

Preperation For The Final Test

Shilong.Lu

# Reviewing Material

## 微分几何学笔记

*First Edition*



Springer



Preperation For The Final Test

# Reviewing Material

Shilong.Lu

Springer

# 内 容 简 介

本书是复分析学的结课期考复习资料总结，主要包括了考试的证明题型以及各类的识记知识点，如黎曼映射定理、广义 Schwarz 引理等等。本书由本人期末写成，仅用于复习。

本书是复分析学的结课期考复习资料总结，主要包括了考试的证明题型以及各类的识记知识点，如黎曼映射定理、广义 Schwarz 引理等等。本书由本人期末写成，仅用于复习。

This book is a summary of the final examination review materials of complex analysis, mainly including the proof question types of the exam and various knowledge points, such as Riemann mapping theorem, generalized Schwarz lemma and so on. This book was written by me at the end of the semester and is for review only.

## 图书在版编目 (CIP) 数据

---

微分几何学笔记/(中) 陆世龙著 -广东; 家里蹲出版社,2023.01

(复习系列丛书)

**ISBN:** 978-7-03-002970-6

I. 微…… ① 陆……

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2023) 第 00022893 号

---

责任编辑: 陆 世 龙 / 责任校对: 陆 世 龙

责任印刷: 陆 世 龙

Springer 出版

广东省茂名市信宜市 290 号

陆世龙

广东省印刷有限公司 印刷

家里蹲出版社发行 各地新华书店经销

\*

2023 年 02 月第一版 开本: 850 × 1168 1/32

2023 年 05 月第二次印刷 印张: 185/8

字数: 493 000

定价: 89.00 元

(如有印刷问题, 我社负责调换)



# 前言

怀着复杂的心情写下了这本不算是笔记的笔记，大差不离就是抄写本吧！但无论如何，这是我自己的学习感悟以及重要内容抄录，作为人生中第一本自己写的书，还是很激动的。

—— 陆世龙

2023年01月11日



# 目录

前言	I
----	---

<b>第一部分 微分几何讲义—陈省身</b>	<b>1</b>
------------------------	----------

<b>第一章 陈省身微分几何讲义</b>	<b>3</b>
----------------------	----------

1.1 流形的基本概念 . . . . .	3
1.1.1 小结 . . . . .	4
1.2 形式与函数芽 . . . . .	8
1.2.1 微分形式 . . . . .	8
1.3 矢量丛 . . . . .	17
1.3.1 张量丛 . . . . .	17

<b>第二部分 微分几何学</b>	<b>24</b>
-------------------	-----------

<b>第二章 微分流形与李群基础</b>	<b>26</b>
----------------------	-----------

2.1 微分流形期末考试内容 . . . . .	26
2.1.1 证明题 . . . . .	26
2.1.2 第 11 题两小问 . . . . .	30
2.1.3 单位分解定理的存在性 . . . . .	33
2.1.4 第 12 题两小问 . . . . .	34
2.1.5 第 13 题 . . . . .	35
2.2 Frobenius 定理 . . . . .	37

<b>第三部分 复分析学</b>	<b>42</b>
------------------	-----------

<b>第三章 复分析</b>	<b>44</b>
----------------	-----------

3.1 考试内容 . . . . .	44
3.1.1 正规族 . . . . .	44
3.1.2 第一步: 说明上述构造的函数族是非空的且是正规族 . . . . .	56
3.1.3 第二步: 证明 $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(\xi)$ 是有限数且它可在 $D$ 内取到 . . . . .	57



3.1.4 第三步: 证明上面找到的 $f$ 即要找的映满共形映射 $f(D) = \{\omega:  \omega  < 1\}$ . . . . .	57
<b>第四章 实变函数论与泛函分析</b>	<b>60</b>
4.1 泛函分析考试题目 . . . . .	60
<b>第四部分 调和分析</b>	<b>65</b>
<b>第五章 调和分析</b>	<b>67</b>
5.1 典型域 . . . . .	67
5.2 代数工具 . . . . .	68
5.2.1 性质 . . . . .	69
<b>第五部分 从微分几何到代数几何</b>	<b>70</b>
<b>第六章 从微分几何到代数几何</b>	<b>72</b>
6.1 函数层 . . . . .	72
6.1.1 预层 . . . . .	72
6.1.2 层 . . . . .	73
6.1.3 茎 . . . . .	74
6.2 Appendix: 一些范畴论的概念 . . . . .	75
6.3 向量丛 . . . . .	76
6.4 多项式环素谱上的 Zariski 拓扑 . . . . .	77
6.4.1 理想 . . . . .	78
6.4.2 多项式环 . . . . .	78
6.4.3 Hilbert 零点定理 . . . . .	80
6.4.4 素谱 . . . . .	81
6.5 函数环 . . . . .	82
6.5.1 函数环的子环 . . . . .	82
6.5.2 理想 . . . . .	82
6.5.3 素理想 . . . . .	83
6.5.4 局部环 . . . . .	83
6.6 Hilbert 零点定理 . . . . .	84
6.6.1 退化集 . . . . .	84
6.6.2 根理想 . . . . .	85
6.6.3 Hilbert 零点定理 . . . . .	86
6.7 概形 . . . . .	86
6.7.1 局部化 . . . . .	86
6.7.2 预层 . . . . .	87

6.7.3 概形 . . . . .	87
参考文献	90

# 第一部分

## 微分几何讲义—陈省身

本书系统地论述了微分几何的基本知识。作者用前 3 章，以及第 6 章共计 4 章的篇幅介绍了流形、多重线性函数、向量场、外微分、李群和活动标架等基本知识和工具。基于上述基础知识，论述了微分几何的核心问题，即联络、黎曼几何、以及曲面论。第 7 章是当前十分活跃的研究领域——复流形。陈省身先生是此研究领域的大家，此章包含有作者独到、深刻的见解和简捷、有效的方法。第 8 章的 Finsler 几何是本书第 2 版新增加的一章，它是陈省身先生近年来一直倡导的研究课题，其中 Chern 联络具有突出的性质，它使得黎曼几何成为 Finsler 几何的特殊情形。最后两个附录，介绍了大范围曲线论和曲面论，以及微分几何与理论物理关系的论述，为这两个活跃的前沿领域提出了不少进一步的研究课题。

本书的作者之一是已故数学家陈省身先生，他开创并领导着整体微分几何、纤维丛微分几何、“陈省身示性类”等领域的研究，他是第一个获得世界数学界最高荣誉“沃尔夫奖”的华人，被称为“当今最伟大的数学家”，被国际数学界尊为“微分几何之父”。



## Sec 1.1 流形的基本概念

**定理 1.1.1.** (1) 给定  $M, N$  为两个  $n$  维光滑流形且  $f$  是从  $M$  到  $N$  的光滑映射.<sup>[3]</sup>

(2) 在  $M$  上一点  $p$  处,  $f$  诱导的切映射  $f_*: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  是同构.

则存在一点  $p$  在  $M$  中的邻域  $U$ , 使得  $V = f(U)$  为  $f(p)$  在  $N$  中一邻域且  $f|_U: U \rightarrow V$  是可微同胚.

**证明.** 由于  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射. 故取  $p$  在  $M$  中局部坐标系  $(U_0, \varphi)$  和点  $q = f(p)$  在  $N$  中局部坐标系  $(V_0, \psi)$ , 使得  $f(U_0) \subseteq V_0$ , 且

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U_0) \rightarrow \psi(V_0) \subset \mathbb{R}^n.$$

是光滑映射.

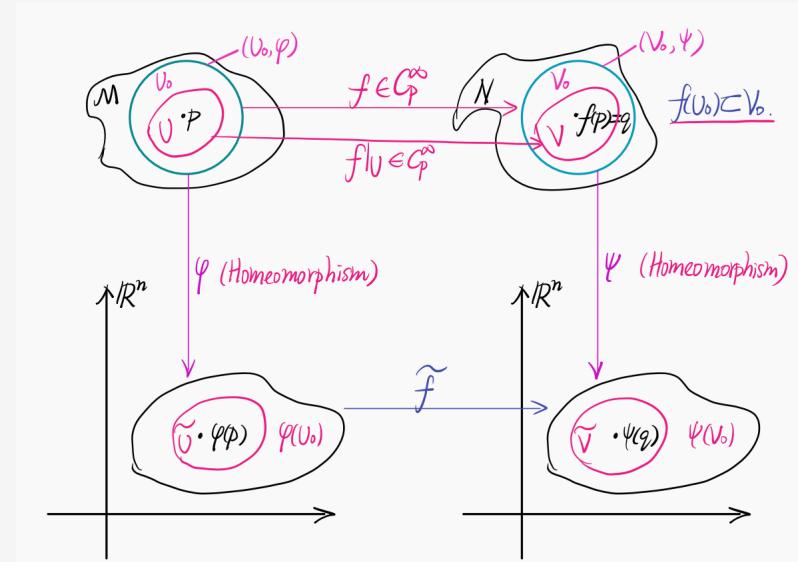


图 1.1: 图示

故  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  是光滑的.  $\varphi(U_0)$  与  $\psi(V_0)$  均是  $\mathbb{R}^n$  中的开集. 在定理 3.1 中, 令  $x_0 = \varphi(p)$ ,  $f = \tilde{f}$ , 则若  $\det \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{x_0} \neq 0$ , 则存在  $\varphi(p)$  与  $\psi(q)$  在  $\varphi(U_0)$  与  $\psi(V_0)$  的邻域  $\tilde{U}$  与  $\tilde{V}$ , 使得  $\tilde{f}|_{U_0}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  是可微同胚. 令  $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ ,  $V = \psi^{-1}(\tilde{V})$ , 则  $U$  与  $V$  分别是  $p$  与  $q$  在  $M$  与  $N$  中的邻域, 且  $f|_U = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi: U \rightarrow V$  是可微同胚.

为何  $\tilde{f}$  在  $\varphi(p)$  的 Jacobi 行列式非零是显然的? 由于

$$\det \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{x_0} \neq 0 \Leftrightarrow f_* : T_{x_0} M (\simeq \mathbb{R}^n) \longrightarrow T_{f(x_0)} (\mathbb{R}^n) (\simeq \mathbb{R}^n)$$

$$\det \left( \frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{\varphi(p)} \neq 0 \Leftarrow \tilde{f}_* : T_{\varphi(p)} M (\simeq \mathbb{R}^n) \longrightarrow T_{\tilde{f}(\varphi(p))} (\mathbb{R}^n) (\simeq \mathbb{R}^n)$$

故映射  $f$  的 Jacobi 矩阵  $\left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$  恰是  $f_*$  在自然基底下的矩阵.  $\square$

### 1.1.1 小结

#### 余切空间

- 余切空间  $T_p^* = \mathcal{F}_p / \mathcal{H}_p = \{(\mathrm{d}f)_p\}$ ,
- 自然基底  $\{(\mathrm{d}u^i)_p, 1 \leq i \leq n\}$ ,
- 余切空间之间的光滑映射:

$$F^* : T_q^* \rightarrow T_p^* \quad (\text{设 } F : M \rightarrow N \text{ 是光滑映射且 } q = F(p).)$$

- 作用方式  $(\mathrm{d}f)_p \mapsto \mathrm{d}(f \circ F)$ ,
- 在两个自然基底下的矩阵表示:

设  $u^i$  是  $p$  附近的局部坐标表示,  $v^\alpha$  是  $q$  附近的局部坐标表示, 则映射  $F$  在点  $p$  附近可用函数

$$v^\alpha = F^\alpha(u^1, \dots, u^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad (1.1)$$

表示.

注解:

$$v^\alpha = (\psi(q))^\alpha = (\psi \circ F(p))^\alpha = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m))^\alpha$$

$$\stackrel{\text{令 } F^\alpha = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}}{=} F^\alpha(u^1, \dots, u^m)$$

因此,  $F^*$  在自然基底  $\{\mathrm{d}v^\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$  作用下结果为

$$F^*(\mathrm{d}v^\alpha) = \mathrm{d}(v^\alpha \circ F) = (\mathrm{d}(F^\alpha(u^1, \dots, u^m)))_p = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i} \right)_p \cdot (\mathrm{d}u^i).$$

从而  $F^*\{\mathrm{d}v^\alpha\} = J\{\mathrm{d}u^i\}$ , 其中  $J = \left( \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i} \right)_p$  为 (1.1) 函数的 Jacobi 矩阵.

- 余切向量的自然基底表示

设  $\alpha = \mathrm{d}f \in T_p^*$ , 则  $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i \mathrm{d}u^i, a_i = \frac{\partial f}{\partial u^i}$  (这里将复合映射仍记为  $f, f = f \circ \varphi_U^{-1}$ ) (由定理 2.2)

- 坐标变换 (在不同坐标系  $u^i$  与  $u^{*i}$  下同一向量坐标变化)

设另一局部坐标  $u^{*i}$ , 则  $\alpha$  关于自然基底的表示式为  $\alpha = \sum_{i=1}^m a_i^* du^{*i}$ , 其中  $a_i = \sum_{j=1}^m a_j^* \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i}$ , 且  $\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} = \frac{\partial(\varphi_U)_* \circ \varphi_U^{-1}}{\partial u^i}$  那么

$$\begin{aligned}\alpha &= (du^1, \dots, du^m) \vec{\beta}, \vec{\beta} = (a_1, \dots, a_m)' \\ &= (du^{*1}, \dots, du^{*m}) \vec{\beta}^*, \vec{\beta}^* = (a_1^*, \dots, a_m^*)'\end{aligned}\quad (1.2)$$

又

$$\begin{aligned}(du^{*1}, \dots, du^{*m}) &= (du^1, \dots, du^m)T \\ &= (du^1, \dots, du^m)(T\vec{\beta}^*)\end{aligned}$$

即有  $T\vec{\beta}^* = \vec{\beta}$ . 由  $T = \left( \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right) \Big|_{(ij)}$ , 故  $a_i = \sum_{j=1}^m a_j^* \cdot \left( \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right)$ .

注. 1.  $u^i (1 \leq i \leq m)$  称为点  $q \in U$  ( $U$  为  $p$  在  $M$  中的邻域) 的局部坐标, 即

$$u^i = (\varphi_U(q))^i, \quad q \in U, 1 \leq i \leq m$$

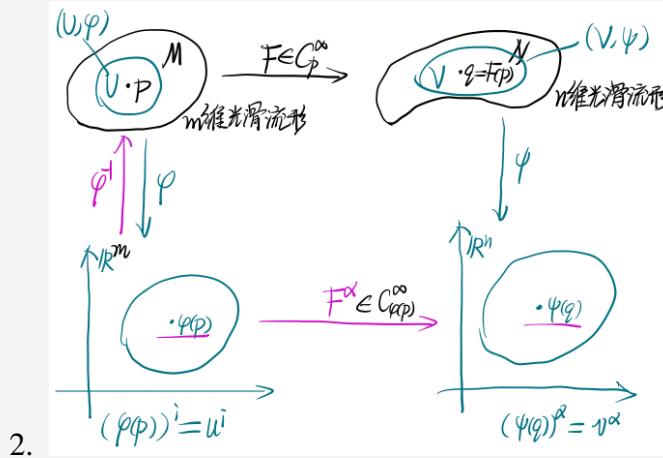


图 1.2: 余切空间图示

## 切空间

- 切空间  $T_p = \{[\gamma], (df)_p\}, \gamma \in \Gamma_p\}$ .
- 自然基底  $\{[\lambda_k], 1 \leq k \leq m\} = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \right)_p, 1 \leq k \leq m \right\}$ .
- 切空间之间的光滑映射 ( $F^*$  的共轭映射)(也称为相伴映射)

$$F_*: T_p \rightarrow T_q,$$

◎ 作用方式:  $\langle F_* X, \alpha \rangle = \langle X, F^* \alpha \rangle, X \in T_p, \alpha \in T_q^*$ .

◎ 在两个自然基底下的矩阵表示

切映射  $F_*$  在自然基底  $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$  上的作用是

$$\begin{aligned} \langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), dv^\alpha \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, F^*(dv^\alpha) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, du^i \right\rangle \cdot \left( \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i} \right)_p \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial F^\beta}{\partial u^i} \right)_p \frac{\partial}{\partial v^\beta}, dv^\alpha \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{即 } F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_{\beta=1}^m \left( \frac{\partial F^\beta}{\partial u^i} \right)_p \frac{\partial}{\partial v^\beta}.$$

- 切向量的自然基底表示

$$[\gamma] = X = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \xi^i = \frac{d(u^i \circ \gamma)}{dt}, \gamma \in \Gamma_p.$$

- 坐标变换

设有另一局部坐标  $u^{*i}$ , 则

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m} \right) \vec{\ell}, \vec{\ell} = (\xi^1, \dots, \xi^m)' \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial u^{*1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{*m}} \right) \vec{\ell}^*, \vec{\ell} = (\xi^{*1}, \dots, \xi^{*m})' \end{aligned} \quad (1.4)$$

由于  $\left( \frac{\partial}{\partial u^{*1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{*m}} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m} \right) T$ , 故  $T \vec{\ell}^* = \vec{\ell} \implies \vec{\ell}^* = T^{-1} \vec{\ell}$ , 其中  $T = \left( \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right)_{(ij)}$ , 故  $\xi^{*j} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \right) \cdot \xi^i$ , 从而

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial u^{*i}}{\partial u^j} \cdot \xi^j \right) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i} \cdot \xi^i \right).$$

**定理 1.1.2.** 设  $M$  是  $m$  维光滑流形,  $N$  是  $n$  维光滑流形,  $m < n$ , 设  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射. 若切映射  $f_*$  在点  $p \in M$  是非退化的 (即  $f_*$  在点  $p$  是单一映射, 此时  $m \leq n$  且  $f_*$  的 Jacobi 矩阵的秩为  $m$ , 即  $f_*$  的 Jacobi 行列式非零), 则存在点  $p$  的局部坐标系  $(U; u^i)$  及点  $q = f(p)$  的局部坐标系  $(V; v^\alpha)$ , 使得  $f(U) \subset V$ , 且  $f|U$  可用局部坐标表示为:  $\forall x \in U$ , 有

$$\begin{cases} v^i \circ f(x) = u^i(x), & 1 \leq i \leq m, \\ v^\gamma \circ f(x) = 0, & m+1 \leq \gamma \leq n. \end{cases} \quad (1.5)$$

**证明.** 设  $f$  在点  $p$  的局部坐标系  $(U; u^i)$  与点  $q$  的局部坐标系  $(V; v^\alpha)$  下表示为

$$v^\alpha = f^\alpha(u^1, \dots, u^m), 1 \leq \alpha \leq n.$$

假定  $u^i(p) = 0, v^\alpha(q) = 0$ . 因为  $f_*$  在点  $p$  是非退化的, 则

$$\left. \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \right|_{n^i=0} \neq 0.$$

由于  $f_*$  在点  $p \in M$  是非退化的, 则  $f_*$  的 Jacobi 行列式  $\det \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} \right)_p \neq 0$ . 令上述行列式为  $J_{m \times n}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n$ , 且  $m \leq n, \text{rank}(J) = m$ , 如下图所示

$$\begin{bmatrix} & \\ & \text{非奇异矩阵} \\ & \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

令  $I_{n-m} = \{(\omega^{m+1}, \dots, \omega^n) \mid |\omega^\gamma| < \delta, m+1 \leq \gamma \leq n\}$  ( $\delta > 0$ ).

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow V \\ v^\alpha &: f \rightarrow (f^1, \dots, f^n) \\ p \mapsto f(p) &= q \mapsto (v^1, \dots, v^n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

将  $f(p)$  用  $v^\alpha$  作局部坐标表示为

$$v^\alpha = (f(p))^\alpha = (f(u^1, \dots, u^m))^\alpha = f^\alpha(u^1, \dots, u^m), 1 \leq \alpha \leq n.$$

假定  $u^i(p) = 0, v^\alpha(q) = 0$ , 因为由  $f$  诱导的切映射  $f_*$  是非退化的, 即  $m \leq n$  且  $f_*$  的 Jacobi 矩阵秩为  $m$ , 即

$$\left. \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \right|_{n^i=0} \neq 0,$$

且

$$J_{m \times n} = \left( \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} \right)_p = \frac{\partial(f^1, \dots, f^m, f^{m+1}, \dots, f^n)}{\partial(u^1, \dots, u^m)}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n.$$

□

注. 扩充行空间为  $n$  维即引入  $n-m$  个维度将  $(u^1, \dots, u^m)$  扩展为  $(u^1, \dots, u^m, \omega^{m+1}, \dots, \omega^n)$ , 并且满足定义光滑映射  $\tilde{f}: U \times I_{n-m} \rightarrow V$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i(u^1, \dots, u^m, \omega^{m+1}, \dots, \omega^n) &= f^i(u^1, \dots, u^m) (\text{和原来的 } f^i \text{ 相同} \quad 1 \leq i \leq m), \\ \tilde{f}^i(u^1, \dots, u^m, \omega^{m+1}, \dots, \omega^n) &= \omega^\gamma + f^\gamma(u^1, \dots, u^m), m+1 \leq \gamma \leq n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

则显然  $\tilde{f}$  在  $(u^i, \omega^\gamma) = (0, 0)$  的 Jacobi 行列式是非退化的, 因为

$$J'_{n \times n} = \left( \frac{\partial(\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^n)}{\partial(u^1, \dots, u^m, u^{m+1}, \dots, u^n)} \right) \neq 0, \quad \ell = \begin{cases} u, & 1 \leq i \leq m, \\ \omega, & m+1 \leq \gamma \leq n. \end{cases}$$

$$|J'| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{f}^{m+1}}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u^1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u^m} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial u^m} & \frac{\partial \tilde{f}^{m+1}}{\partial u^m} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u^m} \\ \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u^{m+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial u^{m+1}} & \frac{\partial \tilde{f}^{m+1}}{\partial u^{m+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u^{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u^n} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial u^n} & \frac{\partial \tilde{f}^{m+1}}{\partial u^n} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u^n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_m & B_{m \times n-m} \\ C_{n-m \times m} & D_{n-m} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.9)$$

## Sec 1.2 形式与函数芽

### 1.2.1 微分形式

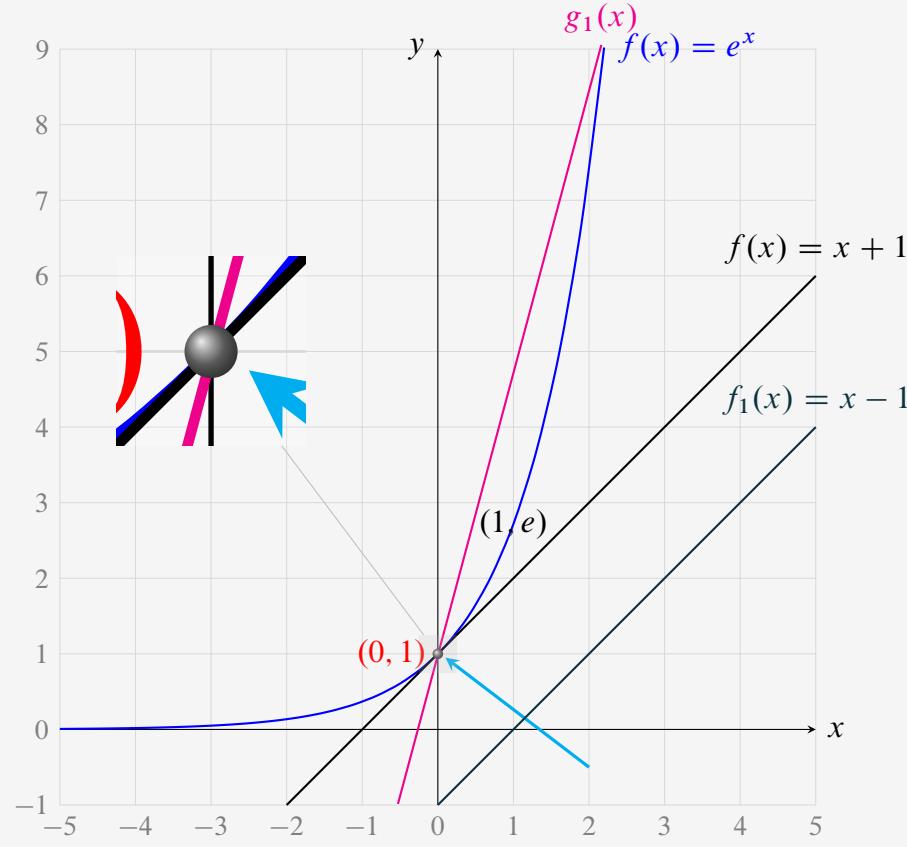


图 1.3: 微分形式解说

在  $(0, 1)$  附近, 两函数靠得很近, 而在  $(0, 1)$  该点上, 两函数的变化完全一样, 或者说二者在该点的局部具有相似性! 而在实数的整体上,  $f$  和  $g$  是完全不同的. 但是这里的函数  $f$  和  $g$  有着同样的微分形式, 因为局部放大图中看到, 它们在  $(0, 1)$  的附近几乎无法区分.

形象地说，假如在  $(0, 1)$  上放置一个人，不管他踩在哪一条曲线上，他都感觉是站在  $45^\circ$  的斜坡上。而如果向下平移函数  $g$ ，如图中青色直线所示，依然不会改变  $g$  在点  $(0, 1)$  的斜率，感觉一模一样，所以微分形式不变。不过，如果我们旋转函数  $g$  的图像，如图中粉色直线所示，则在点  $(0, 1)$  的坡度就变陡峭了，这时斜率发生了变化，我们放置在该点处的人可能就站不稳了，那么新函数  $g_1(x)$  在  $(0, 1)$  点的微分形式发生了变化。其根本原因在于局部的导数值发生了变化。至此，我们对微分形式有了一个大致的感觉：与导数相关。接下来说明如何定义微分形式。现在只看微分形式中的 1-形式，分三步理解。首先，光滑实值函数在任意一点处都有无穷阶连续导函数。在这里，我们只考虑定义域为全体实数的函数。如一次函数，二次函数，指数函数等等，都是定义在全体实数上的一元光滑函数。不过光滑函数依然是一个整体的概念。微分形式是局部的观点，因此我们要想办法看一点的附近。遵循着这种局部化的思想，就有了“芽”这一充满了局部风格的概念。

芽的思想，本质上是根据函数在一点附近的局部表现，对这些函数进行分类，即所谓的等价关系。

### 定义 1.2.1. 芽

芽是定义在拓扑空间上函数集合的一种等价关系。定义在拓扑空间上的两个函数  $f$  和  $g$ ，在点  $x$  处属于同一支芽，当且仅当存在一个开集  $S$ ，使得  $S$  包含点  $x$ ，且在  $S$  上  $f$  和  $g$  的函数值处处相等。

这里的拓扑空间可以选择实数集，开集就是开区间之并，而点  $x$  就是定义函数芽和微分形式的地方。

一些重要的概念（游戏规则）

$$\ll \gamma, [f] \gg = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, [f] \in \mathcal{F}_p, \gamma \in \Gamma_p, -\delta < t < \delta;$$

$$\mathcal{F}_p = C_p^\infty / \sim = \{[f] | f \in C_p^\infty\}, [f] = \{g \in C_p^\infty | f \sim g\};$$

$\Gamma_p = \{\gamma | \gamma \text{ 是 } M \text{ 上过点 } p \text{ 的参数曲线}\}$ ，其中参数曲线是指从  $\mathbb{R}$  上一开区间  $I = (a, b)$  到流形  $M$  的光滑映射。

接下来，利用上述概念构造一个映射  $\tau: \Gamma_p \times \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ ，它将  $(\gamma, [f])$  映到一个实值  $\ll \gamma, [f] \gg$ ，且  $\tau$  关于  $[f]$  是线性的。

定义  $\mathcal{H}_p = \{[f] \in \mathcal{F}_p | \ll \gamma, [f] \gg = 0, \forall \gamma \in \Gamma_p\}$ ，则  $\mathcal{H}_p$  是  $\mathcal{F}_p$  的线性子空间。

### 定理 1.2.1.

设  $[f] \in \mathcal{F}_p$ ，对于包含  $p$  的容许坐标卡  $(U, \varphi_U)$ ，令

$$F(x^1, \dots, x^n) = f \circ \varphi_U^{-1}(x^1, \dots, x^n),$$

则  $[f] \in \mathcal{H}_p$  当且仅当

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x^i} \right|_{\varphi_U(p)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

注. 理解本定理的关键是熟悉里面各个对象间的关系, 下面借助交换图解释说明他们之间的关系.

$$\begin{array}{ccccc} t \in I = (a, b) & \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & q \in U (p \in U) & \xrightarrow{\varphi_U} \varphi_U(q) = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \in \mathbb{R}^n \\ & & & \swarrow \varphi_V = f & \downarrow F = f \circ \varphi_U^{-1} \\ & & & & f(q) = \varphi_V(q) = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

其中, 在  $p$  点附近有包含  $p$  点的两个局部坐标卡, 分别为  $(U, \varphi_U)$  和  $(V, \varphi_V)$ , 其中令  $f = \varphi_V$ . 从而  $\varphi_U(q) = \varphi_U \circ \gamma(t)$ , 特别地,  $\varphi_U(p) = \varphi_U \circ \gamma(0)$ . 故  $x^i(t) = (\varphi_U(q))^i = (\varphi_U \circ \gamma(t))^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

### 定理 1.2.2.

设  $f^1, \dots, f^n \in C_p^\infty$ , 而  $F(y^1, \dots, y^n)$  是在点  $(f^1(p), \dots, f^n(p)) \in \mathbb{R}^n$  的邻域内的光滑函数, 则  $f = F(f^1, \dots, f^n) \in C_p^\infty$ , 并且

$$(df)_p = \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial f^k} \right)_{f(p)} \cdot (df^k)_p.$$

注. 同理, 绘制定理对应的对象间关系图如下:

$$\begin{array}{ccccc} q \in U (p \in U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \varphi_U(q) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f^i} & x^i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \\ \swarrow \varphi_V & & \downarrow F & & \\ & & \varphi_V(q) = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

其中,  $x^i = f^i \circ \varphi_U(q) = f^i(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^n f^i(x^k) = \delta_k^i x^k$ , 其中  $\delta_k^i$  为 Kronecker 记号. 则

$$\begin{aligned} (df)_p &= dF(f^1(p), \dots, f^n(p)) = \left. \frac{dF(f^1 \circ \gamma(t), \dots, f^n \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial (f^k \circ \gamma(t))} \right|_{t=0} \cdot \left. \frac{d(f^k \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial f^k} \right|_{(f^1(p), \dots, f^k(p))} \cdot (df^k)_p. \end{aligned}$$

### 例题 1.2.1.

设  $\dim M = n$ , 试证明  $\dim T_p^* = n$ .

具体证明分两部分, 首先, 先通过余切向量的局部坐标表示得出  $T_p^*$  中任一向量的一个线性组合(当然, 此时还不能成为基), 然后, 证明这个组合里的向量线性无关即可. 此处不详细写出证明, 仅谈论如何理解该证明的思路.

$$\begin{array}{ccc}
 & q \in U & \\
 \varphi_V = f \swarrow & \downarrow \varphi_U & \searrow u^i \\
 \varphi_V(q) = (u^1, \dots, u^n) & \xleftarrow[F=f \circ \varphi_U^{-1}]{\quad} & \varphi_U(q) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{x^i} x^i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n
 \end{array}$$

其中,  $u^i = x^i \circ \varphi_U \in C_p^\infty$ ,  $(du^i)_p \in T_p^*$ . 根据定理 1.2.2, 令  $f^i = u^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 得  $f = F(u^1(q), \dots, u^n(q)) \in C_p^\infty$ , 且对于任一  $T_p^*$  中的余切向量  $(df)_p$  有

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial u^i} \right)_{(u^1(p), \dots, u^n(p))} \cdot (du^i)_p.$$

由上式可知,  $\{(du^i)_p, 1 \leq i \leq n\}$  是  $T_p^*$  中任一向量的一个线性组合基底. 接下来, 证明它就是  $T_p^*$  的一个基, 只需证明它们线性无关即可. 按照证明线性无关的一般准则, 设存在一组实数  $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (du^i)_p = 0, .$$

而

$$(du^i)_p = \left. \frac{du^i \circ \gamma(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

从而  $\ll \gamma, [u^i] \gg = 0$ , 即  $[u^i] \in \mathcal{H}_p$ . 由于  $\tau$  对于第二个变量是线性的, 故而

$$\ll \gamma, \sum_{i=1}^n \alpha_i [u^i] \gg = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left. \frac{du^i \circ \gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0, \forall \gamma \in \Gamma_p.$$

关键在于上面标注的红色部分,  $\gamma$  是可以任意取定的, 从而, 为了能将上式与  $\alpha_i = 0$  联系起来, 我们可以设法确定一个非常特殊的函数  $\gamma$ , 使得上式中的系数部分  $\left. \frac{du^i \circ \gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} = \delta_k^i$  即可, 而这也就是基底向量的正交性. 经过多次尝试, 我们可以作函数  $\gamma = \lambda_k \in \Gamma_p$ , 使得

$$u^i \circ \lambda_k(t) = u^i(p) + \delta_k^i t$$

经过验证, 上述函数符合要求.

### 看懂与撰写证明的方法技巧

**Step I.** 理清证明的全局思维脉络(化整为零) 结合大纲、思维导图、逻辑组织架构图、树状图等等思维组织形式来把握整理整个证明流程的思路历程及关键环节、步

骤，以及疏通条件与结论之间起桥梁作用的各个中间站点，明确它们的职能与权重。

**Step II. 斟酌微观的技术细节 (微观操作)** 透过回顾知识点、联想概念以及理论关联性来琢磨各个职能各异、权重参差的中间站点之间的联络方式，从而将其中的技术难点和微观层面的技术细节一一抠弄出来解决。

### 定理 1.2.3. Stokes 定理

设  $M$  是定向带边界的  $n$  维光滑流形， $\omega$  是紧致的  $(n-1)$ -形式，则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

特别的，如果  $\partial M = \emptyset$ ，则  $\int_M d\omega = 0$ .

**证明.** 取  $M$  的坐标图册  $\{U_i\}_{i \in I}$ ，其中每个开集都同胚于  $n$  维空间或者闭半空间。取支于其上的单位分解，即  $M$  上一族非负光滑函数  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ ，满足  $\varphi_i$  支集紧，包含于  $U_i$ ， $M$  上每点都有邻域上面只有有限个  $\varphi_i$  非零，以及  $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$ 。令  $\omega_i = \varphi_i \omega$ ，则  $\sum_{i \in I} \omega_i = \omega$ 。又由于  $\omega$  紧支，只有有限个  $\omega_i$  非零，于是只需对每个  $\omega_i$  证明定理。这样便只需证  $M$  是  $n$  维空间和闭半空间的情形。以下分别证之。

1.  $M = \mathbb{R}^n$ .

此时写出  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ ，其中  $\widehat{\phantom{x}}$  表示不出现。只需对求和中每一项证

明定理；置换坐标可设只有第一项，即  $\omega = f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 。此时  $d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 。由 **Fubini 定理 (与积分运算可交换次序)** 和微积分基本定理，

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\cdot, x_2, \dots, x_n) \Big|_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 dx_2 \cdots dx_n = 0 = \text{右边}, \end{aligned}$$

因为  $f$  紧支。

2.  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ .

此时仍写  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ 。仍只需对求和中每一项证明定理。后  $n-1$  项的计算和上一段一样是 0。对第一项，由 **Fubini 定理 (与积分运算可交换次序)** 和微积分基本定理，

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\cdot, x_2, \dots, x_n) \Big|_{-\infty}^0 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{0 \times \mathbb{R}^{n-1}} f dx_2 \cdots dx_n = \text{右边}, \end{aligned}$$

由于带边流形的定向约定. □

### 定义 1.2.2. 自由对象

我们首先给出一个具体范畴 (*concrete category*)  $\mathcal{C}, F$  是其中的一个对象,  $X$  是一个非空集合并且给出一个映射  $i: X \rightarrow F$ . 我们称  $F$  在集合  $X$  上自由 (*free*), 如果对任何  $\mathcal{C}$  中的对象  $A$  和映射  $f: X \rightarrow A$ , 我们都可以找到一个唯一  $\mathcal{C}$  上的态射  $g: F \rightarrow A$  使得  $gi = f$ . 如下图所述:

$$\begin{array}{ccc} X \subset \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & A \subset \mathcal{C} \\ i \downarrow & \nearrow g & \\ F & & \end{array}$$

### 定理 1.2.4.

复流形自然是一个近复流形.

**证明.** 一个  $n$  维复流形  $M$  可以看作  $2n$  维实光滑流形. 设  $\{z^k, 1 \leq k \leq n\}$  是复流形  $M$  的局部坐标系, 记  $z^k = x^k + iy^k$ , 则  $\{x^k, y^k, 1 \leq k \leq n\}$  是实流形  $M$  的局部坐标系,  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}, 1 \leq k \leq n\right\}$  给出了流形  $M$  在坐标域上的自然基底.

设在每一点  $x \in M$ , 线性变换  $J_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$  定义为

$$J_x \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad J_x \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1.10)$$

显然  $J_x^2 = -\text{id}: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ . 下面我们要证明,  $J_x$  的定义与复坐标  $z^k$  的选取无关, 从而上面给出的线性变换场是  $M$  上大范围定义的近复结构. 为证明这一点, 设  $w^k$  是  $x$  附近的另一个局部复坐标系, 则  $z^j$  是  $w^k$  的全纯函数. 设  $w^k = u^k + iv^k$ , 则有 **Cauchy-Riemann 方程**

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \frac{\partial y^j}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial v^k} = -\frac{\partial y^j}{\partial u^k} \quad (1.11)$$

因此, (1.10) 式所定义的  $J_x$  作用在  $\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial v^k}$  上有

$$\begin{cases} J_x \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = J_x \left( \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial}{\partial v^k}, \\ J_x \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right) = J_x \left( \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = -\frac{\partial}{\partial u^k}. \end{cases} \quad (1.12)$$

即  $J_x$  在  $\left\{\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial v^k}, 1 \leq k \leq n\right\}$  上的作用具有如 (1.10) 式给出的形式. □

(1.10) 式所定义的近复结构称为复流形  $M$  的典型近复结构. 设  $M$  是复流形, 则对于  $M$  上典型近复结构,  $dz^k$  是  $(1, 0)$  次外微分式. 取  $\theta^k = dz^k$ , 则可积条件  $d\theta^k \equiv 0 \pmod{\theta^j}$  显然成立, 故而复流形上典型近复结构总是可积的, 其逆命题也成立.

**定理 1.2.5. Newlander-Nirenberg 定理**

如果流形  $M$  上有一个可积的近复结构, 则它必然是一个复流形结构诱导的典型近复结构.

**定理 1.2.6.**

近复流形必是偶维的可定向流形.

**注.** 偶维和可定向的条件并不足以保证流形有近复结构, 即逆命题不成立. Ehresmann 和 Hopf 证明了, 四维球  $S^4$  不能有近复结构.

现设  $M$  是  $m = 2n$  维近复流形, 用  $A$  记光滑的复数值  $(1, 0)$  次微分式所成的空间,  $\bar{A}$  是  $A$  的复共轭空间, 于是在每一点  $x \in M$  有直和分解

$$T_x^*(M) \otimes C = A_x \oplus \bar{A}_x. \quad (1.13)$$

设  $x^\alpha (1 \leq \alpha \leq 2n)$  是流形  $M$  上的局部坐标系. 在切空间的自然基底  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  下, 近复结构  $J$  可以表成

$$J_x \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) = \sum_{\beta} a_\alpha^\beta(x) \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \quad (1.14)$$

其中  $a_\alpha^\beta$  是  $M$  的一个邻域上的光滑函数, 并且

$$\sum_{\gamma=1}^{2n} a_\alpha^\gamma a_\gamma^\beta = -\delta_\alpha^\beta. \quad (1.15)$$

显然在每一点  $x \in M$ , 形式

$$\sum_{\beta} (a_\beta^\alpha + i \delta_\beta^\alpha) dx^\beta, \quad 1 \leq \alpha \leq 2n \quad (1.16)$$

是  $(1, 0)$  次外形式. 根据书中 §2 节的讨论, 在这  $2n$  个  $(1, 0)$  次外形式中恰有  $n$  个是复线性无关的.

假定近复结构在局部上由  $n$  个复线性无关的一次微分式  $\theta^k (1 \leq k \leq n)$  所确定, 使  $\theta^k$  是相应的  $(1, 0)$  次微分式.  $d\theta^k$  是二次微分式, 则它可表成

$$d\theta = \frac{1}{2} \sum_{j,l} A_{jl}^k \theta^j \wedge \theta^l + \sum_{j,l} B_{jl}^k \theta^j \wedge \bar{\theta}^l + \frac{1}{2} \sum_{j,l} C_{jl}^k \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^l.$$

其中,  $A_{jl}^k$  和  $C_{jl}^k$  对下指标反对称. 条件

$$d\theta^k \equiv 0 \pmod{\theta^j}. \quad (1.17)$$

与  $\{\theta^j\}$  的选取无关.

### 定义 1.2.3. $(p, q)$ 次外微分式空间 $A_{p,q}$

设  $\omega$  是近复流形  $M$  上光滑的复数值外微分式. 若在每一点  $x \in M$ ,  $\omega(x)$  是  $T_x(M)$  上的  $(p, q)$  次外形式, 则称  $\omega$  是  $(p, q)$  次外微分式. 全体  $(p, q)$  次外微分式的集合记作  $A_{p,q}$ . 很明显,  $A_{p,q}$  是复数值光滑函数环上的模, 它有下列简单的性质:

- (1) 若  $\alpha \in A_{p,q}$ , 则  $\bar{\alpha} \in A_{q,p}$ ;
- (2) 若  $\alpha \in A_{p,q}, \beta \in A_{r,s}$ , 则  $\alpha \wedge \beta \in A_{p+r, q+s}$ ;
- (3)  $dA_{p,q} \subset A_{p+2, q-1} + A_{p+1, q} + A_{p, q+1} + A_{p-1, q+2}$ ;
- (4) 若  $p$  或  $q > n (= 1/2 \dim M)$ , 则  $A_{p,q} = 0$ .

**证明.** 性质 (3) 需要作些说明. 因为  $A_{p,q}$  在局部上是由复数值光滑函数 ( $\in A_{0,0}$ )、 $(1,0)$  次外微分式和  $(0,1)$  次外微分式生成的, 然而

$$dA_{0,0} \subset A_{1,0} + A_{0,1},$$

$$dA_{1,0} \subset A_{2,0} + A_{1,1} + A_{0,2},$$

$$dA_{0,1} \subset A_{2,0} + A_{1,1} + A_{0,2},$$

所以根据外微分的定义, 用归纳法立即得到性质 (3).

事实上,  $dA_{k,l} \subset \bigwedge^{k+l+1} A_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k+l+1} A_{p,q}$ . □

设  $\omega \in A_{p,q}$ . 命

$$\partial\omega = \prod_{p+1,q} d\omega, \quad \bar{\partial}\omega = \prod_{p,q+1} d\omega \tag{1.18}$$

则  $\partial : A_{p,q} \rightarrow A_{p+1,q}$  和  $\bar{\partial} : A_{p,q} \rightarrow A_{p,q+1}$  都是线性映射.

### 定理 1.2.7. 近复流形可积充要条件

以下命题均是等价的:

1. 满足条件(1.17)的近复流形  $M$  可积.
2. 设  $J$  是流形  $M$  上的近复结构, 则  $J$  可积当且仅当它的挠率张量  $t_{\beta\gamma}^\alpha$  为零.
3. 设  $J$  是流形  $M$  上的近复结构, 则  $J$  可积当且仅当

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

4. 设  $J$  是流形  $M$  上的近复结构, 则  $J$  可积当且仅当

$$\bar{\partial}^2 = 0.$$

联络矩阵  $\omega$  在标架场  $S$  作变换  $S' = A \cdot S$  时的变换公式是

$$\omega' \cdot A = dA + A \cdot \omega, \quad (1.19)$$

所以关于伴随型张量矩阵的外微分为

$$d\Phi_{S'} = dA \wedge \Phi_S \cdot A^{-1} + A \cdot d\Phi_S \cdot A^{-1} + (-1)^k A \cdot \Phi_S \wedge dA^{-1}.$$

故用(1.19)代入上式进行计算可得

$$D\Phi_{S'} = A \cdot \Phi_S \cdot A^{-1}. \quad (1.20)$$

计算时, 注意

$$dA = \omega' \cdot A - A \cdot \omega, \quad (1.21)$$

$$dA^{-1} = -A^{-1} \cdot dA \cdot A^{-1} = -A^{-1}\omega' + \omega \cdot A^{-1} \quad (1.22)$$

, 这里用到了  $dI = d(A \cdot A^{-1}) = dA \cdot A^{-1} + A \cdot dA^{-1} = 0$ .

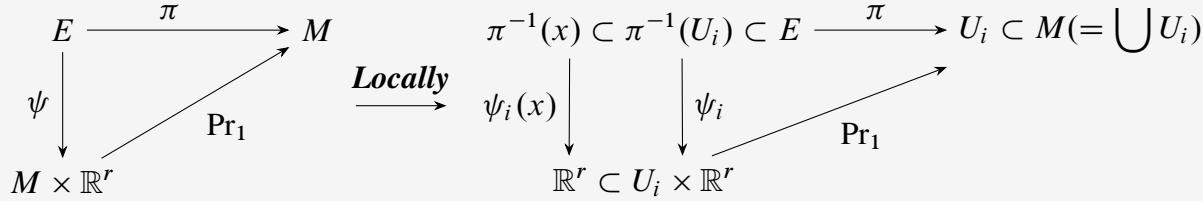


图 1.4: (实) 矢量丛的结构 (本质)

矢量丛由其闭上链 (Cocycles)  $\{(U_i, \psi_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R}))\}$  (或者对复矢量丛则为  $\text{GL}(r, \mathbb{C})$ ) 决定, 而闭上链也称为过渡函数族  $\{g_{\alpha\beta}\}$ .

#### 定义 1.2.4. 复线丛 (complex line bundle)

复线丛是黎曼面  $M$  上的一个结构, 具体地说, 设微分流形  $E$  满足:

1. 存在光滑满射  $\pi: E \rightarrow M$ ,
2. (局部平凡化) 对任何  $p \in M$ , 存在  $p$  的开邻域  $U$ , 以及  $f: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  使得  $F_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}, F_U(v) = (\pi(v), f_U(v))$  是微分同胚,
3. (相交坐标系的相容性  $\iff$  过渡函数的可微性) 对 2 中的开邻域  $U_\alpha, U_\beta$ , 若交非空, 则存在  $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} = \text{GL}(1, \mathbb{C})$  使得  $f_{U_\alpha} \circ f_{U_\beta}^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v), \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{C}$ . (这里值得注意的是,  $f_{U_\beta}^{-1}(x, v)$  是  $E$  中的一个点  $\xi$ , 首先它落在  $f_{U_\beta}^{-1}(v)$  中, 其次  $\pi(\xi) = x$ ).

则称之为复线丛.

- 注. 1. 上述  $(U, F_U)$  被称为  $E$  的局部平凡化,  
 2. 上述  $g_{\alpha\beta}$  被称作转移函数(也称过渡函数),  
 3. 对于  $x \in M, \pi^{-1}(x)$  称作  $x$  处的纤维, 记做  $E_x$ , 每个纤维可以看做  $\mathbb{C}$ (同构于  $\mathbb{C}$ ), 而 0 是该纤维中最特殊的一个, 是因为在任何平凡化之下,  $(x, 0)$  都是对应一个固定的  $E$  的点.

以上概念是微分几何中的向量丛的特例, 可以参见<sup>[3]</sup>, 另外, 我会介绍一个复线丛的等价定义, 关于等价性也请参见<sup>[3]</sup>

### 定义 1.2.5. 复线丛的等价定义

假设  $\{U_\alpha\}$  是黎曼面  $M$  的一个开覆盖, 设  $U_\alpha, U_\beta$  是这个覆盖中的两个开集, 其交非空, 那么指定了  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ , 若

1.  $g_{\alpha\alpha} = 1$ ,
2. 设  $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma$  是这个覆盖中的三个开集, 其交非空, 满足  $g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = 1$ .

则可以定义  $\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}$  上的如下等价关系:  $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2)$  假如  $x_1 = x_2, v_2 = g_{\alpha\beta}(x_1)(v_1)$ . 那么  $E := \left(\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}\right) / \sim$  是一个复线丛, 且转移函数是  $g_{\alpha\beta}$ .

注. 该定义说明复线丛可由其转移函数完全决定, 所以复线丛  $E$  可以看作满足上述定义的  $\{g_{\alpha\beta}\}$ . 称两个复线丛  $(E, \{g_{\alpha\beta}\}), (E', \{g'_{\alpha\beta}\})$  等价, 若存在一族光滑函数  $\{h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}\}$  使得  $g_{\alpha\beta} = h_\alpha g'_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$ .

### 例题 1.2.2.

平凡线丛  $M \times \mathbb{C}$  是  $M$  上的一个线丛:  $\pi(x, z) = x$ , 且其转移函数取值恒为 1.

## Sec 1.3 矢量丛

### 1.3.1 张量丛

考虑流形  $M$  的一个坐标域  $U$ , 局部坐标是  $u^1, \dots, u^m$ . 这样, 在任意一点  $p \in U, T_p$  和  $T_p^*$  分别有彼此对偶的自然基底

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial u^m} \right)_p \right\} \text{ 和 } \left\{ (\mathrm{d}u^1)_p, \dots, (\mathrm{d}u^m)_p \right\}.$$

因此  $T_s^r(p)$  有基底

$$\left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \right)_p \otimes \cdots \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \right)_p \otimes (\mathrm{d}u^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}u^{j_s})_p \quad (1.23)$$

$$(1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq m). \quad (1.24)$$

现在可以定义映射

$$\varphi_U : U \times V_s^r \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_s^r(p) \quad (1.25)$$

使得对于任意的  $p \in U, y \in V_s^r$ ,  $\varphi_U(p, y)$  是  $T_s^r(p)$  的元素, 并且  $\varphi_U(p, y)$  关于基底 (1.23) 的分量与  $y$  关于  $V_s^r$  基底

$$e_{i_1} \otimes \cdots e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s}, 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq m.$$

的分量相同. 显然, 这样定义的映射  $\varphi_U$  是一一对应.

取  $M$  的一个坐标覆盖  $\{U, W, \dots\}$ , 设由 (1.25) 式定义的相应的映射是  $\{\varphi_U, \varphi_W, \dots\}$ . 把诸如  $U \times V_s^r$  的各开子集在  $\varphi_U$  下的像的集合取作  $T_s^r$  的拓扑基<sup>1</sup>, 这样确定的拓扑使  $T_s^r$  成为有可数基的 Hausdorff 空间, 并且每一个由 (1.25) 式定义的映射是同胚.

固定一点  $p \in U$ , 则可定义映射  $\varphi_{U,p} : V_s^r \rightarrow T_s^r(p)$ , 使得

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \quad y \in V_s^r.$$

根据  $\varphi_U$  的定义, 映射  $\varphi_{U,p}$  是矢量空间  $V_s^r$  到  $T_s^r(p)$  的线性同构.

若  $W$  是  $M$  的另一个包含  $p$  的坐标域, 局部坐标是  $w^1, \dots, w^m$ ; 命

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : V_s^r \rightarrow V_s^r \quad (1.26)$$

则  $g_{UW}(p)$  是矢量空间  $V_s^r$  的自同构,  $g_{UW}(p) \in GL(V_s^r)$ . 按照群  $GL(V)$  在空间  $V$  上的作用方式是右作用(即右乘矩阵)的规定,  $GL(V_s^r)$  的元素在  $V_s^r$  上的作用记成右作用. 因此, 对于  $y, y' \in V_s^r$ , 使

$$\varphi_U(p, y) = \varphi_W(p, y') \quad (1.27)$$

的充要条件是

$$y' = y \cdot g_{UW}(p) \quad (1.28)$$

对于  $M$  的任意两个坐标域  $U, W$ , 如果  $U \cap W \neq \emptyset$ , 则由 (1.26) 式定义了映射

$$g_{vW} : U \cap W \rightarrow GL(V_s^r).$$

我们要证明: 映射  $g_{UW}$  是光滑的. 不失一般性, 在此只讨论  $r = s = 1$  的情形.

切空间  $T_p$  和余切空间  $T_p^*$  关于局部坐标  $w^1, \dots, w^m$  的自然基底是  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial w^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial w^m} \right)_p \right\}$  和  $\left\{ (dw^1)_p, \dots, (dw^m)_p \right\}$ . 设  $y, y' \in V_1^1$ , 用分量表示是

$$y = y_j^i e_i \otimes e^{*j}, \quad y' = y'_j e_i \otimes e^{*j}.$$

<sup>1</sup>需要验证这样得到的集合满足拓扑基的条件. 实际上, 如果  $U \cap W \neq \emptyset$ , 则

$$\left( \bigcup_{p \in U} T_s^r(p) \right) \cap \left( \bigcup_{q \in W} T_s^r(q) \right) = \bigcup_{p \in U \cap W} T_s^r(p),$$

它是  $U \cap W$  在  $\varphi_U$  下的像, 也是在  $\varphi_W$  下的像.

因此

$$\begin{cases} \varphi_U(p, y) = y_j^i \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right)_p \otimes (du^j)_p, \\ \varphi_W(p, y') = y_j'^i \left( \frac{\partial}{\partial w^i} \right)_p \otimes (dw^j)_p. \end{cases} \quad (1.29)$$

在  $U \cap W$  上, 自然基底之间有以下关系:

$$\begin{cases} du^i = \frac{\partial u^i}{\partial w^j} dw^j \\ \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial w^j} \frac{\partial}{\partial w^j} \end{cases} \quad (1.30)$$

其中  $J_{UW} = \left( \frac{\partial w^j}{\partial u^k} \right)$  是局部坐标变换的 Jacobi 矩阵. 将 (1.30) 式代入 (1.29) 和 (1.27) 两式则得

$$y_j'^i = y_l^k \left( \frac{\partial w^i}{\partial u^k} \right)_p \left( \frac{\partial u^l}{\partial w^j} \right)_p,$$

即

$$(y \cdot g_{UW}(p))_j^i = y_l^k \left( \frac{\partial w^i}{\partial u^k} \right)_p \left( \frac{\partial u^l}{\partial w^j} \right)_p.$$

若把  $y$  记成坐标行  $(y_1^1, y_2^1, \dots, y_1^m, y_2^m, \dots, y_m^m)$ , 上式表明,  $g_{UW}(p)$  用  $m^2 \times m^2$  阶非退化矩阵表示恰是 Jacobi 矩阵  $J_{UW}$  和它的逆矩阵的张量积<sup>2</sup>:

$$g_{UW} = J_{UW} \otimes J_{UW}^{-1}.$$

因为 Jacobi 矩阵  $J_{UW}$  和  $J_{UW}^{-1} = J_{WV}$  都是由  $U \cap W$  上的光滑函数组成的, 所以  $g_{UW}$  在  $U \cap W$  上也是光滑的.

按照  $T_s^r$  的拓扑结构,  $\{\varphi_U(U \times V_s^r), \varphi_W(W \times V_s^r), \dots\}$  构成空间  $T_s^r$  的坐标开覆盖; 在每一个坐标域  $\varphi_U(U \times V_s^r)$  上点  $\varphi_U(p, y)$  的坐标是

$$(u^i(p), y_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r})$$

其中  $u^i$  是流形  $M$  的坐标域  $U$  上的局部坐标,  $y_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$  是  $y \in V_s^r$  关于前述  $V_s^r$  基底的分量. 当  $U \cap W \neq \emptyset$  时, 由于  $g_{UW} : U \cap W \rightarrow \text{GL}(V_s^r)$  是光滑的, (1.28) 式说明上面所给出的  $T_s^r$  的坐标覆盖是  $C^\infty$ -相容的, 因此  $T_s^r$ , 成为一个光滑流形, 显然, 自然投影

$$\pi : T_t^* \rightarrow M$$

<sup>2</sup>矩阵  $A = (a_j^i)$  和  $B = (b_\beta^\alpha)$  的张量积是指分块矩阵

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & \cdots & a_1^m B \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 B & \cdots & a_m^m B \end{pmatrix},$$

其元素是  $a_j^i \cdot b_\beta^\alpha$ .

把  $T_s^r(p)$  中的元素映到点  $p \in M$ , 它是光滑的满映射. 光滑流形  $T_s^r$  称为流形  $M$  上的  $(r, s)$  型张量丛,  $\pi$  称为丛投影,  $T_s^r(p)$  称为从  $T_s^r$  在点  $p$  上的纤维.

令  $r = 1, s = 0$ , 我们得到流形  $M$  上的切丛, 记作  $T(M)$ ; 令  $r = 0, s = 1$ , 得到流形  $M$  上的余切丛, 记作  $T^*(M)$ . 按照张量丛的作法, 可以类似地构造  $M$  上的外矢量丛和外形式丛, 分别记作

$$\begin{cases} \Lambda^r(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p), \\ \Lambda^r(M^*) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^r(T_p^*). \end{cases}$$

设  $f : M \rightarrow T_s^r$  是光滑映射, 如果

$$\pi \circ f = \text{id} : M \rightarrow M,$$

即对于任意的  $p \in M, f(p) \in T_s^r(p)$ , 则称  $f$  是张量丛  $T_s^r$  的一个光滑的截面, 或称为  $M$  上的一个  $(r, s)$  型光滑张量场. 切丛的截面就是  $M$  的切矢量场, 余切丛的截面称为  $M$  上的一次微分式. 外形式丛  $\Lambda^r(M^*)$  的光滑截面叫做流形  $M$  上光滑的  $r$  次外微分式.

把张量丛的构造抽象化就得到一般矢量丛的概念. 矢量丛和下一章所讨论的联络是规范场论的数学基础.

### 定义 1.3.6. $q$ 维矢量丛定义

设  $E, M$  是两个光滑流形,  $\pi : E \rightarrow M$  是光滑满映射.  $V = \mathbf{R}^q$  是  $q$  维矢量空间. 如果给定了  $M$  的一个开覆盖  $\{U, W, Z, \dots\}$  及一组映射  $\{\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z, \dots\}$ , 使得下列条件成立, 则称  $(E, M, \pi)$  是流形  $M$  上的(实) $q$  维矢量丛, 其中  $E$  称为丛空间,  $M$  称为底空间,  $\pi$  称为丛投影,  $V$  是纤维型:

- 每一个映射  $\varphi_U$  是从  $U \times \mathbf{R}^q$  到  $\pi^{-1}(U)$  的可微同胚, 而且对任意的  $p \in U, y \in \mathbf{R}^q$ , 有

$$\pi \circ \varphi_U(p, y) = p;$$

- 对于任意固定的  $p \in U$ , 命

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \quad y \in \mathbf{R}^q$$

则  $\varphi_{U,p} : \mathbf{R}^q \rightarrow \pi^{-1}(p)$  是同胚. 当  $U \cap W \neq \emptyset$  时, 对任意的  $p \in U \cap W$ , 要求

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p}, \quad \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q$$

是矢量空间  $V = \mathbf{R}^q$  的线性自同构, 即  $g_{UV}(p) \in GL(V)$ ;

- 对于  $U \cap W \neq \emptyset$ , 映射  $g_{UW} : U \cap W \rightarrow GL(V)$  是光滑的. 从条件(2)得到,  $V$  中的元素  $y_U$  和  $y_W$ , 使

$$\varphi_U(p, y_U) = \varphi_W(p, y_W)$$

成立的充要条件是

$$y_U \cdot g_{UW}(p) = y_W$$

这里  $g_{UW}(p)$  看作  $q \times q$  阶非退化矩阵.

对任意的  $p \in M$ , 命  $E_p = \pi^{-1}(p)$ , 称为矢量丛  $E$  在点  $p$  上的纤维. 设  $U$  是  $M$  中包含  $p$  的坐标域, 则纤维型  $V$  的线性结构通过映射  $\varphi_{U,p}$  可以搬到纤维  $E_p$  上来, 使  $E_p$  成为  $q$  维矢量空间. 由于条件(2),  $E_p$  的线性结构与  $U$  和  $\varphi_U$  的选取是无关的(需要证明). 因此, 在直观上可以把矢量丛  $E$  看作诸如  $U \times \mathbf{R}^q$ ( $U$  是  $M$  的坐标域) 的积流形沿着同一点  $p \in M$  上的纤维粘合起来的结果, 在粘合时要求纤维上的线性关系保持不变.

积流形  $M \times \mathbf{R}^q = E$  是矢量丛最简单的例子, 称为  $M$  上平凡的矢量丛, 或积丛. 显然, 前面讲到的张量丛  $T_s^r$ , 都是矢量丛.

**注.** 如果  $V$  是  $q$  维复矢量空间, 则按照定义 1.1 所得的是流形  $M$  上  $q$  维复矢量丛. 此时,  $GL(V)$  同构于  $GL(q; \mathbb{C})$ , 纤维  $\pi^{-1}(p)(p \in M)$  是  $q$  维复矢量空间. 本节所讲的内容是对实矢量丛展开的, 在作相应的修改之后这些内容完全适用于复矢量丛.

条件(3)给出的映射  $g_{UW} : U \cap W \rightarrow GL(V)$  适合下列相容条件:

1. 对于  $p \in U$ ,  $g_{UU}(p) = \text{id} : V \rightarrow V$ ;
2. 若  $p \in U \cap W \cap Z \neq \emptyset$ , 则

$$g_{UW}(p) \cdot g_{WZ}(p) \cdot g_{ZU}(p) = \text{id} : V \rightarrow V.$$

$\{g_{UW}\}$  称为矢量丛  $(E, M, \pi)$  的过渡函数族, 而上述相容条件是使  $\{g_{UW}\}$  成为过渡函数族的充分条件. 确切地说, 我们有下面的定理:

### 定理 1.3.8. 矢量丛的等价定义

设  $M$  是  $m$  维光滑流形,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  是  $M$  的一个开覆盖,  $V$  是  $q$  维矢量空间. 若对每一对指标  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ , 在  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 都指定了一个光滑映射  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(V)$ , 它们适合相容条件(1)和(2), 则存在  $M$  上的  $q$  维矢量丛  $(E, M, \pi)$ , 它以  $\{g_{\alpha\beta}\}$  为过渡函数族.

定理 1.3.8 的详细证明可见参考文献 [20, 第 14 页]. 证明的想法是把局部积  $U_\alpha \times V$  沿各纤维适当地粘起来. 大意如下: 命

$$\widetilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \{\alpha\} \times U_\alpha \times V$$

这自然是微分流形. 在  $\widetilde{E}$  中定义等价关系 “ $\sim$ ”, 使得对任意的  $(\alpha, p, y), (\beta, p', y') \in \widetilde{E}$ ,  $(\alpha, p, y) \sim (\beta, p', y')$  的充要条件是

$$p = p' \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad \text{且 } y' = y \cdot g_{\alpha\beta}(p).$$

用  $E = \widetilde{E} / \sim$  记  $\widetilde{E}$  关于等价关系的商空间, 它也是光滑流形. 用  $[\alpha, p, y]$  记  $(\alpha, p, y)$  的  $\sim$  等价类, 投影  $\pi : E \rightarrow M$  定义为

$$\pi([\alpha, p, y]) = p$$

这是光滑映射. 可以证明  $(E, M, \pi)$  是  $M$  上的  $q$  维矢量丛, 而且它的过渡函数族恰是  $\{g_{\alpha\beta}\}$ .

由定理可知, 过渡函数族  $\{g_{\alpha\beta}\}$  是矢量丛的核心. 构造矢量丛只要指出它的过渡函数族就可以了.

### 例题 1.3.3. 例 1

矢量丛  $E$  的对偶丛  $E^*$ .

解. 设  $V^*$  是  $V$  的对偶空间,  $E^*$  是流形  $M$  上以  $V^*$  为纤维型的矢量丛, 丛投影记作  $\tilde{\pi}$ . 从  $E^*$  的局部积的结构是  $\{(U, \psi_U), (W, \psi_W), (Z, \psi_Z), \dots\}$ . 如果对任意一点  $p \in U \cap W \neq \emptyset$ , 当  $y_U, y_W \in V, \lambda_U, \lambda_W \in V^*$  分别适合

$$\varphi_U(p, y_U) = \varphi_W(p, y_W), \quad \psi_U(p, \lambda_U) = \psi_W(p, \lambda_W) \quad (1.31)$$

时, 总是有

$$\langle y_U, \lambda_U \rangle = \langle y_W, \lambda_W \rangle, \quad (1.32)$$

则可定义纤维  $\pi^{-1}(p)$  和  $\tilde{\pi}^{-1}(p)$  之间的一个配合, 使它们成为互相对偶的矢量空间. 纤维  $\pi^{-1}(p)$  和  $\tilde{\pi}^{-1}(p)$  的配合定义为

$$\langle \varphi_U(p, y_U), \psi_U(p, \lambda_U) \rangle = \langle y_U, \lambda_U \rangle,$$

这与  $U$  的选取是无关的. 这时我们称矢量丛  $E^*$  为  $E$  的对偶丛.

若在  $V$  和  $V^*$  中分别取彼此对偶的基底,  $V$  中的元素  $y$  记作坐标行,  $V^*$  中的元素  $\lambda$  记作坐标列, 则  $V$  和  $V^*$  的配合表现为矩阵的乘法:

$$\langle y, \lambda \rangle = y \cdot \lambda$$

由 (1.31) 的第一式得

$$y_W = y_U \cdot g_{UW}(p),$$

代入 (1.32) 式得到

$$y_U \cdot \lambda_U = y_U \cdot g_{UW}(p) \cdot \lambda_W,$$

所以

$$\lambda_U = g_{UW}(p) \cdot \lambda_W.$$

如果仍把  $V^*$  的元素记成坐标行,  $\mathrm{GL}(V^*)$  的元素右作用在  $V^*$  上, 则  $E^*$  的过渡函数是

$$h_{UW} = {}^t g_{UW}^{-1} = {}^t g_{WU}.$$

当  $E$  是  $M$  上的切丛时, 其过渡函数族  $\{J_{UW}\}$  是由坐标变换的 Jacobi 矩阵组成的. 余切丛的过渡函数恰是  $J_{UW}$  的转置逆矩阵, 所以余切丛是切丛的对偶丛.  $\square$

**例题 1.3.4. 例 2**

矢量丛  $E$  与  $E'$  的直和  $E \oplus E'$ .

**解.** 设  $E$  和  $E'$  都是流形  $M$  上的矢量丛, 纤维型分别是  $V$  和  $V'$ , 过渡函数族是  $\{g_{UW}\}$  和  $\{g'_{UW}\}$  命

$$h_{UW} = \begin{pmatrix} g_{UW} & 0 \\ 0 & g'_{UW} \end{pmatrix},$$

则  $h_{UW}$  是右作用在  $V \oplus V'$  上的线性自同构, 且  $\{h_{UW}\}$  适合过渡函数族的相容条件 (1) 和 (2). 流形  $M$  上以  $\{h_{UW}\}$  为过渡函数族、以  $V \oplus V'$  为纤维型的矢量丛称为  $E$  与  $E'$  的直和, 记作  $E \oplus E'$ .  $\square$

**例题 1.3.5. 例 3**

矢量丛的张量积  $E \otimes E'$ .

**解.** 设  $E$  和  $E'$  与例 2 相同. 命  $\tilde{h}_{UW}$  是  $g_{UW}$  与  $g'_{UW}$  的张量积, 即  $\tilde{h}_{UW} = g_{UW} \otimes g'_{UW}$ , 它在  $V \otimes V'$  上的作用定义为

$$(v \otimes v') \cdot \tilde{h}_{UW} = (v \cdot g_{UW}) \otimes (v' \cdot g'_{UW}),$$

其中  $v \in V, v' \in V'$ . 显然  $\{\tilde{h}_{UW}\}$  也适合过渡函数族的相容条件. 流形  $M$  上以  $\{\tilde{h}_{UW}\}$  为过渡函数族、以  $V \otimes V'$  为纤维型的矢量丛称为  $E$  与  $E'$  的张量积, 记作  $E \otimes E'$ . 容易看出, 流形  $M$  上的  $(r, s)$  型张量丛是  $r$  个切丛与  $s$  个余切丛的张量积.  $\square$

**定义 1.3.7.**

设  $s : M \rightarrow E$  是光滑映射, 如果

$$\pi \circ s = \text{id} : M \rightarrow M$$

则称  $s$  是矢量丛  $(E, M, \pi)$  的一个光滑截面. 我们用  $\Gamma(E)$  记矢量丛  $(E, M, \pi)$  的全体光滑截面的集合.

## 第二部分

### 微分几何学

《微分流形与李群基础》根据 F. W. 瓦内尔所著《Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups》(Springer 出版社 1983 年版)一书译出。《微分流形与李群基础》特色鲜明、选材精练、论述精辟。

全书共分 6 章，其核心材料主要包含在第 1, 2, 4 章中，包括微分流形、微分形式、流形上的积分以及 de Rham 上同调等，第 3 章则比较系统地论述了 Lie 群论的基本内容，第 5 章论述 de Rham 定理并为此发展了公理化层上同调论，第 6 章论述 Hodge 定理并以 Fourier 级数为基本工具给出了椭圆算子局部理论的完整论述，这在一般参考书中是不容易找到的。



### Sec 2.1 微分流形期末考试内容

#### 2.1.1 证明题

**题 2.1.** 证明  $n$  维球面  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  是  $n$  维  $C^\infty$  微分流形.

证明. 取  $S^n$  的拓扑为  $\mathbb{R}^{n+1}$  子空间的拓扑, 则  $S^n$  是 Hausdorff 空间. 令

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}; \\ U_i^- &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}. \\ \varphi_i^+ &: U_i^+ \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}); \\ \varphi_i^- &: U_i^- \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}); \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , 则  $\varphi_i^+$  与  $\varphi_i^-$  都是可逆映射, 有

$$\begin{aligned} (\varphi_i^+)^{-1}: \varphi(U_i^+) \rightarrow U_i^+, (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_i, \dots, x_n); \\ (\varphi_i^-)^{-1}: \varphi(U_i^-) \rightarrow U_i^-, (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, -\sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_i, \dots, x_n); \end{aligned}$$

考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1}(\varphi_1^+)^{-1}: \varphi_1^+(U_1^+ \cap U_2^-) &\rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1^+ \cap U_2^-) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left( \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_2, \dots, x_n \right), \end{aligned}$$

可知  $\varphi_2^{-1}(\varphi_1^+)^{-1}$  是  $C^\infty$  映射, 因此坐标卡  $(U_1^+, \varphi_1^+)$  和  $(U_2^-, \varphi_2^-)$  是  $C^\infty$  相容的. 同理可得坐标图册  $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) \mid i = 1, 2, \dots, n+1\}$  是  $C^\infty$  相容坐标图册. 因此唯一确定了  $S^n$  上的  $C^\infty$  微分结构, 故  $S^n$  是  $n$  维光滑流形.  $\square$

**命题 2.1.1.**  $S^n$  是  $n$  维  $C^\omega$  流形.

**证明.** 设  $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , 他的直角坐标系为  $(x^1, \dots, x^{n+1})$ , 如果将  $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n, 0) \mid x^i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  与  $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  视作相同的, 则从图中容易算出:

$$\begin{aligned}\varphi_1: U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n, (u^1, \dots, u^n) = \varphi_1(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left( \frac{x^1}{1+x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1+x^{n+1}} \right); \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &= \varphi_1^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \left( \frac{2u^1}{1+\sum_{i=1}^n(u^i)^2}, \dots, \frac{2u^n}{1+\sum_{i=1}^n(u^i)^2}, \frac{1-\sum_{i=1}^n(u^i)^2}{1+\sum_{i=1}^n(u^i)^2} \right) \\ \varphi_2: U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n, (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n) = \varphi_2(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left( \frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right); \\ (x^1, \dots, x^{n+1}) &= \varphi_2^{-1}(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n) = \left( \frac{2\bar{u}^1}{1+\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2}, \dots, \frac{2\bar{u}^n}{1+\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2}, \frac{\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2-1}{1+\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2} \right)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n) &= \left( \frac{u^1}{\sum_{i=1}^n(u^i)^2}, \dots, \frac{u^n}{\sum_{i=1}^n(u^i)^2} \right), \\ (u^1, \dots, \bar{u}^n) &= \left( \frac{\bar{u}^1}{\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2}, \dots, \frac{\bar{u}^n}{\sum_{i=1}^n(\bar{u}^i)^2} \right).\end{aligned}$$

于是,  $\mathcal{D}'_1 = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  满足定义 1 中的条件 (1):  $S^n = U_1 \bigcup U_2$  和条件  $\mathcal{D}'_1$  中元素是  $C^\omega$  相容的 ( $\{u^i\}$  和  $\{\bar{u}^i\}$  彼此可表示为实有理函数, 由于实变量的有理函数可以自然延拓为复变量的有理函数, 再由求导的加减乘除法则可知后者关于复变量是可导的, 所以也是解析的. 于是它在每一点的一个开领域内可展开为收敛的幂级数. 如果再限制在实变量, 那么它在每一点的一个实的开领域上也可以展开为收敛的幂级数. 因此实有理数是实解析的. 根据微分构造的定理,  $\mathcal{D}'_1$  确定了  $S^n$  上的一个  $C^\omega$  微分构造  $\mathcal{D}_1 = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ 与 } \mathcal{D}'_1 \text{ 是 } C^\omega \text{ 相容的}\}$ . 而  $\mathcal{D}'_1$  是  $C^\omega$  微分构造  $\mathcal{D}_1$  的一个基, 通过计算可得 Jacobi 行列式为

$$J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} = -\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n(u^i)^2\right)^n},$$

如果将局部坐标  $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n\}$  换成  $\{\bar{u}^2, \bar{u}^1, \bar{u}^3, \dots, \bar{u}^n\}$ , 则相应的 Jacobi 行列式大于零.

下面换一种方式来给出  $S^n$  的  $C^\omega$  微分构造的另一个基. 为此, 对任意  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , 令

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\};$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}.$$

$$\begin{aligned}\varphi_i^+: U_i^+ &\rightarrow \varphi_i^+(U_i^+) = \left\{ (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}) \mid \sum_{j \neq i} (x^j)^2 < 1 \right\}, \\ \varphi_i^+(x^1, \dots, x^{n+1}) &= (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})\end{aligned}$$

称  $(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$  为  $U_i^+$  中的局部坐标, 其中  $\hat{x}^i$  表示删去第  $i$  项  $x^i$ .

由此可以知道,  $\mathcal{D}'_1 = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) \mid i = 1, \dots, n+1\}$  满足微分构造的定义中的条件 (1):  $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-)$  和条件 (2):  $\mathcal{D}'_2$  中的元素是  $C^\omega$  相容的.

例如,

$$\begin{aligned}\varphi_2^+ \circ (\varphi_1^{-1})^{-1}(x^2, \dots, x^{n+1}) &= \varphi_2^+(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}) \\ &= \left( -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2}, x^3, \dots, x^{n+1} \right)\end{aligned}$$

是  $C^\omega$  类的 (利用  $\sqrt{1-u}$  在 0 的开邻域  $(-1, 1)$  中可展开为收敛幂级数和). 由微分构造的定理可知,  $\mathcal{D}'_2$  确定了  $S^n$  上的一个  $C^\omega$  微分构造  $\mathcal{D} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ 与 } \mathcal{D}'_2 \text{ 是 } C^\omega \text{ 相容的}\}$ , 而  $\mathcal{D}'_2$  是微分构造  $\mathcal{D}_2$  的一个基.

通过计算得到 Jacobi 行列式为

$$J_{\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} = -(-1)^{i+j} \frac{x^j}{x^i},$$

) 如果取  $(-1)^{i+1}\{x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\}$  为  $U_i^+$  的局部坐标 ( $(-1)^{i+1}\{x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\}$  表示将坐标  $\{x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\}$  做  $i+1$  次对换), 取  $(-1)^i\{x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1}\}$  为  $U_i^-$  的局部坐标, 则相应的 Jacobi 行列式大于零.

因为  $\{x^1, \dots, x^{n+1}\}$  与  $\{u^1, \dots, u^n\}$  (或  $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ ) 彼此可以表示出来, 且  $\mathcal{D}'_1$  与  $\mathcal{D}'_2$  中的元素是  $C^\omega$  相容的, 由微分构造定理知  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ .

因为紧致集  $S^n$  不能与  $\mathbb{R}^n$  中的开集同胚, 所以  $S^n$  不是局部坐标邻域.

此外, 对于  $S^2$ , 球面坐标系  $(U, \varphi) \in \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ , 它是局部坐标系而不是整体坐标系, 其中

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}: (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\rightarrow U = \varphi^{-1}((0, \pi) \times (0, 2\pi)) \subset S^n, \\ \varphi^{-1}(\theta, \varphi) &= (\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta).\end{aligned}$$

对于  $S^1$ , 令

$$\psi_1: S^1 \rightarrow \{e^{i\theta}\} \rightarrow (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^1$$

$$\psi_1(e^{i\theta}) = \theta, \theta \in (0, 2\pi),$$

$$\psi_2: S^1 \rightarrow \{e^{i\eta}\} \rightarrow (\pi, 3\pi) \subset \mathbb{R}^1$$

$$\psi_2(e^{i\eta}) = \eta, \eta \in (\pi, 3\pi).$$

显然, 在  $S^1 - \{e^{i\theta}, e^{i\eta}\}$  中,  $e^{i\theta} = e^{i\eta} \iff \eta = \theta + 2k\pi = \begin{cases} \theta + 2\pi, & \theta \in (0, 2\pi) \\ \theta, & \theta \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$ , 于是  $\eta$  是  $\theta$  的  $C^\omega$  函数,  $\theta$  也是  $\eta$  的  $C^\omega$  函数. 由微分构造定理知,  $\mathcal{D}'_3 = \{(S^1 - \{e^{i\theta}\}, \psi_1), (S^1 - \{e^{i\eta}\}, \psi_2)\}$  确定了一个 1 维  $C^\omega$  微分构造  $\mathcal{D}_3$ :  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3$ . (注:  $\theta$  是局部坐标系而非整体坐标系)  $\square$

## 题 2.2. 证明实射影空间是微分流形.

**证明.**  $n$  维实射影空间 (定义): 设  $x = (x^1, \dots, x^{n+1}), y = (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ .  $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  的等价类  $[x] = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid y \sim x\}$ . 等价类的全体构成

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\}$$

投影  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n, \pi(x) = [x]$ . 设  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  的拓扑为  $\tau$ , 可得  $\tau' = \{U \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\}$  为  $\mathbb{R}P^n$  上的一个拓扑, 于是  $(\mathbb{R}P^n, \tau')$  为  $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau)$  的上空间, 称为  $n$  维实射影空间.

下面证明  $\mathbb{R}P^n$  为  $n$  维  $C^\omega$  流形. 对任意的  $[x], [y] \in \mathbb{R}P^n$ , 且  $[x] \neq [y]$ , 则存在含  $\pi^{-1}([x])$  的以原点为心的去心开锥体  $V_y$ , 使得  $V_x \cap V_y = \emptyset$ , 因而  $\pi(V_x)$  和  $\pi(V_y)$  分别是含  $[x]$  和  $[y]$  的不相交开集, 所以  $(\mathbb{R}P^n, \tau')$  是  $T^2$  空间. 令

$$\begin{aligned} U_k &= \{[x] \in \mathbb{R}P^n \mid x = (x^1, \dots, x^{n+1}), x^k \neq 0\}, \\ \varphi_k: U_k &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \varphi_k([x]) &= \left( \frac{x^1}{x^k}, \dots, \frac{x^{k-1}}{x^k}, \frac{x^{k+1}}{x^k}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^k}, \right) \\ &= \left( {}_k\xi^1, \dots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \dots, {}_k\xi^{n+1} \right). \end{aligned}$$

我们称  $(x^1, \dots, x^{n+1})$  为  $[x]$  的齐次坐标,  $({}_k\xi^1, \dots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \dots, {}_k\xi^{n+1})$  为  $[x]$  关于  $U_k$  的非齐次坐标.

显然,  $\bigcup_{k=1}^n U_k = \mathbb{R}P^n$ , 当  $U_k \cap U_l \neq \emptyset, k \neq l$  时,

$$\begin{aligned} \varphi_l \circ \varphi_k^{-1}: \varphi_k(U_k \cap U_l) &\rightarrow \varphi_l(U_k \cap U_l) \\ \varphi_l \circ \varphi_k^{-1} \left( {}_k\xi^1, \dots, {}_k\xi^{k-1}, {}_k\xi^{k+1}, \dots, {}_k\xi^{n+1} \right) &= \varphi_l([x]) = \left( {}_l\xi^1, \dots, {}_l\xi^{l-1}, {}_l\xi^{l+1}, \dots, {}_l\xi^{n+1} \right). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} {}_l\xi^h = \frac{x^h}{x^l} = \frac{x^h}{x^k}/\frac{x^l}{x^k} = \frac{{}_k\xi^h}{{}_k\xi^l}, h \neq l, k, \\ {}_l\xi^k = \frac{x^k}{x^l} = 1/\frac{x^l}{x^k} = 1/{{}_k\xi^l}. \end{cases}$$

为有理数, 因而它是  $C^\omega$  函数. 由微分构造的定理知  $\mathcal{D}' = \{(U_k, \varphi_k) \mid k = 1, \dots, n+1\}$  确定了  $\mathbb{R}P^n$  上的一个  $C^\omega$  微分结构  $\mathcal{D}$ , 使得  $(\mathbb{R}P^n, \mathcal{D})$  成为  $C^\omega$  流形.

通过计算得 Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned} J_{\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}} &= \frac{\partial(l\xi^1, \dots, l\xi^{l-1}, l\xi^{l+1}, \dots, l\xi^{n+1})}{\partial(k\xi^1, \dots, k\xi^{k-1}, k\xi^{k+1}, \dots, k\xi^{n+1})} \\ &= (-1)^{l+k} \frac{1}{(k\xi^l)^{n+1}}. \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数时,  $(k\xi^l)^{n+1} > 0$ , 如果  $k$  为奇数, 相应的局部坐标不变; 如果  $k$  为偶数, 相应的局部坐标只改变其中一个, 即  $k\xi^s$  变为  $-k\xi^s$ , 其余不变, 且局部坐标改变后的 Jacobi 行列式大于零. 当  $n$  为偶数时, 由于  $k\xi^l$  有正有负, 所以  $J_{\varphi_l \circ \varphi_k^{-1}}$  也有正有负.  $\square$

**定义 2.1.1** (子流形). (I) 如果  $d\psi_m$  对于每一个  $m \in M$  都是非奇异的, 那么  $\psi$  是一个浸入 (Immersion) 或嵌入 (Imbedding).  
 (II) 如果  $\psi$  是一一浸入, 那么偶  $(M, \psi)$  是  $N$  的一个子流形.

## 2.1.2 第 11 题两小问

**定义 2.1.2.** 令  $\varphi: M \rightarrow N$  是  $C^\infty$  的, 对于  $M$  上的光滑向量场  $X$  和  $N$  上的光滑向量场  $Y$ , 如果  $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$ , 则称它们是  $\varphi$  相关的.

**命题 2.1.2.** 令  $\varphi: M \rightarrow N$  是  $C^\infty$  的, 且设  $X$  和  $X_1$  是  $M$  上的光滑向量场;  $Y$  和  $Y_1$  是  $N$  上的光滑向量场. 如果  $X$  和  $Y$  是  $\varphi$  相关的,  $X_1$  和  $Y_1$  是  $\varphi$  相关的, 那么  $[X, X_1]$  和  $[Y, Y_1]$  也是  $\varphi$  相关的.

**证明.** 必须证明  $d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$ . 为此令  $m \in M$  且  $f \in C^\infty(N)$ , 那么必须证明

$$d\varphi([X, X_1]_m)(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f).$$

直接展开定义式即得

$$\begin{aligned} d\varphi([X, X_1])_m(f) &= [X, X_1]_m(f \circ \varphi) \\ &= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1|_m(X(f \circ \varphi)) \\ &= X_m((d\varphi \circ X_1)(f)) - X_1|_m((d\varphi \circ X)(f)) \\ &= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1|_m(Y(f) \circ \varphi) \\ &= d\varphi(X_m)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1|_m)(Y(f)) \\ &= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1|_{\varphi(m)}(Y_1(f)) \\ &= [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\square$

**命题 2.1.3.** 两个左不变向量场的 Lie 括号自身也是一个左不变向量场.

**证明.** 在开始证明之前, 我们先证明一个引理:

**引理 2.1.1.** 左不变向量场都是光滑的.

**证明.** 令  $X \in \mathfrak{G}$ , 令  $f \in C^\infty$ . 只需证明  $Xf \in C^\infty(G)$ . 由于

$$Xf(\sigma) = X_\sigma f = dl_\sigma(X_e)f = X_e(f \circ l_\sigma). \quad (2.3)$$

因而需要证明  $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$  是  $G$  上的  $C^\infty$  函数. 通过把这个函数表示成  $C^\infty$  映射的适当复合来做到这一点. 令  $G \times G \rightarrow G$  表示群的乘法,  $\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau$ . 而且令  $i_e^1$  和  $i_\sigma^2$  是由

$$\begin{cases} i_e^1(\tau) = (\tau, e), \\ i_\sigma^2(\tau) = (\sigma, \tau). \end{cases} \quad (2.4)$$

定义的  $G \rightarrow G \times G$  的映射. 令  $Y$  是  $G$  上使得  $Y(e) = X(e)$  的任何  $C^\infty$  向量场, 那么  $(0, Y)$  是  $G \times G$  上的光滑向量场, 而且  $[(0, Y)(f \circ \varphi)] \circ i_e^1$  是  $G$  上的  $C^\infty$  函数. 利用习题

**题 2.3.** 考虑带有标准射影  $\pi_1: M \times N \rightarrow M$  和  $\pi_2: M \times N \rightarrow N$  的积流形  $M \times N$ .

- (a) 证明  $\alpha: \hat{M} \rightarrow M \times N$  是  $C^\infty$  的当且仅当  $\pi_1 \circ \alpha$  和  $\pi_2 \circ \alpha$  是  $C^\infty$  的.
- (b) 证明映射  $v \mapsto (d\pi_1(v), d\pi_2(v))$  是  $(M \times N)_{(m,n)}$  与  $M_m \oplus N_n$  的一个同构.
- (c) 令  $X$  和  $Y$  分别是  $M$  和  $N$  上的  $C^\infty$  向量场, 那么由 (b),  $X$  和  $Y$  规范地决定  $M \times N$  上的向量场  $\hat{X} = (X, 0)$  和  $\hat{Y} = (0, Y)$ . 证明  $[\hat{X}, \hat{Y}] = 0$ .
- (d) 令  $(m_0, n_0) \in M \times N$ , 并且

$$\begin{aligned} i_{n_0}(m) &= (m, n_0), \\ i_{m_0}(n) &= (m_0, n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

定义内射  $i_{n_0}: M \rightarrow M \times N$  和  $i_{m_0}: N \rightarrow M \times N$ . 令  $v \in (M \times N)_{(m_0, n_0)}$ , 令  $v_1 = d\pi_1(v) \in M_{m_0}$ ,  $v_2 = d\pi_2(v) \in N_{n_0}$ . 令  $f \in C^\infty(M \times N)$ . 证明

$$v(f) = v_1(f \circ i_{n_0}) + v_2(f \circ i_{m_0})$$

中的 (d) 项, 得出

$$\begin{aligned} [(0, Y)(f \circ \varphi)] \circ i_e^1(\sigma) &= (0, Y)_{(\sigma, e)}(f \circ \varphi) \\ &= 0_\sigma(f \circ \varphi \circ i_e^1) + Y_e(f \circ \varphi \circ i_\sigma^2) \\ &= X_e(f \circ \varphi \circ i_\sigma^2) = X_e(f \circ l_\sigma). \end{aligned}$$

因而  $\sigma \mapsto X_e(f \circ l_\sigma)$  是  $G$  上的光滑函数. 这就证明了 (b) 成立.  $\square$

由引理可知, 左不变向量场都是光滑的, 所以它们的 Lie 括号有定义. 如果  $X$  是与其自身  $l_\sigma$  相关的, 并且  $Y$  也是与其自身  $l_\sigma$  相关的, 那么根据命题 2.1.2  $[X, Y]$  就  $l_\sigma$  相对于  $[X, Y]$ . 因而两个左不变向量场的 Lie 括号还是一个左不变向量场.  $\square$

**命题 2.1.4.** For any smooth  $n$ -manifold  $M$ , the tangent bundle  $TM$  has a natural topology and smooth structure that make it into a  $2n$ -dimensional smooth manifold. With respect to this structure, the projection  $\pi: TM \rightarrow M$  is smooth.

**证明.** We begin by defining the maps that will become our smooth charts. Given any smooth chart  $(U, \varphi)$  for  $M$ , note that  $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$  is the set of all tangent vectors to  $M$  at all points of  $U$ . Let  $(x^1, \dots, x^n)$  denote the coordinate functions of  $\varphi$ , and define a map  $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  by

$$\tilde{\varphi}\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = (x^1, \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n). \quad (2.6)$$

see **Figure 2.1** Its image set is  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ , which is an open subset of  $\mathbb{R}^{2n}$ . It is a bijection onto its image,

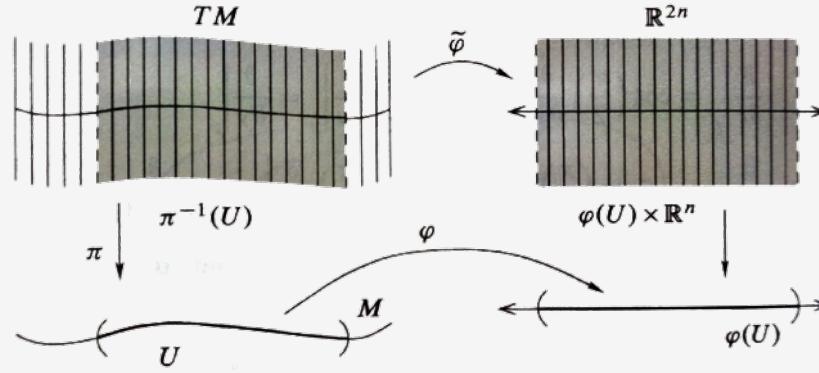


Fig. 3.8 (c)

图 2.1: Coordinate For the tangent bundle

because its inverse can be written explicitly as

$$\tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Now suppose we are given two smooth charts  $(U, \varphi)$  and  $(V, \psi)$  for  $M$ , and let  $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ ,  $(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$  be the corresponding charts on  $TM$ . The sets

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) &= \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \quad \text{and} \\ \tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) &= \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

are open in  $\mathbb{R}^{2n}$ , and the transition map  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$  can be written explicitly using

$$\tilde{v}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(\hat{p})v^i \quad (2.7)$$

as

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left( \tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}(x)v^i, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}(x)v^i \right)$$

This is clearly smooth.

Choosing a countable cover  $\{U_i\}$  of  $M$  by smooth coordinate domains, we obtain a countable cover of  $TM$  by coordinate domains  $\{\pi^{-1}(U_i)\}$  satisfying conditions (i)–(iv) of the smooth manifold chart lemma (Lemma 1.35). To check the Hausdorff condition (v), just note that any two points in the same

fiber of  $\pi$  lie in one chart, while if  $(p, v)$  and  $(q, w)$  lie in different fibers, there exists disjoint smooth coordinate domains  $U, V$  for  $M$  such that  $p \in U$ , and  $q \in V$ , and then  $\pi^{-1}(U)$  and  $\pi^{-1}(V)$  are disjoint coordinate neighborhoods containing  $(p, v)$  and  $(q, w)$ , respectively.

To see that  $\pi$  is smooth, note that with respect to charts  $(U, \varphi)$  for  $M$  and  $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$  for  $TM$ , its coordinate representation is  $\pi(x, v) = x$ .  $\square$

The coordinate  $(x^i, v^i)$  given by Eq (2.6) are called **Natural Coordinates On  $TM$** .

### 2.1.3 单位分解定理的存在性

#### 定理 2.1.1. 单位分解定理的存在性

令  $M$  是一个微分流形, 且  $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$  是  $M$  的一个开覆盖, 那么存在一个从属于  $\{U_\alpha\}$  的可数单位分解  $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots\}$ , 而且对于每个  $i$ ,  $\text{supp } \varphi_i$  都是紧的. 如果不要求紧支集, 那么存在一个从属于  $\{U_\alpha\}$  的单位分解  $\{\varphi_\alpha\}$  (即  $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ ) 且使得至多可数多个  $\varphi_\alpha$  不恒等于零.

**证明.** 令序列  $\{G_i\}$  像在 1.9(1) 中那样覆盖  $M$ , 并置  $G_0 = \emptyset$ . 对  $p \in M$ , 令  $i_p$  是使得  $p \in M - \bar{G}_{i_p}$  的最大整数. 选取一个  $\alpha_p$  使得  $p \in U_{\alpha_p}$ , 并且令  $(V, \tau)$  是中心在  $p$  点的坐标系, 使得  $V \subset U_\alpha \cap (G_{i_p+2} - \bar{G}_{i_p})$  且使得  $\tau(V)$  包含闭立方体  $\overline{C(2)}$ . 定义

$$\psi_p = \begin{cases} \varphi \circ \tau, & \text{在 } V \text{ 上,} \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

其中,  $\varphi$  是函数 1.10(1), 那么  $\psi_p$  是  $M$  上的一个  $C^\infty$  函数, 它在  $p$  点的某个开邻域  $W_p$  上取值为 1, 并且具有在  $V \subset U_\alpha \cap (G_{i_p+2} - \bar{G}_{i_p})$  中的紧支集. 对于每个  $i \geq 1$ , 选取由  $M$  中的点  $p$  组成的一个有限点集使得它们相应的  $W_p$  邻域覆盖  $\bar{G}_i - G_{i-1}$ . 将相应的函数  $\psi_p$  排成一个序列  $\psi_j | j = 1, 2, 3, \dots$ .  $\psi_j$  的支集构成  $M$  的一个局部有限的子集族. 因而函数

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$$

是  $M$  上的一个完全确定的  $C^\infty$  函数, 而且对于每个  $p \in M$ ,  $\psi(p) > 0$ . 对每个  $i = 1, 2, 3, \dots$ , 定义

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$$

那么函数族  $\{\varphi_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$  构成一个从属于覆盖  $\{U_\alpha\}$  的单位分解, 而且对于每个  $i$ ,  $\text{supp } \varphi_i$  都是紧的. 如果当任何  $\varphi_i$  都没有在  $U_\alpha$  中的支集时, 令  $\varphi_\alpha$  恒等于零, 在其他情况下, 令  $\varphi_\alpha$  是那些在  $U_\alpha$  中有支集的各个  $\varphi_i$  之和, 那么  $\{\varphi_\alpha\}$  是一个从属于覆盖  $\{U_\alpha\}$  的单位分解, 且使得至多可

数个  $\varphi_\alpha$  不恒为零. 为了看出  $\varphi_\alpha$  的支集在  $U_\alpha$  中, 注意到, 如果  $\{U_\alpha\}$  是闭集的一个局部有限族, 那么  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ . 然而, 要注意到  $\varphi_\alpha$  的支集未必是紧的.  $\square$

### 2.1.4 第 12 题两小问

**引理 2.1.2.**  $M_m$  自然同构于  $(F_m/F_m^2)^*$ .

**证明.** 如果  $v \in M_m$ , 那么由于求导运算的性质,  $v$  是  $F_m$  上的线性函数且在  $F_m^2$  上为零. 反过来, 如果  $l \in (F_m/F_m^2)^*$ , 那么通过对  $\mathbf{f} \in \widetilde{F}_m$  置  $v_l(\mathbf{f}) = l(\{\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\})$  来定义  $m$  点的切向量  $v_l$  (其中,  $\mathbf{f}(\mathbf{m})$  表示取常数值  $\mathbf{f}(m)$  的函数芽,  $\{\}$  则用来表示在  $F_m/F_m^2$  中的陪集).  $v_l$  在  $\widetilde{F}_m$  上的线性性质是明显的, 而它是一个求导运算是因为

$$\begin{aligned} v_l(\mathbf{f} - \mathbf{g}) &= l(\{\mathbf{f}\mathbf{g} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\mathbf{g}(\mathbf{m})\}) \\ &= l(\{(\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))(\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{m})) + \mathbf{f}(\mathbf{m})(\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{m})) + (\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))\mathbf{g}(\mathbf{m})\}) \\ &= l(\{(\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))(\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))\}) + \mathbf{f}(m)l(\{\mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{m})\}) + \mathbf{g}(m)l(\{\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{m})\}) \\ &= \mathbf{f}(m)v_l(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(m)v_l(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

从而得到  $M_m$  到  $(F_m/F_m^2)^*$  中的映射, 且反之亦然. 容易验证这些映射互逆, 因而它们都是同构.  $\square$

**定理 2.1.1.**  $\dim(F_m/F_m^2) = \dim M$ .

证明是基于下列微积分的引理.

**引理 2.1.3.** 如果  $g$  在  $\mathbb{R}^d$  中包围  $p$  点的一个凸开集  $U$  上是  $C^k(k \geq 2)$  类的, 那么对于每个  $q \in U$ ,

$$\begin{aligned} g(q) &= g(p) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial r_i} \Big|_p (r_i(q) - r_i(p)) \\ &\quad + \sum_{i,j} (r_i(q) - r_i(p))(r_j(q) - r_j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{(p+t(q-p))} dt. \quad (2.8) \end{aligned}$$

特别地, 若  $g \in C^\infty$ , 那么(2.8)式中的第二个和式决定  $F_p^2$  的一个元素, 因为积分作为  $q$  的一个函数是  $C^\infty$  类的.

**证明. (定理 2.1.1 的证明)**

令  $(U, \varphi)$  为  $m$  点的坐标函数是  $x_1, \dots, x_d$  ( $d = \dim M$ ) 的坐标系. 令  $\mathbf{f} \in F_m$ . 将(2.8)式应用于  $f \circ \varphi^{-1}$ , 并且与  $\varphi$  复合得到, 在  $m$  的一个邻域上,

$$f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (x_i - x_i(m)) + \sum_{i,j} (x_i - x_i(m))(x_j - x_j(m)) h,$$

其中,  $h \in C^\infty$ . 因而

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(m)} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(\mathbf{m})) \bmod F_m^2.$$

因此  $\{\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(\mathbf{m})\} : i = 1, \dots, d\}$  张成  $F_m/F_m^2$ , 所以  $\dim F_m/F_m^2 \leq d$ , 可以断言, 这些元素是线性无关的. 因为假设

$$\sum_{i=1}^d a_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(\mathbf{m})) \in F_m^2.$$

现在,

$$\sum_{i=1}^d a_i (x_i - x_i(m)) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^d a_i (r_i - r_i(\varphi(m))).$$

因而

$$\sum_{i=1}^d a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i(\varphi(\mathbf{m}))) \in F_{\varphi(m)}^2.$$

但是这就蕴涵着, 对于  $j = 1, \dots, d$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(m)} \left( \sum a_i (r_i - r_i(\varphi(m))) \right) = 0,$$

而这又蕴涵着  $a_j$  必然全为零. □

**推论 2.1.  $\dim M_m = \dim M$ .**

## 2.1.5 第 13 题

### 例题 2.1.1. 第 13 题

关于光滑向量场  $X$  的 Lie 导数  $L_X$  与内乘算子  $i(X) : \Lambda_k(M_m^*) \rightarrow \Lambda_{k-1}(M_m^*)$ 、外微分算子  $d : \Lambda_k(M_m^*) \rightarrow \Lambda_{k+1}(M_m^*)$ ,  $d^2 = d_{k+1} \circ d_k = 0, k = 0, 1, \dots, d$  满足  $L_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$ . 请利用 Lie 导数  $L_X$  的如下三个性质:

- i)  $L_X f = X(f) = df(X), f \in \Lambda_0(M_m^*) = C^\infty(M)$ ;
- ii)  $L_X Y = [X, Y], Y \in \Lambda_1(M_m) = M_m$ ;
- iii)  $\forall \omega \in \Lambda_p(M_m^*), Y_0 = X, Y_1, Y_2, \dots, Y_p \in \Lambda_1(M_m) = M_m$ ,

$$\begin{aligned} (L_{Y_0} \omega)(Y_1, \dots, Y_p) &= L_{Y_0} \omega(Y_1, \dots, Y_p) - \omega(L_{Y_0} Y_1, Y_2, \dots, Y_p) \\ &\quad - \omega(Y_1, L_{Y_0} Y_2, \dots, Y_p) - \dots - \omega(Y_1, Y_2, \dots, L_{Y_0} Y_p) \\ &= Y_0(\omega(Y_1, \dots, Y_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(Y_1, \dots, Y_{i-1}, [Y_0, Y_i], Y_{i+1}, \dots, Y_p) \end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 (d\omega)(Y_0, Y_1, \dots, Y_p) &= \\
 (-1)^0 Y_0 (\omega(Y_1, \dots, Y_p)) + (-1)^1 Y_1 (\omega(Y_0, Y_2, \dots, Y_p)) + \dots + (-1)^p Y_p (\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1})) \\
 + (-1)^{0+1} \omega([Y_0, Y_1], Y_2, \dots, Y_p) + (-1)^{0+2} \omega([Y_0, Y_2], Y_1, Y_3, \dots, Y_p) + \dots \\
 + (-1)^{0+p} \omega([Y_0, Y_p], Y_1, Y_2, \dots, Y_{p-1}) \\
 + (-1)^{1+2} \omega([Y_1, Y_2], Y_0, Y_3, \dots, Y_p) + \dots + (-1)^{1+p} \omega([Y_1, Y_p], Y_0, Y_2, \dots, Y_{p-1}) \\
 + \dots + (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \dots, Y_p) + \dots \\
 + (-1)^{(p-1)+p} \omega([Y_{p-1}, Y_p], Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-2}) \\
 = \sum_{i=0}^p (-1)^i Y_i (\omega(Y_0, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_p)) \\
 + \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_{j-1}, Y_{j+1}, \dots, Y_p)
 \end{aligned}$$

在  $p = 1$  和  $p = 2$  或  $3$  时成立。  $\square$

### 定理 2.1.2.

切丛  $TM$  是  $2n$  维光滑流形。

**证明.** 首先可以验证,  $TM$  是满足第二可数以及 Hausdorff 的。那么接下来就要找到  $TM$  上的一组相容坐标卡, 对于原本  $M$  上的坐标卡  $(U, \varphi)$ ,  $U$  诱导到  $TM$  上,  $\pi^{-1}(U) \subset TM$  为开集, 再把  $\varphi$  诱导到  $\pi^{-1}(U)$  上:

$$\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \tilde{\varphi} \left( v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = (\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p), v^1, \dots, v^n).$$

这显然是单射, 且  $\tilde{\varphi}$  把  $\pi^{-1}(U)$  映为  $\mathbb{R}^{2n}$  中开集, 对  $M$  上的任意两个坐标卡  $(U, \varphi), (V, \psi)$ , 对应切丛上的  $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}), (\pi^{-1}(V), \tilde{\psi})$ , 有:

$$\tilde{\varphi}(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

所以  $\tilde{\varphi}$  把交集映成开集。再考虑转移函数  $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = \left( \tilde{x}^1(x), \dots, \tilde{x}^n(x), v^i \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}(x), \dots, v^i \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}(x) \right)$$

由微分流形的定义即知  $TM$  是  $2n$  维光滑流形。

我们从坐标卡的构造中看到, 切丛是局部微分同胚于  $U \times \mathbb{R}^n$ , 从直观上看也是相当自然的。在上述证明中, 我们看到如果流形  $M$  有整体的坐标卡, 那么我们可以取  $U = M$ , 从而其切丛也会有  $M \times \mathbb{R}^n$  这种相当简单的结构。但这只是充分条件, 不是必要条件。比方说圆周  $S^1$ , 在每一点  $(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in \mathbb{R}$  处切空间的基底为  $(-\sin \theta, \cos \theta)$ , 所以  $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}^1$ , 但是因为  $\mathbb{R}^1$  与  $S^1$  不同胚,  $S^1$  是不能被一个坐标卡覆盖住的。  $\square$

**定理 2.1.2.** 余切丛  $T^*M$  是  $2n$  维光滑流形.

**证明.** 我们可以讨论两个坐标卡  $(U, \phi; x^i), (V, \varphi; y^i)$  相交部分的坐标变换, 他们的基分别记为  $\{dx^i|_p\}, \{dy^i|_p\} \subset T_p^*M$ , 将  $U$  上的基用  $V$  线性表出:

$$dx^i|_p = a_k dy^k|_p, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

根据切空间的坐标变换, 我们有:

$$\frac{\partial}{\partial y^l}|_p = \frac{\partial x^j}{\partial y^l}(y_0) \frac{\partial}{\partial x^j}|_p,$$

两边作用  $dx^i|_p$ , 因为  $\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)|_p = \delta_{ij}$ , 所以得到:

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial y^l} \right) = dx^i \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^l}(y_0) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^l} = a_k dy^k \left( \frac{\partial}{\partial y^l} \right) = a_l$$

稍微把  $a$  的指标从  $l$  换为  $j$ , 就得到了对于余切空间的坐标变换公式:

$$dx^i|_p = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j|_p.$$

接着再仿照上文中  $TM$  是  $2n$  维流形的证明, 就知道  $T^*M$  仍然是  $2n$  维光滑流形, 坐标卡的取法为:

$$(\pi^{-1}(U), \varphi; x^i) : \varphi(v_i dx^i|_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v_1, \dots, v_n)$$

对两个坐标卡  $(\pi^{-1}(U), \varphi; x^i), (\pi^{-1}(V), \psi; y^i)$  转移函数为:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n, v_1, \dots, v_n) = \left(y^1(x), \dots, y^n(x), \frac{\partial x^1}{\partial y^j} v_j, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial y^j} v_j\right)$$

第二可数以及 Hausdorff 亦可以验证。

更进一步, 仿照  $TM$  是可定向流形, 我们也可以证明  $T^*M$  为可定向流形, 其中关键一步是在考虑转移函数的雅可比时, 根据余切丛上的坐标变换, 后  $n$  个分量的雅可比恰好是前  $n$  个分量雅可比的倒数, 所以转移函数的雅可比恒为 1, 因此可定向。  $\square$

## Sec 2.2 Frobenius 定理

**定理 2.2.1** (一维情形 Frobenius 定理 (归纳法的第一步)). 令  $m \in M^d$ , 且令  $X$  是  $M$  上的一个光滑向量场使得  $X(m) \neq 0$ , 那么在  $m$  的一个邻域上存在一个以  $x_1, \dots, x_d$  为坐标函数的坐标系使得

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}|_U. \tag{2.9}$$

证明. 选取一个中心在  $m$  点、坐标函数为  $y_1, \dots, y_d$  的坐标系  $(V, \tau)$  使得

$$X_m = \left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_m. \quad (2.10)$$

从下述命题2.2.1

**命题 2.2.1.** 对于每个  $m \in M$ , 存在  $m$  的一个开邻域  $V$  和一个  $\varepsilon > 0$ , 使得从  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$  到  $M$  的映射

$$(t, p) \mapsto X_t(p) \quad (2.11)$$

是有定义的而且是  $C^\infty$  的.

可知, 存在一个  $\varepsilon > 0$  和  $\mathbb{R}^{d-1}$  中原点的一个邻域  $W$  使得映射

$$\sigma(t, a_2, \dots, a_d) = X_t(\tau^{-1}(0, a_2, \dots, a_d))$$

对于  $(t, a_2, \dots, a_d) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \subset \mathbb{R}^d$  是完全确定的而且是光滑的, 于是  $\sigma$  在原点是非奇异的, 因为

$$d\sigma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r_1}\right|_0\right) = X_m = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_m \quad \text{和} \quad d\sigma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_0\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_m \quad (i \geq 2).$$

因而由命题2.2.2

**命题 2.2.2.** 假设  $\psi: M \rightarrow N$  是  $C^\infty$  映射,  $m \in M$ , 并且  $d\psi: M_m \rightarrow N_{\psi(m)}$  是一个同构, 那么存在  $m$  的一个邻域  $U$  使得  $\psi: U \rightarrow \psi(U)$  是到  $N$  中开集  $\psi(U)$  上的一个微分同胚.

可知  $\varphi = \sigma^{-1}$  是  $m$  的某个邻域  $U$  上的坐标映射. 令  $x_1, \dots, x_d$  表示坐标系  $(U, \varphi)$  的坐标函数, 那么由于

$$d\sigma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r_1}\right|_{(t, a_2, \dots, a_d)}\right) = X_{\sigma(t, a_2, \dots, a_d)},$$

所以有

$$X|_U = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_U.$$

□

**定理 2.2.2 (Frobenius 定理).** 令  $\mathcal{D}$  是  $M^d$  上的一个  $c$  维  $C^\infty$  对合分布. 令  $m \in M$ , 那么存在  $\mathcal{D}$  的一个过  $m$  的积分流形. 实际上, 存在一个以  $m$  为中心, 以  $x_1, \dots, x_d$  为坐标函数的立方体坐标系  $(U, \varphi)$  使得片

$$x_i = \text{常数}, \text{所有 } i \in \{c+1, \dots, d\} \quad (2.12)$$

都是  $\mathcal{D}$  的积分流形. 而且如果  $(N, \psi)$  是  $\mathcal{D}$  的连通积分流形使得  $\psi(N) \subset U$ , 那么  $\psi(N)$  位于这些片之一中.

证明. 用关于  $c$  的归纳法来证明定理的存在性部分. 对于  $c = 1$  的情况, 选取一个位于  $\mathcal{D}$  中的、在  $m$  的一个开邻域上定义的向量场  $X$  使得  $X(m) \neq 0$ , 那么由定理 2.2 产生  $m$  点的一个坐标系  $(U, \varphi)$ , 它可以取为中心的立方体的, 使得  $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . 因此定理对于  $c = 1$  成立.

现在设对于  $c - 1$  定理成立, 证明它对于  $c$  维分布  $\mathcal{D}$  成立. 因为  $\mathcal{D}$  是光滑的, 所以在  $m$  的一个邻域  $\tilde{V}$  上存在张成  $\mathcal{D}$  的光滑向量场  $X_1, \dots, X_c$ . 由定理 2.2, 存在以  $m$  为中心并且适合  $V \subset \tilde{V}$  的坐标系  $(V, y_1, \dots, y_d)$  使得

$$X_1|_V = \frac{\partial}{\partial y_1}. \quad (2.13)$$

在  $V$  上, 令

$$\begin{cases} Y_1 = X_1, \\ Y_i = X_i - X_i(y_1)X_1 \quad (i = 2, \dots, c), \end{cases} \quad (2.14)$$

那么向量场  $Y_1, \dots, Y_c$  是在  $V$  中张成  $\mathcal{D}$  的独立  $C^\infty$  向量场. 令  $S$  是片  $y_1 = 0$ , 并且令

$$Z_i = Y_i|_S \quad (i = 2, \dots, c). \quad (2.15)$$

那么因为 (2.13) 和 (1.26) 蕴涵着

$$Y_i(y_1) = 0 \quad (i = 2, \dots, c), \quad (2.16)$$

所以  $Z_i$  实际上是  $S$  上的向量场, 即当  $q \in S$  时,  $Z_i(q) \in S_q$ .  $Z_i$  张成  $S$  上的一个  $c - 1$  维光滑分布. 可以断言这个分布是对合的. 实际上,  $Z_i$  与  $Y_i$  是  $i$  相关的 ( $i$  是  $S$  在  $M$  中的包含映射), 因此由命题 2.1.2,  $Z_i$  的 Lie 括号与  $Y_i$  的 Lie 括号也是  $i$  相关的. 但是  $[Y_i, Y_j]$  ( $i, j \geq 2$ ) 没有沿  $Y_1$  方向的分量 (应用于  $y_1$  等于 0). 因此存在  $C^\infty$  函数  $c_{ij}$ , 使得在  $V$  上

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk} Y_k, \quad (2.17)$$

因而

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk} \Big|_S Z_k. \quad (2.18)$$

这证明  $S$  上的分布是对合的. 由归纳假设, 在  $S$  中存在  $m$  的某个邻域上的中心坐标系  $w_2, \dots, w_d$  使得对所有  $i \in \{c + 1, \dots, d\}$ , 由  $w_i =$  常数定义的片恰好是这个邻域上由  $Z_2, \dots, Z_c$  张成的分布的积分流形. 函数

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_j = w_j \circ \pi \quad (j = 2, \dots, d) \end{cases} \quad (2.19)$$

(其中,  $\pi : V \rightarrow S$  是  $y$  坐标系中的自然射影) 于  $m$  在  $M$  中的某个邻域上有定义, 它们在  $m$  点是独立的, 而且它们在  $m$  点全为零. 因而在  $m$  的一个适当邻域  $U$  上有一个以  $x_1, \dots, x_d$  为坐标函数的中心立方体坐标系  $(U, \varphi)$ . 现在证明在  $U$  上,

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, c; r = 1, \dots, d - c). \quad (2.20)$$

由此可知, 向量场  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c}$  在  $U$  的每一点构成  $\mathcal{D}$  的基, 因而片 (2.12) 是  $\mathcal{D}$  的积分流形. 为了证明 (2.20), 我们首先注意到 (2.19) 蕴涵着在  $U$  上

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_1} = \begin{cases} 1 & (j = 1), \\ 0 & (j = 2, \dots, d), \end{cases} \quad (2.21)$$

从而(2.13), (1.26)及 (2.21)蕴涵着在  $U$  上

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (2.22)$$

所以(2.20)对  $i = 1$  肯定成立. 现在令  $i \in \{2, \dots, c\}$ ,  $r \in \{1, \dots, d - c\}$ , 那么由(2.22), 有

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (Y_i(x_{c+r})) = Y_1(Y_i(x_{c+r})) = [Y_1, Y_i](x_{c+r}). \quad (2.23)$$

$\mathcal{D}$  的对合性蕴涵着函数  $c_{ik}$ , 使得

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{k=1}^c c_{ik} Y_k. \quad (2.24)$$

利用(2.24), 则(2.23)变为

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (Y_i(x_{c+r})) = \sum_{k=2}^c c_{ik} Y_k(x_{c+k}) \quad (i = 2, \dots, c; r = 1, \dots, d - c). \quad (2.25)$$

固定  $U$  的形如  $x_2 = \text{常数}, \dots, x_d = \text{常数}$  的一个片. 在这样一个片上,  $Y_i(x_{c+r})$  仅为  $x_1$  的函数, 而且 (2.25) 变为关于  $x_1$  的  $c - 1$  维齐次线性微分方程组. 这样的微分方程组对于给定的初始值有唯一的解. 因为方程组是齐次的, 所以零函数是一个解. 但是每个这样的片在  $S \cap U$  中有唯一一个点, 而且在  $S \cap U$  上,

$$Y_i(x_{c+r}) = Z_i(w_{c+r}) = 0 \quad (i = 2, \dots, c). \quad (2.26)$$

第一个等式从(2.15)和(2.19)得出; 第二个等式可从下列事实得出:  $S$  上由  $Z_i$  决定的分布的积分流形是由  $w$  坐标系中的适当的片给出的. 从(2.25)和(2.26)得知, 函数  $Y_i(x_{c+r})$  在  $U$  上必然恒为零, 因而 (2.20) 成立, 于是归纳步骤完成. 最后设  $(N, \psi)$  是  $\mathcal{D}$  的一个连通积分流形并且使得  $\psi(N) \subset U$ . 令  $\pi$  是  $\mathbb{R}^d$  到最后  $d - c$  个坐标上的射影, 那么  $\mathcal{D}$  中的向量被  $d(\pi \circ \varphi)$  零化. 因而对于每个  $n \in N$ ,

$$d(\pi \circ \varphi \circ \psi)|_n \equiv 0.$$

由下面的定理2.2.3,

**定理 2.2.3.** 令  $\psi$  是从连通流形  $M$  到流形  $N$  的一个光滑映射. 如果对每个  $m \in M$ ,  $d\psi_m \equiv 0$ , 那么  $\psi$  必是一个常值映射.

可知  $\pi \circ \varphi \circ \psi$  是一个常值映射, 因为  $N$  是连通的. 从而  $\psi(N)$  包含在由

$$d\psi(N_n) = \mathcal{D}(\psi(n)). \quad (2.27)$$

所表示的一个片中. □

**注.** Frobenius(弗罗贝尼乌斯)定理的经典形式显得与 1.60 节中的形式很不相同. 经典的 Frobenius 定理可以表述如下: 令  $U$  和  $V$  分别为  $\mathbb{R}^m$  和  $\mathbb{R}^n$  中的开集. 在  $\mathbb{R}^m$  上使用坐标  $r_1, \dots, r_m$  而在  $\mathbb{R}^n$  上使用坐标  $s_1, \dots, s_n$ . 令

$$b : U \times V \rightarrow M(n, m) \quad (2.28)$$

是从  $U \times V$  到所有  $n \times m$  实矩阵的集合中的一个  $C^\infty$  映射, 令  $(r_0, s_0) \in U \times V$ . 如果在  $U \times V$  上,

$$\frac{\partial b_{i\beta}}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial r_\beta} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial b_{i\beta}}{\partial s_j} b_{j\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial s_j} b_{j\beta} \right) = 0 \quad (2.29)$$

$$(i = 1, \dots, n; \gamma, \beta = 1, \dots, m),$$

那么存在  $r_0$  在  $U$  中的邻域  $U_0$  和  $s_0$  在  $V$  中的邻域  $V_0$  以及唯一的一个  $C^\infty$  映射

$$\alpha : U_0 \times V_0 \rightarrow V \quad (2.30)$$

使得若

$$\alpha_s(r) = \alpha(r, s) \quad (r \in U_0, s \in V_0),$$

则对所有  $(r, s) \in U_0 \times V_0$ ,

$$\begin{cases} \alpha_s(r_0) = s, \\ d\alpha_s|_r = b(r, \alpha(r, s)). \end{cases} \quad (2.31)$$

方程(2.30)是全微分方程. 在(2.28)中说明映射的微分应像一个图函数, 并且在(2.29)中得到带有特定初始条件的这样一个映射存在的充分必要条件. 可以证明这种形式等价于定理 1.60. 例如, 若从  $M^d$  上的一个对合的  $c$  维  $C^\infty$  分布  $\mathcal{D}$  和一个点  $m \in M$  开始, 则能够从经典形式得出定理 1.60 如下: 首先选取  $m$  点的一个坐标系  $(W, \tau)$ , 以  $y_1, \dots, y_d$  为坐标函数且适合  $\tau(W) = U \times V \subset \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{d-c}$ , 而且在  $U \times V$  上存在  $C^\infty$  函数  $f_{ji}(i = 1, \dots, c; j = 1, \dots, d - c)$  使得向量场

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{d-c} f_{ji} \circ \tau \frac{\partial}{\partial y_{c+j}} \quad (i = 1, \dots, c) \quad (2.32)$$

在  $W$  上张成  $\mathcal{D}$ , 那么可以像在(2.28)中那样通过置

$$b(r, s) = \{f_{ji}(r, s)\} \quad (2.33)$$

来定义一个映射  $b$ . 结果,  $\mathcal{D}$  的对合性蕴涵着(2.29)被满足, 而且从映射  $\alpha$  就能得到所要求的坐标系 1.60(1). 反过来也能用类似的方法从 2.2.2 得出定理的经典形式.

第 2 章将给出以微分形式和微分理想表述的 *Frobenius* 定理的另一种形式.

**定理 2.2.4** (*Frobenius* 定理用微分形式与微分理想表示的形式). 令  $\mathcal{T} \subset E^*(M)$  是一个由  $d-p$  个独立 1 形式局部生成的微分理想. 令  $m \in M$ , 那么经过  $m$  点存在唯一的一个极大连通积分流形, 并且这个积分流形是  $p$  维的.

## 第三部分

### 复分析学

《复分析导引 (北京市高等教育精品教材立项项目)》是为综合性大学、高等师范院校数学专业本科高年级学生和研究生编写的复分析教材, 其目的是讲述现代复分析(不含多复分析)的一些基本理论及其近代重要发展. 本书共分九章, 主要内容有: 正规族与 Riemann 映射定理, 经典几何函数论, 共形模与极值长度, 拟共形映射, Riemann 曲面的基本概念, Riemann-Roch 定理与单值化定理, Teichmuller 理论与模空间. 这些内容与现代核心数学的许多分支领域有着深刻的联系. 因此, 本书不仅面向主修复分析的学生, 而且也面向其他有关领域的学生.

本书是在作者多年来使用的讲义基础上编写而成, 文字叙述简洁, 通俗易懂, 重点突出; 特别注重解释重要概念和重要定理的意义以及方法的实质; 部分定理的证明具有自己的明显特色. 书中对一些重要理论的历史发展及其与其他领域的联系, 作了必要的介绍与评述. 本书可作为高等院校高年级大学生、研究生的复分析教材, 也可作为有关专业研究人员的参考书.



## Sec 3.1 考试内容

## 3.1.1 正规族

**定义 3.1.1** (正规族). 设  $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C} \mid \alpha \in A\}$  是区域  $D$  上的一个解析函数族. 我们称  $\mathcal{F}$  是一个正规族 (*normal family*), 如果  $\mathcal{F}$  中的任意序列都包含一个子序列, 该子序列在  $D$  内局部一致收敛.

**定理 3.1.1** (Montel 定理). 设  $\mathcal{F} = \{f_\alpha: D \rightarrow \mathbb{C}, \alpha \in A\}$  是区域  $D$  上的一个解析函数族. 若对于  $D$  中的任意一个紧子集  $E \subset D$ ,  $f_\alpha$  在  $E$  上是一致有界的, 则  $\mathcal{F}$  在  $D$  上是正规族.

**证明.** 对于任意给定的紧子集  $E$ , 我们取  $\delta_0 > 0$  充分小, 使集合

$$E_0 = \{z \in \mathbb{C} : d(z, E) \leq 2\delta_0\} \subset D,$$

其中  $d(z, E)$  是  $z$  到  $E$  的距离. 根据定理的假定, 对于紧子集  $E_0$  存在一数  $M$ , 使得

$$|f_\alpha(z)| \leq M, \quad \forall z \in E_0, \alpha \in A.$$

由 Cauchy 积分不等式有

在此特意地重写一遍 Cauchy 不等式, 注意该定理的条件是这里证明思路的缘由!

**定理 3.1.1. Cauchy 积分不等式 (Complex Version)**

设函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $a$  为  $D$  内一点, 以  $a$  为心作圆周  $\gamma: |\gamma - a| = R$ , 只要  $\gamma$  及其内部  $K$  均含于  $D$ , 则有

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M(R)}{R^n}.$$

其中  $M(R) = \max_{|z-a|=R} |f(z)|, n = 1, 2, \dots$

在该题中,  $|\gamma - z| \leq R \iff d(z, E) \leq R$ , 即圆周  $\gamma = \partial E_0$ .

$$|f'_a(z)| \leq \frac{M}{\delta_0}, \quad \forall z \in E, \alpha \in A.$$

这意味着

$$|f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2)| \leq \frac{M}{\delta_0} |z_1 - z_2|, \quad \alpha \in A,$$

只要  $z_1, z_2 \in E$  且  $|z_1 - z_2| < \delta_0$ . 这样,  $f_a$  在  $E$  上等度连续. 由 Arzela 定理就推出本定理.  $\square$

**定理 3.1.2 (Riemann 映射定理).** 设  $D \subset \mathbb{C}$  是一个单连通区域, 且其边界点多于一点. 又设  $z_0 \in D$  是任意给定的一点, 则存在一个共形映射  $\varphi : D \rightarrow \Delta$ , 将  $D$  映为单位圆周  $\Delta$ ,  $\varphi(z_0) = 0$ , 且  $\varphi'(z_0) > 0$ , 这样的映射  $\varphi$  是唯一的.

**证明.** 设  $\mathcal{F} = \{f : D \rightarrow \Delta\}$  是全体在  $D$  上单叶且将  $D$  映入  $\Delta$  内的解析函数族.

首先, 我们证明  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . 设  $a, b \in \partial D$ , 且  $a \neq b$ . 令

$$g(z) = \frac{z - a}{z - b},$$

那么, 区域  $D' = g(D)$  是一个不包含 0 与  $\infty$  的单连通域, 且其边界  $\partial D'$  包含 0 及  $\infty$ . 于是, 函数  $w = \sqrt{g}$  在  $D'$  中有两个单值解析分支, 分别记为  $h_+(z)$  及  $h_-(z)$ , 且满足

$$h_+(z) = -h_-(z), \quad \forall z \in D.$$

这样  $h_+(D)$  与  $h_-(D)$  是关于原点对称的两个区域 (见图 3.1). 在  $h_-(D)$  中取一点  $w_0$ , 并假定以

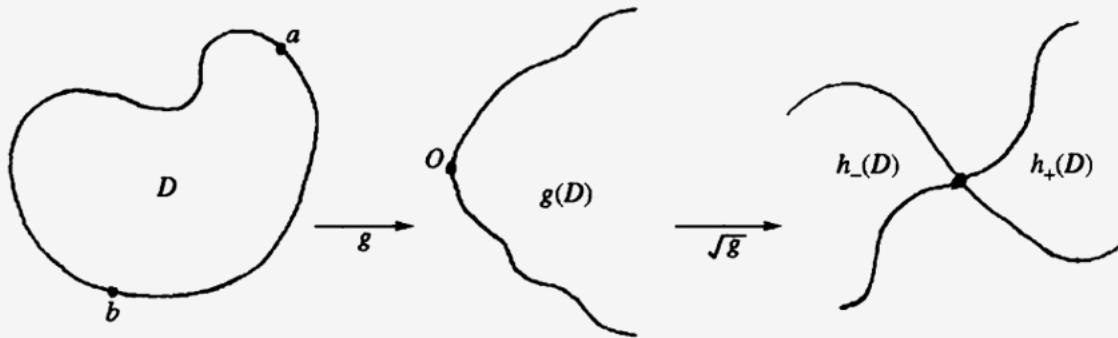


图 3.1: Riemann 映射定理

$w_0$  为圆心、以  $\delta > 0$  为半径的圆完全包含于  $h_-(D)$  之中. 这时函数

$$f_*(z) = \frac{\delta}{h_+(z) - w_0}$$

则在  $\mathcal{F}$  之中. 现在, 我们考虑这样的极值问题: 在  $\mathcal{F}$  中求一函数使其在  $z_0$  点的导数的模最大. 设  $r > 0$  使得  $\Delta_r(z_0) \subset D$ . 这时根据 Cauchy 不等式及单叶性,

$$0 < |f'(z_0)| \leq \frac{1}{r}, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

令

$$\alpha = \sup \{ |f'(z_0)| : f \in \mathcal{F} \}.$$

由  $|f'_*(z_0)| > 0$  可知  $\alpha > 0$ . 显然, 存在  $f_n \in \mathcal{F}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 使得

$$|f'_n(z_0)| \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

由 Montel 定理,  $\mathcal{F}$  是一个正规族. 这样, 在序列  $\{f_n\}$  中存在一个子序列  $\{f_{n_k}\}$  在  $D$  内局部一致收敛. 设其极限为  $f_0$ , 那么, 根据 Weierstrass 定理,  $f_0$  是  $D$  上的解析函数, 且  $|f'_0(z_0)| = \alpha$ .

又因为  $f_n$  是单叶的, 根据 §2 中的定理 2,  $f_0$  要么是单叶的, 要么是常数. 注意到  $\alpha > 0$ , 可知后一种情况不可能. 故  $f_0$  是单叶函数, 且  $|f_0| < 1$ .

这样, 我们证明了在  $\mathcal{F}$  中存在一个  $f_0$ , 使其在  $z_0$  点的导数的模达到最大.

现在, 我们要进一步证明  $f_0(z_0) = 0$  且  $f_0$  将  $D$  变为  $\Delta$ .

假定  $f_0(z_0) = \beta \neq 0$ . 令

$$f_1(z) = \frac{f_0(z) - \beta}{1 - \bar{\beta}f_0(z)},$$

则显然  $f_1 \in \mathcal{F}$ . 简单计算表明

$$f'_1(z_0) = \frac{f'_0(z_0)}{1 - \bar{\beta}\beta}.$$

于是,  $|f'_1(z_0)| > |f'_0(z_0)|$ , 与  $|f'_0(z_0)|$  的最大性矛盾. 由此推出

$$f_0(z_0) = 0.$$

假定  $f_0(D)$  不是  $\Delta$ , 即存在一点  $w_1 \in \Delta \setminus f_0(D)$ . 这时, 函数

$$\psi(z) = \frac{f_0(z) - w_1}{1 - \bar{w}_1 f_0(z)} \quad (z \in D)$$

不取 0 及  $\infty$ . 因此,  $\sqrt{\psi}$  在  $D$  内有单值解析分支, 设其为  $h$ . 则  $h \in \mathcal{F}$ . 又令

$$f_2(z) = \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \bar{h}(z_0)h(z)},$$

则  $f_2 \in \mathcal{F}$ . 经过计算, 我们有

$$f'_2(z_0) = \frac{-(1 + |w_1|)}{2\sqrt{w_1}} f'_0(z_0).$$

再次导致  $|f'_0(z_0)|$  不是最大的, 产生矛盾. 由此推出:  $f_0(D) = \Delta$ .

总之, 我们证明了  $f_0 : D \rightarrow \Delta$  是  $D$  到  $\Delta$  的共形映射, 且  $f_0(z_0) = 0$ . 显然, 取适当的  $\theta \in \mathbb{R}$  可使  $\varphi = e^{i\theta} f_0$  满足定理要求:  $\varphi'(z_0) > 0$ .

下面证明映射的惟一性. 假如另有一个  $D$  到  $\Delta$  的共形映射  $\tilde{\varphi} : D \rightarrow \Delta$ ,  $\tilde{\varphi}(z_0) = 0$  且  $\tilde{\varphi}'(z_0) > 0$ . 那么  $\varphi^\circ \circ \varphi^{-1}$  是  $\Delta$  的解析自同构映射, 且将 0 变为 0. 因此,  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = e^{i\theta} z$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ . 由条件  $\varphi'(z_0) > 0$  及  $\tilde{\varphi}(z_0) > 0$ , 立即推出  $e^{i\theta} = 1$ , 也即  $\tilde{\varphi} = \varphi$ . 这样, 我们完成了定理中的唯一性部分的证明.  $\square$

Riemann 映射定理使我们得以对  $\overline{\mathbb{C}}$  上的单连通域, 进行解析同构分类:

**定理 3.1.3.** 设  $D$  为  $\bar{\mathbb{C}}$  上的单连通区域, 则  $D$  解析同构于下列三种区域之一:  $\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ , 或  $\Delta$ . 上述三种区域之间两两互不解析同构.

**证明.** 证明是容易的. 事实上, 若区域  $D$  不是  $\bar{\mathbb{C}}$  且仅有一个边界点, 那么可以通过一个分式线性变换将该边界点变为  $\infty$ , 而这时  $D$  则变为  $\mathbb{C}$ . 若区域  $D$  的边界点多于一点, 则通过一个分式线性变换使  $D$  的像成为  $\mathbb{C}$  中的单连通域, 且其边界点多于一点; 从而可应用 Riemann 映射定理. 这里我们要进一步指出,  $\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$  与  $\Delta$  中两两互不解析同构. 事实上,  $\mathbb{C}$  是紧的, 而  $\mathbb{C}$  与  $\Delta$  是非紧的. 故  $\mathbb{C}$  与  $\mathbb{C}$  或  $\Delta$  不拓扑等价, 因而不可能解析同构. 另外, 由 Liouville 定理可知, 任意一个解析函数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Delta$  只能是常数, 这表明  $\mathbb{C}$  与  $\Delta$  不可能解析同构.  $\square$

现在, 我们利用模函数及单值性定理来证明 Picard 小定理.

**定理 3.1.4 (Picard 定理).** 设  $f(z)$  是一个整函数, 即在  $\mathbb{C}$  上解析的函数. 若存在两点  $a$  与  $b, a \neq b$ , 使得

$$f(z) \neq a \text{ 和 } b, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

则  $f$  是常数. 这就是说, 非常数的整函数至多有一个例外值取不到. 有一个例外值的非常数的整函数是存在的, 例如  $w = e^z$ .

**证明.** 不失一般性, 可设  $a = 0, b = 1$ . 设  $\lambda$  是模函数  $\mu$  的反函数. 它是一个多值解析函数, 但在任意一点附近可以取到单值解析分支. 设  $w_0 \in f(\mathbb{C})$ , 则  $w_0 \neq 0, 1$ . 那么, 可以在  $w_0$  的一个邻域内取到  $\lambda$  的一个单值分支, 仍记为  $\lambda$ .

我们考虑复合函数  $\lambda \circ f$ . 它在点  $z_0$  的附近是一个单值解析函数, 其中  $f(z_0) = w_0$ . 设  $P_0$  是  $\lambda \circ f$  在  $z_0$  处的幂级数展开式. 那么,  $P_0$  在  $\mathbb{C}$  上沿任意一条路径均可延拓. 要说明这一点只要注意到  $\mu$  是一覆盖映射即可, 请读者自行验证.

复平面  $\mathbb{C}$  是单连通域. 由单值性定理, 即推出  $P_0$  延拓的结果在  $\mathbb{C}$  上定义了一个单值解析函数, 记为  $F$ . 那么,  $|F(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{C}$ . 由 Liouville 定理,  $F$  是常数, 从而  $f$  是常数.  $\square$

**定理 3.1.5 (Bieberbach 定理).** 设

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots,$$

是  $S$  类中的函数, 则  $|a_2| \leq 2$ .

**定理 3.1.6 (Kobé  $\frac{1}{4}$  定理).** 设  $f$  是单位圆  $\Delta$  内的单叶函数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $f(\Delta)$  包含圆

$$\left\{ w: |w| < \frac{1}{4} \right\}.$$

**证明.** 设  $c$  不在  $f(\Delta)$  之内, 则  $c \neq 0$  且函数

$$f_1(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left( a_2 + \frac{1}{c} \right) z^2 + \cdots,$$

## 3.1. 考试内容

其中  $a_2$  为  $f$  的展开式中的系数. 显然,  $f_1$  是  $S$  类函数. 于是由 Bieberbach 定理有

$$\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2,$$

也即

$$\frac{1}{|c|} \leq 2 + |a_2| \leq 4.$$

□

**定理 3.1.7 (偏差定理).** 设  $f \in S$ , 则有估计式

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad \forall z \in \Delta.$$

**证明.** 证明有一定的技巧性. 令  $z$  为  $\Delta$  内一固定点, 并考虑函数

$$f_1(\xi) = \frac{f\left(\frac{\xi+z}{1+\bar{z}\xi}\right) - f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}.$$

显然,  $f_1$  是  $\xi \in \Delta$  的单叶函数, 且  $f_1(0) = 0, f'_1(0) = 1$ , 故  $f_1 \in S$ . 由计算得

$$f''_1(0) = (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z}.$$

由 Bieberbach 定理有  $|f''_1(0)/2| \leq 2$ , 也即

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \quad |z|=r.$$

注意到

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)|,$$

这是因为

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)| &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln(f' \cdot \overline{f'}) \right) \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln f' + \ln \overline{f'} \right) \\ &= r \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\ln f') \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\ln \overline{f'}) \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \frac{f''}{f'} (re^{i\theta}) + \frac{1}{2} \frac{\overline{f''}}{\overline{f'}} (re^{-i\theta}) \right] \implies (\overline{f'}) = (\overline{f})', \text{对于 } f \text{ 全纯成立.} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f''}{f'} z + \frac{1}{2} \frac{\overline{f''}}{\overline{f'}} z \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中

$$\frac{\bar{z} + z}{2} = \operatorname{Re}(z), z = re^{i\theta}.$$

我们有

$$\frac{-4 + 2r}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \ln |f'(z)| \leq \frac{4 + 2r}{1 - r^2}.$$

对  $r$  积分即得

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3}.$$

再对  $r$  积分即得我们所要的关于  $|f(z)|$  的上界估计式. 为了得到  $|f(z)|$  的下界估计式, 我们考虑以 0 为圆心过  $z$  点所作的圆周  $\Gamma$ . 设  $z_1 \in \Gamma$  使  $\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$  达到最小, 并用直线段  $\beta$  连结  $f(z_1)$  与  $f(0) = 0$ . 记  $f^{-1}(\beta)$  为  $\alpha$ , 则有

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |f(z_1)| = \int_{\alpha} |f'(t)| |dt| \\ &\geq \int_{\alpha} \frac{1 - |t|}{(1 + |t|)^3} |dt| \geq \int_0^r \frac{1 - \eta}{(1 + \eta)^3} d\eta \\ &= \frac{r}{(1 + r)^2} \quad (r = |z|). \end{aligned}$$

□

**命题 3.1.1.** 在单位圆解析自同构映射下, Poincaré 距离不变.

**证明.** 事实上只要证明 Poincaré 度量在  $\Delta$  的自同构映射下不变即可. 设  $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$ , 也即  $f$  是保持单位圆  $\Delta$  不变的分式线性变换:

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \Delta, \alpha \in \mathbb{R}.$$

那么, 我们有

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}.$$

简单计算表明

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2},$$

于是我们得到

$$\frac{2|dw|}{1 - |w|^2} = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}, \quad w = f(z).$$

由此推出, 任意一条可求长曲线  $\gamma$  与它的像  $f(\gamma)$  有相同的 Poincaré 长度, 从而  $f$  保持  $\Delta$  中 Poincaré 距离不变. □

**定理 3.1.8** (Schwarz 引理). 设  $f$  是单位圆  $\Delta$  内的解析函数, 且  $f(\Delta) \subset \Delta$ ,  $f(0) = 0$ , 则  $|f'(0)| \leq 1$ , 且  $|f(z)| \leq |z|$ ,  $\forall z \in \Delta$ . 若  $|f'(0)| = 1$  或对一点  $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$  有  $|f(z_0)| = |z_0|$ , 则  $f(z) \equiv e^{i\theta}z$ , 其中  $\theta \in \mathbb{R}$  是常数.

**定理 3.1.9** (Schwarz–Pick 定理). 设  $f$  是单位圆  $\Delta$  内的解析函数, 且  $f(\Delta) \subset \Delta$ . 又设  $d(\bullet, \bullet)$  表示  $\Delta$  内两点间的 Poincaré 距离, 则有

$$d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \Delta,$$

这里等号对任意两个不同点  $z_1$  与  $z_2$  成立的充要条件是

$$f \in \text{Aut}(\Delta).$$

**证明.** 令  $g$  是将  $z_1$  变为 0 且保持  $\Delta$  不变的分式线性变换,  $h$  是将  $f(z_1)$  变为 0 且保持  $\Delta$  不变的分式线性变换. 我们考虑函数  $F = h \circ f \circ g^{-1}$ , 则  $F$  是  $\Delta$  内的解析函数,  $F(0) = 0$ , 且  $F(\Delta) \subset \Delta$ . 应用 Schwarz 引理, 我们有

$$|F(\zeta_2)| \leq |\zeta_2|, \quad \zeta_2 = g(z_2).$$

Pick 将此式解释为

$$d(0, F(\zeta_2)) \leq d(0, \zeta_2),$$

也即

$$d(h \circ f(z_1), h \circ f(z_2)) \leq d(g(z_1), g(z_2)).$$

由 §1 中的命题 1 立即推出:

$$d(f(z_1), f(z_2)) \leq d(z_1, z_2).$$

关于等号成立的条件可由 Schwarz 引理中相应部分推得.  $\square$

**定义 3.1.2** (Poincaré 度量). 单位圆  $\Delta$  的 Poincaré 度量可写成  $ds = \rho_\Delta(z)|dz|$ , 其中

$$\rho_\Delta(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

称为 Poincaré 度量的密度. 上述定理可写成微分形式:

$$\rho_\Delta(f(z))|f'(z)| \leq \rho_\Delta(z), \quad \forall z \in \Delta.$$

$\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$  的 Poincaré 度量的局部表示式为

$$ds = \frac{2|\lambda'(z)|}{1 - |\lambda(z)|^2}|dz|$$

其中  $\lambda$  为  $\mu$  的反函数的一个单值分支.

**定理 3.1.10** (广义 Schwarz 引理). 设区域  $D$  与  $G$  均具有单位圆  $\Delta$  到它们的全纯覆盖映射, 其 Poincaré 度量分别为

$$ds_1 = \sigma_1(z)|dz|, z \in D;$$

$$ds_2 = \sigma_2(w)|dw|, w \in G.$$

又设  $f: D \rightarrow G$  是全纯映射, 则

$$\sigma_2(f(z))|f'(z)| \leq \sigma_1(z), z \in D,$$

其中等号在一点成立的充要条件是  $f$  是  $D$  到  $G$  的覆盖映射.

**证明.** 设  $h_1: \Delta \rightarrow D$  与  $h_2: \Delta \rightarrow G$  是全纯覆盖映射. 对于任意一点  $z_0 \in D$  及  $w_0 = f(z_0) \in G$ , 我们分别取它们的小邻域  $U$  及  $V$ , 使得  $h_1^{-1}$  及  $h_2^{-1}$  分别在  $U$  及  $V$  上有单值分支. 我们将它们记为  $\varphi: U \rightarrow U_1$  及  $\psi: V \rightarrow V_1$ , 并考虑函数

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

只要  $U$  取得充分小使得  $f(U) \subset V$ , 则上述  $F$  是有意义的.  $F$  是定义在  $U_1$  上一个解析函数. 它显然可以沿  $\Delta$  内的任意一条路径进行解析延拓, 所得的结果是一个单值解析函数, 仍记为  $F$ . 设  $\zeta_0 \in U_1$  使得  $h_1(\zeta_0) = z_0$ . 又记  $\eta_0 = F(\zeta_0)$ . 对  $F: \Delta \rightarrow \Delta$  使用 Schwarz-Pick 定理(微分形式), 则有

$$\rho_\Delta(F(\zeta_0))|F'(\zeta_0)| \leq \rho_\Delta(\zeta_0),$$

也即  $\rho_\Delta(\eta_0)|\psi'(w_0)| \cdot |f'(z_0)||h'_1(\zeta_0)| \leq \rho_\Delta(\zeta_0)$ . 此式可以改写成

$$\rho_\Delta(\eta_0)|\psi'(w_0)| \cdot |f'(z_0)| \leq \rho_\Delta(\zeta_0)|\varphi'(z_0)|.$$

根据 Poincaré 度量的定义, 我们有

$$\sigma_2(f(z_0))|f'(z_0)| \leq \sigma_1(z_0).$$

当等号成立时,  $F \in \text{Aut}(\Delta)$ . 这时, 由  $h_2 \circ F = f \circ h_1$  得

$$h_2 = f \circ h_1 \circ F^{-1}.$$

由此又可推出  $f$  是局部单叶的满射, 并满足覆盖映射的条件.  $\square$

**证明.** (用广义 Schwarz 引理证明 Picard 小定理)

设  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  是一个解析函数. 用  $\rho_{0,1}(z)|dz|$  表示  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  的 Poincaré 度量. 另外很容易算出  $\Delta_r(0) = \{z: |z| < r\}$  的 Poincaré 度量是

$$ds = \frac{2r|dz|}{r^2 - |z|^2}.$$

将  $f$  视为  $\Delta_r(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  的解析函数, 并应用广义 Schwarz 引理即得

$$\rho_{0,1}(f(z))|f'(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2}, \quad \forall z \in \Delta_r(0).$$

令  $r \rightarrow \infty$  即可推出  $f'(z) = 0$ , 从而  $f$  是常数.  $\square$

**定理 3.1.11.** 设  $ds = \rho|dz|$  是单位圆  $\Delta$  上的 Poincaré 度量, 而  $ds = \sigma|dz|$  是  $\Delta$  上的一个度量,  $\sigma > 0, \sigma \in C^2$ , 且  $K(\sigma) \leq -1$ , 则有

$$\rho(z) \geq \sigma(z), \quad \forall z \in \Delta.$$

**证明.** 首先假定  $\sigma$  在  $\bar{\Delta}$  上连续, 且在单位圆周上严格大于 0. 我们考虑函数

$$F = \ln \rho - \ln \sigma.$$

显然, 当  $|z| \rightarrow 1$  时  $F(z) \rightarrow +\infty$ . 因此,  $F$  在  $\Delta$  内达到最小值. 设在  $z_0$  点达到  $F$  的最小值. 假若其最小值  $F(z_0) < 0$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta F|_{z_0} &= \Delta(\ln \rho - \ln \sigma)|_{z_0} \\ &\leq (\rho^2 - \sigma^2)|_{z_0} < 0, \end{aligned}$$

这与  $z_0$  是极小值稳定点矛盾. 因此, 最小值  $F(z_0) \geq 0$ , 也即  $\rho(z) \geq \sigma(z), \forall z \in \Delta$ . 现在, 我们去掉  $\sigma$  在  $\bar{\Delta}$  上连续的限制. 令  $\sigma_r = r\sigma(rz), 0 < r < 1$ . 这时对  $\sigma_r$  应用上述结论即有  $\rho(z) \geq r\sigma(rz)$ . 令  $r \rightarrow 1$  即完成定理之证明.  $\square$

### 推论 3.1.1.

设  $D$  是一个区域,  $ds = \sigma_j|dz|$  为  $D$  内的度量,  $\sigma_j > 0, \sigma_j \in C^2, j = 1, 2$ , 并且满足

$$K(\sigma_1) = -1, K(\sigma_2) \leq -1,$$

且对任意边界点  $\zeta$  都有

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta} \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)} \geq 1,$$

则有

$$\sigma_1(z) \geq \sigma_2(z), \quad \forall z \in D.$$

**证明.** 证明与定理 3.1.11 一致.  $\square$

### 定理 3.1.2. 比较定理

设  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  为两个局部可求长曲线族. 若  $\Gamma_1$  中的每条曲线  $\gamma_1$  都包含  $\Gamma_2$  中的一条曲线  $\gamma_2$ , 则  $\lambda(\Gamma_1) \geq \lambda(\Gamma_2)$ .

### 定理 3.1.3. 合成原理

设  $\Gamma, \Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  是三个局部可求长曲线族, 且  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  中的曲线分别包含于区域  $D_1$  与  $D_2$  中,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . 则有

(i) 若  $\Gamma_1$  中的每一条曲线  $\gamma_1$  与  $\Gamma_2$  中的每一条曲线  $\gamma_2$  都包含  $\Gamma$  中的某条曲线  $\gamma$ , 那么

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \geq \frac{1}{\lambda(\Gamma_1)} + \frac{1}{\lambda(\Gamma_2)};$$

(ii) 若  $\Gamma$  中的每条曲线  $\gamma$  都包含  $\Gamma_1$  中的某条曲线  $\gamma_1$  与  $\Gamma_2$  中的某条曲线  $\gamma_2$ , 那么

$$\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2).$$

### 定理 3.1.4.

设  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  是一拓扑四边形. 又设  $\Gamma$  是  $Q$  中第一组对边之间的所有局部可求长连线所组成的曲线族, 则有

$$\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

**证明.** 因为共形模与极值长度都是共形不变量, 所以不失一般性可设  $Q$  是一矩形, 且所给的拓扑四边形  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  就是  $R(0, a, a+bi, bi)$ . 在这种假定下,  $\Gamma$  就是  $R$  内局部可求长的连结两条水平边的连线的曲线族. 取  $\rho_0 = 1$ , 那么

$$m_{\rho_0}(R) = ab,$$

$$l_{\rho_0}(\gamma) \geq b, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

于是有

$$l_{\rho_0}^2(\gamma)/m_{\rho_0}(R) \geq b/a, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

从而

$$\lambda(\Gamma) \geq b/a.$$

另一方面, 对于  $R$  内的任意 Borel 可测函数  $\rho \geq 0$ , 我们有

$$m_\rho(R) = \int_0^a dx \int_0^b \rho^2(x+iy) dy.$$

由 Schwarz 不等式有

$$\left( \int_0^b \rho(x+iy) dy \right)^2 \leq b \cdot \int_0^b \rho^2(x+iy) dy.$$

于是

$$\begin{aligned} m_\rho(R) &\geq \frac{1}{b} \int_0^a dx \left( \int_0^b \rho(x+iy) dy \right)^2 \\ &\geq \frac{a}{b} \inf_{\gamma \in \Gamma} l_\rho^2(\gamma). \end{aligned}$$

这样又得到  $\lambda(\Gamma) \leq b/a$ . 总之, 我们证明了  $\lambda(\Gamma) = b/a$ , 即定理结论.  $\square$

**定理 3.1.12.** 设  $B$  为一个二连通域. 又设  $\Gamma$  为  $B$  中隔离  $B$  的两个边界分支的可求长闭曲线所组成的曲线族, 则

$$\text{Mod}(B) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)}.$$

### 定理 3.1.5. Rengel 不等式

设  $d_1$  与  $d_2$  分别是四边形  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  的第一组对边和第二组对边之落入  $Q$  中的连线的欧氏长度的下确界. 则成立下述估计式:

$$\frac{d_2^2}{m(Q)} \leq \text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) \leq \frac{m(Q)}{d_1^2},$$

其中  $m(Q)$  表示  $Q$  的欧氏面积.

**证明.** 设  $\Gamma$  为  $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$  的第一组对边在  $Q$  中的连线组成的曲线族. 这时, 我们有

$$\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)},$$

取  $\rho_0 = 1$ , 则

$$l_{\rho_0}^2(\gamma) \geq d_1^2, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

于是

$$\lambda(\Gamma) \geq d_1^2/m(Q).$$

这样, 我们就证明了要证的估计式中的右侧不等式. 为了证明估计式中的左侧不等式, 我们指出  $\text{Mod}(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \lambda(\Gamma_*)$ . 其中  $\Gamma_*$  是  $Q$  第二组对边之连线的曲线族. 利用这个事实可以很容易地证明上述估计式中左侧不等式.  $\square$

**定义 3.1.3 (保模映射).** 设  $f: D \rightarrow G$  是区域  $D$  到  $G$  的一个保向同胚. 若对任意一个拓扑四边形

$$Q = Q(z_1, z_2, z_3, z_4), \bar{Q} \subset D,$$

都有  $\text{Mod}(f(Q)) = \text{Mod}(Q)$ , 则称  $f$  为保模映射.

**定理 3.1.13.** 设  $Q, Q_1$  及  $Q_2$  满足定理 3 中的条件, 且  $Q$  为矩形. 则当且仅当  $Q_1$  与  $Q_2$  都是矩形且  $\bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2 = \bar{Q}$  时,

$$\text{Mod}(Q) = \text{Mod}(Q_1) + \text{Mod}(Q_2)$$

**定理 3.1.14.** 设  $f: D \rightarrow G$  是区域  $D$  到  $G$  的一个保模映射, 则  $f$  是共形映射.

**证明.** 设  $R$  是  $D$  中的任意一个矩形. 显然, 只要证明  $f$  在  $R$  上是共形映射就够了. 另外, 对于区域  $D$  进行平移不改变  $R$  的模及  $f$  的保模性, 故不失一般性假定  $R$  的顶点是  $0, a, a + bi, bi$ , 也即

$$R = R(0, a, a + bi, bi).$$

我们考虑矩形四边形:

$$R_t = R_t(0, t, t + bi, bi), \quad 0 < t < a,$$

则显然有

$$\text{Mod}(R) = \text{Mod}(R_t) + \text{Mod}(R_t^*),$$

其中  $R_t^*$  是以  $t, a, a + bi, t + bi$  为顶点的矩形. 因为  $f$  是保持模不变的映射, 故存在一个共形映射  $\varphi$ , 将  $f(R)$  变成  $R = R(0, a, a + bi, bi)$ , 并保持顶点依次对应. 这样复合映射  $\varphi \circ f$  是  $R$  到自身的保模映射, 记之为  $g$ . 设  $Q_t = g(R_t)$ ,  $Q_t^* = g(R_t^*)$ , 则有

$$\text{Mod}(R) = \text{Mod}(Q_t) + \text{Mod}(Q_t^*).$$

由上一节 定理 3.1.13 立即推出  $Q_t$  与  $Q_t^*$  都是矩形. 又由于  $Q_t$  与  $R_t$  有相同的模, 故  $Q_t = R_t$ . 也即  $g$  将坚线  $\{z = t + \sigma i : 0 < \sigma < b\}$  变成自己. 同样的讨论应用于  $R$  中的横线, 又得  $g$  将每条横线也变为自己. 于是  $g$  只能是恒同映射, 也即  $f = \varphi^{-1}$ . 也就是说, 当  $f$  限制在  $R$  上时是共形映射. 由于  $R$  的任意性,  $f$  在  $D$  上是共形映射.  $\square$

证明 (Riemann 映射定理的证明详解).

注 (思路点拨). Step.I 构造函数族

$$\mathcal{F} = \{f : f \text{ 在 } D \text{ 内单叶解析}; f(\xi) = 0; f'(\xi) > 0; |f(z)| < 1, \forall z \in D\}.$$

证明  $\mathcal{F}$  非空, 且  $\mathcal{F}$  为正规族.

Step.II 上述函数族中的元素中是否能找到那么一个函数能够将  $D$  映满单位圆盘  $\Delta$ ? 通俗来说就是, 考虑到解析函数的  $f$  在  $\xi$  处导数的几何意义是  $f$  在  $\xi$  处的伸缩率, 那么能否将该伸缩率放到尽可能的大以至于可以覆盖整个单位圆盘为止?

因此, 这就要求我们寻找  $f_0 \in \mathcal{F}$  使得  $f'_0(\xi) = \sup\{f'(\xi) : f \in \mathcal{F}\}$ , 即证明  $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(\xi) = M$  为有限数且可以在区域  $D$  内取到.

Step.III 证明第二步中找到的  $f_0$  就是我们要找的共形映射 (映满的 (onto)), 即  $f_0(D) = \{w : |\omega| < 1\}$ . 唯一性的证明可参考上面的证明, 下面主要讨论存在性的证明脉络.

**引理 3.1.1.** 设  $\varphi(z)$  是  $D$  内一个解析函数, 且  $\varphi(z)$  在  $D$  内无零点, 则在  $D$  内存在一个解析函数  $g(z)$ , 使得  $\varphi(z) = [g(z)]^2$ .

简而言之,  $g(z) = \sqrt{\varphi(z)}$  在  $D$  内有单值解析分支.(事实上, 此处有两个单值解析分支, 任选其一即可)

该引理自己证明, 此处会用到. 设  $\mathcal{F} = \{f : f \text{ 在 } D \text{ 内单叶解析}; f(\xi) = 0; f'(\xi) > 0; |f(z)| < 1, \forall z \in D\}$ .

注 (释疑解惑 I). 为何要规定  $f'(\xi) > 0$ ?

若  $f$  存在, 则绝不唯一, 因为  $f_1(z) = e^{i\theta} \cdot f(z)$  也属于  $\mathcal{F}$ .(即  $\mathcal{F}$  对于旋转封闭) 因此规定  $f'(\xi) > 0$ , 即导数的辐角为零,(导数的辐角表示旋转某个角度) 也就是禁止旋转. 在此意义下, 令  $f'(\xi) < 0$  亦可.

### 3.1.2 第一步: 说明上述构造的函数族是非空的且是正规族

任取区域  $D$  外的一点  $\alpha$ , 即  $\alpha \notin D$ . 然后令  $\varphi(z) = z - \alpha = [g(z)]^2$ , 这是因为  $\varphi(z) = z - \alpha$  只有一个不属于  $D$  的零点, 从而在  $D$  内无零点, 应用上述引理即得,  $g(z) = \sqrt{\varphi(z)}$  在  $D$  内有单值解析分支, 任选其一即可.

要说明两个重要的性质对  $g(z)$  在  $D$  内成立.

$g(z)$  在  $D$  内单叶 (等价命题转化法) 由于  $g(z)$  在  $D$  内单叶当且仅当若  $g(z_1) = g(z_2) \implies z_1 = z_2$ . 注意到,  $g(z_1) = z_1 - \alpha = g(z_2) = z_2 - \alpha$ , 从而  $z_1 = z_2$ ,  $g(z)$  在  $D$  内是单叶的.

$g(z_1) \neq -g(z_2)$  (反证法) 设  $g(z_1) = -g(z_2), z_1, z_2 \in D$ , 那么  $[g(z_1)]^2 = [g(z_2)]^2$ , 即  $z_1 - \alpha = z_2 - \alpha$ , 得  $z_1 = z_2$ , 由项 3.1.2 知  $g(z)$  在  $D$  内单叶, 从而有  $g(z_1) = g(z_2)$ , 则  $g(z_1) = 0$ , 这与  $g(z)$  在  $D$  内无零点矛盾, 故  $g(z_1) \neq g(z_2), \forall z_1, z_2 \in D$ .

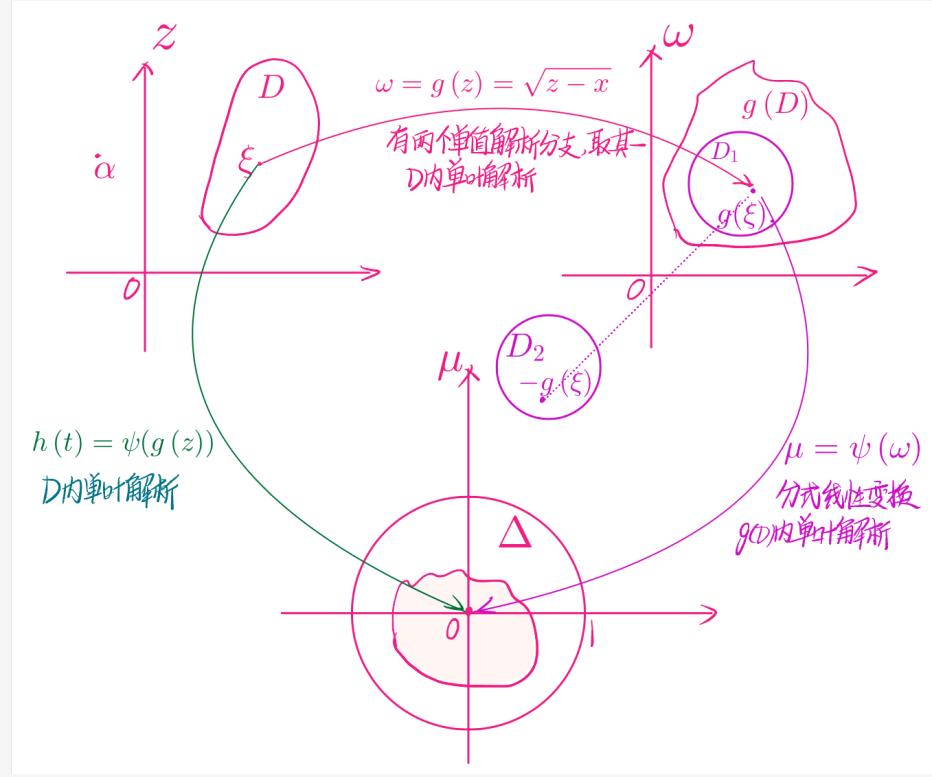


图 3.2: Setp.I 图示

以  $g(\xi)$  为圆心做一个包含在  $g(D)$  内的圆盘  $D_1$ , 则  $D_1$  关于原点对称的圆盘  $D_2$  必然不会包含在  $g(D)$  内. 这是因为  $\forall \omega_1 \in D_1, \exists z_1 \in D$ , 使得  $g(z_1) = \omega_1$ , 假设  $-\omega_1 \in g(D)$ , 则  $\exists z_2 \in D$ , 使得  $g(z_2) = -\omega_1$ , 即  $g(z_1) = -g(z_2), z_1, z_2 \in D$ , 与上述性质第二条矛盾.

构造  $\mu = \psi(\omega)$  为分式线性变换, 那么它将  $g(\xi)$  映为原点, 将  $g(D)$  的内部映为单位圆盘的内  
部 (不是整个单位圆盘).

注.  $\mu$  将圆盘  $D_2$  的外部映成单位圆盘的内部. 这总是可以做到的, 只要保证两个圆盘的边界走向相反即可 (两个单位圆盘的边界走向一致时,  $\mu$  将  $\Delta$  内部映成  $\Delta$  内部; 将  $\Delta$  外部映成  $\Delta$  外部; 两个单位圆盘的边界走向相反对,  $\mu$  将  $\Delta$  外部映成  $\Delta$  内部; 将  $\Delta$  内部映成  $\Delta$  外部).

将  $\mu = \psi(\omega)$  和  $\omega = g(z)$  复合后得到的函数  $h(z) = \psi(g(z))$  在  $D$  内单叶解析, 且

$$h(\xi) = \psi(g(\xi)) = 0.$$

但是  $h'(\xi)$  不一定大于零, 所以不妨设  $h'(\xi) = r \cdot e^{i\theta}$ , 则  $e^{-i\theta} h'(\xi) = r > 0$ . 那么令  $\varphi(z) = e^{-i\theta} h(z)$ , 则  $\varphi'(\xi) > 0$ , 所以由上述划线部分知,  $\varphi(z)$  在  $D$  内满足  $\mathcal{F}$  的四个条件, 从而  $\varphi \in \mathcal{F}$ , 则  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ .

由于  $g(D)$  是圆盘  $D_2$  外部的一部分, 则由上述评注知,  $g(D)$  被  $\mu$  映成单位圆盘内部的一部分.  $\forall f \in \mathcal{F}, |f(z)| \leq 1$  一致有界, 由 Montel 定理知  $\mathcal{F}$  是正规族.

### 3.1.3 第二步: 证明 $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(\xi)$ 是有限数且它可在 $D$ 内取到

补充结论: 上确界的一般性结论:  $a = \sup S \implies \exists \{x_n\} \subset S$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

设  $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(\xi) = m \leq +\infty$  ( $m > 0$  因  $f'(\xi) > 0$ ). 则存在  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\xi) = m$ . 因  $\mathcal{F}$  是正规族, 故

$$\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\} \text{ 使得 } f_{n_k} \xrightarrow{d} f \stackrel{(a)}{\implies} f'_{n_k} \rightarrow f' \stackrel{(b)}{\implies} \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(\xi) = f'(\xi). \quad (3.2)$$

其中 (a) 是因为原函数列内闭一致收敛那么导函数列也必内闭一致收敛 (由 Cauchy 积分公式证明);  $d$  表示内闭一致收敛; (b) 为定义.

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\xi) = m, \text{ 则 } \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(\xi) = m. \quad (3.3)$$

因此, 结合(3.2)、(3.3)可得  $f'(\xi) = m$ . 又由  $\mathcal{F}$  的定义知,  $f'(\xi) = m > 0$ .

因为  $f$  为单叶解析函数列内闭一致收敛的极限函数, 由定理,  $f$  要么是单叶解析函数, 要么是常数, 但由于  $f'(\xi) > 0$ , 故  $f$  不能是常数, 所以  $f$  是单叶函数,  $m = f'(\xi) < +\infty$ . 注意到,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\xi) = 0, \\ |f(z)| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) \right| \stackrel{(c)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(z)| \stackrel{(d)}{\leq} 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中, (c) 表示取模运算与极限运算次序可交换, 因为取模运算是连续的; (d) 表示极限只能保非严格不等式. 下面排除  $|f(z)| = 1$  的情形. (反证法) 若  $|f(z)| = 1$ , 注意到 模 (实部)(虚部)(辐角) 为常数的解析函数必为常数, 则  $f$  为常数, 矛盾, 因而  $|f(z)| < 1$ . 故  $f \in \mathcal{F}$ , 且  $f$  是  $\mathcal{F}$  中导数取得最大值的那一个.

### 3.1.4 第三步: 证明上面找到的 $f$ 即要找的映满共形映射 $f(D) = \{\omega: |\omega| < 1\}$

(反证法) 设  $f(D) \neq \Delta$ , 即存在  $\omega \in \Delta \setminus f(D)$ , 取之构成分式线性变换

$$\eta = \frac{f(z) - \omega}{1 - \bar{\omega} f(z)} = \frac{\mu - \omega}{1 - \mu\bar{\omega}}, \quad (3.5)$$

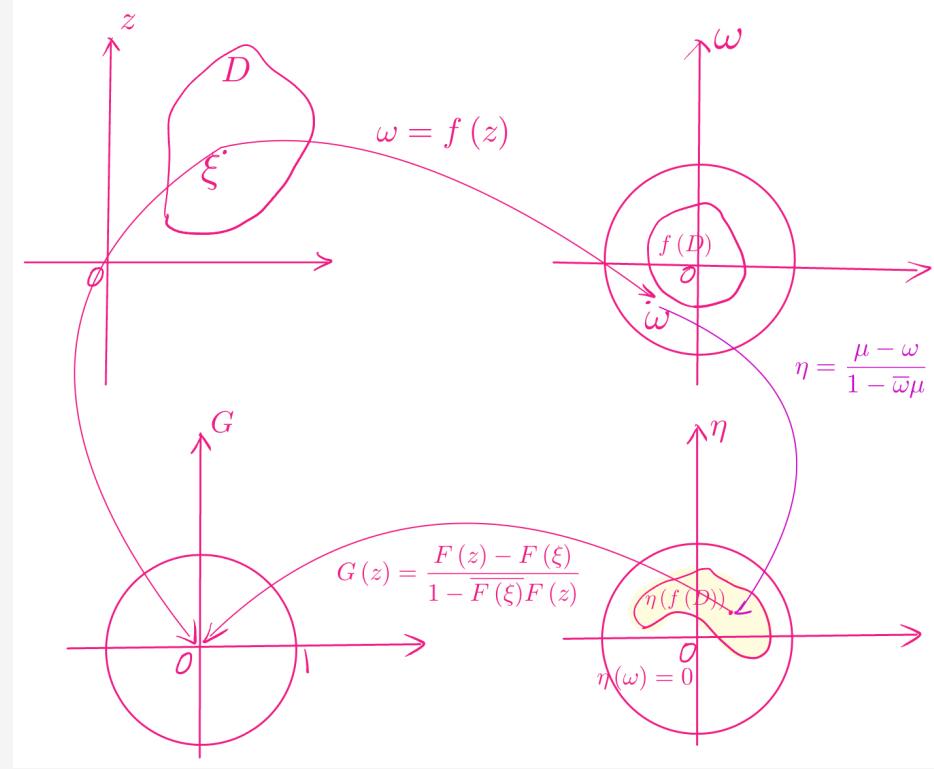


图 3.3: Step.III 图示

则该分式线性变换将  $\omega$  平面单位圆盘内的区域映成  $\eta$  平面单位圆盘内的区域 (不含原点, 因  $\eta(\omega) = 0$ , 但  $\omega \notin f(D)$ ).

设

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - \omega}{1 - \bar{\omega}f(z)}}, \quad (3.6)$$

我们断言,  $F(z)$  在  $D$  内单叶解析. 因  $F(z)$  在  $D$  内无零点, 由引理可知,  $F(z)$  在  $D$  内有单值解析分支, 不妨取其一表为  $F(z)$ . 若  $F(z_1) = F(z_2)$ , 则

$$\frac{f(z_1) - \omega}{1 - \bar{\omega}f(z_1)} = \frac{f(z_2) - \omega}{1 - \bar{\omega}f(z_2)} \implies f(z_1) = f(z_2) \stackrel{f \text{ 单叶解析}}{\implies} z_1 = z_2. \quad (3.7)$$

故  $F(z)$  在  $D$  内是单叶解析的. 且  $|F(z)| < 1$ . 但这不足以使  $F(z) \in \mathcal{F}$ , 这是因为  $F(\xi) \not\equiv 0$ . (经分式线性变换  $\eta$  作用后的像区域不含原点) 为此, 我们再做一次复合, 使得

$$G(z) = e^{-i\theta} \cdot \frac{F(z) - F(\xi)}{1 - \overline{F(\xi)}F(z)}, \text{ 其中 } e^{-i\theta} = \frac{F'(\xi)}{|F'(\xi)|}, \quad (3.8)$$

这是因为由 3.1.2 知

$$e^{-i\theta} = \frac{h'(\xi)}{|h'(\xi)|} = \frac{F'(\xi)}{|F'(\xi)|}$$

( $h$  到  $F$  只做了一次分式线性变换而没有旋转, 因而不改变辐角). 这样即可得到  $G(\xi) = 0$ , 且  $G'(\xi) > 0$ ; 又  $G$  在  $F$  基础上做旋转, 不改变模长,  $|G(z)| = |F(z)| < 1$  ( $G$  将  $F(\xi)$  变为原点). 故  $G(z) \in \mathcal{F}$ .

又由于

$$G'(\xi) = \frac{|F'(\xi)|}{1 - |F(\xi)|^2} = \frac{1 + |\omega|}{2\sqrt{\omega}} f'(\xi) > f'(\xi). \quad (3.9)$$

这与**3.1.3**的结论:  $f'(\xi)$  是  $\mathcal{F}$  中导数最大者矛盾, 故  $G(z)$  即为我们要找的映满的共形映射.

□

## Sec 4.1 泛函分析考试题目

## 例题 4.1.1.

我们来证明在空间  $s$  中点列按距离收敛等价于按坐标收敛。这就是说，设点列  $x^{(n)} = \{x_i^{(n)}\} \in s, n = 1, 2, 3, \dots$ ，又  $x \in s, x = \{x_i\}$  那么  $\rho(x^{(n)}, x) \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$  的充分必要条件是：对每个自然数  $i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = x_i$$

证明。事实上，如果

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

那么，对每一个  $i$ ，由于  $\frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \leq 2^i \rho(x^{(n)}, x)$ ，我们得到  $\frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$ ，于是，对于给定的正数  $\varepsilon$ ，不妨设  $\varepsilon < 1$ ，有自然数  $N$ ，使得当  $n > N$  时成立

$$\frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} < \varepsilon$$

从而有

$$|x_i^{(n)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

这说明对每个  $i = 1, 2, 3, \dots$ ，当  $n \rightarrow \infty$  时， $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ 。反过来，设  $x_i^{(n)} \rightarrow x_i(n \rightarrow \infty), i = 1, 2, 3, \dots$ 。因为对任一正数  $\varepsilon$ ，存在自然数  $m$ ，使得

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

又对每个  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ，存在着  $N_i$ ，使得当  $n > N_i$  时

$$|x_i^{(n)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取  $N = \max\{N_1, \dots, N_{m-1}\}$ , 那么当  $n > N$  时

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} < \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, 当  $n > N$  时, 有

$$\rho(x^{(n)}, x) = \left( \sum_{i=1}^{m-1} + \sum_{i=m}^{\infty} \right) \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^{(n)} - x_i|}{1 + |x_i^{(n)} - x_i|} < \varepsilon.$$

□

### 例题 4.1.2.

设  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 及  $f(x)$  是  $L^p(E, \mathcal{B}, \mu)$  中的函数. 如果函数列  $\{f_n(x)\}$  是  $p$  方平均收敛于  $f(x)$ , 那么函数列  $\{f_n(x)\}$  必然在  $E$  上依测度收敛于  $f(x)$ .

**证明.** 对于任何正数  $\sigma$ , 有

$$\begin{aligned} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu &\geq \int_{E(|f_n - f| \geq \sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \\ &\geq \sigma^p \mu(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \sigma)) \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 就有  $\mu(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \sigma)) \rightarrow 0$ . □

### 例题 4.1.3.

$C[a, b]$  是一个 Banach 空间.

**证明.** 在空间  $C[a, b]$  中按范数收敛的点列  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上均匀收敛, 而在数学分析中已经证明均匀收敛的连续函数列的极限函数是连续的. 因此, 只须证明  $C[a, b]$  中的基本点列  $\{f_n\}$  是  $[a, b]$  上的均匀收敛函数列. 设  $\{f_n(x)\}$  是  $C[a, b]$  中的基本点列, 即对任何正数  $\varepsilon$ , 存在  $N(\varepsilon) > 0$ , 使得当  $n, m \geq N(\varepsilon)$  时

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

从而对于任何  $x \in [a, b]$ , 只要  $n, m \geq N(\varepsilon)$  必有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

由数列的 Cauchy 收敛条件,  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上收敛于一函数  $f(x)$ , 再在上式中令  $m \rightarrow \infty$  得到  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ . 因此  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上均匀收敛于  $f(x)$ . □

**例题 4.1.4.**

设  $f(s)$  为  $a \leq s \leq b$  上的连续函数,  $K(s, t)$  为正方形  $a \leq s \leq b, a \leq t \leq b$  上的连续函数, 且常数  $M$  使得

$$\int_a^b |K(s, t)| dt \leq M < \infty, (a \leq s \leq b),$$

那么, 当  $|\lambda| < \frac{1}{M}$  时, 必有唯一的  $\varphi \in C[a, b]$  适合方程

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt.$$

**证明.** 在连续函数空间  $C[a, b]$  上定义映照

$$K\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt,$$

记  $\alpha = M|\lambda|$ , 那么  $\alpha < 1$ , 对于任意的  $\varphi, \psi \in C[a, b]$ , 有

$$\begin{aligned} \|K\varphi - K\psi\| &= |\lambda| \left\| \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt - \int_a^b K(s, t) \psi(t) dt \right\| \\ &\leq |\lambda| \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq |\lambda| M \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \psi(t)| = \alpha \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

应用 Banach 不动点定理便知道积分方程 (4.8.10) 有唯一的连续解  $\varphi(t)$ .  $\square$

**例题 4.1.5.**

设  $T$  是赋范线性空间  $X$  到赋范线性空间  $Y$  的线性算子. 假如  $T$  在某一点  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$  连续, 那么在  $\mathcal{D}(T)$  上处处连续.

**证明.** 对任意一点  $x \in \mathcal{D}(T)$ , 设  $x_n \in \mathcal{D}(T)$ , 且  $x_n \rightarrow x$ , 于是  $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$ , 由假设  $T$  在  $x_0$  处连续, 所以当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$T(x_n - x + x_0) = Tx_n - Tx + Tx_0 \rightarrow Tx_0,$$

因此  $Tx_n \rightarrow Tx$ , 即  $T$  在  $x$  点是连续的. 由此可知, 要验证线性算子  $T$  是连续的, 只需验证  $T$  在  $x = 0$  点连续就可以了.  $\square$

**例题 4.1.6.**

对任何  $f \in L[a, b]$ , 作

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

把  $T$  视为  $L[a, b] \rightarrow C[a, b]$  的算子时, 那么  $\|T\| = 1$ .

**证明.** 事实上, 任取  $f \in L[a, b]$ , 使  $\|f\|_L = 1$ , 由于

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{C[a,b]} &= \max_{a \leq x \leq b} |(Tf)(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x f(t)dt \right| \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^b |f(t)|dt = 1, \end{aligned}$$

即  $\|T\| \leq 1$ . 另一方面, 取  $f_0 = \frac{1}{b-a}$ , 显然  $\|f_0\|_L = 1$ , 那么又有

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \geq \|Tf_0\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1, \end{aligned}$$

即  $\|T\| \geq 1$ , 所以  $\|T\| = 1$ . □

**例题 4.1.7.**

线性算子  $T$  是有界的充要条件是  $T$  是连续算子.

**证明.** 显然, 有界算子在点  $x = 0$  是连续的. 由**例题 4.1.5**, 有界线性算子  $T$  处处连续. 反过来, 设  $T$  是连续的线性算子, 我们只需证明

$$M_0 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty,$$

假若不然, 设  $M_0 = \infty$ , 那么就在单位球面  $\|x\| = 1$  上存在点列  $\{x_n\}$ , 使得  $\|Tx_n\| = \lambda_n \rightarrow \infty$ . 考察点列  $y_n = \frac{x_n}{\lambda_n}$ , 显然,  $y_n \rightarrow 0$ . 由  $T$  的连续性, 得到  $Ty_n \rightarrow 0$ . 但是实际上  $\|Ty_n\| = 1$ , 这是矛盾. 因而  $M_0 < \infty$ , 即  $T$  是有界算子. □

**例题 4.1.8.**

设  $X$  是赋范线性空间, 如果  $X^*$  是可析的, 那么  $X$  也必是可析的.

**证明.** 由于假设  $X^*$  是可析的, 所以在  $X^*$  中有一列  $\{f_n\}$ , 它在  $X^*$  的单位球面上稠密. 对每个  $f_n$ , 由于  $\sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = \|f_n\| > \frac{1}{2}$ , 在  $X$  的单位球面上必有  $x_n$ , 使得  $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$ . 这时把  $\{x_n\}$  张成

$X$  的线性闭子空间记作  $X_0$ , 如果  $X$  不可析, 那么必然  $X_0 \neq X$ . 从而在  $X^*$  中存在  $f_0, \|f_0\| = 1$ , 而且当  $x \in X_0$  时,  $f_0(x) = 0$ . 然而对任何正整数  $n$

$$\|f_n - f_0\| \geq |f_n(x_n) - f_0(x_n)| = |f_n(x_n)| > \frac{1}{2},$$

这与  $\{f_n\}$  在  $X^*$  的单位球面上稠密的假设冲突. 所以  $X$  是可析的.  $\square$

### 例题 4.1.9.

证明: 当  $X$  是自反空间时,

$$X^* = X^{***} = X^{5*} = \cdots = X^{(2n+1)*} = \cdots$$

$$X^{**} = X^{4*} = \cdots = X^{(2n)*} = \cdots.$$

证明. 假设  $X$  是一个自反空间, 根据定义 5.3.1 知, 自反空间  $X$  满足  $X = X^{**}$ . 接下来, 对  $X^*$  与  $X^{**}$  反复运用该式迭代可得

 $\square$ 

$$(X^*) = (X^*)^{**} = X^{***}$$

$$(X^{***}) = (X^{***})^{**} = X^{5*}$$

...      ...      ...

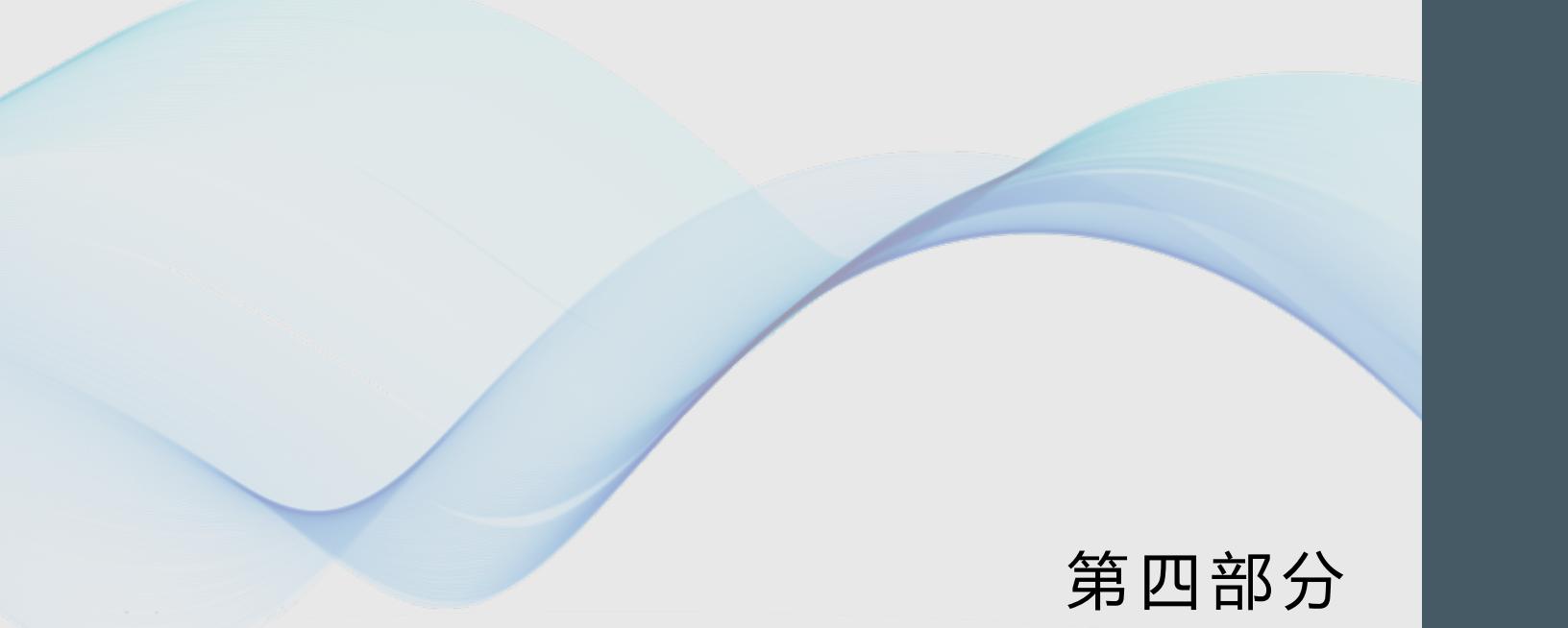
$$X^{(2n-1)*} = X^{(2n+1)*}$$

$$(X^{**}) = (X^{**})^{**} = X^{4*}$$

$$(X^{4*}) = (X^{4*})^{**} = X^{6*}$$

...      ...      ...

$$X^{(2n-2)*} = X^{(2n)*}$$



## 第四部分



### 调和分析





# 5

# 调和分析

## Part IV

### Sec 5.1 典型域

第一种是  $m$  行  $n$  列的矩阵双曲空间, 今后以  $\mathfrak{R}_I$  表示. 它是由  $m$  行  $n$  列的复元素矩阵  $Z$  之适合于条件

$$I^{(m)} - Z \bar{Z}' > 0$$

者所组成, 此处  $I^{(m)}$  表示  $m$  阶的单位方阵,  $\bar{Z}'$  表示由  $Z$  行列互换并取共轭复数所得出的矩阵, 因此它是  $n$  行  $m$  列的. 如果  $H$  是一个 Hermite 方阵, 则以  $H > 0$  表示  $H$  是正定的.

第二种是  $n$  阶的对称方阵的双曲空间, 今后以  $\mathfrak{R}_{II}$  表示. 它是由  $n$  阶的复元素对称方阵  $Z$  之适合于条件

$$I^{(n)} - Z \bar{Z} > 0$$

者所组成.

第三种是  $n$  阶的斜对称方阵的双曲空间, 今后以  $\mathfrak{R}_{III}$  表示. 它是由  $n$  阶的复元素斜对称方阵  $Z$  之适合于条件

$$I^{(n)} + Z \bar{Z} > 0$$

者所组成.

第四种称为 Lie 球双曲空间, 今后以  $\mathfrak{R}_{IV}$  表示. 它是由  $n (> 2)$  维复元素矢量  $z (= (z_1, \dots, z_n))$  之适合下列条件

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0$$

及

$$|zz'| < 1$$

者所组成.

这四种域的维数 (复数维) 各为

$$\dim(\mathfrak{R}_I) = mn,$$

$$\dim(\mathfrak{R}_{II}) = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\dim(\mathfrak{R}_{III}) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

$$\dim(\mathfrak{R}_{IV}) = n.$$

## Sec 5.2 代数工具

假定  $n \geq 2$ , 命  $D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

与 Vandermonde 行列式有关的恒等式: 1.

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

由于范德蒙行列式等于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

故而有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^n 1 \cdot (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_{j-1}^2 & x_{j+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} & x_{j+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{j-1} & 0 & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_{j-1}^2 & 0 & x_{j+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} & 0 & x_{j+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{C_n^2} D(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = (-1)^{C_n^2} \sum_{j=1}^n D_j. \end{aligned}$$

## 5.2.1 性质

1.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n x_j^l D_j &= \sum_{j=1}^n x_j^l \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \ddots & x_{j-1} & 0 & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_{j-1}^2 & 0 & x_{j+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} & 0 & x_{j+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_1^l & \cdots & x_{j-1}^l & x_j^l & x_{j+1}^l & \cdots & x_n^l \\ x_1 & \ddots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_{j-1}^2 & x_j^2 & x_{j+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} & x_j^{n-1} & x_{j+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{cases} D(x_1, \dots, x_n), & l = 0 \text{ (Vandermonde Determinant)} \\ 0 & 1 \leq l \leq n \text{ (Linear correlation)} \\ (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n x_i D(x_1, \dots, x_n), & l = n \text{ (Extracting common factor } x_i) \end{cases}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{1-x_j} D_j &= (-1)^{c_n^2} \begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1} & \cdots & \frac{x_{j-1}}{1-x_{j-1}} & \frac{x_j}{1-x_j} & \frac{x_{j+1}}{1-x_{j+1}} & \cdots & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1 & \ddots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_{j-1}^2 & x_j^2 & x_{j+1}^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1} & x_j^{n-1} & x_{j+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{(n-1)} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=1}^n (1-x_j)} D(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

3.

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{1+x_j} D_j = (-1)^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^n (-x_i)}{\prod_{j=1}^n (1-(-x_j))} D(x_1, \dots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=1}^n (1+x_j)} D(x_1, \dots, x_n).$$

## 第五部分

从微分几何到代数几何



# 6



# 从微分几何到代数几何

## Part V

### Sec 6.1 函数层

Hausdorff 空间  $X$  的任意点都存在和欧式空间同胚的开集, 则构成(拓扑)流形, 反过来说流形是由欧式空间粘合起来的整体结构. 在流形上赋予光滑的微分结构则构成光滑的微分流形. 微分结构的定义中蕴含了函数可微的要求, 这种思想反应到几何中, 即用流形上的函数来研究流形本身, 就是我们要谈论的层(sheaf).

给定拓扑空间  $X$ , 符号  $\mathcal{O}_X$  表示拓扑空间  $X$  上的环层, 即  $X$  上的一个在环范畴取值的层.  $(X, \mathcal{O}_X)$  称为拓扑空间  $X$  上的赋环空间(ringed space).  $\mathcal{O}_X$  也称为赋环空间上的结构层(structure sheaf). 对于拓扑空间上的点  $p \in X$ , 层的茎(stalk)记为  $\mathcal{O}_{X,p}$ .

以上罗列了一些关键概念, 在给出详尽的定义和讨论之前, 我们先接受一个事实: 微分流形  $X$  上的可微函数构成可微函数环层  $\mathcal{O}_X$ , 从而微分流形是赋环空间. 微分流形的这一结构, 在代数几何中可以类比于概形(scheme). 理解层的概念是从微分几何过渡到代数结合的关键思维步骤.

下面讨论如何从微分流形得到层的概念. 以陈省身的微分几何为例, 为了定义余切空间, 需要讨论可微流形  $X$  上的可微函数  $f, g \in C^1(X)$  在固定点  $p \in X$  附近是否相等. 附近是一个需要严格表达的概念, 按照分析学的逻辑陈述为: 如果存在  $p$  的邻域  $H(p)$  使得函数限制在邻域上相等, 则函数等价, 商集为函数芽(germ):

$$f|_{H(p)} = g|_{H(p)} \Leftrightarrow f \sim g \Leftrightarrow [f] = [g] \in C_p^1(X)/\sim$$

这是一个极限过程, 在比较两个函数  $f, g \in C^1(X)$  在固定点  $p \in X$  附近是否局部相等的过程中, 需要缩小  $p$  的邻域, 直到出现邻域  $H(p)$  满足  $f|_{H(p)} = g|_{H(p)}$ .

#### 6.1.1 预层

微分几何研究的是具有微分结构的微分流形, 其底层的结构是拓扑空间, 即拓扑空间范畴 Top 中的对象  $(X, \tau) \in \text{Ob}(\text{Top})$ . 层是对拓扑空间  $X$  中开集之间相互关系的范畴化描述, 为了方便讨论, 以拓扑空间  $(X, \tau)$  中的开集为对象:

$$U, V \in \tau$$

根据其包含 (inclusion) 关系规定态射

$$\text{Hom}(V, U) = \begin{cases} \{\rho_{UV}\}, & V \subseteq U \\ \emptyset, & V \not\subseteq U \end{cases}$$

这样构造出的拓扑空间  $X$  上的开集范畴记为  $\text{Top}(X)$ , 它描述了拓扑空间中开集之间的包含关系, 若集合有包含关系  $V \subseteq U$  则  $V \hookrightarrow U$  构成包含映射. 我们希望为拓扑空间的每一个开集赋予一个代数结构, 这个结构是一个有零对象 (zero object) 的范畴  $\mathcal{C}$  中的对象. 此外, 对于拓扑空间中开集的包含关系, 也赋予范畴  $\mathcal{C}$  中对象的态射, 构成以下反变函子

$$\mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$$

称为拓扑空间  $X$  上的  $\mathcal{C}$  预层 (presheaf), 它赋予拓扑空间的每个空间以一个  $\mathcal{C}$  中的对象, 且把拓扑空间中开集的包含关系对应到  $\mathcal{C}$  中的态射.  $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  为预层在开集上的截面 (section).

可微流形  $X$  上的可微函数集合  $C^1(X)$  具有自然的函数环的结构. 在开集范畴  $\text{Top}(X)$  中, 给定开集  $U \in \text{Ob}(\text{Top}(X))$ , 可微函数环  $C^1(X)$  限制在  $U$  上也构成一个函数环  $C^1(U)$ . 对于具有包含关系的开集  $V \subseteq U$ , 可微函数环  $C^1(U)$  限制到  $V$  上则构成函数环  $C^1(V)$ , 且限制映射是环同态. 于是定义可微函数层:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} &\rightarrow \text{CRng} \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) = \mathcal{O}(U) \\ V &\mapsto \mathcal{F}(V) = \mathcal{O}(V) \\ \text{Hom}(V, U) &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}(U), \mathcal{O}(V)) \end{aligned}$$

函子将集合范畴中的包含关系对应到函数的限制即

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(U) &\rightarrow \mathcal{O}(V) \\ u &\mapsto u|_V \end{aligned}$$

这样就构建了可微函数预层  $\mathcal{O}_X$ . 由于范畴的灵活性, 也可以类似定义限制为可微函数预层、光滑函数预层、解析函数预层等等.

## 6.1.2 层

预层描述了开集的包含关系, 进一步要考虑拓扑空间的覆盖和粘合, 在预层上发展出层的概念. 对于预层  $\mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ , 若对于任意开集上的开覆盖  $\{U_k\} \supseteq U$ , 以下映射

$$\rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

构成均衡子正合序列 (equalizer exact sequence), 那么就称预层为层 (sheaf). 举例说明: 可微流形上的可微函数预层  $\mathcal{O}_X$  构成可微函数层. 对于开集  $U \in \text{Ob}(\text{Top}(X))$ , 有开覆盖  $\{U_k\} \supseteq U$ . 通过层函子得到限制在  $U$  的可微函数环  $\mathcal{O}(U)$ .

- 对于可微函数  $f \in \mathcal{O}(U)$ , 预层的结构有  $f \mapsto f|_{U_i}$  的限制过程. 如果它限制在所有的覆盖上都有  $f|_{U_i} = 0$  那么  $f = 0$ . 也就是说, 预层函子在覆盖  $\{U_k\}$  上的退化 (*vanish*) (到零对象) 要求预层函子在被覆盖的开集  $U$  退化.
- 以上的均衡子正合序列要求, 当预层函子在覆盖  $\{U_k\}$  上产生相等关系, 即对于  $f_i| \in \mathcal{O}(U_i)$  和  $f_j| \in \mathcal{O}(U_j)$  这两个来自不同函数环的函数, 当  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  即开集相交时, 限制在交集上有  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ , 此时要求存在唯一的  $f \in \mathcal{O}(U)$  使得  $f|_{U_i} = f_i$ . 也就是说, 对于开覆盖中相交的开集, 在交集上两边的函数相等, 产生了粘合的效果.

概括而言, 在预层中, 通过函子  $\mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  的作用, 开集的包含关系对应到  $\mathcal{C}$  范畴中代数结构的态射关系, 在固定点上开邻域 (作为开集) 缩小的极限过程对应了  $\mathcal{C}$  范畴中代数结构的局部化过程. 在层中, 不仅有这样的局部化过程, 而且通过覆盖上的均衡子正合的要求, 确保在开集的交集  $U_i \cap U_j$  上, 代数结构是相容的, 反过来说, 整个层也可以视为不同的开集粘合 (*glue*) 的结果, 而粘合的重叠部分要靠这种相容性来保障.

微分几何提供了绝好的例子. 可微流形的定义中所谓的坐标卡 (*chart*) 和图集 (*atlas*), 其实就是对拓扑空间  $X$  带有局部坐标系的开覆盖. 坐标卡之间的相容性是定义在有相邻关系的坐标卡/开覆盖之间的, 即在交集上要求相容, 而这种相容性就体现在层中.

令  $\mathcal{F} : \text{Top}(X) \rightarrow \mathcal{O}_X$  为可微函数层, 取拓扑空间  $X$  中交集  $U \cap V \neq \emptyset$  非空的两个开集, 其并集  $U \cup V$  被对应到  $\mathcal{F}(U \cup V)$ , 考虑任意可微函数限制在交集上

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \text{Top}(X) &\rightarrow \mathcal{O}_X \\ U &\mapsto \mathcal{F}(U) \\ V &\mapsto \mathcal{F}(V) \\ U \cap V &\mapsto \mathcal{F}(U \cap V)\end{aligned}$$

如果有两个可微函数  $u = \mathcal{F}(U)$  和  $v = \mathcal{F}(V)$ , 它们限制在交集上相等:

$$u|_{U \cap V} = v|_{U \cap V} \in \mathcal{F}(U \cap V)$$

这样相当于可微函数  $u$  和  $v$  在交集上粘合起来了, 这种粘合表示为层的操作:

$$\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V)$$

### 6.1.3 茎

预层  $\mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  为每个开集赋予了  $\mathcal{C}$  范畴中的代数结构. 如果需要进一步局部地考虑拓扑空间上的一点  $p \in X$  则需要茎的概念. 点  $p \in X$  的一组开邻域  $\{U_k(p)\} \subset \text{Ob}(\text{Top}(X))$ , 其中的每个邻域  $U_k(p)$  又可以确定  $\mathcal{F}(U_k(p))$ , 即

$$p \mapsto \{U_k(p)\} \mapsto \{\mathcal{F}(U_k(p))\}$$

取  $U_k(p)$ , 并随之取  $f \in \mathcal{F}(U_k(p))$ , 得到二元组  $(U_k(p), f)$ . 考虑两个拓扑上相交的二元组  $(U_1(p), f_1)$  和  $(U_2(p), f_2)$ , 如果存在开集  $U(p)$ :

$$x \in U(p) \subset U_1(p) \cap U_2(p)$$

使得  $f_1$  和  $f_2$  限制在这个邻域中的值相等, 那么便定义等价关系

$$f_1|_{U(p)} = f_2|_{U(p)} \Leftrightarrow (U_1(p), f_1) \sim (U_2(p), f_2)$$

根据这个等价关系, 可以构造商集:

$$\mathcal{F}_p = \{(U_k(p), f) : f \in \mathcal{F}(U_k(p))\} / \sim$$

称为  $\mathcal{F}$  的茎 (stalk).

不难理解, 茎体现了预层的局部相等的关系, 在微分几何中就是函数芽. 前面提到函数芽的构造是一个极限过程, 在比较两个函数  $f, g \in C^1(X)$  在固定点  $p \in X$  附近是否局部相等的过程中, 需要缩小  $p$  的邻域, 直到出现邻域  $H(p)$  满足  $f|_{H(p)} = g|_{H(p)}$ . 用范畴的语言定义这个极限过程更加简洁. 以固定点  $p \in X$  为内点的邻域, 构成了范畴  $\text{Top}(X)$  中的一组对象  $\{U_k\}$ . 在预层  $\mathcal{F} : \text{Top}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  的作用下, 这组对象对应到  $\{\mathcal{F}(U_k)\}$ , 茎就是它们的余极限:

$$\mathcal{F}_p = \varinjlim \{\mathcal{F}(U_k)\}$$

对于函数层的情形,  $f \in \mathcal{F}(U)$  在这个余极限中的值就是  $f$  在  $p$  点的函数芽.

## Sec 6.2 Appendix: 一些范畴论的概念

**极限/余极限 [Vakil2017]:**

Then the **limit of the diagram** is an object  $\varprojlim_{\mathcal{I}} A_i$  of  $\mathcal{C}$  along with morphisms  $f_j : \varprojlim_{\mathcal{I}} A_i \rightarrow A_j$  for each  $j \in \mathcal{I}$ , such that  $m : j \rightarrow k$  is a morphism in  $\mathcal{I}$ , then

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathcal{I}} A_i & & \\ f_j \downarrow & \searrow f_k & \\ A_j & \xrightarrow{F(m)} & A_k \end{array}$$

( Fig 1.)

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim_{\mathcal{I}} A_i & \xleftarrow{g} & W & \xrightarrow{f_k} & \varinjlim_{\mathcal{I}} A_i \\ f_i \searrow & \downarrow g_i & \swarrow f_k & & f_j \uparrow \\ A_j & \xrightarrow{F(m)} & A_k & & A_j \xleftarrow{F(m)} A_k \end{array}$$

( Fig 2.)

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{\mathcal{I}} A_i & & \\ f_j \uparrow & \swarrow f_k & \\ A_j & \xleftarrow{F(m)} & A_k \end{array}$$

( Fig 3.)

commutes, and this object and maps to each  $A_i$  are universal (final) with respect to this property. More precisely, given any other object  $W$  along with maps  $g_i : W \rightarrow A_i$  commuting with the  $F(m)$  (if  $m : j \rightarrow k$  is a morphism in  $\mathcal{I}$ , then  $g_k = F(m) \circ g_j$ ), then there is a unique map

$$g : W \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{I}} A_i$$

so that  $g_i = f_i \circ g$  for all  $i$ . (In some cases, the limit is sometimes called the inverse limit or projective limit. We won't use this language.) By the usual universal property argument, if the limit exists, it is unique up to unique isomorphism. See (Fig 2.)

**Colimits.** More immediately relevant for us will be the dual (arrowreversed version) of the notion of limit (or inverse limit). We just flip the arrows  $f_i$  in (Fig 1.), and get the notion of a **colimit**, which is denoted  $\lim_{\rightarrow, \mathcal{I}} A_i$ . (You should draw the corresponding diagram. See (Fig 3.)) Again, if it exists, it is unique up to unique isomorphism. (In some cases, the colimit is sometimes called the **direct limit**, **inductive limit**, or **injective limit**. We won't use this language. I prefer using limit/colimit in analogy with kernel/cokernel and product/coproduct. This is more than analogy, as kernels and products may be interpreted as limits, and similarly with cokernels and coproducts. Also, I remember that kernels "map to", and cokernels are "mapped to", which reminds me that a limit maps to all the objects in the big commutative diagram indexed by  $\mathcal{I}$ ; and a colimit has a map from all the objects.)

均衡子: 在下图的  $f, g : A \rightarrow B$  映射中, 极限  $K$  构成了均衡子 (equalizer).

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & A \\ & & \underbrace{\quad}_{\quad} \end{array} \quad \begin{array}{c} f \\ \curvearrowright \\ g \end{array} \quad B$$

平凡 (trivial) 的条件, 指的是纤维丛可以通过简单的直积  $E = X \times F$  来做投射  $\pi : E = X \times F \rightarrow X$ , 这样就有了标准纤维  $F$ , 它常常是一个张量, 用于构造微分流形  $X$  上的各种张量丛.

## Sec 6.3 向量丛

标准纤维为向量空间的情况特别值得讨论, 它构成了向量丛的理论. 重要原因之一在于线性空间范畴中的自同构, 也就是一般线性群的研究构成了群表示论的基础. 在前面流形的回顾中, 注意到相交坐标卡之间的坐标函数转换问题, 概括而论:

开覆盖之交集 : 拓扑中的粘合等价

坐标卡之交集 : 微分流形中的相容结构

开覆盖的截面之转换 : 向量丛的 G-群

从拓扑商空间, 到微分流形坐标卡, 到向量丛的 G-群, 是逐步添加数学结构的过程. 丛的构造视为不交并. 若邻近的开集相交处有两点  $(p, v) \in U_i \times V$  和  $(p, v') \in U_j \times V$ , 虽然根据拓扑的粘合映射它们在底空间是同一点, 但需要考虑标准纤维上两个向量的等价关系  $v \sim v'$ . 考虑  $V$  上的变换群  $G$ , 由于可逆和线性的要求通常要求  $G$  是一般线性群  $G = \mathrm{GL}(n, K)$  或者其子 Lie 群, 即用某种可逆线性变换群将  $v$  和  $v'$  联系起来. 对于邻近的开集可以在交集上定义转移函数 (transition function)

$$\begin{aligned} g_{ij} : U_i \cap U_j &\rightarrow G \\ p &\mapsto g_{ij}(p) \end{aligned}$$

它是标准纤维上的线性自态射:

$$\begin{aligned} g_{ij}(p) : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto (g_{ij}(p))(v) \end{aligned}$$

当满足  $v = g_{ij}v' = (g_{ij}(p))(v')$  时, 建立了  $v \sim v'$  的关系, 这两点相当于等同. 等价关系要求变换群的可逆, 于是自然地让变换群放置在一般线性群或者 Lie 群的框架下研究, 这样构造的向量

丛为 **G-丛 (G-bundle)**. 在规范理论中, 一个标准纤维  $V$  和作用其上的规范变换群  $G$ , 可以在流形  $M$  上相应构造  $G$ -丛, 而场就是  $G$ -丛上的截面 (section).

向量丛的构建还要求以上的条件, 使得指标的循环构成了复合变换群退化为恒同, 这个条件称为上闭链 (**cocycle**) 条件. 它暗示覆盖的交集部分蕴含着拓扑信息, 可以通过有序指标的代数方法来讨论; 而上闭链强烈提示我们这里打开了通向上同调理论的大门.

## Sec 6.4 多项式环素谱上的 Zariski 拓扑

代数几何研究多项式的解集, 在代数封闭域  $K$  上,  $n$ -维仿射空间  $K^n$  有  $K$ -多项式环

$$K[x] = K[x_1, x_2, \dots, x_n],$$

它是  $K^n \rightarrow K$  多项式的全体, 并由  $K$  上的运算赋予自然的环的加法、乘法和相应幺元. 图6.1 给出了常见的映射关系. 带框的部分表示可以定义 Zariski 拓扑, 图中体现了文中 (6.4) (6.8) 这两个 Zariski 拓扑和 (6.6) Hilbert 零点定理:

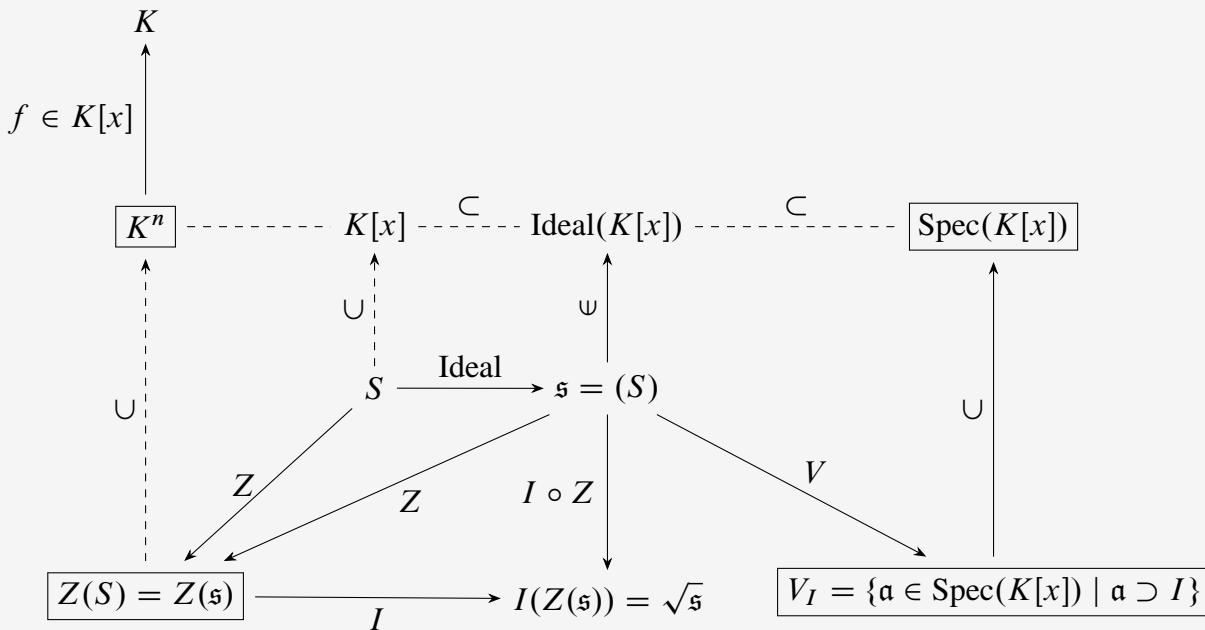


图 6.1: Zariski 拓扑常见映射关系

孤立点、紧的圆周、嵌入在高维空间的直线、超平面、曲面... 这些都可以构成多项式集合的解集, 从直观上人们感觉这些解集是闭集, 相应地解集的补集是开集. 这种直观通过 Zariski 拓扑的方式严格表述为 Zariski 拓扑, 后面我们将讨论几个不同的 Zariski 拓扑空间的关系.

## 6.4.1 理想

在环论中理想的地位(构造商环)相当于群论中的正规子群(构造商群). 我们注意到对理想的研究远远地多于子环, 这是因为理想是一类特殊的子环:

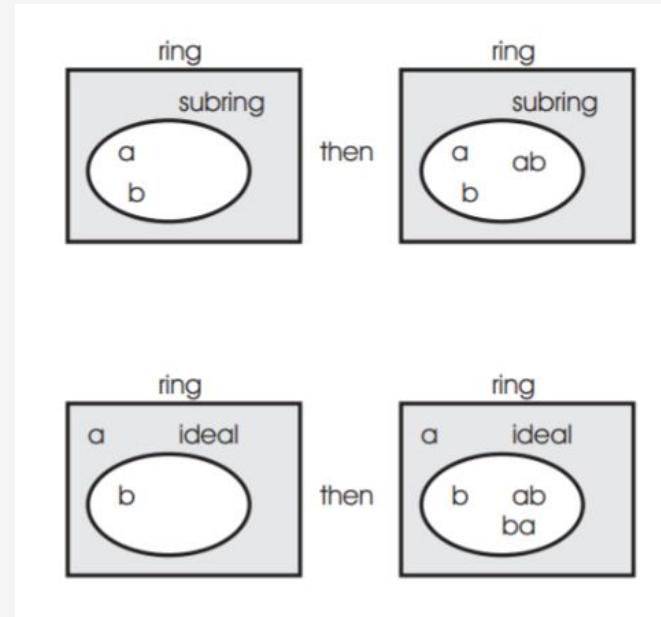


图 6.2: 子环与理想的对比

对于环  $R$  理想  $I$ , 不仅要求理想自身作为子环的环乘封闭, 还要求理想对  $R \setminus I$  中环元能够环乘封闭, 故理想  $I$  比子环更多反映出环  $R$  本身的性质, 而子环  $R'$  已经可以完全无视  $R \setminus R'$  的影响. 理想的加法和乘法定义如下:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a} \text{ and } b \in \mathfrak{b}\}$$

以及

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \mid a_k \in \mathfrak{a}, b_k \in \mathfrak{b} \right\}$$

环  $R$  中的子集  $S \subset R$  生成的理想记为  $(S)$ .

## 6.4.2 多项式环

以下映射给出了多项式的公共零点集

$$\begin{aligned} Z : 2^{K[x]} &\rightarrow K^n \\ S &\mapsto Z(S) = \{x \in K^n \mid \forall f \in S : f(x) = 0\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

, 这里的  $2^{K[x]}$  实则为  $K[x]$  的幂集.  $K^n$  中的子集, 如果可以表示为多项式集合的公共零点集, 称为代数集(algebraic set).<sup>[1]</sup> 给出了代数集上的 Zariski 拓扑(Zariski topology), 相应地将  $K^n$  上的闭集构成的集族记为  $\overline{\text{Top}}(K^n)$  (这里借用了开集范畴的记号).

**命题 6.4.1.**

*The union of two algebraic sets is an algebraic set. The intersection of any family of algebraic sets is an algebraic set. The empty set and the whole space are algebraic sets.*

**证明.** If  $Y_1 = Z(T_1)$  and  $Y_2 = Z(T_2)$ , then  $Y_1 \cup Y_2 = Z(T_1 T_2)$ , where  $T_1 T_2$  denotes the set of all products of an element of  $T_1$  by an element of  $T_2$ . Indeed, if  $P \in Y_1 \cup Y_2$ , then either  $P \in Y_1$  or  $P \in Y_2$ , so  $P$  is a zero of every polynomial in  $T_1 T_2$ . Conversely, if  $P \in Z(T_1 T_2)$ , and  $P \notin Y_1$  say, then there is an  $f \in T_1$  such that  $f(P) \neq 0$ . Now for any  $g \in T_2$ ,  $(fg)(P) = 0$  implies that  $g(P) = 0$ , so that  $P \in Y_2$ .

If  $Y_x = Z(T_x)$  is any family of algebraic sets, then  $\bigcap Y_x = Z\left(\bigcup T_\alpha\right)$ , so  $\bigcap Y_\alpha$  is also an algebraic set. Finally, the empty set  $\emptyset = Z(1)$ , and the whole space  $\mathbf{A}^n = Z(0)$ .  $\square$

**定义 6.4.1.**

*We define the Zariski topology on  $\mathbf{A}^n$  by taking the open subsets to be the complements of the algebraic sets. This is a topology, because according to the proposition, the intersection of two open sets is open, and the union of any family of open sets is open. Furthermore, the empty set and the whole space are both open.*

反过来考虑:

$$\begin{aligned} I : K^n &\rightarrow 2^{K[x]} \\ Y &\mapsto I(Y) \\ &= \{f \in K[x] \mid \forall x \in Y : f(x) = 0\} \\ &= \{f \in K[x] \mid Y \subset Z\{f\}\} \end{aligned} \tag{6.2}$$

即  $I(Y)$  是解集包含  $Y$  的多项式的集合.

多项式环上定义的乘法和多项式的理想有密切的关系, 若  $Y = Z(S) \subset K^n$  是一组多项式  $S \in K^n$  的解集, 显然  $I(Y)$  是  $K^n$  的子环, 多项式的乘法确保了  $\forall f \in I(Y)$  和任意环元  $p \in K^n$  的乘积  $fp$  的解集仍然包含  $Y$ , 于是  $I(Y)$  构成一个理想. 为了研究代数集  $Y$ , 往往要考虑限制在  $Y$  上相等的多项式等价类 (类似函数芽在邻域相等),  $Y$  确定的这个理想诱导了一个商环, 称为  $Y$  的坐标环 (coordinate ring) 或者结构环 (structure ring):

$$K[x]/I(V)$$

任意取  $g \in K[x]$  有

$$\forall f \in S, x \in Y : (fg)(x) = f(x)g(x) = 0 \Rightarrow x \in Z(fg)$$

它满足了理想中对任意环元的封闭性, 于是可以考虑由  $S$  生成的理想

$$\mathfrak{s} = (S) \in \text{Ideal}(K[x])$$

## 6.4. 多项式环素谱上的 ZARISKI 拓扑

对于任意  $x \in Y$  和  $f \in S$  都满足  $f(x) = 0$ , 故  $x$  也是它生成的理想中的零点, 即  $Z(S) \subseteq Z(\mathfrak{s})$ . 又由于  $S \subseteq \mathfrak{s} = (S) \subseteq K^n$ , 有  $Z(S) \supseteq Z(\mathfrak{s})$ . 于是

$$Z(S) = Z(\mathfrak{s}) \quad (6.3)$$

由于交换代数的成果, 后面的讨论将从多项式环  $K[x]$  转向环上的理想的集合  $\text{Ideal}(K[x])$ . 由于多项式集的零点集可以直接替换为多项式集生成的理想的零点集, 于是有了对应:

$$\begin{aligned} Z : \text{Ideal}(K[x]) &\rightarrow \overline{\mathfrak{Top}}(K^n) \\ \mathfrak{s} &\mapsto Z(\mathfrak{s}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.4.3 Hilbert 零点定理

(6.4)和(6.2)的复合映射为

$$\begin{aligned} I \circ Z : \text{Ideal}(K[x]) &\rightarrow \text{Ideal}(K[x]) \\ \mathfrak{s} &\mapsto I(Z(\mathfrak{s})) \end{aligned} \quad (6.5)$$

构成了  $K[x]$  的理想到理想的映射. **Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz)** 给出了重要的对应:

$$\mathfrak{s} \subset I(Z(\mathfrak{s})) = \sqrt{\mathfrak{s}} = \{r \in K[x] \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ : r^n \in \mathfrak{s}\} \quad (6.6)$$

这样  $K^n$  中的代数集、 $K[x]$  中多项式的理想、根理想都对应起来了. 在拓扑空间中, 非空子集若不能表示为两个非空闭真子集的并, 则称为不可约的 (irreducible). 在 Zariski 拓扑下, 不可约的代数集称为代数簇 (algebraic variety).<sup>[1]</sup>

#### 定理 6.4.1. Hilbert's Nullstellensatz

*Let  $k$  be an algebraically closed field. Let  $\mathfrak{a}$  be an ideal in  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  and let  $f \in A$  be an polynomial which vanishes at all points of  $Z(\mathfrak{a})$ . Then  $f^r \in \mathfrak{a}$  for some integer  $r > 0$ .*

证明. Lang [1,p.256]<sup>[2]</sup> or Atiyah-Macdonald [1,p.285] or Zariski-Samual [1,vol. 2., p. 164].  $\square$

#### 推论 6.4.1.

There is a one-to-one inclusion-reversing correspondence between algebraic sets in  $A^n$  and radical ideals (i.e. ideals which equal to their own radical) in  $A$ , given by  $Y \mapsto I(Y)$  and  $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ . Furthermore, an algebraic set is irreducible if and only if its ideal is a prime ideal.

Hilbert 零点定理给出了代数集  $Y$  和根理想  $\sqrt{Y}$  的对应, 而代数集能够构成代数簇的不可约的条件则对应着素理想 (prime ideal), 即要求  $I(Y)$  是素理想, 这一条件也相当于  $Y$  的坐标环  $K[x]/I(Y)$  是整环. 代数几何研究代数簇, 故后面将集中于对多项式环  $K[x]$  中素理想的研究.

## 6.4.4 素谱

环  $R$  的素理想构成的集合, 称为素谱 (spectrum), 记为  $\text{Spec } R$ . 我们将要分三个阶段来理解它:

1. 作为集合: 素谱  $\text{Spec}(K[x])$  是环  $K[x]$  的素理想构成的集合
2. 作为拓扑空间
3. 作为结构层

完成这几个阶段后就得到了仿射概形, 也就是概形的局部模型. 先考虑素谱上的拓扑. 对于任意的理想  $\mathfrak{s} \in \text{Ideal}(K[x])$ , 包含它的素理想的集合记为:

$$\begin{aligned} V : \text{Ideal}(K[x]) &\rightarrow \text{Spec } K[x] \\ \mathfrak{s} &\mapsto V(\mathfrak{s}) = \{\mathfrak{a} \in \text{Spec } K[x] \mid \mathfrak{a} \supset \mathfrak{s}\} \end{aligned} \tag{6.7}$$

其补集记为  $\bar{V}(\mathfrak{s}) = \text{Spec } K[x] \setminus V(\mathfrak{s})$ , [Atiyah1969] 给出了素谱上的 **Zariski 拓扑**:

### 定义 6.4.2. The prime spectrum of a ring

Let  $A$  be a ring and let  $X$  be the set of all prime ideals of  $A$ . For each subset  $E$  of  $A$ , let  $V(E)$  denote the set of all prime ideals of  $A$  which contain  $E$ . Prove that

- i) if  $\mathfrak{a}$  is the ideal generated by  $E$ , then  $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$ .
- ii)  $V(0) = X, V(1) = \emptyset$ .
- iii) if  $(E_i)_{i \in I}$  is any family of subsets of  $A$ , then

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$

- iv)  $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$  for any ideals  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  of  $A$ .

These results show that the sets  $V(E)$  satisfy the axioms for closed sets in a topological space. The resulting topology is called the **Zariski topology**. The topological space  $X$  is called **the prime spectrum of  $A$** , and is written  $\text{Spec}(A)$ .

类似(6.4), 素谱上的 Zariski 拓扑的诱导可以写作

$$\begin{aligned} V : \text{Ideal}(K[x]) &\rightarrow \overline{\text{Top}}(\text{Spec } K[x]) \\ \mathfrak{s} &\mapsto V(\mathfrak{s}) \end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.4)和(6.8)告诉我们, 多项式环  $K[x]$  中的理想  $\mathfrak{s}$ , 对应着  $K^n$  上的闭集  $Z(\mathfrak{s})$  和素谱  $\text{Spec } K[x]$  上的闭集  $V(\mathfrak{s})$ , 这样就让素谱上的拓扑的几何意义可以明确地通过  $K^n$  上的拓扑体现出来.

## Sec 6.5 函数环

### 6.5.1 函数环的子环

集合范畴  $\mathbf{Top}$  中的态射  $f \in \text{Hom}(X, Y)$ , 若关注于(交换)域  $k$  则构成  $k$  值函数. 域  $k$  的交换性赋予  $h_k X$  逐点定义的交换环的结构, 即函数环, 记:

$$f \in C(X) = h_k X = \text{Hom}(X, k) \in \mathbf{CRng}$$

拓扑学讨论的是拓扑空间中的对象  $X \in \mathbf{Top}$  上的连续函数环  $C^0(X)$ . 微分几何讨论的是可微流形上的可微函数环  $C^1(X)$  或光滑函数环  $C^\infty(X)$ . 尽管如此, 仍然不方便讨论因式分解的问题, 而多项式环  $k[x]$  则十分方便讨论这些代数问题, 故有讨论范围的逐步精细化:

$$k[x] \subset C^\infty(X) \subset \cdots \subset C^1(X) \subset C^0(X) \subset C(X) = h_k X \quad (6.9)$$

以上出现的各项都是交换环, 可见函数环在交换代数的地位. 虽然以上给出了嵌套的子环序列, 但环和子环之间缺少联系. 譬如可微函数  $f \in C^1(X)$  和连续函数  $g \in C^0(X)$  之间的乘法  $fg$  并非可以保证可微, 作为子环的  $C^1(X)$  缺少和  $C^0(X)$  的有力联系.

### 6.5.2 理想

在交换代数中, 理想远比子环重要, 函数环可以自然的发展出理想的概念. 令  $R \in \mathbf{CRng}$  为(6.9)中任何一种函数环, 以下插图来自  $B$  站 [概形的灵感]. 以  $X = \mathbb{R}$  为例随意取了一些函数: 在函数乘法  $(R, \cdot, 1)$  下构成交换么半群 (monoid). 这个 monoid 不能保证乘法逆元存在的根源

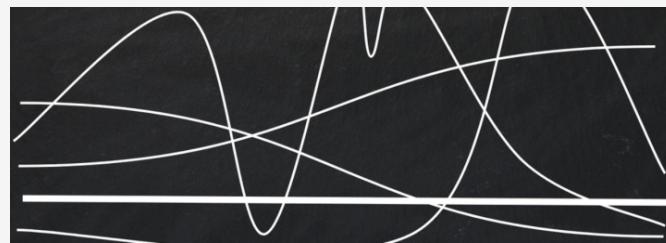


图 6.3: 函数环上的函数

之一在于存在零点: 给定零点  $a \in X$ , 解集包含它的函数集记为:

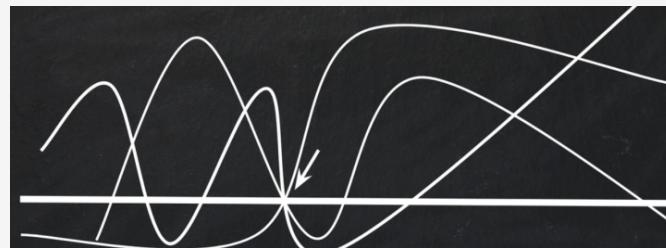


图 6.4: 函数环上的函数局部图

$$I(a) = \{f \in R \mid f(a) = 0\} \quad (6.10)$$

显然它在函数加法下构成 Abel 群, 并且对于  $\forall f \in R$  以乘法作用于  $I(a)$  中的函数, 得到的函数仍然以  $a$  为零点, 于是  $f \cdot I(a) = I(a) \cdot f \subseteq I(a)$ , 即  $I(a) \in \text{Ideal } R$  为函数环中的理想, 它通过函数乘法吸收了环  $R$  中的成员. 从商环  $R/I$  上看, 两个函数  $f_1, f_2 \in R$  在  $a$  处相等即有

$$(f_1 - f_2)(a) = 0 \Leftrightarrow f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 + I = f_2 + I$$

在多项式环中这种构造就是坐标环, 它把函数限定在一个集合上的相等归纳为等价.

### 6.5.3 素理想

考虑两个函数  $f, g \in R$  在零点上的性质, 若  $f \cdot g \in I(a)$  即  $f(a) \cdot g(a) = 0$ , 那么必有  $f(a) = 0$  或者  $g(a) = 0$ . 于是(6.10)中定义的理想是素理想, 从点到素理想的诱导过程为:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \text{Spec } R \\ a &\mapsto I(a) = \{f \in R \mid f(a) = 0\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

于是  $X$  上的点被赋予了素理想的结构. 对于多于一个零点的情况, 譬如  $a, b \in X$  类似可以考虑

$$I(a, b) = \{f \in R \mid f(a) = 0, f(b) = 0\}$$

这个集合仍然构成理想. 若有两个函数  $f, g \in R$  使得:

- $f(a) = 0, f(b) \neq 0$  于是  $f \notin I(a, b)$ ,
- $g(a) \neq 0, g(b) = 0$  于是  $g \notin I(a, b)$ .

那么  $(fg)(a) = (fg)(b) = 0$  即  $fg \in I(a, b)$ , 于是  $I(a, b)$  不是素理想. 这就说明了仿射空间上的单个点和素理想的联系的意义所在.

### 6.5.4 局部环

将上述讨论限制在可微流形  $X$  上, 构造可微函数环层  $\mathcal{O}_X$  [MP129]. 在点  $p \in X$  上则是函数芽的茎  $\mathcal{O}_p$ . 对于有零点的函数  $f \in \mathcal{O}_X$ , 限制在开集  $U \in \text{Top}(X)$  的  $f|_U \in \mathcal{O}_U$  可能是没有零点的. 通过限制让有多个零点的函数限制在开集上只有一个零点, 构成素理想. 拓扑空间中的包含关系, 通过层构成环的局部化 (localization). 在  $p$  点退化的函数芽的集合记为  $\mathfrak{m}_p$ , 显然它是一个



图 6.5: 函数环的局部化

理想, 而且它是一个极大理想, 只有一个极大素理想的环叫做局部环 (local ring), 于是  $\mathcal{O}_p$  是局部

环. 函数芽是函数的局部化, 作为一个交换环  $\mathcal{O}_p \in \mathbf{CRng}$ , 它在环乘法下构成 monoid, 如前述这个 monoid 不能保证乘法逆元存在的原因之一在于存在零点, 然而通常而言即使不存在零点, 也不能保证函数可逆. 和前面的讨论不同, 现在函数芽已经被局部化, 且对于可微函数而言局部化意味着线性化——微分学的基本思想. 因此, 函数芽  $f \in \mathcal{O}_p$  可逆 iff.  $f(p) \neq 0$ , 这样有了逆  $1/f(x)$ . 进一步在  $p$  点非退化的函数芽的集合  $\mathcal{O}_p \setminus \mathfrak{m}_p$ , 在函数环的乘法下封闭, 于是我们构造了一个交换的局部环, 且  $\mathfrak{m}_p$  是  $\mathcal{O}_p$  中唯一的极大理想. 在实数取值的茎有满态射  $\pi : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$ , 且极大理想  $\mathfrak{m}_p \rightarrow \mathcal{O}_p$  是嵌入, 故有短正合序列:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_p \longrightarrow \mathcal{O}_p \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

于是有同构:

$$\mathcal{O}_p / \mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$$

构成了剩余域 (residue field). 这里的关键是自然投射  $\pi$ , 它把具有相同余切向量的函数芽等价到一个等价类中. 我们可以把函数在固定点  $p$  的取值理解为环对极大理想  $\mathfrak{m}_p$  的模, 这是流形和概形共同的代数基础——局部赋环空间 (locally ringed space).

## Sec 6.6 Hilbert 零点定理

### 6.6.1 退化集

多项式环的子集  $S \subset k[x]$  为多项式集, 其生成的理想记为  $J = (S)$ , 二者具有相同的代数集

$$Z(J) = \{a \in A_k^n \mid \forall f \in J \Rightarrow f(a) = 0\} = Z(S) \quad (6.12)$$

方便起见后面用理想  $J$  代替集合  $S$ . 仿射空间的点  $a \in A_k^n$  对应着素谱中的点 (素理想):

$$\mathfrak{p}_a = I(a) = \{f \in k[x] \mid f(a) = 0\} \in \text{Spec } k[x] \quad (6.13)$$

素理想  $\mathfrak{p}_a$  由在  $a$  退化的多项式构成, 考虑多项式  $f \in k[x]$  到商环  $k[x]/\mathfrak{p}_a$  的投射:

$$f \mapsto f + \mathfrak{p}_a$$

环元  $f$  在  $a$  退化相当于它处于素理想中  $f \in \mathfrak{p}_a \in \text{Spec } k[x]$ , 则  $f + \mathfrak{p}_a = 0$ . 于是  $f$  也可以视为在素谱上的函数,  $f(a) = 0$  在仿射空间的点  $a \in A_k^n$  上退化, 也可视为  $f$  在  $\mathfrak{p}_a$  退化  $f(\mathfrak{p}_a) = 0$ . 通过上述操作, 定义在仿射空间  $A_k^n$  中的多项式转变为定义在素谱  $\text{Spec } k[x]$  上的函数. 多项式生成的理想  $J$  确定了仿射空间的退化集  $Z(J)$  即代数集 (1), 现在则转为讨论素谱上的退化集 (**vanishing set**):

$$V(J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } k[x] \mid \forall f \in J \Rightarrow f(\mathfrak{p}) = 0\} \quad (6.14)$$

这种思想适用于一般的交换环, 环元  $f$  包含于素理想  $\mathfrak{p}$  相当于环元作为方程在素谱上退化  $f(\mathfrak{p}) = 0$ .

### 例题 6.6.1. from [Vakil2017] 3.2.1

The set  $\text{Spec } A$  is the set of prime ideals of  $A$ . The prime ideal  $\mathfrak{p}$  of  $A$  when considered as an element of  $\text{Spec } A$  will be denoted  $[\mathfrak{p}]$ , to avoid confusion. Elements  $a \in A$  will be called functions on  $\text{Spec } A$ , and their value at the point  $[\mathfrak{p}]$  will be  $a \pmod{\mathfrak{p}}$ . This is weird: a function can take values in different rings at different points - the function 5 on  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  takes the value 1 (mod 2) at (6.13) and 2 (mod 3) at (6.14).

"An element  $a$  of the ring lying in a prime ideal  $\mathfrak{p}$ " translates to "a function  $a$  that is 0 at the point  $[\mathfrak{p}]$ " or "a function  $a$  vanishing at the point  $[\mathfrak{p}]$ ", and we will use these phrases interchangeably. Notice that if you add or multiply two functions, you add or multiply their values at all points; this is a translation of the fact that  $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$  is a ring morphism. These translations are important - make sure you are very comfortable with them! They should become second nature.

对于  $\forall f \in J$ , 它在代数集  $Z(J)$  上退化, 故  $\forall a \in Z(J) : f \in I(a)$ , 即代数集中任意点  $a \in Z(J)$  对应的素谱  $\mathfrak{p}_a = I(a)$  都包含了  $J$ :

$$J \subseteq \mathfrak{p}_a = I(a) \quad (6.15)$$

包含  $J$  的素理想集合记为

$$V(J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } k[x] \mid \mathfrak{p} \supseteq J\} \quad (6.16)$$

它是等价于(6.14)的退化集的定义. 从以上的讨论可见, 代数集  $Z(J)$  和退化集  $V(J)$  是一体两面.

## 6.6.2 根理想

交换环  $R$  中的幂零 (nilpotent) 元  $r \in R$ , 满足  $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : r^n = 0$ . 幂零元的集合  $\mathfrak{N}_R$  称为昊零根 (nilradical), 显然它构成理想. 每个幂零元都被任意素理想所包含, 幂零根是素理想的交

$$\mathfrak{N}_R = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \mathfrak{p}$$

幂零根和根理想有密切的关系. 根理想 (radical) 可以视为理想的放大:

$$J \subset \sqrt{J} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ : r^n \in J\} \quad (6.17)$$

它相当于对理想中的元素求了所有的根. 对理想做商环  $\pi : R \rightarrow R/J$ , 商环的幂零根的原像即为根理想:

$$\pi(\sqrt{J}) = \mathfrak{N}_{R/J}$$

并且, 根理想是包含  $J$  的素理想的交

$$\sqrt{J} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \\ J \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$$

### 6.6.3 Hilbert 零点定理

代数集  $Y$  上退化的多项式构成理想

$$I(Y) = \{f \in k[x] \mid \forall a \in Y : f(a) = 0\}$$

即  $I(Y)$  是解集包含  $Y$  的多项式的集合. 根据 (1) 有:

$$I(Y) = \{f \in k[x] \mid Y \subset Z((f)) = Z(f)\}$$

现在考虑复合映射  $J \mapsto I(Z(J))$ . 即多项式集合生成的理想  $J$ , 得到代数集  $Z(J)$ , 再得到的多项式环中的理想  $I(Z(J))$ . (6.15)指出, 任意零点  $a \in Z(J)$  对应的素理想  $\mathfrak{p}_a$  包含理想  $J$ . 实际上

$$J \subset I(Z(J))$$

这种对  $J$  的放大, 联系到(6.17)中根理想的放大, 有 **Hilbert 零点定理 (Hilbert's Nullstellensatz)**:

$$\sqrt{J} = I(Z(J)) \tag{6.18}$$

## Sec 6.7 概形

### 记号

- $A \in \mathbf{CRng}$  交换环/交换环范畴中的对象; 常用代数封闭域  $k$  上的多项式环  $A = k[x]$
- $f \in A$  环元; 多项式环中为多项式
- $X = \text{Spec } A$  素谱; 用  $X$  往往暗示了 Zariski 拓扑及概形
- $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  素理想/素谱中的点;
- $A_{\mathfrak{p}} = (A - \mathfrak{p})^{-1} A$  素理想意味着退化 (vanishing), 素理想之外的元构造乘法子集, 诱导出的局部环
- $A_f = \{f^n\}^{-1} A$  环元的幂构造乘法子集, 诱导出的局部环
- $U = D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$  由环元  $f$  诱导的开集, 常作为 distinguished open set 或 principal open set
- $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(D(f)) = A_f$  开集上的函数环, 由结构层函子得到
- $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$  结构层

### 6.7.1 局部化

整数环去掉零构成乘法系统  $S = \mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z} - \{0\}$ , 在  $\mathbb{Z} \times S$  中构造有理数  $\mathbb{Q} = \{a/s\} = \{(a, s)\}/\sim$  的过程, 可以推广到一般的交换环  $A \in \mathbf{CRng}$  及其乘法系统:

$$S^{-1}A = \{a/s\} = \{(a, s)\}/\sim$$

等价关系定义为:

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists s'' \in S : s''(s'a - sa') = 0 \iff a/s = a'/s'$$

给定素理想  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , 考虑到商环的自然投射:

$$A \rightarrow A/\mathfrak{p}$$

$$f \mapsto f + \mathfrak{p}$$

$A - \mathfrak{p}$  中的环元在商环中非退化, 它局部化为  $A_{\mathfrak{p}} = (A - \mathfrak{p})^{-1}A$ , 同态嵌入如下:

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$$

$$h \mapsto \varphi_{\mathfrak{p}}(h) = (h, 1)$$

任意  $g \in A - \mathfrak{p}$  都不在素理想中, 即在局部环中可逆. 环元  $f \in A$  的幂构造乘法子集, 形成的局部环记为

$$A_f = \{f^n\}^{-1}A$$

注意  $f^n \mapsto f^n + \mathfrak{p}$ , 当  $f$  是幂零元时, 局部环退化.

## 6.7.2 预层

考虑多项式环  $A = k[x]$  中的一组多项式构成的理想  $J$ , 仿射空间中的代数集  $Z(J)$  对应了素谱中的退化集 [MP139]:

$$V(J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \forall f \in J \Rightarrow f(\mathfrak{p}) = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{p} \supset J\}$$

是 Zariski 拓扑的闭集. 反过来环元可以诱导出开集 (distinguished open set 或 principal open set):

$$U_f = D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

它是函数非退化素理想的集合, 构成 Zariski 拓扑的基. 这样, 在其上构造的数学结构可以用于构造任意开集, 从而得到一个预层. 考虑 Zariski 拓扑  $X = \text{Spec } A$  上的交换环层:

$$\mathcal{O} : \text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \text{CRng}$$

$$X \mapsto \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}$$

环元  $f \in A$  的幂构造乘法子集, 而  $f$  诱导出的开集对应为交换环, 它和局部环同构:

$$\mathcal{O}_X(U_f) = \mathcal{O}_X(D(f)) \simeq A_f = \{f^n\}^{-1}A$$

## 6.7.3 概形

对于素谱我们分三个阶段来理解它:

- 作为集合: 素谱  $\text{Spec } A$  是环  $A$  的素理想构成的集合
- 作为拓扑空间: 素谱中的退化集  $V(J)$  作为闭集构造了 Zariski 拓扑
- 作为结构层: 素谱上赋予正规函数层

完成这几个阶段后就得到了仿射概形，也就是概形的局部模型。以下为 [Shafarevich] 的阐述：

- 拓扑空间
- 赋环空间
- Zariski 拓扑使得任何素谱构成赋环空间
- 局部同构于素谱构成概形

#### 定义 6.7.3. Definition 5.1

A ringed space is a pair  $X, \mathcal{O}$  consisting of a topological space  $X$  and a sheaf of rings  $\mathcal{O}$ . The sheaf  $\mathcal{O}$  is sometimes denoted by  $\mathcal{O}_X$ , and is called the structure sheaf of  $X$ .

#### 例题 6.7.2. Example 5.15

Any topological space  $X$  is a ringed space if we take  $\mathcal{O}_X$  to be the sheaf of continuous functions.

Any continuous map  $\varphi : X \rightarrow Y$  defines a morphism if we set  $\psi_U(f) = \varphi^*(f)$  for  $f \in \mathcal{O}_Y(U)$

#### 例题 6.7.3. Example 5.16

Any differentiable manifold is a ringed space if we take  $\mathcal{O}_X$  to be the sheaf of differentiable functions. Any differentiable map defines a morphism in the same way as in Example 5.15 .

#### 例题 6.7.4. Example 5.17

Any ring  $A$  defines a ringed space  $\text{Spec } A, \mathcal{O}_A$  where  $\mathcal{O}_A$  is the structure sheaf constructed in Section 2.2.

#### 定义 6.7.4. Definition 5.4

A scheme is a ringed space  $X, \mathcal{O}_X$  for which every point has a neighbourhood  $U$  such that the ringed space  $U, \mathcal{O}_{X|U}$  is isomorphic to  $\text{Spec } A$ , where  $A$  is some ring.

以下为 [Hartshorne] 的阐述：

1. 环的素谱上可以局部化
2. 局部赋环空间
3. 同构于素谱的局部赋环空间构成仿射概形
4. 局部为仿射概形的局部赋环空间构成概形

### 命题 6.7.2. Proposition 2.2

Let  $A$  be a ring, and  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  its spectrum. (a) For any  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , the stalk  $\mathcal{O}_p$  of the sheaf  $\mathcal{O}$  is isomorphic to the local ring  $A_{\mathfrak{p}}$ . (b) For any element  $f \in A$ , the ring  $\mathcal{O}(D(f))$  is isomorphic to the localized ring  $A_f$ . (c) In particular,  $\Gamma(\text{Spec } A, \mathcal{O}) \cong A$ .

### 定义 6.7.5.

A ringed space is a pair  $(X, \mathcal{O}_X)$  consisting of a topological space  $X$  and a sheaf of rings  $\mathcal{O}_X$  on  $X$ . A morphism of ringed spaces from  $(X, \mathcal{O}_X)$  to  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  is a pair  $(f, f^\#)$  of a continuous map  $f : X \rightarrow Y$  and a map  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  of sheaves of rings on  $Y$ . The ringed space  $(X, \mathcal{O}_X)$  is a locally ringed space if for each point  $P \in X$ , the stalk  $\mathcal{O}_{X,P}$  is a local ring.

### 命题 6.7.3. Proposition 2.3

(a) If  $A$  is a ring, then  $(\text{Spec } A, \mathcal{O})$  is a locally ringed space.

### 定义 6.7.6.

An affine scheme is a locally ringed space  $(X, \mathcal{O}_X)$  which is iso-morphic (as a locally ringed space) to the spectrum of some ring. A scheme is a locally ringed space  $(X, \mathcal{O}_X)$  in which every point has an open neighborhood  $U$  such that the topological space  $U$ , together with the restricted sheaf  $\mathcal{O}_X|_U$ , is an affine scheme. We call  $X$  the underlying topological space of the scheme  $(X, \mathcal{O}_X)$ , and  $\mathcal{O}_X$  its structure sheaf.



## 参考文献

- [1] HARTSHORNE R. Algebraic geometry: vol. 52[M]. Springer Science, 2013.
- [2] LANG S. Algebra: vol. 211[M]. Springer Science, 2012.
- [3] 吴大任. 微分几何讲义[M]. 微分几何讲义, 1979.



# 索引

微分形式, 8

陈省身微分几何讲义, 3

流形的基本概念, 3



# Preperation For The Final Test

本书是复分析学的结课期考复习资料总结, 主要包括了考试的证明题型以及各类的识记知识点, 如黎曼映射定理、广义 Schwarz 引理等等. 本书由本人期末写成, 仅用于复习.



Springer

Yann Sainty and Marcel Drechsler

ISBN 978-80-7340-097-2



9 788073 400972