1. Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Les questions de cette section se rapportent aux vecteurs dans l'espace 3D et constitue une révision des concepts du Cégep.

Objectifs

1. définir et reconnaître les espaces vectoriels réels; ceci implique:
    1. savoir lire la définition d'un ensemble et d'une loi de composition
    2. être capable d'utiliser les propriétés d'associativité, commutativité, distributivité, élément neutre et inverse dans un problème pour montrer si elles sont satisfaites ou non.
2. manipuler les vecteurs réels (somme, produit, produit scalaire, et en 3D produit vectoriel);

Références

Greenberg Chapitres 9 et 14.1 à 14.3.

1.1. Dépendance et orientation

Durée: 30m

Question

À partir du vecteur $\mathbf{u} = 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, transformez le vecteur $\mathbf{v} = \hat{\imath} + \alpha\hat{\jmath} + \beta\hat{k}$ pour obtenir les valeurs α et β qui donnent :

1. un vecteur $\mathbf{v}_\perp$ perpendiculaire à $\mathbf{u}$?
2. un vecteur $\mathbf{v}_\parallel$ parallèle à $\mathbf{u}$?
3. un troisième vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}_\perp$.

Réponse

1. On veut un vecteur *perpendiculaire en 3D*, c'est-à-dire orthogonal donc le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$, donc:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ 2 + 5\alpha - 3\beta &= 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha = \frac{3\beta-2}{5}$, pour tout β réel, donc $\mathbf{v}_\perp = \hat{\imath} + \frac{3\beta-2}{5}\hat{\jmath} + \beta\hat{k}$.

2. Un vecteur $\mathbf{v}$ *parallèle* à $\mathbf{u}$ veut dire la même chose que :
    1. un vecteur $\mathbf{v}$ qui est une combinaison linéaire d'un ou des autres (dans ce cas, un multiple de $\mathbf{u}$ car il n'y a qu'un vecteur à considérer), ou encore que
    2. ces deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ sont linéairement dépendants, donc il existe une solution autre que la solution triviale pour que $k_u\mathbf{u} + k_v\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou encore

3. parce que nous sommes en 3D dans l'espace réel, que leur produit vectoriel est le vecteur nul, donc $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (qui s'avère être la méthode la plus longue et la plus douloureuse).

On peut solutionner de toutes les façons. On voit que 1. et 2. sont essentiellement le même énoncé. En utilisant l'énoncé 1., on veut que le vecteur $\mathbf{v}$ soit un multiple de $\mathbf{u}$, donc $\mathbf{v} = c_\circ \mathbf{u}$ pour toutes les valeurs $c_\circ$, une constante réelle. On simplifie rapidement en voyant qu'on peut écrire: $2\mathbf{u} = 2\hat{\imath} + 2\alpha\hat{\jmath} + 2\beta\hat{k}$, donc $\alpha = 5/2$ et $\beta = -3/2$ et $\mathbf{v} = c_\circ \hat{\imath} + 5c_\circ/2\hat{\jmath} - 3c_\circ/2\hat{k}$ pour tout $c_\circ$ réel.

On peut aussi faire le produit vectoriel de $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, qui s'écrit:

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = (5\beta + 3\alpha)\hat{\imath} - (2\beta + 3)\hat{\jmath} + (2\alpha - 5)\hat{k} = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

donc

$$\begin{aligned} 3\alpha + 5\beta &= 0 \\ 2\beta + 3 &= 0 \\ 2\alpha - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Un système à trois équations, deux inconnues. Parce que ce système est simple, on voit que la solution est $\alpha = 5/2$ et $\beta = -3/2$ et nous savons par les propriétés des espaces vectoriels que $c_\circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (l'élément nul) et par les propriétés du produit vectoriel que $c_\circ(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (c_\circ \mathbf{v}) = c_\circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ainsi le vecteur ou tout multiple sera un vecteur parallèle, donc $\mathbf{v} = c_\circ \hat{\imath} + 5c_\circ/2\hat{\jmath} - 3c_\circ/2\hat{k}$.

Pour être extrêmement méthodique, on aurait pu tout de même réécrire:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode de Gauss pour obtenir une matrice échelon sur la matrice augmentée:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & : & 0 \\ 0 & 2 & : & -3 \\ 2 & 0 & : & 5 \end{pmatrix}.$$

On applique en séquence les opérations élémentaires sur les rangées $R_1 \mapsto R_1/3$, $R_3 \mapsto R_3 - 2R_1$, $R_2 \mapsto R_2/2$, $R_3 \mapsto R_3 + 10/3R_2$, qui nous donnent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5/3 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & -3/2 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix},$$

qui nous confirme qu'une des équations était linéairement dépendante des autres car une rangée est nulle. On obtient encore (bien sur) $\alpha = 5/2$ et $\beta = -3/2$.

3. On obtient un vecteur perpendiculaire par le produit vectoriel $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (5\beta + 3\alpha)\hat{\imath} - (2\beta + 3)\hat{\jmath} + (2\alpha - 5)\hat{k}$, donc avec $\mathbf{v}_\perp$ du numéro 1 où $\alpha = \frac{3\beta - 2}{5}$, on obtient le vecteur:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (5\beta + \frac{9\beta - 6}{5})\hat{\imath} - (2\beta + 3)\hat{\jmath} + (2\frac{3\beta - 2}{5} - 5)\hat{k} \\ &= \left(\frac{34\beta - 6}{5}\right)\hat{\imath} - (2\beta + 3)\hat{\jmath} + \left(\frac{6\beta - 29}{5}\right)\hat{k} \end{aligned}$$

La norme est donnée par $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(5\beta + 3\alpha)^2 + (2\beta + 3)^2 + (2\alpha - 5)^2}$, qui est le produit des normes $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \frac{\sqrt{38}}{5}\sqrt{34\beta^2 - 12\beta + 29}$. On normalise pour obtenir $\hat{\mathbf{w}} \equiv \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$.

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{38}\sqrt{34\beta^2 - 12\beta + 29}} \left[(34\beta - 6)\,\hat{\imath} + (-15 - 10\beta)\hat{\jmath} + (6\beta - 29)\,\hat{k}\right]$$

1.2. Équation d'un plan

Durée: 30m

Question

Trouvez l'équation du plan qui passe par le point $(1,2,3)$ et qui est parallèle au vecteur $\mathbf{u}=(-2,4,5)$ et à l'axe des x.

Réponse

On prend l'origine relatif au point du plan $O=(1,2,3)$, donc le vecteur position des points (x,y,z) sur le plan est $\overline{OP}=\mathbf{P}=(x-1,y-2,z-3)$. On veut que ce vecteur soit parallèle à l'axe des x, donc parallèle au vecteur $\mathbf{v}=(1,0,0)$ et parallèle au vecteur $\mathbf{u}=(-2,4,5)$. Si ces deux vecteurs sont dans le plan, leur produit vectoriel sera perpendiculaire à ce plan, donc:

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_y v_z-u_z v_y, u_z v_x-u_x v_z, u_x v_y-u_y v_x)=(0,5,-4)$$

Notre vecteur $\mathbf{P}$ doit être perpendiculaire, donc $\mathbf{P}\cdot\mathbf{w}=0$, ce qui donne:

$$5y-4z+2=0$$