1. Faisceaux gaussiens

Les problèmes de cette section concerne les faisceaux laser gaussiens. Ces fasiceaux ont une grande utilité et le formalisme pour les manipuler est très puissant et très approprié dans une grande majorité des cas qui nous intéressent.

1.1. Focalisation faisceau gaussien

durée: 10 m

Question

Quelle sera la grosseur du point focal d'un faisceau gaussien collimé de longueur d'onde 500 nm et de diamètre $w_o = 5mm$ tout juste avant la lentille qui frappe une lentille de diamètre D = 2.5 cm et de distance focale f = 10 cm ?

Réponse

De faisceau générale, un faisceau à l'entrée d'une lentille est transformé jusqu'au plan focal de la lentille avec :

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \tag{1}$$

La matrice de transformation de la lentille f est simplement

$$\begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

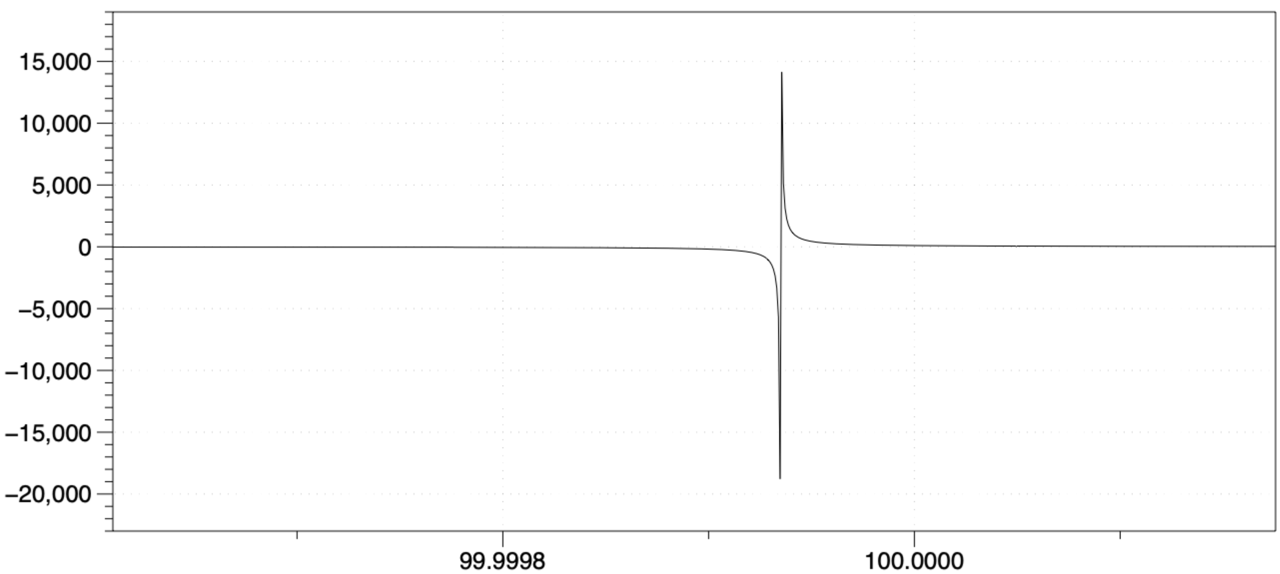
On a donc:

$$q' = \frac{f}{-q/f + 1} \tag{3}$$

Puisque le faisceau gaussien incident a un rayon complexe $q = jz_o = j\frac{\pi w_o^2}{\lambda}$, on a en utilisant $\frac{1}{q'} \equiv \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q'} = \frac{f-q}{f^2} = \frac{1}{f} - \frac{q}{f^2} \\
\frac{\lambda}{\pi w'^2} = \frac{\pi w_o^2}{\lambda f^2} \\
w' = \frac{\lambda f}{w_o \pi} = \frac{500 \times 10^{-6}\mathrm{mm} \cdot 100\ \mathrm{mm}}{\pi \cdot 5\ \mathrm{mm}} = 6.36\lambda = 3.18\mu\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

On peut être surpris que le rayon de courbure soit $R = f$ à une distance de f après la lentille. Cependant, le rayon incident n'est pas un faisceau colligé: c'est un faisceau qui a son étranglement sur la lentille. Si on regarde le comportement du rayon autour du point focal de la lentille, on remarque que l'étranglement dans ce cas est tout juste avant. Le rayon a une dépendence non-linéaire dans une petite région de $\pm z_\circ$ autour de l'étranglement.



Le code suivant qui utilise le module Raytracing de python permet d'obtenir les données (vous devez les mettre dans un logiciel de graphique séparé):

```
from raytracing import *

inputBeam = GaussianBeam(w=5)
beamAfterLens = Lens(f=100)*inputBeam
zo = beamAfterLens.zo
delta = zo / 100
path = LaserPath()
path.append(Lens(f=100))
path.append(Space(d=100-delta))
N = 1000
for i in range(2*N):
  path.append(Space(d=delta/N))

trace = path.trace(inputRay=inputBeam)
```

```
fig, axes = plt.subplots(figsize=(10, 7))
axes.set(xlabel='Distance', ylabel='Radius')
axes.set_xlim(100-delta,100+delta)

x = []
y = []
for q in trace:
    x.append(q.z)
    y.append(q.R)
axes.plot(x, y, 'r', linewidth=1)
plt.show()

# for beam in trace:
#   print(beam.z, beam.R)

#path.display()
```

1.2. Propagation de faisceau gaussien

durée: 20 m

Question

Les astronautes américains d'Apollo 11,14 et 15 de même que les soviétiques avec le Lunokhod-1 et -2 ont laissé des rétroréflecteurs sur la lune pour permettre de mesurer précisément la distance terre-lune. Ces mesures se font avec un faisceau laser de longueur d'onde 532 nm au profil spatial gaussien qui, une fois à la surface de la lune à 384 467 km de la source, a une dimension de 3 km (largeur gaussienne 1/e en champ électrique).

1. Écrivez l'inverse du rayon complexe 1/q du faisceau sur la lune
2. Quelle est la largeur (largeur gaussienne 1/e en champ électrique) du faisceau original sur la terre ?

Réponse

1.3. Résolution angulaire

durée: 30 m

Question

Les phares d'une automobile sont séparées par un distance de 1.5 m. Les phares ont un diamètre de 10 cm, et vos pupilles 5mm. Jusqu'à quelle distance pouvez-vous résoudre les phares la nuit?

Réponse

1.4. Propagation de faisceau gaussien

durée: 30 m

Question

Vous avez un système de deux lentilles (infiniment larges) composé de deux lentilles de distances focales f_1 et f_2 (avec $f_2/f_1 = 3$) et séparées par la somme de leurs distances focales. On s'intéresse au faisceau d'un point focal à l'autre, c'est donc un système 4f. Un faisceau laser de λ=500 nm gaussien ayant un point d'étranglement (waist) w_o = 1 mm au plan focal de la première lentille est incident.

1. Obtenez d'abord la matrice de transfert d'un point focal à l'autre.
2. Obtenez ensuite le nouveau rayon complexe au point focal de la deuxième lentille en fonction du rayon complexe original?
3. Quelle sera la dimension du faisceau transformé en fonction du faisceau original au point focal de la deuxieme lentille apres avoir traversé les deux lentilles?
4. Où se trouve le point d'étranglement (i.e. le point focal) du faisceau transformé?

Réponse

1. On obtient:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2. $q' = \frac{Aq+B}{Cq+D} = 9q = 9j\pi w_o^2/\lambda$
3. Pour obtenir la dimension physique et le rayon de courbure, on doit utiliser la définition $\frac{1}{q'} \equiv \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2}$, on obtient donc:

$$\begin{gathered} \frac{1}{q'} = -\frac{\lambda}{9j\pi w_o^2} \\ \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2} = -\frac{\lambda}{9j\pi w_o^2} \\ \frac{\lambda}{\pi w'^2} = \frac{\lambda}{9\pi w_o^2} \\ w' = 3w_o \end{gathered} \tag{6}$$

4. Le point d'étranglement se trouve à l'endroit où le rayon complexe est imaginaire car lorsque le rayon complexe est imaginaire, on voit que $1/R = 0$, donc $R \to \infty$. Ainsi, le point d'étranglement du faisceau est au point focal de la lentille.

1.5. Tailles de faisceaux

durée: 30 m

Question

Pour un faisceau gaussien en champ électrique $E = E_\circ e^{-\frac{x^2}{w^2}}$, obtenez les facteurs de conversion pour passer de la largeur gaussienne à:

1. $W_{\text{E-FWHM}}$, la largeur complète à mi-hauteur en champ électrique
2. $W_{\text{E-HWHM}}$, la demi-largeur à mi-hauteur en champ électrique
3. $W_{\text{E-RMS}}$, la largeur root-mean-square en champ électrique
4. $W_{\text{I-FWHM}}$, la largeur complète à mi-hauteur en irradiance
5. $W_{\text{I-HWHM}}$, la demi-largeur à mi-hauteur en irradiance
6. $W_{\text{I-RMS}}$, la largeur root-mean-square en irradiance

Réponse

1.6. Cavité laser

durée: 60 m

Question

Une cavité laser est composée d'un miroir courbe concave de rayon de courbure $R = 40$ cm et d'un miroir plan, séparés par $d = 42$ cm. Au centre, le milieu de gain est un cristal cylindrique de Nd :YAG d'indice de réfraction $n = 1.8$ et de longueur $L = 10$ cm. Calculez les paramètres du faisceau gaussien qui est stable dans la cavité, c'est à dire le faisceau gaussien qui est identique après un aller-retour dans la cavité.

Réponse

On obtient la matrice de transfert de la cavité, en partant de n'importe où, c'est sans importance. Ensuite, on utilisera simplement la transformation des faisceaux gaussiens et on obtiendra un q qui répond à:

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \tag{7}$$

ou encore

$$Cq^2 + (D - A)a - B = 0 \tag{8}$$

donc la solution sera:

$$q = \frac{A - D \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2C} \tag{9}$$

La matrice d'un aller-retour de la cavité

On se propage dans l'air, ensuite on entre dans un cristal (interface dielectrique plane), on se propage, on sort du cristal, on se repropage, on frappe le miroir, en revient dans le cristal jusqu'au miroir plan. Pour rapidement simplifier, faisons la propagation air-dielectrique-air avec $d_o = 16$ cm (i.e. le cristal est au centre):

$$M_p = \begin{bmatrix} 1 & d_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$
$$M_p = \begin{bmatrix} 1 & 2d_o + L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qu'on simplifie en posant $d \equiv 2d_o + L/n = 37.5$ cm. Ainsi, la matrice d'un aller-retour est simplement:

$$M_{\text{ar}} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$
$$M_{\text{ar}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2d}{R} & 2d - \frac{2d^2}{R} \\ -\frac{2}{R} & 1 - \frac{2d}{R} \end{bmatrix}$$

Astuce: on vérifie rapidement que le déterminant est 1 pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur de calcul, ce qui est le cas $\left(1 - \frac{2d}{R}\right)^2 - \left(-\frac{2}{R}\right)\left(2d - \frac{2d^2}{R}\right) = 1$. On remarque que $A = D$, donc $A - D = 0$

La solution stable

On utilise eq. 9 et on remplace les valeurs pour notre cavité dans l'eq ??? :

$$
\begin{aligned}
q &= \pm\frac{\sqrt{4BC}}{2C} \qquad (12)\\
q &= \pm\frac{\sqrt{4(2d-\frac{2d^2}{R})(-2/R)}}{2(-2/R)}\\
q &= \pm\frac{\sqrt{-16\frac{d}{R}(1-\frac{d}{R})}}{4/R}\\
q &= \pm\frac{\sqrt{-16\frac{d}{R}(1-\frac{d}{R})}}{4/R}\\
q &= \pm j\sqrt{Rd(1-\frac{d}{R})}\\
q &= \pm j\sqrt{40\cdot 37.5(1-\frac{37.5}{40})}\ \mathrm{cm} = j9.68\ \mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Donc $z_o = 9.68$ cm pour ce faisceau. En prenant une longueur d'onde de 1.064 μm (Nd:YAG est un milieu de gain centré sur cette longueur d'onde), le faisceau a donc une largeur minimale de $w_o = \sqrt{\frac{z_o\lambda}{\pi}} = 180\ \mu$m au miroir plan avec un front d'onde courbe.