Vizsgakérdések

Analízis 1.

Programtervező informatikus szak

2015-2016. tanév 2. félév

• Valós számok

1. Mondja ki a háromszög-egyenlőtlenségeket.

Válasz. Minden a és b valós számra

(a) $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$,

(b) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |\,a-b\,|$.

2. Hogyan szól a Bernoulli-egyenlőtlenség?

Válasz. Minden $h \ge -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$, vagy $n = 0$, vagy $n = 1$.

3. Fogalmazza meg a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

Válasz. Legyen $n \ge 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nemnegatív* valós szám. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Mit mond ki a *teljességi axióma*?

Válasz. Ha $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset, B \ne \emptyset$ és $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ esetén $a \le b$, akkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \ \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B \ \text{ esetén } \ a \le \xi \le b.$$

5. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.

Válasz. Ha $H \subset \mathbb{R}$, $H \ne \emptyset$ és H felülről korlátos, akkor H felső korlátai között van legkisebb.

6. Mit jelent az, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív?

Válasz. $H \subset \mathbb{R}$ induktív, ha $0 \in H$, továbbá, ha $x \in H$, akkor $x + 1 \in H$.

7. Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?

Válasz. $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.

8. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét!

Válasz. Legyen $A(n)$ egy állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re. Tegyük fel, hogy $A(0)$ igaz és ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor $A(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re.

9. Mikor van egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak maximuma?

Válasz. Ha $\exists\, \alpha \in A$, amelyre $\forall\, x \in A$ esetén $x \leq \alpha$.

10. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak *nincs* maximuma.

Válasz. $\forall\, \alpha \in A$ elemhez $\exists\, x \in A$, hogy $x > \alpha$.

11. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak *nincs* minimuma.

Válasz. $\forall\, \alpha \in A$ elemhez $\exists\, x \in A$, hogy $x < \alpha$.

12. Mikor felülről korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz?

Válasz. Ha $\exists\, K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, a \in A$ esetén $a \leq K$.

13. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről *nem* korlátos!

Válasz. $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, a \in A$, hogy $a > K$.

14. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \sup A$?

Válasz. A $\xi = \sup A$ egyenlőség a következőkkel ekvivalens:

(i) $\forall\, x \in A$ esetén $x \leq \xi$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, x \in A$, amelyre $x > \xi - \varepsilon$.

15. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \inf A$?

Válasz. A $\xi = \inf A$ egyenlőség a következőkkel ekvivalens:

(i) $\forall\, x \in A$ esetén $x \geq \xi$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, x \in A$, amelyre $x < \xi + \varepsilon$.

16. Írja le az Archimedes-tételt.

Válasz. $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$ valós számokhoz $\exists\, n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $b < na$.

17. Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

Válasz. Tegyük fel, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$ természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

• Függvények

18. Adja meg a *függvény* definícióját.

Válasz. Legyenek A és B nemüres halmazok. A nemüres $f \subset A \times B$ reláció függvény, ha

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \ \text{ elemhez } \ \text{egyértelműen } \exists\, y \in B, \ \text{ hogy } \ (x, y) \in f.$$

19. Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?

Válasz. Valamely $\emptyset \neq A, B$ halmazok esetén az $f \in A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_f \subset A$ és $\mathcal{R}_f \subset B$.

20. Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?

Válasz. Valamely $\emptyset \neq A, B$ halmazok esetén az $f : A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $\mathcal{D}_f = A$ és $\mathcal{R}_f \subset B$.

21. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *képét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $C \subset A$ halmaz f által létesített képe az

$$f[C] := \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

halmaz (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

22. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *ősképét*?

Válasz. Legyen $f : A \to B$ függvény. A $D \subset B$ halmaz f által létesített ősképe az

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmaz (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

23. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény invertálható, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékeket rendel.

24. Definiálja az inverz függvényt.

Válasz. Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. f inverz függvénye az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y$$

függvény.

25. Mi a *bijekció* definíciója?

Válasz. Az $f : A \to B$ függvény az A és a B halmaz közötti bijekció (vagy az A és B halmaz elemei közötti *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés*), ha f invertálható és $\mathcal{R}_f = B$.

26. Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

Válasz. Legyen $f : A \to B$, $g : C \to D$ és tegyük fel, hogy $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Ekkor f és g összetett függvénye az

$$f \circ g \, : \, \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \quad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

függvény.

• Sorozatok

27. Definiálja a következő fogalmakat: *valós sorozat*; sorozat n-edik *tagja*, *index*.

Válasz. Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt *(valós) sorozatnak* nevezünk. Ennek a függvénynek az $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett $a(n)$ helyettesítési értékét az a sorozat *n-edik tagjának* mondjuk és az a_n szimbólummal jelöljük. Az n szám az a_n tag *indexe*.

28. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*?

Válasz. $\exists\, K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N}$ indexre $|a_n| \le K$.

29. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) sorozat *nem* korlátos.

Válasz. $\forall\, K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n \in \mathbb{N}$ index, hogy $|a_n| > K$.

30. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *monoton növő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat monoton növő, ha $a_n \le a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

31. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *szigorúan monoton növő*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat szigorúan monoton növő, ha $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

32. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *monoton fogyó*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat monoton fogyó, ha $a_n \ge a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

33. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat *szigorúan monoton fogyó*?

Válasz. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat szigorúan monoton fogyó, ha $a_n > a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

34. Mit ért azon, hogy *indexsorozat*?

Válasz. Azt mondjuk, hogy a (ν_n) számsorozat indexsorozat, ha minden tagja természetes szám és $\nu_n < \nu_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

35. Hogyan definiálja egy sorozat *részsorozatát*?

Válasz. Tetszőleges $a = (a_n)$ sorozat és bármely $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat esetén

$$a \circ \nu = \big(a_{\nu_n}\big) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

az (a_n) sorozat ν indexsorozat által meghatározott részsorozata.

36. Milyen tételt tud mondani valós sorozatok és monoton sorozatok viszonyáról?

Válasz. Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatnak van monoton részsorozata, azaz létezik olyan ν indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növő, vagy monoton fogyó.

37. Mit értettünk egy valós sorozat *csúcsán*?

Válasz. a_{n_0} az (a_n) sorozat csúcsa, ha $\forall\, n \ge n_0$ esetén $a_{n_0} \ge a_n$.

38. Mikor nevezünk egy (a_n) valós sorozatot *konvergensnek*?

Válasz. Ha

$\exists\, A \in \mathbb{R},\quad \forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$.

39. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat *divergens*?

Válasz. Az (a_n) sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz

$$\forall\, A \in \mathbb{R} \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

40. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?

Válasz. Nem. A $\big((-1)^n\big)$ sorozat divergens, de pl. az $A = 1$ szám minden környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik.

41. Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?

Válasz. Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.

42. Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatairól?

Válasz. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges ν indexsorozat esetén az $a \circ \nu$ részsorozat is konvergens és $\lim(a \circ \nu) = \lim a$.

43. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart?

Válasz. $\lim(a_n) = +\infty \quad \Longleftrightarrow$

$\forall\, P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ indexre $a_n > P$.

44. Mi a definíciója annak, hogy az (a_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?

Válasz. $\lim(a_n) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \forall\, P \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad a_n < P.$

45. Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $r > 0$ *sugarú környezetét.*

Válasz. Az $A \in \mathbb{R}$ valós szám $r > 0$ sugarú környezetén a

$$K_r(A) := (A - r,\ A + r)$$

intervallumot értjük. Az $A = +\infty$ elem $r > 0$ sugarú környezete a

$$K_r(+\infty) := \big(\tfrac{1}{r}, +\infty\big),$$

az $A = -\infty$ elemé pedig a

$$K_r(-\infty) := \big(-\infty, -\tfrac{1}{r}\big)$$

intervallum.

46. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*?

Válasz. Azt, hogy a sorozat *konvergens*, vagy *plusz végtelenhez*, vagy pedig *mínusz végtelenhez* tart. Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad a_n \in K_\varepsilon(A).$$

47. Adott $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim(a_n) = A$ egyenlőségnek?

Válasz. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 : \qquad a_n \in K_\varepsilon(A).$

b

sandwich tétel

48. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet.

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) valós sorozatokra teljesülnek a következők:

(a) $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N$-re $\; a_n \le b_n \le c_n$;

(b) $\exists \lim(a_n)$, $\exists \lim(c_n)$ és $\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a közrefogott (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

49. Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?

Válasz. Tegyük fel, hogy az $(a_n), (b_n)$ sorozatoknak van határértékük és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1^o ha $A > B$, akkor $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, n \in \mathbb{N}$-re $\; a_n > b_n$.

2^o ha $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N, n \in \mathbb{N}$-re $\; a_n \ge b_n$, akkor $A \ge B$.

50. Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n-re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?

Válasz. Nem, pl. $a_n := \frac{1}{n}$, $\; b_n := 0$ esetén $a_n > b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$.

51. Mondja ki a monoton sorozatok konvergenciájára és határértékére vonatkozó állításokat.

Válasz. 1^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről korlátos* [monoton csökkenő és alulról korlátos], akkor konvergens, és

$$\lim(a_n) = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R} \quad [\lim(a_n) = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R}].$$

2^o Ha az (a_n) sorozat *monoton növekedő* és *felülről nem korlátos* [monoton csökkenő és alulról nem korlátos], akkor

$$\lim(a_n) = +\infty \qquad [\lim(a_n) = -\infty].$$

52. Milyen műveleti tételeket ismer konvergens sorozatokra?

Válasz. Ha az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$, $\lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$, akkor

1^o az $(a_n + b_n)$ összegsorozat is konvergens és $\lim(a_n + b_n) = A + B$;

2^o az $(a_n b_n)$ szorzatsorozat is konvergens és $\lim(a_n b_n) = A \cdot B$;

3^o ha még $b_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $B \ne 0$ is teljesül, akkor

az $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ hányadossorozat is konvergens és $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{A}{B}$.

53. Igaz-e az, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens.

Válasz. Igen, mert ha $(a_n + b_n)$ konvergens lenne, akkor $(a_n + b_n - a_n) = (b_n)$ is konvergens lenne.

54. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az $(a_n + b_n)$ összegsorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n + b_n) = A + B$, feltéve hogy $A + B$ értelmezve van.

55. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az $(a_n b_n)$ szorzatsorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n b_n) = AB$, feltéve hogy AB értelmezve van.

56. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatoknak *van határértéke*, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor az (a_n/b_n) hányadossorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n/b_n) = A/B$, feltéve hogy A/B értelmezve van.

57. Fogalmazza meg a *Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt.*

Válasz. Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.

58. Definiálja a *Cauchy-sorozatot.*

Válasz. Az (a_n) sorozat Cauchy-sorozat, ha

$\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ indexre $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

59. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.

Válasz. Egy valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

60. Hogyan értelmeztük az e számot?

Válasz. Az $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. e-vel jelöljük ennek a sorozatnak a határértékét:

$$e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

61. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat határértékével kapcsolatosan?

Válasz.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

62. Milyen nevezetes sorozatokat tekintettünk a nagyságrendi kérdésekkel kapcsolatosan?

Válasz. $\mathbf{1}^o$ Ha $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

$\mathbf{2}^o$ Ha $k \in \mathbb{N}$ és $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$.

$\mathbf{3}^o$ Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

$\mathbf{4}^o$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

63. Milyen konvergenciatételt tanult az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ $(a > 0)$ sorozatról?

Válasz. Bármely $0 < a \in \mathbb{R}$ esetén az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.

64. Milyen konvergenciatételt tanult az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozatról?

Válasz. Az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat konvergens és $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

65. Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.

Válasz. Ha $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, akkor $\forall\ A \geq 0\ \ \exists!\ \ \alpha \geq 0: \quad \alpha^m = A$.

66. Legyen $A > 0, 1 < m \in \mathbb{N}$. Melyik az a sorozat, amelynek határértéke $\sqrt[m]{A}$?

Válasz.

$$\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

• Végtelen sorok

67. Mi a végtelen sor definíciója?

Válasz. Az $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot nevezzük az (a_n) sorozat által generált *végtelen sornak*, aminek a jelölésére a $\sum a_n$ szimbólumot használjuk.

68. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?

Válasz. A $\sum a_n$ sor *konvergens*, ha a részletösszegeinek az $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata konvergens. A $\lim(s_n)$ számot nevezzük a *sor összegének*, amit így jelölünk:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

69. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0} q^n$ *geometriai sor* konvergenciájáról?

Válasz. A $\sum_{n=0} q^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor $\frac{1}{1-q}$ az összege.

70. Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?

Válasz. A $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ sor és az összege $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

71. Mi a *harmonikus sor*, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

Válasz. A $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ sor, ami divergens.

72. Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *hiperharmonikus sor* konvergenciájával kapcsolatban?

Válasz. A sor $1 < \alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, ha $\alpha \leq 1$ valós szám, akkor pedig divergens.

73. Melyik végtelen sor összegeként állítottuk elő az e számot?

Válasz. A $\sum \frac{1}{n!}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

74. Hogyan szól a *Cauchy-kritérium végtelen sorokra*?

Válasz. A $\sum a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 : \;\; |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

75. Mondjon szükséges feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen.

Válasz. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor $\lim(a_n) = 0$.

76. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

Válasz. Nem igaz, ui. a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens és $\lim(\frac{1}{n}) = 0$.

77. Mikor nevez egy végtelen számsort abszolút konvergensnek?

Válasz. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, ha a $\sum |a_n|$ végtelen sor konvergens.

78. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.

Válasz. $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

79. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat.*

Válasz. Tegyük fel, hogy az (a_n), $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq N : \qquad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor:

1^o ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens;

2^o ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

80. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy létezik az $A := \lim\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor:

1^o ha $0 \leq A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o ha $A = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

81. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányadoskritériumot.*

Válasz. Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0 \;\; (n \in \mathbb{N})$, továbbá létezik az $A := \lim\big(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\big) \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. Ekkor:

1^o ha $0 \leq A < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens is;

2^o ha $A > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens;

3^o ha $A = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is és divergens is.

82. Mik a *Leibniz-típusú sorok* és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

Válasz. Ha $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \;(n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sort nevezzük Leibniz-típusú sornak. Ezek akkor és csak akkor konvergensek, ha $\lim(a_n) = 0$. Ha $A := \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, akkor

$$\Big|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\Big| \leq a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

83. Milyen állítást tanult valós számok tizedestört-alakjával kapcsolatban?

Válasz. Tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ számhoz van olyan $(x_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ sorozat, amellyel $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$

84. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *zárójelelezését*?

Válasz. Tekintsük az (a_n) sorozat által generált $\sum a_n$ végtelen sort. Legyen adott az (m_n) indexsorozat és tegyük fel, hogy $m_0 = 0$. Ekkor a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott *zárójelezésén* a $\sum \alpha_n$ végtelen sort értjük, ahol

$$\alpha_n := \sum_{i=m_n}^{m_{n+1}-1} a_i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

85. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens. Mit tud mondani a szóban forgó sor $\sum \alpha_n$ zárójelezéseinek a konvergenciájáról?

Válasz. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor bármely $\sum \alpha_n$ zárójelezett sora is konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n.$$

86. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor valamely $\sum \alpha_n$ zárójelezett sora konvergens. Milyen feltételek mellett konvergens a $\sum a_n$ végtelen sor?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sorra és az (m_n) indexsorozatra teljesülnek a következő feltételek:

1^o $m_0 = 0$ és $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat;

2^o $\lim(a_n) = 0$,

3^o a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott $\sum \alpha_n$ zárójelezése konvergens.

Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor is konvergens.

87. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *átrendezését*?

Válasz. Legyen $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció, $\sum a_n$ pedig egy végtelen sor. Ekkor a $\sum a_n$ sor (p_n) által meghatározott *átrendezésén* a $\sum a_{p_n}$ végtelen sort értjük.

88. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok *átrendezéseit* illetően?

Válasz. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor minden $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció esetén a $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{p_n}$.

89. Fogalmazza meg a *feltételesen konvergens* sorok átrendezésére vonatkozó *Riemann-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor feltételesen konvergens (vagyis konvergens, de nem abszolút konvergens). Ekkor

1^o $\forall\ A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén $\exists\ \sum a_{p_n}$ átrendezés, hogy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{p_n} = A;$

2^o $\exists\ \sum a_{p_n}$ átrendezés, ami divergens.

90. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok *téglányszorzatát.*

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} t_n$ végtelen sor, ahol $t_n := \sum\limits_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j$ $(n \in \mathbb{N})$.

91. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok *Cauchy-szorzatát.*

Válasz. A $\sum\limits_{n=0} c_n$ végtelen sor, ahol $c_n := \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$ $(n \in \mathbb{N})$.

92. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt.*

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n$ és a $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok mindegyike *abszolút konvergens.* Ekkor

(a) a $\sum\limits_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is abszolút konvergens,

(b) a $\sum\limits_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens,

(c) az összes $a_i b_j$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ szorzatból *tetszés szerinti* sorrendben képzett $\sum\limits_{n=0} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és az összeg mindegyik esetben a tényezők összegének a szorzata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

93. Fogalmazza meg a *Mertens-tételt*.

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$, $\sum b_n$ sorok konvergensek és legalább az egyikük abszolút konvergens. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

• Hatványsorok, elemi függvények

94. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Válasz. Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós *hatványsornak* nevezzük.

95. Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergencia-sugarát meghatározó tétel?

Válasz. Tetszőlegesen megadott (α_n) sorozattal és $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmazára a következő három egymást kizáró esetek egyike érvényes:

(a) $\exists!\ R > 0$ valós szám, hogy a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$;

(b) a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens (legyen ekkor $R := 0$);

(c) a hatványsor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens (ekkor $R := +\infty$).

$0 \le R \le +\infty$ a hatványsor *konvergenciasugara.*

96. Fogalmazza meg a *Cauchy–Hadamard-tételt.*

Válasz. Tekintsük a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsort, és tegyük fel, hogy

$$\exists \ \lim\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

$$R := \begin{cases} \dfrac{1}{A}, & \text{ha } 0 < A < +\infty \\ 0, & \text{ha } A = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } A = 0 \end{cases}$$

a hatványsor konvergenciasugara. Ez azt jelenti, hogy

(a) ha $0 < R < +\infty$, akkor a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$;

(b) ha $R = 0$, akkor a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens;

(c) ha $R = +\infty$, akkor a hatványsor $\forall\, x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens.

97. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.

Válasz. $\sum x^n$.

98. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

Válasz. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$.

99. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum.

Válasz. $\sum \dfrac{x^n}{n}$.

100. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.

Válasz. $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$.

101. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens.

Válasz. $\sum n^n(x-2)^n$.

102. Definiálja az exp függvényt.

Válasz. $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

103. Írja fel az exp függvény *függvényegyenletét.*

Válasz. $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

104. Definiálja a sin függvényt.

Válasz. $\sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

105. Definiálja a cos függvényt.

Válasz. $\cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

106. Definiálja a sh függvényt.

Válasz. $\mathrm{sh}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

107. Definiálja a ch függvényt.

Válasz. $\mathrm{ch}(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$

• Függvény határértéke

108. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Válasz. Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van.

109. Mivel egyenlő az $\mathbb{R}'$ és az $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\right\}\right)'$ halmaz?

Válasz. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$ és $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid 0 < n \in \mathbb{N}\right\}\right)' = \{0\}$.

110. Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen van határértéke?

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen *van határértéke*, ha

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

111. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$, $\quad A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

112. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \iff \forall\, P > 0 \ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta : \quad f(x) > P.$$

113. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, P < 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\, 0 < |x - a| < \delta : \quad f(x) < P.$$

114. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

115. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $-\infty \in \mathcal{D}_f'$, $A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

116. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0 \;\; \exists\, x_0 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) > P.$$

117. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, +\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, P < 0 \;\; \exists\, x_0 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : \quad f(x) < P.$$

118. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, -\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0 \;\; \exists\, x_0 < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad f(x) > P.$$

119. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, -\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, P < 0 \;\; \exists\, x_0 < 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 : \quad f(x) < P.$$

120. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Válasz. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\;\; \lim(x_n) = a \text{ esetén } \quad \lim_{n\to+\infty} (f(x_n)) = A.$$

121. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Válasz. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in K_R(a)$ esetén létezik a $\lim\limits_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$