САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт компьютерных наук и кибербезопасности
высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Р А С Ч Ё Т Н О Е З А Д А Н И Е
«Построение модели операции»

по дисциплине «Системный анализ и принятие решений»

Выполнил:

студент гр. 5130901/20102

______________________ Вагнер А.А.
(подпись)

Преподаватель:

______________________ Сиднев А.Г.
(подпись)

«___»_____________ 2024 г.

Санкт-Петербург
2024

Исходные данные:

Вариант 3

$$\max\{2{,}0 * x_1 + 1{,}0 * x_2\}$$

$$\begin{cases} 1{,}0 * x_1 + 1{,}0 * x_2 \le 5{,}6 \\ 1{,}0 * x_1 - 1{,}0 * x_2 \le -2{,}4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Оглавление

1. Геометрическая интерпретация задачи и ее графическое решение.

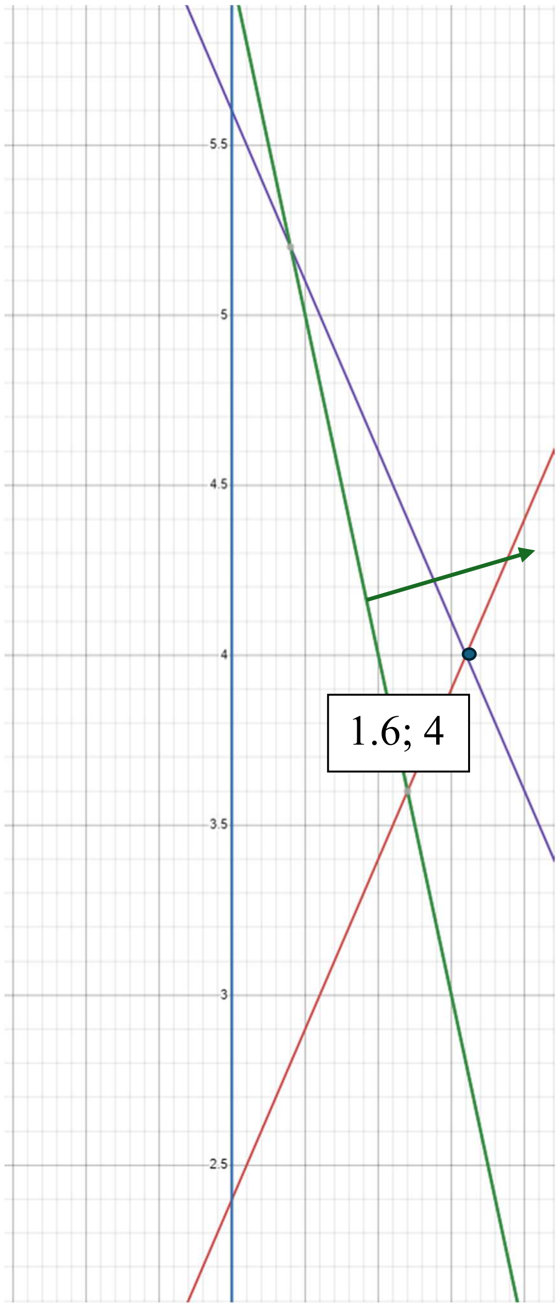
Для начала построим графические интерпретации следующих ограничений.

$x_1 + x_2 \leq 5.6$ – фиолетовая область

$x_1 - x_2 \leq -2.4$ – чёрная область

$x_1, x_2 \geq 0$ – красная и синяя область

Функция зелёного цвета – целевая, направление стрелки примерно отображает направление возрастания целевой функции.



Найдём пересечения $x_1 + x_2 = 5.6$ и $x_1 - x_2 = -2.4$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5.6 \\ x_1 - x_2 = -2.4 \end{cases}$$

Результат – (1.6, 4), согласно графическому представлению целевой функции, эта точка и будет оптимальным решением.

ОДЗ находится внутри треугольника со следующими вершинами: (0, 2.4); (1.6, 4); (5.6, 0).

Оценим значения целевой функции в этих точках:

$$F(0, 2.4) = 2.4$$
$$F(1.6, 4) = 7.2$$
$$F(0, 5.6) = 5.6$$

2. Обозначение опорных точек и соответствующих им наборов базисных переменных.

(0, 2.4) – x_2, s_2

(0, 5.6) – x_2, s_1

(1.6, 4) – x_1, x_2

3. Решение задачи симплекс-методом в табличной форме. Для получения допустимого базиса использовать метод искусственных переменных с решением вспомогательной задачи. Продолжить решение исходной задачи табличным методом до получения конечного результата.

Воспользуемся свободными переменными для перевода неравенств из системы в равенства.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5{,}6 \\ x_1 - x_2 + s_2 = -2{,}4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Умножим коэффициенты 2 неравенства на -1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5{,}6 \\ -x_1 + x_2 - s_2 = 2{,}4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Для поиска базиса решим вспомогательную задачу. Введём искусственную переменную во второе равенство.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5,6 \\ -x_1 + x_2 - s_2 + R_1 = 2,4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0 \end{cases}$$

Для постановки задачи на максимум запишем целевую функцию:

$$F(X) = -R_1 \rightarrow max$$

Из уравнений выразим искусственные переменные

$$R_1 = 2.4 + x_1 - x_2 + s_2$$

$$s_1 = 5.6 - x_1 - x_2$$

Решим систему относительно базисных переменных s_1, R_1, так как они образуют единичную матрицу.

	b	x_1	x_2	s_2
s_1	5.6	-1	-1	0
R_1	2.4	1	-1	1
F	-2.4	-1	1	-1

Выберем ведущий столбец как максимальное из значений с, то есть x_2

Выберем ведущую строку по следующему правилу $\min\left(-\frac{b_i}{a_{i2}}\right)$, где $a_{ij} < 0$

В новой таблице заменим в базисе переменную R_1 на x_2

Получаем новую таблицу:

	b	x_1	R_1	s_2
s_1	3.2	-2	1	-1
x_2	2.4	1	-1	1
F	0	0	-1	0

Так как выполняются условия допустимости (b>= 0) и оптимальности (c<= 0), следовательно, базис (s_1; x_2) является допустимым. В этом можно убедиться из графического представления задачи.

Так как мы перешли к другой задаче, значит надо определить новые коэффициенты свободных переменных в целевой функции:

$$F = 3x_1 + s_2 + 2.4$$

Составим таблицу.

	b	x_1	s_2
s_1	3.2	-2	-1
x_2	2.4	1	1
F	2.4	3	1

В базисе заменим s_1 на x_1. РЭ равен -2.

	b	s_1	s_2
x_1	1.6	-0.5	-0.5
x_2	4	-0.5	0.5
F	7.2	-1.5	-0.5

Так как выполняются условия допустимости (b>= 0) и оптимальности (c<= 0), делаем вывод, что получено оптимальное решение F(1.6; 4) = 7.2. Также отметим, что оно сходится с графическим решением.

4. Представить также решение модифицированной задачи с измененной целевой функцией f(x)=$C^T X$ –M*(сумма искусственных переменных).

Решим следующую задачу:

$$\max \{2{,}0 * x_1 + x_2 - M * R_1\}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5{,}6 \\ -x_1 + x_2 - s_2 + R_1 = 2{,}4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$R_1 = 2.4 + x_1 - x_2 + s_2$$
$$F = 2x_1 + x_2 - MR_1 = 2x_1 + x_2 - M(2.4 + x_1 - x_2 + s_2)$$
$$= (2 - M)x_1 + (1 + M)x_2 - Ms_2 - 2.4M$$

Таблица:

	b	*x_1*	*x_2*	*s_2*
s_1	*5.6*	*-1*	*-1*	*0*
R_1	*2.4*	*1*	*-1*	*1*
F	*-2.4M*	*2-M*	*1+M*	*-M*

В новой таблице заменим в базисе переменную R_1 на x_2

	b	x_1	R_1	s_2
s_1	*3,2*	*-2*	*1*	*-1*
x_2	*2.4*	*1*	*-1*	*1*
F	*2.4*	*3*	*-1-M*	*1*

В новой таблице заменим в базисе переменную s_1 на x_1

	b	s_1	R_1	s_2
x_1	*1.6*	*-0.5*	*0.5*	*-0.5*
x_2	*4*	*-0.5*	*-2*	*2*
F	*7.2*	*-1.5*	*0.5-M*	*-0.5*

Так как выполняются условия допустимости (b>= 0) и оптимальности (c<= 0), делаем вывод, что получено оптимальное решение F(1.6; 4) = 7.2. Результат совпадает с полученным в предыдущем пункте.

5. Решение модифицированной задачи симплекс-методом в матричной форме.

Каноническая запись формулировки задачи:

$$\max\{2{,}0 * x_1 + x_2\}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5{,}6 \\ -x_1 + x_2 - s_2 = 2{,}4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Матричная форма:

$$\max(C^T X)$$
$$AX = b$$
$$C^T = (2, 1, 0, 0)$$
$$b^T = (5.6, 2.4)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

В качестве базиса выберем пару переменных, которая гарантированно может быть допустимым базисом, например x_2и s_1. Это было доказано в пункте 3.

Применим признак допустимости опорной точки $\tilde{X}^{Б_0} = P_0^{-1} b \geq 0$

$$Б_0 = (2 \quad 3)$$
$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$P_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$X^{Б_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5.6 \\ 2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

Базис является допустимым.

Проверим базис на оптимальность.

$$\Delta_1 = C^{TБ_0} P_0^{-1} A_1 - c_1 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 = -1 - 2 = -3$$
$$\Delta_4 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

Признак оптимальности не выполняется. x_1 следует включить в базис, так как $\Delta_1 < \Delta_4$. Определим переменную, которую следует исключить из базиса.

$$z_k = P_0^{-1} A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{x_{jk}^0}{z_{lk}} = \min_i \frac{x_{ji}^0}{z_{ik}} |_{z_{ik} > 0} = 3.2$$

Следовательно из базиса исключаем s_1

$$Б_1 = (1 \quad 2)$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$X^{Б_1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5.6 \\ 2.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Значения больше нуля следовательно базис является допустимым.

$$\Delta_3 = C^{TБ_1} P_1^{-1} A_3 - c_3 = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1$$
$$\Delta_4 = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 0$$

Значения ≥ 0 следовательно выполняется признак оптимальности.

Найдём значение целевой функции в точке оптимального решения.

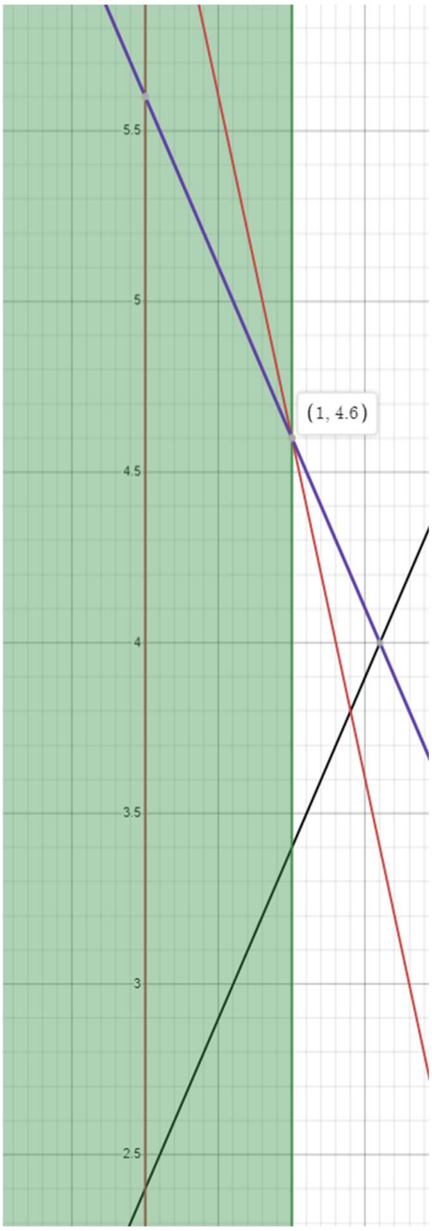
$$F = C^{T Б_1} P_1^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.6 \\ 2.4 \end{pmatrix} = 7.2$$

Результат соответствует ожидаемому.

6. Введение дополнительного ограничения, отсекающего оптимальную точку. Решение новой задачи двойственным симплекс-методом в табличной форме.

Добавим ограничение, отсекающее ранее предложенное решение, например $x_2 \leq 3$. Получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5{,}6 \\ x_1 - x_2 \leq -2{,}4 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Целевая функция та же:

$$\max\{2{,}0 * x_1 + 1{,}0 * x_2\}$$

Представим в канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 5{,}6 \\ -x_1 + x_2 - s_2 = 2{,}4 \\ x_1 + s_3 = 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Воспользуемся таблицей, полученной на последнем этапе третьего пункта:

	b	s_1	s_2
x_1	1.6	-0.5	-0.5
x_2	4	-0.5	0.5
F	7.2	-1.5	-0.5

Добавим в базис s_3, предварительно выразив его через свободные переменные.

$$s_3 = 1 - x_1 = 1 + 0.5s_1 + 0.5s_2 - 1.6 = -0.6 + 0.5s_1 + 0.5s_2$$

	b	s_1	s_2
x_1	1.6	-0.5	-0.5
x_2	4	-0.5	0.5
s_3	-0.6	0.5	0.5
F	7.2	-1.5	-0.5

Признак допустимости выполняется, признак оптимальности нет, следует перейти к иному базису.

	b	s_1	s_2
x_1	1.6	-0.5	-0.5
x_2	4	-0.5	0.5
s_3	-0.6	0.5	0.5
F	7.2	-1.5	-0.5

	b	s_1	s_2
x_1	1	0	-1
x_2	4.6	-1	1
s_3	1.2	-1	2
F	6.6	-1	-1

Базис оптимален и допустим. Оптимально решение – F(1; 4.6)=6.6

Ответ соответствует графическому решению.

7. Формулировка задачи, двойственной по отношению к исходной. Графическое решение двойственной задачи.

Исходная задача в каноническом виде:

$$\max\,(C^T X)$$

$$\begin{aligned}
&AX = b\\
&X \geq 0\\
&C^T = (2, 1, 0, 0)\\
&b^T = (5.6, 2.4)\\
&A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Значит двойственная задача будет следующей:

$$\begin{aligned}
&\min(b^T Y)\\
&A^T Y \geq C\\
&C^T = (2, 1, 0, 0)\\
&b^T = (5.6, 2.4)\\
&A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

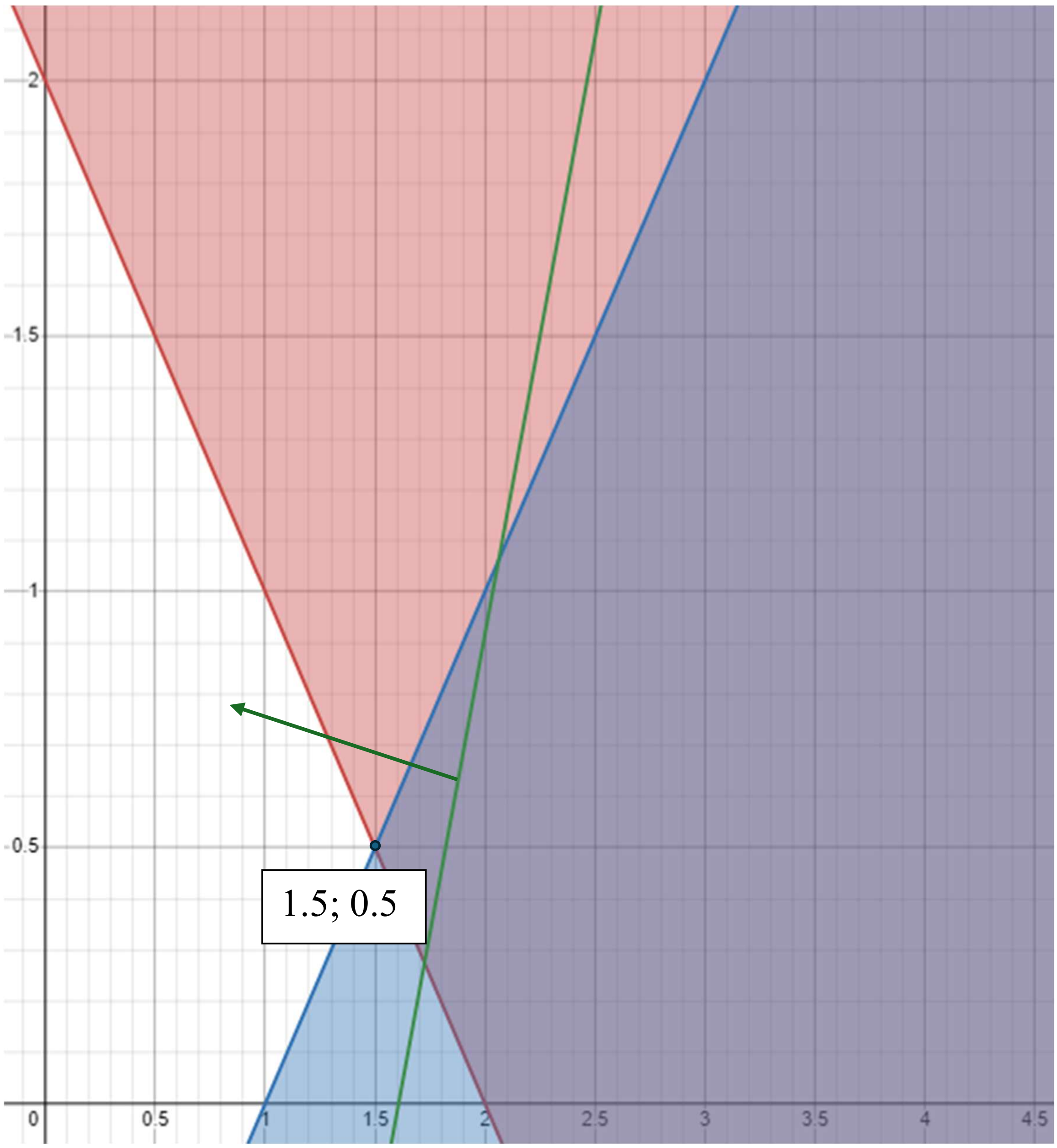
Представим в виде системы:

$$\min(5.6y_1 + 2.4y_2)$$
$$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ -y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Произведём замену -y_2на y_2:

$$\min(5.6y_1 - 2.4y_2)$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$



8. Определение координат сопряженных опорных точек прямой и двойственной задач. Нахождение оптимального решения двойственной задачи по оптимальному решению прямой задачи.

Найдём сопряжённую опорную точку.

$$X_{opt}^{Б} = (x_1, x_2)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_i^T Y = C_i$$

С учётом замены $-y_2$ на y_2 получаем систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 - y_2 = 1 \end{cases}$$

Результат – $y_1 = 1.5$, $y_2 = 0.5$. F = $5.6 * 1.5 - 2.4 * 0.5 = 7.2$

Решение совпадает с ожидаемым.