Le journal des étudiant(e)s de physique de l'Université Laval

« - Ça lui prend souvent?
- seulement quand il dépasse la vingtaine de beignes... »

volume 10, numéro 2 novembre-décembre 1994

Des carrés magiques et des beignes!

par Clément Laberge

Vous êtes vous déjà demandé ce que représentait le carrelage de tuiles multicolores qui forme une murale près du secrétariat du Département? Je crois que peu d'entre nous se sont véritablement arrêtés à cette question... pourtant cette murale veille sur les café-beignes depuis très longtemps! Est-ce une oeuvre artistique «précurseuse» du mouvement minimaliste dont se réclame le créateur du monument de la Place Royale? Est-ce plus simplement le reste des tuiles qui décoraient les salles de bain de la Faculté lors de la construction des pavillons Vachon et Pouliot? Est-ce un message codé qui cache les secret d'une importante découverte mathématique? Je délire...

Et bien non! Je ne délire pas du tout! J'ai découvert il y a quelques jours, tout à fait par hasard, le secret de la murale... Et croyez-le ou non, elle cache réellement un grand secret mathématique! Elle représente rien de moins que la solution à un des plus célèbres problèmes mathématiques formulés Leonhard Euler (1707-1783)! Celui-là même qui s'est un jour écrié : « $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ »! Surprenante découverte dans ce qu'on croyait *une incompréhensible oeuvre d'art moderne*... il faudra se méfier des apparences lors de notre prochaine visite au musée!

La murale représente en fait la superposition de deux carrés magiques orthogonaux d'ordre dix. Qu'est-ce que ça peut bien vouloir dire? Tentons de comprendre avec des exemples. Voilà deux carrés magiques d'ordre trois :

a	b	c
c	a	b
b	c	a

β	α	χ
α	χ	β
χ	β	α

On remarque que, dans les deux carrés, chacun des symboles utilisés (les lettres latines a, b et c dans le premier cas et les lettres grecques α, β, χ dans le second cas) n'apparaît qu'une seule fois sur chacune des rangées et sur chacune des colonnes. C'est la condition essentielle pour pouvoir parler de carrés magiques. On dit qu'il s'agit de carrés magiques d'ordre trois parce qu'ils peuvent être représentés par des matrices 3×3. Pour comprendre le concept d'orthogonalité dans le cas des carrés magiques, superposons les deux carrés dont nous disposons. On obtient alors :

aβ	bα	cχ
cα	aχ	bβ
bχ	cβ	aα

Le carré obtenu est évidement encore magique pour chacun des alphabets. Toutefois, un oeil averti pourra observer que chacune des lettres latines utilisées ne se combine qu'une seule fois avec chacune des lettres grecques. C'est à cette propriété qu'on associe l'attribut d'orthogonalité. Les carrés magiques qui possèdent toutes ces caractéristiques sont dits *gréco-latins*. Pour expérimenter la confection de carrés magiques gréco-latins d'ordre quatre vous, pouvez prendre tous les as, les rois, les dames et les valets d'un paquet de cartes et tenter de les placer de telle façon que sur chaque rangée et sur chaque colonne on retrouve toutes les valeurs (as, roi, dame et valet) et toutes les couleurs (trèfle, pique, carreau et coeur). Amusez-vous bien!

Maintenant que nous sommes en mesure de partager le même vocabulaire, retournons au problème en tant que tel. À l'époque d'Euler, il était facile de démontrer qu'il est impossible de concevoir un carré magique gréco-latin d'ordre deux. On connaissait de tels carrés d'ordre trois, quatre et cinq, mais aucun pour l'ordre six. Une étude exhaustive du problème permit à Euler de démontrer qu'il existait des carrés magiques gréco-romains d'ordre *n* pour toutes valeurs de *n* impaires ou «pairement paires», c'est à dire divisibles par quatre. Ses efforts restèrent toujours vains pour conclure sur le cas des nombres qui ne répondent à aucune de ces catégories. À bout de ressources, après plusieurs années de recherches infructueuses, Euler n'hésita pas à affirmer (sans autres preuves que son intuition éprouvée et la force de sa conviction) qu'il était impossible de résoudre un carré magique gréco-romain d'ordre six, et que cela s'appliquait aussi aux ordres dix, quatorze et de façon générale à tous les ordres impairement pairs (divisibles par deux mais pas par quatre). Dès lors, la vérification de cette affirmation du plus célèbre mathématicien de son époque devint un grand défi pour tous les mathématiciens.

Il s'écoula plus d'un siècle pour que G. Tarry, un mathématicien français, réussisse à démontrer l'exactitude de l'affirmation d'Euler pour l'ordre six. Il était toutefois toujours impossible de démontrer quoi que ce soit pour les ordres supérieurs. On n'a qu'à songer à la vertigineuse croissance de la complexité du problème avec l'augmentation des ordres étudiés pour comprendre qu'il était alors impossible d'étudier les ordres supérieurs. La difficulté engendrée par l'ordre dix le place déjà bien au-delà des frontières des problèmes qu'il est possible de résoudre avec un simple crayon et quelques feuilles de papier. L'arrivée des premières générations d'ordinateurs a redonné, brièvement, espoir de trouver une démonstration acceptable... pourtant, il aurait fallu plus d'un siècle de calculs continus au plus puissant ordinateur de l'époque pour étudier dans sa totalité l'affirmation d'Euler pour l'ordre dix.

Il faut attendre l'année 1958 pour que trois mathématiciens américains, Parker, Bose et Shrikhande réussissent à démontrer qu'Euler était dans l'erreur. La technique qu'ils ont employée est relativement complexe, mais elle permet d'affirmer qu'il existe toujours un carré magique gréco-latin pour les ordres impairement pairs supérieurs à six, ce qui contredit totalement l'intuition exprimée. Étant donné que la vérification de l'affirmation d'Euler s'était arrêtée à l'ordre dix, c'est un carré magique gréco-latin d'ordre dix que les trois mathématiciens ont présenté en guise de résultat de recherches. Leur carré magique est passé à l'histoire pour avoir scellé le sort d'un défi lancé 177 ans auparavant.

La découverte était suffisamment importante pour que la revue *Scientific American* choisisse d'en faire la couverture de son édition du mois de novembre 1959. Pour l'occasion, un artiste avait proposé de substituer une couleur à chaque chiffre. Le résultat est effectivement beaucoup plus agréable à regarder. Vous pourrez le constater en allant consulter l'édition de novembre 1959 du *Scientific American* (et lire les extraordinaires explications de Martin Gardner) ou en vous rendant en face du secrétariat du Département (quoique là, selon les goûts, les couleurs laissent parfois à désirer!). La murale est une réplique exacte de la page couverture du *Scientific American*.

Vous pourrez remarquer que, tel que prévu, toutes les caractéristiques des carrés magiques gréco-latins sont respectées : chacune des dix couleurs n'apparaît qu'une seule fois comme couleur extérieure et comme couleur intérieure sur chacune des rangées et des colonnes de la murale; et aucune combinaison de couleurs intérieure-extérieure (chacune des cent cases du carré magique en quelque sorte) n'apparaît plus d'une fois. Voilà pour l'orthogonalité!

Pour le plaisir, amusez-vous à identifier les couleurs des tuiles manquantes (c'est possible, j'ai essayé...). Ne manquez pas de remarquer que le carré d'ordre dix en cache un autre d'ordre trois... d'ailleurs tous les carrés magiques gréco-romains d'ordre dix connus cachent un autre carré magique d'ordre trois... pourquoi? Un mystère n'est jamais complètement levé...

Voilà... vous savez maintenant ce que cache notre murale. J'ose espérer que, comme moi, vous la regarderez maintenant avec des yeux nouveaux!

Vu l'intérêt de l'oeuvre, il me semble qu'il faudrait veiller à sa conservation. Il faudrait à tout le moins la rénover et apposer sur un mur voisin un bref document d'information sur ce qu'elle représente.

Note : J'aimerais beaucoup que toutes les personnes qui détiennent des informations supplémentaires sur cette murale (date de réalisation, motivation, auteur, etc.) me les fassent parvenir par e-mail à : CLaberge@cmq.qc.ca. Merci!