

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по расчетному заданию №1

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений

Выполнил студент гр. 5130901/10xxx _____ И.О.
Фамилия
(подпись)

Принял преподаватель _____ А.Г.
Сиднев
(подпись)

“ _____ ” _____ 2024 г.

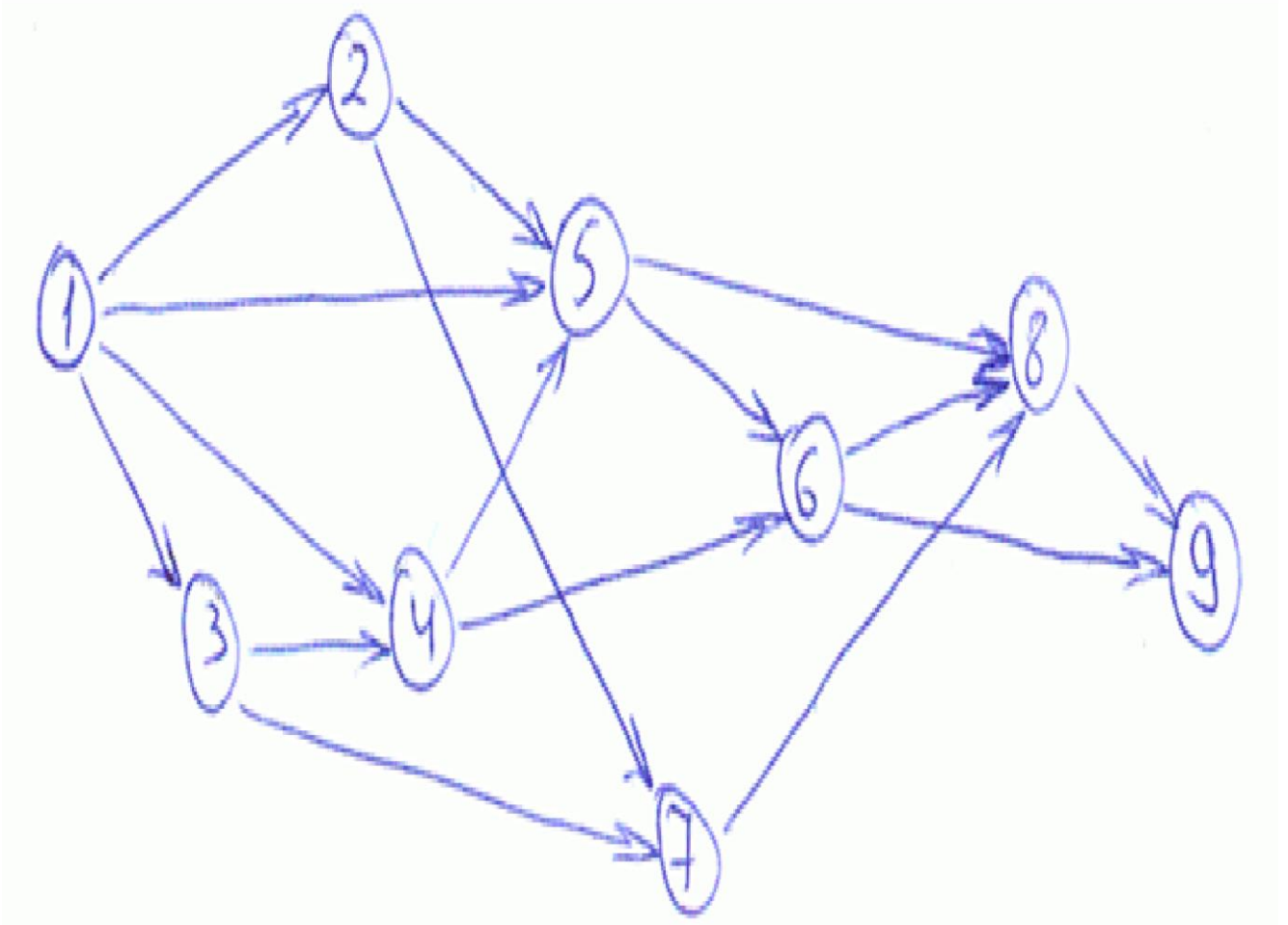
Санкт-Петербург

2024

Исходные данные

- Вариант: 16
- Число исполнителей: 2
- Решающее правило: Работы с наименьшей длительностью

Граф:



Задание 1

Определение наиболее ранних моментов начала работ с использованием метода математического программирования.

Введем обозначения

- t_{ij} – время начала работы ij
- τ_{ij} – продолжительность работы ij
- $T_{ij} = t_{ij} + \tau_{ij}$ – время окончания работы ij
- M – номер последнего узла
- T_M – время окончания всех работ
- $G^{-1}(i)$ – множество обратного соответствия, включающее все соседние вершины, из которых можно попасть в i вершину

Тогда время окончания работы равно $t_{ij} + \tau_{ij}$

Составим модель задачи линейного программирования вида:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{(ij)} t_{ij} + T_M \\ & \left\{ \begin{array}{l} t_{ij} \geq T_{li} = t_{li} + \tau_{li}, \quad i = \overline{1, (M-1)}; \quad l \in G^{-1}(i) \\ T_M \geq t_{lM} + \tau_{lM}, \quad l \in G^{-1}(M) \\ t_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

В нашем случае ограничения задачи будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} t_{25} &\geq t_{12} + 5 \\ t_{34} &\geq t_{13} + 7 \\ t_{37} &\geq t_{13} + 7 \\ t_{45} &\geq t_{14} + 5 \\ t_{45} &\geq t_{34} + 8 \\ t_{46} &\geq t_{14} + 5 \\ t_{46} &\geq t_{34} + 8 \\ t_{56} &\geq t_{15} + 8 \\ t_{56} &\geq t_{25} + 6 \\ t_{56} &\geq t_{45} + 6 \\ t_{58} &\geq t_{15} + 8 \\ t_{58} &\geq t_{25} + 6 \\ t_{58} &\geq t_{45} + 6 \\ t_{68} &\geq t_{46} + 5 \\ t_{68} &\geq t_{56} + 4 \\ t_{69} &\geq t_{46} + 5 \\ t_{69} &\geq t_{56} + 4 \\ t_{78} &\geq t_{37} + 8 \\ t_{89} &\geq t_{58} + 5 \end{aligned}$$

$$t_{89} \geq t_{78} + 9$$

$$t_{89} \geq t_{68} + 9$$

$$T_9 \geq t_{69} + 5$$

$$T_9 \geq t_{89} + 8$$

Решив эту задачу с помощью программных средств решения ЗЛП, мы получили следующие значения переменных:

t_{12}	0
t_{13}	0
t_{14}	0
t_{15}	0
t_{25}	5
t_{34}	7
t_{37}	7
t_{45}	15
t_{46}	15
t_{56}	21
t_{58}	21
t_{68}	25
t_{69}	25
t_{78}	15
t_{89}	34
T_9	42

Таким образом нам стали известны:

- Минимальное время начала каждой работы
- Суммарное время выполнения работ (T_M)

Задание 2

Считать, что вместо длительностей работ заданы трудоемкости.
 Длительность равна трудоемкость/интенсивность выполнения работы.
 Определить наиболее ранние моменты начала работ и назначенные работам интенсивности их выполнения при условии, что суммарная интенсивность не превышает 75% общего числа выполняемых работ.

Введем обозначения

- t_{ij} – время начала работы ij
- m_{ij} – интенсивность работы ij
- Q_{ij} – трудоемкость работы ij
- $T_{ij} = t_{ij} + \frac{Q_{ij}}{m_{ij}}$ – время окончания работы ij
- M – номер последнего узла
- T_M – время окончания всех работ
- N – общее число выполняемых работ
- $G^{-1}(i)$ – множество обратного соответствия, включающее все соседние вершины, из которых можно попасть в i вершину

Изменим модель задачи следующим образом:

$$\begin{cases} \min \sum_{(ij)} t_{ij} + T_M \\ t_{ij} \geq T_{li} = t_{li} + \frac{Q_{li}}{m_{li}}, \quad i = \overline{1, (M-1)}; \quad l \in G^{-1}(i) \\ T_M \geq t_{lM} + \frac{Q_{lM}}{m_{lM}}, \quad l \in G^{-1}(M) \\ \sum_{(ij)} m_{ij} \leq 0.75N \\ t_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

В нашем случае ограничения будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} t_{25} &\geq t_{12} + \frac{5}{m_{12}} \\ t_{34} &\geq t_{13} + \frac{7}{m_{13}} \\ t_{37} &\geq t_{13} + \frac{7}{m_{13}} \\ t_{45} &\geq t_{14} + \frac{5}{m_{14}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{45} &\geq t_{34} + \frac{8}{m_{34}} \\
t_{46} &\geq t_{14} + \frac{5}{m_{14}} \\
t_{46} &\geq t_{34} + \frac{8}{m_{34}} \\
t_{56} &\geq t_{15} + \frac{8}{m_{15}} \\
t_{56} &\geq t_{25} + \frac{6}{m_{25}} \\
t_{56} &\geq t_{45} + \frac{6}{m_{45}} \\
t_{58} &\geq t_{15} + \frac{8}{m_{15}} \\
t_{58} &\geq t_{25} + \frac{6}{m_{25}} \\
t_{58} &\geq t_{45} + \frac{6}{m_{45}} \\
t_{68} &\geq t_{46} + \frac{5}{m_{46}} \\
t_{68} &\geq t_{56} + \frac{4}{m_{56}} \\
t_{69} &\geq t_{46} + \frac{5}{m_{46}} \\
t_{69} &\geq t_{56} + \frac{4}{m_{56}} \\
t_{78} &\geq t_{37} + \frac{8}{m_{37}} \\
t_{89} &\geq t_{58} + \frac{5}{m_{58}} \\
t_{89} &\geq t_{78} + \frac{9}{m_{78}} \\
t_{89} &\geq t_{68} + \frac{9}{m_{68}} \\
T_9 &\geq t_{69} + \frac{5}{m_{69}} \\
T_9 &\geq t_{89} + \frac{8}{m_{89}} \\
\sum_{(ij)} m_{ij} &\leq 0.75 \cdot 15
\end{aligned}$$

Решив эту задачу с помощью программных средств решения ЗНП, мы получили следующие значения переменных

Моменты начала работ:

t_{12}	0.0
t_{13}	0.0
t_{14}	0.0
t_{15}	0.0
t_{25}	6.1676
t_{34}	3.8584
t_{37}	3.8584
t_{45}	9.295
t_{46}	9.295
t_{56}	15.1961
t_{58}	15.1961
t_{68}	20.4012
t_{69}	20.4012
t_{78}	13.6272
t_{89}	32.24
T_9	44.9488

Интенсивности:

m_{12}	0.8107
m_{13}	1.8142
m_{14}	0.5379
m_{15}	0.5264
m_{25}	0.6646
m_{34}	1.4715
m_{37}	0.8189
m_{45}	1.0168
m_{46}	0.4502
m_{56}	0.7685
m_{58}	0.2934
m_{68}	0.7602
m_{69}	0.2037
m_{78}	0.4835
m_{89}	0.6295

Задание 3

Самостоятельно распределить работы между заданным числом исполнителей и сформулировать задачу математического программирования с бинарными индикаторными переменными. Определить число бинарных переменных и дополнительных ограничений в этой задаче и дать формулировку части ограничений с бинарными переменными.

Распределим работы между 2 исполнителями:

$$1: [t_{12}, t_{14}, t_{25}, t_{37}, t_{46}, t_{58}, t_{69}, t_{89}]$$

$$2: [t_{13}, t_{15}, t_{34}, t_{45}, t_{56}, t_{68}, t_{78}]$$

Введем некоторую постоянную

$$M \gg \sum_{(ij)} t_{ij}$$

Тогда каждой паре работ $\{ij, lm\}$, назначенных на исполнителя k можно поставить в соответствие 3 ограничения:

$$\begin{cases} (M + \tau_{lm})Y_{ij,lm,k} + (t_{ij} - t_{lm}) \geq \tau_{lm}, \\ (M + \tau_{ij})Y_{lm,ij,k} + (t_{lm} - t_{ij}) \geq \tau_{ij}, \\ Y_{ij,lm,k} + Y_{lm,ij,k} = 1 \end{cases}$$

Эти ограничения обеспечивают выполнение условия невозможности наложения процессов выполнения работ ij и lm во времени

Пусть количество работ, назначенных на k исполнителя равно r_k

Число дополнительных ограничений задачи равно $3 \cdot \sum_k C_{r_k}^2$:

$$3 \cdot (C_8^2 + C_7^2) = 3 \cdot (28 + 21) = 147$$

Число бинарных переменных $2 \cdot \sum_k C_{r_k}^2$:

$$2 \cdot (C_8^2 + C_7^2) = 2 \cdot (28 + 21) = 98$$

Задание 3.1

Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.

Изменим задачу так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Для этого пусть на исполнителя 1 назначены следующие 3 задачи, остальные задачи не закреплены за исполнителями.

$$1: [t_{12}, t_{13}, t_{14}]$$

$$2: [t_{15}, t_{25}]$$

Число бинарных переменных:

$$2 \cdot (C_3^2 + C_2^2) = 8$$

Число ограничений:

$$3 \cdot (C_3^2 + C_2^2) = 12$$

Дополнительные ограничения задачи:

$$(M + 7)Y_{12,13} + (t_{12} - t_{13}) \geq 7$$

$$(M + 5)Y_{13,12} + (t_{13} - t_{12}) \geq 5$$

$$Y_{12,13} + Y_{13,12} = 1$$

$$(M + 5)Y_{12,14} + (t_{12} - t_{14}) \geq 5$$

$$(M + 5)Y_{14,12} + (t_{14} - t_{12}) \geq 5$$

$$Y_{12,14} + Y_{14,12} = 1$$

$$(M + 5)Y_{13,14} + (t_{13} - t_{14}) \geq 5$$

$$(M + 7)Y_{14,13} + (t_{14} - t_{13}) \geq 7$$

$$Y_{13,14} + Y_{14,13} = 1$$

$$(M + 6)Y_{15,25} + (t_{15} - t_{25}) \geq 6$$

$$(M + 8)Y_{25,15} + (t_{25} - t_{15}) \geq 8$$

$$Y_{15,25} + Y_{25,15} = 1$$

Решив эту задачу с помощью программных средств решения ЗЛП в целых числах, мы получили следующие значения переменных t

t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{25}	t_{34}	t_{37}	t_{45}	t_{46}	t_{56}	t_{58}	t_{68}	t_{69}	t_{78}	t_{89}	T_9
7	0	12	0	12	7	7	17	17	23	23	27	27	15	36	44

И следующие значения переменных Y

$Y_{12,13}$	$Y_{13,12}$	$Y_{12,14}$	$Y_{14,12}$	$Y_{13,14}$	$Y_{14,13}$	$Y_{15,25}$	$Y_{25,15}$
0	1	1	0	1	0	1	0

Таким образом порядок исполнения работ первым исполнителем выглядит следующим образом:

$$1: t_{13} \rightarrow t_{12} \rightarrow t_{14}$$

$$2: t_{15} \rightarrow t_{25}$$

Задание 4

Найти характеристики t_i^* , t_i^{**} и r_{ij} расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.

t_i^* - наиболее ранний момент наступления события i

t_i^{**} - наиболее поздний момент наступления события i

τ_{ij} - длительность работы ij

$r_{ij} = t_j^{**} - (t_i^* + \tau_{ij})$ - резерв времени выполнения работы ij

Уравнения Беллмана поиска t_i^* на каждом шаге выглядят следующим образом:

$$t_i^* = \max_{j \in G^{-1}(i)} \{t_j^* + \tau_{ji}\}$$

где, $G^{-1}(i)$ - множество обратного соответствия, включающее все соседние вершины, из которых можно попасть в i вершину

Процесс вычисления производится от начального узла к конечному ($t_1^* = 0$):

$$\begin{aligned} t_1^* &= 0 \\ t_2^* &= \max(t_1^* + 5) = \max(5) = 5 \\ t_3^* &= \max(t_1^* + 7) = \max(7) = 7 \\ t_4^* &= \max\left(\begin{matrix} t_1^* + 5 \\ t_3^* + 8 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 5 \\ 15 \end{matrix}\right) = 15 \\ t_5^* &= \max\left(\begin{matrix} t_2^* + 6 \\ t_4^* + 8 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 11 \\ 21 \end{matrix}\right) = 21 \\ t_6^* &= \max\left(\begin{matrix} t_4^* + 5 \\ t_5^* + 4 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 20 \\ 25 \end{matrix}\right) = 25 \\ t_7^* &= \max\left(\begin{matrix} t_3^* + 8 \\ t_5^* + 5 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 15 \\ 26 \end{matrix}\right) = 26 \\ t_8^* &= \max\left(\begin{matrix} t_7^* + 9 \\ t_6^* + 9 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 34 \\ 34 \end{matrix}\right) = 34 \\ t_9^* &= \max\left(\begin{matrix} t_6^* + 5 \\ t_8^* + 8 \end{matrix}\right) = \max\left(\begin{matrix} 30 \\ 42 \end{matrix}\right) = 42 \end{aligned}$$

Уравнения Беллмана поиска t_j^{**} на каждом шаге выглядят следующим образом:

$$t_j^{**} = \min_{i \in G(j)} \{t_i^{**} - \tau_{ji}\}$$

где, $G(j)$ - множество прямого соответствия, включающее все соседние вершины, в которые можно попасть из j вершины

Процесс вычисления производится от конечного узла к начальному ($t_M^{**} = t_M^*$, где M – номер конечного узла):

$$\begin{aligned}
 t_9^{**} &= t_9^* = 42 \\
 t_8^{**} &= \min(t_9^{**} - 8) = \min(34) = 34 \\
 t_7^{**} &= \min(t_8^{**} - 9) = \min(25) = 25 \\
 t_6^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_8^{**} - 9 \\ t_9^{**} - 5 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 25 \\ 37 \end{matrix}\right) = 25 \\
 t_5^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_6^{**} - 4 \\ t_8^{**} - 5 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 21 \\ 29 \end{matrix}\right) = 21 \\
 t_4^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_5^{**} - 6 \\ t_6^{**} - 5 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 15 \\ 20 \end{matrix}\right) = 15 \\
 t_3^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_4^{**} - 8 \\ t_7^{**} - 8 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 7 \\ 17 \end{matrix}\right) = 7 \\
 t_2^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_5^{**} - 6 \\ t_6^{**} - 5 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 15 \\ 10 \end{matrix}\right) = 15 \\
 t_1^{**} &= \min\left(\begin{matrix} t_3^{**} - 7 \\ t_4^{**} - 5 \\ t_5^{**} - 8 \end{matrix}\right) = \min\left(\begin{matrix} 0 \\ 10 \\ 13 \end{matrix}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Полные резервы вычисляются по формуле $r_{ij} = t_j^{**} - (t_i^* + \tau_{ij})$:

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= t_2^{**} - (t_1^* + \tau_{12}) = 15 - (0 + 5) = 10 \\
 r_{13} &= t_3^{**} - (t_1^* + \tau_{13}) = 7 - (0 + 7) = 0 \\
 r_{14} &= t_4^{**} - (t_1^* + \tau_{14}) = 15 - (0 + 5) = 10 \\
 r_{15} &= t_5^{**} - (t_1^* + \tau_{15}) = 21 - (0 + 8) = 13 \\
 r_{25} &= t_5^{**} - (t_2^* + \tau_{25}) = 21 - (5 + 6) = 10 \\
 r_{34} &= t_4^{**} - (t_3^* + \tau_{34}) = 15 - (7 + 8) = 0 \\
 r_{37} &= t_7^{**} - (t_3^* + \tau_{37}) = 25 - (7 + 8) = 10 \\
 r_{45} &= t_5^{**} - (t_4^* + \tau_{45}) = 21 - (15 + 6) = 0 \\
 r_{46} &= t_6^{**} - (t_4^* + \tau_{46}) = 25 - (15 + 5) = 5 \\
 r_{56} &= t_6^{**} - (t_5^* + \tau_{56}) = 25 - (21 + 4) = 0 \\
 r_{58} &= t_8^{**} - (t_5^* + \tau_{58}) = 34 - (21 + 5) = 8 \\
 r_{68} &= t_8^{**} - (t_6^* + \tau_{68}) = 34 - (25 + 9) = 0 \\
 r_{69} &= t_9^{**} - (t_6^* + \tau_{69}) = 42 - (25 + 5) = 12 \\
 r_{78} &= t_8^{**} - (t_7^* + \tau_{78}) = 34 - (15 + 9) = 10 \\
 r_{89} &= t_9^{**} - (t_8^* + \tau_{89}) = 42 - (34 + 8) = 0
 \end{aligned}$$

Критические пути на графе – пути где все ребра имеют нулевой полный резерв. В нашем случае критические пути:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9$$

Задание 5

Найти те же характеристики t_i^* , t_i^{**} и r_{ij} расписания выполнения комплекса работ с использованием математического программирования.

Для поиска наиболее ранних моментов t_i^* сформулируем ЗЛП:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^M t_i^* \right\}$$

$$\begin{cases} t_i^* \geq t_j^* + \tau_{ij}, & i = \overline{1, M}, j \in G^{-1}(i) \\ t_1^* = 0 \\ t_i^* \geq 0 \end{cases}$$

В нашем случае получаем следующие ограничения задачи:

$$\begin{aligned} t_1^* &= 0 \\ t_2^* &\geq t_1^* + 5 \\ t_3^* &\geq t_1^* + 7 \\ t_4^* &\geq t_1^* + 5 \\ t_4^* &\geq t_3^* + 8 \\ t_5^* &\geq t_1^* + 8 \\ t_5^* &\geq t_2^* + 6 \\ t_5^* &\geq t_4^* + 6 \\ t_6^* &\geq t_4^* + 5 \\ t_6^* &\geq t_5^* + 4 \\ t_7^* &\geq t_3^* + 8 \\ t_8^* &\geq t_5^* + 5 \\ t_8^* &\geq t_6^* + 9 \\ t_8^* &\geq t_7^* + 9 \\ t_9^* &\geq t_6^* + 5 \\ t_9^* &\geq t_8^* + 8 \end{aligned}$$

Решив эту задачу с помощью программных средств решения ЗЛП в целых числах, мы получили следующие значения переменных

t_1^*	t_2^*	t_3^*	t_4^*	t_5^*	t_6^*	t_7^*	t_8^*	t_9^*
0.0	5.0	7.0	15.0	21.0	25.0	15.0	34.0	42.0

Они аналогичны тем же значениям, что были получены с помощью динамического программирования.

Для поиска наиболее поздних моментов t_i^{**} сформулируем ЗЛП:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^M t_j^{**} \right\}$$

$$\begin{cases} t_j^{**} \leq t_i^{**} - \tau_{ij}, & j = \overline{1, M}, i \in G(i) \\ t_M^{**} = t_M^* \\ t_j^{**} \geq 0 \end{cases}$$

В нашем случае получаем следующие ограничения задачи:

$$\begin{aligned}t_9^{**} &= 42.0 \\t_9^{**} &\geq t_6^{**} - 5 \\t_9^{**} &\geq t_8^{**} - 8 \\t_8^{**} &\geq t_5^{**} - 5 \\t_8^{**} &\geq t_6^{**} - 9 \\t_8^{**} &\geq t_7^{**} - 9 \\t_7^{**} &\geq t_3^{**} - 8 \\t_6^{**} &\geq t_4^{**} - 5 \\t_6^{**} &\geq t_5^{**} - 4 \\t_5^{**} &\geq t_1^{**} - 8 \\t_5^{**} &\geq t_2^{**} - 6 \\t_5^{**} &\geq t_4^{**} - 6 \\t_4^{**} &\geq t_1^{**} - 5 \\t_4^{**} &\geq t_3^{**} - 8 \\t_3^{**} &\geq t_1^{**} - 7 \\t_2^{**} &\geq t_1^{**} - 5\end{aligned}$$

Решив эту задачу с помощью программных средств решения ЗЛП в целых числах, мы получили следующие значения переменных

t_1^{**}	t_2^{**}	t_3^{**}	t_4^{**}	t_5^{**}	t_6^{**}	t_7^{**}	t_8^{**}	t_9^{**}
0.0	15.0	7.0	15.0	21.0	25.0	25.0	34.0	42.0

Они аналогичны тем же значениям, что были получены с помощью динамического программирования.

Полные резервы вычисляются по той же формуле, что и в динамическом программировании

Задание 6

Определить помимо полных резервов времени $F_n = r_{ij}$ работ ij резервы времени, относящиеся к событиям j сетевого графа, а именно: $F_{нз1}, F_c, F_{нз2}$.

Определим независимые резервы 1-го порядка по формуле $F_{нз1,j} = t_j^{**} - t_j^*$:

$$\begin{aligned} F_{нз1,1} &= t_1^{**} - t_1^* = 0 - 0 = 0 \\ F_{нз1,2} &= t_2^{**} - t_2^* = 15 - 5 = 10 \\ F_{нз1,3} &= t_3^{**} - t_3^* = 7 - 7 = 0 \\ F_{нз1,4} &= t_4^{**} - t_4^* = 15 - 15 = 0 \\ F_{нз1,5} &= t_5^{**} - t_5^* = 21 - 21 = 0 \\ F_{нз1,6} &= t_6^{**} - t_6^* = 25 - 25 = 0 \\ F_{нз1,7} &= t_7^{**} - t_7^* = 25 - 15 = 10 \\ F_{нз1,8} &= t_8^{**} - t_8^* = 34 - 34 = 0 \\ F_{нз1,9} &= t_9^{**} - t_9^* = 42 - 42 = 0 \end{aligned}$$

Определим свободные резервы по формуле $F_{c,ij} = t_j^* - (t_i^* + \tau_{ij})$:

$$\begin{aligned} F_{c,12} &= t_2^* - (t_1^* + \tau_{12}) = 5 - (0 + 5) = 0 \\ F_{c,13} &= t_3^* - (t_1^* + \tau_{13}) = 7 - (0 + 7) = 0 \\ F_{c,14} &= t_4^* - (t_1^* + \tau_{14}) = 15 - (0 + 5) = 10 \\ F_{c,15} &= t_5^* - (t_1^* + \tau_{15}) = 21 - (0 + 8) = 13 \\ F_{c,25} &= t_5^* - (t_2^* + \tau_{25}) = 21 - (5 + 6) = 10 \\ F_{c,34} &= t_4^* - (t_3^* + \tau_{34}) = 15 - (7 + 8) = 0 \\ F_{c,37} &= t_7^* - (t_3^* + \tau_{37}) = 15 - (7 + 8) = 0 \\ F_{c,45} &= t_5^* - (t_4^* + \tau_{45}) = 21 - (15 + 6) = 0 \\ F_{c,46} &= t_6^* - (t_4^* + \tau_{46}) = 25 - (15 + 5) = 5 \\ F_{c,56} &= t_6^* - (t_5^* + \tau_{56}) = 25 - (21 + 4) = 0 \\ F_{c,58} &= t_8^* - (t_5^* + \tau_{58}) = 34 - (21 + 5) = 8 \\ F_{c,68} &= t_8^* - (t_6^* + \tau_{68}) = 34 - (25 + 9) = 0 \\ F_{c,69} &= t_9^* - (t_6^* + \tau_{69}) = 42 - (25 + 5) = 12 \\ F_{c,78} &= t_8^* - (t_7^* + \tau_{78}) = 34 - (15 + 9) = 10 \\ F_{c,89} &= t_9^* - (t_8^* + \tau_{89}) = 42 - (34 + 8) = 0 \end{aligned}$$

Определим независимые резервы 2-го порядка по формуле $F_{нз2,ij} = t_j^* - (t_i^{**} + \tau_{ij})$:

$$\begin{aligned} F_{нз2,12} &= t_2^* - (t_1^{**} + \tau_{12}) = 5 - (0 + 5) = 0 \\ F_{нз2,13} &= t_3^* - (t_1^{**} + \tau_{13}) = 7 - (0 + 7) = 0 \\ F_{нз2,14} &= t_4^* - (t_1^{**} + \tau_{14}) = 15 - (0 + 5) = 10 \\ F_{нз2,15} &= t_5^* - (t_1^{**} + \tau_{15}) = 21 - (0 + 8) = 13 \\ F_{нз2,25} &= t_5^* - (t_2^{**} + \tau_{25}) = 21 - (15 + 6) = 0 \\ F_{нз2,34} &= t_4^* - (t_3^{**} + \tau_{34}) = 15 - (7 + 8) = 0 \\ F_{нз2,37} &= t_7^* - (t_3^{**} + \tau_{37}) = 15 - (7 + 8) = 0 \\ F_{нз2,45} &= t_5^* - (t_4^{**} + \tau_{45}) = 21 - (15 + 6) = 0 \\ F_{нз2,46} &= t_6^* - (t_4^{**} + \tau_{46}) = 25 - (15 + 5) = 5 \\ F_{нз2,56} &= t_6^* - (t_5^{**} + \tau_{56}) = 25 - (21 + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\text{H32},58} &= t_8^* - (t_5^{**} + \tau_{58}) = 34 - (21 + 5) = 8 \\
F_{\text{H32},68} &= t_8^* - (t_6^{**} + \tau_{68}) = 34 - (25 + 9) = 0 \\
F_{\text{H32},69} &= t_9^* - (t_6^{**} + \tau_{69}) = 42 - (25 + 5) = 12 \\
F_{\text{H32},78} &= t_8^* - (t_7^{**} + \tau_{78}) = 34 - (25 + 9) = 0 \\
F_{\text{H32},89} &= t_9^* - (t_8^{**} + \tau_{89}) = 42 - (34 + 8) = 0
\end{aligned}$$

Задание 7

Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания. Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

Математическое ожидание длительности критического пути:

$$M[T_{crit_1}] = \sum M_{ij} = 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 8 = 42$$

Дисперсия суммы критического пути:

$$D[T_{crit_1}] = \sum D_{ij} = 0.05^2 \cdot (7^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 9^2 + 8^2) = 0.775$$

Посчитаем вероятность, что время выполнения комплекса работ не превысит детерминированное значение на 10%:

- $\varepsilon = T \cdot 0.1$

$$\begin{aligned} P(T_{crit_1} \leq (1 + 0.1)M[T]) &= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{T_{crit_1}}}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{4.2}{\sqrt{0.775}}\right) + 0.5 \\ &= 0.49999 + 0.5 = 0.99999 \end{aligned}$$

Видим, что вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи на 10% равна 99.999%.

Т.к. этот процент достаточно велик, то наше предположение о неизменности критического пути было верным.

Задание 8

Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму Ганта.

Правило выбора работ:

- Число исполнителей: 2
- Решающее правило: Работы с наименьшей длительностью

Параметры:

- T – текущее общее время выполнения
- E – список пройденных событий
- D – список выполненных работ на момент времени T
- N – список выполняемых на момент времени T работ
- W – список доступных на выполнение работ на момент времени T
- A – список длительностей доступных на выполнение работ
- R – список резервов доступных на выполнение работ
- V – список уровней доступных на выполнение работ
- B – список работ, начатых в момент времени T
- L – список времен освобождения ресурсов

T	E	D	N	W	A	R	V	B	L
0	1		1: – 2: –	12 13 14	5 7 5	10 0 10	1 1 1	1: (1,4) 2: (1,2)	1: 5 2: 5
5	1, 2, 4	(1, 4), (1, 2)	1: – 2: –	13 15 25	7 8 6	0 13 10	1 1 2	1: (1,3) 2: (2,5)	1: 12 2: 11
11	1, 2, 4, 5	(1, 4), (1, 2), (2, 5)	1: (1,3) 2: –	15	8	13	1	1: – 2: (1,5)	1: 12 2: 19
12	1, 2, 3, 4, 5	(1, 4), (1, 2),	1: – 2: (1,5)	34 37	8 8	0 10	2 2	1: (3,4) 2: –	1: 20 2: 19

19	1, 2, 3, 4, 5	(2, 5), (1, 3) (1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5)	1: (3,4) 2: —	37	8	10	2	1: — 2: (3,7)	1: 20 2: 27
20	1, 2, 3, 4, 5	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5)	1: — 2: (3,7)	45 46	6 5	0 5	3 3	1: (4,6) 2: —	1: 25 2: 27
25	1, 2, 3, 4, 5, 6	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4)	1: — 2: (3,7)	45	6	0	3	1: (4,5) 2: —	1: 31 2: 27
27	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6)	1: (4,5) 2: —	78	9	10	3	1: — 2: (7,8)	1: 31 2: 36
31	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7)	1: — 2: (7,8)	56 58	4 5	0 8	4 4	1: (5,6) 2: —	1: 35 2: 36
35	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7)	1: — 2: (7,8)	58 68 69	5 9 5	8 0 12	4 5 5	1: (5,8) 2: —	1: 40 2: 36

		(4, 5), (5, 6)							
36	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7), (4, 5), (5, 6), (7, 8)	1: (5,8) 2: —	68 69	9 5	0 12	5 5	1: — 2: (6,9)	1: 40 2: 41
40	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7), (4, 5), (5, 6), (7, 8)	1: — 2: (6,9)	68	9	0	5	1: (6,8) 2: —	1: 49 2: 41
41	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7), (4, 5), (5, 6), (7, 8), (5, 8)	1: (6,8) 2: —	-	-	-	-	1: — 2: —	1: 49 2: —
49	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	(1, 4), (1, 2), (2, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 6), (3, 7),	1: — 2: —	89	8	0	6	1: (8,9) 2: —	1: 57 2: —

		(4, 5),							
		(5, 6),							
		(7, 8),							
		(5, 8),							
		(6, 9),							
		(6, 8)							
57	1, 2,	(1, 4),	1: —	-	-	-	-	1: —	1: —
	3, 4,	(1, 2),	2: —					2: —	2: —
	5, 6,	(2, 5),							
	7, 8, 9	(1, 3),							
		(1, 5),							
		(3, 4),							
		(4, 6),							
		(3, 7),							
		(4, 5),							
		(5, 6),							
		(7, 8),							
		(5, 8),							
		(6, 9),							
		(6, 8),							
		(8, 9)							

Итоговое время работы: 57

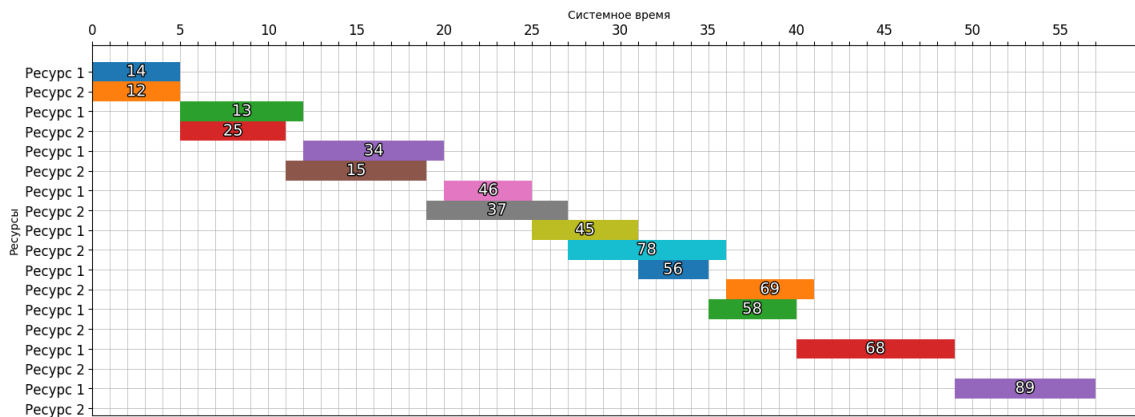


Диаграмма Ганта