2. Devoir Espaces vectoriels

2.1. Espace vectoriel de fonctions

Durée: 30 minutes

Contexte

On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des fonctions polynômiales de degré 2 d'une variable réelle dans l'intervalle $x \in [-1, 1]$. Ceci se décrit formellement par:

$$\mathcal{V} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \right\}. \tag{1}$$

Donc des exemples d'éléments de cet ensemble sont: $f_1(x) = 1 + x$, ou encore $f_2(x) = 3 - x + 10x^2$ ou plus généralement toutes les fonctions de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Les valeurs de x sont seulement les nombres réels, et les valeurs des coefficients a_i aussi: vous travaillez donc avec toutes ces fonctions.

Cet ensemble $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si on définit:

1. l'addition $+$ de deux éléments comme $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, et
2. la multiplication • d'un vecteur par un scalaire avec $(af)(x) = af(x)$.

De plus, on définit le produit scalaire de ces *vecteurs* (qui sont nos fonctions) de cet espace avec:

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx. \tag{2}$$

Au final, vous avez un espace vectoriel de fonctions polynomiales de degré 2 ou moins.

Question

1. Montrez que $\left\{1, x, x^2\right\}$ est une base de $\mathcal{V}$, mais qu'elle n'est pas orthogonale.
2. Montrez que $\left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right\}$ est aussi une base de $\mathcal{V}$ et qu'elle est orthogonale.

La série de polynômes $\left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots\right\}$ s'appelle les polynômes de Legendre et elle forme une base orthogonale pour les fonctions polynomiales.

2.2. Bases orthonormales

Durée: 5 à 60 minutes

Question

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ (c'est-à-dire l'ensemble des 5-tuplets avec l'addition et la multiplication par un scalaire défini de façon standard sur les réels) , vous avez les vecteurs suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,1,1,1,1) \\ \mathbf{v}_2 &= (1,1,1,0,1) \\ \mathbf{v}_3 &= (-1,1,1,1,1) \, . \\ \mathbf{v}_4 &= (1,-1,1,1,1) \\ \mathbf{v}_5 &= (1,1,-1,1,1) \end{aligned} \tag{3}$$

Démontrez que ces 5 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^5$.

Indice #1:* Vous devez montrer que 1) cet ensemble de vecteurs peut générer tout l'espace (facile, 5 minutes) et 2) que ces vecteurs sont indépendants.

Indice #2: L'utilisation d'une stratégie qui fait appel aux matrices est très efficace. La méthode de Gauss peut être utilisée pour montrer que ces vecteurs ne peuvent être combinés que d'une seule façon pour obtenir le vecteur nul.

Indice #3: Vous pouvez vérifier votre réponse sur Python ou MATLAB en 30 secondes.

2.3. Bonus optionel (50%): Procédure de Gram-Schmidt

Durée: >60m

Question

Illustrez que la technique de Gauss pour obtenir une matrice échelon est essentiellement la procédure de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale (Greenberg, Exercice 9.9.11) si l'on considère que les rangées de la matrice sont les vecteurs, sauf que la base trouvée n'est pas normée.

Indice: Prenez comme exemple $\mathbb{R}^3$. Faites la méthode de Gauss à gauche et écrivez la correspondance générale de la méthode de Gran-Schmidt.