1. Systèmes d'équations linéaires

Les questions de cette section se rapportent aux systèmes d'équations linéaires et à leur solution en utilisant la méthodes de Gauss et la réduction de Gauss-Jordan.

Objectifs

1. solutionner des systèmes d'équations linéaires en appliquant la méthode de l'élimination de Gauss et la réduction de Gauss-Jordan;

Références

Greenberg Chapitre 8.

1.1. Système d'équations linéaires

Durée: 60m

Question

Soit le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2x-6y+5z &= 9 \\ -3x+\alpha y+\beta z &= 10 \end{aligned}$$

Obtenez par la méthode de Gauss la matrice équivalente par échelon. Pour quelles valeurs des paramètres α et β y'a-t-il:

1. Une seule solution à aucun, un ou deux paramètres?
2. Aucune solution?
3. Une infinité de solutions à aucun, un ou deux paramètres?

Réponse

Tout d'abord, on écrit le problème sous forme de matrice augmentée:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 2 & -6 & 5 & : & 9 \\ -3 & \alpha & \beta & : & 10 \end{bmatrix}$$

Avec $R_2 \to R_2 - 2R_1$ et $R_3 \to R_3 + 3R_1$, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -8 & 3 & : & 7 \\ 0 & \alpha+3 & \beta+3 & : & 13 \end{bmatrix}$$

On multiplie la rangée 2 par $-1/8$, donc $R_2 \to -R_2/8$, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & : & -\frac{7}{8} \\ 0 & \alpha+3 & \beta+3 & : & 13 \end{bmatrix}$$

Deux cas:

Si $\alpha = -3$, on aurait:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & : & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \beta+3 & : & 13 \end{bmatrix}$$

On subdivise encore en deux cas:

Cas 1:

Label 'eq:sol1' multiply defined

Cas 2:

Label 'eq:sol2' multiply defined

Si $\alpha \neq -3$, nous avons le droit de faire $R_3 \to R_3 - R_2(\alpha+3)$, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & : & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \beta + \frac{3}{8}(\alpha+3) & : & 13 + \frac{7}{8}(\alpha+3) \end{bmatrix}$$

Encore deux cas:

Cas 3: Si $\beta \neq -\frac{3}{8}(\alpha+3)$, nous pouvons faire $R_3 \to R_3 / \left(\beta + \frac{3}{8}(\alpha+3)\right)$ pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & : & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & : & \frac{13+\frac{7}{8}(\alpha+3)}{\beta+\frac{3}{8}(\alpha+3)} \end{bmatrix}$$

que l'on simplifie à:

Label 'eq:sol3' multiply defined

Cas 4: Si $\beta = -\frac{3}{8}(\alpha+3)$, et $\alpha \neq \frac{-125}{7}$ nous avons simplement:

Label 'eq:sol4' multiply defined

Cas 5: Si $\beta = -\frac{3}{8}(\alpha+3)$ et $\alpha = \frac{-125}{7}$ nous avons simplement:

Label 'eq:sol5' multiply defined

Trois situations:

Nous avons "terminé" le problème lorsque la matrice est en échelon ou si nous ne pouvons obtenir une matrice échelon. Donc:

1. **La matrice augmentée est une matrice échelon.** Avec (???), Il y a une seule solution à deux paramètres (α, β) si $\alpha \neq -3$ et $\beta \neq -\frac{3}{8}(\alpha+3)$ et cette solution est:

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \\ y &= -\tfrac{7}{8} + \tfrac{3}{8}\tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \\ x &= 1 - \tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} + \tfrac{7}{8} + \tfrac{3}{8}\tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \end{aligned}$$

mais avec Eq(???) il y a aussi une solution à un seul paramètre α si $\alpha = -3$ et $\beta \neq 3$:

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \\ y &= -\tfrac{7}{8} + \tfrac{3}{8}\tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \\ x &= 1 - \tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} + \tfrac{7}{8} + \tfrac{3}{8}\tfrac{104+7(\alpha+3)}{8\beta+3(\alpha+3)} \end{aligned}$$

2. **La matrice augmentée a une rangée nulle**. Il a infinité de solutions sans paramètres en Eq(???) si $\beta = -\frac{3}{8}(\alpha+3)$ et $\alpha = \frac{-125}{7}$ car toutes les valeurs de z sont possibles.

$$\begin{aligned} y &= -\tfrac{7}{8} + \tfrac{3}{8}z \\ x &= \tfrac{15}{8} + \tfrac{3}{8}z - z \end{aligned}$$

4. **La matrice a une rangée nulle mais la matrice augmentée n'a pas une rangée nulle**. Il n'y a pas de solutions en Eq(???) et Eq(???).