{2a}$. O vértice da parábola é um ponto onde a função atinge um extremo (absoluto), podendo ser um máximo ou um mínimo. Os zeros da função quadrática são controlados, naturalmente, pelo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, como vimos no estudo da equação do segundo grau:*

- *se $\Delta > 0$, a função é tem dois zeros, dados pela fórmula resolvente,*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- *se $\Delta = 0$, a função é tem um único zero, que coincide com o vértice da parábola*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

- *se $\Delta < 0$, a função não tem zeros. Significa que o seu gráfico está acima do eixo $Ox$, caso a concavidade seja para cima, ou abaixo do eixo $Ox$, caso a concavidade seja negativa, mas sem nunca o intersetar.*

*A classificação da função da quadrática depende assim de dois parâmetros: o sinal do coeficiente do termo de grau $2$, ou seja, o sinal de $a$, que indica o sentido da concavidade, e o sinal de $\Delta$, que indica a existência de zeros.*

- *Caso $a > 0$:*

  *a concavidade está para cima, $f$ tem um mínimo (global) no vértice, isto é, em $x = -\dfrac{b}{2a}$. Os seus intervalos de monotonia são:*

  $$f \text{ é monótona decrescente em} ]-\infty, -\frac{b}{2a}[\ ;\ f \text{ é monótona crescente em} ]-\frac{b}{2a}, +\infty[$$

- *Caso $a < 0$:*

  *a concavidade está para baixo, $f$ tem um máximo (global) no vértice, $x = -\dfrac{b}{2a}$. Os seus intervalos de monotonia são:*

  $$f \text{ é monótona crescente em} ]-\infty, -\frac{b}{2a}[\ ;\ f \text{ é monótona decrescente em} ]-\frac{b}{2a}, +\infty[$$

*O valor do extremo local é dado por:*

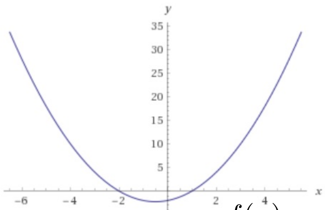
$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

*Reduzindo ao mesmo denominador e efetuando os cálculos, obtemos:*

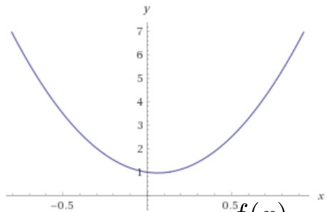
$$f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

*Conclui-se que, se $a > 0$, o contradomínio de $f$ é o intervalo $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty[$, se $a < 0$, o contradomínio é $]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.*

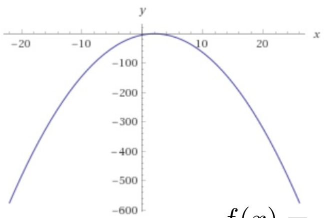
*As seguintes figuras mostram alguns gráficos de funções quadráticas:*



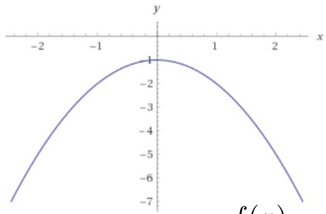
$f(x) = x^2 + x - 2$



$f(x) = 8x^2 - x + 1$



$f(x) = -x^2 + 4x - 4$



$f(x) = -x^2 - 1$

## 8.2 A função exponencial

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. A função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = a^x$$

designa-se por função exponencial (de base $a$). Notar que excluímos o caso $a = 1$ porque $1^x = 1, \forall x$.

As propriedades dos expoentes que estudámos no capítulo 2 permanecem, naturalmente, válidas. Recordemos essas propriedades. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $a^x \, a^y = a^{x+y}$;
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^x \, b^x = (ab)^x$;
- $\dfrac{a^x}{b^x} = (\dfrac{a}{b})^x$.

## Caracterização da função exponencial

- O seu domínio é $D = \mathbb{R}$;
- O seu contradomínio é $f(D) = ]0, +\infty[$;

- É injetiva;

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

- É uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $]0, +\infty[$ e como tal admite inversa (a função logaritmo);
- Não tem zeros: $a^x > 0 \,, \forall x \in \mathbb{R}$.

Devemos agora destinguir dois casos para estudar o comportamento da função exponencial

1. Caso 1: $a > 1$

    - A função exponencial é estritamente monótona crescente

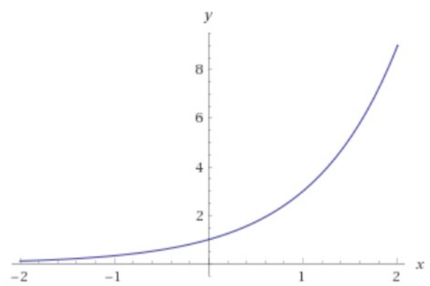
    $$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

    - A função exponencial tende para $+\infty$ quando $x$ vai ficando arbitrariamente grande. Simbolicamente, escrevemos:

    $$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

    - A função exponencial tende para 0 quando $x$ vai ficando arbitrariamente pequeno, ou seja, quando $x$ tende para $-\infty$. Simbolicamente, escrevemos:

    $$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

    $f(x) = 3^x$

    O gráfico anterior é ilustrativo das propriedades da função exponencial. Note como o crescimento é muito rápido para um pequeno aumento de $x$, quando $x > 0$ (é comum o uso do termo "crescimento exponencial"como sinónimo de um "crecimento muito rápido").

2. Caso 2: $0 < a < 1$

- A função exponencial é estritamente monótona decrescente

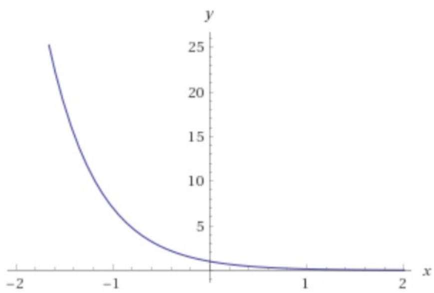
$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- A função exponencial tende para 0 quando $x$ vai ficando arbitrariamente grande, ou seja, quando $x$ tende para $+\infty$. Simbolicamente, escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

- A função exponencial tende para $+\infty$ quando $x$ vai ficando arbitrariamente pequeno, ou seja, quando $x$ tende para $-\infty$. Simbolicamente, escrevemos:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$




$f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Neste caso, o gráfico mostra como o decrescimento é muito rápido (uma vez que $0 < a < 1$).

## 8.3 A função logaritmo

Seja $a > 0$ e $a \neq 1$. Vimos anteriormente que a função

$$f : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[ \ , \ f(x) = a^x$$

é bijetiva. Como tal, admite inversa, que designaremos por função logaritmo (de base $a$)

$$f^{-1} : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} \ , \ f^{-1}(x) = \log_a x$$

Por definição de função inversa,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Conclui-se assim que:

$$a^{\log_a x} = x \ \text{ e } \ \log_a a^x = x$$

Antes de iniciarmos o estudo da função logaritmo vamos demonstrar algumas das suas propriedades elementares, essenciais para resolver equações que envolvem logaritmos e exponenciais.

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}$ tem-se:

$(i)$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

$(ii)$ $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$;

$(iii)$ $\log_a(x^z) = z \log_a x$;

$(iv)$ $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

As propriedades anteriores demonstram-se facilmente usando as propriedades já conhecidas da função exponencial e aplicando a definição de logaritmo.

*Demonstração.* $(i)$ Aplicando a definição,

$$xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Como

$$xy = a^{\log_a (xy)}$$

igualando com a expressão anterior, obtemos o resultado.

$(ii)$ A demonstração é análoga à anteior.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Por outro lado,

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$$

e o resultado segue igualando à expressão anterior.

$(iii)$ Tem-se:

$$x^z = (a^{\log_a x})^z = a^{z \log_a x}$$

e como,

$$x^z = a^{\log_a x^z}$$

obtemos o resultado pretendido.

$(iv)$ Aplicando $\log_a(\,.\,)$ a ambos os membros

$$x = b^{\log_b x}$$

vem:

$$\log_a x = \log_a(b^{\log_b x})$$

Pela propriedade $(iii)$,

$$\log_a x = \log_b x \, \log_a b$$

ou seja

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$\square$

**Observação 8.19.** *Em matemática, a base natural dos logaritmos é dada por um número irracional, designado por número de Neper e denotado e (em homenagem a Eüler). O seu valor aproximado (com 20 casas decimais) é:*

$$e \simeq 2,71828182845904523536...$$

*Quando se pretende calcular o logaritmo de um valor $x$ na base natural $e$, omite-se a base e escreve-se simplesmente*

$$\log x$$

*Notar que a propriedade (iv) permite mudar de base nos logaritmos. Assim, é sempre possível usar uma determinada base, nomeadamente a base natural:*

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação das propriedades elementares dos logaritmos.

**Exemplo 8.20.** *Pretende-se simplificar* $\log_2 \sqrt[8]{64}$. *Tem-se:*

$$\log_2 \sqrt[8]{64} = \log_2 (8^2)^{\frac{1}{8}} = \log_2 8^{\frac{2}{8}} = \log_2 (2^3)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$$

**Exemplo 8.21.** *Podemos simplificar* $\frac{\log_7 \frac{1}{64}}{\log_7 4}$. *Tem-se:*

$$\frac{\log_7 \frac{1}{64}}{\log_7 4} = \frac{\log_7 \frac{1}{2^6}}{\log_7 4} = \frac{\log_7 1 - \log_7 2^6}{\log_7 2^2} = -\frac{6}{2}\frac{\log_7 2}{\log_7 2} = -3$$

**Exemplo 8.22.** *A expressão*

$$\frac{1}{2}(2\log_2 a - \log_2(\frac{1}{b^2}) + 6\log_2 c)$$

*pode ser simplificada do seguinte modo:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(2\log_2 a - \log_2(\frac{1}{b^2}) + 6\log_2 c) &= \frac{1}{2}(2\log_2 a - \log_2 b^{-2} + 6\log_2 c) \\
&= \log_2 a - \frac{1}{2}(-2)\log_2 b + 3\log_2 c \\
&= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c^3 \\
&= \log_2(abc^3)
\end{aligned}$$

## Caracterização da função logaritmo

Já vimos que a função logaritmo é a inversa da função exponencial. Denotamos a partir de agora $f(x) = \log_a x$.

- O seu domínio é $D = \mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[$;
- O seu contradomínio é $f(D) = \mathbb{R}$;
- É injetiva

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

- É uma bijeção de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e como tal admite inversa (a função exponencial);
- Tem um único zero:

$$\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = a^0 = 1$$

Tal como no caso da função exponencial, destinguimos dois casos para estudar o comportamento da função logaritmo.

1. Caso 1: $a > 1$

   - A função logaritmo é estritamente monótona crescente

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

   Daqui se conclui em particular que:

   $$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 = 0$$

   e também

   $$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 = 0$$

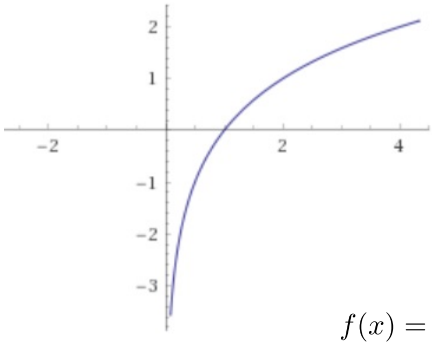
   - A função logaritmo tende para $+\infty$ quando $x$ vai ficando arbitrariamente grande. Simbolicamente, escrevemos:

   $$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

   - A função tende para $-\infty$ quando $x$ se vai aproximando de 0 por valores à direita de 0. Simbolicamente, escrevemos:

   $$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

   Ao contrário da função exponencial, o gráfico seguinte mostra como o crescimento de $f(x) = \log_2 x$ é muito lento.




$f(x) = \log_2 x$

2. Caso 2: $0 < a < 1$

   - A função é estritamente monótona decrescente

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \ , \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

   Em particular,

   $$x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$$

   e

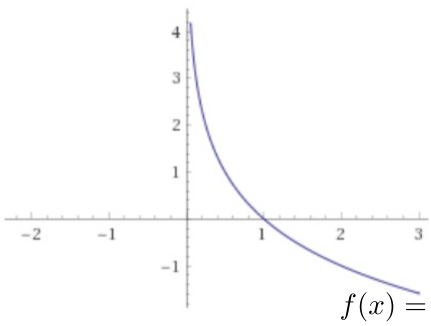
   $$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$$

   - A função tende para 0 quando $x$ vai ficando arbitrariamente grande, ou seja, quando $x$ tende para $+\infty$. Simbolicamente, escrevemos:

   $$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

   - A função tende para $+\infty$ quando $x$ se vai aproximando de 0, por valores à direita de 0. Simbolicamente, escrevemos:

   $$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$




$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

## 8.4 Equações com exponenciais e logaritmos

Depois de aprendermos as suas propriedades elementares e o seu comportamento, podemos calcular valores, simplificar expressões e resolver equações que envolvem exponenciais e logaritmos. Como iremos ver nos exemplos seguintes, alguns dos problemas resumem-se a resolver equações conhecidas, do primeiro ou do segundo grau.

**Exemplo 8.23.** *Determinar a solução da equação*

$$100^x = 0,001$$

*Escrevendo em base* 10*:*

$$100^x = 0,001 \Leftrightarrow (10^2)^x = 10^{-3} \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

**Exemplo 8.24.** *Resolver a equação*

$$3 \times 2^x = 4^x$$

*Tem-se:*

$$3 \times 2^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

**Exemplo 8.25.** *Resolver a equação*

$$5^{1-2x} = \frac{1}{125}$$

*Notar que* $125 = 5^3$. *Assim:*

$$5^{1-2x} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow 5^{1-2x} = 5^{-3} \Leftrightarrow 1 - 2x = -3 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

**Exemplo 8.26.** *Determine o valor de* $a$ *tal que*

$$\log_a 27 = \frac{3}{2}$$

*Tem-se:*

$$\log_a 27 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_a 3^3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\log_a 3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_a 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow a = 3^2 = 9$$

**Exemplo 8.27.** *Determine a solução da equação*

$$\log_{25}(2x+1) = \frac{1}{2}$$

*Por definição de logaritmo:*

$$\log_{25}(2x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 25^{\frac{1}{2}} = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$$

**Exemplo 8.28.** *Resolva a seguinte equação*

$$\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$$

*Pelas propriedades dos logaritmos, obtemos:*

$$\log_3 x + \log_3(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x(x-2)) = \log_3 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

*Temos que resolver uma equação do segundo grau. Aplicando a fórmula resolvente:*

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$

*Neste exercício somos confrontados com um problema que não tinha surgido antes: a necessida de considerar apenas soluções que fazem parte do domínio da expressão que compõe a equação. Com efeito, o domínio de $x \mapsto \log_3 x$, expressão que ocorre na equação, é*

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = ]0, +\infty[$$

*Por outro lado, o domínio de $x \mapsto \log_3(x-2)$ é*

$$\{x \in \mathbb{R} : x - 2 > 0\} = ]2, +\infty[$$

*Assim sendo, a única solução da equação é $x = 3$.*

## 8.5 Exercícios

1. Simplifique as seguintes expressões:

   (*a*) $5^{3\log_5 x - 2\log_5 x}$

   (*b*) $2^{2+\log_2 x}$

   (*c*) $\dfrac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 4\log_{\frac{1}{2}} x$

2. Calcule:

   (*a*) $\log_3 9 + \log_3 36 - \log_3 4$

   (*b*) $\dfrac{\log_2 27}{\log_2 3}$

   (*c*) $3^{3+\log_3(\frac{1}{9})}$

3. Resolva as seguintes equações:

   (*a*) $12^x = 144$

   (*b*) $4^{3x-1} = \dfrac{1}{64}$

   (*c*) $\log_2(2x+3) = \log_2 9$

## Referências

[1] Sá, Ana Alves de; *et al.*, *Introdução ao Cálculo*, Escolar Editora, 2011.