Programtervező informatikus I. évfolyam

Analízis 1

2012-2013. tanév, 2. félév

(az alábbi anyag csupán az előadásokon készített jegyzetek mellékletéül szolgál)

1.3.1. Tétel (*Archimedes*). *Tetszőleges* $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$ *valós számokhoz létezik olyan* $n \in \mathbf{N}$ *természetes szám, hogy* $nx > y$.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen, a tételben említett x és y esetén bármely $n \in \mathbf{N}$ mellett $nx \le y$. Ez más szóval azt jelenti, hogy az

$$A := \{nx \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\}$$

halmaz felülről korlátos. Legyen $\alpha := \sup A$. A $\sup A$ definíciója szerint van olyan $a \in A$, hogy $a > \alpha - x$. Az A halmaz értelmezése alapján viszont alkalmas $n \in \mathbf{N}$ természetes számmal $a = nx$, ezért

$$nx > \alpha - x \iff nx + x = (n+1)x > \alpha.$$

Ugyanakkor $n+1 \in \mathbf{N}$, így $(n+1)x \in A$. Lenne tehát az A halmaznak olyan eleme, ami $\sup A$-nál nagyobb. Ez azonban (ismét csak) a $\sup A$ definíciója szerint nem lehet. ■

Megjegyzések.

i) Alkalmazzuk az Archimedes-tételt az $x = 1$ választással, amikor is a következőt kapjuk: bármely $y \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén
$$n1 = n > y.$$
Más szóval ez azt jelenti, hogy a természetes számok halmaza felülről nem korlátos. Analóg módon kapjuk ugyanezt $\mathbf{Z}$-re is, ill. azt, hogy $\mathbf{Z}$ alulról sem korlátos. Tekintettel arra, hogy $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, így mindez $\mathbf{Q}$-ra és $\mathbf{R}$-re is igaz.

ii) Bizonyítsuk be, hogy bármely nyílt (a, b) intervallum tartalmaz racionális számot:
$$(a, b) \cap \mathbf{Q} \ne \emptyset.$$
Valóban, ha $a \ge 0$, akkor az Archimedes-tétel miatt alkalmas $\mathbf{N} \ni n$-nel $n(b - a) > 1$, amiből $n \ne 0$ és $1/n < b - a$ következik. Ezért újra az Archimedes-tételt alkalmazva kapunk olyan $m \in \mathbf{N}$ természetes számot, amellyel $m/n > a$. Mivel $a \ge 0$, ezért $m > 0$. Legyen p az előbbi tulajdonságú m számok között a legkisebb. (Az axiómákól levezethetően a természetes számok bármely $\emptyset \ne \mathcal{N} \subset \mathbf{N}$ részhalmazának van minimuma.) Tehát $(p - 1)/n \le a$, azaz
$$\frac{p-1}{n} + \frac{1}{n} \le a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b,$$
így $a < p/n < b$.

Ha $a < 0 < b$, akkor $0 \in \mathbf{Q}$ miatt az állításunk nyilvánvaló.

Legyen végül $b \le 0$. Ekkor $0 \le -b < -a$, azaz az első eset alapján valamilyen $r \in \mathbf{Q}$ racionális számmal $-b < r < -a$, amiből viszont $a < -r < b$ következik. Mivel $-r \in \mathbf{Q}$, ezért mindez a bizonyításunk végét jelenti.

iii) Az előző megjegyzést „iterálva” könnyen adódik már, hogy bármely $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ végpontokkal az (a, b) nyílt intervallum végtelen sok racionális számot tartalmaz.

1.3.2. Tétel (*Dedekind*). *Tegyük fel, hogy az* $\emptyset \neq A, B \subset \mathbf{R}$ *halmazokra az alábbiak teljesülnek: minden* $a \in A$ *és minden* $b \in B$ *elemre* $a \leq b$. *Ekkor valamilyen* $\gamma \in \mathbf{R}$ *valós számmal* $a \leq \gamma \leq b$ $(a \in A, b \in B)$.

Bizonyítás. Legyen ui.

$$\mathcal{K} := \{K \in \mathbf{R} : a \leq K\},$$

ekkor a feltételeink szerint $B \subset \mathcal{K}$, azaz A felülről korlátos. Ha tehát $\gamma := \sup A$, akkor $a \leq \gamma \ \ (a \in A)$ és $\gamma \leq K \ \ (K \in \mathcal{K})$. Speciálisan bármely $b \in B$ elemre is $\gamma \leq b$. ■

Megjegyzés. Beláttuk tehát, hogy a felülről korlátos halmazok felső határának a létezését feltételező **D)** axióma maga után vonja a Dedekind-tételt. Lássuk be, hogy ez fordítva is igaz:

$$\text{Dedekind-tétel} \implies \text{szuprémum létezése.}$$

Ha ui. az $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ halmaz felülről korlátos, akkor legyen

$$B := \{K \in \mathbf{R} : a \leq K \ \ (a \in A)\}.$$

Ekkor minden $a \in A$, $b \in B$ esetén $a \leq b$. Ezért (feltételezve a Dedekind-tétel állítását) van olyan $\alpha \in \mathbf{R}$, hogy

$$a \leq \alpha \leq b \qquad (a \in A,\, b \in B).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy α felső korlátja A-nak és ugyanakkor az A bármely felső korlátjánál kisebb vagy egyenlő. Más szóval $\alpha = \min B = \sup A$.

1.3.3. Tétel (*Cantor*). *Minden* $n \in \mathbf{N}$ *természetes szám esetén legyenek adottak az* $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, $a_n \leq b_n$ *végpontok és tegyük fel, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \ \ (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq a_{n+s} \qquad (n, s \in \mathbf{N}).$$

Ezt ui. $s = 0$ esetén nyilvánvalp, $s = 1$-re pedig a feltételeinkben szereplő $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ tartalmazás triviális következménye. Ha $n \in \mathbf{N}$ és $(*)$ valamilyen $s \in \mathbf{N}$ mellett teljesül, akkor (az előbb mondottakat is szem előtt tartva)

$$a_{n+s} \leq a_{(n+s)+1} = a_{n+(s+1)}$$

miatt $a_n \leq a_{n+(s+1)}$ is igaz. Ezzel (teljes indukcióval) $(*)$-ot beláttuk.

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$b_n \geq b_{n+s} \qquad (n, s \in \mathbf{N}).$$

Más szóval tehát minden $n, k \in \mathbf{N}$, $n \leq k$ mellett

$$(**) \qquad a_n \leq a_k, \ \text{ ill. } \ b_k \leq b_n.$$

Lássuk be mindezek alapján, hogy

$$a_j \leq b_l \qquad (j, l \in \mathbf{N}).$$

Valóban, ha itt $j \le l$, akkor ($(**)$, ill. a feltételeink szerint)

$$a_j \le a_l \le b_l.$$

Ha viszont $l < j$, akkor (ismét csak $(**)$, ill. a feltételeink szerint)

$$b_l \ge b_j \ge a_j.$$

Legyen most már

$$A := \{a_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\} \quad , \quad B := \{b_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\}.$$

Ekkor a fentiek szerint A felülről korlátos és a B halmaz minden eleme felső korlátja A-nak. Ha tehát

$$\alpha := \sup A,$$

akkor egyrészt $a_n \le \alpha \ (n \in \mathbf{N})$, másrészt $\alpha \le b_n \ (n \in \mathbf{N})$. Következésképpen $\alpha \in [a_n, b_n] \ (n \in \mathbf{N})$, azaz

$$\alpha \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n].$$

■

1.3.4. Tétel (*Bernoulli*). *Tetszőleges $h \in \mathbf{R}, h > -1$ valós szám és $n \in \mathbf{N}$ természetes szám esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$(1 + h)^n \ge 1 + nh.$$

Igaz továbbá, hogy az előbbi Bernoulli-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor áll fenn az $(1+h)^n = 1 + nh$ egyenlőség, ha $h = 0$, vagy $n = 0$, vagy $n = 1$.

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy igaz a szóban forgó egyenlőtlenég. Ezt teljes indukcióval tesszük: $n = 0$ esetén mind a két oldalon 1 áll, azaz az egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett igaz az $(1 + h)^n \ge 1 + nh$ becslés, akkor (kihasználva, hogy a feltételeink szerint $1 + h > 0$)

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \ge (1 + h)(1 + nh) =$$

$$1 + nh + h + nh^2 = 1 + (n + 1)h + nh^2 \ge 1 + (n + 1)h.$$

Ez azt jelenti, hogy a bebizonyítandó egyenlőtlenség $(n + 1)$-re is fennáll, ami a teljes indukció értelmében a Bernoulli-egyenlőtlenség teljesülését jelenti.

Ha $h = 0$, akkor $(1 + h)^n = 1 = 1 + nh \ (n \in \mathbf{N})$. Ha $n = 0$, akkor $(1 + h)^n = 1 = 1 + nh$. Ha pedig $n = 1$, akkor $(1 + h)^n = 1 + h = 1 + nh$. Más szóval az egyenlőségre vonatkozó kritériumaink elegendőek.

Fordítva, tegyük fel, hogy $h \ne 0$ és $n \in \mathbf{N}, n > 1$, azaz alkalmas $k \in \mathbf{N}$ természetes számmal $n = 2+k$. Mutassuk meg, hogy

$$(1 + h)^n = (1 + h)^{2+k} > 1 + (2 + k)h = 1 + nh \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $k = 0$, azaz $n = 2$, akkor

$$(1 + h)^n = (1 + h)^{2+k} = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h = 1 + nh.$$

Ha viszont valamilyen $k \in \mathbf{N}$ esetén $(1 + h)^{2+k} > 1 + (2 + k)h$, akkor

$$(1 + h)^{2+k+1} = (1 + h)(1 + h)^{2+k} > (1 + h)(1 + (2 + k)h) =$$

$$1 + (2 + k + 1)h + (2 + k)h^2 > 1 + (2 + k + 1)h.$$

A teljes indukcióra hivatkozva ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

1.3.5. Tétel (*számtani-mértani közép*). *Legyen* $n \in \mathbf{N}$ *és az* $a_0, ..., a_n \in \mathbf{R}$ *számokról tegyük fel, hogy valamennyien nem-negatívok:* $a_k \geq 0 \quad (k = 0, ..., n)$. *Ekkor*

$$(*) \qquad \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1}\right)^{n+1} \geq \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

Az itt szereplő egyenlőtlenségben akkor és csak akkor írható egyenlőség, ha az $a_k \quad (k = 0, ..., n)$ *számok mindannyian egyenlők:* $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás. A tételünkben említett *számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget* is teljes indukcióval fogjuk belátni. Az $n = 0$ esetben mindez a triviális $a_0 = a_0$ egyenlőségre redukálódik. Tegyük fel ezért, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén bármely $0 \leq a_k \in \mathbf{R} \ (k = 0, ..., n)$ választással fennáll az $(*)$ előbbi egyenlőtlenség és legyen $a_{n+1} \geq 0$ tetszőleges. Nyilván feltehető, hogy

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1},$$

hiszen ha a szóban forgó számokra ez nem teljesül, akkor így sorba rakva („átrendezve") őket a $(*)$ egyenlőtlenség mindkét oldala változatlan marad. Legyen

$$S_k := \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j}{k+1} \ , \ P_k := \prod_{j=0}^{k} a_j \qquad (k = 0, ..., n+1).$$

Vegyük észre, hogy

$$S_k = \frac{\sum_{j=0}^{k} a_j}{k+1} \leq \frac{\sum_{j=0}^{k} a_k}{k+1} = a_k \leq a_{n+1} \qquad (k = 0, ..., n+1).$$

Továbbá az *indukciós feltevésünk* úgy szól, hogy

$$S_n^{n+1} \geq P_n.$$

Ennek alapján azt kell megmutatnunk, hogy

$$S_{n+1}^{n+2} \geq P_{n+1}.$$

Világos, hogy

$$P_{n+1} = a_{n+1}P_n \leq a_{n+1}S_n^{n+1} = S_n^{n+2} + (a_{n+1} - S_n)S_n^{n+1} =$$

$$S_n^{n+2} + (n+2)\frac{a_{n+1} - S_n}{n+2}S_n^{n+1},$$

ahol a fentiek szerint $a_{n+1} - S_n \geq 0$. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$a := S_n \ , \ b := \frac{a_{n+1} - S_n}{n+2}.$$

Ekkor tehát $a, b \geq 0$ és

$$P_{n+1} = a^{n+2} + (n+2)a^{n+1}b.$$

Emlékeztetünk a binomiális tétel szerint fennálló egyenlőségre:

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} a^{n+2-j} b^j,$$

azaz $a, b \geq 0$ miatt

$$(a+b)^{n+2} = \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} a^{n+2-j} b^j \geq \binom{n+2}{0} a^{n+2} + \binom{n+2}{1} a^{n+1} b =$$

$$a^{n+2} + (n+2) a^{n+1} b.$$

Ezért

$$P_{n+1} \leq (a+b)^{n+2} = \left(S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+2} \right)^{n+2} = S_{n+1}^{n+2}.$$

Ezzel a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget beláttuk.

Ha valamilyen $\alpha \in \mathbf{R}$ számmal $a_0 = \cdots = a_n = \alpha$, akkor nyilván

$$P_n = \alpha^{n+1} = S_n^{n+1},$$

más szóval az „egyenlőséggel" kapcsolatban megfogalmazott feltételünk triviális módon elégséges. Lássuk be, hogy szükséges is. Ez azt jelenti, hogy ha a tételben szereplő $a_0, ..., a_n$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_n^{n+1} > P_n.$$

Nyilván ekkor csak $n \geq 1$ lehet, azaz valamilyen $k \in \mathbf{N}$ segítségével $n = k+1$. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha az $a_0, ..., a_{k+1}$ nem-negatív számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_{k+1}^{k+2} > P_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Most is teljes indukcióval dolgozunk. Ha itt $k = 0$, azaz $(0 \leq) \, a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ és $a_0 \neq a_1$, akkor azt kell ellenőrizni, hogy

$$S_1^2 = \left(\frac{a_0 + a_1}{2} \right)^2 = \frac{a_0^2 + 2a_0 a_1 + a_1^2}{4} > a_0 a_1 = P_1.$$

Ez (átrendezés után) azzal ekvivalens, hogy

$$a_0^2 - 2a_0 a_1 + a_1^2 = (a_0 - a_1)^2 > 0,$$

ami az $a_0 \neq a_1$ feltételezés (tehát $a_0 - a_1 \neq 0$) miatt igaz. Ha valamilyen $k \in \mathbf{N}$ mellett az

$$S_{k+1}^{k+2} > P_{k+1}$$

egyenlőtlenség fennáll minden olyan $(0 \leq) \, a_0, ..., a_{k+1} \in \mathbf{R}$ választás mellett, amikor az $a_0, ..., a_{k+1}$ számok nem mind egyenlők, akkor ugyanezt kell bebizonyítanunk k helyett $(k+1)$-re: ha az $a_0, ..., a_{k+2}$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$S_{k+2}^{k+3} > P_{k+2}.$$

Ehhez ismét feltehetjük, hogy $(0 \leq) \, a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{k+2}$. Mivel az itt szereplő számok nem mind egyenlők, ezért $a_{k+2} > 0$. Legyen most (ld. fent)

$$a := S_{k+1} \quad , \quad b := \frac{a_{k+2} - S_{k+1}}{k+3}.$$

Ekkor (ld. a binomiális tételre alapulóan fent már követett módszert)

$$P_{k+2} = a_{k+2} P_{k+1} < a_{k+2} S_{k+1}^{k+2} = S_{k+1}^{k+3} + (a_{k+2} - S_{k+1}) S_{k+1}^{k+2} =$$

$$S_{k+1}^{k+3} + (k+3) \frac{a_{k+2} - S_{k+1}}{k+3} S_{k+1}^{k+2} \leq (a+b)^{k+3} = S_{k+2}^{k+3},$$

következésképpen $S_{k+2}^{k+3} > P_{k+2}$. ■

3.3.1. Tétel. *Bármely* $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *számsorozatnak van monoton részsorozata, azaz létezik olyan* ν *indexsorozat, amellyel* $x \circ \nu$ *monoton növő (vagy monoton fogyó).*

Bizonyítás. Az állításunk igazolásához vezessük be a szóban forgó x sorozat csúcsának a fogalmát. Nevezetesen, valamely $n \in \mathbf{N}$ mellett x_n az x sorozat *csúcsa,* ha

$$x_n \geq x_k \qquad (k \in \mathbf{N}, k \geq n).$$

Két eset lehetséges. Először tételezzük fel, hogy végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén x_n csúcs. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas ν indexsorozattal x_{ν_n} $(n \in \mathbf{N})$ csúcs, azaz

$$x_{\nu_n} \geq x_k \qquad (k \in \mathbf{N}, k \geq \nu_n).$$

Speciálisan $\nu_n < \nu_{n+1}$ miatt

$$x_{\nu_n} \geq x_{\nu_{n+1}} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

más szóval az (x_{ν_n}) részsorozat monoton fogyó.

Induljunk ki most abból, hogy legfeljebb véges sok $n \in \mathbf{N}$ indexre igaz az, hogy x_n csúcs. Ekkor van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy bármely $n \in \mathbf{N}, n \geq N$ esetén x_n nem csúcs. Legyen $\nu_0 := N$. Mivel x_{ν_0} nem csúcs, ezért van olyan $m \in \mathbf{N}, m > \nu_0$, amelyre $x_{\nu_0} < x_m$. Ha $\nu_1 := m$, akkor a keresett ν indexsorozat első két tagja már ismert. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbf{N}$ és a $\nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_k$ tagokat már definiáltuk úgy, hogy

$$x_{\nu_0} < x_{\nu_1} < \cdots < x_{\nu_k}.$$

Ekkor - lévén $x_{\nu_k} > x_{\nu_0} = x_N$ miatt x_{ν_k} nem csúcs - valamely $j \in \mathbf{N}, j > \nu_k$ mellett $x_{\nu_k} < x_j$. Legyen $\nu_{k+1} := j$, amikor is $x_{\nu_k} < x_{\nu_{k+1}}$. Ezzel definiáltuk a szigorúan monoton növő $(\nu_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sorozatot (azaz egy indexsorozatot), amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat szigorúan monoton növő. ■

3.5.1. Tétel. *Ha az* $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő* α *egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel ui., hogy valamely $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat és $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ esetén egyaránt teljesül a konvergencia definíciója, és (indirekt módon gondolkodva) $\alpha \neq \beta$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadhatók tehát olyan N, $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexek, hogy

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N},\, n > N) \;\;,\;\; |x_n - \beta| < \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N},\, n > M).$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

(pozitív) számot, ill. az ennek megfelelő N, M-et figyelembe véve legyen

$$S := \max\{N, M\}.$$

Ha $n \in \mathbf{N}$ és $n > S$, akkor nyilván $n > N$ és $n > M$ is fennáll, következésképpen

$$|\alpha - \beta| = |x_n - \alpha - (x_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |x_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = |\alpha - \beta|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ egyenlőtlenség következne. Ezért csak $\alpha = \beta$ lehet. ■

3.5.2. Tétel. *Ha az* $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozat konvergens, akkor tetszőleges* ν *indexsorozat esetén az* $x \circ \nu$ *részsorozat is konvergens és* $\lim(x \circ \nu) = \lim x$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \lim x$, ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Mivel $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $n \in \mathbf{N},\, n > N$ esetén $\nu_n > N$ is igaz. Következésképpen

$$|x_{\nu_n} - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ez éppen azt jelenti, amit állítottunk. ■

3.5.3. Tétel. *Bármely monoton és korlátos* $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozat konvergens. Ha* x *monoton növő, akkor*

$$\lim x = \sup \mathcal{R}_x,$$

ha pedig monoton fogyó, akkor

$$\lim x = \inf \mathcal{R}_x.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat pl. monoton növő és felülről korlátos. Legyen

$$\alpha := \sup \mathcal{R}_x.$$

Ekkor (figyelembe véve a szuprémumról mondottakat) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan eleme az $\mathcal{R}_x$ halmaznak, amely nagyobb, mint $\alpha - \varepsilon$. Más szóval van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$x_N > \alpha - \varepsilon.$$

Mivel a feltételezésünk szerint az (x_n) sorozat monoton növő, ezért egyúttal az

$$x_n > \alpha - \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N)$$

becslés is igaz. Figyelembe véve még azt, hogy α felső korlátja az $\mathcal{R}_x$ halmaznak azt kapjuk, hogy

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leq \alpha \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Tehát egyúttal $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N},\, n > N)$.

Értelemszerű módosítással kapjuk ugyanezt monoton fogyó alulról korlátos sorozatokra, ha $\alpha := \inf \mathcal{R}_x$.

3.5.4. Tétel. *Ha az* (x_n) *sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Legyen ui. (pl.) $\varepsilon := 1$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x_n - \alpha| < 1 \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Más szóval

$$|x_n| = |x_n - \alpha + \alpha| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ha tehát

$$K := \max\{1 + |\alpha|, |x_0|, ..., |x_N|\},$$

akkor nyilván $|x_n| \leq K$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz az (x_n) sorozat korlátos. ■

3.5.5. Tétel. *Bármely $z = (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ komplex sorozatra fennáll a következő ekvivalencia: a z sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ sorozatok konvergensek. Igaz továbbá, hogy ha a z sorozat konvergens és $\alpha := \lim z$, akkor*

$$\operatorname{Re} \alpha = \lim(\operatorname{Re} z) \quad , \quad \operatorname{Im} \alpha = \lim(\operatorname{Im} z).$$

Bizonyítás. Legyen

$$x_n := \operatorname{Re} z_n \quad , \quad y_n := \operatorname{Im} z_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\operatorname{Re} z = (x_n)$, $\operatorname{Im} z = (y_n)$ és $\alpha = u + \imath v$, ahol

$$u := \operatorname{Re} \alpha \quad , \quad v := \operatorname{Im} \alpha.$$

Tegyük fel először, hogy a z sorozat konvergens és $\alpha = \lim z$. Következésképpen bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|z_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Mivel

$$|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} \geq \begin{cases} |x_n - u| \\ \\ |y_n - v| \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért egyúttal

$$|x_n - u|, |y_n - v| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N).$$

Ez azt jelenti, hogy az $(x_n), (y_n)$ sorozatok konvergensek és $\lim(x_n) = u$, $\lim(y_n) = v$.

Fordítva, most induljunk ki abból, hogy az $(x_n) := \operatorname{Re} z, (y_n) := \operatorname{Im} z$ sorozatok konvergensek és $u := \lim(x_n)$, $v := \lim(y_n)$. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számot is adunk meg, léteznek olyan $M, S \in \mathbf{N}$ küszöbindexek, amelyekkel

$$|x_n - u| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (n \in \mathbf{N}, n > M) \quad , \quad |y_n - v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (n \in \mathbf{N}, n > S).$$

Ha $\alpha := u + \imath v$ és $R := \max\{N, S\}$, akkor

$$|x_n - u| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad , \quad |y_n - v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Ugyanakkor

$$|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

miatt

$$|z_n - \alpha| < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > R)$$

következik, azaz $|z_n - \alpha| < \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N},\, n > R)$. Más szóval a z sorozat konvergens és $\lim z = \alpha$. ■

3.5.6. Tétel (Bolzano-Weierstrass). *Bármely korlátos $z = (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, azaz a szóban forgó sorozat valós értékű. Tudjuk (ld. 3.3.1. Tétel), hogy alkalmas ν indexsorozattal a $z \circ \nu$ részsorozat monoton. Világos, hogy egy korlátos sorozatnak minden részsorozata is korlátos, így a $z \circ \nu$ monoton sorozat is korlátos. Alkalmazható ezért a 3.5.3. Tétel, miszerint a z-nek a most vizsgált $z \circ \nu$ résszorozata konvergens.

Most tegyük fel, hogy $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, tehát a tételbeli sorozat komplex számokból áll és legyen $(x_n) := \operatorname{Re} z$, $(y_n) := \operatorname{Im} z$. Emlékeztetünk a korlátos sorozat definícójára (ld. 3.3.): van olyan $K \in \mathbf{R}$, hogy $|z_n| \le K$ $(n \in \mathbf{N})$. Mivel

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \ge \begin{cases} |x_n| \\ \\ |y_n| \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $|x_n|, |y_n| \le K \quad (n \in \mathbf{N})$. Következésképpen az $(x_n), (y_n)$ (valós) sorozatok is korlátosak. A bizonyításunk első fele alapján tehát van olyan ν indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens. Világos, hogy az (y_{ν_n}) részsorozat is korlátos, ezért egy alkalmas μ indexsorozattal az $(y_{\nu_{\mu_n}})$ részsorozat konvergens. Legyen

$$\gamma_n := \nu_{\mu_n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ekkor a (γ_n) sorozat indexsorozat. Továbbá (ld. 3.5.2. Tétel) az (x_{γ_n}) részsorozat is konvergens. A (γ_n) indexsorozattal tehát azt kaptuk, hogy az $(x_{\gamma_n}), (y_{\gamma_n})$ sorozatok konvergensek. Ezért (ld. 3.5.5. Tétel) a z sorozat

$$(z_{\gamma_n}) = (x_{\gamma_n} + \imath y_{\gamma_n})$$

részsorozata konvergens. ■

3.7.1. Tétel (majoráns kritérium). *Tegyük fel, hogy az $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatokra teljesülnek az alábbiak: $(y_n) \in \mathcal{S}_0$ és $|x_n| \le |y_n|$* (m.m. $n \in \mathbf{N}$). *Ekkor $(x_n) \in \mathcal{S}_0$.*

Bizonyítás. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám mellett egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$|y_n| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ugyanakkor az $|x_n| \le |y_n|$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) „majoráns feltétel” miatt van olyan $M \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|x_n| \le |y_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ha tehát $R := \max\{N, M\}$, akkor

$$|x_n| \le |y_n| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R),$$

azaz $|x_n| < \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N}, n > R)$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $(x_n) \in \mathcal{S}_0$. ■

3.7.2. Tétel. *Bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat esetén igaz a következő ekvivalencia: az (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha valamilyen $\alpha \in \mathbf{K}$ számmal $(x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$. Az utóbbi esetben $\alpha = \lim(x_n)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel el először, hogy az (x_n) sorozat konvergens és legyen

$$\alpha := \lim(x_n) \ , \ y_n := x_n - \alpha \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ szám mellett $|y_n| = |x_n - \alpha| < \varepsilon \quad$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). A fentiek szerint ez éppen azt jelenti, hogy $(y_n) = (x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathbf{K}$ olyan szám, amellyel $(x_n - \alpha) \in \mathcal{S}_0$. Következésképpen (ld. fent) tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ez nem mást jelent, mint azt, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$. ■

3.7.3. Tétel. *Bármely $(x_n) \in \mathcal{S}_0$ nullasorozat esetén tetszőleges (y_n) korlátos sorozatra $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$.*

Bizonyítás. A feltételek szerint van olyan $K \in \mathbf{R}$, amellyel

$$|y_n| \leq K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha itt $K = 0$, akkor $y_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$ és így $x_n y_n = 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Következésképpen (mint konstanssorozat) $\lim(x_n y_n) = 0$, azaz $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$.

Ha viszont $K \neq 0$, akkor nyilván $K > 0$. A feltételeink szerint $(x_n) \in \mathcal{S}_0$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{K} \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ezért

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq K|x_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \qquad (\text{m. m. } n \in \mathbf{N}),$$

azaz $(x_n y_n) \in \mathcal{S}_0$. ■

3.7.4. Tétel. *Tetszőleges (x_n), $(y_n) \in \mathcal{S}_0$ nullasorozatok és bármely $c \in \mathbf{K}$ esetén $(x_n + cy_n) \in \mathcal{S}_0$.*

Bizonyítás. A feltételek miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ szám esetén alkalmas $N, M \in \mathbf{N}$ küszöbindexekkel

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > N) \ \ , \ \ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > M).$$

Legyen $S := \max\{N, M\}$, ekkor (a háromszög-egyenlőtlenséget is felhasználva)

$$|x_n + cy_n| \leq |x_n| + |c| \cdot |y_n| \leq$$

$$(1+|c|)(|x_n| + |y_n|) < 2(1+|c|)\frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N},\, n > S).$$

Tehát az $(x_n + cy_n)$ sorozat valóban nullasorozat: $(x_n + cy_n) \in \mathcal{S}_o$ ■

3.7.5. Tétel. *Tetszőleges $(x_n), (y_n) \in \mathcal{S}$ és $c \in \mathbf{K}$ esetén*

i) $(x_n + cy_n) \in \mathcal{S}$ *és* $\lim(x_n + cy_n) = \lim(x_n) + c\lim(y_n)$,

ii) $(x_n y_n) \in \mathcal{S}$ *és* $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n)$,

iii) *ha* $y_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ *és* $\lim(y_n) \neq 0$, *akkor* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \in \mathcal{S}$ *és*

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\alpha := \lim(x_n) \ \ , \ \ \beta := \lim(y_n)$$

és lássuk be először az i) állítást. A 3.7.2. Tételt figyelembe véve azt kell ehhez megmutatnunk, hogy

$$(x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)) \in \mathcal{S}_0.$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$|x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)| = |x_n - \alpha + c(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |c| \cdot |y_n - \beta| =: z_n.$$

A 3.7.2. Tétel szerint $(|x_n - \alpha|), (|y_n - \beta|) \in \mathcal{S}_0$, ezért a 3.7.4. Tétel miatt $(z_n) \in \mathcal{S}_0$. Alkalmazható tehát a 3.7.1. Tétel, hogy ti. $(x_n + cy_n - (\alpha + c\beta)) \in \mathcal{S}_0$.

Hasonlóan járhatunk el a ii) állítás bizonyítása során is. Legyen $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$|x_n y_n - \alpha\beta| = |(x_n - \alpha)y_n + \alpha(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha|\cdot |y_n| + |\alpha|\cdot |y_n - \beta| =: s_n.$$

A 3.7.2. Tétel és a 3.7.3. Tétel miatt $(|x_n - \alpha|\cdot |y_n|) \in \mathcal{S}_0$, ill. a 3.7.3. Tétel szerint $(|y_n - \beta|) \in \mathcal{S}_0$. A 3.7.4. Tételből ezért azt kapjuk, hogy $(s_n) \in \mathcal{S}_0$, amiből meg a 3.7.1. Tétel alapján $(x_n y_n - \alpha\beta) \in \mathcal{S}_0$, azaz (ld. 3.7.2. Tétel) ii) következik.

Végül lássuk be a iii) állítást. Ehhez mutassuk meg először is azt, hogy az $y_n \neq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, $\beta = \lim(y_n) \neq 0$ feltételek miatt az $(1/y_n)$ (reciprok) sorozat korlátos. Legyen ehhez $\varepsilon := |\beta|/2$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex mellett

$$|y_n - \beta| < \varepsilon = \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Így

$$|y_n| = |\beta + y_n - \beta| \geq |\beta| - |y_n - \beta| > |\beta| - |\beta|/2 = \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{|\beta|}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

következésképpen a

$$q := \max\left\{\left|\frac{1}{y_0}\right|, ..., \left|\frac{1}{y_N}\right|\right\}$$

jelöléssel

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq \max\{q, |\beta|/2\} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Most lássuk be, hogy $(1/y_n) \in \mathcal{S}$ és $\lim(1/y_n) = 1/\beta$. Ui.

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - y_n}{\beta\cdot y_n} = (\beta - y_n)\cdot \frac{1}{\beta\cdot y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A 3.7.2. Tétel alapján $(\beta - y_n) \in \mathcal{S}_0$, ill. az előbbiek szerint $(1/y_n)$ és így nyilván $(1/(\beta y_n))$ is korlátos sorozat. A 3.7.3. Tétel miatt ezért $((\beta - y_n)/(\beta y_n)) \in \mathcal{S}_0$, ami (ld. 3.7.2. Tétel) éppen azt jelenti, amit állítottunk.

Azt kell már csupán figyelembe venni, hogy

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n\cdot \frac{1}{y_n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

más szóval az (x_n/y_n) „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a ii) állítás (és a reciprok sorozatról az előbb mondottak) miatt $(x_n/y_n) \in \mathcal{S}$ és $\lim(x_n/y_n) = \alpha/\beta$. ■

3.7.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatok konvergensek. Ekkor:*

i) *ha* $x_n \leq y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), *akkor* $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$;

ii) *ha* $\lim(x_n) < \lim(y_n)$, *akkor* $x_n < y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$).

Bizonyítás. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$, $\beta := \lim(y_n)$ és lássuk be először az i) állítást. Vegyük észre, hogy ez következik ii)-ből. Valóban, ha az i)-beli $x_n \leq y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) feltétel mellett indirekt módon azt tesszük fel, hogy $\beta < \alpha$, akkor ii)-ből (az $x_n \leftrightarrow y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ szerepcserével) azt kapjuk, hogy $y_n < x_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). Ez nyilván ellentmond az $x_n \leq y_n$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$) feltételezésnek.

Ezzel az i) állítást beláttuk. Megjegyezzük, hogy egyébként i) következik ii)-ből. Ui. indirekt módon feltéve i)-ben, hogy $\beta < \alpha$, a ii) állításból $y_n < x_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$ adódik, ami nyilván ellentmond az i)-beli feltételnek.

A ii) bizonyításához legyen

$$\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{2},$$

az $M, R \in \mathbf{N}$ küszöbindexeket pedig válasszuk úgy, hogy

$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M),$$

ill.

$$\beta - \varepsilon = \frac{\alpha + \beta}{2} < y_n < \beta + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Tehát az $S := \max\{M, R\}$ küszöbindexszel

$$x_n < \frac{\alpha + \beta}{2} < y_n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S).$$

Más szóval $x_n < y_n \ (n \in \mathbf{N}, n > S)$, amint azt ii)-ben állítottuk. ■

3.7.7. Tétel (közrefogási elv). *Az* $(x_n), (y_n), (z_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatokról tegyük fel, hogy*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}),$$

az $(x_n), (z_n)$ *sorozatok konvergensek és* $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. *Ekkor az* (y_n) *sorozat is konvergens és* $\lim(y_n) = \lim(x_n)$.

Bizonyítás. Az $x_n \leq y_n \leq z_n \quad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N})$ „közrefogási” feltétel miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad (n \in \mathbf{N}, N > N).$$

Ha

$$\alpha := \lim(x_n) = \lim(z_n)$$

és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor egy-egy $M, R \in \mathbf{N}$ küszöbindex mellett

$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M),$$

ill.

$$\alpha - \varepsilon < z_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Legyen $S := \max\{N, M, R\}$, ekkor

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < \alpha + \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|y_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > S),$$

azaz az (y_n) sorozat valóban konvergens és $\lim(y_n) = \alpha$. ■

3.7.8. Tétel. *Az* $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Az eddig mondottak miatt csupán az elégségességet kell már igazolnunk. Tegyük fel tehát, hogy az $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat Cauchy-sorozat, azaz teljesül a (3.7.1) feltétel. Lássuk be először is, hogy ekkor (y_n) korlátos. Valóban, ha (pl.) a (3.7.1) kritériumot az $\varepsilon := 1$ választással alkalmazzuk, akkor (egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel)

$$|y_n - y_m| < 1 \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Innen

$$|y_n| = |(y_n - y_{N+1}) + y_{N+1}| \le$$

$$|y_n - y_{N+1}| + |y_{N+1}| < 1 + |y_{N+1}| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N)$$

következik. Ha

$$q := \max\{|y_0|, ..., |y_N|\},$$

akkor

$$|y_n| \le \max\{q, 1 + |y_{N+1}|\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a szóban forgó sorozat valóban korlátos. Alkalmazható tehát a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel (ld. 3.5.6. Tétel), miszerint egy alkalmas (ν_n) indexsorozattal az (y_{ν_n}) résszorozat konvergens.

Legyen

$$\alpha := \lim(y_{\nu_n})$$

és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy

$$|y_{\nu_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

A (3.7.1) Cauchy-kritériumot most ε helyett $\varepsilon/2$-re alkalmazva azt mondhatjuk, hogy egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Legyen $R := \max\{N, M\}$. Emlékeztetünk arra, hogy $\nu_n \ge n \ (n \in \mathbf{N})$, azaz $n \in \mathbf{N}$, $n > R\,(\ge M)$ esetén egyúttal $\nu_n > R\,(\ge N)$ is teljesül. Ezért

$$|y_n - \alpha| = |(y_n - y_{\nu_n}) + (y_{\nu_n} - \alpha)| \le |y_n - y_{\nu_n}| + |y_{\nu_n} - \alpha)| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Tehát az (y_n) sorozat konvergens (és $\lim(y_n) = \alpha$). ∎

3.7.9. Tétel. *Bármely monoton* $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatnak van határértéke. Ha* (x_n) *monoton növő, akkor* $\lim(x_n) = \sup \mathcal{R}_x$, *ha monoton fogyó, akkor* $\lim(x_n) = \inf \mathcal{R}_x$.

Bizonyítás. Ha pl. az $x = (x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ sorozat monoton növő és felülről nem korlátos (azaz $\sup \mathcal{R}_x = +\infty$), akkor tetszőleges $p \in \mathbf{R}$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel $x_N > p$. A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$x_n > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

A definíció értelmében tehát $\lim(x_n) = +\infty$.

Analóg módon kapjuk monoton fogyó és alulról nem korlátos $y = (y_n)$ sorozatra (amikor is tehát $\inf \mathcal{R}_y = -\infty$), hogy $\lim(y_n) = -\infty$. ∎

3.7.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n), (y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ *sorozatok mindegyikének van határértéke, legyen* $\alpha := \lim(x_n)$, $\beta := \lim(y_n)$. *Ekkor*

i) *ha az* $\alpha+\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *összeg értelmezve van, akkor az* (x_n+y_n) *összeg-sorozatnak is van határértéke és* $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta$;

ii) *ha az* $\alpha\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *szorzat értelmezve van, akkor az* $(x_n y_n)$ *szorzat-sorozatnak is van határértéke és* $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta$;

iii) *ha* $y_n \neq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$ *és az* $\alpha/\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ *hányados értelmezve van, akkor az* (x_n/y_n) *hányados-sorozatnak is van határértéke és* $\lim(x_n/y_n) = \alpha/\beta$.

Bizonyítás. Nyilván feltehető már (ld. 3.7.5. Tétel), hogy α, β közül legalább az egyik nem valós szám. Lássuk be először i)-t. Legyen első esetként pl.

$$\alpha \in \mathbf{R} \ , \ \ \beta = +\infty.$$

Ekkor i) szerint azt kell megmutatnunk, hogy $\lim(x_n+y_n) = \alpha+\beta = +\infty$. Legyen ehhez $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ekkor van olyan $N \in \mathbf{N}$, hogy

$$y_n > p - \alpha + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mivel $\alpha \in \mathbf{R}$, azaz (x_n) konvergens, ezért egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\alpha - 1 < x_n < \alpha + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Következésképpen

$$x_n + y_n > \alpha - 1 + p - \alpha + 1 = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

Analóg módon adódik az i) állítás akkor is, ha $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta = -\infty$. Ha viszont

$$\alpha = \beta = +\infty,$$

akkor az előbbi bizonyítást annyiban kell csupán módosítani, hogy az ott szereplő $p \in \mathbf{R}$ mellett egy-egy alkalmas $N, M \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$y_n > \frac{p}{2} \quad (n \in \mathbf{N}, n > N) \ , \ \ x_n > \frac{p}{2} \quad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Ezért

$$x_n + y_n > \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n + y_n) = \alpha + \beta = +\infty$.

Világos, hogy a most mondottak egyszerű módosítával kapjuk i)-t akkor is, ha $\alpha = \beta = -\infty$.

Bizonyítsuk be most ii)-t akkor, ha $0 < \alpha \in \mathbf{R}$ és $\beta = +\infty$. Ekkor alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbbel

$$\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} < x_n < \alpha + \frac{\alpha}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

ill. tetszőleges $0 < p \in \mathbf{R}$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$y_n > \frac{2p}{\alpha} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$x_n y_n > \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2p}{\alpha} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta = +\infty$.

A fentiek értelemszerű módosításával „kezelhetjük” a ii) állítás bizonyításakor az

$$0 \neq \alpha \in \mathbf{R},\ \beta = \pm\infty$$

esetekből a még „hiányzókat”.

Most belátjuk ii)-t akkor, ha $\alpha = \beta = +\infty$. Itt annyi a különbség a fent részletezett $0 < \alpha \in \mathbf{R}$, $\beta = +\infty$ esethez képest, hogy az N, M küszöbindexekről az alábbiakat tételezhetjük fel:

$$x_n > \sqrt{p} \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)\ ,\ \ y_n > \sqrt{|p|} \quad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Következésképpen

$$x_n y_n > \sqrt{p}\cdot \sqrt{p} = p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, M\}),$$

azaz $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta = +\infty$.

Analóg módon kapjuk a ii)-ből még „hiányzó” eseteket.

A iii) állításhoz tegyük fel, hogy $0 < \beta \in \mathbf{R}$ és $\alpha := \pm\infty$. Ekkor (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\lim\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{\beta}$$

és a iii) állítás következik a ii)-ből. Analóg módon kapjuk iii)-t a $0 > \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha = \pm\infty$ esetekben is. Ha viszont $\beta = \pm\infty$ és $\alpha \in \mathbf{R}$, akkor először lássuk be, hogy

$$\lim\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0.$$

Legyen ui. $\beta = +\infty$ és $\varepsilon > 0$, ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$y_n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Tehát $0 < 1/y_n < \varepsilon \quad (n \in \mathbf{N}, n > N)$, azaz $\lim(1/y_n) = 0$.

Ha $\beta = -\infty$, akkor annyi a különbség a most mondottakhoz képest, hogy

$$y_n < -\frac{1}{\varepsilon} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz $-\varepsilon < 1/y_n < 0 \ (n \in \mathbf{N}, n > N)$. Így $\lim(1/y_n) = 0$.

Alkalmazható ezért a 3.7.5. Tétel:

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\left(x_n\cdot \frac{1}{y_n}\right) = \alpha\cdot 0 = 0 = \frac{\alpha}{\pm\infty} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

■

3.9.1. Tétel. *A pozitív természetes számok reciprokaiból álló $(1/n)$ sorozat nullasorozat, azaz konvergens és*

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz legyen (ld. 1.3.1. Tétel) $N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $N\varepsilon > 1$, azaz $1/N < \varepsilon$. Ekkor

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

ami az állításunk bizonyítását jelenti. ■

3.9.2. Tétel. *Legyen* $q \in \mathbf{K}$. *Ekkor*

1^o $|q| < 1$ *esetén a* (q^n) *sorozat nullasorozat, azaz konvergens és*

$$\lim (q^n) = 0;$$

2^o *ha* $|q| > 1$, *akkor a* (q^n) *sorozat divergens és* $\lim(|q^n|) = +\infty$, *ill.* $q \in \mathbf{R}$, $q > 1$ *esetén* $\lim(q^n) = +\infty$, *míg* $q \in \mathbf{R}$, $q < -1$ *esetén nincs határértéke a* (q^n) *sorozatnak;*

3^o *a* $|q| = 1$ *esetben a* (q^n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha* $q = 1$ (*és ekkor* $\lim(q^n) = \lim(1) = 1$).

Bizonyítás. Mivel $q = 0$ esetén $q^n = 0$ $(0 < n \in \mathbf{N})$, ezért ebben az esetben az (q^n) $(k \in \mathbf{N})$ sorozat triviálisan nullasorozat.

Ezért feltehetjük, hogy $0 < |q| < 1$, azaz $1/|q| > 1$. Van tehát olyan $h > 0$ szám, amellyel

$$\frac{1}{|q|} = 1 + h.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) szerint

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$|q|^n < \frac{1}{nh} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.1. Tétel, ill. a 3.7.4. Tétel miatt az $(1/(nh)$ sorozat nullasorozat, következésképpen a majoráns-kritérium (ld. 3.7.1. Tétel) $\lim(q^n) = 0$.

Most tegyük fel, hogy $|q| > 1$, azaz valamilyen $h > 0$ számmal $|q| = 1 + h$. Ekkor a Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) szerint

$$\left|q^n\right| = |q|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen a (q^n) sorozat (nyilván) nem korlátos, így (ld. 3.5.4. Tétel) divergens. Ha $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges, akkor legyen $N \in \mathbf{N}$ olyan, hogy $N > p/h$. Világos, hogy ekkor

$$\left|q^n\right| > nh > Nh > p \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz

$$\lim\left(|q^n|\right) = +\infty.$$

Ha itt $1 < q \in \mathbf{R}$, akkor

$$\lim\left(|q^n|\right) = \lim(q^n) = +\infty.$$

Ha viszont $q \in \mathbf{R}$ és $q < -1$, akkor az előzőek (és $q^2 > 1$ miatt)

$$\lim\left(q^{2n}\right) = \lim\left(\left(q^2\right)^n\right) = +\infty,$$

de

$$\lim\left(q^{2n+1}\right) = q \lim\left(\left(q^2\right)^n\right) = q \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Ezért nem létezik a (q^n) sorozatnak határértéke.

Legyen végül $|q|=1$ és $x_n := q^n$ $(n\in\mathbf{N})$. Világos, hogy

$$x_{n+1} = q^{n+1} = qq^n = qx_n \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Ha az (x_n) sorozat konvergens és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\alpha = \lim(x_{n+1})$, azaz az előbbi rekurzív összefüggés alapján

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = q\lim(x_n) = q\alpha.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $(1-q)\alpha = 0$. Innen $q=1$ vagy $\alpha = 0$ következik. Az utóbbi nem lehet, ui.

$$|\alpha| = \lim(|x_n|) = \lim(1) = 1.$$

■

3.9.3. Tétel. *Legyen*

$$x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Ekkor az (x_n) sorozat szigorúan monoton növő és felülről korlátos.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a számtani-mértani középpel kapcsolatos tételünket (ld. 1.3.5. Tétel) az alábbi „szereposztással" (az idézett tételbeli jelöléseket használva):

$$a_0 := 1 \ , \ \ a_k := 1+\frac{1}{n} \ \ (k=1,...,n) \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Mivel a most definiált a_k-k nem mind egyenlők egymással, ezért

$$x_n = \prod_{k=0}^{n} a_k < \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1} \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Tehát az (x_n) sorozat szigorúan monoton növő.

A korlátosság bizonyításához módosítsuk az előbbi a_k-kat úgy, hogy

$$a_0 := a_1 := \frac{1}{2} \ , \ \ a_k := 1+\frac{1}{n} \ \ (k=2,...,n+1) \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Alkalmazva az 1.3.5. Tételt azt mondhatjuk, hogy

$$\frac{x_n}{4} = \prod_{k=0}^{n+1} a_k < \left(\frac{\sum_{k=0}^{n+1} a_k}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1/2+1/2+n+1}{n+2}\right)^{n+2} = 1 \qquad (0<n\in\mathbf{N}),$$

következésképpen $x_n < 4$ $(n\in\mathbf{N})$. ■

3.9.4. Tétel. *Legyen* $2\le m\in\mathbf{N}$, $a>0$ *és tekintsük azt az* (x_n) *számsorozatot, amelyre*

$$x_0 := a \ , \ x_n := \frac{1}{m}\left((m-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}}\right) \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Ekkor az (x_n) *sorozat konvergens,* $\gamma := \lim(x_n) > 0$ *és* $\gamma^m = a$.

A bizonyítás előtt emlékeztetünk a rekurzió tételre, miszerint a tételben szereplő sorozat létezik.

Bizonyítás. Mutassuk meg először, hogy $x_n > 0$ $(n\in\mathbf{N})$ és

$$(*) \qquad x_n \ge x_{n+1} \qquad (0<n\in\mathbf{N}).$$

Valóban, a pozitivitáshoz alkalmazzunk teljes indukciót: $x_0 = a > 0,$ ha pedig valamilyen $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén $x_{n-1} > 0,$ akkor az (x_n) sorozatot meghatározó rekurzív összefüggés alapján $x_n > 0$ is triviálisan igaz.

A monotonitást jelentő $(*)$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$x_n \geq \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right) \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

azaz átrendezés után azzal, hogy

$$(**) \qquad x_n^m \geq a \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

A $(**)$ becslés igazolásához alkalmazzuk a számtani-mértani közép-tételt (ld. 1.3.5. Tétel, az ottani jelölésekkel n helyett $(m-1)$-gyel) az

$$a_0 := ... =: a_{m-2} := x_{n-1}\ ,\ a_{m-1} := \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}}$$

„változatban”:

$$\prod_{k=0}^{m-1} a_k = x_{n-1}^{m-1}\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} = a \leq \left(\frac{\sum_{k=0}^{m-1} a_k}{m}\right)^m = \left(\frac{(m-1)x_{n-1} + a/x_{n-1}^{m-1}}{m}\right)^m = x_n^m.$$

Az (x_n) sorozat tehát (ld. 3.5.3. Tétel) konvergens, legyen $\gamma := \lim(x_n).$ A 3.7.5., 3.7.6. Tételek miatt $\gamma \geq 0,$ ill. az (x_n^m) sorozat is konvergens és

$$\lim(x_n^m) = \gamma^m \geq a\ (> 0).$$

Következésképpen $\gamma > 0.$ Tudjuk, hogy az (x_{n-1}) sorozat is konvergens és $\lim(x_{n-1}) = \gamma.$ Ezért az (x_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggés és a 3.7.5. Tétel alapján

$$\gamma = \lim(x_n) = \lim\left(\frac{1}{m}\left((m-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{m-1}}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{m}\left((m-1)\lim(x_{n-1}) + \frac{a}{\lim(x_{n-1}^{m-1})}\right) = \frac{1}{m}\left((m-1)\gamma + \frac{a}{\gamma^{m-1}}\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel kapjuk, hogy $\gamma^m = a.$ ■

3.9.5. Tétel. *Tetszőleges* $0 < a \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $a > 1.$ Ekkor bármely $2 \leq n \in \mathbf{N}$ „kitevővel” $\sqrt[n]{a} > 1,$ azaz valamilyen $0 < h_n \in \mathbf{R}$ számmal $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n.$ Következésképpen a Bernoulli-egyenlőtlenség (ld. 1.3.4. Tétel) alapján

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \qquad (2 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \qquad (2 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A 3.9.1., 3.7.4. Tételek miatt $\lim((a-1)/n) = 0,$ azaz a majoráns kritériumot (ld. 3.7.1. Tétel) alkalmazva $\lim(h_n) = 0.$ A 3.7.2. Tétel miatt tehát $\lim(1 + h_n) = 1,$ ill. a 3.7.5. Tételt figyelembe véve a $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat is konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1.$

Az $a = 1$ esetben az állításunk triviális, hiszen ekkor $\left(\sqrt[n]{a}\right) = (1)$ miatt az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konstanssorozat és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

Ha $0 < a < 1$, akkor $1/a > 1$ és az első eset alapján

$$\lim\left(\sqrt[n]{1/a}\right) = 1.$$

Ugyanakkor (könnyen ellenőrizhetően)

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \qquad (2 \le n \in \mathbf{N}),$$

azaz a műveleti „szabályok” (ld. 3.7.5. Tétel) miatt az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat is konvergens és

$$\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{1/a}\right)} = 1.$$

■

3.9.6. Tétel. *Az* $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ *sorozat konvergens és*

$$\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $2 \le n \in \mathbf{N}$, ekkor $\sqrt[n]{n} > 1$, azaz $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ valamilyen $0 < h_n$ számmal. Így a binomiális tételt alkalmazva

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \ge \binom{n}{0} h_n^0 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 =$$

$$1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \ge 1 + \frac{n^2}{4} h_n^2.$$

Ezért

$$0 < h_n^2 \le \frac{4(n-1)}{n^2} < \frac{4}{n}.$$

Az előző tétel bizonyításában is idézett tételeink alapján innen az következik, hogy $\lim(h_n^2) = 0$. Ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számra $0 < h_n^2 < \varepsilon^2$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$). Más szóval $0 < h_n < \varepsilon$ (m.m. $n \in \mathbf{N}$), azaz $\lim(h_n) = 0$. Követezésképpen (ld. az előző tétel bizonyításában követett analóg gondolatmenet)

$$\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = \lim(1 + h_n) = 1.$$

■

3.9.7. Tétel. *Legyen valamely* $0 < N, M \in \mathbf{N}$ *esetén adott az* N*-ed fokú* P *polinom és az* M*-ed fokú* Q *polinom, ill. tekintsük az* $x_n := \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ $(n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q)$ *sorozatot, ahol* $\mathbf{N}_Q$ *jelöli a* Q *polinom gyökeinek a halmazát. Ha* $P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{M} b_j x^j$ $(x \in \mathbf{K})$, *akkor*

1^o $N = M$ *esetén az* (x_n) *sorozat konvergens és* $\lim(x_n) = \frac{a_N}{b_N}$;

2^o $N < M$ *esetén az* (x_n) *sorozat konvergens és* $\lim(x_n) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $N = M$, ekkor

$$x_n = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k n^k}{\sum_{j=0}^{N} b_j n^j} = \frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_N + \sum_{j=0}^{N-1} b_j n^{j-N}} \qquad (0 < n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q).$$

Mivel az összes itt szereplő n, ill. $k = 0, ..., N-1$ és $j = 0, ..., N-1$ indexre

$$n^{k-N} \le \frac{1}{n} \quad , \quad n^{j-N} \le \frac{1}{n},$$

ezért $\lim(n^{k-N}) = \lim(n^{j-N}) = 0$. A „műveleti szabályok" (ld. 3.7.5. Tétel) alapján ezért

$$\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right) = a_N \quad , \quad \lim\left(b_N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k n^{k-N}\right) = b_N,$$

ill. $b_N \neq 0$ miatt

$$\lim(x_n) = \frac{\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right)}{\lim\left(b_N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k n^{k-N}\right)} = \frac{a_N}{b_N}.$$

Ha $N < M$, akkor

$$x_n = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k n^k}{\sum_{j=0}^{M} b_j n^j} = \frac{1}{n^{M-N}} \cdot \frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}} \qquad (0 < n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_Q).$$

Most is elmondhatjuk, hogy

$$\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right) = a_N \quad , \quad \lim\left(b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}\right) = b_M,$$

azaz

$$\lim\left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}}\right) = \frac{\lim\left(a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}\right)}{\lim\left(b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}\right)} = \frac{a_N}{b_M}.$$

Továbbá $N < M$ miatt $M - N \ge 1$, azaz

$$1/n^{M-N} \le 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

így $\lim\left(1/n^{M-N}\right) = 0$ és

$$\lim(x_n) = \lim\left(\frac{1}{n^{M-N}}\right) \cdot \lim\left(\frac{a_N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k n^{k-N}}{b_M + \sum_{j=0}^{M-1} b_j n^{j-M}}\right) = 0 \cdot \frac{a_N}{b_M} = 0.$$

■

4.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor konvergens. Ekkor* (x_n) *nullasorozat, azaz konvergens és* $\lim(x_n) = 0$.

Bizonyítás. Jelöljük S_n-nel $(n \in \mathbf{N})$ a szóban forgó végtelen sor n-edik részletösszegét:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A feltételünk szerint tehát az (S_n) sorozat konvergens, következésképpen Cauchy-sorozat (ld. 3.7.8. Tétel). Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, n, m > N).$$

Speciálisan az $n \in \mathbf{N}, n > N+1, m := n-1$ választással

$$|S_n - S_{n-1}| = |x_n| < \varepsilon,$$

ami pontosan azt jelenti, amit állítottunk. ■

4.1.2. Tétel. *A* $\sum(x_n)$ *végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $N \in \mathbf{N}$, *hogy*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Bizonyítás. Legyen $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \quad (k \in \mathbf{N})$. Ekkor a $\sum(x_n) = (S_n)$ sor(ozat) pontosan akkor Cauchy-sorozat (azaz konvergens), ha a tételben megfogalmazott feltétel teljesül. ■

4.1.3. Tétel. *A* $\sum(1/n)$ *harmonikus sor divergens, a* $\sum(1/n^2)$ *szuperharmonikus sor konvergens.*

Bizonyítás. Mutassuk meg először, hogy a harmonikus sorra nem teljesül a 4.1.2. Tételbeli Cauchy-feltétel. Ha ui. $2 \le n \in \mathbf{N}$, akkor az $m := 2n$ választással

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ezért $0 < \varepsilon < 1/2$ esetén bármely $N \in \mathbf{N}$ mellett az $n \in \mathbf{N}$, $n > N$ indexekre

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \varepsilon.$$

Tehát (ld. 4.1.2. Tétel) a harmonikus sor divergens.

A szuperharmonikus sorra ugyanakkor bármely $1 \le N \in \mathbf{N}$ esetén

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} =$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Következésképpen, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és az $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexre $N > 1/\varepsilon$, azaz $1/N < \varepsilon$, akkor a szuperharmonikus sorra teljesül a Cauchy-kritérium:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Ezért a 4.1.2. Tétel szerint a $\sum(1/n^2)$ sor konvergens. ■

Lássuk be, hogy ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor konvergens is. Valóban, tetszőleges $n, m \in \mathbf{N}$, $m > n$ indexekre

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| \le \sum_{k=n}^{m} |x_k|,$$

ahol bármely $\varepsilon > 0$ számra egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexszel

$$\sum_{k=n}^{m} |x_k| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N).$$

Így

$$\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon \qquad (n, m \in \mathbf{N}, m > n > N),$$

más szóval a $\sum(x_n)$ végtelen sor Cauchy-sor(ozat), azaz (ld. 3.7.8. Tétel) konvergens.

4.1.4. Tétel (összehasonlító kritérium). *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$, $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozatokra az alábbiak teljesülnek*:

$$|x_n| \le |y_n| \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor:

i) *ha a* $\sum(y_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens, akkor a* $\sum(x_n)$ *sor is abszolút konvergens*;

ii) *ha a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor nem abszolút konvergens, akkor a* $\sum(y_n)$ *sor sem abszolút konvergens.*

Bizonyítás. A feltétel szerint egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett

$$|x_n| \le |y_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ha a $\sum(y_n)$ sor abszolút konvergens, akkor

$$K := \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |y_k| : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ezért a

$$q := \max\{|x_0|, ..., |x_N|\}$$

jelöléssel

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \le \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} q \le (N+1)q & (n \le N) \\ \sum_{k=0}^{N} |x_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |y_k| \le (N+1)q + K & (n > N) \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |x_k| : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor nem abszolút konvergens, akkor a $\sum(y_n)$ végtelen sor sem lehet abszolút konvergens. Ui. ha az lenne, akkor i) szerint $\sum(x_n)$ abszolút konvergens lenne. ■

4.1.5. Tétel. *Mutassuk meg, hogy*

i) *a* $\sum(1/n!)$ *sor konvergens és* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$;

ii) *bármely* $0 < n \in \mathbf{N}$ *esetén van olyan* $\theta_n \in (0,1)$ *szám, amellyel* $\displaystyle e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$;

iii) *az* e *szám irracionális, azaz* $e \notin \mathbf{Q}$.

Bizonyítás. Elöljáróban emlékeztetünk az e szám definíciójára:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Legyen $n \in \mathbf{N}, n > 2,$ ekkor a binomiális tétel alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$2 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ha tehát $2 \le m < n,$ akkor nyilván

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} > 2 + \sum_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!},$$

ahol (ld. 3.7.5., 3.9.1. Tételek) minden $k = 2, ..., m$ esetén

$$\lim \left(\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right) = 1,$$

ill.

$$\lim \left(2 + \sum_{k=2}^{m} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

A fentiek szerint azt kaptuk tehát, hogy (ld. 3.7.6. Tétel)

$$\lim \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ge \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \qquad (m \in \mathbf{N}, m \ge 2).$$

Ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} : m \in \mathbf{N} \right\} \le e$$

is igaz, más szóval

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

következik.

Az eddigiek alapján azt mondhatjuk, hogy bármely $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \prod_{j=n+2}^{k} \frac{1}{j} \right) \le$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \prod_{j=n+2}^{k} \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} \right)^{k-(n+1)} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^k = \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

Így

$$0 < \theta_n := n\cdot n!\left(e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \le \frac{n\cdot(n+2)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)!} =$$

$$\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1.$$

Ezzel a tétel ii) állítását beláttuk. A iii) bizonyításához tegyük fel indirekt módon, hogy $e \in \mathbf{Q}$. Megadhatók ekkor olyan $0 < m, n \in \mathbf{N}$ számok, amelyekkel $e = \frac{m}{n}$. Ezért ii) szerint egy alkalmas $0 < \theta_n < 1$ számmal

$$\frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

Innen

$$\theta_n = \frac{m\cdot n\cdot n!}{n} - \sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot n!}{k!} = m\cdot n! - n\cdot\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=k+1}^{n} j \in \mathbf{Z},$$

azaz $\theta_n \in \mathbf{Z}$ következik. Ez viszont nem lehetséges, hiszen ii) alapján $0 < \theta_n < 1$. ■

4.3.1. Tétel (Cauchy-féle gyök-kritérium). *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *sorozatra létezik az alábbi határérték:*

$$\delta := \lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right).$$

Ekkor

1^o *ha* $\delta < 1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens;*

2^o *ha* $\delta > 1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor divergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\delta < 1$ és legyen $\delta < q < 1$. Ekkor egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$2\delta - q < \sqrt[n]{|x_n|} < q \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz

$$|x_n| < q^n \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen bármely $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k| = \sum_{k=0}^{N}|x_k| + \sum_{k=N+1}^{n} q^k < \sum_{k=0}^{N}|x_k| + \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{N}|x_k| + \frac{1}{1-q},$$

azaz a $(\sum_{k=0}^{n}|x_k|)$ sorozat korlátos, így (a tagjai nem-negatívok lévén) konvergens. Tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

Ha $\delta > 1$, akkor legyen $1 < q < \delta$. Van tehát olyan $M \in \mathbf{N}$, amellyel

$$2\delta - q > |x_n| > q > 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Világos innen, hogy az (x_n) sorozat nem nullasorozat. Ezért (ld. 4.1.1. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor divergens. ■

4.3.2. Tétel (D'Alembert-féle hányados-kritérium). *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K} \setminus \{0\}$ *sorozatra létezik az alábbi határérték*:

$$\gamma := \lim\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right).$$

Ekkor

1^o *ha* $\gamma < 1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens*;

2^o *ha* $\gamma > 1$, *akkor a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor divergens.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk először a $\gamma < 1$ esetet. Legyen $\gamma < q < 1$, ekkor van olyan $N \in \mathbf{N}$, amellyel

$$2\gamma - q < \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N),$$

azaz

$$|x_{n+1}| \leq q|x_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Innen (pl. teljes indukcióval) könnyen ellenőrizhető, hogy

$$|x_n| \leq |x_{N+1}|q^{n-N-1} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Ezért tetszőleges $n \in \mathbf{N}, n > N$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k| = \sum_{k=0}^{N}|x_k| + |x_{N+1}|\sum_{k=N+1}^{n} q^{k-N-1} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{N}|x_k| + |x_{N+1}|\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{N}|x_k| + \frac{|x_{N+1}|}{1-q},$$

azaz a $(\sum_{k=0}^{n}|x_k|)$ sorozat korlátos. Így (az előző tételbeli bizonyítással analóg módon) konvergens. Tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

Ha $\gamma > 1$, akkor legyen $1 < q < \delta$. Egy alkalmas $M \in \mathbf{N}$ mellett tehát

$$2\delta - q > \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > q > 1 \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Más szóval

$$|x_{n+1}| > |x_n| \qquad (n \in \mathbf{N}, n > M).$$

Innen nyilvánvaló már, hogy az (x_n) sorozat nem nullasorozat. Ezért (ld. 4.1.1. Tétel) a $\sum(x_n)$ sor divergens.
■

4.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum\big((-1)^n x_n\big)$ *Leibniz-sor konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy az* (x_n) *sorozat nullasorozat legyen.*

Bizonyítás. A $\lim(x_n) = 0$ feltétel szükségessége szinte nyilvánvaló. Ui., ha a szóban forgó Leibniz-sor konvergens, akkor (ld. 4.1.1. Tétel)

$$\lim\big((-1)^n x_n\big) = 0,$$

azaz $\lim\big(\left|(-1)^n x_n\right|\big) = \lim(x_n) = 0.$

Tegyük most fel, hogy $\lim(x_n) = 0$ és legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mutassuk meg, hogy az (S_{2n}) részsorozat monoton fogyó, az (S_{2n+1}) részsorozat pedig monoton növő. Valóban,

$$S_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k x_k = S_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} = S_{2n} + (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel itt $x_{2n+2} - x_{2n+1} \leq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, ezért $S_{2n+2} \leq S_{2n} \quad (n \in \mathbf{N})$.

Ugyanígy kapjuk az $S_{2n+3} \geq S_{2n+1} \quad (n \in \mathbf{N})$ becslést is.

Lássuk be, hogy az (S_{2n}), (S_{2n+1}) részsorozatok korlátosak. Legyen ui. $n \in \mathbf{N}$, ekkor

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k = (x_0 - x_1) + ... + (x_{2n-2} - x_{2n-1}) + x_{2n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{2k} - x_{2k+1}) + x_{2n} \geq 0,$$

hiszen

$$x_{2k} - x_{2k+1} \geq 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Hasonlóan, ha $n \in \mathbf{N}$, akkor

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x_k = x_0 - (x_1 - x_2) - ... - (x_{2n-1} - x_{2n}) - x_{2n+1} =$$

$$x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (x_{2k+1} - x_{2k+2}) - x_{2n+1} \leq x_0 - \sum_{k=0}^{n-2} (x_{2k+1} - x_{2k+2}) \leq x_0,$$

ui.

$$x_{2k+1} - x_{2k+2} \geq 0 \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Léteznek tehát (ld. 3.5.3. Tétel) az

$$\alpha := \lim(S_{2n}) \ , \ \beta := \lim(S_{2n+1})$$

(véges) határértékek. Mivel

$$|\alpha - \beta| = \lim(|S_{2n} - S_{2n+1}|) = \lim(x_{2n+1}) = 0,$$

ezért $\alpha = \beta$. Mutassuk meg, hogy az (S_n) sorozat konvergens és $\lim(S_n) = \alpha$ $(= \beta)$. Valóban, az $(S_{2n}), (S_{2n+1})$ sorozatok monotonitása miatt

$$S_{2n+1} \leq \alpha \leq S_{2n} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$|S_{2n+1} - \alpha|, \ |S_{2n} - \alpha| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = x_{2n+1} \leq x_{2n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$|S_n - \alpha| \le x_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz $\lim(x_n) = 0$ miatt az (S_n) sorozat konvergál α-hoz. ■

Tekintsük az $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozatot, ill. az általa generált $\sum(x_n)$ végtelen sort. Legyen adott az $m = (m_n)$ indexsorozat és tegyük fel, hogy $m_0 = 0$. Ekkor a

$$\sigma_n := \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} x_k \qquad (n \in \mathbf{N})$$

összegekkel definiált $\sum(\sigma_n)$ végtelen sort a $\sum(x_n)$ sor (m által meghatározott) *zárójelezésének* nevezzük. Formálisan szólva tehát (bár továbbra is óvunk attól, hogy a végtelen sort mintegy azonosítsuk az összeadással)

$$x_0 + x_1 + ... + x_n + ... =$$

$$(x_0 + ... + x_{m_1 - 1}) + (x_{m_1} + ... + x_{m_2 - 1}) + ... + (x_{m_n} + ... + x_{m_{n+1}-1}) + ...$$

Világos, hogy ha

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$\Theta_n := \sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} x_k = S_{m_{n+1}-1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sor (Θ_n) részletösszeg-sorozata a kiindulási $\sum(x_n)$ sor (S_n) részletösszeg-sorozatának egy részsorozata. Ha tehát a $\sum(x_n)$ sor, azaz az (S_n) sorozat konvergens, akkor a (Θ_n) sorozat, azaz a $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sor is konvergens és ugyanaz a határértéke (ld. 3.5.2. Tétel). Így igaz a

4.3.4. Tétel. *Ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens, akkor bármely $\sum(\sigma_n)$ zárójelezett sora is konvergens és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} x_k .$$

4.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sorra és az (m_n) indexsorozatra teljesülnek a következő feltételek:*

1^o $\lim(x_n) = 0$;

2^o $m_0 = 0$ *és* $\sup\{m_{n+1} - m_n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$;

3^o *a* $\sum(\sigma_n) = \sum\left(\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} x_k\right)$ *zárójelezett sor konvergens.*

Ekkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor is konvergens.

Bizonyítás. Legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \;\; , \;\; \Theta_n := \sum_{k=0}^{n} \sigma_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1} x_j \qquad (n \in \mathbf{N})$$

és

$$\alpha := \lim(\Theta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n .$$

Bármely $n \in \mathbf{N}$ természetes számhoz egyértelműen van olyan $\nu_n \in \mathbf{N}$, hogy

$$m_{\nu_n} \le n < m_{\nu_n+1}.$$

Ekkor

$$|S_n - \Theta_{\nu_n}| = \left|S_n - S_{m_{\nu_n+1}-1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m_{\nu_n+1}-1} x_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m_{\nu_n+1}-1} |x_k| \le$$

$$(m_{\nu_n+1} - 1 - n) \cdot \max\{|x_k| : k = n+1, ..., m_{\nu_n+1} - 1\} \le$$

$$(m_{\nu_n+1} - m_{\nu_n}) \cdot \max\{|x_k| : k = n+1, ..., m_{\nu_n+1} - 1\}.$$

Ha tehát

$$q := \sup\{m_{k+1} - m_k : k \in \mathbf{N}\} \ , \ y_n := \sup\{|x_k| : k \in \mathbf{N}, k \ge n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor

$$|S_n - \Theta_{\nu_n}| \le q y_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A feltételeink szerint $\lim(x_n) = 0$, azaz bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel $|x_n| < \delta$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$. Ezért $y_n \le \delta$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$. Mivel $\alpha = \lim(\Theta_n)$, ezért az előbbi $\delta > 0$ számhoz van olyan $M \in \mathbf{N}$, hogy

$$|\Theta_k - \alpha| < \delta \qquad (k \in \mathbf{N}, k > M).$$

Innen a fentiek alapján azt kapjuk, hogy

$$|S_n - \alpha| = |(S_n - \Theta_{\nu_n}) + (\Theta_{\nu_n} - \alpha)| \le |S_n - \Theta_{\nu_n}| + |\Theta_{\nu_n} - \alpha| \le$$

$$(*) \qquad q y_{n+1} + |\Theta_{\nu_n} - \alpha| \le q\delta + \delta \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N, \nu_n > M).$$

Jegyezzük meg, hogy a (ν_n) sorozat monoton növő és $\lim(\nu_n) = +\infty$. Ha ui. $n \in \mathbf{N}$ és

$$m_{\nu_n} \le n < n+1 < m_{\nu_n+1},$$

akkor $\nu_{n+1} = \nu_n$. Ha viszont $n+1 \ge m_{\nu_n+1}$, akkor $\nu_{n+1} \ge \nu_n + 1$. Így $\lim(\nu_n) < +\infty$ esetén valamilyen $K \in \mathbf{N}$ természetes számmal $\nu_n < K$ $(n \in \mathbf{N})$ teljesülne. Ezért az (m_n) sorozat szigorúan monoton növekedése alapján

$$n < m_{\nu_n+1} \le m_K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ez viszont azt jelentené, hogy a természetes számok halmaza felülről korlátos, ami nem igaz.

Van tehát olyan $R \in \mathbf{N}$, hogy $\nu_n > M$ $(n \in \mathbf{N}, n > R)$, azaz (ld. $(*)$)

$$|S_n - \alpha| \le q\delta + \delta \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}).$$

Ugyanakkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz meg tudjuk választani a $\delta > 0$ számot úgy, hogy $q\delta + \delta < \varepsilon$. Ekkor

$$|S_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}),$$

amiből az (S_n) sorozat konvergenciája (és $\lim(S_n) = \alpha$) már következik (ld. 3.7.2. Tétel). $\blacksquare$

4.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ *és a* $\sum(x_n)$ *végtelen sor abszolút konvergens. Ekkor bármely* $\sum(x_{p(n)})$ *átrendezése is abszolút konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Bizonyítás. Legyen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \ , \ \ \Delta_n := \sum_{k=0}^{n} x_{p(k)} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ha most

$$\nu_n := \max\{p(k) : k = 0, ..., n\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

akkor nyilván

$$\{x_{p(0)}, ..., x_{p(n)}\} \subset \{x_0, ..., x_{\nu_n}\} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{p(k)}| \le \sum_{k=0}^{\nu_n} |x_k| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\sum(x_n)$ sor feltételezett abszolút konvergenciája miatt a $\sum_{k=0}^{m} |x_k|$ $(m \in \mathbf{N})$ részletösszegek sorozata korlátos, azaz

$$q := \sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |x_k| : m \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Figyelembe véve a fentieket azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{p(k)}| \le q \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

amiből az átrendezett sor abszolút konvergenciája már következik (ld. 3.5.3. Tétel).

Az átrendezett sor tehát konvergens is (ld. 4.1.), jelöljük α-val a limeszét:

$$\alpha := \lim(\Delta_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{p(n)}.$$

Mivel $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijekció, ezért tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ indexhez van olyan $\mu_n \in \mathbf{N}$, hogy

$$\{0, ..., n\} \subset \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\},$$

ti. legyen

$$\mu_n := \max\left\{p^{-1}(k) : k = 0, ..., n\right\}.$$

Ezért (az $\mathcal{N}_n := \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\} \setminus \{0, ..., n\}$ jelöléssel)

$$|S_n - \alpha| = |(S_n - \Delta_{\mu_n}) + (\Delta_{\mu_n} - \alpha)| \le |S_n - \Delta_{\mu_n}| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| =$$

$$\left|\sum_{k \in \mathcal{N}_n} x_k\right| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| + |\Delta_{\mu_n} - \alpha| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

A $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciáját figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ indexszel

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

A $\lim(\Delta_n) = \alpha$ egyenlőség alapján pedig valamilyen $M \in \mathbf{N}$ mellett

$$|\Delta_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m \in \mathbf{N}, m > M).$$

Gondoljuk meg továbbá, hogy található olyan $R \in \mathbf{N}$ index is, hogy

$$\mu_n > M \qquad (n \in \mathbf{N}, n > R).$$

Ellenkező esetben ui. a $\mu_n \leq M$ becslés végtelen sok $n \in \mathbf{N}$ esetén fennállna, azaz a

$$\{0, ..., n\} \subset \{p(k) : k = 0, ..., \mu_n\} \subset \{p(j) : j = 0, ..., M\}$$

tartalmazások is. Így az

$$n \leq \max\{p(j) : j = 0, ..., M\}$$

becslés is végtelen sok $\mathbf{N} \ni n$-re teljesülne, ami nem lehetséges.

Mindezt összefoglalva tehát

$$|S_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n \in \mathbf{N}, n > \max\{N, R\}).$$

Ez pontosan azt jelenti (ld. 3.7.2. Tétel), hogy az (S_n) sorozat (azaz a $\sum(x_n)$ sor) konvergens és

$$\lim(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha.$$

■

4.3.10. Tétel (Mertens). *Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok konvergensek és legalább az egyikük abszolút konvergens. Ekkor a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Ha $\sum(x_n)$ is és $\sum(y_n)$ is abszolút konvergens, akkor $\sum(c_n)$ is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens (is) és legyen

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ , \ B := \sum_{k=0}^{\infty} y_k.$$

Tekintsük valamely $2 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén a $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} x_j y_{k-j} \quad (n \in \mathbf{N})$ Cauchy-részletösszeg alábbi előállítását:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j = \sum_{k=0}^{m_n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j,$$

ahol $m_n := [n/2]$ (az n szám egészrésze, azaz $m_n \in \mathbf{N}$ és $n/2 - 1 < m_n \le n/2$). Következésképpen

$$C_n - AB = \sum_{k=0}^{m_n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j - AB + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j =$$

$$\sum_{k=0}^{m_n} x_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} y_j - B \right) + B \left(\sum_{k=0}^{m_n} x_k - A \right) + \sum_{k=m_n+1}^{n} x_k \sum_{j=0}^{n-k} y_j$$

és így

$$|C_n - AB| \le \sum_{k=0}^{m_n} |x_k| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n-k} y_j - B \right| + |B| \cdot \left| \sum_{k=0}^{m_n} x_k - A \right| + \sum_{k=m_n+1}^{n} |x_k| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n-k} y_j \right| .$$

Mivel a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, a $\sum(y_n)$ sor pedig konvergens, ezért

$$Q := \sup \left\{ \sum_{l=0}^{s} |x_l| : s \in \mathbf{N} \right\} < +\infty \ \ , \ \ q := \sup \left\{ \left| \sum_{l=0}^{s} y_l \right| : s \in \mathbf{N} \right\} < +\infty,$$

ill. tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ (mindkét sor esetén „jó”) küszöbindex, amellyel

$$\left| \sum_{l=0}^{s} x_l - A \right| < \varepsilon \ \ , \ \ \left| \sum_{l=0}^{s} y_l - B \right| < \varepsilon \qquad (s \in \mathbf{N}, s > N).$$

A $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciája és a Cauchy-kritérium (ld. 4.1.2. Tétel) miatt az előbbi N-ről az is feltehető, hogy

$$\sum_{k=r}^{p} |x_k| < \varepsilon \qquad (r, p \in \mathbf{N}, r > p > N).$$

Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $n > 2(N+1)$, ekkor

$$n > \frac{n}{2} \ge m_n > \frac{n}{2} - 1 > N,$$

továbbá bármely $k = 0, ..., m_n$ esetén $n - k \ge n - m_n \ge n/2 > N$. Ezért

$$|C_n - AB| \le Q\varepsilon + |B|\varepsilon + \varepsilon q = (Q + |B| + q)\varepsilon$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy a (C_n) sorozat (azaz a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzat) konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim(C_n) = AB = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n .$$

Ha mind a két sor, $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ abszolút konvergens, akkor alkalmazzuk az eddig bebizonyítottakat a $\sum(|x_n|)$, $\sum(|y_n|)$ sorokra. Legyen tehát

$$d_n := \sum_{j,k \in \mathbf{N}, j+k=n} |x_k| \cdot |y_j| \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor a $\sum(d_n)$ sor az eddigiek alapján konvergens, azaz

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} d_k : n \in \mathbf{N} \right\} < +\infty.$$

Mivel

$$|c_n| = \left| \sum_{j,k\in\mathbf{N},j+k=n} x_k y_j \right| \leq \sum_{j,k\in\mathbf{N},j+k=n} |x_k|\cdot |y_j| = d_n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{k=0}^{n} d_k \ \ (n \in \mathbf{N})$, azaz

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |c_k| : n \in \mathbf{N}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} d_k : n \in \mathbf{N}\right\} < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum(|c_n|)$ sor konvergens, más szóval a $\sum(c_n)$ Cauchy-szorzat abszolút konvergens. ■

4.3.11. Tétel. *Tetszőleges $\alpha \in [0,1]$ számhoz megadható olyan*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \{0, ..., p-1\}$$

sorozat, amellyel

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}}.$$

Bizonyítás. Ha $\alpha = 1$, akkor az $x_n := p-1 \ \ (n \in \mathbf{N})$ választás megfelelő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p-1}{p^{n+1}} = (p-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{p-1}{p}\cdot \frac{1}{1-1/p} = 1.$$

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $\alpha < 1$. Tekintsük a

$$\left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right) \qquad (k = 0, ..., p-1)$$

intervallumokat. Ekkor

$$I_0 := [0,1) = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}\right)$$

egy páronként diszjunkt halmazokból álló felbontása a $[0,1)$ intervallumnak. Egyértelműen létezik ezért olyan $x_0 \in \{0, ..., p-1\}$, hogy

$$\alpha \in I_1 := \left[\frac{x_0}{p}, \frac{x_0+1}{p}\right).$$

Más szóval

$$\frac{x_0}{p} \leq \alpha < \frac{x_0+1}{p},$$

amiből rögtön következik az is, hogy

$$0 \leq \alpha - \frac{x_0}{p} < \frac{1}{p}.$$

Ha most az

$$I_1 = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\frac{x_0}{p} + \frac{k}{p^2}, \frac{x_0}{p} + \frac{k+1}{p^2}\right)$$

szintén páronként diszjunkt halmazokból álló felbontását tekintjük az I_1 intervallumnak, akkor egyértelműen van olyan $x_1 \in \{0, ..., p-1\}$, hogy

$$\alpha \in I_2 := \left[\frac{x_0}{p} + \frac{x_1}{p^2}, \frac{x_0}{p} + \frac{x_1+1}{p^2}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy
$$\frac{x_0}{p} + \frac{x_1}{p^2} \le \alpha < \frac{x_0}{p} + \frac{x_1+1}{p^2},$$
azaz
$$0 \le \alpha - \left(\frac{x_0}{p} + \frac{x_1}{p^2}\right) < \frac{1}{p^2}.$$
Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ mellett már definiáltuk az $I_0, ..., I_n$ intervallumokat, ill. ($n \ge 1$ esetén) az $x_0, ..., x_{n-1} \in \{0, ..., p-1\}$ számokat és
$$\alpha \in I_n = \bigcup_{k=0}^{p-1} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{k}{p^{n+1}}, \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{k+1}{p^{n+1}}\right).$$
Ekkor egyértelműn adható meg az az $x_n \in \{0, ..., p-1\}$ szám, amellyel
$$\alpha \in I_{n+1} := \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{x_n}{p^{n+1}}, \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{p^{j+1}} + \frac{x_n+1}{p^{n+1}}\right).$$
Tehát azt mondhatjuk, hogy
$$(*) \qquad 0 \le \alpha - \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{p^{j+1}} < \frac{1}{p^{n+1}}.$$
Tudjuk (ld. 3.9.2. Tétel), hogy $\lim(1/p^{n+1}) = 0$. Tehát az (x_n) sorozattal $(*)$ alapján
$$\lim\left(\alpha - \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{p^{j+1}}\right) = 0,$$
azaz
$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{p^{j+1}}.$$
■

4.5.1. Tétel. *Bármely* $a, a_n \in \mathbf{K}$ $(n \in \mathbf{N})$ *esetén megadható olyan* $0 \le r \in \overline{\mathbf{R}}$, *hogy*

1^o *ha* $r > 0$, *akkor minden* $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| < r$ *helyen a* $\sum\big(a_n(t-a)^n\big)$ *hatványsor az* x *helyen abszolút konvergens*;

2^o *ha* $r < +\infty$, *akkor tetszőleges* $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$ *mellett a* $\sum\big(a_n(t-a)^n\big)$ *hatványsor az* x *helyen divergens.*

Bizonyítás. Lássuk be először, hogy ha a szóban forgó hatványsor valamely $z \in \mathbf{K}$, $|z-a| > 0$ helyen konvergens, akkor minden $y \in \mathbf{K}$, $|y-a| < |z-a|$ esetén y-ban abszolút konvergens. Valóban, a
$$q := \frac{|y-a|}{|z-a|}$$
jelöléssel $0 \le q < 1$ és
$$\big|a_k(y-a)^k\big| = \big|a_k(z-a)^k\big| \cdot q^k \qquad (k \in \mathbf{N}).$$
Mivel a hatványsorunk z-ben konvergens, ezért (ld. 4.1.1. Tétel) $\lim\big(a_n(z-a)^n\big) = 0$, így (ld. 3.5.4. Tétel) van olyan $K \ge 0$, hogy
$$\big|a_n(z-a)^n\big| \le K \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen

$$\left|a_k(y-a)^k\right| = Kq^k \qquad (k \in \mathbf{N}),$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k(y-a)^k\right| \le K \sum_{k=0}^{\infty} q^k < +\infty.$$

Legyen ezek után

$$r := \sup\left\{|z-a| : z \in \mathbf{K},\ \sum \left(a_n(t-a)^n\right) \text{ konvergens } z\text{-ben}\right\}.$$

Tegyük fel először, hogy $r > 0$. Ha $x \in \mathbf{K}$ és $|x-a| < r$, akkor (a szuprémum definíciója miatt) van olyan $z \in \mathbf{K}$, amelyre $|x-a| < |z-a| < r$ és $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ abszolút konvergens z-ben. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x-a|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z-a|^k < +\infty, .$$

azaz a $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens.

Ha $r < +\infty$ és lenne olyan $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$, hogy $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ konvergens x-ben, akkor az előbbiek miatt bármely $z \in \mathbf{K}$, $r < |z-a| < |x-a|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens lenne z-ben. Az r definíciója alapján tehát $|z-a| \le r$, szemben $r < |z-a|$-val. ■

4.5.2. Tétel (Cauchy-Hadamard). *Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$ sorozat esetén létezik a*

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

határérték és legyen

$$r := \begin{cases} +\infty & \left(\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 0\right) \\[2ex] \dfrac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} & \left(\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > 0\right). \end{cases}$$

Ekkor bármely $a \in \mathbf{K}$ mellett a $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsorról a következőket mondhatjuk:

1^o *ha $r > 0$, akkor minden $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| < r$ helyen a $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsor az x helyen abszolút konvergens;*

2^o *ha $r < +\infty$, akkor tetszőleges $x \in \mathbf{K}$, $|x-a| > r$ mellett a $\sum \left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsor az x helyen divergens.*

Bizonyítás. Legyen $a \ne x \in \mathbf{K}$, ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-a| \qquad (n \in \mathbf{N}, n \ge 2),$$

így

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \cdot |x-a|.$$

Ha tehát $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = 0$, akkor $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}\right) = 0 < 1$, ha pedig

$$0 < \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < +\infty$$

(azaz $0 < r < +\infty$), akkor

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}\right) = \frac{|x-a|}{r}.$$

Ezért $0 < |x-a| < r$ esetén $\lim\left(\sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}\right) < 1$. A Cauchy-féle gyök-kritérium (ld. 4.3.1. Tétel) szerint így a $\sum\left(a_n(t-a)^n\right)$ hatványsor az x-ben abszolút konvergens (a 0-ban pedig triviális módon az).

Ezzel 1^o-et beláttuk, a 2^o állítás analóg módon adódik. ■

5.1.1. Tétel. *Bármely $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ halmaz és $\alpha \in \overline{\mathbf{K}}$ esetén fennáll a következő ekvivalencia: $\alpha \in A'$ akkor és csak akkor igaz, ha az α bármely $K(\alpha)$ környezetére az $A \cap K(\alpha)$ metszet végtelen halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás egyik „iránya" nyilvánvaló: ha az $A \cap K(\alpha)$ metszet minden $K(\alpha)$ környezetre végtelen halmaz, azaz $K(\alpha)$-ban végtelen sok A-beli elem van, akkor ezek között olyan is van, amelyik különbözik α-tól. Következésképpen $\big(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}\big) \cap A \neq \emptyset$, így $\alpha \in A'$.

Most tegyük fel azt, hogy $\alpha \in A'$ és indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamely $K(\alpha)$ esetén $A \cap K(\alpha)$ véges halmaz. Mivel $\alpha \in A'$, ezért $\big(K(\alpha) \setminus \{\alpha\}\big) \cap A \neq \emptyset$ (és ez a halmaz is véges). Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\alpha \in \mathbf{K}$. Legyen

$$0 < r < \min\{|x-\alpha| : \alpha \neq x \in A \cap K(\alpha)\}.$$

Világos, hogy $\big(K_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}\big) \cap A = \emptyset$, szemben az $\alpha \in A'$ feltételezésünkkel.

Ha az előbbiekben $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ és $\alpha = +\infty$, ill. valamilyen $\mathbf{R} \ni p$-vel $K(\alpha) = (p, +\infty)$, akkor az indirekt feltétel szerint

$$A \cap K(\alpha) = \{a_0, ..., a_s\}$$

alkalmas $s \in \mathbf{N}$ és A-beli $p < a_0 < ... < a_s$ elemekkel. Tehát bármely $r \in \mathbf{R}, r > a_s$ mellett a

$$\widetilde{K}(\alpha) := (r, +\infty)$$

választással $A \cap \widetilde{K}(\alpha) = \emptyset$, ismét csak ellentétben (most) a $+\infty \in A'$ feltételezésünkkel.

Ugyanígy „intézhetjük el" az $\alpha = -\infty$ esetet is.

Legyen végül $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ és $\alpha = \infty$. Ha

$$r := \max\{|z| : z \in A \cap K(\alpha)\},$$

akkor bármely $s \in \mathbf{R}, s > r$ esetén a

$$\widetilde{K}(\alpha) := \{z \in \mathbf{C} : |z| > s\}$$

környezetre $A \cap \widetilde{K}(\alpha) = \emptyset$. Mindez ellentmond annak, hogy $\alpha = \infty \in A'$. ■

5.1.2. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbf{K}$ és $\alpha \in \overline{\mathbf{K}}$. Az α akkor és csak akkor torlódási pontja A-nak, ha van olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozat, amelynek létezik határértéke és $\lim(x_n) = \alpha$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\alpha \in A'$ és α egy szám, azaz $\alpha \in \mathbf{K}$. Ekkor bármely $0 < n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy $x_n \in K_{1/n}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$. Következésképpen $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ és

$$|x_n - \alpha| < \frac{1}{n} \qquad (0 < n \in \mathbf{N}).$$

Mindez azt jelenti (ld. 3.7.1., 3.7.2., 3.9.1. Tételek), hogy $\lim(x_n) = \alpha$.

Ha $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\alpha = +\infty \in A'$, akkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ számhoz létezik olyan $x_n \in A$, amelyre $x_n > n$. Ha $p \in \mathbf{R}$ tetszőleges és az $N \in \mathbf{N}$ indexre $N > p$, akkor minden $n \in \mathbf{N}, n > N$ mellett $x_n > n > N > p$, azaz $x_n > p$. Ezért $\lim(x_n) = +\infty$.

Analóg módon következik a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\alpha = -\infty \in A'$ esetben olyan $(x_n) : \mathbf{N} \to A$ sorozat létezése, amelyre $\lim(x_n) = -\infty$.

Legyen most $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $\alpha = \infty \in A'$. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén van olyan $x_n \in A$, hogy $|x_n| > n$. Innen (ld. az előbbi okfejtést) azt kapjuk, hogy $\lim\big(|x_n|\big) = +\infty$. Más szóval $\lim(x_n) = \infty$.

Induljunk ki most abból, hogy valamely $(x_n) : \mathbf{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ sorozatra $\lim(x_n) = \alpha$. Ekkor bármely $K(\alpha)$ környezetet is véve létezik olyan $k \in \mathbf{N}$ (sőt, egy küszöbindextől kezdve minden $k \in \mathbf{N}$ ilyen), amelyre $x_k \in K(\alpha)$. Mivel $\mathcal{R}_{(x_n)} \subset A \setminus \{\alpha\}$, így $x_k \neq \alpha$, ezért egyúttal

$$x_k \in (K(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap A$$

is igaz. Ez azt jenti, hogy $\alpha \in A'$. ■

5.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ helyen van határértéke. Ekkor egyértelműen létezik olyan $A \in \overline{\mathbf{K}_2}$, amely eleget tesz a fenti definíciónak, azaz bármely $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezethez van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy $f(x) \in K(A)$ $\quad (a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $B \in \overline{\mathbf{K}_2}$ is eleget tesz a tételben idézett definíciónak: tetszőleges $K(B) \subset \mathbf{K}_2$ környezethez megválasztható a $k^*(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet úgy, hogy $f(x) \in K(B)$ $(a \neq x \in k^*(a) \cap \mathcal{D}_f)$. Ezért

$$(*) \qquad f(x) \in K(A) \cap K(B) \qquad \big(a \neq x \in \big(k(a) \cap k^*(a)\big) \cap \mathcal{D}_f\big)$$

(ahol egyébként a $k(a) \cap k^*(a)$ halmaz is nyilván egy környezete a-nak). Ha itt (indirekt feltételezéssel élve) $B \neq A$ állna fenn, akkor (a tételbeli) $K(A)$ és a most mondott $K(B)$ környezet nyilván megválasztható úgy, hogy $K(A) \cap K(B) = \emptyset$. Világos, hogy mindez ellentmond $(*)$-nak. ■

5.3.2. Tétel (átviteli elv). *Bármely $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény és $a \in \mathcal{D}_f'$ esetén az f-nek az a helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha tetszőleges*

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \ , \ \lim(x_n) = a$$

sorozatra az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke. Ha létezik az $A := \lim_a f$ határérték, akkor az előbbiekben említett minden (x_n) sorozatra

$$\lim\big(f(x_n)\big) = A.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim_a f$ határérték. Ekkor bármely $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezethez van olyan $k(a) \subset \mathbf{K}_1$ környezet, hogy

$$f(x) \in K(A) \qquad \big(a \neq x \in \mathcal{D}_f \cap k(a)\big).$$

Ha (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, akkor az előbbi $k(a)$ környezethez megadható olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, amellyel

$$a \neq x_n \in k(a) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Következésképpen

$$f(x_n) \in K(A) \qquad (n \in \mathbf{N}, n > N).$$

Mindez éppen azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke és $\lim\big(f(x_n)\big) = A$.

Most tegyük fel azt, hogy bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ esetén az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke. Mutassuk meg először azt, hogy ekkor minden, a most említett (x_n) sorozatra $\lim\big(f(x_n)\big)$ ugyanaz a $\overline{\mathbf{K}_2}$-beli elem. Valóban, ha $(\tilde{x}_n)$ is egy ilyen sorozat, akkor legyen

$$x_n^* := \begin{cases} x_{n/2} & (n = 2k) \\ \tilde{x}_{(n-1)/2} & (n = 2k+1) \end{cases} \qquad (n, k \in \mathbf{N}).$$

Ekkor $(x_n^*) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ és (könnyen láthatóan) létezik a $\lim(x_n^*) = a$ határérték. Következésképpen az $\big(f(x_n^*)\big)$ sorozatnak is van határértéke. Viszont (ld. 3.5.2. Tétel)

$$\lim\big(f(x_n^*)\big) = \lim\big(f(x_{2n}^*)\big) = \lim\big(f(x_n)\big) = \lim\big(f(x_{2n+1}^*)\big) = \lim\big(f(\tilde{x}_n)\big),$$

így $\lim\big(f(\tilde{x}_n)\big) = \lim\big(f(x_n)\big)$. Legyen tehát $A := \lim\big(f(x_n)\big)$, ahol (x_n) valamely, a tételben szereplő sorozat. Lássuk be, hogy f-nek az a helyen van határértéke és

$$\lim_a f = A.$$

Indirekt úton ui. tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor egy alkalmas $K(A) \subset \mathbf{K}_2$ környezettel bármilyen $\mathbf{K}_1 \supset k(a)$-t is választunk, valamilyen $a \neq x \in k(a) \cap \mathcal{D}_f$ elemmel $f(x) \notin K(A)$. Ha itt $a \in \mathbf{K}_1$ („véges hely”), akkor tetszőleges $0 < n \in \mathbf{N}$ mellett a

$$k(a) := k_{1/n}(a)$$

választással kapunk egy olyan $a \neq x_n \in k_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f$ elemet, amelyre $f(x_n) \notin K(a)$. Mivel

$$0 < |x_n - a| < 1/n \qquad (0 < n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim(x_n) = a$. Így a feltételek miatt $\lim\big(f(x_n)\big) = A$. Ez azt jelenti, hogy az előbbi $K(A)$ környezethez lennie kell olyan $M \in \mathbf{N}$ küszöbindexnek, amellyel $f(x_n) \in K(A)$ $(n \in \mathbf{N}, n > M)$. Ez nyilván ellentmond annak, hogy $f(x_n) \notin K(A)$ $(0 < n \in \mathbf{N})$.

Ha az előbbiekben $\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}$ és (pl.) $a = +\infty$, akkor a most mondottakat annyiban kell csak módosítani, hogy az ott szereplő x_n-ekre (a $k(a) := K_n(+\infty)$ választás után) $x_n > n$ teljesül. Ezért $\lim(x_n) = +\infty$ és innentől kezdve u. az a bizonyítás, mint az $a \in \mathbf{K}$ esetben. Analóg az okoskodás az $a = -\infty$, ill. a $\mathbf{K}_1 = \mathbf{C}$, $a = \infty$ esetekben is. ■

5.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ és az $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathcal{D}_g'$ pontban léteznek az $A := \lim_a f$, $B := \lim_a g$ határértékek. Tegyük fel továbbá, hogy*

i) *$a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ és létezik az $A + B \in \overline{\mathbf{K}_2}$ összeg, ekkor az $f + g$ összegfüggvénynek az a helyen van határértéke és*
$$\lim_a (f+g) = A + B;$$

ii) *$a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ és létezik az $AB \in \overline{\mathbf{K}_2}$ szorzat, ekkor az fg szorzatfüggvénynek az a helyen van határértéke és*
$$\lim_a (fg) = AB;$$

iii) *$a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \neq 0\}\big)'$ és létezik az $A/B \in \overline{\mathbf{K}_2}$ hányados, ekkor az f/g hányados-függvénynek az a helyen van határértéke és*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás.

Legyen $(x_n) : \mathbf{N} \to \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big) \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ (a iv) esetben azt is feltételezve, hogy $g(x_n) \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Ekkor egyúttal $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$ is igaz, ezért (ld. 5.3.2. Tétel)

$$\lim\big(f(x_n)\big) = A \;\; , \;\; \lim\big(g(x_n)\big) = B.$$

Alkalmazható tehát a 3.7.10. Tétel, miszerint

i) $\lim\big((f+g)(x_n)\big) = \lim\big(f(x_n)+g(x_n)\big) = A+B$;

ii) $\lim\big((fg)(x_n)\big) = \lim\big(f(x_n)g(x_n)\big) = AB$;

iii) $\lim\big((f/g)(x_n)\big) = \lim\big(f(x_n)/g(x_n)\big) = A/B$.

Következésképpen az 5.2.2. Tétel alapján rendre azt kapjuk, hogy létezik a

i) $\lim_a(f+g) = A+B = \lim_a f + \lim_a g$;

ii) $\lim_a(fg) = AB = \big(\lim_a f\big)\cdot\big(\lim_a g\big)$;

iii) $\lim_a(f/g) = A/B = \big(\lim_a f\big)/\big(\lim_a g\big)$

határérték. ■

5.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\big(a_n(t-a)^n\big)$ *hatványsor* r *konvergencia-sugara nem nulla és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \big(x\in K_r(a)\big).$$

Ekkor bármely $b\in K_r(a)$ *esetén létezik a* $\lim_b f$ *határérték és*

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-a)^n.$$

Bizonyítás (vázlat). Tegyük fel először, hogy $b=a$. Ekkor $x\in K_r(a)$ esetén

$$|f(x)-f(a)| = |f(x)-a_0| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n\right| =$$

$$|x-a|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1}\right| \le |x-a|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x-a|^{n-1}.$$

Legyen $a\ne x_0\in K_r(a)$ és $x\in K_r(a)$, $|x-a|<|x_0-a|$. A fentiek szerint azt mondhatjuk, hogy

$$|f(x)-f(a)| \le |x-a|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot|x_0-a|^{n-1} =$$

$$|x-a|\cdot\frac{1}{|x_0-a|}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|x_0-a|^n := M\cdot|x-a|.$$

Ha tehát $\varepsilon>0$ tetszőleges és $0<\delta<|x_0-a|$ olyan, hogy $M\delta<\varepsilon$, akkor

$$|f(x)-f(a)| \le M\delta < \varepsilon \qquad (x\in\mathbf{K}, 0<|x-a|<\delta).$$

Ez azt jelenti, hogy létezik a $\lim_a f = f(a)$ határérték.

Legyen most $b\in K_r(a)$ tetszőleges, $\rho := r-|b-a|$ (>0). Gondoljuk meg először, hogy bármely $x\in K_\rho(b)$ esetén $x\in K_r(a)$. Valóban,

$$|x-a| = |(x-b)+(b-a)| \le |x-b|+|b-a| < \rho+|b-a| = r.$$

Az előbbi $x\in K_\rho(b)$ helyeken ezért kiszámolhatjuk $f(x)$-et: a binomiális tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((x-b)+(b-a)\big)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(x-b)^k.$$

Belátható (ennek a bizonyításától itt eltekintünk), hogy minden $k \in \mathbf{N}$ mellett léteznek a véges

$$c_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (b-a)^{n-k}$$

sorösszegek és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(x-b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-b)^k.$$

A bizonyítás elején mondottak szerint a

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-b)^k \qquad \big(x \in K_\rho(b)\big)$$

jelöléssel létezik a $\lim_b g$ határérték és

$$\lim_b g = g(b) = c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (b-a)^n = f(b).$$

Figyelembe véve az $f(x) = g(x)$ $\big(x \in K_\rho(b)\big)$ egyenlőséget és a határérték definícióját világos, hogy egyúttal a $\lim_b f$ határérték is létezik, és $f(b) = \lim_b g = \lim_b f$. ■

5.5.2. Tétel (átviteli elv folytonosságra). *Legyen* $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in \mathcal{C}\{a\}$ *azzal ekvivalens, hogy bármely* $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ *sorozatra*

$$\lim\big(f(x_n)\big) = f(a).$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f \in \mathcal{C}\{a\}$, és legyen (x_n) egy, a tételben említett sorozat. Ha $a \in \mathcal{D}'_f$ is igaz, akkor $\lim_a f = f(a)$. A határértékre vonatkozó átviteli elv miatt ezért $x_n \neq a$ $(n \in \mathbf{N})$ esetén $\lim_a f = f(a) = \lim_a \big(f(x_n)\big)$. Mivel $a \in \mathcal{D}'_f \cap \mathcal{D}_f$ és $\lim_a f = f(a)$, ezért nyilván ugyanez mondható akkor is, ha a szóban forgó (x_n) sorozat tagjai között az a is szerepel. Ha viszont $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$, akkor egy alkalmas $K(a)$ környezettel $K(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$. A $\lim(x_n) = a$ egyenlőség miatt viszont egy $N \in \mathbf{N}$ indexszel $x_n \in K(a)$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$, más szóval $x_n = a$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$. Így $f(x_n) = f(a)$ $(n \in \mathbf{N}, n > N)$, amiből $\lim\big(f(x_n)\big) = f(a)$ nyilvánvaló.

Fordítva, ha bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, $\lim(x_n) = a$ sorozatra $\lim_a \big(f(x_n)\big) = f(a)$, akkor tegyük fel indirekt módon, hogy $f \notin \mathcal{C}(a)$. Ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $\varepsilon > 0$ mellett bármely $\delta > 0$ számhoz van olyan $x \in \mathcal{D}_f$, amellyel $|x - a| < \delta$, de

$$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Speciálisan minden $0 < n \in \mathbf{N}$ számhoz létezik olyan $x_n \in \mathcal{D}_f$, hogy $|x_n - a| < 1/n$ és $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Világos, hogy $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(x_n) = a$. A feltétel miatt ezért a $\lim\big(f(x_n)\big) = f(a)$ egyenlőségnek kellene teljesülnie, ami $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ $(n \in \mathbf{N})$ miatt nem lehetséges. ■

5.5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$, $g \in \mathcal{C}\{a\}$ *és* $f \in \mathcal{C}\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$.

Bizonyítás. Mivel a feltételezés szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$. Ha

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$$

és $\lim(x_n) = a$, akkor $\mathcal{D}_{f\circ g} \subset \mathcal{D}_g$ miatt egyúttal

$$(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_g.$$

Ezért az 5.5.2. Tételt a g-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim \big(g(x_n)\big) = g(a).$$

Ugyanakkor $\big(g(x_n)\big) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$, ezért újra csak az 5.5.2. Tételt (most az f-re) alkalmazva azt mondhatjuk, hogy

$$\lim \big(f(g(x_n)\big) = f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

Mivel ez utóbbi bármely $(x_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_{f\circ g}$, $\lim(x_n) = a$ esetén igaz, ezért az 5.5.2. Tételből már következik, hogy $f \circ g \in \mathcal{C}\{a\}$. ■

5.5.4. Tétel (Bolzano). *Tegyük fel, hogy valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén az $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos és $f(a)\cdot f(b) < 0$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$, amely „gyöke" az f függvénynek, azaz $f(\xi) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen pl. $f(a) < 0 < f(b)$ és

$$a_0 := a \ \ , \ \ b_0 := b \ \ , \ \ c_0 := \frac{a+b}{2}.$$

Három eset lehetséges;

i) $f(c_0) = 0$, ekkor $\xi := c_0$ gyöke az f-nek.

ii) $f(c_0) > 0$, ekkor legyen $a_1 := a$, $b_1 := c_0$.

iii) $f(c_0) < 0$, ekkor legyen $a_1 := c_0$, $b_1 := b$.

Világos, hogy a ii), iii) esetekben $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén már ismertek az $a \le a_i < b_i \le b$ pontok és

$$f(a_i) < 0 < f(b_i) \qquad (i = 0, ..., n).$$

Legyen ekkor

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ismételjük meg az „első lépést":

i) ha $f(c_n) = 0$, akkor $\xi := c_n$ gyöke az f-nek;

ii) ha $f(c_n) > 0$, ekkor legyen $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := c_n$;

iii) $f(c_n) < 0$, ekkor legyen $a_{n+1} := c_n$, $b_{n+1} := b_n$

és

$$c_{n+1} := \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

Nyilvánvaló, hogy minket csak a ii), iii) esetek „érdekelnek" már a továbbiakban, más szóval feltehetjük, hogy ezzel az eljárással kaptunk egy-egy $(a_n), (b_n) : \mathbf{N} \to [a, b]$ sorozatot, $a \le a_n < b_n \le b \ \ (n \in \mathbf{N})$ és

$$f(a_n) < 0 < f(b_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Teljes indukcióval rögtön adódik, hogy

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Valóban, ha $n = 0$, akkor $a_0 = a, b_0 = b$, $2^0 = 1$ miatt a dolog triviális. Ha valamilyen $n \in \mathbf{N}$ esetén fennáll a bizonyítandó egyenlőség, akkor

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} c_n - a_n \\ \text{vagy} \\ b_n - c_n \end{cases},$$

így

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Az (a_n), (b_n) sorozatok konstrukciójából és a nyilvánvaló

$$a_n < c_n < b_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

becslésből rögtön következik, hogy $(a_n) : \mathbf{N} \to [a,b]$ monoton növekedő, $(b_n) : \mathbf{N} \to [a,b]$ monoton fogyó. Mivel az $[a,b]$ intervallum korlátos, ezért (ld. 3.5.3. Tétel) az (a_n), (b_n) sorozatok konvergensek és könnyen beláthatóan

$$\xi := \lim(a_n) \in [a,b] \ , \ \eta := \lim(b_n) \in [a,b].$$

(Ui.: (pl.) $\xi < a$ esetén $\xi := \lim(a_n)$ miatt egy alkalmas $N \in \mathbf{N}$ mellett $x_k < a \quad (k \in \mathbf{N},\ k > N)$ teljesülne, ami $\mathcal{R}_{(x_n)} \subset [a,b]$-ből következően nem lehetséges, stb.) A konvergens sorozatokkal kapcsolatos eredményeink alapján

$$|\xi - \eta| = \lim\big(|a_n - b_n|\big) \leq \lim\left(\frac{b-a}{2^n}\right) = 0,$$

ezért $\xi = \eta$. Az átviteli elv (ld. 5.5.2 Tétel) és $f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad (n \in \mathbf{N})$ alapján tehát

$$0 \geq \lim\big(f(b_n)\big) = f(\xi) = \lim\big(f(a_n)\big) \leq 0,$$

következésképpen $f(\xi) = 0$. Világos, hogy $f(a) < 0 < f(b)$ miatt $\xi \in (a,b)$. ■

Tegyük most fel, hogy az előbbi $[a,b]$ zárt intervallum esetén a $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos és legyen $g(a) \neq g(b)$, pl. $g(a) < g(b)$. Ha $y \in \mathbf{R}$ és

$$g(a) < y < g(b),$$

akkor az $f := g - y$ függvényre triviális módon teljesülnek az előző Bolzano-tétel feltételei. Ezért van olyan $\xi \in (a,b)$, amellyel $f(\xi) = g(\xi) - y = 0$, azaz $g(\xi) = y$. Ezzel beláttuk az 5.5.4. Tétel alábbi kiterjesztését:

5.5.5. Tétel. *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény folytonos és $f(a) \neq f(b)$. Ekkor $f(a) < f(b)$ esetén tetszőleges*

$$f(a) < y < f(b)$$

számhoz, ill. $f(a) > f(b)$ esetén tetszőleges

$$f(a) > y > f(b)$$

számhoz van olyan $\xi \in (a,b)$, amellyel $f(\xi) = y$.

5.5.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor az értékkészlete vagy egy-elemű vagy intervallum.*

Bizonyítás. Legyen

$$m := \inf \mathcal{R}_f \ , \ M := \sup \mathcal{R}_f.$$

Ha $m = M$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \{m\}$. Különben legyen $m < y < M$. Ekkor a szuprémum, ill. az infimum tulajdonságai alapján alkalmas $a, b \in \mathcal{D}_f$ helyeken

$$f(a) < y < f(b).$$

Nyilván $a \neq b$. Az 5.5.6. Tétel szerint van olyan x az a, b által meghatározott intervallumban, amellyel $y = f(x)$. Tehát $y \in \mathcal{R}_f$, azaz $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$. Innen már következik az állításunk, mivel csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$\mathcal{R}_f = \begin{cases} (m, M) \\ [m, M] \\ (m, M] \\ [m, M). \end{cases}$$

■

5.5.9. Tétel. *Ha az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény folytonos és a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya kompakt, akkor az $\mathcal{R}_f$ értékészlete is kompakt.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy véve tetszőleges $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozatot, ehhez létezik olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az $\left(y_{\nu_n}\right)$ részsorozat konvergens és $\lim \left(y_{\nu_n}\right) \in \mathcal{R}_f$. Az $y_n \in \mathcal{R}_f$ $(n \in \mathbf{N})$ feltételezés miatt alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$y_n = f(x_n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel $\mathcal{D}_f$ kompakt, ezért van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens és $a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$. Ugyanakkor $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így (ld. 5.5.2. Tétel) létezik a

$$\lim \left(y_{\nu_n}\right) = \lim \left(f(x_{\nu_n})\right) = f(a) \in \mathcal{R}_f$$

határérték. ■

5.5.10. Tétel (Weierstrass). *Legyen az $f \in \mathbf{K} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény értelmezési tartománya kompakt. Ekkor az értékkészletének létezik legkisebb és legnagyobb eleme.*

Bizonyítás. Az 5.5.9. Tétel alapján az $\mathcal{R}_f$ halmaz kompakt. Lássuk be, hogy $\mathcal{R}_f$ korlátos. Különben lenne olyan $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozat, amelyre az $|y_n| > n$ $(n \in \mathbf{N})$ becslés állna fenn. Világos, hogy ekkor tetszőleges (ν_n) indexsorozatra is

$$|y_{\nu_n}| > \nu_n \geq n \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

tehát (y_{ν_n}) nem korlátos. Így nem is konvergens, ami ellentmond az $\mathcal{R}_f$ kompaktságának.

Legyen

$$m := \inf \mathcal{R}_f \ , \ M := \inf \mathcal{R}_f,$$

akkor $\mathcal{R}_f$ korlátossága miatt $m, M \in \mathbf{R}$. Mutassuk meg, hogy $m, M \in \mathcal{R}_f$. Valóban, a szuprémum tulajdonságait felhasználva van olyan $(y_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{R}_f$ sorozat, amelyre

$$M - \frac{1}{n} < y_n \leq M \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Következésképpen $\lim(y_n) = M$. Mivel $y_n \in \mathcal{R}_f$, ezért egy-egy alkalmas $x_n \in \mathcal{D}_f$ helyen

$$y_n = f(x_n) \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt viszont van olyan (ν_n) indexsorozat, hogy létezik az

$$a := \lim(x_{\nu_n}) \in \mathcal{D}_f$$

határérték. Továbbá $f \in \mathcal{C}\{a\}$, így az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) és a 3.5.2. Tétel szerint

$$M = \lim(y_n) = \lim(y_{\nu_n}) = \lim\big(f(x_{\nu_n})\big) = f(a) \in \mathcal{R}_f.$$

Az $m \in \mathcal{R}_f$ állítás u.így adódik. ■

5.5.11. Tétel (Heine). *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény folytonos és a $\mathcal{D}_f$ halmaz kompakt. Ekkor az f egyenletesen folytonos, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x) - f(t)| < \varepsilon \ \ (x, t \in \mathcal{D}_f,\ |x - t| < \delta)$.*

Bizonyítás. Indirekt módon induljunk ki abból, hogy valamilyen $\varepsilon > 0$ mellett bármilyen $\delta > 0$ esetén vannak olyan $x, t \in \mathcal{D}_f$ elemek, amelyekre ugyan $|x - t| < \delta$ igaz, de

$$|f(x) - f(t)| \geq \varepsilon.$$

Speciálisan tetszőleges $1 \leq n \in \mathbf{N}$ indexhez megadhatók olyan $x_n, t_n \in \mathcal{D}_f$ elemek, hogy $|x_n - t_n| < 1/n$ és

$$|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon.$$

Kaptunk tehát egy-egy

$$(x_n),\ (t_n) : \mathbf{N} \to \mathcal{D}_f$$

sorozatot. A $\mathcal{D}_f$ kompaktsága miatt van olyan (ν_n) indexsorozat, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat konvergens és

$$a := \lim\big(x_{\nu_n}\big) \in \mathcal{D}_f.$$

Hasonlóan, van olyan (μ_n) indexsorozat is, hogy a $(t_{\nu_{\mu_n}})$ részsorozat is konvergens és

$$b := \lim\big(t_{\nu_{\mu_n}}\big) \in \mathcal{D}_f.$$

Mivel

$$|x_{\nu_{\mu_n}} - t_{\nu_{\mu_n}}| < \frac{1}{\nu_{\mu_n}} \leq \frac{1}{n} \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}),$$

ezért $\lim\big(x_{\nu_{\mu_n}}\big) = \lim\big(x_{\nu_n}\big) = a$ alapján

$$|a - b| = \big|\lim\big(x_{\nu_{\mu_n}} - t_{\nu_{\mu_n}}\big)\big| \leq \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Tehát $a = b$ és így az átviteli elv (ld. 5.5.2. Tétel) szerint

$$f(a) = \lim\big(f(x_{\nu_{\mu_n}})\big) = \lim\big(f(t_{\nu_{\mu_n}})\big),$$

amiből

$$\lim\big(f(x_{\nu_{\mu_n}}) - (f(t_{\nu_{\mu_n}})\big) = 0$$

következik. Ez nyilván ellentmond az indirekt feltevésbeli $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon \ \ (n \in \mathbf{N})$ feltételezésnek. ■

5.5.12. Tétel. *Legyen az $f \in \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ függvény folytonos, invertálható és az értelmezési tartománya kompakt. Ekkor az f^{-1} inverzfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ esetén

$$f^{-1} \in \mathcal{C}\{y\}.$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy ez nem igaz, azaz van olyan $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, amelyre $f^{-1} \notin \mathcal{C}\{y\}$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármilyen $\delta > 0$ esetén egy alkalmas $z \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $|z - y| < \delta$ mellett

$$|f^{-1}(z) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon.$$

Speciálisan minden $1 \leq n \in \mathbf{N}$ esetén valamilyen $z_n \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$, $|z_n - y| < 1/n$ helyen

$$|f^{-1}(z_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \qquad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Jegyezzük meg, hogy $\lim(z_n) = y$. Legyen $x_n := f^{-1}(z_n) \in \mathcal{D}_f$ $(1 \leq n \in \mathbf{N})$, ekkor a $\mathcal{D}_f$ kompaktsága alapján egy (ν_n) indexsorozattal létezik a $\xi := \lim\big(x_{\nu_n}\big) \in \mathcal{D}_f$ határérték. Továbbá az 5.5.2. Tétel miatt

$$f(\xi) = \lim\big(f(x_{\nu_n})\big) = \lim(z_{\nu_n}) = \lim(z_n) = y,$$

amiből az f invertálhatóságát figyelembe véve $f^{-1}(y) = \xi$ következik. Mindezt összegezve azt kaptuk, hogy

$$\varepsilon \leq |f^{-1}\big(z_{\nu_n}\big) - f^{-1}(y)| = |x_{\nu_n} - \xi| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

ami nyilván nem lehetséges. ■

Speciális függvények

1. Legyen

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

az $\exp : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ *exponenciálisfüggvény,*

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

a $\sin : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ *szinuszfüggvény,*

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbf{K})$$

a $\cos : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ *koszinuszfüggvény.*

A 4.5.1., 4.3.9. Tételek alapján bármely $x, y \in \mathbf{K}$ esetén az

$$\exp x \cdot \exp y$$

szorzatot Cauchy-szorzással is kiszámíthatjuk a következőképpen:

$$\exp x \cdot \exp y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

(felhasználva a binomiális tételt is). Emeljük ki külön is az exponenciális függvényre most kapott *multiplikatív* tulajdonságot:

$$\exp(x+y) = (\exp x)\cdot (\exp y) \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

* *

2. Lássuk be az alábbi ún. *Euler-összefüggést*:

$$\exp(\imath x) = e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ehhez először gondoljuk meg, hogy ha a $\sum(z_n)$ (szám)sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(z_{2n})$, $\sum(z_{2n+1})$ sorok is abszolút konvergensek és

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n+1}.$$

Ui.

$$\sum_{k=0}^{n} |z_{2k}| \leq \sum_{k=0}^{2n} |z_k| \leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{m} |z_k| : m \in \mathbf{N}\right\} < +\infty \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

azaz a $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_{2k}|\right)$ sorozat korlátos. Így (ld. 3.5.3. Tétel) $\sum(z_{2n})$ abszolút konvergens. Ugyanígy adódik, hogy a $\sum(z_{2n+1})$ sor is abszolút konvergens. Legyen

$$\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} z_n \ \ , \ \ \beta := \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n} \ \ , \ \ \gamma := \sum_{n=0}^{\infty} z_{2n+1},$$

ekkor

$$S_n := \sum_{k=0}^{2n+1} z_k = \sum_{k=0}^{n} z_{2k} + \sum_{j=0}^{n} z_{2j+1} =: R_n + T_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Mivel (ld. 3.5.2. Tétel)

$$\lim(S_n) = \alpha \ \ , \ \ \lim(R_n) = \beta \ \ , \ \ \lim(T_n) = \gamma,$$

ezért (ld. 3.7.5. Tétel)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \alpha = \lim(S_n) = \lim(R_n + T_n) = \lim(R_n) + \lim(T_n) =$$

$$\beta + \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}.$$

Mindezt felhasználva

$$e^{\imath x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \imath \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + \imath \sin x.$$

* *

3. Mutassuk meg, hogy fennállnak a következő *összegzési tételek*:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad (x, y \in \mathbf{K}),$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

Speciálisan

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \ \ , \ \ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad (x, y \in \mathbf{K}).$$

Valóban, az Euler-összefüggés alapján

$$e^{\imath x} + e^{-\imath x} = \cos x + \imath\sin x + \cos(-x) + \imath\sin(-x) =$$

$$\cos x + \imath\sin x + \cos x - \imath\sin x = 2\cos x \qquad (x \in \mathbf{K},$$

ill.

$$e^{\imath x} - e^{-\imath x} = \cos x + \imath\sin x - \cos(-x) - \imath\sin(-x) =$$

$$\cos x + \imath\sin x - \cos x + \imath\sin x = 2\imath\sin x \qquad (x \in \mathbf{K}.$$

Következésképpen

$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \ \ , \ \ \sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} \qquad (x \in \mathbf{K}).$$

Ezért az előbbiekre hivatkozva

$$\sin(x+y) = \frac{e^{\imath(x+y)} - e^{-\imath(x+y)}}{2\imath} = \frac{e^{\imath x}e^{\imath y} - e^{\imath(-x)}e^{\imath(-y)}}{2\imath} =$$

$$\frac{\big(\cos x + \imath\sin x\big)\big(\cos y + \imath\sin y\big) - \big(\cos(-x) + \imath\sin(-x)\big)\big(\cos(-y) + \imath\sin(-y)\big)}{2\imath} =$$

$$\frac{\big(\cos x + \imath\sin x\big)\big(\cos y + \imath\sin y\big) - \big(\cos x - \imath\sin x\big)\big(\cos y - \imath\sin y\big)}{2\imath} =$$

$$2\imath\cdot\frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{2\imath} = \sin x\cos y + \cos x\sin y.$$

A másik összegzési egyenlőséget analóg módon kapjuk.

****

4. *Pitagoraszi-összefüggés*: bármely $x \in \mathbf{K}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ui. ismét az Euler-összefüggésre hivatkozva (ld. iv)), ill. iii) alapján

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\imath x} + 2 + e^{-2\imath x}}{4}$$

és

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^2 = \frac{e^{2\imath x} - 2 + e^{-2\imath x}}{-4}.$$

Összeadva a most kapott két egyenlőséget kapjuk a Pitagoraszi-összefüggést.