NAG AND NDG SERIES

Note For Algebraic Geometry And Note For Differential Geometry Series

NOTE FOR ALGEBRAIC GEOMETRY AND DIFFERENTIAL GEOMETRY VOL. 1

代数几何与微分几何笔记 第一卷

Editors Weijun Lu

Shilong Lu

HIGHER EDUCATION PRESS

目录

插图

1

Manifolds 流形

序　　言

微分流形的概念入门

内容概要

Manifolds 流形

1.1 形式与函数芽

1.1.1 微分形式

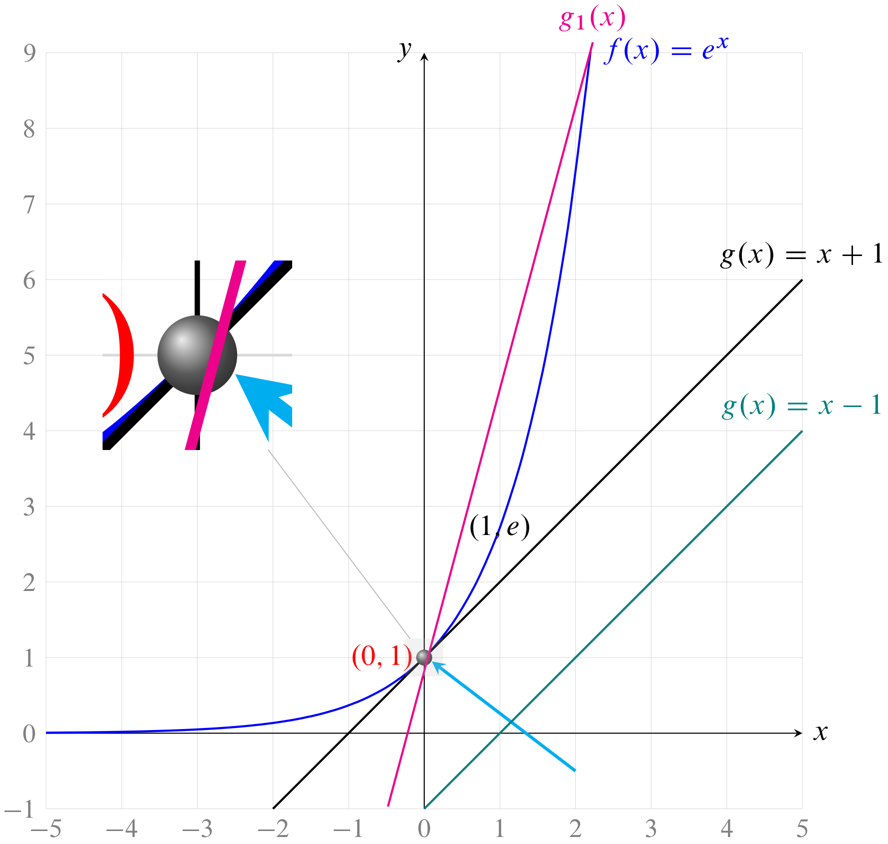

图 1.1: 微分形式解说

在 $(0,1)$ 附近, 两函数靠得很近, 而在 $(0,1)$ 该点上, 两函数的变化完全一样, 或者说**二者在该点的局部具有相似性**! 而在实数的整体上,f 和 g 是完全不同的. 但是这里的函数 f 和 g 有着同样的微分形式, 因为局部放大图中看到, 它们在 $(0,1)$ 的附近几乎无法区分.

形象地说, 假如在 $(0,1)$ 上放置一个人, 不管他踩在哪一条曲线上, 他都感觉是站在 $45°$ 的斜坡上. 而如果向下平移函数 g, 如图中青色直线所示, 依然不会改变 g 在点 $(0,1)$ 的斜率, 感觉一模一样, 所以微分形式不变. 不过, 如果我们旋转函数 g 的图像, 如图中粉色直线所示, 则在点 $(0,1)$ 的坡度就变陡峭了, 这时斜率发生了变化, 我们放置在该点处的人可能就站不稳了, 那么新函数 $g_1(x)$ 在 $(0,1)$ 点的微分形式发生了变化. 其根本原因在于局部的导数值发生了变化. 至此, 我们对微分形式有了一个大致的感觉: 与**导数**相关. 接下来说明如何定义微分形式.

$$\begin{array}{c}\text{实数域上的一元光滑函数}\\ \downarrow \\ \text{一元光滑函数芽}\\ \downarrow \\ \text{一元函数的 1–形式}\end{array}$$

现在只看微分形式中的 1–形式, 分三步理解. 首先, 光滑实值函数在任意一点处都有无穷阶连续导函数. 在这里, 我们只考虑定义域为全体实数的函数. 如一次函数, 二次函数, 指数函数等等, 都是定义在

全体实数上的一元光滑函数. 不过光滑函数依然是一个整体的概念. 微分形式是局部的观点, 因此我们要想办法看一点的附近. 遵循着这种局部化的思想, 就有了" 芽" 这一充满了局部风格的概念.

芽的思想, 本质上是根据函数在一点附近的局部表现, 对这些函数进行分类, 即所谓的等价关系

定义 1.1.1 (芽). 芽是定义在拓扑空间上函数集合的一种等价关系. 定义在拓扑空间上的两个函数 f 和 g, 在点 x 处属于同一支芽, 当且仅当存在一个开集 S, 使得 S 包含点 x, 且在 S 上 f 和 g 的函数值处处相等.

这里的拓扑空间可以选择实数集, 开集就是开区间之并, 而点 x 就是定义函数芽和微分形式的地方.

1.1.2 向量空间与对偶空间

- 引子: 光滑运动
- 向量与方向导数
- 向量与 1–形式
- 向量空间与对偶空间的形式化定义
- 对偶空间的对偶

在光滑曲线所处的三维空间定义一光滑的多元 (此处为三元) 函数 f, 这里 f 是三元实值函数, 而曲线函数就是将某个实数区间 I 里的数**映射为**曲线上的点. 而如此复合后的函数就是一个一元实值函数 g. 它们之间的关系如下交换图所示:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "g=f\circ\gamma"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

现设

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

, 并引入表达式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^i\cdot\vec{e}_{x_j} &= \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases} && (f \text{ 沿 } x^i \text{ 轴对 } \vec{e}_{x_j} \text{ 方向的导数}) \\ \mathrm{d}f &= \tfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}\vec{x} + \tfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}\vec{y} + \tfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}\vec{z}. && (f \text{ 的 1–形式坐标表示}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

, 此复合函数的导数是关于坐标分量的表达式, 叫沿光滑曲线的方向导数. 将其带入运算得

$$\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z\right)$$

1–形式定义为光滑函数芽的等价类, 与坐标系无关. 从而由于 1–形式与方向导数均独立于任何人为的坐标系, 故切矢的定义也与坐标系无关. 其中切矢即 $\gamma(t)$,1–形式指的是 $\mathrm{d}f$.

1.2 向量空间与对偶空间

定义 1.2.1 (向量空间). *[def: 向量空间]* 域 F 上的向量空间 V 是一个**集合**, 在其上定义了两种运算:

1. 向量加法: $V \times V \to V$, 把 V 中的两个元素 u 和 v 映射到 V 中另一个元素, 记作 $u+v$;
2. 标量乘法: $F \times V \to V$, 把 F 中的一个元素 a 和 V 中的一个元素 u 变为 V 中的另一个元素, 记作 $a \cdot u$.

并且向量空间还需在上述两种运算基础上满足以下性质:

1. 向量加法

   结合律: $u+(v+w)=(u+v)+w$,

   交换律: $u+v=v+u$,

   向量加法单位元: 在 V 中存在一个叫做"零向量"的元素, 记作 $\mathbf{0}$, 使得对于 V 中的任意的向量 u, 都有 $u+0=u$,

   向量加法逆元: 对 V 中的任意向量 u, 都存在 $v \in V$, 使得 $u+v=\mathbf{0}$, 并称向量 v 为向量 u 在 V 中的逆元,

2. 标量乘法

   a) 标量乘法对向量加法满足分配律: $a \cdot (v+w) = a \cdot v + a \cdot w$,
   b) 标量乘法对域的加法满足分配律: $(a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$,
   c) 标量乘法对标量域的乘法相容: $(ab)u = a(bu)$,
   d) 标量乘法有单位元: 域 F 的乘法单位元"1"满足: 对任意的 $v \in V$, 都有 $1 \cdot v = v$.

索引

微分形式, 8