Les Mariages Stables

Jordann Perrotta
Aix-Marseille Université

5 mai 2017

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Définition **3**
2.1 Couplage 3
2.2 Couplage parfait 3
2.3 Couplage unstable 3
2.4 Couplage stable 4
2.5 Ordre total 4

3 Algorithmes et implémentations **4**
3.1 Basic Stable 4
3.1.1 Donnés 4
3.1.2 PseudoCode 4
3.2 Weakly Stable 4
3.2.1 Donnés 4
3.2.2 PseudoCode 4
3.3 Strong Stable 6
3.3.1 Donnés 6
3.3.2 PseudoCode 6

4 Results **6**

5 Conclusions **6**

1 Introduction

En 1962, David Gale et Lloyd Shapley ont présenté le problème du mariage stable dans un article intitulé "Les admissions aux université et la stabilité du mariage". Ils ont posé et répondu à la question de savoir s'il est possible de trouver un mariage stable impliquant n hommes et n femmes. Dans leur réponse, ils présentent l'algorithme suivant pour trouver un mariage stable. L'algorithme Gale-Shapley implique un certain nombre de "rounds" (ou "itérations"). Dans le premier tour, chaque homme non engagé propose à la femme qu'il préfère le plus, puis chaque femme répond peut-tre au prétendant qu'elle préfère et non à tous les autres prétendants. Elle est alors provisoirement engagée pour le prétendant qu'elle préfère jusqu'ici, et ce prétendant lui est également engagé provisoirement. Dans chaque tour suivant, chaque homme non engagé propose à la femme qu'il préfère le plus parmis les femmes auquel il n'a pas encore proposé (peu importe si la femme est déjà engagée),puis chaque femme répond peut-tre si elle est actuellement pas engagé ou si elle préfère cet homme plutot que son partenaire actuel (dans ce cas, elle rejette son partenaire provisoire actuel qui devient non engagé). Le caractre provisoire des engagements conserve le droit d'une femme déjà engagée de négocier (et, en l'occurrence, de jeter son partenaire jusqu'à ce moment-là). Ce processus est répété jusqu'à ce que tout le monde soit engagé.

Proposition 1 L'algorithme de Gale-Shapley se termine.

Soit n hommes et n femmes impliquées dans l'algorithme. Donc, un homme doit proposer à au plus n femme avant d'être accepté ou rejeté par cette dernière. Donc au plus n^2 propositions peuvent se produire, après quoi l'algorithme se termine.

Proposition 2 À la fin de cet algorithme, tout le monde est mariés.

Supposons la contradiction que m est un homme non marié à la fin de l'algorithme Gale-Shapley. Ensuite, il y a forcément une femme libre w, car il y a le même nombre d'hommes et de femmes et personne ne peut être marié à plus d'une personne. Donc, si une femme obtient une proposition, elle sera mariée lorsque l'algorithme se terminera. Donc, w n'a reçu aucune proposition. Mais, afin que l'algorithme puisse se terminer, l'homme doit être marié, ce qu'il n'est pas le cas, ou a été rejeté par chaque femme, y compris w. Donc m a dû proposé à w, ce qui est une contradiction. Donc m doit être marié à la fin de l'algorithme. Il s'ensuit immdiatement que chaque femme doit se marier à la fin de l'algorithme de Gale-Shapley.

Théorème L'algorithme de Gale-Shapley produit un mariage stable.

Supposons une contradiction selon laquelle l'algorithme de Gale-Shapley produit une correspondance instable pour une instance du problème du mariage stable. Donc, il existe une paire (m, w'), de sorte que m préfère w' à w, son partenaire assigné, et w' préfère m à m', son partenaire assigné. Ensuite, m a proposé à w' avant qu'il ait proposé à w, puisque w' est avant w sur sa liste. Mais une femme ne peut que rejeter un homme si elle reçoit une proposition d'un homme qu'elle préfère. Donc, si une femme rejette un homme, c'est qu'elle préfère son dernier partenaire à l'homme rejeté. Donc w' préfère m' à m, ce qui est une contradiction. Ainsi, l'algorithme de Gale-Shapley produit une correspondance stable.

2 Définition

Donnons nous pour ces definitions un ensemble d'hommes H et un ensemble de femmes F

2.1 Couplage

Un couplage c est une relation fonctionnelle et injective entre H et F.

En dautres termes, c'est une bijection entre un sous-ensemble de H et un sous-ensemble de F.

2.2 Couplage parfait

Un couplage est parfait si cest une bijection entre H et F.

2.3 Couplage unstable

Un couplage est unstable si il existe un homme h et une femme f qui ne sont pas partenaire mais chacun d'entre eux prefere le partenaire de l'autre dans ce couplage. On dit que cette paire h - f est une paire bloquante.

2.4 Couplage stable

Un couplage est stable si il n'y a pas de paire bloquante. De manière plus formel, un couplage est stable si il n'existe aucun homme h et aucune femme f qui serait tenter d'interchanger de partenaire. De plus un couplage est stable si un homme h prefere une autre femme f mais cette derniere ne prefere pas h à son partenaire actuel et vice-versa.

2.5 Ordre total

Un ordre total est l'ordre de préférence de chaque personne. Pour chaque $h \in H$, on a donc un ordre total $\leq_h$ sur F, et pour chaque $f \in F$, un ordre total $\leq_f$ sur H. On note $f_1 \leq_h f_2$ si h préfère f_1 à f_2. On note $f_1 \leq_h f_2$ si h préfère f_1 à f_2.

3 Algorithmes et implémentations

Dans cette section, les algorithmes sont implémentés en Java ainsi que tout les structures de donnés. Pour commencer, afin de faciliter le choix des différents algorithme pour la résolution d'une instance de mariage stable, le patern design "Stratégie" semble être un bon choix. La stratégie de résolution va dépendre de plusieurs facteurs, soit du type de donné (si la gestion des indifférence doit ˆtre prise en considération), soit du choix de l'utilisateur. Si l'utilisateur décide d'utiliser une stratégie qui n'est pas optimal pour le type de donné choisie, le programme va lui indiquer le meilleur algorithme pour la résolution du problème. Chaque stratégie a une implémentation différente, il y en a 3, une pour l'algorithme basique de Gale-Shapley, une pour l'algorithme weakly stable de Robert W.Irving et une autre pour le Strongly stable du même auteur.

3.1 Basic Stable

3.1.1 Donnés

3.1.2 PseudoCode

3.2 Weakly Stable

3.2.1 Donnés

3.2.2 PseudoCode

Algorithme 1 Basic Stable

```
Require: Initialiser tout les m ∈ M et w ∈ W a libre
Ensure: Un couplage stable
  while un homme libre m qui peut encore proposer a une femme w do
    w ← la premiere femme dans la liste de m a qui m n'a pas encore propose
    if w est libre then
      (m, w) devient engage
    else {il existe deja un couple (m', w)}
      if w prefere m a m' then
        m' devient libre
        (m, w) s'engage
      else
        (m', w) se reengage
      end if
    end if
  end while
```

Algorithme 2 Basic Stable

```
Require: Initialiser tout les m ∈ M et w ∈ W a libre
Ensure: Un couplage stable
  while un homme libre m do
    w ← la premiere femme dans la liste de m
    m propose et devient engage a w
    if w est libre then
      (m, w) devient engage
    else {il existe deja un couple (m', w)}
      if w prefere m a m' then
        m' devient libre
        (m, w) s'engager
      else
        (m', w) se reengage
      end if
    end if
  end while
```

3.3 Strong Stable

3.3.1 Donnés

3.3.2 PseudoCode

4 Results

In this section we describe the resul

5 Conclusions

We worked hard, and achieved very little.

Références