Exercícios p/ casa - 1 Dezembro

12 - $|x-1| + |x-2| > 1$

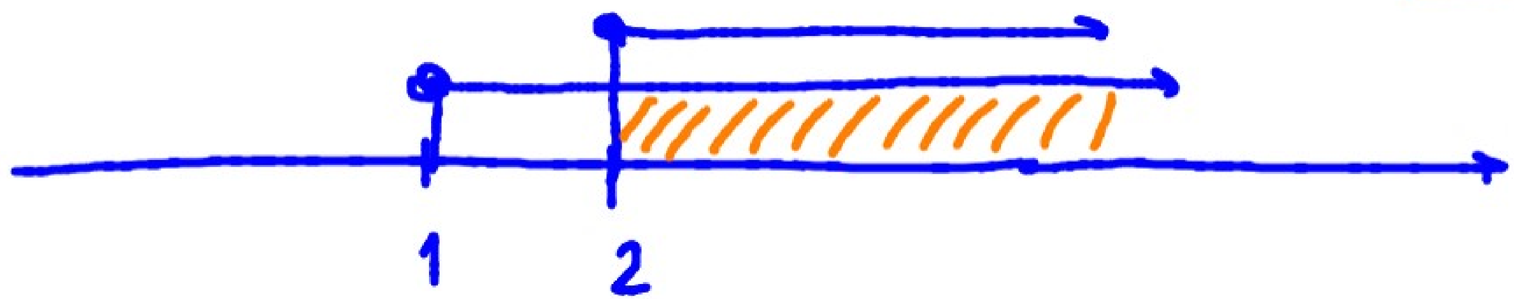
$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2, & \text{se } \underline{x \geq 2} \\ -x+2, & \text{se } \underline{x < 2} \end{cases}$$

- Se $\underline{x \geq 1}$ e $\underline{x \geq 2}$, i.e $\underline{\underline{x \geq 2}}$



combinações possíveis das condições do $|x-1|$ e $|x-2|$

$$|x-1| + |x-2| > 1 \iff$$

$$\iff x-1 + x-2 > 1 \iff$$

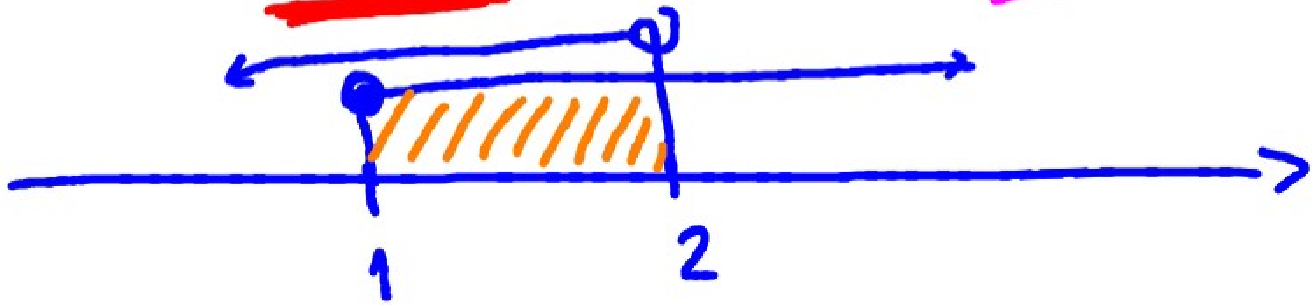
$$\iff 2x - 3 > 1 \iff 2x > 4 \iff$$

$$\iff x > \frac{4}{2} \iff x > 2$$

Condição: $x \geq 2$

$$\left.\begin{array}{l} x > 2 \\ \text{Condição: } x \geq 2 \end{array}\right\} \underline{\underline{x > 2}}$$

- Se $x \geq 1$ e $x < 2$, ie $x \in [1,2[$



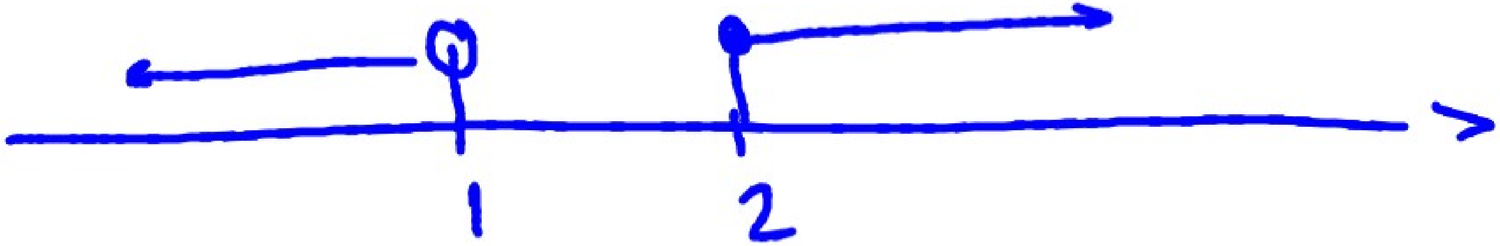
$$|x-1| + |x-2| > 1$$

$$x-1-x+2 > 1 \iff$$

$$\iff x - x > 1 + 1 - 2 \iff$$

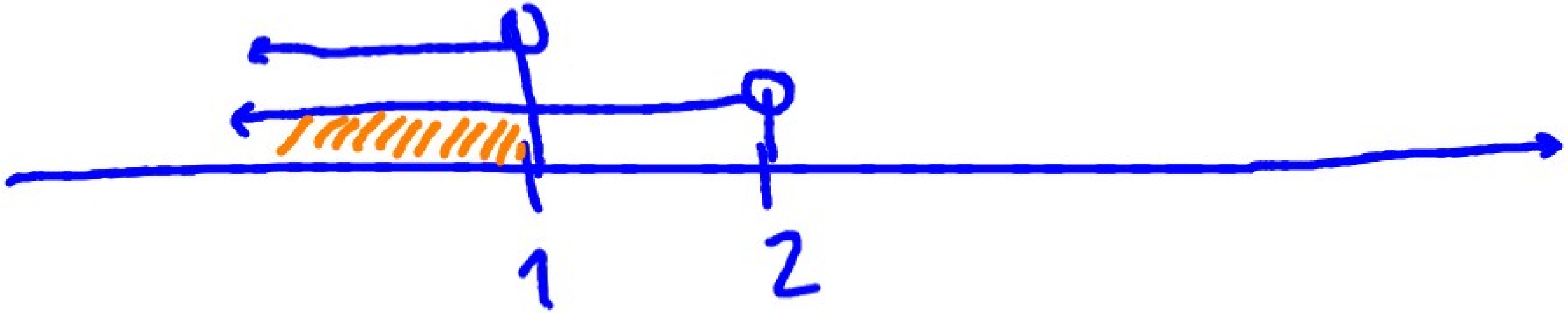
$$\iff 0 > 0$$ Impossível

- Se $x < 1$ e $x \geq 2$, i.e $x \in \emptyset$



↳ não existem valores de x que satisfaçam esta condição.

• Se $x<1$ e $x<2$, i.e $x<1$



$$|x-1|+|x-2|>1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+1-x+2>1 \Leftrightarrow$$

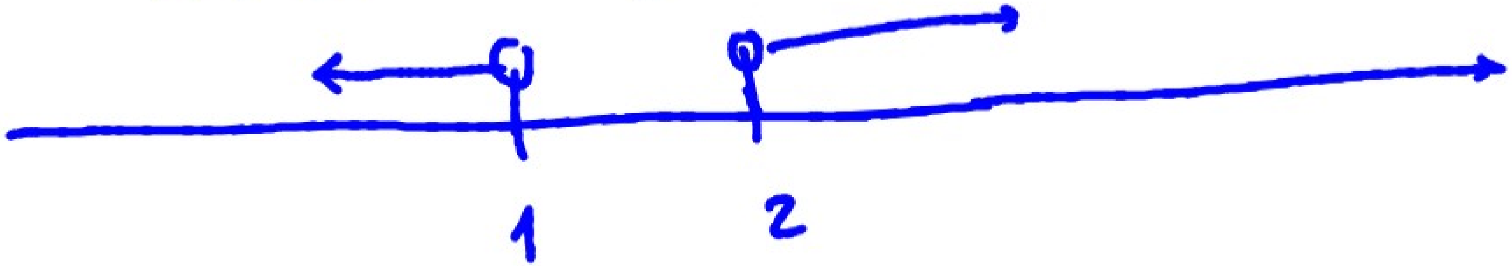
$$\Leftrightarrow -x-x>\cancel{1}-\cancel{1}-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x>-2 \Leftrightarrow x<\frac{-2}{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad x < 1 \\ \text{Condição inicial: } x<1 \end{array}\right\} \; x<1$$

<u>SOLUÇÃO FINAL</u>

$$x>2 \;\vee\; x<1 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]2, +\infty[$$



PROPRIEDADES DOS MÓDULOS

1- $|x| \geq 0$

2- $|a| . |b| = |ab|$

3- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$|a+b| = |a| + |b|$

$|a-b| = |a| - |b|$

4- $|a \pm b| \leq |a| + |b|$

PROPORCIONALIDADE DIRECTA

e INVERSA

RAZÃO entre a e b : $\frac{a}{b}$

(razão de a p/ b)

PROPORÇÃO é uma igualdade entre 2 razões

ex : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

ex: O João comprou 6 kg de arroz e pagou 11 €. Quanto teria de pagar se comprasse 10 kg?

- 1ª resolução: regra de 3 simples

$$\begin{array}{ccc} 6 & — & 11 \\ 10 & — & x \end{array}$$

$$6x = 11 . 10 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{110}{6} = \frac{55}{3} \text{ €}$$

- <u>2ª resolução</u>: proporções

a razão entre quantidade e preço tem de ser igual.

$$\frac{6}{11} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 6x = 10 . 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 . 11}{6} =$$

$$= \frac{5 . 11}{3} = \frac{55}{3} €$$

$$= 18,30 €$$

• 3ª maneira: descobrir o preço unitário

$$\frac{11}{6} \rightarrow \text{preço unitário } (€/kg)$$

1,83 €/kg

Para compra 10 kg, teria de pagar $10 \cdot 1{,}83 = 18{,}3$ €

determinar o preço unitário pela regra de 3 simples

$$\boxed{\begin{array}{ll} 11 \text{ — } 6 & \\ x \text{ — } 1 & x = \frac{11}{6} \end{array}}$$

DEF: As quantidades x e y são directamente proporcionais

sse $\dfrac{x}{y} = \underline{\underline{k}} \in \mathbb{R}$ p/ algum k.

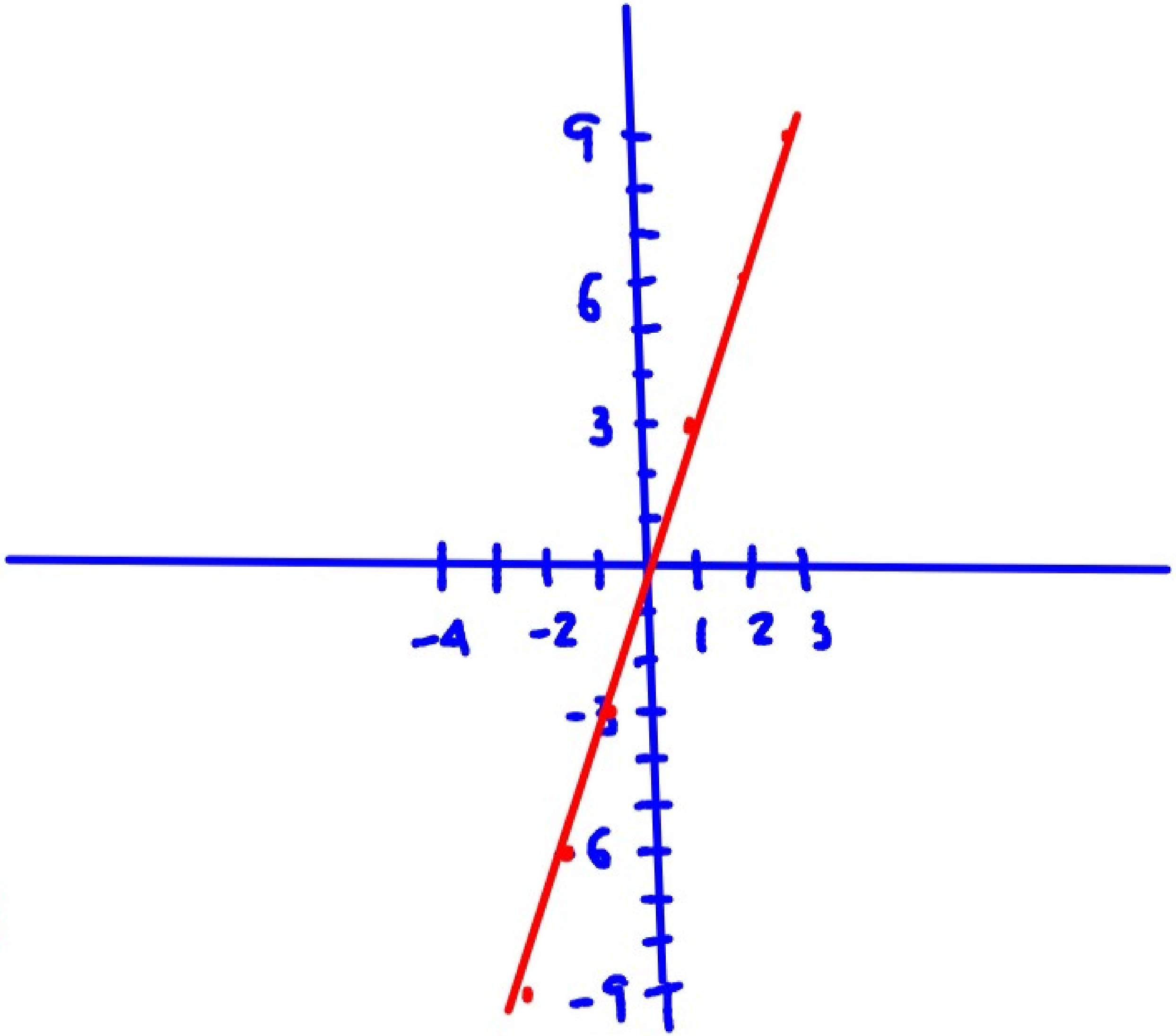
↳ constante de proporcionalidade directa

NOTA: Se o preço variasse com a quantidade, já não seria um caso de proporcionalidade directa.

ex: x e y são directamente proporcionais c/ constante de proporcionalidade igual a 3:

$$\frac{y}{x} = 3 \iff y = 3x$$

x	0	1	2	−1	−3	...
y	0	3	6	−3	−9	...

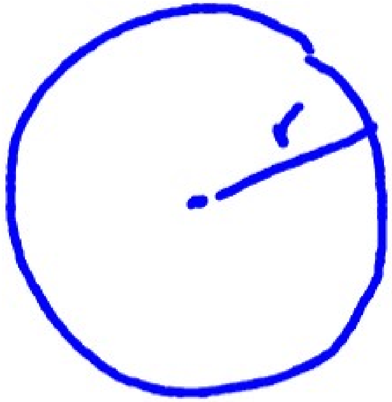


$y = kx$

NOTA: Os gráficos que representem proporcionalidade directa entre duas grandezas (x e y) são sempre rectas que passam pela origem c/ equação

$$y = kx \quad \left(\text{ou } \frac{y}{x} = k\right)$$

área: $A = \pi r^2$



perímetro: $P = \underbrace{2\pi}_{\in \mathbb{R} \text{ constante}} r$

OBS: • A área e o raio da $\odot$ ñ são directamente proporcionais.

pq $A \neq \underbrace{k}_{\in \mathbb{R}} . r$ $\quad (A = \pi . r^{2})$

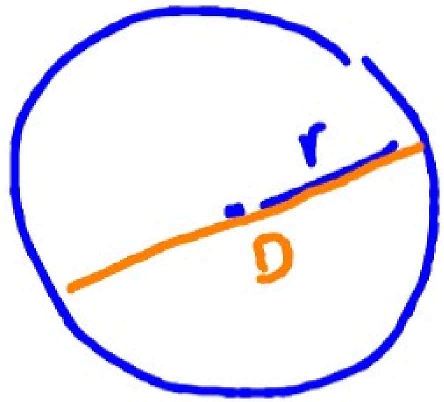
problema

- O perímetro é directamente proporcional ao raio da circunferência:

$$P = \underbrace{2\pi}_{k} \cdot r$$

2π é a constante de proporcionalidade

$D = 2r \equiv$ diâmetro



$$P = 2\pi r =$$

$$= \pi \cdot (2r) =$$

$$= \underbrace{\pi}_{\text{const.}} D$$

Logo P e D são directamente proporcionais.

DEF: As grandezas x e y dizem-se inversamente proporcionais sse $xy = k \in \mathbb{R}$ p/ algum k.

$\boxed{(xy \text{ é sempre constante})}$.

$k \equiv$ constante de proporcionalidade inversa.

ex: <u>Obras</u>

1	pessoa	4 meses
2	"	2 "
4	"	1 mês
8	"	$1/2$ mês

x = nº de pessoas a trabalhar

y = duração

$$\left.\begin{aligned} 1 \times 4 &= 4 \\ 2 \times 2 &= 4 \\ 4 \times 1 &= 4 \\ 8 \times \tfrac{1}{2} &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$xy = 4$ const.

Logo x e y são inversamente proporcionais.

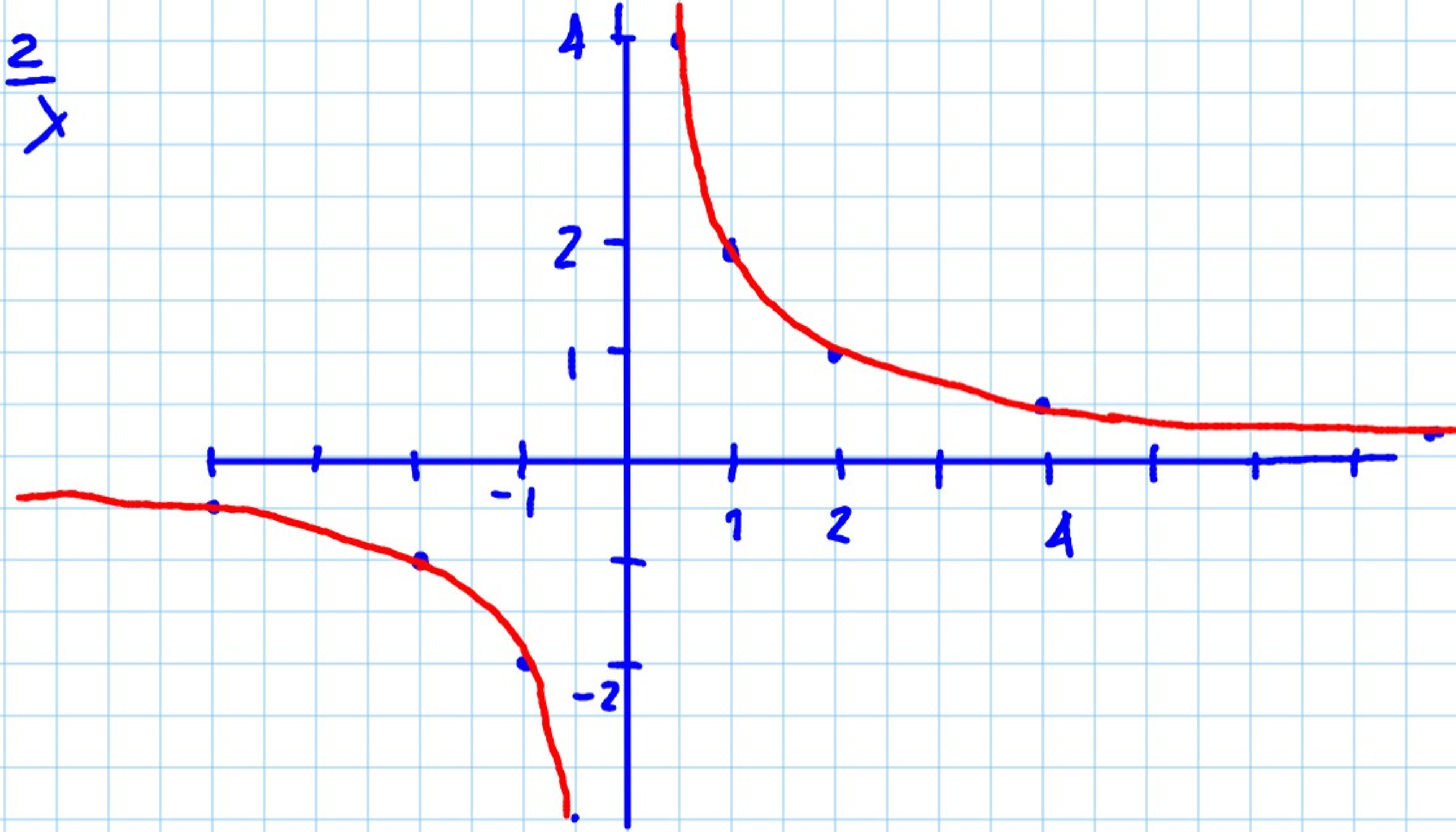
À medida que aumentamos o n.º de pessoas, a duração da obra diminui.

$$xy = k \iff y = \frac{k}{x}$$

y é múltiplo do inverso de x:

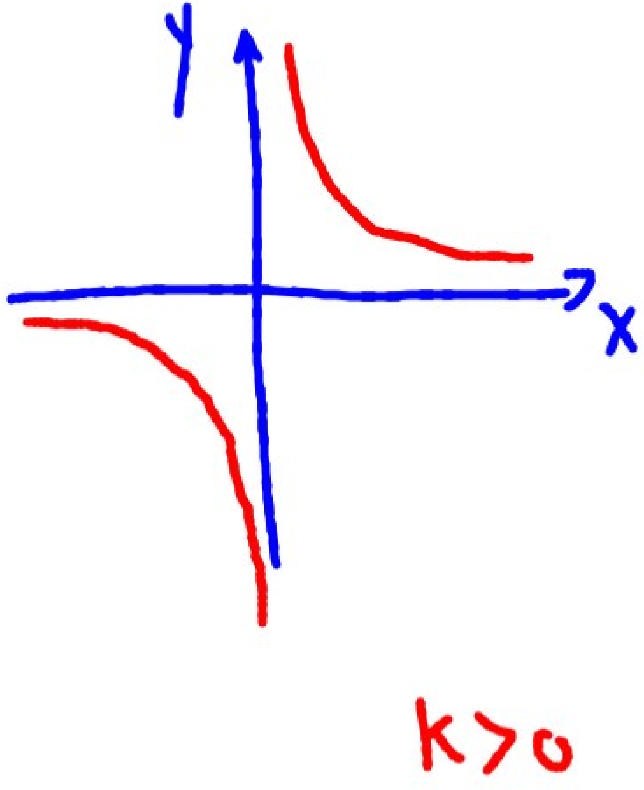
$$y = \frac{k}{x} = k \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{inverso de } x}$$

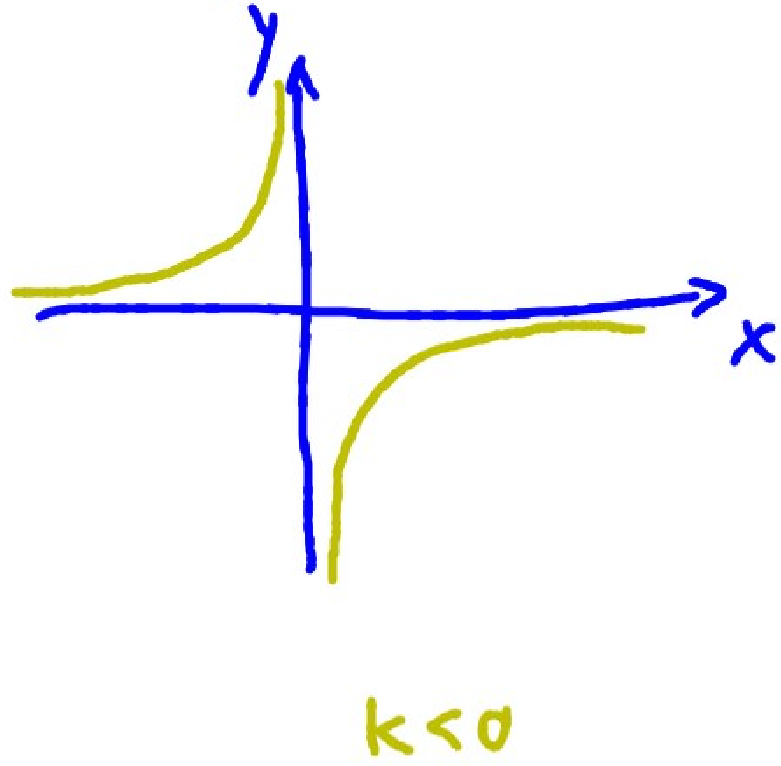
$y = \frac{2}{x}$



x	0	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	$-\frac{1}{2}$
y	nd	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	-4

Gráficos de proporcionalidades inversas têm sempre o formato





ex: Completar a tabela de modo a termos proporcionalidade inversa:

x	1	2	4	▢	▢
y	▢	3	▢	12	15

1º passo: descobrir a constante de proporcionalidade

2º passo: preencher a tabela

Quando $x=2$, temos $y=3$.

Logo $xy = 2.3 = 6 = k$ const. de prop. inversa

$$\boxed{xy = 6}$$

$1 . y = 6 \iff y = 6$

$4 . y = 6 \iff y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$x \cdot 12 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$x \cdot 15 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Assim:

x	1	2	4	1/2	2/5
y	6	3	$\frac{3}{2}$	12	15

RAZÕES E TAXAS

RAZÃO entre a e b : $\frac{a}{b}$

TAXA: proporção de uma dada grandeza ex: taxa de mortalidade

$$\frac{\text{nº de mortes}}{\text{população}}$$

ex: taxa de natalidade =

$$= \frac{\text{nº de nascimentos}}{\text{população}} \simeq$$

$$\simeq \frac{8\cancel{0}.\cancel{000}}{10.00\cancel{0}.\cancel{000}} = \frac{8}{1000} = 0,008$$

$= 0{,}008 = 8.10^{-3}$

$= 0{,}008 \times 100\ \% = \underbrace{0{,}8\ \%}$

em cada 100 pessoas
há 0,8 nascimentos

$= 0{,}008 \times 1000\ ‰ =$

$= \underbrace{8\ ‰}$

em cada 1000 pessoas há 8 nascimentos

• IVA, imposto

$$\text{Taxa IVA} = \frac{\text{qt pagamos de imposto}}{\text{total gasto}} =$$

$= 6\%$
comida

por cada 100€
que gastamos
em comida,
o estado recebe 6€

- taxa de juros de 5% (depósitos)

por cada 100 € de depósito
recebemos 5 € de juro ← era bom, não era?

- velocidade : $v_m = \dfrac{\text{deslocação}}{\text{tempo}}$

$$v_m = \frac{400\ \text{km}}{4\ \text{h}} = 100\ \text{km/h}$$

↓
veloc. média

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

taxa: $\frac{y}{x}$

$\Delta \equiv$ variação $= y_f - y_i$

variação entre 2 momentos da mesma grandeza.

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA $=$ TVM $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ex: Velocidade média:

$y \equiv$ posição

$x \equiv$ tempo

$x_i \equiv$ instante inicial $= 17h$

$x_f \equiv$ " final $= 19h$

$$\text{vel. média} = TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} =$$

$$= \frac{250 - 10}{19 - 17} = \frac{240}{2} =$$

$$= 120 \text{ Km/h}$$

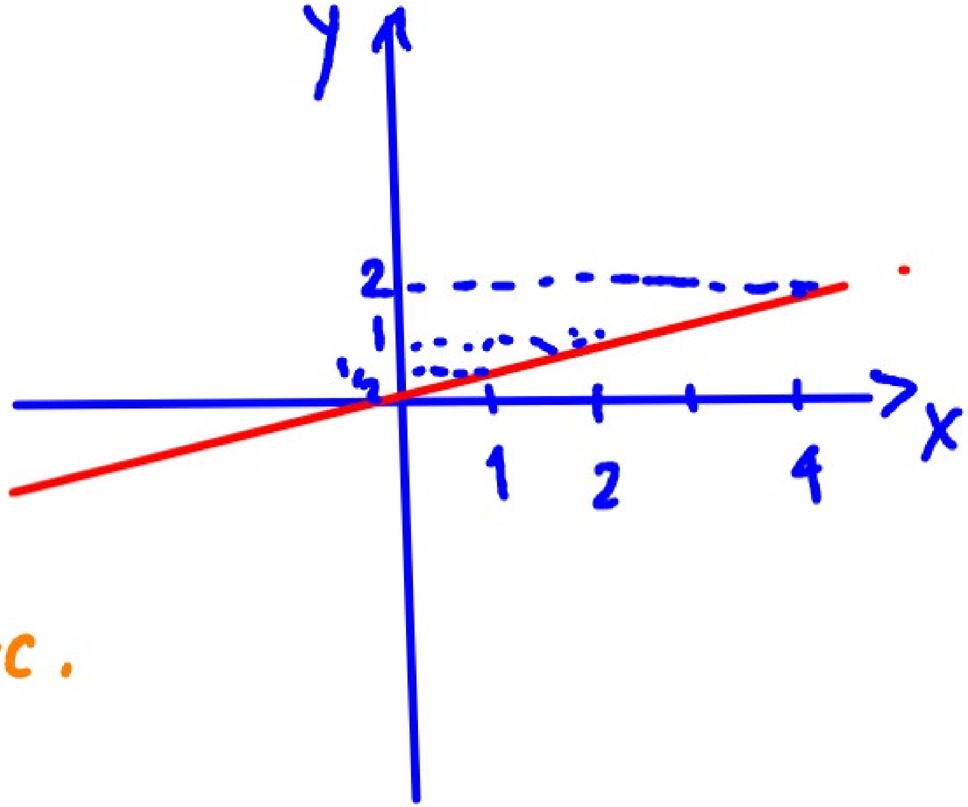
ex:

x	0	1	2	4
y	0	1/2	1	2

inicial

final

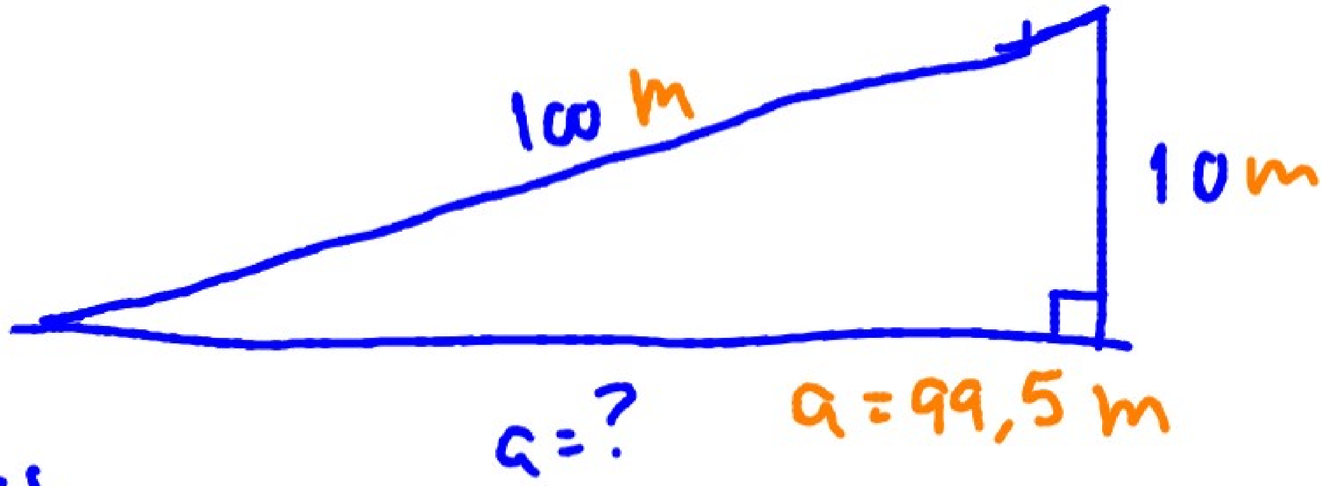
$k = \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ const. proporc.



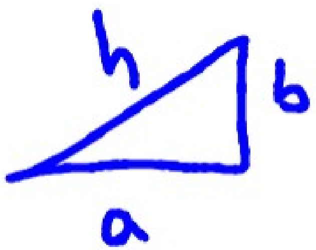
$$\text{Declive} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

o declive de uma recta é uma TVM

Taxa de inclinação



T. Pitágoras

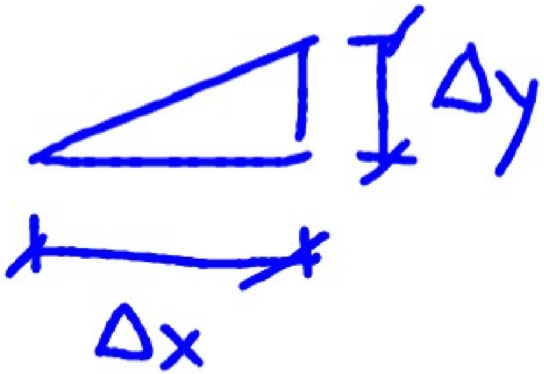


$$h^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 100^2 = a^2 + 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 100^2 - 10^2 = 10.000 - 100 =$$

$$= 9.900 \Rightarrow a = \sqrt{9900} \simeq 99,5$$

$$\text{"Inclinação"} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{99{,}5} \simeq 0{,}1 = 10\%$$



$$0{,}1 \times 100 = 10\%$$