Содержанием задания является анализ и решение задачи линейного программирования, заданной в следующей форме:

Задание является комплексным и предполагает выполнение следующих разделов.

1. Геометрическая интерпретация задачи и ее графическое решение.
2. Обозначение опорных точек и соответствующих им наборов базисных переменных.
3. Решение задачи симплекс-методом в табличной форме. Для получения допустимого базиса использовать метод искусственных переменных с решением вспомогательной задачи. Продолжить решение исходной задачи табличным методом до получения конечного результата.
4. Представить также решение модифицированной задачи с измененной целевой функцией f(x)=CTX –M\*(сумма искусственных переменных).
5. Решение модифицированной задачи симплекс-методом в матричной форме.
6. Введение дополнительного ограничения, отсекающего оптимальную точку. Решение новой задачи двойственным симплекс-методом в табличной форме.
7. Формулировка задачи, двойственной по отношению к исходной. Графическое решение двойственной задачи.
8. Определение координат сопряженных опорных точек прямой и двойственной задач. Нахождение оптимального решения двойственной задачи по оптимальному решению прямой задачи.

Выполненное задание должно содержать графическое изображение области допустимых решений и траекторию поиска в пространстве   ***R2***для прямой и двойственной задач (см. рис. 2.3, 2.4, 2.5), а также симплекс-таблицы для каждой опорной точки траектории. Примеры выполнения соответствующих пунктов задания приводятся в разделе 2.6 пособия «Системный анализ и принятие решений», 2008 г. изд.

Для начала построим графические интерпретации следующих ограничений.

Изображение выглядит как снимок экрана, текст, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Рис. 1 – Графическое изображение ОДЗ

Найдём пересечения и , решив систему уравнений

Результат – (1.6, 4)

Из этого следует, что ОДЗ находится внутри треугольника со следующими вершинами: (0, 2.4); (1.6, 4); (5.6, 0).

Оценим значения целевой функции в этих точках:

Наибольшее значение мы наблюдаем в точке (5.6, 0)

Обозначим следующие опорные точки и базисные переменные:

(0, 2.4) – x2, s2

(1.6, 4) – x1, x2

(5.6, 0) – x2, s1

Решение задачи симплекс-методом в табличной форме.

Воспользуемся свободными переменными для перевода неравенств из системы в равенства.

Умножим коэффициенты 2 неравенства на -1

Для поиска базиса решим вспомогательную задачу. Введём искусственную переменную во второе равенство.

Для постановки задачи на максимум запишем целевую функцию:

Из уравнений выразим искусственные переменные

Подставим в целевую функцию.

Решим систему относительно базисных переменных

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *b* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *R1* |
| *s1* | *5.6* | *1* | *1* | *1* | *0* | *0* |
| *R1* | *2.4* | *-1* | *1* | *0* | *-1* | *1* |
| *F* | *-2.4* | *-2+M* | *-1-M* | *0* | *M* | *0* |

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве опорного выберем столбец с переменной х2. Выберем ведущую строку по следующему правилу

Следовательно вторая строка ведущая.

В новой таблице заменим в базисе переменную R1 на x2

Определим элементы опорного столбца и строки делением на РЭ равный 1, остальные элементы определим по правилу прямоугольника.

Получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *b* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *R1* |
| *s1* | *3.2* | *2* | *0* | *1* | *1* | *-1* |
| *x2* | *2.4* | *-1* | *1* | *0* | *-1* | *1* |
| *F* | *2.4* | *-3* | *0* | *0* | *-1* | *1+M* |

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты. В качестве опорного выберем столбец с переменной х1. Выберем ведущую строку по следующему правилу

Следовательно первая строка ведущая. РЭ равен 2.

В новой таблице заменим s1 на x1.

Получаем новую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *b* | *x1* | *x2* | *s1* | *s2* | *R1* |
| *x1* | *1.6* | *1* | *0* | *0.5* | *0.5* | *-0.5* |
| *x2* | *4* | *0* | *1* | *0.5* | *-0.5* | *0.5* |
| *F* | *7.2* | *0* | *0* | *1.5* | *0.5* | *-0.5+M* |

Среди значений опорной строки нет отрицательных следовательно таблица определяет оптимальное решение задачи

Полученное решение:

Решение в матричной форме.

Вновь введём систему равенств со свободными переменными.

Матричная запись задачи:

Вектор коэффициентов целевой функции:

Матрица коэффициентов ограничений

Вектор свободных элементов

Вектор переменных

Таким образом задача имеет вид: при , .

Пусть B – базисная матрица, N – небазисные переменные, cB – коэффициента небазисных переменных x1 и x2, xB – значения базисных переменных, xN – значения небазисных переменных.

Вектор cB будет равен:

Вектор cN:

Изначальные значения переменных xB и xN:

Для проверки оптимальности обратим внимание на вектор

Оба элемента положительны следовательно решение не является оптимальным.

Выбираем переменную с максимальными положительным значением в , это x1 с коэф. 2.

Для выбора разрешающей строки делим вектор b на элементы соответствующего столбца в A, коэффициент соответствующий числу -2.4 не рассматривается ввиду отрицательной природы результата.Разрешающий коэф. равен

Обновлённые матрицы:

Вычислим новые относительные оценки:

Теперь базис B включает x1 и s2, базисная переменная x1 вносит вклад в .

Получаем . Оба значения следовательно решение оптимально.

Итого x1​=5.6, x2​=0, Z = 11,2.

Добавим ограничение, отсекающее ранее предложенное решение, например . Получим следующую систему ограничений:

Целевая функция та же:

Представим в канонической форме:

В качестве базисных выберем свободные переменные s.

Выразим их через остальные:

Среди свободных членов b я отрицательные значения, следовательно полученный базис не является опорным.

Вместо переменной введём .

Симплекс таблица

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | b | x1 | x2 | s1 | s2 | s3 |
| s1 | 3.2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x2 | 2.4 | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| s3 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F | -2.4 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Выразим базисные переменные через остальные:

Подставим их в целевую функцию:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | b | x1 | x2 | s1 | s2 | s3 |
| s1 | 3.2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x2 | 2.4 | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| s3 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F | 0 | -3 | 0 | 0 | -1 | 0 |

Текущий план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные элементы.

В качестве ведущего выбран столбец соответствующий переменной x1, так как он наибольший по модулю.

Выбирем ведущую строку по критерию , третья строка является ведущей. РЭ равен 1.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x5 в план 1 войдет переменная x1. Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | b | x1 | x2 | s1 | s2 | s3 |
| s1 | 2 | 0 | 0 | 1 | -1 | -2 |
| x2 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| x1 | 0.6 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| F | 1.8 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |

Текущий план оптимален

Формулировка задачи, двойственной к исходной

Исходная задача в каноническом виде:

Значит двойственная задача будет следующей:

Представим в виде системы:

Произведём замену -y2на y2: