PARTE 1 – CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS
Equações e inequações com módulos
Ficha de trabalho

Elaborado por **Patrícia Engrácia**

1 de Dezembro de 2020

1 Exercícios

Exercício 1 *Resolva.*

1. $1+|x+1|=3$

$$\begin{aligned} 1+|x+1|=3 &\Leftrightarrow |x+1|=2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+1=2 \vee x+1=-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=1 \vee x=-3 \end{aligned}$$

2. $|3x-6|+1<4$

$$\begin{aligned} |3x-6|+1<4 &\Leftrightarrow |3x-6|<3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x-6<3 \wedge 3x-6>-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x<9 \wedge 3x>3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x<3 \wedge x>1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in]1,3[\end{aligned}$$

3. $1-|2x+1|=0$

$$\begin{aligned} 1-|2x+1|=0 &\Leftrightarrow |2x+1|=1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x+1=1 \vee 2x+1=-1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x=0 \vee 2x=-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \end{aligned}$$

4. $|x+1|=4$

$$\begin{aligned} |x+1|=4 &\Leftrightarrow x+1=4 \vee x+1=-4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=3 \vee x=-5 \end{aligned}$$

5. $|x+1|=2x-1$

$$\begin{aligned} |x+1|=2x-1 &\Leftrightarrow x+1=2x-1 \vee x+1=-(2x-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x+1=2x-1 \vee x+1=-2x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x+1=-1 \vee 3x+1=1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x=-2 \vee 3x=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=2 \vee x=0 \end{aligned}$$

6. $|2x-1|=-5$

$$|2x-1|=-5 \qquad impossível$$

7. $|x| \geq |-x|$
Visto que $|-x|=|x|$ ($|-x|=|-1.x|=|-1|.|x|=|x|$), sai que

$$|x| \geq |-x| \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq |x|,$$

o que é sempre verdade, logo o conjunto solução é $\mathbb{R}$.

8. $|3x+1|=2$

$$\begin{aligned} |3x+1|=2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x+1=2 \vee 3x+1=-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 3x=1 \vee 3x=-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{3} \vee x=-1 \end{aligned}$$

9. $|-2x+6|<2$

$$\begin{aligned} |-2x+6|<2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2x+6<2 \wedge -2x+6>-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -2x<-4 \wedge -2x>-8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x>2 \wedge x<4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]2,4[\end{aligned}$$

10. $\dfrac{1}{|x|-3}=1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|-3}=1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1=|x|-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 4=|x| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad |x|=4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x=4 \vee x=-4 \end{aligned}$$

11. $x|x|>x$
Se $x>0$:

$$\begin{aligned} x|x|>x \quad &\Leftrightarrow \quad |x|>\frac{x}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad |x|>1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x>1 \vee x<-1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x>1 \qquad porque\ x>0. \end{aligned}$$

Se $x<0$:

$$\begin{aligned} x|x|>x \quad &\Leftrightarrow \quad |x|<\frac{x}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad |x|<1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x<1 \vee x>-1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x>-1 \wedge x<0 \qquad porque\ x<0. \end{aligned}$$

Assim, juntando as duas partes da resolução sai que

$$x>1 \ \vee \ (x>-1 \ \wedge \ x<0),$$

ou seja,

$$x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[.$$

12. $|x-1|+|x-2|>1$

Este exercício será resolvido usando a definição dos módulos envolvidos.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & se\ x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & se\ x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & se\ x \geq 1 \\ -x+1, & se\ x<1 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & se\ x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & se\ x-2<0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & se\ x \geq 2 \\ -x+2, & se\ x<2 \end{cases}$$

Assim, a resolução é dividida em 4 partes.

- *Parte 1:*
  Se $x \geq 1 \ \wedge\ x \geq 2$*, ou seja, se* $x \geq 2$*, temos que:*

  $$|x-1| = x-1 \qquad e \qquad |x-2| = x-2$$

  $$\begin{aligned} |x-1|+|x-2|>1 &\Leftrightarrow x-1+x-2>1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x>4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x>2 \qquad esta\ solução\ satisfaz\ a\ restrição \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

- *Parte 2:*
  Se $x \geq 1 \ \wedge\ x<2$*, ou seja, se* $x \in [1,2[$*, temos que:*

  $$|x-1| = x-1 \qquad e \qquad |x-2| = -x+2$$

  $$\begin{aligned} |x-1|+|x-2|>1 &\Leftrightarrow x-1-x+2>1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1>1 \qquad impossível \end{aligned}$$

- *Parte 3:*
  Se $x<1 \ \wedge\ x \geq 2$*, não há nada a verificar porque esta condição equivale a um conjunto vazio.*
- *Parte 4:*
  Se $x<1 \ \wedge\ x<2$*, ou seja, se* $x<1$*, temos que:*

  $$|x-1| = -x+1 \qquad e \qquad |x-2| = -x+2$$

  $$\begin{aligned} |x-1|+|x-2|>1 &\Leftrightarrow -x+1-x+2>1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x>-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x<\frac{-2}{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x<1 \qquad esta\ solução\ satisfaz\ a\ restrição \quad x<1 \end{aligned}$$

Assim, a solução é a união das várias soluções obtidas nas 4 partes da resolução:

$$(x>2 \ \vee\ x<1) \ \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[.$$