2024. 02. 22.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

Analízis 1

Programtervező informatikus BSc
Esti tagozat

Kovács Sándor
előadás + gyakorlat

(Hétfő, 16^{00} – 17^{30}: DT-0.804, Ea)
(Hétfő, 17^{45} – 18^{30}: DT-0.311, Gy)
(Hétfő, 17^{45} – 18^{30}: DT-0.220, Gy)
(Hétfő, 18^{30} – 19^{15}: DT-0.220, Gy)

2024. tavasz

Tudnivalók

1. A tárgy követelményrendszere
2. Vizsgatematika
3. Vizsgatételek
4. Vizsgakérdések
5. **Segédanyagok:**
   - A görög ábécé és a fraktúra
   - Matematikai alapozás
   - Elemi függvények
   - Hiperbolikus függvények és inverzeik
   - Valós-valós függvények határértéke
   - MacTutor History of Mathematics archive
6. **Ajánlott olvasmányok:**
   - Kovács Sándor: Matematikai alapozás
   - Schipp Ferenc: Analízis I.
   - Simon Péter: Bevezetés az analízisbe I.
   - Szili László: Analízis feladatokban I.
7. **A félév tematikája:**

   1. oktatási hét (2024. 02. 12.):

   Előadás.
   - **A valós számok axiómái.**
   - **Halmazok korlátossága.**
   - **A binomiális télel.**
   - **A háromszög-egyenlőtlenségek.**
   - **A szuprémum elv.**
   - **Arkhimédész tétele.**
   - **A Cantor-tétel.**

   Gyakorlat.

   2. oktatási hét (2024. 02. 19.):

   Előadás.

- A Barrow-Bernoulli-egyenlőtlenség.
- Számok számtani, négyzetes, mértani és harmonikus közepe.
- A harmonikus, a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenségek.
- A Cauchy-Bunykovszkij-egyenlőtlenség.
- A mégyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség.
- A Minkowszki-egyenlőtlenség.
- Függvények.
- Halmaz függvény szerinti képe, őesképe.

Gyakorlat.

3. oktatási hét (2024. 02. 26.):

Előadás.

- Függvények inverze.
- Függvények kompozíciója.
- Valós-valós függvények elemi tulajdonságai.
- A sorozat fogalma.

Gyakorlat.

4. oktatási hét (2024. 03. 04.):

Előadás.

- Sorozatok monotonitása.
- Sorozatok korlátossága.
- A környezet fogalma.
- A részsorozat fogalma.
- Minden valós számsorozatnak van monoton részsorozata.
- Konvergens sorozatok.
- A konvergencia és a koráltosság kapcsolata.
- Részsorozat konvergenciája.

Gyakorlat.

5. oktatási hét (2024. 03. 11.):

Előadás.

- Nullsorozatok.
- Műveletek konvergens sorozatokkal.
- A konvergencia és a rendezés kapcsolata.
- A Sandwich-tétel.
- Sorozatok alsó és felső burkolója.
- A mozgólépcső-elv.
- Az Euler-féle szám.
- Kibővített értelemben vett határérték.
- Törtek határértéke.

- **A mértani sorozat határértéke.**

Gyakorlat.

6. oktatási hét (2024. 03. 18.):

Előadás.

- **Az** $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ **sorozat konvergenciája. Folyamatos kamatozás.**
- **A Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel.**
- **Cauchy-sorozatok.**
- **A Cauchy-féle konvergenciakritérium.**
- **A nullsorozatokra vonatkozó hányados- és gyökkritérium.**
- **Rekurzív sorozatok.**
- **Gyökvonás.**

Gyakorlat.

7. oktatási hét (2024. 03. 25.)

Előadás: 1. zárthelyi dolgozat

Gyakorlat.

8. oktatási hét (2024. 04. 08.):

Előadás.

- **Végtelen sorok és szorzatok.**
- **A mértani sor konvergenciája.**
- **A hiperharmonikus sor konvergenciája.**
- **A** e **szám sorösszeg-előállítása.**
- **A konvergencia szükséges feltétele.**
- p**-adikus törtek.**

Gyakorlat.

9. oktatási hét (2024. 04. 15.):

Előadás.

- **Sorok ekvikonvergenciája.**
- **Pozitív tagú sorok konvergenciája.**
- **Összehasonlító kritériumok.**
- **A Cauchy-féle gyökkritérium.**
- **A D'Alembert-féle hányadoskritérium.**
- **A Cauchy-féle kondenzációs vagy ritkítási kritérium.**
- **A Leibniz-kritérium.**

Gyakorlat.

10. oktatási hét (2024. 04. 22.):

Előadás.

- **Sorok szorzása.**
- **Függvénysorozatok és függvénysorok.**

- Hatványsorok.
- Speciális függvények

Gyakorlat.

11. oktatási hét (2024. 04. 29.):

Előadás.

- A függvényhatárérték foglma.
- Speciális esetek.
- A határértékre vonatkozó átviteli elv.
- A Sandwich-tétel.
- A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata.
- Egyoldali határértékek.
- Hatványsor összegfüggvényének határértéke.
- Nevezetes határértékek.

Gyakorlat.

12. oktatási hét (2024. 05. 06.):

Előadás.

- Monoton függvény határértéke.
- A folytonosság foglma.
- Előjeltartás.
- Folytonosságra vonatkozó átviteli elv.
- A határérték és a folytonosság kapcsolata.
- A folytonosság és a műveletek kapcsolata.
- Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
- Összetett függvény folytonossága.
- Összetett függvény határértéke.
- Szakadási helyek osztályozása.
- Egyoldali folytonosság.
- Kompakt intervallumon folytonos függvények.
- Az abszolút szélsőérték fogalma.
- A Weierstraß-tétel.
- A Bolzano-tétel.

Gyakorlat.

13. oktatási hét (2024. 05. 13.)

Előadás: 2. zárthelyi dolgozat

Gyakorlat.

A Függelék

B Függelék

1. oktatási hét

Az előadás anyaga

Elöljáróban felelevenítjük az $\mathbb{R}$ valós számtesttel kapcsolatos alapvető tudnivalókat. Legyen tehát $\mathbb{R} \neq \emptyset$ olyan halmaz, amelyre igazak az alábbiak.

I. **Testaxiómák.** Megadhatók olyan $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$ elemek, ill. bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén léteznek az $x + y \in \mathbb{R}$ és az $x \cdot y \in \mathbb{R}$ ($xy \in \mathbb{R}$) szimbólummal jelölt elemek úgy, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ választással

1. $a + b = b + a$ és $ab = ba$ (**kommutativitás**),
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ és $(ab)c = a(bc)$ (**asszociativitás**),
3. $a + 0 = a$ és $a \cdot 1 = a$,
4. alkalmas $(-a) \in \mathbb{R}$ elemmel $a + (-a) = 0$,[1]
5. ha $b \neq 0$, akkor alkalmas $\frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ elemmel $b \cdot \frac{1}{b} = 1$,[2]
6. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (**disztrubutivitás**).

II. **Rendezési axiómák.** Létezik egy $\leq \subset \mathbb{R}^2$ (**kisebb-egyenlő**nek nevezett) teljes rendezés:

1. a $\leq$ reláció **reflexív**, azaz bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$;
2. a $\leq$ reláció **antiszimmetrikus**, azaz bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén
$$(a \leq b \quad \wedge \quad b \leq a) \qquad \Longrightarrow \qquad a = b,$$
3. a $\leq$ reláció **tranzitív**, azaz bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén
$$(a \leq b \quad \wedge \quad b \leq c) \qquad \Longrightarrow \qquad a \leq c,$$
4. a $\leq$ reláció **dichotom**, azaz bármely $a, b, \in \mathbb{R}$ esetén
$$a \leq b \qquad \vee \qquad b \leq a.$$

III. **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**). Ha valamely $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ halmazok esetén tetszőleges $a \in A$ és tetszőleges $b \in B$ esetén $a \leq b$, akkor alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ számmal
$$a \leq \xi \leq b \qquad (a \in A, \ b \in B).$$

[1] Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $a - b := a + (-b) \in \mathbb{R}$ szám az a és b **különbsége**.

[2] Tetszőleges $b \in \mathbb{R}$, ill. $0 \neq b \in \mathbb{R}$ esetén az $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} \in \mathbb{R}$ szám az a és b **hányados**a.

Megjegyzések.

1. A részletek mellőzésével annyit jegyzünk meg csupán, hogy a fenti axiómarendszernek van (és lényegében egyetlen) modellje.[3]

2. A valós számokkal kapcsolatos minden (eddig tanult, vagy később sorra kerülő) „manipuláció” az axiómákból felépíthető, levezethető stb.[4] Ezt az utat nem fogjuk bejárni, így pl. a továbbiakban ismertnek tételezzük fel az alábbi speciális számhalmazokat:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \{0, 1, 2, \ldots\} \quad \text{a természetes számok halmaza,} \\ \mathbb{N} &:= \{1, 2, \ldots\} \quad \text{a pozitív természetes számok halmaza,} \\ \mathbb{Z} &:= \mathbb{N}_0 \cup \{x \in \mathbb{R} : \; -x \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{az egész számok halmaza,} \\ \mathbb{Q} &:= \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R} : \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0\right\} \quad \text{a racionális számok halmaza.} \end{aligned}$$

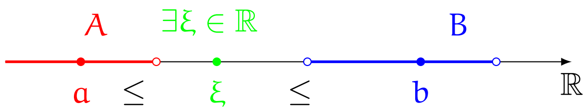
   Az intervallumokat a eddigi tanulmányainkban megszokott módon fogjuk értelmezni és jelölni. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $a \leq b$, $c \leq d$, akkor

$$\begin{aligned} &[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\}, \quad (c, d) := \{x \in \mathbb{R} : \; c < x < d\}, \\ &(c, d] := \{x \in \mathbb{R} : \; c < x \leq d\}, \quad [c, d) := \{x \in \mathbb{R} : \; c \leq x < d\}. \end{aligned}$$

   Az így definiált halmazokat rendre zárt, nyílt, balról nyílt és jobbról zárt, balról zárt és jobbról nyílt intervallumnak nevezzük.

3. A rendezési axiómáknak köszönhetően tudjuk a valós számokat **számegyenes**en ábrázolni és az egyenlőtlenségekre vonatkozó, ismert szabályokat igazolni. A teljességi axióma garantálja, hogy a számegyenesen történő ábrázoláskor annak egyik pontja sem marad ki.

4. A szétválasztási axióma elnevezést szemlélteti az alábbi ábra:



   Azt is mondhatjuk, hogy a ξ valós szám „szétválasztja” az A és a B halmazt.

[3] Hasonló a helyzet, mint mondjuk pl. a sakkjáték esetén: azt is a szabályai (axiómái) határozzák meg, és független attól, hogy fejben vagy bábokkal, asztalon, homokban, stb. játsszák, vagy pl. attól, hogy a bábok fából, aranyból stb. készültek-e.

[4] Pl. $\mathbb{R}$-ben teljesül a **nullosztómentes**ség: bármely $x, y \in \mathbb{R}$ szám esetén igaz az

$$x \cdot y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x = 0 \quad \vee \quad y = 0)$$

ekvivalencia.

5. A valós számok egyértelmű jellemzésére mindhárom axiómára szükség van. A testaxiómák pl. nem elegendőek a valós számok halmazának pontos megadására, hiszen van olyan test, amelynek csak két eleme van. Legyen ui. $\mathbb{T} := \{0, 1\}$, majd értelmezzük $\mathbb{T}$-n az alábbi műveleteket:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Továbbá, a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza olyan test, amire ugyan igazak a rendezési axiómák, de a teljességi axióma nem. Ha ui.

$$A := \left\{r \in \mathbb{Q} : \; r > 0 \,\text{és}\, r^2 < 2\right\}, \qquad \text{ill.} \qquad B := \left\{r \in \mathbb{Q} : \; r > 0 \,\text{és}\, r^2 > 2\right\},$$

akkor nincsen az A és a B halmazokat elválasztó $\mathbb{Q}$-beli ξ szám.

6. Idézzük fel a **teljes indukció**[5] elvét: legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{N}_0$ olyan halmaz, amelyre[6]

- $0 \in \mathcal{H}$,
- bármely $n \in \mathcal{H}$ esetén $n + 1 \in \mathcal{H}$.

Ekkor $\mathcal{H} = \mathbb{N}_0$. A fent nevezett elv némi általánosítását tartalmazza az alábbi

Tétel. Legyen $m \in \mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy minden $m \le n \in \mathbb{Z}$ számra adott valamely $\mathcal{A}(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy

- $\mathcal{A}(m)$ igaz,
- ha $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz.

Ekkor az $\mathcal{A}(n)$ állítás igaz minden $m \le n \in \mathbb{Z}$ számra.

Az ún. teljes indukciós bizonyítások illusztrálására tekintsük a következő, az elemi tanulmányokból is jól ismert állítást:

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Legyen ekkor

$$\mathcal{H} := \{n \in \mathbb{N}_0 : \; (1) \text{ igaz}\}.$$

[5] Vö. Augustus de Morgan (Madura, 1806. június 27. – London, 1871. március 18.)
[6] Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ **induktív halmaz**.

Világos, hogy $0 \in \mathcal{H}$, azaz „(1) igaz $n = 0$-ra”. Nem nehéz belátni, hogy ha $n \in \mathcal{H}$, azaz „(1) igaz valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ számra”, akkor $n+1 \in \mathcal{H}$, más szóval „(1) igaz $n+1$-re is”. Ui. a feltevésünk miatt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Későbbi tanulmányainkban többször előkerül a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ 1 \neq q \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

állítás, amelynek igaz volta – a $0^0 := 1$ megállapodást figyelembe véve – pl. teljes indukcióval szintén belátható. Ha ui.

$$\mathcal{H} := \{n \in \mathbb{N}_0 : \ (2) \text{ igaz}\},$$

akkor nyilván $0 \in \mathcal{H}$, azaz „(2) igaz $n = 0$-ra”. Ha pedig $n \in \mathcal{H}$, azaz „(2) igaz valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ számra”, akkor $n+1 \in \mathcal{H}$, hiszen

$$\begin{aligned} 1 + q + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

Bizonyos átalakítások könnyebb megértéséhez igen hasznos a[7]

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}$$

$(k, n \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n)$ **binomiális együttható**kat használó, tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$, ill. $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennálló **binomiális tétel**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k, \tag{3}$$

amelynek igaz volta egyrészt a binomiális együtthatókra fennálló

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \binom{n}{n},$$

[7]Valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén, ha $n = 0$, akkor $n! := 1$, ha pedig $n > 0$, akkor $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k},$$

ill.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

azonosságokból, másrészt pedig a teljes indukció elvéből következik. Valóban, ha

- $n = 0$, akkor
$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$
- valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén fennáll a (3) egyenlőség, akkor $(a+b)^{n+1} =$

$$\begin{aligned} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k = \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

A (3) egyenlőség persze más módon is belátható. Mivel

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n-\text{szer}}$$

és a jobb oldalon a „beszorzáskor” a disztributív szabály („minden tagot minden taggal”) következtében az n zárójel mindegyikéből vagy az a-t vagy a b-t kell választani, ezeket össze kell szorozni, majd a kapott szorzatokat össze kell adni, ezért $(a+b)^n$ olyan összeggel egyenlő, amelynek mindenn tagja $a^{n-k}b^k$ alakú, ahol $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ez a tag annyiszor szerepel, ahányszor az n számú b közül k számú b-t választunk ki, amelyről belátható, hogy $\binom{n}{k}$.

7. Emlékeztetünk az azonos hatványok különbségeinek szorzattá való alakíthatóságára, amelynek igen fontos következményei vannak. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\cdot\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}. \tag{4}$$

Így pl.

(a) ha $a, b \in \mathbb{R}$: $0 < b < a$, továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$a^n\,[a-(n+1)(a-b)] < b^{n+1}, \tag{5}$$

hiszen

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) < \\ &< (a-b)(a^n + a^{n-1}a + \ldots + aa^{n-1} + a^n) = (a-b)(n+1)a^n. \end{aligned}$$

(b) ha $1 \neq q \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$1 - q^{n+1} = 1^{n+1} - q^{n+1} = (1-q)(1+q+\ldots+q^n) \qquad /\!\!\Longrightarrow \quad (2)/\,.$$

Definíció. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz

- **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \geq k$:

$$\exists\, k \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in \mathcal{H}: \quad x \geq k.$$

  Az ilyen k számot a $\mathcal{H}$ halmaz **alsó korlát**jának nevezzük.

- **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \leq K$:

$$\exists\, K \in \mathbb{R}\; \forall\, x \in \mathcal{H}: \quad x \leq K.$$

  Az ilyen K számot a $\mathcal{H}$ halmaz **felső korlát**jának nevezzük.

- **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Példa. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$
hamaz alulról is és felülről is korlátos, a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyzések.

1. Ha a K szám felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, akkor bármely $K \leq L \in \mathbb{R}$ szám is felső korlátja $\mathcal{H}$-nak. Ha tehát H felülről korlátos, akkor végtelen sok felső korlátja van.

2. Ha a k szám alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak, akkor bármely $k \geq l \in \mathbb{R}$ szám is alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Ha tehát $\mathcal{H}$ alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van.

3. Az, hogy a $\mathcal{H}$ hamaz felülről nem korlátos, azt jelenti, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{H}$, amelyre $x > K$.

4. Az, hogy a $\mathcal{H}$ hamaz alulról nem korlátos, azt jelenti, hogy bármely $k \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{H}$, amelyre $x < k$.

5. A $\mathcal{H}$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha
$$\exists M \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{H} \text{ esetén } |x| \leq M,$$
ahol valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$
Ezzel kapcsolatban belátható az alábbi

Tétel (háromszög-egyenlőtlenségek). Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ szám esetén fennállnak az az alábbi becslések.
$$\text{i) } |a+b| \leq |a| + |b|, \qquad \text{ii) } \big||a| - |b|\big| \leq |a-b| \tag{6}$$

Bizonyítás.

1. lépés. Az abszolút érték definíciója alapján
$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad \text{és} \qquad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|. \tag{7}$$

Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ esetén

$$|x| \leq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad -y \leq x \leq y, \tag{8}$$

ezért ennek felhasználásával (7)-ből i) adódik.

2. lépés. Az i) egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \qquad &\Longrightarrow \qquad |a|-|b| \leq |a-b|, \\
|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a| \qquad &\Longrightarrow \qquad |b|-|a| \leq |a-b|.
\end{aligned}$$

Tehát

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|,$$

és így (8) felhasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget: ii)-t.

Megjegyzések.

1. Valamely számhalmazt megadó kifejezésből az esetek többségében nehéz látni a halmaz szerkezetét, ezért a korlátosságának vizsgálata általában nem egyszerű feladat. Ennek megoldásához gyakran használhatjuk a következő ötletet: valamilyen „alkalmas” módon átalakítjuk a szóban forgó kifejezést (ilyen átalakításokra a gyakorlaton példákat fogunk mutatni). Ezután már számos esetben könnyen megfogalmazható sejtés az alsó, ill. a felső korlátokra vonatkozóan. Ezek bizonyításához (sokszor triviális) egyenlőtlenségek fennállását kell majd belátnunk.

2. Sok esetben hasznos lehet halmazok szerkezetének feltárására az alábbi átalakítás ismerete: bármely $(a, b, c, d, x \in \mathbb{R}\colon c \neq 0, x \neq -d/c)$ esetén

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \left[1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cx+d}$$

vagy

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+bc}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\frac{acx+ad+bc-ad}{acx+ad} = \frac{a}{c}\cdot\left(1+\frac{bc-ad}{acx+ad}\right) =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{bc-ad}{cx+d} = \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}.$$

Definíció. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaznak **van**

- **maximuma** vagy **legnagyobb eleme**, ha

$$\exists \alpha \in \mathcal{H}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{H} \text{ esetén } x \leq \alpha.$$

  Ekkor az α számot a $\mathcal{H}$ halmaz **maximum**ának vagy **legnagyobb elem**ének nevezzük és a $\max \mathcal{H}$ szimbólummal jelöljük.

- **minimuma** vagy **legkisebb eleme**, ha

$$\exists \beta \in \mathcal{H}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{H} \text{ esetén } x \geq \beta.$$

  Ekkor a β számot a $\mathcal{H}$ halmaz **minimum**ának vagy **legkisebb elem**ének nevezzük és a $\min \mathcal{H}$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzések.

1. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma, akkor $\max \mathcal{H}$ egyben felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.
2. Ha a $\mathcal{H}$ halmaznak van minimuma, akkor $\min \mathcal{H}$ egyben alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.
3. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor nincsen maximuma, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van nagyobb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\nexists \max \mathcal{H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \alpha \in \mathcal{H}\text{-hoz } \exists x \in \mathcal{H}, \text{ hogy } x > \alpha.$$
4. A $\mathcal{H}$ halmaznak pontosan akkor nincsen minimuma, ha bármely $\mathcal{H}$-beli eleménél van kisebb $\mathcal{H}$-beli elem:
$$\nexists \min \mathcal{H} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in \mathcal{H}\text{-hoz } \exists x \in \mathcal{H}, \text{ hogy } x < \beta.$$

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmazn esetén $\max(\mathcal{H}) = 1$, ui. $1 \in \mathcal{H}$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{n} \leq 1$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen minimuma, hiszen

$$\forall \alpha \in \mathcal{H}\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad \alpha = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \in \mathcal{H}.$$

2. A

$$\mathcal{H} := \left\{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmazn esetén $\min(\mathcal{H}) = 0$, ui. $0 \in \mathcal{H}$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq 1 - \frac{1}{n}$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen maximuma, hiszen

$$\forall \beta \in \mathcal{H}\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad \beta = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \in \mathcal{H}.$$

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy minden (nem-üres) felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb, azaz a **felső korlátok halmazának van minimuma**.

Tétel (szuprémum-elv). Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz felülről korlátos, akkor felső korlátai között van legkisebb: az

$$F := \{K \in \mathbb{R} : \quad K \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$

halmaznak van minimuma.

Bizonyítás. Legyen

$$A := \mathcal{H} \qquad \text{és} \qquad B := F.$$

Ekkor $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall b \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq b.$$

A teljességi axióma következtében így alkalmas $\xi \in \mathbb{R}$ számmal

$$a \leq \xi \leq b \qquad (a \in A,\ b \in B).$$

Erre a $\xi \in \mathbb{R}$ számra igaz, hogy

- ξ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hisze minden $a \in A$ esetén $a \leq \xi$;
- ξ a $\mathcal{H}$ felső korlátai közül a legkisebb, ui. ha b felső korlátja $\mathcal{H}$-nak (azaz $b \in B$), akkor $b \geq \xi$.

Mindez azt jelenti, hogy ξ a $\mathcal{H}$ halmaz legkisebb felső korlátja.

A fentiek értelemszerű módosításával kapjuk az előző állításnak az alsó korlátokra vonatkozó párját.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, akkor, akkor alsó korlátai között van legnagyobb: a

$$\{k \in \mathbb{R} : \quad k \text{ alsó korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$

halmaznak van maximuma.

Definíció.

1. A felülről korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját a számhalmaz **felső határ**ának, más szóval **szuprémum**ának vagy **lényeges felső korlát**jának nevezzük és a $\sup \mathcal{H}$ szimbólummal jelöljük.
2. Az alulról korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a számhalmaz **alsó határ**ának, más szóval **infimum**ának vagy **lényeges alsó korlát**jának nevezzük és az $\inf \mathcal{H}$ szimbólummal jelöljük.

Példák.

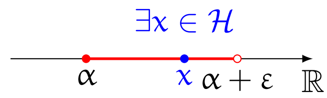
1. A $\mathcal{H} := [-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -1, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1;$$
2. A $\mathcal{H} := (-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = -1, \qquad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \text{ill.} \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1.$$

Megjegyzések.

1. Világos, hogy
   (a) $\exists \min \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \inf \mathcal{H} \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H}$.
   (b) $\exists \max \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup \mathcal{H} \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\sup \mathcal{H} = \max \mathcal{H}$.
2. Az $\inf \mathcal{H} = \alpha$ állítás azt jelenti, hogy
   - α a $\mathcal{H}$ halmaz alsó korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H} : \qquad x \geq \alpha,$$

- bármely α-nál nagyobb szám $\mathcal{H}$-nak már nem alsó korlátja:

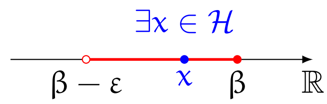
$$(\forall a > \alpha\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha + \varepsilon).$$



3. A $\sup \mathcal{H} = \beta$ állítás azt jelenti, hogy

   - β a $\mathcal{H}$ halmaz ferlső korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \le \beta,$$
   - bármely β-nál kisebb szám $\mathcal{H}$-nak már nem felső korlátja:

$$(\forall b < \beta\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > \beta - \varepsilon).$$



4. Célszerű kiterjeszteni az alsó és felső határ fogalmát nem korlátos halmazokra. Ehhez kibővítjük a valós számok halmazát két elemmel, amelyeket **plusz**, ill. **mínusz végtelen**nek nevezünk és a $+\infty$, ill. $-\infty$ szimbólumokkal jelölünk. Szokás ezeket **ideális elem**eknek is nevezni, és ugyanúgy, mint a valós számok esetében a $+$ előjelet gyakran elhagyjuk. A valós számok ezekkel bővített halmazára az
$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$
jelölést használjuk. Ha valamely halmaz felülről nem korlátos, akkor azt fogjuk mondani, hogy felső határa $+\infty$, ha pedig alulról nem korlátos, akkor definició szerint alsó határa legyen $-\infty$.

5. A $<$ relációt terjesszük ki a valós számok ideális elemekkel bővített $\overline{\mathbb{R}}$ halmazára az alábbiak szerint. Legyen
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < +\infty.$$
A most bevezetett szóhasználattal élve azt mondhatjuk, hogy egy halmaz pontosan akkor felülről korlátos, ha $\sup \mathcal{H} < +\infty$, és pontosan akkor alulról korlátos, ha $\inf \mathcal{H} > -\infty$.

6. A korábbról ismert ún. **véges intervallum**ok mellett használni fogjuk az alábbi ún. **végtelen intervallum**okat is:
$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}: \ x > a\}, \qquad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}: \ x \ge a\},$$
$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}: \ x < b\}, \qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}: \ x \le b\}.$$

Ezekkel összhangban a valós számok és az ideális elemekkel kibővített valós számok halmazát a

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}, \qquad [-\infty, \infty] := \overline{\mathbb{R}}$$

végtelen intervallumokkal is jelöljük.

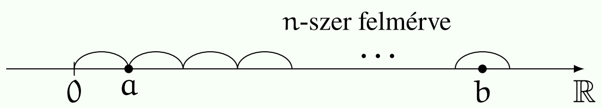
A felső határ fogalma felhasználható a pozitív valós számok valós kitevőjű hatványainak értelmezésére.

Definíció. Legyen $a \in (0, +\infty)$ és $x \in \mathbb{R}$. Ha

- $a > 1$, akkor
$$a^x := \sup\{a^r \in \mathbb{R} : \ x \geq r \in \mathbb{Q}\};$$
- $a = 1$, akkor $a^x := 1$;
- $0 < a < 1$, akkor
$$a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Tétel (Arkhimédész). Bármely $0 < a \in \mathbb{R}$, illetve $b \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan n (pozitív) természetes szám, hogy $b < n \cdot a$:

$$\forall a > 0 \ \text{ és } \ \forall b \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ \exists n \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \ b < n \cdot a.$$



Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \ \text{ és } \ \exists b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall n \in \mathbb{N} : \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$\mathcal{H} := \{n \cdot a \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $\mathcal{H} \neq \emptyset$ és $\mathcal{H}$ felülről korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \cdot a \leq b$. A szuprémum-elv szerint

$$\exists \sup \mathcal{H} =: \xi \in \mathbb{R}.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja a $\mathcal{H}$ halmaznak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists m \in \mathbb{N}: \; m \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (m+1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(m+1) \cdot a \in \mathcal{H}$, tehát $(m+1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ami a fentiek miatt nem lehetséges.

Következmények.

1. **(Eudoxosz-tétel.)**[8] $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ui. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}$: $1 < n \cdot \varepsilon$.

2. Az $\mathbb{N}$ halmaz felülről nem korlátos, ui. $\forall x \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}$: $x < n \cdot 1 = n$.

3. Bármely intervallumban van racionális és irracionális szám: tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad (a, b) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \emptyset, \tag{9}$$

sőt minden intervallumban végtelen sok racionális és irracionális szám van. A (9)-beli első állítás igen könnyen belátható. Ha ui. $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$, akkor

- $0 \leq a < b$ esetén Arkhimédész tételének felhasználásával azt kapjuk, hogy alkalmas $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\frac{1}{n} < b - a.$$
Ismét az Arkhimédész-téelt használva látható, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre
$$a < \frac{m}{n}.$$
Legyen
$$k := \min \left\{ x \in \mathbb{N} : \; a < \frac{x}{n} \right\}.$$
Ekkor
$$\frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n},$$
ahonnan
$$\frac{k}{n} - a \leq \frac{1}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{k}{n} - a \leq \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} < b - a$$
következik, így $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ következtében igaz az állítás.

- $a < b \leq 0$ esetén $0 \leq -b < -a$, így az iméntiek következtében alkalmas $r \in \mathbb{Q}$ számmal $-b < r < -a$, azaz $a < -r < b$.

- $a < 0 < b$, akkor $0 \in \mathbb{Q}$ miatt az állítás bizonyítottnak tekinthető. ■

[8] Knidoszi Eudoxosz, görög matematikus, író, filozófus, geográfus (i.e. 408?– i.e. 355?)

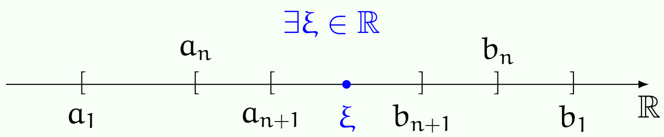
Tétel [Cantor]. Minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén legyenek adottak az $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$ végpontok, és tegyük fel, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset,$$

azaz egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.



Bizonyítás.

1. lépés. Belátjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén

$$a_n \leq a_{n+k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{10}$$

Valóban, ha

- $k = 0$, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló: $a_n = a_{n+0}$.
- $k = 1$, akkor az egyenlőtlenség a tétel feltételeiben szereplő $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ tartalmazás triviális következménye.
- $n \in \mathbb{N}$ és valamilyen $k \in \mathbb{N}_0$ mellet (10) teljesül, akkor az előbbiek következtében

$$a_{n+k} \leq a_{(n+k)+1} = a_{n+(k+1)}$$

miatt $a_n \leq a_{n+(k+1)}$ is igaz. Ezzel (teljes indukcióval) beláttuk (10)-at.

Ugyanígy látható be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ index esetén

$$b_n \geq b_{n+k} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

2. lépés. Belátjuk, hogy

$$a_n \leq b_m \qquad (m, n \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

3. lépés. Legyen ezután

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{és} \qquad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor a fentiek szerint A felülről korlátos, és a B halmaz minden eleme felső korlátja A-nak. Ha tehát $\xi := \sup A$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén egyrészt $a_n \leq \xi$, másrészt pedig $\xi \leq b_n$. Következésképpen tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha \in [a_n, b_n]$, azaz

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Megjegyezzük, hogy

- a fenti tételbeli ξ egyértelmű;
- ha a fenti tételben az intervallumokra akár a korlátosságot, akár a zártságot nem követeljük meg, akkor az állítás nem igaz:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty].$$

A gyakorlat anyaga

Feladat. Igazoljuk az abszolútértékre vonatkozó ún. **sokszög-egyenlőtlenség**et, azaz mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$$

teljesül!

Útm.

1. lépés. $n = 1$ esetén igaz az állítás: $|x_1| \leq |x_1|$.

2. lépés. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$$

teljesül, majd legyen $x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Ekkor (vö. (6))

$$\begin{aligned} |x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}| &= |(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \leq \\ &\leq |x_1| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}|. \end{aligned}$$

Feladat. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén számítsuk ki az

$$S := 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ darab}}$$

összeget!

Útm. Mivel

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{1\ldots1}_{n \text{ darab}} &= 1 + (10+1) + (10^2 + 10 + 1) + \ldots + \\ &\quad +(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1), \end{aligned}$$

továbbá (2) következtében

$$\underbrace{1\ldots1}_{\text{k darab}} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{10 - 1} \qquad (k \in \{2, \ldots, n\}),$$

így (2) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} S &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{10^k - 1}{10 - 1} = 1 + \frac{1}{9} \cdot \left\{ \frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 10 - 1 - (n-1) \right\} = \\ &= 1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10^{n+1} - 1 - 99 - 9n + 9}{9} = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81} \end{aligned}$$

adódik.

Feladat. Az előadáson bebizonyított (5) egyenlőtlenség felhasználásával lássuk be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$1.\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad 2.\quad 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4. \tag{12}$$

Útm.

1. Legyen

$$a := 1 + \frac{1}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad b := 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor $a > b > 0$, így az előző feladat alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} - (n+1)\left(1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)}_{=1} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon a második tényező 1, így a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. **1. lépés.** $n = 1$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2,$$

és az előző egyenlőtlenség alapján minden $2 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2. lépés. Legyen

$$a := 1 + \frac{1}{2n} \qquad \text{és} \qquad b := 1.$$

Ekkor $a > b > 0$, ezért az előző feladat alapján

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}-(n+1)\left(1+\frac{1}{2n}-1\right)\right)}_{=\frac{1}{2}} < 1.$$

A bal oldalon a második tényező $\frac{1}{2}$. Kettővel szorozva és négyzetre emelve

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

adódik. Az első feladat miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

teljesül. Ebből pedig már következik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Megjegyzés. Az is könnyen belátható, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. a binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy ha $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= 2+\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right) = 2+1-\frac{1}{n} < 3.$$

Házi feladat. Lássuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Útm.

1. Teljes indukciót használva látható, hogy

   - $n = 1$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$
   - ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
   akkor
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

2. Teljes indukciót használva látható, hogy

- $n = 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

- ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \\
&= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

3. Két módszerrel is belátjuk az egyenlőtlenség teljesülését:

1. módszer. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\
&= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \ldots = \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

2. módszer. Teljes indukcióval.

- $n = 1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=$$

$$=\frac{n+1}{n+1+1}.$$

Házi feladat. Döntsük el, hogy melyik szám nagyobb!

1. $(1,000001)^{1000000}$ vagy 2 2. 1000^{1000} vagy 1001^{999}.

Útm. Mivel

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\quad(n\in\mathbb{N})\qquad\text{és}\qquad 2=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad\Longleftrightarrow\quad n=1,$$

ezért

$$(1,000001)^{1000000}=\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6}>2$$

ill.

$$1001^{999}=\frac{1001^{999}}{1000^{1000}}\cdot 1000^{1000}=\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1000^{1000}}{1001}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1000^{1000}}{1001}<$$

$$<3\cdot\frac{1000^{1000}}{1001}<1000^{1000}.$$

Házi feladat. Mi a hiba az alábbi okoskodásban?

„**Tétel.** Létezünk. (A marslakók egzisztencia-tétele.)

Bizonygatás. A teljúti indukció felhasználásával annak az állításnak az igazságát fogjuk belátni, hogy ha bolygók valamely n-elemű halmazának egyikén van élet, akkor mindegyikén van ($n \in \mathbb{N}$). Innen már következik, hogy egzisztenciánk nem megalapozatlan. Világos, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás. Tegyük fel most, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az állítás, és legyen adott $n + 1$ darab bolygó: $B_1, \ldots, B_{n+1}$. Tegyük fel, hogy valamelyiken van élet. Az általánosság megszorítása nélkül ezt választhatjuk B_1-nek. Ekkor az n darab $B_1, \ldots, B_n$ bolygó közül egyen van élet, így az indukciós feltevés értelmében mindegyiken, pl. B_2-n is. Tekintsük a következő n bolygót: $B_2, \ldots, B_{n+1}$. Egyikükön van élet (B_2-n), így ismét az indukciós feltevés értelmében mindegyiken van élet. Így tehát a $B_1, \ldots, B_{n+1}$ bolygók mindegyikén van élet. Q. E. D.”

Útm. Ha $\mathcal{A}(n)$ jelöli azt az állítást, hogy

a bolygók valamely n-elemű halmazának egyikén van élet, akkor mindegyikén van,

akkor a következőt láttuk be:

- $\mathcal{A}(1)$ igaz;
- ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n + 1)$ is igaz.

Innen nem következik, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, hiszen nem láttuk be az

$$\mathcal{A}(1) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}(2)$$

implikáció igazságát, sem pedig azt, hogy $\mathcal{A}(2)$ igaz.

2. oktatási hét

Az előadás anyaga

Tétel (Barrow-Bernoulli-egyenlőtlenség). Ha $n \in \mathbb{N}_0$ és $h \in [-2, +\infty)$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $h = 0$ vagy $n \in \{0; 1\}$.

Bizonyítás.

0. lépés. Világos, hogy ha $n = 0$, akkor igaz az egyenlőtlenség: egyenlőség áll fenn, ui.

$$(1+h)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot h.$$

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $1 \leq n \in \mathbb{N}_0$, azaz $n \in \mathbb{N}$.

1. lépés. Legyen $h = -2$. Ekkor a

$$(-1)^n \geq 1 - 2n$$

egyenlőtlenséget kell bebizonyítanunk. Ez nyilvánvalóan teljesül, ui. $n = 1$ esetén

$$(-1)^1 = 1 - 2 \cdot 1,$$

ill. ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor $1 - 2n < -1$, hiszen ez a $2 < 2n$ egyenlőtlenséggel egyenértékű.

2. lépés. Legyen $h \in (-2, -1)$. Világos, hogy ha $n = 1$, akkor teljesül a becslés, sőt egyenlőség van. Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\varepsilon := -h - 1 \qquad (\leftrightarrow \quad \varepsilon \in (0, 1)).$$

Így

$$(1+h)^n = (-\varepsilon)^n > -1 > 1 - n - n\varepsilon = 1 + n(-1-\varepsilon) = 1 + nh.$$

3. lépés. Legyen $h \in [-1, +\infty)$. Ha $x := 1 + h$, akkor az

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^n - 1 - n(x-1) &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) - n(x-1) = \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n), \end{aligned}$$

ezért, ha

- $h \geq 0$, azaz $x \geq 1$, akkor

$$x - 1 \geq 0 \qquad \text{és} \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \geq n,$$

- ha pedig $-1 \leq h \leq 0$, azaz $0 \leq x \leq 1$, akkor

$$x - 1 \leq 0 \qquad \text{és} \qquad x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \leq n.$$

Ennélfogva

$$x^n - 1 - n(x-1) \geq 0, \qquad \text{azaz} \qquad x^n \geq 1 + n(x-1), \qquad \text{így} \qquad \boxed{(1+h)^n \geq 1 + nh}. \quad \checkmark$$

Megjegyezzük, hogy ez az eset teljes indukcióval is belátható.

- Ha $n = 1$, akkor
$$(1+h)^1 = 1 + h = 1 + 1 \cdot h. \quad \checkmark$$

- Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad (1+h)^n \geq 1 + nh,$$

  akkor

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n \cdot (1+h) \overset{(*),\, 1+h\geq 0}{\geq} (1+nh) \cdot (1+h) = 1 + h + nh + nh^2 = \\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \overset{nh^2 \geq 0}{\geq} 1 + (n+1)h. \quad \checkmark \end{aligned}$$

4. lépés. A

$$h = 0 \qquad \text{vagy} \qquad n = 1$$

esetben nyilván teljesül az egyenlőség. Tegyük fel, hogy alkalmas $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1+h)^n = 1 + nh.$$

Ekkor $h = 0$, ugyanis ismét az

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(1+h)^n = 1 + nh \quad \Longleftrightarrow \quad (1+h)^n - 1^n = nh \quad \Longleftrightarrow \quad h \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} = h \cdot n$$

miatt sem $h > 0$ sem pedig $h < 0$ nem lehetséges, mert különben

$$\sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} > n, \qquad \text{ill.} \qquad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} (1+h)^{n-k} < n$$

teljesülne, ami nyilvánvalóan nem igaz.

Megjegyzések.

1. A Bernoulli-egyenlőtlenségről Jakob Bernoulli egy könyvéből latinul (1670), és Isaac Barrow-tól angolul (1669) olvashatunk.

2. Megmutatható, hogy a $h < -2$ esetben már nem igaz az egyenlőtlenség.

3. Alkalmazás: az
$$f(x) := (1+x)^n \qquad (-2 \leq x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N})$$
függvény grafikonja nem megy a 0-beli érintője alá, ui.
$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + n(1+0)^{n-1}x = 1 + nx \leq (1+x)^n = f(x).$$

Definíció. Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **számtani** vagy **aritmetikai közep**ét az alábbi módon értelmezzük:

$$A_n := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k;$$

2. az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **négyzetes** vagy **kvadratikus közep**ét így értelmezzük:

$$Q_n := \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2};$$

3. a $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **mértani** vagy **geometriai közep**t az alábbi módon értelmezzük:

$$G_n := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k};$$

4. a $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **harmonikus közep**t így értelmezzük:

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}.$$

Megjegyezzük, hogy

1. a fenti definícióban a közép elnevezés jogos, hiszen egyszerű becsléssel belátható, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és

   (a) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq A_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

   (b) $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq Q_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

   (c) $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq G_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\};$$

(d) $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H_n \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

2. $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, akkor igaz a

$$H_n \leq G_n \leq A_n \quad \Leftrightarrow \quad H_n^n \leq G_n^n \leq A_n^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\right)^n \leq x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n$$

ekvivalencia-lánc.

Tétel (a mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség).
Bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = A_n},$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben teljesül.

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítunk.

0. lépés. Ha $n = 1$, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, sőt egyenlőség van. Ha pedig $n = 2$, akkor

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - x_1 x_2 = \frac{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2,$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = x_2$ esetben áll fenn.

1. lépés. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Ha valamely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k = 0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül. Tegyük fel tehát, hogy bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_k > 0$. Mivel

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1,$$

ezért alkalmazható a Bernoulli-egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \Bigg(1+\underbrace{\frac{A_n}{A_{n-1}}-1}_{:=h}\Bigg)^n \geq 1+n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}-1\right) = \frac{A_{n-1}+nA_n-nA_{n-1}}{A_{n-1}} =$$

$$= \frac{nA_n-(n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{x_n}{A_{n-1}},$$

azaz

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1}.$$

Így

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot A_1^1 = x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot x_1 = G_n^n.$$

2. lépés. Nyilvánvaló, hogy ha $x_1 = \ldots = x_n$, akkor $A_n = G_n$. Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és bizonyos $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az $A_n = G_n$ egyenlőség, továbbá az $x_1, \ldots, x_n$ számok nem mind egyenlők egymással, azaz van közöttük legalább két különböző:

$$\exists i, j \in \{1, \ldots, n\}: \qquad x_i \neq x_j,$$

akkor az **1. lépés**ben belátottak alapján

$$\sqrt{x_i x_j} < \frac{x_i+x_j}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad x_i x_j < \left(\frac{x_i+x_j}{2}\right)^2 = \frac{x_i+x_j}{2} \cdot \frac{x_i+x_j}{2}.$$

Ezért

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} < \sqrt[n]{\frac{x_i+x_j}{2} \cdot \frac{x_i+x_j}{2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} x_k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\Bigg(\frac{x_i+x_j}{2} + \frac{x_i+x_j}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin \{i,j\}}}^{n} x_k\Bigg) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = A_n,$$

ami ellentmond az $A_n = G_n$ feltételnek.

Tétel (a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenség).
Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \boxed{\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} = H_n},$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben van.

Bizonyítás. A mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$H_n^n = \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)^n} \leq \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} = \prod_{k=1}^{n} x_k = G_n^n,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\frac{1}{x_1} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, azaz ha $x_1 = \ldots = x_n$ teljesül.

Megjegyzés. A

- Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és az $x_1, \ldots, x_n \in [0, +\infty)$ számok nem mind egyenlők egymással, akkor

$$G_n < A_n, \qquad \text{azaz} \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} < \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

- Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és az $x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$ számok nem mind egyenlők egymással, akkor

$$H_n < G_n, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} < \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Tétel. (Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség). Bármely $n \in \mathbb{N}$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, \ldots, n\})$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}, \tag{13}$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha alkalmas $\mu \in \mathbb{R}$ számmal

$$y_k = \mu x_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{vagy} \qquad x_k = \mu y_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Bizonyítás.

1. lépés. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(\lambda) := \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k - y_k)^2.$$

Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $f(\lambda) \geq 0$, továbbá

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \left\{\lambda^2 x_k^2 - 2\lambda x_k y_k + y_k^2\right\} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\lambda^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)\lambda + \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Ha $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$, azaz

$$x_k = 0 \qquad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Ha $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$, akkor f olyan másodfokú polinom, amely csak nemnegatív értékeket vesz fel, így diszkriminánsa nempozitív:

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \leq 0,$$

amiből a

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

azonosság felhasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

2. lépés. Ha van olyan $\mu \in \mathbb{R}$, amellyel

$$y_k = \mu x_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{vagy} \qquad x_k = \mu y_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}),$$

akkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| = \left|\mu \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right| = |\mu| \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = |\mu| \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

vagy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| = \left|\mu \sum_{k=1}^{n} y_k^2\right| = |\mu| \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \qquad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = |\mu| \sum_{k=1}^{n} y_k^2,$$

azaz egyenlőség van. Tegyük fel, hogy (13)-ben egyenlőség van. Ha $x_1 = \ldots = x_n = 0$, akkor az

$$x_1 = \mu y_1, \quad x_2 = \mu y_2, \quad \ldots, \quad x_n = \mu y_n$$

egyenlőségek a $\mu := 0$ számmal teljesülnek. Ha az $x_1, \ldots, x_n$ számok nem mindegyike 0:

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0,$$

akkor az f másodfokú polinomnak – lévén, hogy diszkriminánsa nulla – pontosan egy valós gyöke van, azaz pontosan $\mu \in \mathbb{R}$ szám van, amelyre

$$0 = f(\mu) = \sum_{k=1}^{n} (\mu x_k - y_k)^2.$$

Ez pedig csak úgy lehetséges, ha bármely $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$(\mu x_k - y_k)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu x_k - y_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_k = \mu x_k.$$

Tétel (Minkowszki-egyenlőtlenség). Ha $n \in \mathbb{N}$, ill. $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ és $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha alkalmas $\mu \in \mathbb{R}$ számmal

$$y_k = \mu x_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{vagy} \qquad x_k = \mu y_k \quad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

Bizonyítás. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2+2x_ky_k+y_k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\leq\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}+\sum_{k=1}^{n}y_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Mindkét oldalból gyököt vonva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. Az egyenlőségre vonatkozó állítás ugyanúgy látató be, mint a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség esetében.

Tétel (négyzetes és a számtani közép közötti egyenlőtlenség). Ha $n\in\mathbb{N}$, ill. $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leq\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2},\qquad\text{azaz}\qquad\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}},$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $0\leq x_1=\ldots=x_n$.

Bizonyítás. Legyen

$$y_k:=\frac{1}{n}\qquad(k\in\{1,\ldots,n\}),$$

és alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszij-egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k &= \sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\cdot\sqrt{\frac{n}{n^2}}=\\ &=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}{n}}.\end{aligned}$$

Emlékeztető.

- Ha $\emptyset \neq A, B$, akkor az A halmazból a B halmazba leképező függvényt úgy adunk meg, hogy A bizonyos elemeihez hozzárendeljük a B valamelyik elemét. Jelölés: $f \in A \to B$. Például

$$\sqrt{} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sin \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- Az f függvény **értelmezési tartomány**án, ill. **értékkészlet**én: a

$$\mathcal{D}_f := \{x \in A: \ \exists y \in B: \ y = f(x)\}, \qquad \text{ill. az} \qquad \mathcal{R}_f := \{y \in B: \ \exists x \in A: \ y = f(x)\}$$

halmazt értjük. B neve: **képhalmaz**. Ha $\mathcal{D}_f = A$, akkor azt írjuk, hogy $f : A \to B$. Valamely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén az $f(x)$ elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési érték**ének nevezzük.

- Ha f és g függvény, akkor

$$f = g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g =: \mathcal{D} \qquad \text{és} \qquad f(x) = g(x) \quad (x \in \mathcal{D}))\,.$$

Példa.

$$\mathcal{D}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{R}_{\sqrt{}} = [0, +\infty), \qquad \mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{R}_{\sin} = [-1, 1].$$

Megjegyezzük, hogy

$$f \in A \to B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f \text{ olyan függvény, amelyre } \mathcal{D}_f \subset A, \ \mathcal{R}_f \subset B;$$

$$f : A \to B \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f \text{ olyan függvény, amelyre } \mathcal{D}_f = A, \ \mathcal{R}_f \subset B.$$

Definíció. Legyen A, B, C halmaz, $C \subset A$, továbbá $f\colon A \to B$ és $g\colon C \to B$ olyan függvények, amelyekre

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in C).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a g függvény az f függvény C halmazra való **leszűkítés**e. Jelben: $g =: f|_C$.

Definíció. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- és $\mathcal{H} \subset A$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **kép**én az

$$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B : \ x \in \mathcal{H}\} = \{y \in B \mid \ \exists x \in \mathcal{H} : \ y = f(x)\}$$

  halmazt értettük (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

- és $\mathcal{H} \subset B$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **ősképé**n az

$$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{H}\}$$

  halmazt értettük (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

Megjegyezések.

1. Szóhasználat:
   - $f[\mathcal{H}]$ az a B-beli halmaz, amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a $\mathcal{H}$ halmaz elemeit;
   - az $f[\mathcal{H}]$ a B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez van olyan $x \in \mathcal{H}$, hogy $y = f(x)$.

2. Az f függvény értékkészlete értelmezási tartománynak f által létesített képe és f értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe:

$$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f.$$

3. Adott $f \in A \to B$ függvény és $b \in B$ esetén az

$$f(x) = b \quad (x \in A) \tag{14}$$

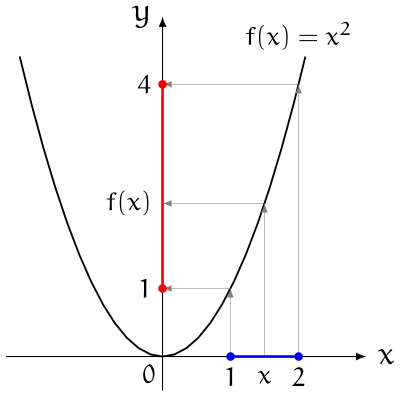
   egyenlet megoldásainak nevezzük az $f^{-1}[\{b\}]$ halmaz elemeit. Azt mondjuk továbbá, hogy
   - a (14) egyenletnek **nincsen megoldása** ((14) **nem oldható meg**), ha $f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$;
   - (14) **megoldása egyértelmű**, ha $f^{-1}[\{b\}]$ egyelemű halmaz.

Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét. Az ábrából sejthető, hogy

$$f\big[[1,2]\big] = [1,4].$$



Biz. A definíció alapján

$$f\big[[1,2]\big] = \big\{x^2 \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [1,2] : y = x^2\big\}.$$

Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \le x \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \le x^2 \le 4, \quad \text{azaz} \quad x^2 \in [1,4],$$

ezért

$$f\big[[1,2]\big] \subset [1,4]. \tag{15}$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1,4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

$$[1,4] \subset f\big[[1,2]\big] \tag{16}$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal egyenértékű, hogy

$$\forall y \in [1,4] \text{ számhoz } \exists x \in [1,2]: \quad \text{hogy} \quad y = x^2. \tag{17}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x_\pm = \pm\sqrt{y}$. Mivel $1 \le y \le 4$, ezért $1 \le \sqrt{y} \le 2$, így $x_+ \in [1,2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a (17) állítás, tehát a vele egyenértékű (16) tartalmazás is igaz. (15) és (16) alapján a két halmaz egyenlő, azaz $f\big[[1,2]\big] = [1,4]$. ■

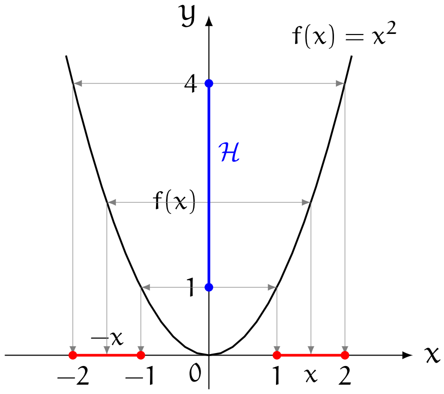
Példa. Meghatározzuk a $\mathcal{H} := [1,4]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét. Az ábrából sejthető, hogy $f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]$.

Biz. A definíció alapján

Így



$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1,4]\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x^2 \le 4\big\}.$$

$f^{-1}\big[[1,4]\big]$ az $1 \le x^2 \le 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$1 \le x^2 \le 4 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \le |x| \le 2 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \le x \le 2 \ \text{ vagy } \ -2 \le x \le -1 \quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in [-2,-1] \cup [1,2],$$

ezért beláttuk azt, hogy

$$f^{-1}\big[[1,4]\big] = [-2,-1] \cup [1,2]. \quad \blacksquare$$

Példa. Az

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := \{0\}$ halmaz esetében meghatározzuk az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazt. Mivel $0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért

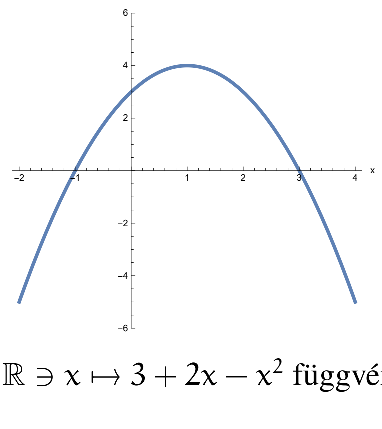
$$f[\{0\}] = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} :\ x \in \{0\}\big\} = \big\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} :\ x = 0\big\} = \{3\},$$

továbbá

$$f^{-1}[\{0\}] = \big\{x \in \mathbb{R} :\ 3 + 2x - x^2 \in \{0\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} :\ 3 + 2x - x^2 = 0\big\} = \{-1; 3\},$$

hiszen

$$3 + 2x - x^2 = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = 1 \pm \sqrt{1+3}. \quad \blacksquare$$



1. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonja.

A gyakorlat anyaga

Feladat. Vizsgáljuk a $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság, $\sup\mathcal{H}$, $\inf\mathcal{H}$, $\max\mathcal{H}$, $\min\mathcal{H}$ szempontjából!

1. $\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \in (0,1]\right\}$;
2. $\mathcal{H} := \left\{\frac{5n+3}{8n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$;
3. $\mathcal{H} := \left\{\frac{x+1}{2x+3} \in \mathbb{R} : 0 \le x \in \mathbb{R}\right\}$;
4. $\mathcal{H} := \left\{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} : 0 \le x \in \mathbb{R}\right\}$;
5. $\mathcal{H} := \left\{\frac{2x^2+1}{5x^2+2} \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\right\}$.

Útm.

1.
- $\mathcal{H}$ alulról korlátos, ugyanis 0 nyilván alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak, sőt minden $x \in (0,1]$ esetén

$$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{1} = 1,$$

ezért 1 is alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Mivel $x = 1$ esetén

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \in \mathcal{H},$$

ezért $\mathcal{H}$-nak van legkisebb eleme (minimuma):

$$\min\mathcal{H} = 1, \qquad \text{így} \qquad \inf\mathcal{H} = \min\mathcal{H} = 1.$$

- Ha x elég közel van 0-hoz, akkor $\frac{1}{x}$ értéke igen nagy. Így sejthető, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos. Ennek megmutatásához azt kell belátni, hogy

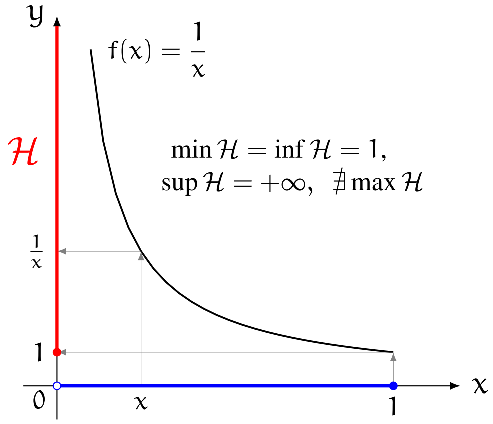
$$\forall K \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists x \in (0,1]: \quad \frac{1}{x} > K.$$

Legyen $K > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Ekkor

$$\frac{1}{x} > K, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < \frac{1}{K}.$$

Így pl. az $x := \frac{1}{K+1} < 1$ megfelelő, ami azt mutatja, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos.

Megjegyzés. A kapott eredmények az $\dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ függvény grafikonjáról is leolvashatók:



2. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{5n+3}{8n+1}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{3}{5}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{1}{8}+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}$$

vagy

$$\begin{aligned}\frac{5n+3}{8n+1} &= \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+24}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+5+19}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \left(1 + \frac{19}{40n+5}\right) = \\ &= \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40n+5} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

- Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

  $$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} \leq \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8 \cdot 0 + 1} = 3,$$

  ezért

  $$\max \mathcal{H} = \sup \mathcal{H} = 3,$$

  ui. 3 felső korlát és $3 \in \mathcal{H}$.

- $\inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}$, ui. $\frac{5}{8}$ alsó korlát és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$\frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8N+1} < \frac{5}{8} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad N > \frac{1}{8}\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)$$

és

$$N := \max\left\{0, \left[\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{8}\right] + 1\right\}$$

ilyen. Világos, hogy $\nexists \min \mathcal{H}$, mivel

$$\forall a \in \mathcal{H}: \quad a > \inf \mathcal{H} = \frac{5}{8}.$$

3. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{x+1}{2x+3}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $0 \le x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+3-1}{2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x+3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} \tag{18}$$

- Mivel bármely $0 \le x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 0 + 6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

ezért $\inf \mathcal{H} = \min \mathcal{H} = \frac{1}{3}$, ui. $\frac{1}{3}$ alsó korlát és $\frac{1}{3} \in \mathcal{H}$.

- Látható, hogy $\frac{1}{2}$ felső korlát. Belátjuk, hogy $\sup \mathcal{H} = \frac{1}{2}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x \ge 0: \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4x+6} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy $\frac{1}{4x+6} < \varepsilon$, azaz hogy $\frac{1}{\varepsilon} - 6 < 4x$. Ilyen $x \ge 0$ nyilván létezik. Mivel $\frac{1}{2} \notin \mathcal{H}$, ezért $\nexists \max \mathcal{H}$.

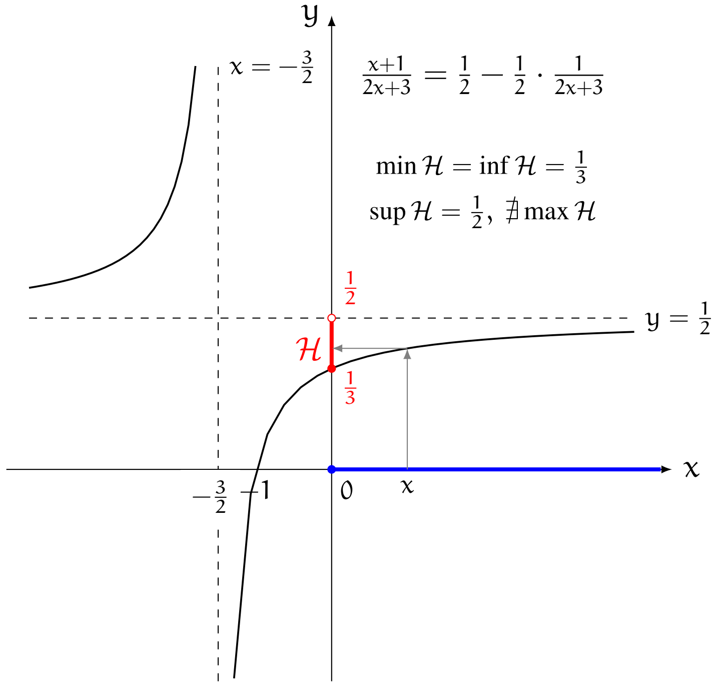
Megjegyzés. Függvénytranszformációval az

$$\frac{1}{x} \qquad (0 \ne x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonjából a (18) azonosság felhasználásával ábrázolhatjuk az

$$\frac{x+1}{2x+3} \qquad \left(-\frac{3}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right)$$

függvény grafikonját. A kapott eredmények arról is leolvashatók:



4. A nevező „gyöktelenítésével” azt kapjuk, hogy bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \tag{19}$$

- Látható, hogy $\mathcal{H}$ korlátos halmaz, hiszen 0 triviális alsó korlát, továbbá

  $$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R})$$

  következtében

  $$0 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

- A (19) egyenlőtlenség jobb oldali egyenlőtlenségében $x = 0$ esetén egyenlőség áll fenn, ami azt jelenti, hogy

  $$\max \mathcal{H} = 1, \quad \text{ezért} \quad \sup \mathcal{H} = \max \mathcal{H} = 1 \text{ is fennáll.}$$

- Az $\inf \mathcal{H}$, illetve a $\min \mathcal{H}$ meghatározásához tekintsük a (19) formula jobb oldalát. Nagy x-ekre a tört nevezője nagy, a tört értéke tehát kicsi, sőt elég nagy x-ekre a tört értéke tetszőlegesen közel lesz 0-hoz. Sejthető tehát, hogy $\inf \mathcal{H} = 0$. **Biz.**

  1. lépés. Láttuk, hogy 0 egy alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. ✓

  2. lépés. Megmutatjuk, hogy 0-nél nincsen nagyobb alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \geq 0: \quad \mathcal{H} \ni \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \varepsilon. \tag{20}$$

  Mivel

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \ (x > 0 \text{ feltehető}) \ < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon, \quad \text{ha } x > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

  így a (20) állítás teljesül tetszőleges $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ számra. Ez azt jelenti, hogy 0 valóban a legnagyobb alsó korlátja a $\mathcal{H}$ halmaznak.

5. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{2x^2+1}{5x^2+2}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{2x^2+1}{5x^2+2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10x^2+5}{10x^2+4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10x^2+4+1}{10x^2+4} = \frac{2}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{10x^2+4}\right) = \frac{2}{5} + \frac{1}{25x^2+10}.$$

- Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{25x^2+10} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25 \cdot 0^2 + 10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2},$$

  ezért

$$\sup \mathcal{H} = \max \mathcal{H} = \frac{1}{2}.$$

- Látható, hogy $\frac{2}{5}$ alsó korlát. Belátjuk, hogy $\inf \mathcal{H} = \frac{2}{5}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \mathbb{R}: \quad \frac{2}{5} + \varepsilon > \frac{2}{5} + \frac{1}{25x^2+10}.$$

  Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\varepsilon > \frac{1}{25x^2+10}, \qquad \text{azaz hogy} \qquad 25x^2 + 10 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ilyen $x \in \mathbb{R}$ nyilván létezik, hiszen $\mathbb{R}$ felülről nem korlátos. Mivel $\frac{2}{5} \notin \mathcal{H}$, ezért $\nexists \min \mathcal{H}$.

Házi feladat. Vizsgáljuk a $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság, $\sup \mathcal{H}$, $\inf \mathcal{H}$, $\max \mathcal{H}$, $\min \mathcal{H}$ szempontjából!

1. $\mathcal{H} := \left\{\frac{2x+3}{3x+1} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{Z}\right\}$;
2. $\mathcal{H} := \left\{\frac{5x-1}{2x+3} \in \mathbb{R} :\ x \in [3, +\infty)\right\}$.

Útm.

1. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{2x+3}{3x+1}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{3x+1} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{6x+9}{6x+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6x+2+7}{6x+2} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{7}{6x+2}\right) = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6x+2} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1}.\end{aligned}$$

- Ha $x < 0$, akkor $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} < 0$, míg $x \geq 0$ esetén

$$0 \leq \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \leq \frac{7}{3}.$$

Ezért

$$\frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$

és $x = 0$-ra

$$\frac{2x+3}{3x+1} = 3.$$

Tehát az $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma és $\max \mathcal{H} = 3$, következésképpen $\sup \mathcal{H} = 3$.

- Ha $x = -1$, akkor

$$\frac{2x+3}{3x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Lássuk be, hogy

$$\frac{2x+3}{3x+1} \geq -\frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

teljesül. Ui. ez azzal egyenértékű, hogy

$$\frac{2x+3}{3x+1}+\frac{1}{2}=7\cdot\frac{x+1}{3x+1}\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{Z}),$$

ami igaz. Tehát

$$\min\mathcal{H}=\inf\mathcal{H}=-1/2.$$

2. A $\mathcal{H}$ halmaz szerkezetének feltárásához először az

$$\frac{5x-1}{2x+3}$$

törtet a gyakorlat elején leírt módon átalakítjuk. Világos, hogy bármely $3\leq x\in\mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{5x-1}{2x+3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{10x-2}{10x+15}=\frac{5}{2}\cdot\frac{10x+15-17}{10x+15}=\frac{5}{2}\cdot\left(1-\frac{17}{10x+15}\right)=\frac{5}{2}-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel tetszőleges $3\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{14}{9}=\frac{5}{2}-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3+3}\leq\frac{5}{2}-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3},$$

ezért

$$\inf\mathcal{H}=\min\mathcal{H}=\frac{14}{9}.$$

- Látható, hogy $\frac{5}{2}$ felső korlát. Belátjuk, hogy $\sup\mathcal{H}=\frac{5}{2}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\, x\in[3,+\infty):\quad \frac{5}{2}-\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}>\frac{5}{2}-\varepsilon.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\frac{17}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}<\varepsilon, \qquad \text{azaz hogy} \qquad \frac{17}{2\varepsilon}-3<2x.$$

Ilyen $x\in[3,+\infty)$ nyilván létezik, hiszen $[3,+\infty)$ felülrőlnem korlátos. Mivel $\frac{5}{2}\notin\mathcal{H}$, ezért $\nexists\max\mathcal{H}$.

3. oktatási hét

Az előadás anyaga

Definíció. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- **invertálható** (**injektív** vagy **egy-egyértelmű**), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f : \qquad (x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y)) \, .$$

  Ekkor az

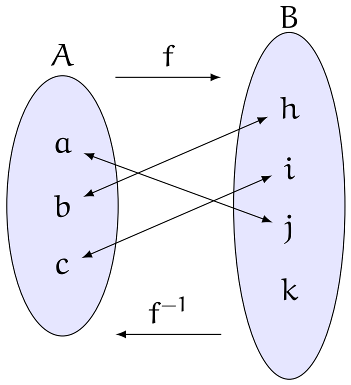
$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f, \quad f^{-1}(y) = x : \quad f(x) = y$$

  függvényt f **inverz**ének nevezzük.

- **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_f = B$.

- **bijektív** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, ha injektív és szürjektív.

Példa. Az ábrán látható

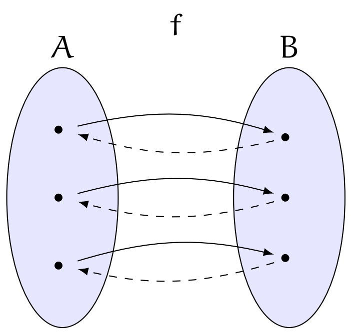


$$f := \{(a, j), \ (b, h), \ (c, i)\}$$

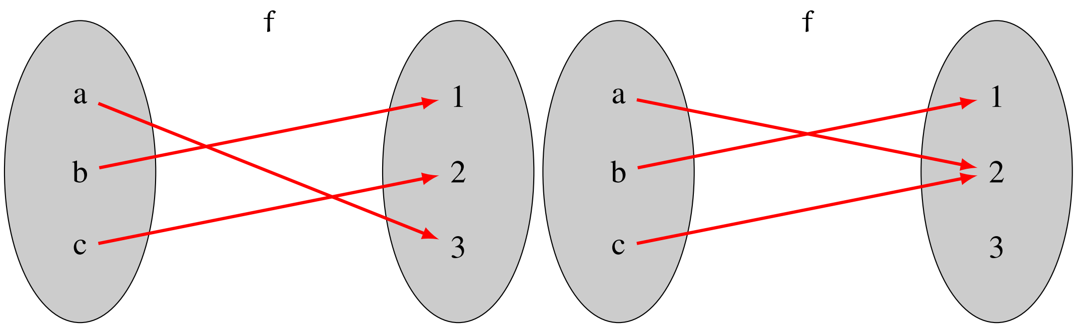
függvény invertálható, és inverze az

$$f^{-1} := \{(j, a), \ (h, b), \ (i, c)\}$$

függvény, de az $f : A \to B$ függvény nem bijektív.



Egy $f : A \to B$ bijektív leképezés párba állítja az A és B halmaz elemeit: a két halmaz elemszáma megegyezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az A és B halmaz **azonos számosságú**.



A fenti ábra bal oldala példa injektív függvényre, a jobb oldalán lévő f pedig nem injektív.

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény injektív, majd kiszámítjuk inverzét. Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$f(x) = 3 \cdot \frac{3x+2}{3x-3} = 3 \cdot \frac{3x-3+5}{3x-3} = 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{3x-3}\right) = 3 + \frac{5}{x-1}, \tag{21}$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = 3 + \frac{5}{y-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. (21) alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\frac{5}{x-1} \neq 0$, így (21) alapján $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R} \backslash \{3\}$.
- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R} \backslash \{3\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R} \backslash \{3\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R} \backslash \{3\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{5}{y-3} = \frac{y+2}{y-3}$$

és $x \neq 1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

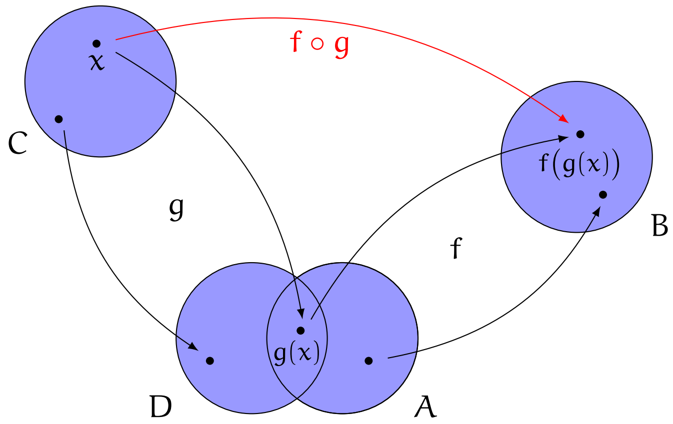
Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R} \backslash \{3\} \to \mathbb{R} \backslash \{1\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y+2}{y-3}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. Valamely $f \in A \to B$ függvény esetében f invertálhatóságát több különböző módon is le lehet írni:
   - f invertálható $\Longleftrightarrow$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f$ esetén $u \neq v \Longrightarrow f(u) \neq f(v)$;
   - f invertálható $\Longleftrightarrow$ $\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(u) = f(v) \Longrightarrow u = v$;
   - f invertálható $\Longleftrightarrow$ $\forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez pontosan egy olyan $x \in \mathcal{D}_f$ van, amelyre $f(x) = y$.
2. Ha alkamas $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u \neq v$ esetén $f(u) = f(v)$, akkor f nem invertálható (nem injektív).
3. Ha $\mathcal{D}_f$ nem egyelemű, viszont $\mathcal{R}_f$ egyelemű (valódi konstans függvény), akkor f nem invertálható, hiszen
$$\exists x, y \in \mathcal{D}_f,\ x \neq y: \quad f(x) = f(y).$$
4. A definícióból látható, hogy
$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f.$$
5. Felhívjuk a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ szimbólum tetszőleges f függvény esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban, ha f invertálható függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}_f$ esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{H}\}$ halmaz – megegyezik a $\mathcal{H}$ halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az
$$\left\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} : y \in \mathcal{H}\right\}$$
halmazzal.

Definíció. Legyen $f \in A \to B$, $g \in C \to D$, ill.
$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$
Ekkor az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvény**nek (**kompozíció**jának) nevezzük az alábbi függvényt:
$$f \circ g : \mathcal{H} \to D, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$



Megjegyzések.

1. A definícióból nyilvánvaló, hogy $\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f]$, illetve $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ esetén $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g$.

2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f), \qquad\qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

3. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan invertálható függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_g$ teljesül, akkor $f\circ g$ is invertálható és
$$(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}.$$

4. A kompozíció-képzés nem kommutatív, hiszen pl. az
$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és a} \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$
függvények esetében $f\circ g \neq g\circ f$. Valóban,

   - a
   $$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1] \neq \emptyset$$
   halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$, akkor
   $$(f\circ g)(x) = (f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-x^2},$$
   azaz az f és a g kompizíciója:
   $$f\circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f\circ g)(x) = \sqrt{1-x^2};$$

   - a
   $$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset$$

halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, akkor

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x,$$

azaz a g és az f függvény kompozíciója pedig

$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = 1 - x.$$

Definíció. Valós-valós függvényeknek nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket.

A valós-valós függvény függvények sajátossága, hogy hozzárendelési szabályuk gyakran képlettel adható meg. Alapvetően három különböző jelölés használatos valamely valós-valós függvény megadására, pl:

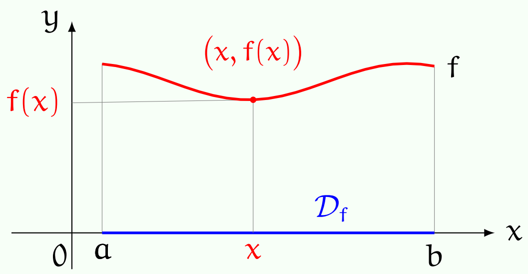
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin(x)$,
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}$,
- $f(x) := \sin(x) \ \ (x \in \mathbb{R})$.

A valós-valós függvényeknek egy másik fontos sajátossága az, hogy sok esetben szemléltethetők síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció.
A

$$\begin{aligned} \mathrm{graph}(f) &:= \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f\right\} = \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathcal{D}_f,\ y = f(x)\right\} \end{aligned}$$

halmazt az f függvény **grafikon**jának vagy **gráf**jának nevezzük.



Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós-valós függvény

- **korlátos**, ha f értékkészlete korlátos, azaz

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén} \quad |f(x)| \leq K.$$

- **felülről korlátos**, ha f értékkészlete felülről korlátos, azaz

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén} \quad f(x) \leq K.$$

- **alulról korlátos**, ha f értékkészlete alulról korlátos, azaz

$$\exists k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén} \quad f(x) \geq k.$$

Megjegyzések.

1. Nyilvánvaló, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós-valós függvény pontosan akkor korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos.

2. A valós-valós függvények közül azok korlátosak, amelyeknek grafikonja két vízszintes vonal közé szorítható. Pl. az

$$f(x) := \cos(x) \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

függvény korlátos, hiszen

$$|\cos(x)| \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

azaz

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós-valós függvény

- **monoton növekvő** (jelben $f \nearrow$), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ x < y \ \text{ esetén } \ f(x) \leq f(y),$$

- **monoton csökkenő** (jelben $f \searrow$), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ x < y \ \text{ esetén } \ f(x) \geq f(y),$$

- **szigorúan monoton növekvő** (jelben $f \uparrow$), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ x < y \ \text{ esetén } \ f(x) < f(y),$$

- **szigorúan monoton csökkenő** (jelben $f \downarrow$), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f,\ x < y \ \text{ esetén } \ f(x) > f(y),$$

- **(szigorúan) monoton**, ha (szigorúan) monoton növekvő vagy csökkenő.

Megjegyzések.

1. Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (növekvő/csökkenő), akkor invertálható, és f^{-1} is szigorúan monoton (növekvő/csökkenő). Mindez fordítva nem igaz, ui. pl. az

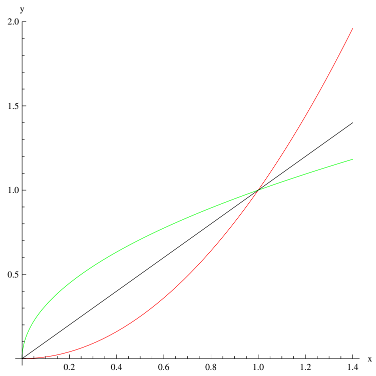
$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x & \left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \\ \frac{3}{2} - x & \left(x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) \end{cases}$$

függvény ugyan injektív, de nem szigorúan monoton.

2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor az f és az f^{-1} grafikonja egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükörképe (vö. 2. ábra), hiszen ha valamely $(x, y) \in \mathbb{R}$ pont rajta van f grafikonján:

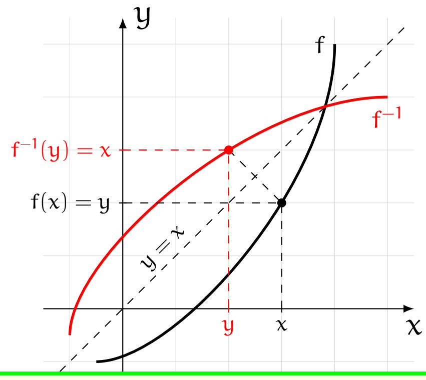
$$(x, y) \in \text{graph}\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u \in \mathcal{D}_f,\ v = f(u)\right\},$$

akkor az (y, x) pont rajta van az f^{-1} inverz grafikonján, és ha egy $\mathbb{R}^2$-beli pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pontot az $y = x$ egyenesre tükrözzük.



2. ábra. Az $x \mapsto \sqrt{x}, \quad x, \quad x^2$ függvények grafikonjai.

Megjegyezzük, hogy „átlátszó” papír felhasználásával a tükrözés elkerülhető. Az f grafikonjának megrajzolása után rögtön láthatóvá válik inverzének grafikonja is, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányban, majd függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, pont az f^{-1} inverz grafikonja.



Emlékeztető. Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \qquad \mathcal{D} := \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset, \qquad c \in \mathbb{R},$$

majd értelmezzük a következő függvényeket:

$$cf : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \qquad (cf)(x) := cf(x)$$

$$f \pm g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad (f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$$

$$f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$

és

$$|f| : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \qquad |f|(x) := |f(x)|,$$

ill. $0 \notin \mathcal{R}_g$ esetén

$$\frac{f}{g} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Példa. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := |x|$$

függvények esetében meghatározzuk az $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, g/f függvényeket. Világos, hogy

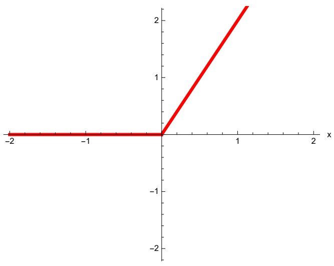
$$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R},$$

továbbá

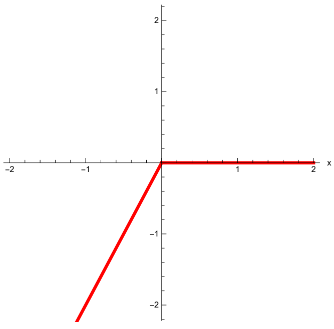
$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

ezért

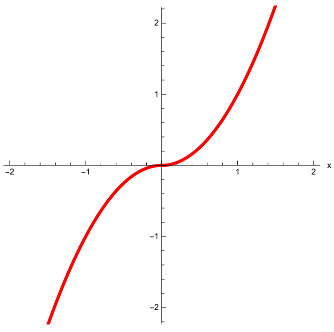
- $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$(f+g)(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x = 2x & (x \geq 0), \\ x - x = 0 & (x < 0). \end{cases}$$
- $f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$(f-g)(x) = x - |x| = \begin{cases} x - x = 0 & (x \geq 0), \\ x + x = 2x & (x < 0). \end{cases}$$
- $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$(f \cdot g)(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot x = x^2 & (x \geq 0), \\ x \cdot (-x) = -x^2 & (x < 0). \end{cases}$$
- $\dfrac{f}{g} : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & (x > 0), \\ \frac{x}{-x} = -1 & (x < 0). \end{cases}$$
- $\dfrac{g}{f} : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$,
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & (x > 0), \\ \frac{-x}{x} = -1 & (x < 0). \end{cases}$$



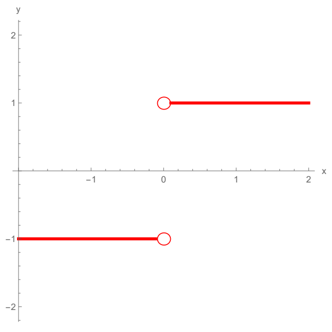
3. ábra. Az $f + g$ függvény grafikonja.



4. ábra. Az $f - g$ függvény grafikonja.



5. ábra. Az $f \cdot g$ függvény grafikonja.



6. ábra. Az f/g és a g/f függvények grafikonja.

A továbbiakban egy ideig a természetes számok halmazán értelmezett függvényekkel: sorozatokkal foglalkozunk.

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Ekkor az

$$x : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{H}$$

függvényt **$\mathcal{H}$-beli sorozat**nak nevezzük. Ha

$$\mathcal{H} = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{H} = \{f : \ f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

akkor valós vagy komplex számsorozatról, illetve valós-valós függvények sorozatáról beszélünk.

Megjegyzések.

1. Az $x(n)$ helyettesítési értéket az x sorozat **n-edik tag**jának vagy **n-indexű tag**jának nevezzük.

2. Az

   $$x(n) =: x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   indexes jelölés bevezetésével az x sorozatra az alábbi jelölések használatosak:

   $$x =: (x_n, \ n \in \mathbb{N}_0), \qquad x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad x =: (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \qquad (x_n),$$

   ill.

   $$x =: (x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

3. Sok esetben tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}_0$ szám esetén az

   $$x : \mathbb{N}_k \to \mathcal{H}$$

   függvény is sorozatnak tekintendő, ahol

   $$\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N}_0 : \ n \geq k\} \qquad\qquad /\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}/.$$

4. A továbbiakban csak valós számsorozatokkal foglalkozunk, azaz feltesszük, hogy $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

5. A függvények közötti összeadás, ill. a függvények számmal való szorzására vonatkozóan a sorozatok vektorteret (lineáris teret) alkotnak, melynek nulleleme a

   $$\theta := (0, 0, 0, \ldots)$$

   sorozat. A számsorozatok lineáris terét az $\mathcal{S}$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Példák.

1. Legyen $c \in \mathbb{R}$, $x_n := c$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (**konstans sorozat** vagy **állandó sorozat**),

$$x_0 = c, \quad x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c, \quad x_4 = c, \quad \ldots$$

2. $x_n := n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$,

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad \ldots$$

3. $x_n := \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**harmonikus sorozat**),

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{1}{5}, \quad \ldots$$

A név eredete:

$$x_n = \frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n+1}}} \qquad (2 \le n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2}{\dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n+1}}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} = x_n.$$

4. $x_n := \alpha + nd$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ahol $\alpha, d \in \mathbb{R}$ (**számtani sorozat**),

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + d, \quad x_2 = \alpha + 2d, \quad x_3 = \alpha + 3d, \quad x_4 = \alpha + 4d, \quad \ldots$$

A név eredete:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{\alpha + (n-1)d + \alpha + (n+1)d}{2} = \frac{2\alpha + 2nd}{2} = \alpha + nd = x_n.$$

5. $x_n := \beta q^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ahol $\beta, q \in \mathbb{R}$ (**mértani sorozat**),

$$x_0 = \beta, \quad x_1 = \beta q, \quad x_2 = \beta q^2, \quad x_3 = \beta q^3, \quad x_4 = \beta q^4, \quad \ldots$$

A név eredete: ha $\beta, q > 0$, akkor

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ui. tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}} = \sqrt{\beta \cdot q^{n-1} \cdot \beta \cdot q^{n+1}} = \sqrt{\beta^2 \cdot q^{2n}} = \beta \cdot q^n = x_n.$$

6. $x_n := (-1)^n \dfrac{4n^2 + 2n + 1}{3n^3 + 6}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$,

$$x_0 = \frac{1}{6}, \quad x_1 = -\frac{7}{9}, \quad x_2 = \frac{21}{30}, \quad x_3 = -\frac{43}{87}, \quad x_4 = \frac{73}{198}, \quad x_5 = -\frac{211}{381}, \quad \ldots$$

7. $x_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \quad x_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \quad \ldots$$

8. $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**harmonikus sor**),

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

9. $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$ $(n \in \mathbb{N})$ (**alternáló harmonikus sor**),

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad x_4 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

10. $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ (**mértani sor**),

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + q, \quad x_2 = 1 + q + q^2, \quad x_3 = 1 + q + q^2 + q^3, \quad \ldots$$

11. $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{4}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}, \quad \ldots$$

12. $x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad x_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}, \quad \ldots$$

13. $x_0 := c,$

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

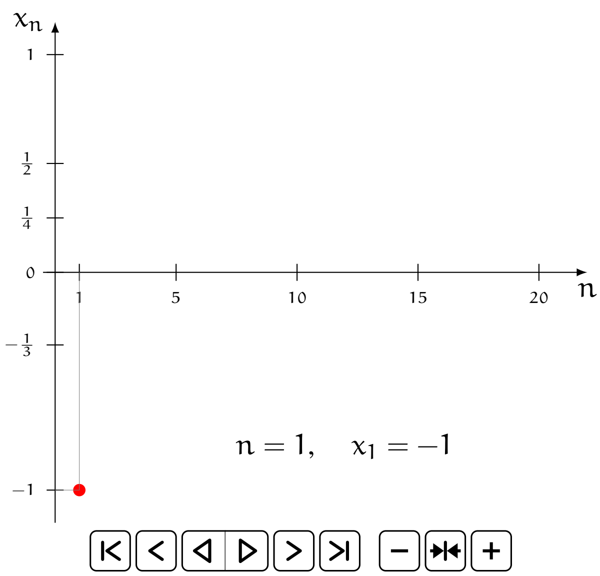
ahol $0 < c \in \mathbb{R}$. Ha $c = 2$, akkor

$$x_1 = 1.5, \qquad x_2 \approx 1.416 \qquad \text{és} \qquad (x_2)^2 \approx 2.$$

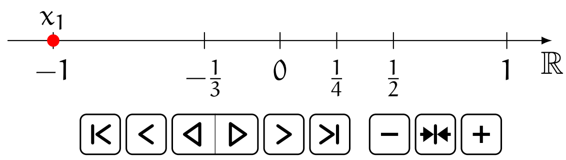
A valós számsorozatokat kétféle módon is szemléltethetjük. Mivel ezek speciális valós-valós függvények, ezért a különálló pontokból álló grafikonjukat ábrázolhatjuk a koordináta-rendszerben. Másrészt a sorozat tagjait – értékei szerint – elhelyezhetjük a számegyenesen. Mindkét szemléltetési módot megmutatjuk az

$$x_n := \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében:



Koordináta-rendszerben



Számegyenesen

A gyakorlat anyaga

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n < \frac{2}{3}$$

egyenlőtlenségpár!

Útm. Külön-külön igazoljuk az alsó, ill. a felső becslést.

- Az alsó becslés a következő módon látható be. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $-\dfrac{1}{2n} \geq -2$, ezért Bernoulli-egyenlőtlenségből

  $$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{2n} = 1 - \frac{n}{2n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  következik.

- A felső becsléshez azt használjuk fel, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

  $$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n},$$

  továbbá $\dfrac{1}{2n-1} \geq -2$, így a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

  $$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{n}{2n-1}} = \frac{2n-1}{3n-1} < \frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6n - 3 < 6n - 2.$$

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $a, b \in [0, +\infty)$: $a \leq b$, akkor fennáll a

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} < \frac{a+b+1}{a+1}$$

egyenlőtlenség!

Útm. A mértani éls a számtani közép közötti egyenlőtlenség következményeként azt kapjuk, hogy bármely $x \in [0, +\infty)$: $x \neq 1$ számra

$$\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot 1} < \frac{1}{2}(x+1).$$

Mivel

$$0 \leq a \leq b \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{b+1} < 1,$$

ezért

$$\sqrt{\frac{a}{b+1} \cdot 1} + \sqrt{\frac{b}{a+1} \cdot 1} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+1} + 1\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}\right).$$

Világos, hogy

$$0 \leq a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{a}{b+1} \leq \frac{b}{a+1},$$

ennélfogva

$$\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} < 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1}\right) \leq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+1} + \frac{b}{a+1}\right) = \frac{a+b+1}{a+1}.$$

A következő feladatbeli egyenlőtlenségek fontos szerepet játszanak az

$$x_n := \sqrt[n]{\alpha} \quad (n \in \mathbb{N},\ \alpha \in (0, +\infty)), \qquad \text{ill. az} \qquad x_n := \sqrt[n]{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergenciájának tárgyalásakor.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

1. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (1, +\infty)$, akkor
$$\frac{\alpha - 1}{\alpha n} \leq \sqrt[n]{\alpha} - 1 \leq \frac{\alpha - 1}{n};$$
2. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (0, 1)$, akkor
$$\frac{1 - \alpha}{n} \leq 1 - \sqrt[n]{\alpha} \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha n};$$
3. $n \in \mathbb{N}$, akkor
$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

teljesül!

Útm.

1. Felhasználva a mértani közép és a számtani közép, ill. a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy ha $\alpha \in (1, +\infty)$, akkor

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \alpha} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + \alpha}{n} = 1 + \frac{\alpha - 1}{n}$$

és

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\alpha} &= \sqrt[n]{1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \alpha} \geq \frac{n}{(n-1) \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha n}{\alpha n - \alpha + 1} = \\ &= \frac{\alpha n - \alpha + 1 + \alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} = 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} > 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n}. \end{aligned}$$

2. Ha $\alpha \in (0, 1)$, akkor

$$\frac{1}{\alpha} \in (1, +\infty),$$

így az 1. felhasználásával adódik a két becslés.

3. Az első egyenlőtlenség triviális. A második:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Feladat. Lássuk be, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor fennáll a

$$\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2} + \ldots + \sqrt{m+n} \leq (n+1)\sqrt{m + \frac{n}{2}}$$

egyenlőtlenség!

Útm. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget az

$$x_k := \sqrt{m+k}, \quad y_k := 1 \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, n\})$$

szereposztással. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n} (m+k) \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 \geq \left(\sqrt{m} + \sqrt{m+1} + \sqrt{m+2} + \ldots + \sqrt{m+n}\right)^2,$$

ahonnan

$$\sqrt{m}+\sqrt{m+1}+\sqrt{m+2}+\ldots+\sqrt{m+n}\leq\sqrt{\left[(n+1)m+\frac{n(n+1)}{2}\right](n+1)}=(n+1)\sqrt{m+\frac{n}{2}}$$

következik.

Házi feladat. Alkalmazzuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget az alábbi számokra!

1. $x_k := 1+\dfrac{1}{n} \quad (k\in\{1,\ldots,n\}), \qquad x_{n+1} := 1;$
2. $x_k := 1+\dfrac{1}{n} \quad (k\in\{1,\ldots,n\}), \qquad x_{n+1} := x_{n+2} := \dfrac{1}{2}.$

Útm. Ha $n\in\mathbb{N}$,

1. akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1<\left(\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. akkor $n\geq 2$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}<4\cdot\left(\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2}=4\cdot\left(\frac{n+1+1}{n+2}\right)^{n+2}=4.$$

Házi feladat. Igazoljuk, hogy ha $0<a,b\in\mathbb{R}$ olyan számok, amelyre $a+b=1$, akkor fennál az

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

egyenlőtlenség!

Útm. A számtani közép és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2\cdot\left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2}{2},$$

ill. a mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében

$$\frac{\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2}{2}\geq\frac{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\right)^2}{2}=\frac{(1+4)^2}{2}=\frac{25}{2}.$$

Megjegyzések.

1. Látható, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\quad\text{és}\quad a=b,\qquad\text{azaz}\qquad a=b=\frac{1}{2}.$$

2. Hasonlóan látható be a következő általánosítás: ha $n\in\mathbb{N}$ és

$$a_1,\ldots,a_n\in(0,+\infty):\qquad\sum_{k=1}^{n}a_k=1,$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)^2\geq\frac{(1+n^2)^2}{n}.$$

Házi feladat. Mutassuk meg, hogy igazak az alábbi állítások!

1. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor
$$(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2.$$
2. Bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} < \sqrt{\frac{3n^4}{4}}.$$
3. Tetszőleges $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ számra
$$(a^2+b^2+c^2 = 25, \quad x^2+y^2+z^2 = 36, \quad ax+by+cz = 30) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{5}{6}.$$

Útm.

1. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget az
$$x_1 := a, \quad y_1 := a^2, \qquad \text{ill.} \qquad x_2 := b, \quad y_2 := b^2$$
szereposztással.
2. Világos, hogy
$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} < \sqrt{\frac{3n^4}{4}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, ill. a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
azonosságot:
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{n-k}\sqrt{n+k} < \frac{1}{n^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1}(n+k)} =$$
$$= \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\sqrt{\frac{3n}{2}(n-1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{n-1}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha van olyan $\mu \in \mathbb{R}$, hogy

$$a = \mu x,\ b = \mu y,\ c = \mu z \qquad \text{vagy} \qquad x = \mu a,\ y = \mu b,\ z = \mu c.$$

Mivel $30^2 = 25 \cdot 36$, ezért egyenlőség van, tehát

$$a^2+b^2+c^2 = \mu^2(x^2+y^2+z^2) \qquad \text{vagy} \qquad x^2+y^2+z^2 = \mu^2(a^2+b^2+c^2).$$

Innen

$$\mu^2 = \frac{25}{36}, \quad \text{azaz} \quad |\mu| = \frac{5}{6} \qquad \text{vagy} \qquad \mu^2 = \frac{36}{25}, \quad \text{azaz} \quad |\mu| = \frac{6}{5}.$$

Mivel

$$30 = \left\{ \begin{array}{c} ax+by+cz \\ xa+yb+zc \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mu(x^2+y^2+z^2) \\ \mu(a^2+b^2+c^2 \end{array} \right\},$$

ezért

$$\mu = \frac{5}{6} \qquad \text{vagy} \qquad \mu = \frac{6}{5}.$$

Így tehát

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\mu(x+y+z)}{x+y+z} = \mu = \dfrac{5}{6}, \\[2ex] \dfrac{a+b+c}{\mu(a+b+c)} = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{6/5} = \dfrac{5}{6}. \end{array} \right\}$$

4. oktatási hét

Az előadás anyaga

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat

1. **monoton növő** (jelben: $(x_n)\nearrow$), ha bármely $n\in\mathbb{N}_0$ indexre $x_n\leq x_{n+1}$;
2. **szigorúan monoton növő** (jelben: $(x_n)\uparrow$), ha bármely $n\in\mathbb{N}_0$ indexre $x_n<x_{n+1}$;
3. **monoton fogyó** vagy **monoton csökkenő** (jelben: $(x_n)\searrow$), ha bármely $n\in\mathbb{N}_0$ indexre $x_n\geq x_{n+1}$;
4. **szigorúan monoton fogyó** (jelben: $(x_n)\downarrow$), ha bármely $n\in\mathbb{N}_0$ indexre $x_n>x_{n+1}$.

Példák.

1. Tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ esetén az
$$x_n:=c \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$
sorozat monoton növekedő, ill. csökkenő, hiszen
$$x_{n+1}=c=x_n \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$

2. Az
$$x_n:=\frac{1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$
harmonikus sorozat szigorúan monoton csökkenő, ui.
$$x_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=x_n \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

3. Az
$$x_n:=n \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$
sorozat szigorúan monoton növekedő:
$$x_n=n<n+1=x_{n+1} \qquad (n\in\mathbb{N}_0).$$

4. Az

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő, ui.

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = x_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

5. Az

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő (vö. (12)).

Megjegyzés. Sorozatok monotonitásának vizsgálatakor igen hasznos az

$$x_{n+1} \geq x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{n+1} - x_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ekvivalencia. Sőt, ha bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n > 0$, akkor

$$x_{n+1} \geq x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Példák.

1. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$x_n := \frac{1}{n^k} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^k} : \frac{1}{n^k} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k < 1.$$

2. Az

$$x_n := \frac{1}{2^n} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ index esetén

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} < 1.$$

3. Az

$$x_n := \frac{2n-1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat szigorúan monoton növő, ui. bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1)-(2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+n+1-2n^2-4n+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0.$$

4. Az

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat (harmonikus sor) szigorúan monoton növő, ui. minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

A valós számsorozatok halmazának egy igen fontos részét alkotják a korlátos sorozatok.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat

- **korlátos**, ha értékkészlete, azaz az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

  halmaz korlátos: alkalmas $M \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x_n| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

  teljesül.

- **felülről korlátos**, ha (x_n) értékkészlete felülről korlátos, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

- **alulról korlátos**, ha (x_n) értékkészlete alulról korlátos, azaz alkalmas $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n \geq k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Megjegyzések.

1. Nyilvánvaló, hogy egy valós számsorozat pontosn akkor korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos.
2. A korlátos sorozatok halmazát az l_∞ szimbólummal jelöljük.
3. Az x sorozat értékkészletének felső, illetve alsó határának segítségével értelmezhető az x sorozat felső, illetve alsó határa:

$$\sup x := \sup\{x_n \in \mathbb{R}: \; n \in \mathbb{N}_0\}, \qquad \text{ill.} \qquad \inf x := \inf\{x_n \in \mathbb{R}: \; n \in \mathbb{N}_0\}.$$

   Ha tehát az x sorozat felülről nem korlátos, akkor $\sup(x) = +\infty$, ill. alulról nem korlátos, akkor $\inf(x) = -\infty$.

Példák.

1. Az

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   harmonikus sorozat korlátos, hiszen

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Adott $\alpha, d \in \mathbb{R}$ esetén az

$$x_n := \alpha + nd \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   számtani sorozat pontosan akkor korlátos, ha $d = 0$, ui.

   - $d = 0$ esetén tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n = \alpha$, következésképpen az $M := |\alpha|$ számmal teljesül a korlátosság feltétele;
   - $d > 0$ esetén Archimédész tétele alapján minden $K \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$nd > K - \alpha, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha + nd > K;$$

   - $d < 0$ esetén hasonló mondható el.

3. Az

$$x_n := q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   mértani sorozat $|q| \leq 1$ esetén korlátos, $|q| > 1$ esetén pedig nem korlátos, hiszen

   - a $|q| \leq 1$ esetben

$$|x_n| = |q^n| = |q|^n \leq 1^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

- a $|q| > 1$ esetben pedig a Bernoulli-egyenlőtlenség vagy a binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy a $h := |q| - 1 > 0$ számmal

$$|x_n| = |q^n| = |q|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

4. Az

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat korlátos (vö. (12)).

A környezet fogalmának bevezetésével jellemezhetjük a sorozatok korlátosságát.

Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$, ill. $0 < r \in \mathbb{R}$. Ekkor az a szám r**-sugarú környezet**ének nevezzük a

$$K_r(a) := (a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} : \; a - r < x < a + r\} = \{x \in \mathbb{R} : \; |x - a| < r\}$$

számhalmazt.

Nyilvánvaló, hogy az (x_n) sorozat pontosan akkor korlátos, ha minden tagja benne van a 0 valamely környezetében.

A későbbiekre tekintettel célszerű a környezet fogalmát kiterjeszteni a kibővített valós számok halmazára.

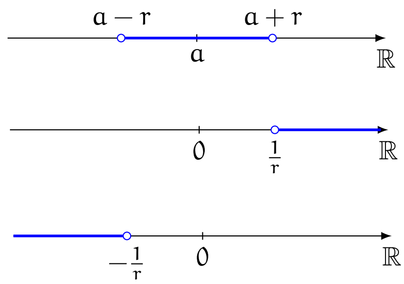
Definíció. Legyen $0 < r \in \mathbb{R}$. Ekkor a $+\infty$ és a $-\infty$ r**-sugarú környezet**ének nevezzük a

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right) \qquad \text{és a} \qquad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right)$$

számhalmazt.

Összefoglalva tehát:

$$K_r(a) := \begin{cases} (a - r, a + r), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$



Mivel korlátos sorozatok összege és számszorosa is korlátos, ezért l_∞ a sorozatok $\mathcal{S}$ terének lineáris altere. Célszerű ebben a vektortérben az $\mathbb{R}^d$-beli vektorok abszolút értékéhez hasonló fogalmat, a normát bevezetni.

Definíció. Tetszőleges $x = (x_n) \in l_\infty$ sorozat esetén az

$$\|x\| := \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

valós számot az $x = (x_n)$ sorozat **normá**jának nevezzük.

Megjegyzés. Viszonylag egyszerűen igazolható a norma alábbi tulajdonsgai. Tetszőleges $x, y \in l_\infty$, ill. $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

(N1) $\|x\| \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \theta = (0, 0, 0, \ldots);$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ és $\|x - y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$.

Definíció. Ha valamely $\nu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sorozat szigorúan monoton növekedő, akkor ν-t **indexsorozat**nak nevezzük. Az indexsorozatok összességét az $\mathcal{I}$ szimbólummal jelöljük.

Példa. Az alábbi sorozatok mind indexsorozatok.

1. $\nu_n := 2n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\nu_n = 2n < 2n + 2 = 2(n + 1) = \nu_{n+1};$$

2. $\nu_n := n^2$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\nu_n = n^2 < (n + 1)^2 = \nu_{n+1};$$

3. $\nu_n := 2^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, ui, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\nu_n = 2^n < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = \nu_{n+1}.$$

Definíció. Az $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat **részsorozat**ának nevezzük az $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatot, ha van olyan $\nu \in \mathcal{I}$, hogy $y = x \circ \nu$.

Példák.

1. Ha

$$x_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad \mu_n := 2n, \quad \text{ill.} \quad \nu_n := 2n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$(x \circ \mu)_n = x_{\mu_n} = x_{2n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad (x \circ \nu)_n = x_{\nu_n} = x_{2n+1} = -1 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2. Ha

$$x_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és valamely } k \in \mathbb{N} \text{ esetén} \qquad \nu_n := n^k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$(x \circ \nu)_n = x_{\nu_n} = x_{n^k} = \frac{1}{n^k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Ha

$$x_n := \frac{2n-1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \mu_n := n^2, \quad \text{ill.} \quad \nu_n := 2n-1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$(x \circ \nu)_n = x_{\nu_n} = x_{n^2} = \frac{2n^2-1}{n^2+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad (x \circ \nu)_n = x_{\nu_n} = x_{2n-1} = \frac{4n-3}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyzés. Világos, hogy ha egy sorozat korlátos, akkor annak minden részsorozata is korlátos, hiszen minden $\nu \in \mathcal{I}$ esetén

$$\{(x \circ \nu)_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\} \subset \{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ezért, ha egy sorozatnak valamely részsorozata nem korlátos, akkor maga a sorozat sem lehet korlátos. Így van ez pl. az

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

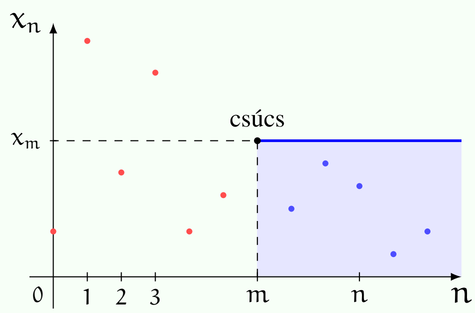
sorozat (harmonikus sor) esetében is, ui. ha

$$\nu_n := 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $(x \circ \nu)_n = x_{2^n} =$

$$\begin{aligned} &= \; 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq \; 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{2+n}{2}. \end{aligned}$$

Definíció.
Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozatnak az x_m tag **csúcs**a, ha bármely $m \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n \leq x_m$.



Példák.

1. Nyilvánvaló, hogy az
$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat esetében bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre az x_{2n} tag csúcs, de x_{2n+1} nem az.

2. Ha az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő, akkor x_n egyetlen $n \in \mathbb{N}_0$ indexre sem csúcs.

3. Ha az (x_n) sorozat szigorúan monoton fogyó, akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén x_n csúcs.

4. Ha $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, akkor az
$$x_n := \begin{cases} 1 & (n \in \mathcal{N}), \\ \\ 1 - \dfrac{1}{n} & (n \in \mathbb{N}_0 \backslash \mathcal{N}) \end{cases}$$
sorozat esetében x_n pontosan akkor csúcs, ha $n \in \mathcal{N}$.

Tétel. Bármely valós számsorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás. Valamely (x_n) sorozat esetén az alábbi két eset lehetséges.

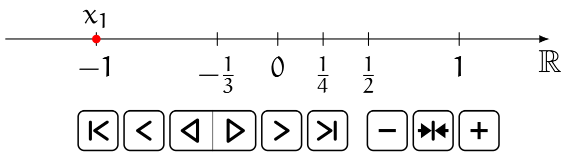
1. eset. Tegyük fel először, hogy a csúcsok száma nem véges, azaz végtelen sok $m \in \mathbb{N}_0$ esetén x_m csúcs. A csúcsok indexeit véve olyan ν indexsorozatot kapunk, amelyre
$$x_{\nu_0} \geq x_{\nu_1} \geq \ldots \geq x_{\nu_n} \geq \ldots, \qquad \text{azaz} \qquad x_{\nu_n} \geq x_{\nu_{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$
Ebben az esetben tehát az $x \circ \nu$ részsorozat monoton fogyó.

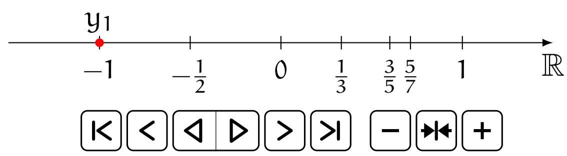
2. eset. Ha az x sorozatnak legfeljebb véges sok csúcsa van, azaz legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}_0$ indexre igaz, hogy x_n csúcs, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén x_n nem csúcs. Legyen $\nu_0 := N$. Mivel x_{ν_0} nem csúcs, ezért van olyan $\nu_0 < m \in \mathbb{N}$ index, amelyre $x_{\nu_0} < x_m$.

Ha $\nu_1 := m$, akkor a keresett ν indexsorozat első két tagja már ismert. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}_0$ és a $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_k$ tagokat már definiáltuk úgy, hogy $x_{\nu_0} < x_{\nu_1} < \ldots < x_{\nu_k}$. Ekkor – lévén $x_{\nu_k} > x_{\nu_0}$ miatt x_{ν_k} nem csúcs – valamilyen $\nu_k < j \in \mathbb{N}_0$ index mellett $x_{\nu_k} < x_j$. Legyen $\nu_{k+1} := j$. Ekkor $x_{\nu_k} < x_{\nu_{k+1}}$. Így értelmeztünk egy olyan szigorúan monoton növekedő $(\nu_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (index)sorozatot, amellyel az (x_{ν_n}) részsorozat monoton növekedő.

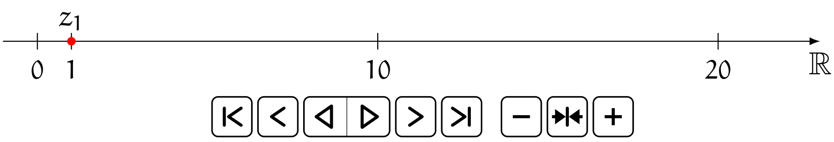
A matematikai analízis egyik legfontosabb fogalma a határérték. A következőkben a határérték legegyszerűbb típusával, a sorozatok határértékével foglalkozunk. Elsőként ábrázoljuk a számegyenesen a következő sorozatokat:

$$x_n := \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad\qquad y_n := (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$





$$z_n := n \quad (n \in \mathbb{N})$$



A fenti három animációból jól látható, hogy

- az (x_n) sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik: tagjai a 0 körül „sűrűsödnek”, azaz a 0 szám bármely K_ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak véges számú (legfeljebb $[1/\varepsilon]$[9]) tagja van.
- az (y_n) sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik: a tagok egy része -1 körül, a másik része pedig 1 körül „sűrűsödik”, továbbá bármely számnak van olyan környezete, amelyen kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van.
- a (z_n) sorozat esetében egyetlen valós szám sincsen, amely körül „sűrűsüdne”. Itt is elmondható, hogy bármely számnak van olyan környezete, amelyen kívül a sorozatnak végtelen sok tagja van. Viszont igaz, hogy a $+\infty$ bármely K_ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak véges számú (legfeljebb $[1/\varepsilon]$) tagja van.

[9] Valamely $x \in \mathbb{R}$ szám **egészrész**ének nevezzük az $[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \; m \le x\}$ számot.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x = (x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat

1. **konvergens** (jelben $(x_n) \in \mathfrak{c}$), ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy ennek bármely környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb véges sok tagja van:

$$\exists\, A \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbb{N}_0 :\ x_n \notin K_\varepsilon(A)\} \ \text{(legfeljebb) véges halmaz.} \tag{22}$$

   Ekkor az A számot az (x_n) sorozat **határérték**ének vagy **limesz**ének nevezzük és az

$$A =: \lim(x) =: \lim(x_n) := \lim_{n\to\infty}(x_n) \qquad \text{vagy az} \qquad x_n \longrightarrow A \quad (n \to \infty)$$

   jelölést használjuk.

2. **divergens**, ha nem kornvergens.

Az az állítás, hogy a

$$\mathcal{H} := \{n \in \mathbb{N}_0 :\ x_n \notin K_\varepsilon(A)\}$$

halmaznak legfeljebb véges sok eleme van avval egyenértékű, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, pl. az $N := \max \mathcal{H}$ szám ($\max \emptyset := 0$), hogy minden N-nél nemkisebb indexű tagra $x_n \in K_\varepsilon(A)$ teljesül. Ezért az (x_n) sorozat konvergenciája, azaz a (22) állítás az alábbiakkal egyenértékű:

- $\exists\, A \in \mathbb{R}\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}_0 : \qquad N = \max\{n \in \mathbb{N}_0 :\ x_n \notin K_\varepsilon(A)\}.$
- $\exists\, A \in \mathbb{R}\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in K_\varepsilon(A)).$
- $\exists\, A \in \mathbb{R}\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N \in \mathbb{N}_0\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - A| < \varepsilon).$[10]

A N indexet szokás **küszöbindex**nek is nevezni.
Példák.

1. Legyen $c \in \mathbb{R}$. Az

$$x_n := c \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   sorozat konvergens és $\lim(x_n) = c$, hiszen ha $\varepsilon > 0$, akkor

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   következtében minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x_n - c| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

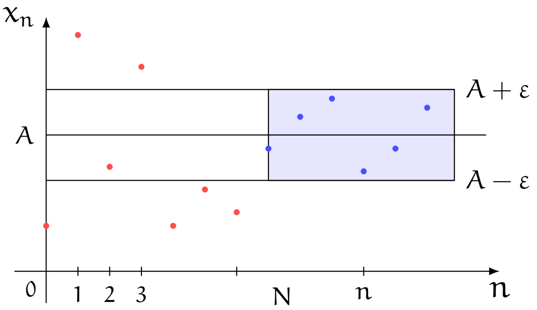
[10] $|x_n - A| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - A < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$

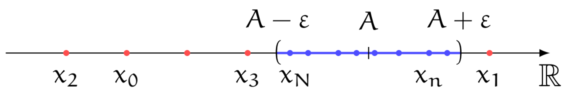
2. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén az
$$x_n := \frac{1}{n^k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 0$, hiszen ha $\varepsilon > 0$, akkor
$$|x_n - 0| = |x_n| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} < n$$
következtében az
$$N := \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1$$
választás megfelelő: bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $|x_n - 0| < \varepsilon$.

3. Ha $q \in (-1, 1]$, akkor az
$$x_n := q^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat konvergens, és fennáll a
$$\lim(x_n) = \begin{cases} 0 & (q \in (-1,1) \quad \Longleftrightarrow \quad |q| < 1), \\ \\ 1 & (q = 1) \end{cases}$$
határérték-reláció, hiszen

   - ha $q = 1$, akkor $x_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$;
   - ha $q = 0$, akkor $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$;
   - ha $q \neq 0$, $|q| < 1$, akkor $\dfrac{1}{|q|} > 1$, következésképpen alkalmas $0 < p \in \mathbb{R}$ számmal
$$\frac{1}{|q|} = 1 + p,$$
ahonnan a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\frac{1}{|q|^n} = (1+p)^n \geq 1 + np > np, \qquad \text{azaz} \qquad |q|^n < \frac{1}{np}$$
adódik. Így, ha $\varepsilon > 0$, akkor
$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon p}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon p}$$
mellett az $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq N$ egyenlőtlenségből látható, hogy
$$|x_n - 0| = |q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{np} < \varepsilon.$$

A határérték fogalmát szemléltetik az alábbi ábrák:





Megjegyzések.

1. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor nyilván tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$y_n := x_{n+k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ún. **elcsúsztatott sorozat** is konvergens, és $\lim(y_n) = \lim(x_n)$.

2. Mit jelent az, hogy (x_n) divergens? Pl.:

- $\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 : \quad \{n \in \mathbb{N} : \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}$ végtelen halmaz.
- $\forall A \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \wedge \quad |x_n - A| \geq \varepsilon)\,.$

Példa. Az

$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat divergens, hiszen, ha $A \in \mathbb{R}$, akkor az $\varepsilon := \max\{|A+1|, |A-1|\}$ pozitív valós számmal $K_\varepsilon(A)$-n kívülre végtelen sok tagja esik a sorozatnak, ui. tetszőleges $N \in \mathbb{N}_0$ esetén

- $\varepsilon = |A-1|, n := 2N \quad \Longrightarrow \quad n \geq N$ és $|(-1)^n - A| = |1 - A| = |A - 1| \geq \varepsilon$;
- $\varepsilon = |A+1|, n := 2N+1 \quad \Longrightarrow \quad n \geq N$ és $|(-1)^n - A| = |-1 - A| = |A + 1| \geq \varepsilon$.

Tétel. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor pontosan egy olyan $A \in \mathbb{R}$ van, amelyre $\lim(x_n) = A$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $A \neq B \in \mathbb{R}$, hogy $\lim(x_n) = B$, majd legyen

$$\rho := |A - B| > 0 \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := \rho/2.$$

Ekkor

$$K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset, \qquad \text{így} \qquad K_\varepsilon(B) \subset \mathbb{R} \backslash K_\varepsilon(A).$$

Mivel $\lim(x_n) = A$, ezért

$$\{n \in \mathbb{N} : \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}$$

véges halmaz, így

$$\{n \in \mathbb{N} : \; x_n \in K_\varepsilon(B)\}$$

is véges halmaz, ami ellentmond annak, hogy $\lim(x_n) = B$.

Az alábbiakban a fentiek következményeit tárgyaljuk.

Sorozatokkal kapcsolatban szokásos a következő szóhasználat: ha egy sorozat tagjaira vonatkozó állítás legfeljebb véges sok tagot kivéve minden tagra teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó állítás majdnem minden tagra, vagy majdnem minden indexre teljesül.

Tétel. Ha **majdnem minden** $n \in \mathbb{N}_0$-re $x_n = y_n$, úgy (x_n) és (y_n) **ekvikonvergens**, azaz (x_n) pontosan akkor konvergens , ha (y_n) is konvergens, és ez utóbbi esetben

$$\lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Bizonyítás. Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n = y_n$, akkor

$$x_n \in K_\varepsilon(A), \qquad y_n \in K_\varepsilon(A)$$

feltételek majdnem minden n indexre egyszerre teljesülnek, vagy egyszerre nem teljesülnek.

Tétel. Minden kornvergens sorozat korlátos: $\mathfrak{c} \subset l_\infty$, de van olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens.

Bizonyítás.

1. lépés. Legyen $\varepsilon := 1$, továbbá tegyük fel, hogy $(x_n) \in \mathfrak{c}$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n - A| < 1$. Így

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leq |x_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Legyen

$$K := \max\{|x_0|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |A|\}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n| \leq K$.

2. lépés. Az

$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat korlátos, de nem konvergens.

Következmények.

1. Ha $q \in \mathbb{R}$ olyan szám, amelyre $|q| > 1$, akkor az

   $$x_n := q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   mértani sorozat nem korlátos, tehát divergens.

2. Az

   $$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   sorozat divergens, hiszen az

   $$x_{2^n} \geq \frac{2+n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   részsorozata, így maga a sorozat sem korlátos, következésképpen nem is konvergens.

Tétel. Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens és a határértéke az eredeti sorozat határértékével egyezik meg.

Bizonyítás. Bármely $\nu \in \mathcal{I}$ esetén a

$$P := \{n \in \mathbb{N} : \; x_n \notin K_\varepsilon(A)\}, \qquad \text{ill.} \qquad Q := \{n \in \mathbb{N} : \; x_{\nu_n} \notin K_\varepsilon(A)\}$$

halmazokra $P \supset Q$. Következésképpen, ha P (legfeljebb) véges, akkor Q is az.

Következmény. Ha valamely (x_n) sorozat, ill. $\mu, \nu \in \mathcal{I}$ indxsorozatok esetén

$$\lim(x \circ \mu) = \lim(x_{\mu_n}) \neq \lim(x_{\nu_n}) = \lim(x \circ \nu),$$

akkor (x_n) divergens.

Példa. Az

$$x_n := (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat, ill. a

$$\mu_n := 2n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és a} \qquad \nu_n := 2n+1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

indexsorozat esetében

$$\lim(x_{\mu_n}) = \lim\left((-1)^{2n}\right) = 1 \neq -1 = \lim\left((-1)^{2n+1}\right) = \lim(x_{\nu_n}),$$

ami ismét azt bizonyítja, hogy (x_n) divergens.

Példa. Az

$$x_n := \frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1} - 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \frac{3}{2}$, hiszen

- ha

  $$y_n := \frac{3n + 2}{2n - 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

  akkor

  $$\mu_n := 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

  indexsorozattal tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $y_n = (x \circ \mu)_n = x_{2^n}$.

- ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor

  $$\left|\frac{3n + 2}{2n - 1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2},$$

  így a

  $$N := \left[\frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2}\right] + 1$$

  jó választás, azaz $\lim(y_n) = \frac{3}{2}$.

A gyakorlat anyaga

Felaldat. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgáljuk az alábbi sorozatokat!

1. $x_n := \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_n := \dfrac{(-1)^n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
3. $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
4. $x_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \quad (n \in \mathbb{N});$
5. $x_n := n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
6. $x_n := \dfrac{2-7n}{3n+1} \quad (n \in \mathbb{N});$
7. $x_n := \dfrac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
8. $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Az (x_n) sorozat
   - (felülről) nem korlátos, ui. bármely $0 < K \in \mathbb{R}$ szám esetén van olyan $n \in \mathbb{N}_0$, hogy
     $$x_n = \sqrt{n} > K,$$
     hiszen ez azzal egyenértékű, hogy $n > K^2$, ami igaz, mert $\mathbb{N}_0$ felülről nem korlátos.
   - szigorúan monoton növekedő, ui. $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$:
     $$x_n < x_{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n < n+1.$$
2. Az (x_n) sorozat
   - korlátos, ui.
     $$x_n \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$
   - nem monoton, ui.
     $$x_0 = 1, \qquad x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{3}.$$
3. Az (x_n) sorozat

- korlátos, ui. $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, és bármely $2 < n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$x_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} < 2 + 1 = 3,$$

  ui.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right\} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

- szigorúan monoton növekedő (vö. előadás).

4. Az (x_n) sorozat

- korlátos, ui. (vö. előző példa) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $2 < x_n < 3 + 1$,
- szigorúan monoton csökkenő, ui. minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{nn!} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.
\end{aligned}$$

5. Az (x_n) sorozat

- (felülről) nem korlátos, ui. bármely $K > 0$ valós szám esetén van olyan $n \in \mathbb{N}_0$ index, hogy

$$x_n = n^2 + 1 > K,$$

hiszen ha $K \in (0,1)$, akkor $n := 0$, ha pedig $K \in [1,+\infty)$, akkor $n := [\sqrt{K-1}] + 1$ ilyen.

- szigorúan monoton növekedő, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indxre

$$x_n = n^2 + 1 < (n+1)^2 + 1 = x_{n+1}.$$

6. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2-7n}{3n+1} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{21n-6}{21n+7} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{21n+7-13}{21n+7} = -\frac{7}{3} \cdot \left(1 - \frac{13}{21n+7}\right) = \\ &= -\frac{7}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{13}{21n+7} = -\frac{7}{3} + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} \end{aligned}$$

és

$$0 < \frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{3 \cdot 0 + 1} = 1,$$

ezért

$$-\frac{7}{3} < x_n \leq \frac{6}{3} = 2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz (x_n) korlátos. Az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő, hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$x_{n+1} - x_n = \frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{3(n+1)+1} - \frac{1}{3n+1}\right) < 0.$$

7. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$x_n = \frac{8}{5} \cdot \frac{40n+15}{40n+32} = \frac{8}{5} \cdot \frac{40n+32-17}{40n+32} = \frac{8}{5} \cdot \left(1 - \frac{17}{40n+32}\right) = \frac{8}{5} - \frac{17}{5} \cdot \frac{1}{5n+4},$$

ezért az (x_n) sorozat

- szigorúan monoton növekedő, hiszen

$$x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{17}{5}\right)\left(\frac{1}{5n+9} - \frac{1}{5n+4}\right) > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

- korlátos, ui.

$$0 < \frac{1}{5n+4} \leq \frac{1}{5 \cdot 0 + 4} = \frac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

így

$$\frac{8}{5} - \frac{17}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \leq x_n < \frac{8}{5} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

8. Az (x_n) sorozat

- szigorúan monoton növekedő, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0;$$

- korlátos, ui. $x_1 = 1$ és bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leq 1 + 1 = 2$$

(vö. 3. feladat).

Definíció. Az $a, b \in \mathbb{R}$ számok

1. **alsó burkoló**jának nevezzük a

$$a \wedge b := \min\{a, b\} = \begin{cases} a & (a \leq b), \\ b & (a > b) \end{cases}$$

valós számot;

2. **felső burkoló**jának nevezzük a

$$a \vee b := \max\{a, b\} = \begin{cases} a & (a \geq b), \\ b & (a < b) \end{cases}$$

valós számot.

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$a \vee b = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \text{és} \qquad a \wedge b = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

teljesül!

Útm.

1. lépés Ha $a \geq b$, akkor

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} = \frac{a + b - (a - b)}{2} = b = \min\{a, b\}$$

és

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+(a-b)}{2} = a = \max\{a,b\}.$$

2. lépés Ha $a < b$, akkor

$$\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-(b-a)}{2} = a = \min\{a,b\}$$

és

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+(b-a)}{2} = b = \max\{a,b\}.$$

5. oktatási hét

Az előadás anyaga

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat **zérus-sorozat** vagy **nullsorozat** (jelben $(x_n) \in \mathfrak{c}_0$), ha $\lim(x_n) = 0$.

Tétel. Valamely (x_n) sorozat esetén igaz a

$$\lim(x_n) = \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_n - \alpha) \in \mathfrak{c}_0$$

ekvivalencia.

Bizonyítás. A tételbeli állítás a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index esetén fennálló

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |(x_n - \alpha) - 0| < \varepsilon$$

ekvivalencia közvetlen következménye.

Következmény (majoránskritérium). Ha tetszőleges (x_n) sorozat és $(y_n) \in \mathfrak{c}_0$ esetén majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n| \leq y_n$, akkor (x_n) nullsorozat, hiszen ekkor alkalmas $N \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$-y_n \leq x_n \leq y_n \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

így a tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén fennálló

$$|y_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\varepsilon < y_n < \varepsilon$$

ekvivalencia következtében

$$-\varepsilon < -y_n \leq x_n \leq y_n < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Zérus-sorozatokra vonatkozik az alábbi

Tétel. Ha $(x_n), (y_n) \in c_0$ és $(z_n) \in l_\infty$, akkor

$$(x_n) + (y_n) \in c_0 \qquad \text{és} \qquad (x_n) \cdot (z_n) \in c_0.$$

Bizonyítás.

1. lépés Legyen $\varepsilon > 0$ és $(x_n), (y_n) \in c_0$. Ekkor alkalmas $N_x, N_y \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (N_x \leq n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (N_y \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen, ha $N := \max\{N_x, N_y\}$, akkor tetszőleges $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$(x_n) + (y_n) \in c_0.$$

2. lépés Mivel $(z_n) \in l_\infty$, ezért alkalmas $0 < M \in \mathbb{R}$ esetén

$$|z_n| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel $(x_n) \in c_0$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|x_n \cdot z_n| = |x_n| \cdot |z_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz

$$(x_n) \cdot (z_n) \in c_0.$$

A fenti tételbeli állításra vezethető vissza a határértték és az algebrai műveletek kapcsolatára vonatkozó

Tétel. Legyen (x_n), (y_n) konvergens sorozat, valamint $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor

1. $(x_n) + (y_n)$ konvergens és
$$\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n);$$
2. $\lambda \cdot (x_n)$ konvergens és
$$\lim(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \lim(x_n);$$
3. $(x_n) \cdot (y_n)$ konvegens és
$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n);$$
4. ha $\lim(y_n) \neq 0$, úgy $\dfrac{(x_n)}{(y_n)}$ konvergens és
$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)}.$$

Bizonyítás. Az $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{c}$ sorozatok esetén legyen
$$\lim(x_n) =: A \qquad \text{és} \qquad \lim(y_n) =: B.$$

Ekkor

1. $(x_n - A), (y_n - B) \in \mathfrak{c}_0$, továbbá
$$\mathfrak{c}_0 \ni (x_n - A) + (y_n - B) = (x_n + y_n) - (A + B).$$
Következésképpen
$$(x_n) + (y_n) \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n + y_n) = A + B = \lim(x_n) + \lim(y_n).$$
2. $(x_n - A) \in \mathfrak{c}_0$, így tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ számra
$$\mathfrak{c}_0 \ni \lambda \cdot (x_n - A) = (\lambda x_n - \lambda A).$$
Következésképpen
$$\lambda \cdot (x_n) \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad \lim(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot A = \lambda \cdot \lim(x_n).$$

3. $(x_n - A), (y_n - B) \in \mathfrak{c}_0$, továbbá

$$\mathfrak{c}_0 \ni (x_n - A)y_n + (y_n - B)A = (x_n \cdot y_n - AB).$$

Következésképpen

$$(x_n) \cdot (y_n) \in \mathfrak{c} \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n \cdot y_n) = A \cdot B = \lim(x_n) \cdot \lim(y_n).$$

4. **1. lépés.** Megmutatjuk, hogy az $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ sorozat korlátos. Mivel $B \neq 0$, ezért a

$$\varepsilon := \frac{|B|}{2} > 0$$

számhoz a határérték értelmezése szerint van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, amelyre

$$|y_n - B| < \frac{|B|}{2} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásával így azt kapjuk, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$|y_n| = |B - (B - y_n)| \geq |B| - |B - y_n| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Reciprokra áttérve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|y_n|} \leq \frac{2}{|B|} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Ha

$$K := \max\left\{\frac{1}{|y_0|}, \frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \ldots, \frac{1}{|y_{N-1}|}, \frac{2}{|B|}\right\},$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\frac{1}{|y_n|} \leq K,$$

azaz $\dfrac{1}{(y_n)} \in l_\infty$.

2. lépés. Mivel az

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{1}{y_n} \cdot (x_n - A) + \frac{A}{By_n} \cdot (B - y_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat zérus-sorozat, ezért az állítás igaz.

Feladat. Legyen $q \in (-1, 1)$. Mutassuk meg, hogy az

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat (mértani sor) konvergens és számítsuk ki határértékét!

Útm.

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad (n \to \infty).$$

Megjegyzés. A korábbi állítások következménye az

$$\mathfrak{c}_0 \subset \mathfrak{c} \subset l_\infty \subset \mathcal{S}$$

tartalmazás-lánc, ahol mindegyik tér az előző valódi lineáris altere.

Tétel. Legyen $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{c}$, ill.

$$\lim(x_n) =: A \qquad \text{és} \qquad \lim(y_n) =: B.$$

Ekkor

1. Ha $A < B$, akkor majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n < y_n$.
2. Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n \leq y_n$, akkor $A \leq B$.

Bizonyítás.

1. Legyen

$$\varepsilon := \frac{B-A}{4} > 0.$$

Ekkor

$$A + \varepsilon < B - \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad A + \frac{B-A}{4} < B - \frac{B-A}{4} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{3A+B}{4} < \frac{3B+A}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 2A < 2B,$$

és a határérték definíciója alkalmas $N_x, N_y \in \mathbb{N}_0$ indexekre

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \quad (N_x \leq n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad B - \varepsilon < y_n < B + \varepsilon \quad (N_y \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Így, ha $N := \max\{N_x, N_y\}$, akkor bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$x_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < y_n.$$

2. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $A > B$. ekkor az előző állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n > y_n$, ami ellentmond a feltételnek.

Tétel (Sandwich-tétel). Legyenek $(x_n), (y_n), (z_n)$ olyan számsorozatok, hogy majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

teljesül. Ha

$$(x_n), (z_n) \in \mathfrak{c}: \qquad \lim(x_n) = \lim(z_n),$$

akkor $(y_n) \in \mathfrak{c}$ és

$$\lim(y_n) = \lim(x_n) = \lim(z_n).$$

Bizonyítás. Legyen

$$\lim(x_n) =: A := \lim(z_n).$$

Ekkor $(z_n - x_n)$ nullsorozat, másrészt majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n.$$

Következésképpen $(y_n - x_n)$ is nullsorozat. Ennélfogva

$$(y_n) = \underbrace{(x_n)}_{\in \mathfrak{c}} + \underbrace{(y_n - x_n)}_{\in \mathfrak{c}_0} \in \mathfrak{c}$$

és így

$$\lim(y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n - x_n) = A + 0 = A.$$

Példák.

1. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ezért
$$\lim\left(\frac{\sin^2(n)}{n}\right)=0.$$

2. Mivel bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre
$$1\le\sqrt[n]{n}\le 1+2\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{n}=1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}$$
(vö. 3. gyakorlat), ezért
$$\boxed{\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)=1}.$$

3. Mivel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$\frac{\alpha-1}{\alpha n}\le\sqrt[n]{\alpha}-1\le\frac{\alpha-1}{n}\qquad(\alpha\in(1,+\infty)),$$
ill.
$$\frac{1-\alpha}{n}\le 1-\sqrt[n]{\alpha}\le\frac{1-\alpha}{\alpha n}\qquad(\alpha\in(0,1))$$
(vö. 3. gyakorlat), ezért bármely $0<\alpha\in\mathbb{R}$ számra
$$\boxed{\lim\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)=1}.$$

Tétel.

1. Tetszőleges $(x_n)\in\mathfrak{c}$ számsorozatra
$$(|x_n|)\in\mathfrak{c}\qquad\text{és}\qquad\lim(|x_n|)=|\lim(x_n)|.$$

2. Tetszőleges $(x_n),(y_n)\in\mathfrak{c}$ számsorozatra $(x_n\wedge y_n)$, $(x_n\vee y_n)\in\mathfrak{c}$ és
$$\lim(x_n\wedge y_n)=\lim(x_n)\wedge\lim(y_n),\qquad\lim(x_n\vee y_n)=\lim(x_n)\vee\lim(y_n).$$

Bizonyítás.

1. Ha $A:=\lim(x_n)$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján
$$0\le\big||x_n|-|A|\big|\le|x_n-A|\qquad(n\in\mathbb{N}_0).$$
Ez azt jelenti, hogy $(|x_n|-|A|)\in\mathfrak{c}_0$, következésképpen $(|x_n|)$ konvergens és $\lim(|x_n|)=|A|$.

2. Ha $A := \lim(x_n)$ és $B := \lim(y_n)$, akkor a korábbiak értelmében

$$\lim(x_n \vee y_n) = \lim\left(\frac{x_n + y_n + |x_n - y_n|}{2}\right) = \frac{\lim(x_n + y_n) + \lim(|x_n - y_n|)}{2} =$$

$$= \frac{\lim(x_n + y_n) + |\lim(x_n) - \lim(y_n)|}{2} = \lim(x_n) \vee \lim(y_n).$$

A második rész igazolása hasonlóan történik $\boxed{\textbf{HF}}$.

Megjegyezzük, hogy

1. a tételbeli első állítás megfordítása nem igaz: $(1) \in \mathfrak{c}$, de $((-1)^n) \notin \mathfrak{c}$.

2. igaz az

$$(x_n) \in \mathfrak{c}_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (|x_n|) \in \mathfrak{c}_0$$

ekvivalelcia, hiszen

$$||x_n| - 0| = |x_n - 0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Tétel (mozgólépcső-elv). Legyen (x_n) monoton sorozat. Az (x_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos és

- monoton növekedő esetben

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\};$$

- monoton csökkenő esetben

$$\lim(x_n) = \inf\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Bizonyítás.

1. lépés Tegyük fel, hogy (x_n) monoton növekedő, majd legyen

$$\alpha := \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n \leq \alpha$, továbbá tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy $x_N > \alpha - \varepsilon$. Mivel az (x_n) sorozat monoton növekedő, ezért tetszőleges $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n > \alpha - \varepsilon$, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}_0\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \alpha - \varepsilon < x_n \leq \alpha).$$

Következésképpen $\lim(x_n) = \alpha$.

2. lépés Tegyük fel, hogy (x_n) monoton csökkenő. Ekkor $(-x_n)$ monoton növekedő. Felhasználva a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat és a

$$\sup\{-x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\} = -\inf\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

azonosságot az állítás a fentiek (**1. lépés**) következménye.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \text{ill.} \qquad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

akkor az (a_n) és a (b_n) sorozat kielégíti a Cantor-féle közöspont-tétel feltételeit!

Útm.

- Bármely $n \in \mathbb{N}$ indxre $a_{n+1} - a_n > 0$, $b_{n+1} - b_n < 0$, ui. egyrészt (a_n) monoton növekedő (vö. 3. gyakorlat), másrészt pedig minden $n \in \mathbb{N}$ indexre a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében

$$\frac{1}{b_n} = 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{1+(n+1)\cdot\frac{n}{n+1}}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{1+n}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{b_{n+1}}.$$

- Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n;$$

- Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \dfrac{3}{\varepsilon}$, akkor

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Így

$$\exists|\, e \in \mathbb{R} : \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyezzük, hogy

1. mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n < e < b_n$, azaz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   ezért

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{6}\right)^7 = \frac{823543}{279936} < 3.$$

2. az e szám[11] bevezetése nem így szokásos, hanem a mozgólépcső-elv felasználásával. Tudjuk ui. (vö. 3. gyakorlat), hogy az

$$x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   szigorúan monoton növekedő és korlátos. Következésképpen (x_n) konvergens és

$$(2,3) \ni e := \lim(x_n) = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}: \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

3. az

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   sorozat első néhány tagja:

$$e_1 = 2; \qquad e_2 = \frac{9}{4} = 2,25; \qquad e_3 = \frac{64}{27} = 2,\dot{3}7\dot{0}; \qquad e_4 = \frac{625}{256} = 2,44140625.$$

   Később látni fogjuk, hogy

$$2,71825 < e < 2,71829.$$

4. Nagy hiba lenne arra gondolni, hogy mivel

$$1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty), \qquad \text{ezért} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1^n = 1 \quad (n \to \infty),$$

   hiszen egyrészt a határérték független n-től, másrészt pedig a szorzás művelet és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel nem használható, hiszen az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-szer}}$$

[11] A e-t Leonhard Euler (1707-1783) svájci matematikus tiszteletére **Euler-szám**nak is nevezik.

szorzatban a tényezők száma nem állandó, függ n-től.

5. Később megmutatjuk, hogy e irracionális, sőt **transzcendens szám.**[12]

Vegyük észre, hogy bizonyos divergens sorozatok esetében a „divergencia minőségében” különbségek mutatkoznak. Az

$$u_n := (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad v_n := n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{ill.} \qquad w_n := -n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatok pl. „másképp divergensek”: a (v_n), ill. (w_n) sorozat esetében elmondható, hogy tetszőleges $0 < \omega \in \mathbb{R}$, ill. $0 > \alpha \in \mathbb{R}$ számnál a (v_n), ill. a (w_n) sorozatnak csak véges sok tagja kisebb, ill. nagyobb, míg hasonló állítás az (u_n) sorozat esetében nem igaz.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatnak

1. $+\infty$ **a határértéke** (vagy az (x_n) sorozat **a** $+\infty$**-hez divergál**): ha

$$\forall \omega > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega).$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = +\infty \qquad \lim(x_n) = +\infty, \qquad x_n \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty),$$

2. $-\infty$ **a határértéke** (vagy az (x_n) sorozat **a** $-\infty$**-hez divergál**):

$$\forall \alpha < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n < \alpha).$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty \qquad \lim(x_n) = -\infty, \qquad x_n \longrightarrow -\infty \quad (n \to \infty).$$

Ha a fenti két eset valamelike teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az (x_n) **sorozat tágabb értelemben konvergens**.

[12]Ez azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, aminek ez a szám gyöke lenne. A $\sqrt{2}$ például irracionális, de nem transzcendens, mert $\sqrt{2}$ megoldása az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek. Azokat a valós számokat, amelyek valamely egész együtthatós polinomnak a gyökei **algebrai számnak** nevezzük ($\sqrt{2}$ tehát algebrai szám).

Példák.

1. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor az
$$x_n := n^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
tágabb értelemben konvergens, pontosabban $\lim(x_n) = +\infty$, hiszen ha $\omega > 0$ tetszőleges szám, akkor
$$n^k > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \sqrt[k]{\omega},$$
így
$$N := \left[\sqrt[k]{\omega}\right] + 1$$
jó küszöbindex.

2. Az
$$x_n := (-1)^n \cdot n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
sorozat tágabb értelemben nem konvergens, hiszen sem $\lim(x_n) = -\infty$, sem pedig $\lim(x_n) = +\infty$ nem áll fenn, hiszen a sorozatnak végtelen sok tagja negatív, ill. pozitív.

3. Ha (x_n) pozitív vagy negatív tagú nullsorozat, azaz $\lim(x_n) = 0$ és
$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{vagy} \qquad x_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$
akkor
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\infty,$$
hiszen ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ küszöbindex, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n| < \varepsilon$, következésképpen
$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{ha } x_n > 0), \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{x_n} < -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{ha } x_n < 0).$$

Megjegyzés. A tágabb értelemben vett határérték igen sok vonatkozásban hasonló a „közönséges” hatrértékhez (azaz, amikor a határérték valamely valós szám). Van azonban néhány tétel, ilyen pl. a Cauchy-féle konvergenciakritérium (vö. 6. előadás), amely csak szűkebb értelemben konvergens sorozatokra teljesül.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ **sorozatnak van határértéke**, ha
$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n \in K_\varepsilon(A)).$$

A határértékekre vonatkozó tételek és műveleti szabályok nagy része a tágabb értelemben vett határértékekre is érvényes. Ezek egyszerű megfogalmazásához kiterjesztjük az algebrai műveleteket az $\overline{\mathbb{R}}$ számhalmazra az alábbiak szerint:

$$
\begin{aligned}
&a + (-\infty) := (-\infty) + a := -\infty && (a \in [-\infty, +\infty)),\\
&a + (+\infty) := (+\infty) + a := +\infty && (a \in (-\infty, +\infty]),\\
&a \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot a := +\infty && (a \in (0, +\infty]),\\
&a \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot a := -\infty && (a \in [-\infty, 0)),\\
&a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := -\infty && (a \in (0, +\infty]),\\
&a \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot a := +\infty && (a \in [-\infty, 0)),\\
&\frac{a}{+\infty} := \frac{a}{-\infty} := 0 && (a \in (-\infty, +\infty)),\\
&\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} && ((a, b) \in (-\infty, +\infty) \times \{-\infty, +\infty\} \cup [-\infty, +\infty] \times (\mathbb{R} \backslash \{0\}))\,.
\end{aligned}
$$

Nem értelmezzük

- a $+\infty$ és a $-\infty$, ill. a $-\infty$ és a $+\infty$ elemek összegét,
- a 0-nak a $+\infty$-nel és a $-\infty$-nel való szorzatát,
- az a/b hányadost, ha $b = 0$, vagy, ha $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$.

<table>
<tr><th>összeg</th><th>$a > 0$</th><th>$a = 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = +\infty$</th><th>$a = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$a + b$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>szorzat</th><th>$a > 0$</th><th>$a = 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = +\infty$</th><th>$a = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$a \cdot b$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>hányados</th><th>$a > 0$</th><th>$a = 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = +\infty$</th><th>$a = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td colspan="3">a/b</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td colspan="3">a/b</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$</td><td colspan="3">0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b = -\infty$</td><td colspan="3">0</td><td></td><td></td></tr>
</table>

A fentiekben bevezetett értelmezéseket használva a határértékekre vonatkozó műveleti szablyok az alábbi egységes formában adhatók meg.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $x := (x_n), y := (y_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatoknak van határértéke. Ha $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ és $\lim(x_n) * \lim(y_n)$-nek a fentiek szerint van értelme, akkor az $x * y$ sorozatnak is van határértéke és

$$\lim(x * y) = \lim(x_n) * \lim(y_n).$$

A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tétel – tágabb értelemben vett határértéket megengedve – a következőképpen módosul.

Tétel. Bármely valós monoton sorozatnak van határértéke és

$$\lim(x_n) = \sup(x_n), \quad \text{ha} \quad (x_n) \quad \text{monoton növő},$$

$$\lim(x_n) = \inf(x_n), \quad \text{ha} \quad (x_n) \quad \text{monoton fogyó}.$$

Tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, $a_d \neq 0$, továbbá

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{d-1}x^{d-1} + a_d x^d = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igaz az alábbi határérték-reláció:

$$\lim(p(n)) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases}$$

Bizonyítás. Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$p(n) = a_0 + a_1 n + \ldots + a_{d-1}n^{d-1} + a_d n^d = n^d \cdot \left(\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + \frac{a_{d-1}}{n} + a_d\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(n \to \infty)} (+\infty)^d \cdot (0 + 0 + \ldots + 0 + a_d) = (+\infty) \cdot \operatorname{sgn}(a_d) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases}$$

Megjegyzés. Legyen

$$P(x) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i, \quad Q(x) := \sum_{j=0}^{l} \beta_j x^j \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad (i \in \{0, 1, \ldots, k\};\ j \in \{0, 1, \ldots, l\}) : \qquad \alpha_k \cdot \beta_l \neq 0.$$

Legyen

$$x_n := \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} =$$

$$= \frac{n^k}{n^l} \cdot \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és

$$y_n := n^{k-l} \quad \text{és} \quad z_n := \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim (z_n) = \frac{\alpha_k}{\beta_l} \qquad \text{és} \qquad \lim (y_n) = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ +\infty & (k > l) \\ 0 & (k < l). \end{cases}$$

Így

$$\lim (x_n) = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\beta_l} & (k = l), \\ 0 & (k < l), \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_l}\right) \infty & (k > l). \end{cases}$$

Tétel. Legyen $q \in \mathbb{R}$, és $x_n := q^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = \begin{cases} \nexists & (q \leq -1) \\ 0 & (q \in (-1, 1)), \\ 1 & (q = 1), \\ +\infty & (q > 1). \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha

- $q = -1$, akkor (vö. korábban) (x_n) divergens. Ebben az esetben (x_n) tágabb értelemben sem konvergens, hiszen végtelen sok pozitív, ill. végtelen sok negatív előjelű tagja van.
- $q \in (-1, 1)$, akkor (vö. korábban) $\lim(x_n) = 0$;
- $q = 1$, akkor
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad x_n = 1 \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty);$$
- $|q| > 1$, akkor alkalmas $h > 0$ számmal
$$|q| = 1 + h,$$
és így
$$|q^n| = |q|^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh.$$
Ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor
$$|q^n| > nh > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{\omega}{h}$$
következtében $N := [\omega/h] + 1$ jó küszöbindex, azaz
$$\lim(|q^n|) = +\infty.$$
Következésképpen
  1. $q > 1$ esetén $\lim(q^n) = \infty$,
  2. $q < -1$ esetén pedig (q^n) tágabb értelemben sem konvergens, hiszen végtelen sor pozitív, ill. végtelen sok negatív előjelű tagja van.

A gyakorlat anyaga

Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy igazak az alábbi álltások!

$$1.\ \lim\left(\frac{1}{n^2-3}\right)=0; \qquad 2.\ \lim\left(\frac{n}{2n-3}\right)=\frac{1}{2}.$$

Útm.

1. Ha $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{1}{n^2-3}-0\right| = \frac{1}{n^2-3} \overset{\boxed{n \geq 3}}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

hiszen ekkor

$$\frac{1}{n^2-3} < \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n < n^2-3$$

és

$$n^2-3-n = n^2-n-3 = n(n-1)-3 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 3.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \max\left\{3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$$

választás megfelelő.

2. Ha $6 < n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{n}{2n-3}-\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n-6} \overset{\boxed{n > 6}}{<} \frac{3}{3n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\varepsilon} < n,$$

hiszen

$$4n-6 > 3n \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 6.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \max\left\{7, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$$

választás megfelelő.

Feladat. Sejtsük meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsuk be a sejtést!

1. $x_n := \dfrac{1+n^2}{2+n+2n^2} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_n := \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Útm.

1. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1+n^2}{2+n+2n^2} = \frac{\frac{1+n^2}{n^2}}{\frac{2+n+2n^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}+2},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k \in \{1;2\}$”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{0+1}{0+0+2} = \frac{1}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{1+n^2}{2+n+2n^2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-n|}{2(2n^2+n+2)} < \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1.$$

2. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned}\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} &= \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője pedig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n) = 0$. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} - 0\right| = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1.$$

Feladatok.

1. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy fennáll a

$$\lim\left(\frac{3n+4}{2n-1}\right) = \frac{3}{2}$$

határérték-reláció!

2. Sejtsük meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsuk be a sejtést!

(a) $x_n := \dfrac{3n^2-1}{2n^2+n+3} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$ (b) $x_n := \sqrt{n^2+1} - n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Útm.

1. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4n-2} < \frac{11}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11}{\varepsilon} < n.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{11}{\varepsilon}\right] + 1.$$

2. (a) Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3} = \frac{\frac{3n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2+n+3}{n^2}} = \frac{3-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k \in \{1; 2\}$”, ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{3-0}{2+0+0} = \frac{3}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{|-3n-11|}{4n^2+2n+6} < \frac{3n+11}{4n^2} \leq \frac{14n}{4n^2} = \frac{7}{2n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{7}{2\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén
$$N := \left[\frac{7}{2\varepsilon}\right] + 1.$$

(b) Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén
$$\sqrt{n^2+1} - n = \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n},$$
és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője edig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n) = 0$. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor
$$\left|\sqrt{n^2+1} - n - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$
ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén
$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $2 \leq k \in \mathbb{N}$ és bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $0 \leq x_n \in \mathbb{R}$, továbbá (x_n) konvergens, akkor $(\sqrt[k]{x_n})$ is konvergens és teljesül a
$$\lim\left(\sqrt[k]{x_n}\right) = \sqrt[k]{\lim(x_n)}$$
határértékreláció!

Útm. Világos, hogy $\lim(x_n) =: A \in [0, +\infty)$.

1. lépés. Ha $A \in (0, +\infty)$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy
$$|x_n - A| < \varepsilon \sqrt[k]{A^{k-1}} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Így bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre az
$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1}b + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$$

(vö. (4)) azonosság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left|\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{A}\right| = \left|\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{A}\right| \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k}\sqrt[k]{x_n^{k-i}A^{i-1}}}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt[k]{x_n^{k-i}A^{i-1}}} = \frac{|x_n-A|}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt[k]{x_n^{k-i}A^{i-1}}} \leq \frac{|x_n-A|}{\sqrt[k]{A^{k-1}}} < \frac{\varepsilon\sqrt[k]{A^{k-1}}}{\sqrt[k]{A^{k-1}}} = \varepsilon,$$

tehát $\lim\left(\sqrt[k]{x_n}\right) = \sqrt[k]{A}$.

2. lépés. Ha $A = 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$|x_n - 0| < \varepsilon^k,$$

azaz a sorozat nemnegativitása következtében

$$x_n < \varepsilon^k, \qquad \text{ill.} \qquad \sqrt[k]{x_n} < \varepsilon,$$

ahonnan

$$|\sqrt[k]{x_n} - 0| = \sqrt[k]{x_n} < \varepsilon$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy $\lim(\sqrt[k]{x_n}) = 0$.

Feladat. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

1. $x_n := \dfrac{n^3-3n^2+n-1}{1-2n^3+n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
2. $x_n := \dfrac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)(2n+1)^5} \qquad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \dfrac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Világos, hogy tetszőlegs $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\frac{n^3-3n^2+n-1}{n^3}}{\frac{1-2n^3+n}{n^3}} = \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1-0+0-0}{0-2+0} = -\frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

2. Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)(2n+1)^5} = \frac{\frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{n^7}}{\frac{(n^2+n+1)(2n+1)^5}{n^7}} = \frac{\left(\frac{2}{n}-1\right)^7+\left(\frac{2}{n}+1\right)^7}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^5} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{(0-1)^7+(0+1)^7}{(1+0+0)\cdot(2+0)^5} = \frac{0}{32} = 0 \quad (n\to\infty).$$

3. $$\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+1/n}{2} \longrightarrow \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \qquad (n\to\infty).$$

Házi feladat. Számítsuk ki az

$$x_n := \sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n \qquad (n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in[0,+\infty))$$

sorozat határértékét!

Útm. Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)\cdot\frac{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n}{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n} =$$

$$= \frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n} = \frac{\frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{n}}{\frac{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n}{n}} = \frac{(\alpha-4)n+2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\alpha+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Világos, hogy

$$\alpha-4=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha=4.$$

Következésképpen

- $0\le\alpha<4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right) = \frac{(-\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2} = -\infty;$$

- $\alpha = 4$ esetén
$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{2+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{2};$$

- $\alpha > 4$ esetén
$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{(+\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2}=+\infty.$$

6. oktatási hét

Az előadás anyaga

Tétel. Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor fennáll a

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Bizonyítás.

1. lépés $(x_n > 0 \ \ (n \in \mathbb{N}))$**.** Legyen

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq 1\} \qquad \text{és} \qquad y_n := [x_n] \quad (n \in \mathcal{N}).$$

Ekkor $\lim(y_n) = +\infty$ és

$$y_n \leq x_n \leq y_n + 1, \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{y_n} \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{y_n+1},$$

azaz az $n \to \infty$ határátmenetben

$$e \longleftarrow \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n}\right) =$$

$$= \boxed{\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \geq \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e.$$

2. lépés $(x_n < 0 \ \ (n \in \mathbb{N}))$**.** Legyen

$$y_n := -x_n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{y_n+1}\right)^{-y_n-1} = \left(\frac{y_n}{y_n+1}\right)^{-y_n-1} = \left(\frac{y_n+1}{y_n}\right)^{y_n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \left(1+\frac{1}{y_n}\right) \longrightarrow e \cdot 1 = e.$$

Tétel. Legyen $A \in \mathbb{R}$, ill. (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$. Ekkor fennáll a

$$\left(1+\frac{A}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e^A \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Bizonyítás. Ha

- $A = 0$, akkor a tétel nyilvánvalóan igaz.
- Ha $A \neq 0$, akkor minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, amelyre $x_n > |A|$, igaz, hogy $1 + \dfrac{A}{x_n} > 0$, és így

$$\left(1+\frac{A}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{x_n}{A}}\right)^{\frac{x_n}{A}\cdot A} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x_n}{A}}\right)^{\frac{x_n}{A}}\right]^A \longrightarrow e^A \quad (n \to \infty).$$

Megjegyezzük, hogy az

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

határérték-relációnak fontos pénzügyi alkalmazása is van. Ha T forintot (kezdőtőkét) évi p%-os kamatra helyezünk el a bankban, akkor egy év után

$$T \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$$

forintot tőkénk lesz. Ha havi kamattal számítjuk az évi p%-os kamatot, akkor a tőke nagysága

$$T \cdot \left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$$

forint lesz egy év után. Megpróbálhatunk napi kamattal számolni, vagy akár még jobban növelni a kamatfizetési gyakoriságot. Ha a betett összegünk egy évben egyenletesen n-szer kamatozik p%-os évi kamattal, akkor az év végén

$$T \cdot \left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^n$$

forintot kapunk vissza. Elég nagy n esetén az előbbi képlet helyet használhatjuk az

$$T \cdot e^{p/100}$$

képletet, ami a sorozat határértéke. Ez olyan, mint ha a kamatfizetés technikailag minden időpillanatban történne. Ezért ezt **folytonos kamatozásnak** nevezik.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_n := \left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n} \qquad (n \in \mathbb{N});$
3. $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$
4. $x_n := \left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Útm.

1. Világos, hogy

$$x_n = \left(\frac{6n+4-11}{6n+4}\right)^{3n+2} = \left(1 - \frac{11}{6n+4}\right)^{3n+2} = \sqrt{\left(1 + \frac{-11}{6n+4}\right)^{6n+4}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{e^{11}}} \qquad (n \to \infty).$$

2. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\frac{4n+3}{5n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+3/4}{n}\right)^n,$$

ezért

$$x_n \longrightarrow 0 \cdot e^{3/4} = 0 \qquad (n \to \infty).$$

3. Mivel

$$\frac{3n+1}{n+2} \longrightarrow 3 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n+1}{n+2} > 2.$$

Következésképpen az ilyen n-ekre

$$x_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} > 2^{2n+3} \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

$$\lim(x_n) = +\infty$$

következik.

4. Világos, hogy az $n \to \infty$ határátmenetben

$$x_n = \left(\frac{2n^2-2+5}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} = \left(1+\frac{5}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} = \sqrt{\left(1+\frac{5}{2n^2-2}\right)^{2n^2-2}} \longrightarrow \sqrt{e^5}.$$

Tétel. (Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel). Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Egy korábbi tétel szerint, bármely sorozatnak van monoton részsorozata. Így minden korlátos sorozatból kiválasztható monoton és korlátos, következésképpen konvergens részsorozat.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat **szabályos** vagy **Cauchy-féle**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_m - x_n| < \varepsilon).$$

Példák.

1. Az

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m > n$, akkor

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ $\Big/ N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Big/$, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$, akkor $|x_m - x_n| < \varepsilon$, azaz (x_n) Cauchy-féle.

2. Az

$$x_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Így ha $\varepsilon := \frac{1}{2}$, akkor minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$, hogy

$$|x_m - x_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Következésképpen (x_n) nem Cauchy-féle.

Sorozatok Cauchy-sorozat voltának kimutatásához igen gyakran hasznosnak bizonyul az alábbi

Állítás. Az (x_n) sorozat pontosan akkor Cauchy-féle, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy ha $n \in \mathbb{N}_0$: $n \geq N$, akkor

$$|x_n - x_N| < \varepsilon.$$

Bizonyítás.

1. lépés. Ha $\varepsilon > 0$ és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$|x_n - x_N| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

akkor bármely $m, n \in \mathbb{N}$: $m, n \geq N$ esetén

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_N) + (x_N - x_n)| \leq |x_m - x_N| + |x_N - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. lépés. Ha (x_n) Cauchy-féle, akkor az állítás az $m := N$ választással nyilvánvaló.

Példa. Az

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében, ha $n, N \in \mathbb{N}$: $n \geq N$, akkor

$$(-1)^N (x_n - x_N) = (-1)^N \cdot \sum_{k=N+1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} =$$

$$= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} + - \ldots + \frac{(-1)^{n-1+N}}{n} =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) & (n + N \equiv 0 \ (2)), \\ \\ \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} & (n + N \equiv 1 \ (2)). \end{cases}$$

Mivel mindegyik zárójelben pozitív szám áll, ezért

$$(*) \qquad (-1)^N (x_n - x_N) \geq 0$$

és

$$|x_n - x_N| \;=\; (-1)^N(x_n - x_N) = \frac{1}{N+1} - \left\{\frac{1}{N+2} - + \ldots - \frac{(-1)^{n-1+N}}{n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N+1} - (-1)^{N+1}(x_n - x_{N+1}) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{N+1}.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$ $/N := \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1/$, hogy ha $n \in \mathbb{N}$: $n \geq N$, akkor $|x_n - x_N| < \varepsilon$, azaz (x_n) Cauchy-féle. ■

Állítások (Cauchy-sorozatok tulajdonságai).

1. Minden konvergens sorozat Cauchy-féle.
2. Minden Cauchy-sorozat korlátos.
3. Ha valamely Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor maga a sorozat konvergens és határértéke a részsorozat határértékével egyezik meg.

Bizonyítás.

1. Ha (x_n) konvergens, akkor alkalmas $A \in \mathbb{R}$ szám esetén tetsztőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}_0$ olyan, hogy $m, n \geq N$, akkor

   $$|x_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{és} \qquad |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

   ahonnan a háromszög-egyenlőtlenség felhsználásával azt kapjuk, hogy

   $$|x_m - x_n| = |(x_m - A) + (A - x_n)| \leq |x_m - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Következésképpen (x_n) Cauchy-féle.

2. A Cauchy-sorozat definíciójából az $\varepsilon := 1$ számmal azt kapjuk, hogy

   $$\exists N \in \mathbb{N}_0 \;\forall m, n \in \mathbb{N}: \qquad (m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_m - x_n| < 1).$$

   Innen speciálisan az $m := N$ választással

   $$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \leq 1 + |x_N|$$

következik. Ha most

$$K := \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\},$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n| \leq K$, azaz (x_n) korlátos.

3. Ha az (x_n) Cauchy-sorozat (x_{ν_n}) részsorozatára $\lim(x_{\nu_n}) = A \in \mathbb{R}$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}_0)$$

és van olyan $M \in \mathbb{N}_0$, hogy

$$|x_{\nu_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (M \leq k \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel a ν indexsorozat felülről nem korlátos, ezért van olyan $k \in \mathbb{N}_0$ index, amelyre $k > N$ és $\nu_k > M$. Következésképpen

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{\nu_k}) + (x_{\nu_k} - A)| \leq |x_n - x_{\nu_k}| + |x_{\nu_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

következik, azaz (x_n) konvergens és $\lim(x_n) = A$.

Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). Az (x_n) sorozat pontosan akkor Cauchy-féle, ha konvergens.

Bizonyítás.

1. lépés. A fentiekből tudjuk, hogy ha egy (x_n) sorozat konvergens, akkor Cauchy-féle is.

2. lépés. Ha (x_n) Cauchy-féle, akkor a fentiek következtében (x_n) korlátos. A Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel következtében alkalmas $\nu \in \mathcal{I}$ indexsorozattal $x \circ \nu \in \mathfrak{c}$. Legyen most

$$A := \lim(x_{\nu_n}).$$

Így a fentiek következtében $\lim(x_n) = A$.

Megjegyzések.

1. A Cauchy-féle konvergenciakritérium jelentősége többek között abban rejlik, hogy segítségével be tudjuk bizonyítani valamely sorozat konvergenciáját, snélkül, hogy ismernénk a határértékét, illetve – bizonyos esetben – könnyebben tudjuk igazolni divergenciáját, mint a definíció alapján (vö. fenti két példa).

2. A sorozatok típusainak hierarchiáját szemlélteti az alábbi ábra.

A a későbbiek szempontjából is nagyon fontos az alábbi

Tétel (a nullsorozatokra vonatkozó hányados- és gyökkritérium). Tegyük fel, hogy az

$$x_n \in (0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat esetében

$$0 \leq \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 0 \leq \lim \left(\sqrt[n]{x_n} \right) < 1$$

teljesül. Ekkor fennál a

$$\lim (x_n) = 0$$

határérték-reláció.

Bizonyítás.

1. lépés. Legyen

$$\alpha := \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right).$$

Ekkor $0 \leq \alpha < 1$. Legyen

$$q \in (\alpha, 1) \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := q - \alpha.$$

Ekkor $\varepsilon > 0$, így a konvergencia következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \alpha\right| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} - \alpha < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + \alpha = q.$$

Ezért

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_N} = \prod_{k=N}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{N+1}}{x_N} \cdot \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} < q^{n-N+1} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$0 < x_{n+1} < x_N \cdot q^{n-N+1}.$$

Mivel

$$\lim \left(x_N \cdot q^{n-N+1}\right) = x_N \cdot \lim \left(q^{n-N+1}\right) = 0,$$

ezért a Sandwich-tétel következtében $\lim(x_n) = 0$.

2. lépés. Legyen

$$\beta := \lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right).$$

Ekkor $0 \leq \beta < 1$. Legyen

$$q \in (\beta, 1) \qquad \text{és} \qquad \varepsilon := q - \beta.$$

Ekkor $\varepsilon > 0$, így a konvergencia következtében van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$|\sqrt[n]{x_n} - \beta| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad -\varepsilon < \sqrt[n]{x_n} - \beta < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 0 < \sqrt[n]{x_n} < \beta + \varepsilon = q.$$

Ezért

$$0 < x_n < q^n \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

ahonnan a Sandwich-tétel felhasználásával $\lim(x_n) = 0$ adódik.

Példák.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$, $q \in (-1, 1)$, azaz $|q| < 1$ és

$$x_n := n^k \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az

$$(y_n) := (|x_n|)$$

sorozatra

$$0 < \sqrt[n]{y_n} = (\sqrt[n]{n})^k \cdot |q| \longrightarrow 1^k \cdot |q| = |q| < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen

$$\lim(y_n) = 0, \qquad \text{így} \qquad \lim(n^k \cdot q^n) = \lim(x_n) = 0.$$

2. Ha $a \in \mathbb{R}$ és

$$x_n := \frac{a^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az

$$(y_n) := (|x_n|)$$

sorozatra $a \neq 0$ esetén

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen ($a = 0$ esetén meg különösképp)

$$\lim(y_n) = 0, \qquad \text{így} \qquad \lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = \lim(x_n) = 0.$$

A matematika egyes ágaiban (diszkrét matematika, differenciaegyenletek), de az informatikában is nagy jelentőséggel bírnak az olyan sorozatok, amelyek tagjait az „előttük lévő" tag(ok) ismeretében értelmezzük. Az ilyen sorozatokat szokás **rekurzív megadású sorozat**oknak nevezni.

Példák.

1. A legenda szerint Hanoiban egy kolostorban a lámák egy falapból felfelé kiálló három rudacska egyikére fűzve $n = 64$ darab különböző méretű, közepén lyukas korongot kaptak Buddhától. Legalul volt a legnagyobb, felette a többi, egyre kisebb és kisebb (vö. 7. ábra).

Azt a feladatot adta nekik, hogy juttassák a korongokat valamelyik másik rudacskára úgy, hogy közben csak egyet tehetnek át és semelyiket sem szabad nála kisebbre helyezni. Mire befejezik eljön a világ vége.

Feladat. Határozzuk meg azoknak a lépéseknek a minimális l_n számát, amelyek n korong $(n \in \mathbb{N})$ átrakásához szükségesek!

7. ábra. Buddha korongjai

Útm. Ha $n = 1$, akkor nyilván $l_1 = 1$. Ha $n = 2$, akkor ahhoz, hogy az első korongot átrakhassuk az első rudacskáról a másikra, előbb a felső korongot át kell tenni egy harmadikra. Ezután átrakhatjuk az első korongot a második rúdra és a tetejére a másik korongot. Eszerint tehát $l_2 = 3$. Hasonló módon három korong közül a legalsó átrakásához előbb a két felsőt kell áttenni a harmadik rúdra, amihez az előbbi gondolatmenet alapján $l_2 = 3$ áthelyezést kell végrehajtanunk. Ezután átrakhatjuk a legalsó korongot a második rúdra, majd ismét két korongot kell áthoznunk a harmadik rúdról a másodikra, újabb $l_2 = 3$ lépésben. Látható tehát, hogy

$$l_3 = 2 \cdot l_2 + 1 = 7.$$

Ugyanilyen módon látható be, hogy

$$l_4 = 2 \cdot l_3 + 1 = 15, \qquad l_5 = 2 \cdot l_4 + 1 = 31,$$

és általában

$$l_n = 2 \cdot l_{n-1} + 1 \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Az (l_n) sorozat első néhány tagjának felírásával nem nehéz megsejteni, majd teljes indukcióval igazolni, hogy

$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Így tehát

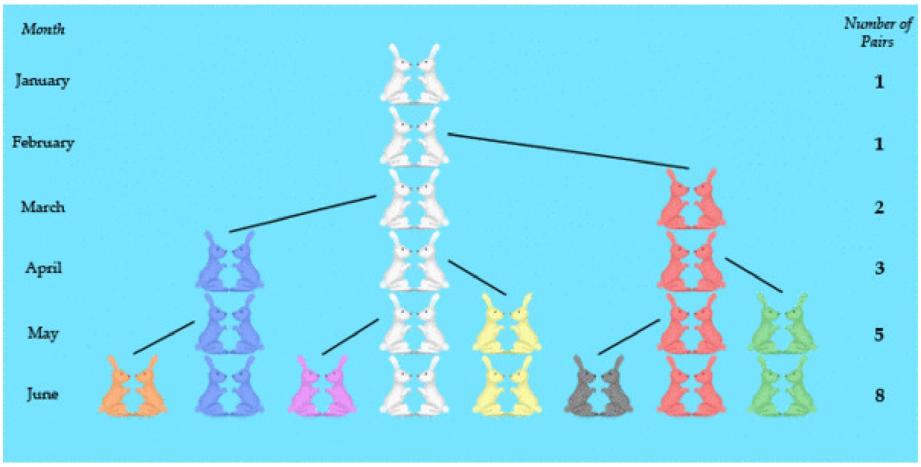
$$l_{64} = 18446744073709551615 > 1.8 \cdot 10^{19}$$

lépés szükséges 64 korongnak a fenti feltételek mellett az egyik rúdról a másikra való átpakolásához. Ha meggondoljuk, hogy l_{64} másodperc 585 milliárd év körül van, és a Naprendszer kb. $4,6$ milliárd éves, akkor a világvégével kapcsolatos jóslat nem is annyira elképzelhetetlen. ☺

Játék: Hanoi tornyai

2. Leonardo Pisano – ismert nevén Fibonacci – olasz matematikusnak 1202-ben megjelent **Liber Abaci** című könyvében szerepel a következő

Feladat. Egy ivarérett nyúlpár minden hónapban egy új nyúlpárnak ad életet: egy hímnek és egy nősténynek. A nyulak két hónapos korukra válnak ivaréretté. Egy ivarérett nyúlpártól származó nemzetségnek mekkora lesz a létszáma egy év múlva?



8. ábra. Fibonacci nyulai

Útm. Kezdjük az összeszámlálást egy újszülött nyúlpárból kiindulva és tételezzük fel, hogy közben egyetlen nyúl sem pusztul el. Az első hónapban egyetlen pár nyulunk van, a másodikban szintén. A harmadik hónapban már nyilván két pár nyulunk lesz: az eredeti pár és ezeknek két hónapos korukban született újszülött párja. A negyedik hónapban az eredeti nyúlpár újabb nyúlpárnak ad életet, az elsőszülött ivadékaik még nem szülnek, így három nyúlpárunk lesz összesen. Az ötödik hónapban meglesz a negyedik hónap három nyúlpárja, valamint az újszülöttek, és ezek pontosan annyian lesznek, ahány nyúlpár a harmadik hónapban volt, hiszen a negyedik hónap újszülöttei még nem szülnek, de a harmadik hónap újszülöttei (az öregekkel együtt) már igen. E gondolatsort folytatva az n -edik hónapban lévő nyúlpárok F_n száma adódik egyrészt az $(n-1)$-edik hónapban meglévő nyúlpárok F_{n-1} számából, másrészt az újszülöttekből. Az újszülöttek száma viszont megegyezik az $(n-2)$-dik hónapban levő nyúlpárok számával, ugyanis pontosan azok fognak az n-edik hónapban szülni, amelyek (akár öreg, akár újszülött nyulak) az $(n-2)$-dik hónapban megvoltak.

A létszám alakulását a következő áblázat mutatja:

hónap	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
megszületett párok:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Megjegyzések.

(a) Az F_n számokat **Fibonacci-számok**nak, az

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}_0) \tag{24}$$

rekurzív sorozatot **Fibonacci-sorozat**nak nevezzük. Az (F_n) sorozat tagjainak explicit alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(b) **Aranymetszés**nek nevezzük egy szakasz olyan kettéosztását, ahol a nagyobbik rész hossza úgy aránylik a kisebbik rész hosszához, mint a szakasz hossza a nagyobbik rész hosszához. Könnyen megmutatható, hogy egységnyi hosszú szakasz esetében ez az arány nem más, mint a

$$\lim\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$$

határérték. Ha ui. ha a nagyobbik rész x, akkor egységnyi hosszú szakaszra:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{amiből} \qquad x^2 + x - 1 = 0,$$

és ennek az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

amire

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Az

$$u := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad v := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

számokkal

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u^n - v^n} = \frac{u - v \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^n}{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^n} \longrightarrow \frac{u - 0}{1 - 0} = u \qquad (n \to \infty).$$[13]

3. Ha $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor az

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := \alpha x_n + \beta \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{25}$$

sorozat $\alpha = 1$ esetén **számtani sorozat**:

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := x_n + \beta \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$\beta = 0$ esetén pedig **mértani sorozat**:

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := \alpha x_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

4. A Mézga-család a bankban az $n = 0$ időpontban K összegű kölcsönt vesz fel, amit időszakosan (havi vagy negyedéves vagy éppen éves időszakonként) törleszt. A törlesztés egy része a kamat, másik része a K tőkét csökkenti. Jelölje t_n az n-edik fizetés utáni tőketartozás nagyságát, az n-edik alkalommal befizetett összeget pedig jelölje b_n. Tegyük fel, hogy az egy periódusra eső $p\%$ kamatláb rögzített. Ekkor az $(n+1)$-edik periódus elteltével, azaz az $(n+1)$-edik fizetés megtörténte után a fennmaradó t_{n+1} tőketartozás összetevődik az n-edik periódus utáni t_n tőketartozásból, annak $t_n p/100$ egységkamatából, csökkentve ezek összegét a befizetett b_n összeggel:

$$t_{n+1} = t_n + t_n \cdot \frac{p}{100} - b_n, \qquad \text{vagyis} \qquad t_{n+1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot t_n - b_n, \quad t_0 = K.$$

Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén k**-lépéses rekurzió**ról beszélünk, ha a sorozat tagjait az előtte lévő k tag függvényében adjuk meg. Egylépéses rekurzó pl. a (23)-beli és a (25)-beli sorozat, kétlépéses rekurzió pl. a (24)-beli Fibonacci-sorozat. Az egylépéses rekurzió esetében a fentiket pontosítja a következő

Definíció. Legyen valamely $\mathcal{H} \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény az $a \in \mathcal{H}$ elem. Ekkor az

$$x_0 := a, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésnek eleget tévő $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{H}$ sorozatot a **kezdőtagú rekurzív megadású sorozat**nak nevezzük.

[13]**HF**. Mutassuk meg, hogy fennáll a $|v/u| < 1$ egyenlőtlenség!

Felmerül a kérdés, hogy adott $a \in \mathcal{H}$ pont, ill. $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény esetén van-e ilyen sorozat. Teljes indukcióval belátható, hogy a válasz: igen, sőt pontosan egy ilyen sorozat van (vö. A Függelék).

Példa. Legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < A \in \mathbb{R}$, továbbá

$$\mathcal{H} := (0, +\infty), \qquad f(t) := \frac{1}{m}\left((m-1)t + \frac{A}{t^{m-1}}\right) \quad (t \in \mathcal{H}).$$

Látható, hogy $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ui. a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében bármely $t \in \mathcal{H}$ esetén

$$f(t) = \frac{\overset{1}{\smile}{t} + \ldots + \overset{m-1}{\smile}{t} + \frac{A}{t^{m-1}}}{m} \geq \sqrt[m]{\overset{1}{\smile}{t} \cdot \ldots \cdot \overset{m-1}{\smile}{t} \cdot \frac{A}{t^{m-1}}} = \sqrt[m]{t^{m-1} \cdot \frac{A}{t^{m-1}}} = \sqrt[m]{A} > 0,$$

azaz $f(t) > 0$. Tehát tetszőleges $\alpha, A \in (0, +\infty)$ esetén pontosan egy olyan $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to (0, +\infty)$ sorozat van, amelyre

$$x_0 = \alpha, \qquad x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{26}$$

Az alábbi feladatban megmutatjuk, hogy a (26) sorozat konvergens.

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $0 < A \in \mathbb{R}$, akkor a (26)-beli sorozat konvergens, majd számítsuk ki határértékét!

Útm.

1. lépés. A sorozat értelmezéséből teljes indukcióval következik (**HF**), hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n > 0$.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a sorozat kvázi-monoton fogyó. Valóban, bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{m} \cdot \left(m - 1 + \frac{A}{x_n^m}\right) = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{x_n^m} = 1 - \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{A}{x_n^m}\right),$$

így az

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A \leq x_n^m \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ekvivalencia igaz voltát, illetve a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget kihasználva azt kapjuk, hogy

$$x_{n+1}^m = \left(\frac{\overset{1}{\smile}{x_n} + \ldots + \overset{m-1}{\smile}{x_n} + \frac{A}{x_n^{m-1}}}{m}\right)^m \geq \overset{1}{\smile}{x_n} \cdot \ldots \cdot \overset{m-1}{\smile}{x_n} \cdot \frac{A}{x_n^{m-1}} = A \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

3. lépés. A fentiek azt jelentik, hogy (x_n) konvergens. Legyen $\beta := \lim(x_n)$. Ekkor a fentiek következtében $0 < A \leq \beta^m$, és így $\beta > 0$. Az is igaz továbbá, hogy

$$\beta = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}}\right)\right) = \frac{1}{m}\left((m-1)\beta + \frac{A}{\beta^{m-1}}\right),$$

azaz

$$m\beta = m\beta - \beta + \frac{A}{\beta^{m-1}}$$

Innen áterendezéssel azt kapjuk, hogy $\beta^m = A$. ■

A (26)-beli sorozat konvergenciája numerikusan is jól használható ún. konstruktív eljárást ad pozitív valós számok m-edik gyökének előállítására. Az is könnyen belátható, hogy ha $2 \leq m \in \mathbb{N}$ és $0 < A \in \mathbb{R}$, akkor pontosan egy olyan $0 < \beta \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre $\beta^m = A$. Az előbbi sorozta konvergens volta biztosítja az ilyen szám létezését. Az egyértelműséget pedig a következőképpen láthatjuk be. Ha ui. valamely $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ esetén $\gamma^m = A$, akkor

$$0 = A - A = \beta^m - \gamma^m = (\beta - \gamma) \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta^{m-k}\gamma^k.$$

Mivel tetszőleges $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ esetén $\beta^{m-k}\gamma^k > 0$, ezért

$$\sum_{k=1}^{m} \beta^{m-k}\gamma^k > 0,$$

ahonnan $\beta - \gamma = 0$, azaz $\beta = \gamma$ következik.

Rekurzív sorozatok határértékét sok esetben bizonyos leképezések fixpontjaként kaphatjuk meg. Ezzel kapcsolatban utalunk a numerikus matematikában igen fontos szerepet játszó fogalmakra, ill. tételekre (vö. B Függelék).

Megjegyezzük, hogy az $m := 2$, $A := 2$, ill. $x_0 := 2$ esetben a (26) rekurzió

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

alakú. Ezt a sorozatot szokás **Heron-féle** vagy **babiloni gyökkeresési algoritmus**nak nevezni.

A gyakorlat anyaga

Feladatok.

1. Sejtsük meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsuk be sejtésünket!

$$\text{(a)}\;\; x_n := \frac{n^2+3n+1}{n+3} \quad (n \in \mathbb{N}_0); \qquad \text{(b)}\;\; x_n := \frac{2-3n^2}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki az

$$x_n := \sqrt{n^2+n+1} - \alpha n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat határértékét!

Útm.

1. (a) A múlt órai tétel alapján tudjuk, hogy $\lim(x_n) = +\infty$. Valóban, ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > \frac{n^2}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4} > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 4\omega,$$

így

$$N := \max\{1, [4\omega]+1\} = 4[\omega]+1.$$

(b) A múlt órai tetel alapján tudjuk, hogy $\lim(x_n) = -\infty$. Valóban, ha $0 > \alpha \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{2-3n^2}{n+1} < \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3n^2-2}{n+1} > -\alpha,$$

így tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n^2-2}{n+1} = \frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1} \geq \frac{2n^2}{n+n} = \frac{2n^2}{2n} = n$$

következtében

$$N := \max\{2, [-\alpha]+1\}.$$

2. Világos, hogy

   - $\alpha < 0$ esetén
   $$\lim(x_n) = (+\infty) - \alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty.$$
   - $\alpha = 0$ esetén
   $$\lim(x_n) = \lim(\sqrt{n^2+n+1}) = +\infty.$$

   Ha viszont $\alpha > 0$, akkor
   $$x_n = \left(\sqrt{n^2+n+1} - \alpha n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n} = \frac{n^2+n+1-\alpha^2 n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n} =$$
   $$= \frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n} = \frac{\frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{n}} = \frac{(1-\alpha^2)n+1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha}.$$

   Világos, hogy ekkor
   $$1-\alpha^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 1.$$

   Következésképpen

   - $0 < \alpha < 1$ esetén
   $$\lim(x_n) = \frac{(+\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+\alpha} = +\infty;$$
   - $\alpha = 1$ esetén bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre
   $$\lim(x_n) = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$
   - $\alpha > 1$ esetén
   $$\lim(x_n) = \frac{(-\infty)+1+0}{\sqrt{1+0+0}+\alpha} = -\infty.$$

Feladatok.

1. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in (0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a
$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$$
határérték-reláció!

2. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \quad (n \in \mathbb{N});$ (b) $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}} \quad (n \in \mathbb{N});$

(c) $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$ (d) $x_n := \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 < a, b \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Legyen
$$\lim(x_n) =: \alpha \in (0, +\infty).$$
Ekkor
$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \le n \in \mathbb{N} : \quad |x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}.$$
Így
$$|x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\alpha}{2} < x_n - \alpha < \frac{\alpha}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} < x_n < \frac{3\alpha}{2}$$
következtében, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$, akkor
$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}},$$
tehát a Sandwich-tétel értelmében
$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1.$$

2. (a) Mivel
$$\sqrt[n]{3n^5} \le \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \le \sqrt[n]{3n^5 + 2n^5 + n^5} = \sqrt[n]{6n^5} \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{3n^5} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^5 \xrightarrow{(n\to\infty)} 1 \cdot 1^5 = 1 = 1 \cdot 1^5 \xleftarrow{(n\to\infty)} \sqrt[n]{6} \cdot (\sqrt[n]{n})^5,$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} = \sqrt[n]{n^5 \left(3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)} =$$

$$= (\sqrt[n]{n})^5 \cdot \sqrt[n]{3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1^5 \cdot 1 = 1,$$

hiszen

$$\lim\left(3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right) = 3 + 0 + 0 = 3 \in (0, +\infty).$$

(b) Világos, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}} = \sqrt[n]{\frac{n}{5n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{2n+3n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+n}{2n}} = \sqrt[n]{1},$$

így

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{5}}\right) = 1 = \lim\left(\sqrt[n]{1}\right)$$

következtében

$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}$$

így

$$\lim(x_n) = 1.$$

(c) Mivel

$$\lim\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0,$$

ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3^n}{n!} < 1,$$

így az ilyen n-ekre

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!} + 2^n} \leq \sqrt[n]{1 + 2^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2^n} = 2\sqrt[n]{2}.$$

Ezért

$$\lim\left(\sqrt[n]{2}\right) = 1$$

következtében

$$\lim(x_n) = 2.$$

(d) Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\max\{a, b\} = \sqrt[n]{\max\{a, b\}^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot \max\{a, b\}^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \max\{a, b\}$$

és

$$\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = \max\{a, b\}.$$

Házi feladat. Legyen $q \in \mathbb{R}$: $|q| < 1$, továbbá (a_n) korlátos sorozat. Döntsük el, hogy

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot q^k = a_0 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot q^{n-1} + a_n \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Cauchy-féle sorozat-e!

Útm. Mivel (a_n) korlátos, azért alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$|a_n| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ha $m, n \in \mathbb{N}_0$ és (pl.) $m > n$, akkor

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k \cdot q^k\right| = \left|a_{n+1} \cdot q^{n+1} + a_{n+2} \cdot q^{n+2} + \ldots + a_{m-1} \cdot q^{m-1} + a_m \cdot q^m\right| \leq \\
&\leq |a_{n+1}| \cdot \left|q^{n+1}\right| + |a_{n+2}| \cdot \left|q^{n+2}\right| + \ldots + |a_{m-1}| \cdot \left|q^{m-1}\right| + |a_m| \cdot |q^m| = \\
&= |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + |a_{n+2}| \cdot |q|^{n+2} + \ldots + |a_{m-1}| \cdot |q|^{m-1} + |a_m| \cdot |q|^m \leq \\
&\leq K \cdot \left(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \ldots + |q|^{m-1} + |q|^m\right) = \\
&= K \cdot |q|^{n+1} \cdot \left(1 + |q| + \ldots + |q|^{m-n-2} + |q|^{m-n-1}\right) = \\
&= K \cdot |q|^n \cdot |q| \cdot \frac{1 - |q|^{m-n}}{1 - |q|} \leq K \cdot |q|^n \cdot \frac{1}{1 - |q|}.
\end{aligned}$$

Mivel $(|q|^n)$ nullsorozat, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy

$$|q|^n < \frac{(1 - |q|)\varepsilon}{K} \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}_0$, indexre $|x_m - x_n| < \varepsilon$, azaz (x_n) Cauchy-féle.

7. oktatási hét

Az 1. zárthelyi feladatai

Feladat. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén számítsa ki az

$$S := 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{9\ldots9}_{n \text{ darab}}$$

összeget!

Útm. Világos, hogy

$$\begin{aligned} S &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) + \ldots + (10^n-1) = \\ &= 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^n - n = \frac{1-10^{n+1}}{1-10} - 1 - n = \\ &= \frac{10^{n+1}-1-9-9n}{9} = \frac{10(10^n-1)-9n}{9}. \end{aligned}$$

Feladat. Vizsgálja a

$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{7+2x^2}{x^2+2} \in \mathbb{R} : \; x \in [0, +\infty) \right\}$$

halmazt korlátosság szempontjából! Határozza meg $\mathcal{H}$ infimumát és szuprémumát! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

Útm.

- Világos, hogy minden $x \in [0, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{7+2x^2}{x^2+2} = 2 \cdot \frac{2x^2+7}{2x^2+4} = 2 \cdot \frac{2x^2+4+3}{2x^2+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{2x^2+4}\right) = 2 + \frac{3}{x^2+2}.$$

- Mivel bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén
$$\frac{3}{x^2+2} > 0,$$
ezért
$$\mathcal{H} \ni \frac{7+2x^2}{x^2+2} > 2,$$
azaz 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak. Látható, hogy az
$$\frac{3}{x^2+2}$$
tört az x^2 nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei az ilyen x-ekre 2-höz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen 2-nél nagyobb korlátja:
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in [0, +\infty): \qquad \mathcal{H} \ni 2 + \frac{3}{x^2+2} < 2 + \varepsilon.$$
Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén
$$2 + \frac{3}{x^2+2} < 2 + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 2,$$
és ilyen ilyen $x \in [0, +\infty)$ szám létezik, hiszen ha $x \in \left(\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, +\infty\right)$, akkor
$$x^2 > \frac{3}{\varepsilon} > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$
Mivel $2 \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén
$$\mathcal{H} \ni 2 + \frac{3}{x^2+2} \leq 2 + \frac{3}{0^2+2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$
Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{2}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = 2, \quad \nexists\, \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{2}.$$

Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden $-\frac{1}{2} \leq a \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség! Mely esetben van itt egyenlőség?

Útm.

1. lépés. Ha $a \geq 1$, akkor

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 0 \leq 1.$$

2. lépés. Ha $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, és $a \neq 0$, akkor

$$1-a, \qquad 1+a, \qquad \text{ill.} \qquad 1+2a$$

különböző nem-negatív számok, ha pedig $a = 0$, akkor egyenlőség áll fenn: $1 = 1$. Így $0 \neq a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ esetén

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 < \left(\frac{5(1-a)+1+a+2(1+2a)}{8}\right)^8 = \left(\frac{8}{8}\right)^8 = 1.$$

Feladat. Számítsa ki az

$$x_n := \frac{n^2+2n-1}{n^3+1} + \sqrt[n]{n^2-1} + \frac{5^n \sin(n)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

Útm. Mivel

- az
$$\frac{n^2+2n-1}{n^3+1}$$
tört számlálója n-nek másodfokú, nevezője pedig harmadfokú polinomja, ezért
$$\lim\left(\frac{n^2+2n-1}{n^3+1}\right) = 0;$$

- bármely $2 < n \in \mathbb{N}$ indxre

$$1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{n^2 - 1} \leq \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2,$$

ezért

$$\lim(\sqrt[n]{n}) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim\left(\sqrt[n]{n^2 - 1}\right) = 1;$$

- a $(\sin(n))$ sorozat korlátos és $\left(\dfrac{5^n}{n!}\right)$ nullsorozat, ezért

$$\lim\left(\frac{5^n \sin(n)}{n!}\right) = 0.$$

Következésképpen

$$\lim(x_n) = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Feladat. Döntse el, hogy konvergensek-e az

1. $x_n := \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N})$,
2. $x_n := \left(\dfrac{5n+8}{5n+10}\right)^{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$

sorozatok! Konvergencia esetén számítsa ki határértéküket!

Útm.

1. Mivel tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

ezért

$$x_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \longrightarrow \frac{1 + \sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1} = 1 \quad (n \to \infty).$$

2. Világos, hogybármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left(\frac{5n+8}{5n+10}\right)^{n+2} = \left(\frac{5n+10-2}{5n+10}\right)^{n+2} = \left(1 + \frac{-2}{5n+10}\right)^{n+2} = \sqrt[5]{\left(1 + \frac{-2}{5n+10}\right)^{5n+10}},$$

így $\lim(x_n) = e^{-2/5}$.

A gyakorlat anyaga

Emlékeztető.

1. Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens. Ekkor bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$y_n := x_{n+k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

előírással definiált (y_n) sorozat is konvergens és

$$\lim(y_n) = \lim(x_n).$$

2. Igazak a következő állítások:
   - ha (x_n) monoton növekedő [csökkenő] és felülről [alulról] korlátos, akkor konvergens és

   $$\lim(x_n) = \sup[\inf]\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\};$$

   - ha (x_n) konvergens, akkor korlátos.

Feladat. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

1. $a \in \mathbb{R},\ x_0 := a,\ \ x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_0 := 2,\ \ x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{x_n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
3. $x_0 := 6,\ \ x_{n+1} := 5 - \dfrac{6}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
4. $x_0 := 0,\ \ x_{n+1} := \dfrac{1+x_n^2}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$
5. $\alpha \in [0,1],\ x_0 := \dfrac{\alpha}{2}, \qquad x_{n+1} := \dfrac{x_n^2+\alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Útm.

1. A rekurziót „kibontva” könnyen **megsejthető**, hogy

$$x_n = \frac{2^n}{n!} \cdot a \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen

$$x_1 = \frac{2a}{1}, \quad x_2 = \frac{4a}{1 \cdot 2}, \quad x_3 = \frac{8a}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad x_4 = \frac{16a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad x_5 = \frac{32a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Ezután ezt az összefüggést a következőképpen igazoljuk. Ha

(a) $a = 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, hiszen

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0$, továbbá
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} = \frac{2 \cdot 0}{n+1} = 0.$$

(b) $a \neq 0$, akkor persze bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \neq 0$ (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), és így

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot a}{\dfrac{2^n}{n!} \cdot a} = \frac{2}{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel bármely $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim\left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) = \lim\left(\frac{2}{n+1}\right) = 0 < 1,$$

ezért

$$\lim(x_n) = \lim(|x_n|) = 0.$$

2. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy

$$x_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A sorozat első néhány tagja:

$$x_0 = 2, \qquad x_1 = \frac{4}{3} = 1.\dot{3}, \qquad x_2 = \frac{8}{7} = 1.142857.$$

Az (x_n) sorozat pontosan akkor monoton csökkenő, ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n}{x_n+1} = x_n \cdot \frac{x_n - 1}{x_n+1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz, ha fennáll az

$$x_n \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség. Ez viszont igaz, ui.

- $x_0 = 2 \geq 1$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \geq 1$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x_n}} \geq \frac{2}{1+\frac{1}{1}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az (x_n) sorozat tehát monoton csökkenő, alulról korlátos, így konvergens is. Legyen $A := \lim(x_n)$. Az

$$x_{n+1} := \frac{2x_n}{x_n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenet elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{2A}{A+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 + A = 2A, \qquad \text{azaz} \qquad A(A-1) = 0.$$

Világos, hogy $A = 0$ nem lehet a sorozat határértéke, ezért $A = 1$.

3. **1. lépés.** Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $A := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = 5 - \frac{6}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 5A + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \in \{2, 3\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 6$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n > 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 6 > 3$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n > 3$, akkor

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n} > 5 - \frac{6}{3} = 5 - 2 = 3.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ezt teljes is indukcióval igazoljuk. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = 6 > 4 = x_1;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $3 < x_{n+1} < x_n$, akkor
$$x_{n+2} = 5 - \frac{6}{x_{n+1}} < 5 - \frac{6}{x_n} = x_{n+1}.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtében tehát (x_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 3.$$

4. A sorozat első néhány tagját meghatározva –

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{5}{8}$$

– az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel
$$x_0 = 0 < \frac{1}{2} = x_1,$$
ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$0 \leq x_n < x_{n+1},$$

akkor $0 \leq x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $0 \leq x_n < x_{n+1}$-ből $x_n^2 < x_{n+1}^2$, és így

$$1 + x_n^2 < 1 + x_{n+1}^2, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2} < \frac{1 + x_{n+1}^2}{2} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és
$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen

$A := \lim(x_n)$; ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$, így

$$\lim\left(\frac{1+x_n^2}{2}\right) = \frac{1+A^2}{2}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A = \frac{1+A^2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A-1)^2 = 0,$$

amiből $A = 1$ adódik. Lássuk be tehát, hogy fennáll az $x_n \leq 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_0 = 0 \leq 1$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq 1$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} \leq \frac{1+1^2}{2} = 1.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 1$.

1. lépés. Mivel

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + 4\alpha}{8} > \frac{4\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} = x_0,$$

ezért sejthető, hogy (x_n) szigorúan monoton növekedő. Az iméntiek miatt elég belátni, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $0 < x_{n+1} < x_{n+2}$. Valóban, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2} < \frac{x_{n+1}^2 + \alpha}{2} = x_{n+2}.$$

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^2 + \alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + \alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = A_\pm := 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az A_+ és A_- értékek közül $0 \leq A_- \leq A_+$ miatt miatt csak az

$$A_- = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

érték jöhet szóba ($\alpha = 1$ esetén persze $A_- = A_+$). Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha + A_-^2}{2} = A_-;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq A_-$, akkor
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2} \leq \frac{(A_-)^2 + \alpha}{2} = A_-.$$

Következésképpen (x_n) felülről korlátos.

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és
$$\lim(x_n) = 1 - \sqrt{1-\alpha}.$$

Házi (gyakorló) feladat. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

1. $x_0 := \sqrt{3}, \;\; x_{n+1} := \sqrt{3 + 2x_n} \;\; (n \in \mathbb{N}_0);$
2. $x_0 := 0, \;\; x_{n+1} := \dfrac{x_n^3 + 1}{2} \;\; (n \in \mathbb{N}_0);$
3. $x_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}} \;\; (n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;
4. $x_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} \;\; (n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;
5. $\alpha \in [0, +\infty)$, $x_1 := 0, \quad x_{n+1} := \sqrt{\alpha + x_n} \;\; (n \in \mathbb{N});$
6. $x_0 := 0, \;\; x_{n+1} := \alpha + x_n^2 \;\; (n \in \mathbb{N}_0;\, 0 \leq \alpha \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. (a) **1. lépés.** A sorozat első két tagját meghatározva:
$$x_0 = \sqrt{3} < \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = x_1,$$
az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Az iméntiek miatt elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből
$$3 + 2x_n < 3 + 2x_{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n} < \sqrt{3 + 2x_{n+1}} = x_{n+2}$$
következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így
$$A = \sqrt{3 + 2A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 2A - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1 + \sqrt{1+3} = 3.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért ha felülről korlátos, akkor a 3 egy felső korlátja is. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén $x_0 = \sqrt{3} < 3$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n < 3$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n} < \sqrt{3 + 2 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3.$$

4. lépés. Midez azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 3$.

(b) **1. lépés.** A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{9}{16}$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_0 < \frac{1}{2} = x_1,$$

ezért elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{2} < \frac{x_{n+1}^3 + 1}{2} = x_{n+2}$$

következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén (vö. (4))

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

azt kapjuk, hogy

$$A^3 - 2A + 1 = A^3 - 1 - 2A + 2 = A^3 - 1^3 - 2(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A + 1) - 2(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A - 1),$$

következésképpen

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Mivel $x_0 = 0$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért a $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ szám nem lehet (x_n) határértéke.

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az

$$A = 1 \qquad \text{és} \qquad A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

értékek közül

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$$

miatt csak az

$$A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

érték jöhet szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{2} \leq \frac{A^3+1}{2} = A.$$

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. **1. lépés.** Mivel

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}+\alpha\right) = \frac{\alpha^2+4\alpha}{8} > \frac{4\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} = x_0,$$

ezért sejthető, hogy (x_n) szigorúan monoton növekedő. Az iméntiek miatt elég belátni, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $0 < x_{n+1} < x_{n+2}$. Valóban, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n^2+\alpha}{2} < \frac{x_{n+1}^2+\alpha}{2} = x_{n+2}.$$

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^2+\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + \alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = A_{\pm} := 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az A_+ és A_- értékek közül $0 \leq A_- \leq A_+$ miatt miatt csak az

$$A_- = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

érték jöhet szóba ($\alpha = 1$ esetén persze $A_- = A_+$). Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha + A_-^2}{2} = A_-;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq A_-$, akkor
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+\alpha}{2} \leq \frac{(A_-)^2+\alpha}{2} = A_-.$$

Következésképpen (x_n) felülről korlátos.

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = 1 - \sqrt{1-\alpha}.$$

3. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}\sqrt{2}, \qquad x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

látható, hogy

$$x_n = \sqrt{\ldots\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt[4]{2}\sqrt{2} = x_2,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$

is igaz. Valóban, a $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2x_n < 2x_{n+1}$ és így

$$\sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \le A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2x_n}) = \sqrt{2A}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt $A = \sqrt{2A}$, amiből $A \in \{0; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = 0$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az

$$x_n \le A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \le 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \le A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2A} = A.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$.
Megjegyzések.

(a) A sorozat első néhány

$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2}}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{1-\frac{1}{4}},$$

$$x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{128} = 2^{\frac{7}{8}} = 2^{1-\frac{1}{8}}$$

tagjának meghatározásával sejthető, hogy

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

a mi teljes inducióval könnyen igazolható. Valóban,

- $n = 1$ esetén
$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^1}};$$
- ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}},$$
akkor
$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^n}}} = 2^{\frac{2-\frac{1}{2^n}}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

(b) Mivel
$$\lim\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$
ezért
$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} \longrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \qquad (n \to \infty).$$

4. A sorozat első néhány tagját meghatározva:
$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
látható, hogy
$$x_n = \sqrt{\ldots\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
azaz
$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2+x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel
$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 2+\sqrt{2},$$
így
$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$
ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett
$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$
is igaz. Valóban, az $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2 + x_n < 2 + x_{n+1}$ és így
$$\sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} = x_{n+2}$$
következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és
$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$
Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor
$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2+x_n}) = \sqrt{2+A}.$$
Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt
$$A = \sqrt{2+A},$$

amiből $A \in \{-1; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = -1$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az

$$x_n \leq A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + A} = A.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$. **Megjegyzések.**

(a) Ha tudnánk, mi a cos, ill. a π jelentése, akkor elmondhatnánk, hogy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{2} &&= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\\
x_2 &= \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} &&= 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\\
x_3 &= \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{2\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]} &&= 2\cos\left(\frac{\pi}{16}\right),
\end{aligned}$$

hiszen

$$\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \qquad \boxed{1 + \cos(\alpha)} = 1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Így, ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n-1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

akkor

$$\boxed{x_n} = \sqrt{2 + x_{n-1}} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Ha tudnánk, hogy a cos függvény folytonos, és ismernénk az átviteli elvet, akkor a következő kijelentést tehetnénk:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 2\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos(0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

5. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy $\alpha = 0$ esetén $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így $\lim(x_n) = 0$. Tegyük fel most, hogy $\alpha > 0$ és határozzuk meg a sorozat első néhány tagját! Mivel

$$0 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_1 < x_2 < x_3,$$

így az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton nővekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Lévén, hogy $x_1 = 0 < \sqrt{\alpha} = x_2$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n < x_{n+1}$-ből $\alpha + x_n < \alpha + x_{n+1}$ és így

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy (x_n) felülről korlátos. Olyan $K \in \mathbb{R}$ számot kellene keresni, amelyre $x_1 < K$ és

$$x_n < K \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} < K \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ehhez az

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + K}$$

egyenlőtlenség alapján – elég, ha

$$\sqrt{\alpha+K}<K$$

fennáll. Ez a feltétel az

$$\alpha+K<K^2, \qquad \text{azaz az} \qquad \alpha<K^2-K$$

alakba írható, így a

$$K:=1+\sqrt{\alpha}$$

választás megfelelő. A sorozat tehát konvergens. Legyen $A:=\lim(x_n)$, ekkor

$$\alpha=\lim(x_{n+1})=\sqrt{\alpha+A}\,,$$

ahonnan $\alpha>0$ miatt

$$A=\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

következik.

Megjegyzés. A sorozat n-edik tagjának és határértékének eltérésére a következő, ún. hibabecslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
|x_n-A| &= \left|\sqrt{\alpha+x_{n-1}}-\sqrt{\alpha+A}\right| = \\
&= \left|\sqrt{\alpha+x_{n-1}}-\sqrt{\alpha+A}\right|\cdot\frac{\sqrt{\alpha+x_{n-1}}+\sqrt{\alpha+A}}{\sqrt{\alpha+x_{n-1}}+\sqrt{\alpha+A}} = \\
&= \frac{|x_{n-1}-A|}{\sqrt{\alpha+x_{n-1}}+\sqrt{\alpha+A}} < \frac{|x_{n-1}-A|}{\sqrt{\alpha+A}} = \frac{|x_{n-1}-A|}{A} < \\
&< \frac{|x_{n-2}-A|}{A^2} < \quad \ldots \quad < \frac{|x_1-A|}{A^n} = \frac{1}{A^{n-1}}.
\end{aligned}$$

6. Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy ha $\alpha=0$, akkor bármel $n\in\mathbb{N}_0$ indexre $x_n=0$, így $\lim(x_n)=0$. Tegyük fel, hogy $\alpha>0$. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1=\alpha<\alpha+\alpha^2=x_2$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel $x_0=0<\alpha=x_1$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n\in\mathbb{N}_0$ mellett $0<x_n<x_{n+1}$, akkor $x_{n+1}<x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n<x_{n+1}$-ből

$$0<x_n^2<x_{n+1}^2 \qquad \text{és így} \qquad x_{n+1}=\alpha+x_n^2<\alpha+x_{n+1}^2=x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n)=\sup\{x_n\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A\in\mathbb{R}$ számmal $x_n<A$ $(n\in\mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n<A$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A:=\lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1})=A, \qquad \lim\left(\alpha+x_n^2\right)=\alpha+A^2.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A=\alpha+A^2,$$

amiből A-ra

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

adódik. Nyilvánvaló, hogy

$$A \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért a fenti A-k esetén csak az

$$A = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

érték jön szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 \leq \alpha + A^2 = A.$$

Összefoglalva tehát, $\alpha \leq \dfrac{1}{4}$ esetén az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ esetben (x_n) nem kornvergens, így (szigorú) monotonitása miatt nem is korlátos, következésképen $\lim(x_n) = +\infty$.

8. oktatási hét

Az előadás anyaga

Feladat. Egy labdát $a > 0$ méter magasból a földre ejtünk. Tudjuk, hogy ha a labdát $h > 0$ magasságból ejtjük le, akkor rh magasságig pattan vissza, ahol $0 < r < 1$. Határozzuk meg a labda által megtett teljes függőleges irányú távolságot!

Útm. Az első visszapattanásig a labda tömegközéppontja a függőleges irányú távolságot, a másodikig $a + ra$ függőleges irányú távolságot, a harmadikig, $a + ra + r^2a$ függőleges irányú távolságot, ill. az n-edig visszapattanásig a labda

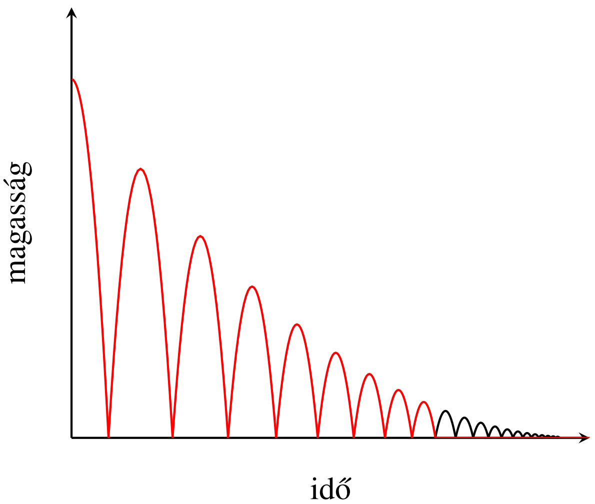
$$s_n := a + 2ar + 2ar^2 + \ldots + 2ar^{n-1}$$

függőleges irányú távolságot tesz meg. Mivel

$$s_n = a + 2a \cdot \left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right) \overset{\text{Tétel.}}{=} a + 2a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az (s_n) sorozat konvergens (vö. Feladat.), így labda által megtett teljes függőleges irányú távolság:

$$\lim(s_n) = a + 2a \cdot \frac{r}{1-r} = a \cdot \frac{1+r}{1-r}.$$



Feladat. Számítsuk ki az

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{64}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

szorzat értékét.

Útm. Vegyük észre, hogy a fenti szorzat minden egyes tényezőjében a nevező négyzetszám, azaz minden egyes tényező

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$$

alakú, ahol $k\in\{2,\ldots,10\}$. Így a kiszámítandó szorzat nem más, mint

$$p_{10}:=\prod_{k=2}^{10}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{10}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

A megfelelő egyszerűsítéseket elvégezve azt kapjuk, hogy

$$p_{10}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10}=\frac{11}{20}.\quad\blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\qquad(2\leq n\in\mathbb{N})$$

sorozat konvergens és

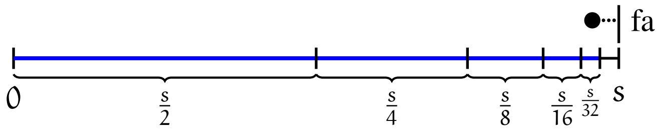
$$\lim_{n\to\infty}(p_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Az összeadást és a szorzást eddig véges sok tag, ill. véges sok ényező esetén értelmeztük. Mint ahogy azt a fenti feladatok is mutatják, célszerű mindkét műveletet kiterjeszteni végtelen sok tagra, ill. végtelen sok tényezőre. A követezőkben – a határérték fogalmára támaszkodva – elvégezzük ezt a kiterjesztést, bevezetve a végtelen sor, ill. a végtelen szorzat fogalmát, és megvizsgáljuk, hogy a véges összegekre, ill. szorzatokra ismert számolási szabályok igazak-e a kiterjesztett esetekben.

A végtelen fogalma és ehhez kapcsolódva a végtelen összegek, ill. végtelen szorzatok problémaköre hosszú időn át épült be a matematikába. Végtelen összegek már az ókori görögöknél is megjelentek, pl.

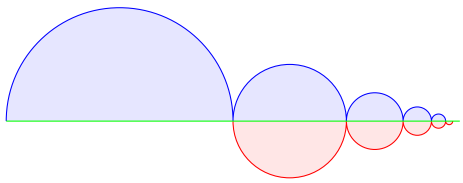
- Zénón (i.e. 490 – 430) híres paradoxonjai:

  1. a fának hajított kő:



A megtett távolság tart s-hez

  2. Akhilleusz és a teknős:



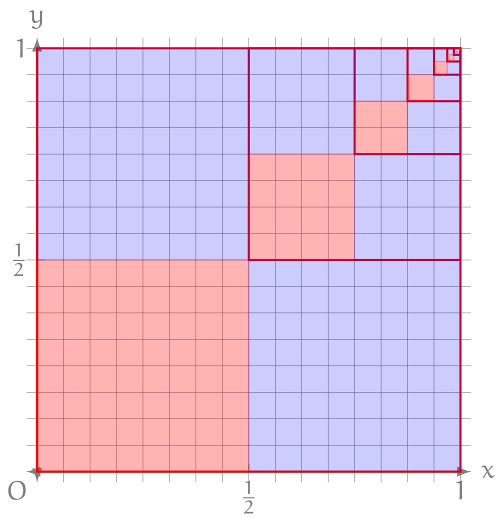
- Archimédesz (i.e. 287-252) összegzett először végtelen sort a matematika történetében. Az alábbi ábrán a piros színnel megjelölt négyzetek területének összege:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots,$$

aminek eredményeképp az

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

értéket kapta.



Adott $(x_n): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat esetén tekintsük az (s_n), ill. a (p_n) sorozatokat, ahol

$$\begin{array}{rcl} s_0 & := & x_0, \\ s_1 & := & x_0 + x_1, \\ s_2 & := & x_0 + x_1 + x_2, \\ s_3 & := & x_0 + x_1 + x_2 + x_3, \\ & \vdots & \end{array} \qquad \text{ill.} \qquad \begin{array}{rcl} p_0 & := & x_0, \\ p_1 & := & x_0 \cdot x_1, \\ p_2 & := & x_0 \cdot x_1 \cdot x_2, \\ p_3 & := & x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \\ & \vdots & \end{array}$$

pontosabban

$$s_n := x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ill.

$$p_n := x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Definíció. Adott $x = (x_n): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ esetén az (s_n) sorozatot az (x_n) sorozat által meghatározott (generált) **végtelen sor**nak (időnként röviden **sor**nak) nevezzük. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén s_n a végetelen sor n-edik **részletösszege**.

Definíció. Adott $x = (x_n): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ esetén a (p_n) sorozatot az (x_n) sorozat által meghatározott (generált) **végtelen szorzat**nak nevezzük. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén p_n a végetelen szorzat n-edik **részletszorzata**.

Megjegyzések.

1. A végtelen sorra, ill. a végtelen szorzatra a

$$\sum x := \sum (x_n) := (s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right), \qquad \text{ill.} \qquad \prod x := \prod (x_n) := (p_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)$$

   jelölések használatosak.

2. Ha valamely $m \in \mathbb{N}_0$ mellett az (x_n) sorozat értelmezési tartománya: $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq m\}$,

akkor az

$$s_n := \sum_{k=m}^{n} x_k \quad (m \le n \in \mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad p_n := \prod_{k=m}^{n} x_k \quad (m \le n \in \mathbb{N}_0)$$

megállapodással élünk és a

$$\sum_{n=m} (x_n) := (s_n), \qquad \text{ill.} \qquad \prod_{n=m} (x_n) := (p_n)$$

jelölést (is) használjuk.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum (x_n)$ végtelen sor

1. **konvergens**, ha részletösszegeinek sorozata konvergens: $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n) \in \mathbb{R}$. Ekkor ezt a határértéket a $\sum (x_n)$ **végtelen sor összegé**nek nevezzük és így jelöljük:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n := \lim(s_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=m}^{n} x_k \right).$$

2. **divergens**, ha részletösszegeinek sorozata divergens (azaz az (s_n) sorozatnak vagy $\pm\infty$ a határértéke vagy nincs határértéke).

3. **összege** $+\infty$, ill. $-\infty$, ha $\lim(s_n) = +\infty$, ill. $\lim(s_n) = -\infty$. Ezt így jelöljük:

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n := +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=m}^{\infty} x_n := -\infty.$$

Példák.

1. Az

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

harmonikus sorozatból képzett

$$\sum \left(\frac{1}{n} \right)$$

(**harmonikus**) **sor** divergens, hiszen ha konvergens lenne, akkor korlátos is lenne, viszont (s_n) nem korlátos (vö. Példa). **Megjegyezzük**, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

hiszen tetszőleges $0 < \omega \in \mathbb{R}$ esetén, ha $2\omega < k \in \mathbb{N}$, ill. $2^k < n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{2} > \frac{k}{2} > \omega. \end{aligned}$$

2. Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatról képzett $\sum (q^n)$ **mértani sor** pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = \frac{1}{1-q}.$$

Megjegyezzük, hogy

(a) $q \geq 1$ esetén $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.

(b) ha $q \in (-1, 1)$ és $m \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} q^n &= \lim_{n\to\infty} \left(q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots + q^{m+n}\right) = \\ &= q^m \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) = q^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^m \cdot \frac{1}{1-q} = \\ &= \frac{q^m}{1-q}. \end{aligned}$$

3. Egy teleszkopikus sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

ui. bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + /\ldots/ + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

4. A e szám sorösszeg-előállítása:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

ui.

1. lépés. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{és} \qquad t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(t_n) =: e.$$

Tudjuk, hogy az (s_n) sorozat is szigorúan monoton növekedő és korlátos, így konvergens is.

2. lépés. Világos, hogy

$$t_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 = 1 + 1 = s_1, \qquad t_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = s_2,$$

továbbá (vö. 3. EA) tetszőleges $3 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left\{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right\} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) <$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1\} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n,$$

ezért

$$t_n \leq s_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$e = \lim (t_n) \leq \lim (s_n)$$

következik.

3. lépés. Ha $m, n \in \mathbb{N}$: $2 \leq m < n$, akkor

$$t_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) > 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} 1 = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m,$$

így a fentiek figyelembevételével azt kapjuk, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $e \geq s_m$, ahonnan

$$e \geq \lim_{m\to\infty} (s_m) = \lim_{n\to\infty} (s_n)$$

következik.

5. A **hiperharmonikus sor**. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

ui. ha

(a) $\alpha < 1$, akkor

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

következésképpen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez azt jelenti, hogy (s_n) nem korlátos, következésképpen nem konvergens. Az is látható, hogy $\lim(s_n) = +\infty$, ezért ebben az esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

(b) $\alpha = 1$, akkor a $\sum \left(\frac{1}{n}\right)$ divergens harmonikus sort kapjuk.

(c) $\alpha > 1$, akkor tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \in \mathbb{N}$: $n < 2^{m+1}$, akkor

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right) < \\
&< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^\alpha}\right) = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^m = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \\
&= \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \left\{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}\right\} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.
\end{aligned}$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $n < 2^{m+1}$, ezért

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{\alpha}} + \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Következésképpen (s_n) korlátos sorozat. Látható, hogy (s_n) szigorúan monoton növekedő, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = s_n.$$

Midez azt jelenti, hogy az (s_n) sorozat konvergens.

Definíció. Azt mondjuk, hogy $\prod(x_n)$

1. **konvergens**, ha részletszorzatok (p_n) sorozata konvergens: $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n) \in \mathbb{R}$. Ekkor ezt a határértéket (p_n) **szorzat**ának nevezzük és így jelöljük:

$$\prod_{n=m}^{\infty} x_n := \lim(p_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=m}^{n} x_k\right).$$

2. **divergens**, ha részletszorzatainak sorozata divergens (azaz a (p_n) sorozatnak vagy $\pm\infty$ a határértéke vagy nincs határértéke).

3. **szorzata** $+\infty$, ill. $-\infty$, ha $\lim(p_n) = +\infty$, ill. $\lim(p_n) = -\infty$. Ezt így jelöljük:

$$\prod_{n=m}^{\infty} x_n := +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \prod_{n=m}^{\infty} x_n := -\infty.$$

Példák.

1. A

$$\prod_{n=1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

végtelen szorzat divergens, hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{n}}{n-1}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}} = n+1 \longrightarrow +\infty \quad (n\to\infty).$$

2. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$, ui.

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+2)} =$$

$$= \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-3)\cdot n}{(n-2)\cdot(n-1)}\cdot\frac{(n-2)\cdot(n+1)}{(n-1)\cdot n}\cdot\frac{(n-1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{n+2}{3n} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens. Ekkor (x_n) nullasorozat, azaz konvergens és $\lim(x_n) = 0$.

Bizonyítás. Az $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergens volta azt jelenti, hogy az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

részletösszegek sorozata konvergens. Következésképpen (s_n) Cauchy-féle, ami azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyam $N \in \mathbb{N}_0$, amellyel

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad (N \leq m, n \in \mathbb{N}_0).$$

Speciálisan az $N \leq m \in \mathbb{N}$, $m := n - 1$ választással

$$|s_m - s_{m-1}| = |x_m| < \varepsilon,$$

ami pontosan azt jelenti, amit állítottunk.

Tétel.

1. Ha a $\prod(x_n)$ végtelen szorzat konvergens és

$$\prod_{n=0}^{\infty} x_n \neq 0,$$

akkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \left(n > m \geq N \quad \Rightarrow \quad \left| \prod_{k=m+1}^{n} x_k - 1 \right| < \varepsilon \right). \tag{27}$$

2. Ha a $\prod(x_n)$ végtelen szorzatra teljesül a (27) kritérium, akkor a végtelen szorzat konvergens.

A fenti tételt $m + 1 = n$ esetén felírva azt kapjuk, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - 1| < \varepsilon)\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$0 \neq \prod_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(x_n) = 1.$$

A logaritmusfüggvényeket felhasználva a végtelen szorzatokat visszavezethetjük végtelen sorokra, és megfordítva, az exponenciális függvények segítségével végtelen sorokból végtelen szorzatokat készíthetünk. Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy a végtelen sorokra vonatkozó eredményeket átvigyük végtelen szorzatokra.

Tétel. Ha $2 \leq p \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in [0, 1]$, akkor van olyan

$$x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(együttható)sorozat, hogy

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} =: (0, x_1 x_2 \ldots)_p \tag{28}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha

- $\alpha = 1$, akkor az $x_n := p - 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ választás megfelelő:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = (p-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = (p-1) \cdot \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{p}{p-1} = 1.$$

- $\alpha \in [0, 1)$, akkor pl. az

$$x_1 := [p\alpha], \ \ldots, \ x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - (p^n x_1 + \ldots + p x_n)\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív megadású sorozatra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha,$$

ui

  - ha $x_1 := [p\alpha]$, akkor $x_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_1 \leq p\alpha < x_1 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} \leq \alpha < \frac{x_1 + 1}{p};$$

  - ha pedig $x_2 := [p^2\alpha - p x_1]$, akkor $x_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_2 \leq p^2\alpha - p x_1 < x_2 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2 + 1}{p^2},$$

majd az eljárást folytatva, ha az $x_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ számot meghatároztuk, úgy legyen

$$x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - p^n x_1 - \ldots - p x_n\right].$$

Ekkor $x_{n+1} \in \{0, \ldots, p-1\}$ és

$$s_n := \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \ldots + \frac{x_n}{p^n} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{x_n + 1}{p^n},$$

azaz

$$0 \leq \alpha - s_n \leq \frac{1}{p^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan látható, hogy

$$\lim(s_n) = \alpha, \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha.$$

Példa. A $(0,1\dot{2}\dot{4})_{10}$ sor reprezentálta szám tehát nem más, mint

$$\begin{aligned} (0,1\dot{2}\dot{4})_{10} &= 0,1 + 0,024 + 0,00024 + 0,0000024 + \ldots = \\ &= 0,1 + 0,024 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{10} + \frac{24}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{123}{990}. \end{aligned}$$

Definíció. A $p := 2$, a $p := 3$, ill. a $p := 10$ esetben a (28) előállítást az x szám **diadikus tört**, **triadikus tört**, ill. **tizedes tört** alakjának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy

1. a padikus törteket a következőképpen szokás osztályozni: az $(0, x_1 x_2 \ldots)_p$
   - **véges** p**-adikus tört**, ha alkalmas $M \in \mathbb{N}$ esetén minden $M \leq n \in \mathbb{N}$ inxere $x_n = 0$;
   - **szakaszos végtelen** p**-adikus tört**, ha alkalmas $M, k \in \mathbb{N}$ esetén minden $M \leq n \in \mathbb{N}$ inxere $x_{n+k} = x_n$:

     $$(0, a_1 a_2 \ldots a_M b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots b_k b_1 b_2 \ldots b_k \ldots)_p =: (0, a_1 a_2 \ldots a_M \dot{b}_1 b_2 \ldots \dot{b}_k)_p.$$

     Pl. $1/3 = (0,\dot{3})_{10}$
   - **nemszakaszos végtelen** p**-adikus tört**, ha végtelen, de nem szakaszos p-adikus tört.
2. az $\alpha \in (0,1)$ szám pontosan akkor racionális, ha p-adikus tör alakja (véges vagy) végtelen szakaszos.
3. a diadikus törtek fontos szerepet játszanak az informatikában, például a **lebegőpontos számábrázolás**nál. Ennek lényege, hogy a számot egyértelműen felírjuk

$$e \cdot M \cdot 2^k$$

alakban, ahol e a szám előjele, $1/2 \leq M < 1$ és $k \in \mathbb{Z}$. Az M számot (**mantisszát**) úgy tároljuk, hogy a diadikus tört alakjából vesszük az első néhány bitet a legmagasabb helyérték kivételével, mert az úgyis 1. A tárolt bitek száma függ az alkalmazott pontosságtól. Ezzel általában csak egy M-hez közeli diadikus racionális számot tudunk tárolni. Például az $1/10$ számot nem tudjuk pontosan tárolni.

4. ha $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ olyan számok, amelyre $a < b$, akkor az

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} \tag{29}$$

előállítás a következő algoritmus alkalmazásával könnyen megkapható:

1. lépés. Legyen $x_1 := \left[p \cdot \frac{a}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{a}{b} = x_1 + \frac{m_1}{b}$$

($p \cdot a$-ban a b megvan x_1-szer és marad m_1).

2. lépés. Legyen $x_2 := \left[p \cdot \frac{m_1}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_1}{b} = x_2 + \frac{m_2}{b}$$

($p \cdot m_1$-ben a b megvan x_2-ször és marad m_2).

3. lépés. Legyen $x_3 := \left[p \cdot \frac{m_2}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_2}{b} = x_3 + \frac{m_3}{b}$$

($p \cdot m_2$-ben a b megvan x_3-szor és marad m_3).

$\vdots$

n. lépés. Legyen $x_n := \left[p \cdot \frac{m_{n-1}}{b}\right]$. Ekkor

$$p \cdot \frac{m_{n-1}}{b} = x_n + \frac{m_n}{b}$$

($p \cdot m_{n-1}$-ben a b megvan x_n-szer és marad m_n).

Ha mind az n egyenlőséget rendre az

$$\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots \frac{1}{p^n}$$

számokkal szorozzuk, majd az elsőhöz adjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{x_3}{p^3} + \dots \frac{x_n}{p^n} + \frac{m_n}{p^n b}$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $1 \leq m_n \leq b$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m_n}{p^n b}\right)=0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{a}{b}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{p^n}.$$

Példák.

1. $\frac{1}{7}=(0,\dot{0}0\dot{1})_2$, ui.

$$\frac{1}{7}\xrightarrow{\times 2}\frac{2}{7}<1\ (x_1:=0)\ \xrightarrow{\times 2}\frac{4}{7}<1\ (x_2:=0)\ \xrightarrow{\times 2}\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7}\ (x_3:=1)\ \longrightarrow \frac{1}{7}\ (\text{ismétlés}).$$

Megjegyezzük, hogy

$$(0,\dot{0}0\dot{1})_2 = \left(\frac{0}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{1}{2^6}\right)+\left(\frac{0}{2^7}+\frac{0}{2^8}+\frac{1}{2^9}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^n=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{7}=\frac{1}{7}.$$

2. $\frac{2}{3}=(0,2\dot{0})_3$, ui.

$$\frac{2}{3}\xrightarrow{\times 3}\frac{6}{3}=2+0\ (x_1:=2)\ \xrightarrow{\times 3} 0\ (x_2:=0)\ \xrightarrow{\times 3} 0\ (\text{ismétlés}).$$

Megjegyezzük, hogy

$$(0,2\dot{0})_3=\frac{2}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\ldots=\frac{2}{3}.$$

3. $\frac{2}{11}=(0,\dot{1}\dot{8})_{10}$, ui.

$$\frac{2}{11}\xrightarrow{\times 10}\frac{20}{11}=1+\frac{9}{11}\ (x_1:=1)\ \xrightarrow{\times 10}\frac{90}{11}=8+\frac{2}{11}\ (x_2:=8)\ \longrightarrow \frac{2}{11}\ (\text{ismétlés}).$$

Megjegyezzük, hogy

$$
\begin{aligned}
(0,\dot{1}\dot{8})_{10} &= \left(\frac{1}{10}+\frac{8}{10^2}\right)+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{8}{10^4}\right)+\left(\frac{1}{10^5}+\frac{8}{10^6}\right)+\ldots= \\
&= \frac{18}{10^2}+\frac{18}{10^4}+\frac{18}{10^6}+\ldots=18\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^n=18\cdot\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}= \\
&= 18\cdot\frac{1}{10^2}\cdot\frac{10^2}{99}=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}.
\end{aligned}
$$

Feladat. Adjuk meg a $(0,1\dot{4})_6$ szám diadikus tört alakját!

Útm. Mivel

$$
\begin{aligned}
(0,1\dot{4})_6 &= \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}+\frac{4}{6^3}+\frac{4}{6^4}+\ldots=\frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\ldots\right)= \\
&= \frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6^2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{6}+\frac{4}{30}=\frac{90}{30}=\frac{3}{10},
\end{aligned}
$$

és

$$
\frac{3}{10}\xrightarrow{\times 2}\frac{6}{10}=\frac{3}{5}<1\ (x_1:=0)\xrightarrow{\times 2}\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}\ (x_2:=1)\xrightarrow{\times 2}\frac{2}{5}<1\ (x_3:=0)\xrightarrow{\times 2}
$$

$$
\xrightarrow{\times 2}\frac{4}{5}<1\ (x_4:=0)\xrightarrow{\times 2}\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}\ (x_5:=1)\ \text{(ismétlés)},
$$

ezért

$$
(0,1\dot{4})_6=(0,0\dot{1}00\dot{1})_2.
$$

A gyakorlat anyaga

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorösszegeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$;

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$;

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}}$; 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n+4}{5^n}$; 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Útm.

1. Világos, hogy

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \\
&= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \\
&= \sqrt{n+1}-1 \longrightarrow +\infty \quad (n\to\infty),
\end{aligned}$$

így a sor divergens, pontosabban

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim(s_n) = +\infty.$$

2. Mivel

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

3. Mivel

$$\frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2-3k-2} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right\} = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{1}{3n+1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2} = \frac{1}{3}.$$

4. Mivel

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

5. Mivel

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

ezért

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

6. Mivel

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} &= \frac{1}{k(k^2 + 3k + 2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right),
\end{aligned}$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{1}{4}.$$

7. Mivel

$$\sum_{n=0} \left(\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}} \right) = 18 \cdot \sum_{n=0} \left(\left(\frac{-3}{2^3} \right)^n \right) = 18 \cdot \sum_{n=0} \left(\left(\frac{-3}{8} \right)^n \right),$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}} = 18 \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 18}{11}.$$

8. Mivel

$$\sum_{n=1} \left(\frac{(-3)^n + 4}{5^n} \right) = \sum_{n=1} \left(\left(\frac{-3}{5} \right)^n \right) + 4 \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^n \right),$$

ezért a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + 4}{5^n} = \frac{\frac{-3}{5}}{1+\frac{3}{5}} + 4 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}.$$

9. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=1} \left(\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}\right) = (1+x^2) \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n\right)$$

konvergens mértani sor, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}} = (1+x^2) \cdot \frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}} = x^2 \cdot (1+x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Házi (gyakorló) feladat. Számítsuk ki az alábbi sorösszegeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}};$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)};$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}};$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right);$
6. $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}}\right).$

Útm.

1. Nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right) = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ldots + \\ &\quad + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

így a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = \lim(s_n) = 1 - \sqrt{2} + 0 = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Mivel

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

3. Mivel

$$(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} = (-1)^k \frac{k+(k+1)}{k(k+1)} = (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right) = \\ &= -\left(\frac{1}{2}+1\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right) + (-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) = \\ &= -1+\frac{(-1)^n}{n+1} \longrightarrow -1 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = -1.$$

4. Mivel

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \\ &= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}} = 1. \quad \blacksquare$$

5. Világos, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} = \frac{3}{2}.$$

6. Világos, hogy

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot (-2)^n + 4^n}{5^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=10}^{\infty} \left\{ \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{25} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{(1/5)^{10}}{1 - 1/5} + \frac{2}{25} \cdot \frac{(-2/5)^{10}}{1 + 2/5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{(4/5)^{10}}{1 - 4/5} =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{12} \cdot \left\{ \frac{5}{4} + 2048 \cdot \frac{5}{7} + 4^{10} \cdot 5 \right\} = \left(\frac{1}{5}\right)^{13} \cdot \frac{7 + 2^{13} + 4^{11} \cdot 7}{28}. \quad \blacksquare$$

9. oktatási hét

Az előadás anyaga

Az előző előadásról tudjuk, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergenciája azt jelenti, hogy a részletösszegek (s_n) sorozata konvergens, ami a Cauchy-féle konvergenciakritérium következtében nem más, mint

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,N \in \mathbb{N}_0\,\forall\,m, n \in \mathbb{N}_0: \quad (m > n \geq N \;\Rightarrow\; |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| = |s_m - s_n| < \varepsilon)\,.$$

Ennek következtében a múlt előadáson megmutattuk (vö. **Tétel**), hogy igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(x_n) = 0$$

implikáció.

Példa. Mivel

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az

$$x_n := \frac{4^n n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = 4^n \cdot n! \cdot \frac{1}{n^n} < 4^n \cdot n! \cdot \frac{4}{(n+1)^n} = \frac{4^{n+1} n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = x_{n+1},$$

tehát (x_n) pozitív tagú, szigorúan monoton növekedő sorozat, következésképpen $\sum(x_n)$ divergens.

Tétel. Tegyük fel, hogy az $(x_n), (y_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatok esetében

$$\exists\,N \in \mathbb{N}_0: \qquad x_n = y_n \quad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n = y_n$. Ekkor

$$\sum(x_n) \qquad \text{és} \qquad \sum(y_n)$$

ekvikonvergens, azaz $\sum(x_n)$ pontosan akkor konvergens, ha a $\sum(y_n)$ sor konvergens.

Bizonyítás.

1. lépés. Ha a $\sum(x_n)$ sor konvergens, akkor a Cauchy-féle konvergenciakritérium következtében

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,M\in\mathbb{N}_0\;\forall\,m,n\in\mathbb{N}_0: \quad (m>n\geq M \;\Rightarrow\; |x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_m|<\varepsilon)\,.$$

Ha $P:=\max\{N,M\}$, akkor bármely $m,n\in\mathbb{N}_0$, $m>n\geq P$ indexre

$$|y_{n+1}+y_{n+2}+\ldots+y_m|=|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_m|<\varepsilon$$

teljesül. Következésképpen a $\sum(y_n)$ sor esetében is konvergens a részletösszegek sorozata, tehát $\sum(y_n)$ konvergens.

2. lépés. Ha $\sum(y_n)$ konvergens, akkor a fentiekhez hasonlóan látható be, hogy $\sum(x_n)$ is konvergens.

Megjegyzések.

1. A fenti tétel tehát azt állítja, hogy ha két sor generáló sorozata legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens. Következéképpen, ha egy sort generáló sorozat véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor nem változik meg a konvergencia minősége: a sor konvergens marad, ha a tagok megváltoztatása nélkül is az volt, ill. divergens marad, ha a tagok megváltoztatása nélkül is divergens volt.

2. A tételben csak a konvergencia, ill. a divergenciára vonatkozó állítás található. Ez pl. konvergencia esetén nem jelenti azt, hogy a sorösszegek is megegyeznek.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum(x_n)$ sor

- **abszolút konvergens**, ha a $\sum(|x_n|)$ sor konvergens;
- **feltételesen konvergens**, ha a $\sum(x_n)$ konvergens, de nem abszolút konvergens.

Tétel. Ha a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás. A $\sum(x_n)$ sor abszolút konnvergenciája és a Cauchy-féle konvergenciakritérium következtében

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \left(m > n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \big||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m|\big| < \varepsilon\right).$$

Mivel

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_m| < \varepsilon,$$

ezért a kritérium teljesül a $\sum (x_n)$ sor részletösszegeinek sorozatára is.

Megjegyzések.

1. A tétel állításának megfordítása nem igaz, mint ahogy azt a

$$\sum \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

sor példája mutatja:

- a sor konvergens, ui. részletösszegeinek sorozata Cauchy-féle;
- a sor nem abszolút konvergens, hiszen az abszolút értékeiből képzett

$$\sum \left(\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\right) = \sum \left(\frac{1}{n}\right)$$

harmonikus sor divergens.

2. Ha egy konvergens pozitív tagú sor tetszőleges számú tagját (-1)-gyel szorozzuk, akkor az így kapott sor abszolút konvergens. Így például az

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$$

sor abszolút konvergens, hiszen a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \qquad \Big/ = \sum \left(\frac{1}{n^2}\right) \Big/$$

sor konvergens (hiperharmonikus sor).

Tétel. Ha $\sum (x_n)$ és $\sum (y_n)$ konvergens sor, akkor bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum (x_n + \alpha y_n)$ sor is konvergens, továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + \alpha y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Bizonyítás. Ha

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} y_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor az (s_n) és (t_n) a részletösszegek sorozatának konvergenciája következtében $(s_n + \alpha t_n)$ is konvergens. Következésképpen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + \alpha y_n) = \lim(s_n + \alpha t_n) = \lim(s_n) + \alpha \cdot \lim(t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Tétel. Bármely $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=m}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R},$$

és konvergencia esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{m} x_n + \sum_{n=m}^{\infty} x_n.$$

Bizonyítás. Ha

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k, \qquad t_n := \sum_{k=0}^{n} x_{m-1+k} = \sum_{k=m-1}^{m-1+n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$t_n = s_{m-1+n} - r, \qquad \text{ahol} \qquad r := \sum_{k=0}^{m-2} x_k,$$

ill. $n \geq m$ esetén

$$s_n = t_{1-m+n} + r.$$

Következésképpen (s_n) és (t_n) ekvikonvergensek és

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim(s_n) = \lim(t_n + r) = \lim(t_n) + r = \sum_{n=0}^{m} x_n + \sum_{n=m}^{\infty} x_n.$$

Tétel. Ha $\sum(x_n)$ és $\sum(y_n)$ konvergens sor és

$$x_n \leq y_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Bizonyítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq y_n$, akkor a

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k, \quad t_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

részletösszgekre

$$s_n \leq t_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

és így (vö. Tétel.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim(s_n) \leq \lim(t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Az alábbiakban olyan valós végtelen sorokat vizsgálunk, amelyek tagja nem negatívak, azaz

$$x_n \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az ilyen sorokat – nem teljesen következetesen – **pozitív tagú sor**oknak nevezik. Minthogy az ilyen sorok

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

részletösszegeire nyilván

$$s_n \leq s_n + x_{n+1} = s_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül, ezért **pozitív tagú sorok részletösszegeinek a sorozata monoton növő**. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó állításból közvetlenül adódik az alábbi a

Tétel. A $\sum(x_n)$ pozitív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha részletösszgeiből álló (s_n) sorozat korlátos.

Bizonyítás. A fentiek következtében két eset lehetséges.

1. eset A részletösszegek (s_n) sorozata korlátos, így a monotonitás miatt konvergens. Ekkor a $\sum(x_n)$ sor is konvergens.

2. eset A részletösszegek (s_n) sorozata nem korlátos. Így (s_n) monotonitása miatt $\lim(s_n) = +\infty$, következésképpen a sor divergens.

Megjegyzések.

1. A fenti tétel bizonyításából látható, hogy ha a $\sum(x_n)$ pozitív tagú sor nem konvergens, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim(s_n) = +\infty.$$

2. Az előző tétel állítása érvényben marad, ha a sor csak véges sok negatív tagot tartalmaz, mert ekkor (s_n) egy index után már monoton növekvő sorozat lesz. Hasonló állítás fogalmazható meg negatív tagú végtelen sorokra. Más a helyzet, ha a sor végtelen sok pozitív és negatív tagot is tartalmaz.

3. A $\sum(x_n)$ pozitív tagú sor esetén igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\right\} < +\infty$$

ekvivalencia, ui.

- ha $\sum(x_n)$ konvergens, akkor a részletösszegek

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozata konvergens, következésképpen korlátos is, ahonnan

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\right\} < +\infty$$

következik.

- ha

$$\sup\left\{\sum_{k=0}^{n} x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\right\} < +\infty,$$

akkor a részletösszegek (s_n) sorozata korlátos, hiszen

$$0 \leq s_n \leq \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\right\} < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Így (s_n) monotonitása következtében konvergens is.

Tétel (összehasonlító kritériumok). Tegyük fel, hogy az (x_n) és (y_n) sorozatokra az alábbi teljesül:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}_0 : \qquad 0 \leq |x_n| \leq |y_n| \quad (N \leq n \in \mathbb{N}_0). \tag{30}$$

Ha

1. a $\sum(y_n)$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(x_n)$ sor is abszolút konvergens (**majoránskritérium**);
2. a $\sum(x_n)$ sor nem abszolút konvergens, akkor a $\sum(y_n)$ sor sem abszolút konvergens (**minoránskritérium**).

Bizonyítás.

1. Ha a $\sum(y_n)$ sor abszolút konvergens, akkor

$$K := \sum_{n=0}^{\infty} |y_k| = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} |y_k| \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\right\} < +\infty.$$

Ezért a

$$q := \max\{|x_0|, \ldots, |x_N|\}$$

jelöléssel tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q \leq (N+1)q & (n \leq N), \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=0}^{N} |x_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |y_k| \leq (N+1)q + K & (n > N). \end{cases}$$

Következésképpen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k| = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |x_k| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0 \right\} < +\infty.$$

2. Ha a $\sum(x_n)$ sor nem abszolút konvergens, akkor a $\sum(y_n)$ sor sem abszolút konvergens, hiszen ha az lenne akkor az előző lépés alapján $\sum(x_n)$ is az lenne.

Láthattuk, hogy ha $\sum(x_n)$ pozítív tagú sor, azaz a $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatra tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \geq 0$ teljesül, akkor $\sum(x_n)$ konvergenciája egyszerűen ellenőrizhető a részletösszegek korlátossága révén. Bonyolultabb a helyzet, ha az (x_n) sorozat nem rendelkezik az iménti előjel-tulajdonsággal. Számos konvergenciakritérium közül az alábbi néhányat tárgyaljuk.

Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat esetében

1. alkalmas $q \in [0, 1)$ mellett

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}_0).$$

Ekkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens (következésképpen konvergens is).

2. alkalmas $q \in [1, +\infty)$ esetén

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq q \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}_0).$$

Ekkor a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Bizonyítás.

1. Mivel $|q| < 1$, ezért a

$$\sum(q^n)$$

geometriai sor abszolút konvergens. Az

$$|x_n| \leq q^n \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenségek és a majoránskritérium következtében tehát a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

2. A feltétel következtében majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n| \geq q^n \geq 1$. Következésképpen

(x_n) nem nullsorozat, így a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Megjegyzés. Ha

1. $\alpha := \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) < 1$, akkor az
$$\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$$
számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ küszöbindex, hogy
$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \alpha\right| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$
Következésképpen
$$\sqrt[n]{|x_n|} < \alpha + \varepsilon = \frac{1+\alpha}{2} =: q < 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$
Tehát
$$|x_n| < q^n \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$
így (vö. gyökkritérium) a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

2. $\beta := \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) > 1$, akkor az $\varepsilon := \beta - 1 > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy
$$\left|\sqrt[n]{|x_n|} - \beta\right| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$
Következésképpen
$$\sqrt[n]{|x_n|} > \beta - \varepsilon = 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$
azaz
$$|x_n| \geq 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$
így (x_n) nem nullsorozat, tehát a $\sum(x_n)$ sor divergens.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = 1$, akkor a $\sum(x_n)$ sor lehet konvergens is és divergens is, ui. az
$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozat esetében
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

és a $\sum(x_n)$ (harmonikus) sor divergens, viszont az

$$x_n := \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat esetében is

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2\right) = 1,$$

de a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

A gyökkritériumból következik a

Tétel (d'Alembert-féle hányadoskritérium). Tegyük fel, hogy az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat esetében majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n \neq 0$. Ha

1. valamely $q \in (0, 1)$ esetén

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}_0),$$

   akkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens (következésképpen konvergens is).

2. majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1,$$

   akkor a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Bizonyítás.

1. A feltételekből tetszőleges $N + 1 \leq n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\left|\frac{x_n}{x_N}\right| = \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x_N}{x_{N-1}}\right| \left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right| \leq q \cdot q \cdot \ldots \cdot q \cdot q = q^{n-N} = q^{-N} \cdot q^n$$

   és így

$$|x_n| \leq K \cdot q^n \qquad (N + 1 \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

következik, ahol $K := |x_N| \cdot q^{-N}$. Következésképpen

$$|x_n| \leq q^n, \qquad \text{azaz} \qquad \sqrt[n]{|x_n|} \leq q \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}_0).$$

Ez pedig (vö. gyökkritérium) azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

2. A feltételek következtében alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n \neq 0 \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Így speciálisan $|x_N| > 0$ és tetszőleges $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$|x_{n+1}| = \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \cdot \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right| \cdot |x_N| \geq 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot |x_N| = |x_N|.$$

Ez azt jelenti, hogy (x_n) nem nullsorozat, következésképpen a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Megjegyzések. Ha

1. $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) < 1$, akkor az

$$\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2} > 0$$

számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ küszöbindex, hogy

$$\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \alpha\right| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \alpha + \varepsilon = \frac{1+\alpha}{2} =: q < 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

így (vö. hányadoskritérium) a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens.

2. $\beta := \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) > 1$, akkor az $\varepsilon := \beta - 1 > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy

$$\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - \beta\right| < \varepsilon \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > \beta - \varepsilon = 1 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}_0),$$

így (vö. hányadoskritérium) a $\sum(x_n)$ sor divergens.

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)=1$, akkor a $\sum(x_n)$ sor lehet konvergens is és divergens is, ui. az

$$x_n := \frac{1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat esetében

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1,$$

és a $\sum(x_n)$ (harmonikus) sor divergens, viszont az

$$x_n := \frac{1}{n^2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat esetében is

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right)=1,$$

de a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

Tétel (Cauchy-féle kondenzációs vagy ritkítási kritérium). Ha

$$0\le x_{n+1}\le x_n \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor a

$$\sum(x_n) \qquad \text{és a} \qquad \sum\left(2^n\cdot x_{2^n}\right)$$

sorok ekvikonvergensek.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (n\in\mathbb{N})$$

és

$$t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot x_{2^k} \quad (n\in\mathbb{N}_0), \qquad \text{ill.} \qquad S := \lim(s_n)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

valamint
$$T := \lim(t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n},$$
továbbá $m, n \in \mathbb{N}_0$: $m > 1$. Ha

- $n < 2^m$, akkor
$$s_n \leq x_1 + (x_2 + x_3) + \ldots + (x_{2^m} + x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}-1}) \leq x_1 + 2x_2 + \ldots 2^m x_{2^m} = t_m,$$
- míg $n \geq 2^m$ esetén
$$\begin{aligned} s_n &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \ldots + (x_{2^{m-1}+1} + x_{2^{m-1}+2} + \cdots + x_{2^m}) \geq \\ &\geq x_1 + x_2 + 2x_4 + \cdots + 2^{m-1}x_{2^m} = \frac{1}{2}(x_1 + t_m). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy (s_n) és (t_n) ekvikorlátos. Mivel mindkét sorozat monoton növekvő, ekvikonvergensek.

Megjegyzések.

1. Konvergencia esetén
$$S \leq T \leq 2S - x_1 \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{2}(T + x_1) \leq S \leq T.$$
2. Az $\alpha > 0$ esetben a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
hiperharmonikus sor konvergenciáját vizsgálhatjuk ezzel a kritériummal, ui.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)} < +\infty \iff$$
$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n < +\infty \iff 2^{1-\alpha} < 1 \iff \alpha > 1.$$
Ez esetben
$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} = \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

így
$$\frac{1}{2}(T+1)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha}-2}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-2}=\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-2}.$$
Tehát
$$\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\le\frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha}-2}\qquad(\alpha>1).$$
Ez $\alpha\longrightarrow+\infty$ esetén egyre szűkülő intervallumot jelent:

- $\alpha=2$ esetén
$$\frac{3}{2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}\le 2\qquad\left(\text{hiba }\le\frac{1}{2}\right),$$
- $\alpha=3$ esetén
$$\frac{7}{6}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}\le\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\qquad\left(\text{hiba }\le\frac{1}{6}\right).$$

A
$$\sum\left(\frac{1}{n^{2}}\right),\qquad\sum\left(\frac{1}{n^{4}}\right),\qquad\text{ill. a}\qquad\sum\left(\frac{1}{n^{6}}\right)$$
sorok összege ismert:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}=\frac{\pi^{4}}{90},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6}}=\frac{\pi^{6}}{945},$$
de a
$$\sum\left(\frac{1}{n^{3}}\right)$$
sor összege nem ismeretes. Az 1978-ban Helsinkiben tartott Matematikai Kongresszuson R. Apéry megmutatta, hogy ez az összeg irracionális.

Tétel (Leibniz-kritérium). Legyen

$$0 \le x_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad (x_n) \searrow .$$

Ekkor

1. igaz a
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim(x_n) = 0$$
ekvivalencia;

2. a $\lim(x_n) = 0$ esetben
$$\sum_{n=0}^{2q-1} (-1)^n x_n \le \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \le \sum_{n=0}^{2p} (-1)^n x_n \qquad (p, q \in \mathbb{N}); \tag{31}$$
és fennáll a
$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n x_n \right| \le x_m \qquad (m \in \mathbb{N}_0) \tag{32}$$
hibabecslés.

Bizonyítás.

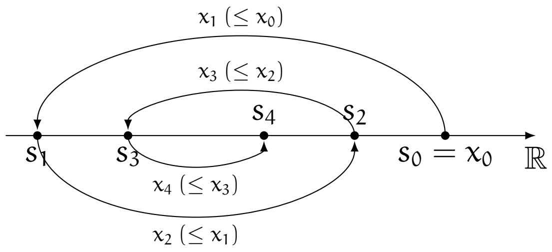
1. lépés. Ha a $\sum ((-1)^n x_n)$ sor konvergens, akkor a konvergencia szükséges feltétele folytán

$$\lim ((-1)^n x_n) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad 0 = \lim (|(-1)^n x_n|) = \lim (x_n) \,.$$

2. lépés. Legyen $\lim (x_n) = 0$ és

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + - \ldots + (-1)^n x_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned}
s_0 &= x_0,\\
s_1 &= x_0 - x_1 = s_0 - x_1,\\
s_2 &= x_0 - x_1 + x_2 = s_1 + x_1,\\
s_3 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = s_2 - x_3,\\
s_4 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = s_3 + x_4.
\end{aligned}$$

Látható, hogy az (s_{2n}) részsorozat monoton fogyó, az (s_{2n+1}) részsorozat monoton növő, hiszen

$$s_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k x_k = s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} = s_{2n} + (\underbrace{x_{2n+2} - x_{2n+1}}_{\leq 0}) \leq s_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ill.

$$s_{2n+3} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k x_k = s_{2n+1} + x_{2n+2} - x_{2n+3} = s_{2n+3} + (\underbrace{x_{2n+2} - x_{2n+3}}_{\geq 0}) \geq s_{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Igaz továbbá, hogy

$$s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - x_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0 = x_0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos. Következésképpen

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n}) =: \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \text{ill.} \qquad \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1}) =: \beta \in \mathbb{R},$$

és $\alpha = \beta =: S$, hiszen

$$\alpha - \beta = \lim(s_{2n}) - \lim(s_{2n+1}) = \lim (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim (x_{2n+1}) = 0.$$

Ekkor az (s_{2n}), (s_{2n+1}) sorozatok monotonitása miatt tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n} \qquad \text{és} \qquad s_{2n+1} \leq S \leq s_{2n+2},$$

így bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$-x_{2n+1} \leq S - s_{2n} \leq 0 \qquad \text{és} \qquad 0 \leq S - s_{2n+1} \leq x_{2n+2}.$$

Mindez azt jelenti, hogy

$$0 \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x_k \right| = |S - s_n| \leq x_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ezzel megkaptuk a (32) becslést az $m \in \mathbb{N}$ esetben. A $m := 0$ eset az

$$s_{2n} = x_0 + \sum_{k=1}^{n} |x_{2k} - x_{2k-1}| = x_0 - \sum_{k=1}^{n} (x_{2k} - x_{2k-1}) \leq x_0$$

összefüggés következménye az $n \to \infty$ határátmenetben.

Megjegyzések.

1. Ha az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatra

$$0 \leq x_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad (x_n) \searrow,$$

akkor a

$$\sum \left((-1)^n \cdot x_n\right)$$

sort **Leibniz-sor**nak vagy **Leibniz-típusú sor**nak nevezzük.

2. A Leibniz-kritériumban az (x_n) sorozat monotonitása nem hagyható el, ui. pl. az

$$x_n := \begin{cases} \dfrac{2}{k} & (n = 2k-1), \\[2ex] \dfrac{1}{k} & (n = 2k) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pozitív tagú nullsorozat nem monoton csökkenő, és a $\sum \left((-1)^n \cdot x_n\right)$ sor divergens.

3. Ha

$$x_n := \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Következésképpen

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \overset{(32)}{\leq} \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{10} \qquad (9 \leq m \in \mathbb{N}),$$

és az $p := q := 5$ választással (31) nem más, mint

$$0.645\dot{6}34900\dot{0} = \frac{1627}{2520} = \sum_{n=0}^{9} \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{9} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{20417}{27720} = 0.736\dot{5}4401\dot{1},$$

így

$$0.6456 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} < 0.7366.$$

Később belátjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log_e(2) =: \ln(2).$$

Sőt, azt belátjuk majd, hogy a π az alábbi **formula** segítségével is közelíthető:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. A Leibniz-típusú sorok hibabecslésére mintegy 250 évig csak Leibniz (32) egyenlőtlensége volt ismeretes. Meglepő tény az, hogy csak az 1960-as évektől jelentek meg olyan dolgozatok, amelyekben a szerzők a szóban forgó becslés élesítését igazolták. Például **Diego Rattaggi** 2018-ban közölt dolgozatában bizonyította be azt, hogy a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \right)$$

Leibniz-sorra a következő állítás igaz: tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\frac{4n^3 + 32n^2 + 87n + 83}{8n^4 + 68n^3 + 208n^2 + 268n + 120} < \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} < \frac{4n^2 + 16n + 17}{8n^3 + 36n^2 + 52n + 24}.$$

A gyakorlat anyaga

Emlékeztető [Összehasonlító kritérium]. Legyen $x, y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.

- Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $|x_n| \leq y_n$ és a $\sum_{n=0} (y_n)$ sor konvergens, akkor $\sum_{n=0} (x_n)$ abszolút konvergens (**majoránskritérium**), továbbá
$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$
- Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 \leq y_n \leq x_n$ és a $\sum (y_n)$ sor divergens, akkor $\sum (x_n)$ is divergens (**minoránskritérium**)

Feladat. Az összehasonlító kritérium segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

1. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{2n^3-16}{n^5+n}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right)$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}\right)$;
5. $\displaystyle\sum_{n=0} \left(\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}\right)$;
6. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{n+2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}}\right)$;
7. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$;
8. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}\right)$.

Útm.

1. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre
$$\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \approx \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{divergens,}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sor divergens, ezért a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

2. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} = \frac{2-\frac{16}{n^3}}{n^2+\frac{1}{n^2}} \approx \frac{2}{n^2} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{konvergens,}$$

ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2}{n^2}\right) = 2 \cdot \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

3. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n^{3/2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

4. Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni (vö. hiperharmonikus sor konvergenciakérdése). Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} > \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 > \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1},$$

és ez utóbbi igaz, hiszen

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < \frac{2}{1} = 2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

5. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} < \frac{4^n+4^n}{5^n} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

6. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^4+3n^2+2}} > \frac{n+2}{\sqrt{(n+2)^4}} = \frac{1}{n+2},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

7. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

8. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

Emlékeztető [Leibniz-kritérium]. Legyen

$$0 \leq x_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad (x_n) \searrow .$$

Ekkor igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim(x_n) = 0$$

ekvivalencia.

Feladat. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

$$1. \ \sum_{n=0} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1} \right); \qquad 2. \ \sum_{n=1} \left((-1)^n \cdot \frac{n}{5n-2} \right).$$

Útm.

1. Ha
$$x_n := \frac{n}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$
ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$ (HF) és $\lim(x_n) = 0$, így a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. Ha
$$x_n := \frac{n}{5n-2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$ (HF), de $\lim(x_n) = \frac{1}{5} \neq 0$, így a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Emlékeztető [Gyök- és hányadoskritérium]. Ha

$$A := \lim(\sqrt[n]{|x_n|}) \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \text{ill.} \qquad A := \lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) \in \overline{\mathbb{R}},$$

úgy

- $A < 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens;
- $A > 1$ esetén a $\sum(x_n)$ sor divergens

(sok helyütt gyök-, ill. hányadoskritériumon az iménti erősebb feltételt szokás érteni).

Feladat. Vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\right)$;
2. $\sum_{n=1}\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)$;
3. $\sum_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$;
4. $\sum_{n=1}\left(\frac{(x-2)^n}{n+\sqrt{n}}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.
5. $\sum_{n=1}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right)$
6. $\sum_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n+3^n}\right)$;
7. $\sum_{n=1}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right)$;
8. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n\right)$;
9. $\sum_{n=1}\left(\frac{n!}{2^n+1}\right)$.

Útm.

1. Legyen

$$x_n := \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = \frac{1}{3}\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{3} < 1,$$

így a gyökkritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. Legyen
$$x_n := \frac{4^n n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \lim\left(\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{4^n n!}\right) = \lim\left(\frac{4\cdot 4^n\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{4^n n!}\right) =$$
$$= 4\lim\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{4}{e} > 1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

3. Legyen
$$x_n := \frac{n^2}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \lim\left(\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2} < 1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

4. Világos, hogy $x = 2$ esetén a sor konvergens. Legyen most $x \neq 2$. Ekkor az $n \longrightarrow \infty$ határesetben
$$\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{n+\sqrt{n}}{(x-2)^n}\right| = |x-2|\cdot\frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}} =$$
$$= |x-2|\cdot\frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow |x-2|.$$
Mivel
$$|x-2| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < x-2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < x < 3,$$
ezért $x \in (1,3)$ esetén a sor konvergens és $x \in \mathbb{R}\backslash[1,3]$ esetén pedig divergens. $x = 3$ esetén a sor minorálható a divergens
$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

divergens sorral, hiszen

$$\frac{(3-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a sor divergens. $x = 1$ esetén pedig a sor a Leibniz-tétel miatt konvergens, hiszen

$$\frac{(1-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}, \qquad \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

A sor tehát pontosan az

$$x \in [1,3)$$

esetben konvergens.

5. Mivel

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right|}\right) = \lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

ezért a kérdéses sor konvergens.

6. Mivel

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n+3^n}\right|}\right) = \lim\left(\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}\right) = \frac{1^2}{\max\{2,3\}} = \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a kérdéses sor konvergens.

7. Mivel

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1 \quad (n \to \infty),$$

ezért a kérdéses sor (abszolút) konvergens.

8. Ha

$$x_n := \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \frac{1}{e-1}\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{e-1} > 1,$$

így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

9. Ha

$$x_n := \frac{n!}{2^n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \lim\left((n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\right) = \lim\left((n+1)\frac{1+\dfrac{1}{2^n}}{2+\dfrac{1}{2^n}}\right) = +\infty,$$

így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Házi (gyakorló) feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum(x_n)$ sor?

1. $x_n := \left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ 0 \leq x \in \mathbb{R});$
2. $x_n := (\ln(x))^n \qquad (n \in \mathbb{N};\ 0 < x \in \mathbb{R});$
3. $x_n := \left(\dfrac{x^2+1}{3}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})_0;$
4. $x_n := \dfrac{n \cdot 2^n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(3x^2+8x+6)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ x \in \mathbb{R});$
5. $x_n := \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N};\ -2 \neq x \in \mathbb{R});$
6. $x_n := (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R});$
7. $x_n := \dfrac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. A $\sum\limits_{n=0}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0, 16),$$

és minden $x \in (0, 16)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{2}{4 - \sqrt{x}}.$$

2. A $\sum\limits_{n=1} (x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$|\ln(x)| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\frac{1}{e}, e\right),$$

és minden $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}.$$

3. A $\sum\limits_{n=0} (x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{x^2+1}{3}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

és minden $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1 - \frac{x^2+1}{3}} = \frac{3}{2 - x^2}.$$

4. Világos, hogy

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{1}{|3x^2+8x+6|} \longrightarrow \frac{2}{|3x^2+8x+6|} \qquad (n \to \infty)$$

és

$$\frac{2}{|3x^2+8x+6|} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (-2/3, +\infty).$$

Ha $x \in \{-2; -2/3\}$, akkor

$$\sum (x_n) = \sum \left(\frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n}\right) = \sum \left(\frac{n}{n+1}\right),$$

ami divergens. Tehát $\sum (x_n)$ pontosan akkor konvergens, ha $x \in (-\infty, -2) \cup (-2/3, +\infty)$.

5. Ha $x = 2$, akkor a sor konvergens. Ha $x \neq 2$, akkor

$$\lim \left(\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{n+1} \right| \cdot \left| \frac{2n-1}{(-1)^n} \cdot \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^n \right| \right) = \left| \frac{2-x}{2+x} \right| \lim \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right) = \left| \frac{2-x}{2+x} \right|.$$

Ha

$$\left| \frac{2-x}{2+x} \right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \frac{2-x}{2+x} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \frac{4}{2+x} < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0,$$

akkor a sor abszolút konvergens. Ha

$$\left| \frac{2-x}{2+x} \right| > 1, \qquad \text{azaz} \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0),$$

akkor a sor divergens. Ha

$$\left| \frac{2-x}{2+x} \right| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad x = 0,$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n-1} \right)$$

Leibniz-sort kapjuk, amely konvergens.

6. Világos, hogy $x = 0$ esetén a sor konvergens. Legyen most $x \neq 0$, így

$$(x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) = x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

tehát a sor pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0), \\ \\ -1 & (x = 0). \end{cases}$$

7. A konvergencia vizsgálatát a gyökkritérium segítségével végezzük. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^{2n}}{1 + x^{4n}} \right|} = \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{|1 + x^{4n}|}} \leq \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{1}} = |x|^2,$$

így
$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right|}\right)\leq |x|^2<1,$$
ha $|x|<1$. Tehát $|x|<1$ esetén a sor abszolút konvergens. Legyen most $|x|>1$, és alakítsuk át a törtet a következőképpen:
$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right|}=\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{|x|^{2n}}}{\left|\frac{1}{x^{4n}}+1\right|}}=\frac{\frac{1}{|x|^2}}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{x^{4n}}+1\right|}}<\frac{\frac{1}{|x|^2}}{\sqrt[n]{1}}=\frac{1}{|x|^2}<1,$$
így $|x|>1$ esetén is
$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\right|}\right)<1,$$
azaz a sor abszolút konvergens. Ha $|x|=1$, akkor $x=1$, ill.$x=-1$. Ebben az esetben a sor nem más mint
$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}\right),$$
ami divergens.

Házi (gyakorló) feladat.

1. Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

(a) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$; (b) $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$; (c) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{n^{n+1/n}}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{100^n}{n!}\right)$; (f) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$;

(g) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\right)$; (h) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{3^n\cdot(n+2)!}{(n+1)^n}\right)$; (i) $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Mely $x\in\mathbb{R}$ esetén konvergens a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(x-2)^n}{n}\right)$$
sor?

Útm.

1. (a) Mivel
$$\lim\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)=\frac{1}{3}\neq 0,$$
ezért a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$$
sor divergens.

(b) Mivel az $n\to\infty$ határátmenetben
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-2}\longrightarrow e\cdot\frac{1}{(1+0)^2}=e\neq 0,$$
ezért a
$$\sum_{n=1}\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$$
sor divergens.

(c) Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} = \frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^4+1}+n^5}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^3} \approx \frac{1}{n^3} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{konvergens,}$$

ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} \leq \frac{3n^2}{n^5} = \frac{3}{n^3}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{3}{n^3}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

(d) Mivel $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$, ezért alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{n} \leq 2 \qquad (N \leq n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

$$\frac{1}{n^{n+1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2},$$

így a minoránskritérium alkalmazásával látható, hogy a kérdéses sor divergens.

(e) Ha

$$x_n := \frac{100^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty),$$

így a hányadoskritérium következményeként a kérdéses sor konvergens.

(f) Legyen

$$x_n := \frac{n^2}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

1. módszer a hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

2. módszer a gyökkritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

(g) Legyen

$$x_n := \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot (n^2+2n+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow 0+0+0 = 0 < 1.$$

(h) Legyen

$$x_n := \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor divergens, hiszen

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{3^{n+1} \cdot (n+3)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot (n+2)!} = 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-2} \longrightarrow 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1^{-2} = \frac{3}{e} > 1.
\end{aligned}$$

(i) Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2 + (-1)^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért a kérdéses sor a minoránskritérium következtében divergens.

2. Ha $x = 2$, akkor a sor nyilvánvalóan konvergens, és az összege 0. Legyen $2 \neq x \in \mathbb{R}$ és

$$a_n := \frac{(x-2)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-2)^n}\right|\right) = |x-2|\cdot\lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x-2|.$$

Mindez azt jelenti, hogy a sor

$$|x-2| < 1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad -1 < x-2 < 1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in(1,3)$$

esetén konvergens,

$$|x-2| > 1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$$

esetén pedig divergens. Ha $|x-2| = 1$, azaz $x\in\{1;3\}$, akkor a következőképpen járunk el:

- $x = 1$ esetén a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(x-2)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
sor nem más, mint az alternáló harmonikus sor (vö. 4. gyakorlat), így a Lebniz-kritérium (vö. 10. gakorlat) következtében konvergens;
- $x = 3$ esetén a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(x-2)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)$$
sor nem más, mint a harmonikus sor (vö. 4. gyakorlat), így divergens.

Következésképpen a kérdéses sor pontosan az $x\in[1,3)$ esetben konvergens.

10. oktatási hét

Az előadás anyaga

Megjegyezzük, hogy véges összegeket úgy szorzunk össze, hogy az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik minden tagjával és a kapott szorzatokat összeadjuk:

$$(x_0 + \ldots + x_n) \cdot (y_0 + \ldots + y_m) = x_0 y_0 + x_0 y_1 + \ldots + x_0 y_m + x_1 y_0 + \ldots + x_n y_m.$$

Mi a helyzet végtelen sorok esetében? Soroknál hasonló lenne a helyzet, csakhogy végtelen számú szorzat keletkezik, ezért előre meg kell határozni milyen sorrendben adjuk össze ezeket a szorzatokat, illetve alkalmazunk-e zárójelezést. A $\sum (x_n)$ és a $\sum (y_n)$ végtelen sorok szorzatának az értelmezéséhez az $x_i\, y_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ szorzatokat egy „$\infty \times \infty$”-es mátrixba írjuk fel a következő módon:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\
\hline
y_0 & x_0 y_0 & x_1 y_0 & x_2 y_0 & x_3 y_0 & \ldots \\
y_1 & x_0 y_1 & x_1 y_1 & x_2 y_1 & x_3 y_1 & \ldots \\
y_2 & x_0 y_2 & x_1 y_2 & x_2 y_2 & x_3 y_2 & \ldots \\
y_3 & x_0 y_3 & x_1 y_3 & x_2 y_3 & x_3 y_3 & \ldots \\
y_4 & x_0 y_4 & x_1 y_4 & x_2 y_4 & x_3 y_4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

- **téglányszorzat:**
- **Cauchy-szorzat:**

Definíció. A $\sum(x_n)$ és a $\sum(y_n)$ sorok

- **téglányszorzat**ának nevezzük a $\sum(t_n)$ végtelen sort, ahol

$$t_n := \sum_{\max\{i,j\}=n} x_i y_j \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

- **Cauchy-szorzat**ának nevezzük a $\sum(c_n)$ sort, ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot y_{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

- t_n olyan $x_i y_j$ szorzatok összege, amelyeknél egyik index n, és a másik n-nél kisebb vagy egyenlő;
- c_n olyan $x_i y_j$ szorzatok összege, amelyeknél a két index összege n.

Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}(x_n)$ és a $\sum_{n=0}(y_n)$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor a $\sum_{n=0}(t_n)$ téglányszorzatuk is konvergens, továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right),$$

azaz a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Megjegyezzük, hogy

1. Az előző tétel Cauchy-szorzatra nem érvényes, hiszen pl. a

$$\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens, viszont önmagával vett Cauchy-szorzata divergens:

$$\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) \times \sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{n=0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right) =: \sum_{n=0}\left((-1)^n c_n\right)$$

folytán

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=$$

$$=\frac{2(n+1)}{n+2}\longrightarrow 2\neq 0\quad(n\to\infty).$$

2. divergens sorok Cauchy-szorzata is lehet konvergens, hiszen az

$$1-\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)\qquad\text{és az}\qquad 1+\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

sorok divergensek, de Cauchy-szorzatuk konvergens: $\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)$, ahol

$$\begin{aligned}c_n&=\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\ldots-\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\frac{3}{2}=\\&=2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(1+2+\ldots+2^{n-1})-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\\&=2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(2^n-1)-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)=\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right).$$

Tétel [Mertens-tétel]. Ha a $\sum(x_n)$, $\sum(y_n)$ sorok konvergensek:

$$A:=\sum_{n=0}^{\infty}x_n,\qquad B:=\sum_{n=0}^{\infty}y_n,$$

továbbá valamelyikük abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}x_ky_{n-k}=A\cdot B=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n\right).$$

Feladat. A Cauchy-szorzásra, ill. a Mertens-tételre hivatkozva mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén fennáll a

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

egyenlőség!

Útm. Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Megjegyezzük, hogy ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Tétel. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} (x_n)$ és $\sum_{n=0} (y_n)$ végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor

1. a $\sum_{n=0} (t_n)$ téglányszorzat is abszolút konvergens,
2. a $\sum_{n=0} (c_n)$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,

továbbá

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

Definíció. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{X}$ és $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Ekkor az (f_n) sorozatot (valós) **függvénysorozat**nak nevezzük. Azt mondjuk továbbá, hogy az (f_n) függvénysorozat

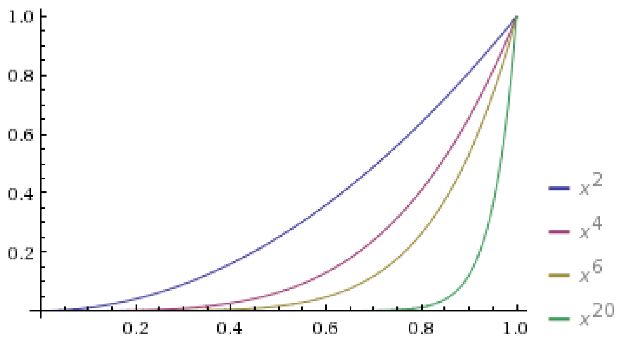
1. **konvergens az** $a \in \mathcal{X}$ **pontban**, ha az $(f_n(a))$ számsorozat konvergens;
2. **konvergenciahalmaz**a a
$$\mathrm{KH}(f_n) := \{x \in \mathcal{X} : \ (f_n(x)) \text{ konvergens}\}$$
halmaz;
3. **(pontonként) konvergens a** $\mathcal{H} \subset \mathrm{KH}(f_n)$ **halmazon**, ha bármely $a \in \mathcal{H}$ esetén (f_n) konvergens az a pontban, azaz az $(f_n(a))$ számsorozat konvergens;
4. **(pontonként) konvergál a** $\mathcal{H} \subset \mathrm{KH}(f_n)$ **halmazon az** $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ **határfüggvényhez**, jelben
$$f_n \xrightarrow{\mathcal{H}} f \qquad (n \to \infty),$$
ha bármely $a \in \mathcal{H}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} (f_n(a)) = f(a).$$

Megjegyzés. Látható, hogy (f_n) pontosan akkor lesz a $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathrm{KH}(f_n)$ halmazon (pontonként) konvergens, ha van olyan $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy (f_n) (pontonként) konvergál f-hez $\mathcal{H}$-n, azaz

$$\forall x \in \mathcal{H}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall N \leq n \in \mathbb{N} : \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Példák.

1. Az
$$f_n(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$
függvénysorozat esetében $\mathrm{KH}(f_n) = (-1, 1]$,
$$f : (-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0 & (x \in (-1, 1)), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$



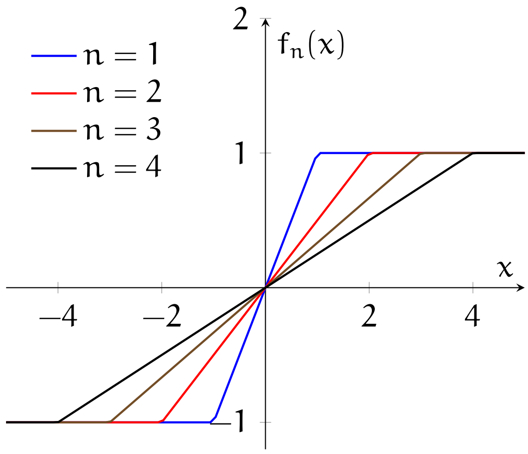
9. ábra

2. Az

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & (x \le -n)\,, \\ x/n & (n \le x \le n)\,, \\ 1 & (x > n) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat esetében $\mathrm{KH}(f_n) = \mathbb{R}$,

$$\mathrm{KH}(f_n) = \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \mathrm{sgn}(x).$$



Definíció. Legyen (f_n) az $\mathcal{X}$ halmazon értelmezett valós értékű függvényekből álló függvénysorozat. A $\sum(f_n)$ **függvénysor**on az

$$s_n(x) := f_0(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathcal{X})$$

képlettel értelmezett függvények sorozatát értjük.

A $\sum(f_n)$ függvénysor tehát nem más, mint az

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

részletösszeg-függvények által meghatározott (s_n) függvénysorozat. Az

$$s(x) := \lim_{n\to\infty} (s_n(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad \left(x \in \mathrm{KH}\left(\sum(f_n)\right) = \mathrm{KH}\,(s_n)\right)$$

határfüggvényt pedig a $\sum(f_n)$ függvénysor **összegfüggvény**ének nevezzük.

Példa. Az

$$f_n(x) := x^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$

függvénysorozat esetében $\sum(f_n) = (s_n)$, ahol

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & (x = 1), \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & (x \neq 1) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A $\sum(f_n) = (s_n)$ függvénysor konvergenciahalmaza és összegfüggvénye nyilvánvalóan

$$\mathrm{KH}\left(\sum(f_n)\right) = (-1, 1) \qquad \text{és} \qquad s(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \in (-1, 1)).$$

Definíció. Adott $c \in \mathbb{R}$ **középpont** és $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **együtthatósorozat**, ill.

$$f_n(x) := a_n(x-c)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$

esetén a $\sum(f_n)$ függvénysort **hatványsor**nak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy

1. a $\sum(f_n)$ hatványsor esetében az s_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ részletösszeg-függvények a következők:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}),$$

azaz s_n-ek polinomok. Nyilvánvaló, hogy a szóban forgó hatványsor az $x = c$ pontban konvergens, és az s összefüggvényre $s(c) = a_0$.[14]

2. hatványsorok jelölésére igen gyakran a

$$\sum (a_n(x-c)^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

szimbólum használatos.

3. a szóban forgó hatványsor konvergenciahalmazát, ill. összefüggvényét a korábbiakhoz hasonlóan a

$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right) := \left\{x \in \mathbb{R}: \text{ a } \sum (a_n(x-c)^n) \text{ számsor konvergens}\right\},$$

ill. az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad \left(x \in \mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right)\right)$$

szimbólummal jelöljük.

Példák.

1. A

$$\sum (n^n \cdot x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza:

$$\mathrm{KH}\left(\sum (n^n \cdot x^n)\right) = \{0\},$$

[14] Itt a $0^0 := 1$ megállapodással élünk.

hiszen (mint ahogy fentebb is említettük) $x = 0$ esetén a $\sum (n^n \cdot x^n)$ sor konvergens, ha pedig $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\sqrt[n]{|n^n \cdot x^n|} = |x| \cdot n \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty)$$

következtében a $\sum (n^n \cdot x^n)$ sor divergens.

2. A

$$\sum \left(\frac{1}{n^n} \cdot x^n \right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza:

$$\mathrm{KH}\left(\sum \left(\frac{1}{n^n} \cdot x^n \right) \right) = \mathbb{R},$$

ui. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n^n} \right|} = \frac{|x|}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

3. A

$$\sum \left(\frac{(x-2)^n}{n + \sqrt{n}} \right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza az $[1, 3)$ intervallum (vö. gyakorlat).

4. A

$$\sum \left(\frac{x^n}{n^2} \right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum, hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n^2} \right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow |x| \qquad (n \to \infty),$$

és a sor nyilván konvergens az $x \in \{-1, 1\}$ pontokban (HF).

Tétel. Bármely $c, a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén egyértelműen létezik olyan $0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}}$, hogy

(1) ha $R > 0$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$, $|x - c| < R$ helyen a

$$\sum (a_n (t - c)^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsor abszolút konvergens;

(2) ha $R < +\infty$, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x - c| > R$ mellett a

$$\sum (a_n (t - c)^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsor az x helyen divergens.

Bizonyítás.

1. lépés. Belátjuk, hogy a szóban forgó hatványsor valamilyen $x \in \mathbb{R}$, $|x - c| > 0$ helyen konvergens, akkor bármely

$$y \in \mathbb{R}: \qquad |y - c| < |x - c|$$

esetén y-ban abszolút konvergens. Valóban, a

$$q := \frac{|y - c|}{|x - c|}$$

jelöléssel $0 \leq q < 1$ és

$$|a_n (y - c)^n| = |a_n (x - c)^n| \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel a hatványsorunk x-ben konvergens, ezért

$$\lim (a_n (x - c)^n) = 0,$$

így alkalmas $K \in \mathbb{R}$ számra

$$|a_n (x - c)^n| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen

$$|a_n (y - c)^n| \leq K q^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz
$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(y-c)^n| \leq K \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{K}{1-q} < +\infty.$$
Abban az esetben, ha nincsen ilyen $c \neq x \in \mathbb{R}$, akkor minden $c \neq x \in \mathbb{R}$ esetén a szóban forgó hatványsor divergens x-ben. Így világos, hogy az $R := 0$ eleget tesz **(2)**-nek.

2. lépés. Legyen
$$R := \sup\left\{|x-c| \in \mathbb{R} : \; x \in \mathbb{R}, \; \sum (a_n(x-c)^n) \text{ konvergens}\right\}.$$

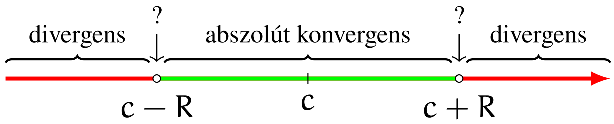
Ha

- $R < +\infty$ és lenne olyan $x \in \mathbb{R}$, $|x-c| > R$, hogy
$$\sum (a_n(t-c)^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$
hatványsor konvergens x-ben, akkor a fentiek miatt bármely
$$y \in \mathbb{R}: \qquad R < |y-c| < |x-c|$$
esetén a hatványsor abszolút konvergens lenne y-ban. Az R definíciója alapján tehát $|y-c| \leq R$, ami ellentmod annak, hogy $R < |y-c|$.
- a fenti R mellett valamely $0 \leq S \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén is igaz a tétel, és $R \neq S$, akkor legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy
$$R < |x-c| < S.$$
Az
$$R < |x-c|$$
egyenlőtlenségből **(2)** alapján az következik, hogy a
$$\sum (a_n(x-c)^n)$$
számsor divergens, az
$$|x-c| < S$$
egyenlőtlenségből pedig **(1)** szerint az, hogy a
$$\sum (a_n(x-c)^n)$$
számsor (abszolút) konvergens. Az nyilván nem lehetséges, így $R = S$.

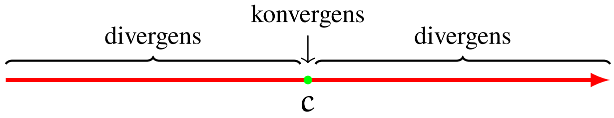
A fenti tételben bevezetett R számot a szóban forgó hatványsor **konvergenciasugar**ának nevezzük.

Tehát

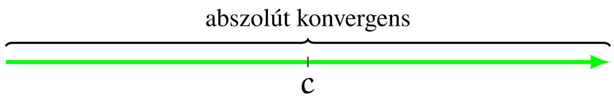
1. **ha** $0 < R < +\infty$, akkor
$$(c-R, c+R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right) \subset [c-R, c+R]:$$



2. **ha** $R = 0$, akkor
$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-c)^n)\right) = \{c\}:$$



3. **ha** $R = +\infty$, akkor
$$\mathrm{KH}\left(\sum a_n(x-c)^n)\right) = \mathbb{R}:$$



A következő tételben (bizonyos (a_n) együtthatósorozatok esetén) ki is számítjuk ezt az R-et.

Tétel [Cauchy-Hadamard]. Legyen $(a_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre
$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$$
teljesül. Ekkor a hatványsor konvergenciasugara
$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\right) \cdot |x-c| = A \cdot |x-c|,$$
ezért

(1) ha $R = 0$, azaz $A = +\infty$, akkor

$$(+\infty) \cdot |x - c| = +\infty > 1 \qquad (c \neq x \in \mathbb{R}),$$

így a

$$\sum (a_n(x-c)^n)$$

számsor csak $x = c$ esetén konvergens.

(2) ha $0 < R < +\infty$, azaz $0 < A < +\infty$, akkor

- az
$$A \cdot |x - c| < 1, \qquad \text{azaz az} \qquad |x - c| < \frac{1}{A} = R$$
esetben a
$$\sum (a_n(x-c)^n)$$
számsor (abszolút) konvergens, ami azt jelenti, hogy
$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n(t-c)^n)\right) \supset (c - R, c + R);$$

- az
$$A \cdot |x - c| > 1, \qquad \text{azaz} \qquad |x - c| > \frac{1}{A} = R$$
esetben a
$$\sum (a_n(x-c)^n)$$
számsor bármely $x \in \mathbb{R}\backslash[c - R, c + R]$ esetén divergens;

(3) ha $R = +\infty$, azaz $A = 0$, akkor

$$0 \cdot |x - c| = 0 < 1,$$

következésképpen a

$$\sum (a_n(x-c)^n)$$

számsor (abszolút) konvergens.

Tétel. Legyen $(a_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olyan sorozat, amelyre

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$$

teljesül. Ekkor $A \geq 0$ és a

$$\sum (a_n(t-c)^n) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugarára:

$$R := \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty \right).$$

Példák.

1. $\mathrm{KH}\left(\sum\left(\frac{x^n}{n}\right)\right) = [-1, 1)$, hiszen

$$c = 0, \qquad A = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right) = 1,$$

így

$$R = 1 \qquad \text{és} \qquad (c - R, c + r) = (-1, 1),$$

továbbá $x = 1$ esetén a $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$ sor divergens, $x = -1$ esetén pedig a $\sum\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ sor konvergens.

2. $\mathrm{KH}\left(\sum (n^n \cdot x^n)\right) = \{0\}$, hiszen

$$c = 0, \qquad A = \lim \left(\sqrt[n]{n^n} \right) = \lim(n) = +\infty,$$

így $R = 0$.

3. $\mathrm{KH}\left(\sum\left(\frac{x^n}{n^n}\right)\right) = \mathbb{R}$, hiszen

$$c = 0, \qquad A = \lim \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} \right) = \lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0,$$

így $R = +\infty$.

Tétel. Tegyük fel, hogy a

$$\sum (a_n(t-c)^n) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \sum (b_n(t-c)^n) \quad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsorok konvergenciasugara

$$R_a \in (0, +\infty], \qquad \text{ill.} \qquad R_b \in (0, +\infty],$$

majd legyen

$$R := \min\{R_a, R_b\},$$

továbbá jelölje f, ill. g az összegfüggvényüket:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad (x \in (c-R_a, c+R_a)),$$

ill.

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \quad (x \in (c-R_b, c+R_b)).$$

Ekkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$, $f+g$ és az $f \cdot g$ függvények felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:

1. $(\lambda \cdot f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)(x-c)^n \quad (x \in (c-R, c+R))$;
2. $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n \quad (x \in (c-R, c+R))$;
3. $(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x-c)^n \quad (x \in (c-R, c+R))$.

Bizonyítás.

1. Bármely $x \in (c-R, c+R)$ esetén

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot a_n(x-c)^n.$$

2. Tetszőleges $x \in (c-R, c+R)$ számra

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n+\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-c)^n.$$

3. Mivel abszolút konvergens sorok Cauchy-sora is abszolút konvergens, és a Cauchy-szorzat összege a két sor összegének szorzata, ezért minden $x \in (c-R, c+R)$ esetén

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n\right)= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a_k(x-c)^k\cdot b_{n-k}(x-c)^{n-k}\right)= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}(x-c)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-c)^n. \end{aligned}$$

Példa. Ha a

$$\sum_{n=0}(a_n x^n) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara: R, összegfüggvénye f, akkor

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+\ldots+a_n)\,x^n \qquad (x\in\mathbb{R}:\ |x|<\min\{1,R\}).$$

hiszen bármely $x \in \mathbb{R}$: $|x| < \min\{1, R\}$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{1-x} &= f(x)\cdot\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k\cdot x^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+\ldots+a_n)\,x^n. \end{aligned}$$

Az alábbiakban az

$$s_n(x):=\sum_{k=0}^{n}\epsilon_k\cdot\frac{x^k}{k!} \qquad (n\in\mathbb{N}_0,\ x\in\mathbb{R})$$

hatványsorokkal foglalkozunk, ahol

$$\epsilon_n \in \{-1, 0, 1\} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Nyilvánvaló, hogy $x = 0$ esetén a hatványsor konvergens:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot \frac{0^n}{n!} = \epsilon_0.$$

Ha pedig $x \neq 0$, akkor a hányadoskritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|}{n+1} \right) = 0.$$

Következésképpen a fenti hatványsor konvergens és összegfüggénye az

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{33}$$

függvény. Az

$$(\epsilon_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat speciális megválasztásával különféle függvényeket értelmezhetünk.

Definíció. A

$$\begin{array}{lclcll}
\exp x & := & \exp(x) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & (x \in \mathbb{R}), \\
\sin x & := & \sin(x) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & (x \in \mathbb{R}), \\
\cos x & := & \cos(x) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & (x \in \mathbb{R}), \\
\operatorname{sh} x & := & \operatorname{sh}(x) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & (x \in \mathbb{R}), \\
\operatorname{ch} x & := & \operatorname{ch}(x) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & (x \in \mathbb{R})
\end{array}$$

függvényeket rendre **exponenciális függvény**nek, **szinuszfüggvény**nek, **koszinuszfüggvény**nek, **szinuszhiperbolikusz-függvény**nek, **koszinuszhiperbolikusz-függvény**nek nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a sin és a sh függvények páratlanok, míg a cos és a ch függvények párosak, azaz bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$1.\ \sin(-x) = -\sin(x),\ \ \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x); \qquad 2.\ \cos(-x) = \cos(x),\ \ \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x),$$

hiszen

1. a sin és a sh függvények hatványsorában az x csak páratlan kitevővel fordul elő, ezért x helyett a $-x$ számot írva, a függvényértékek (-1)-szeresükbe mennek át;

2. a cos és a ch függvények hatványsorában az x csak páros kitevővel fordul elő, ezért x helyébe annak (-1)-szeresét írva e függvények értéke nem változik.

Megjegyzés. A fentiek alapján könnyen belátható, hogy ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{\sin(x)}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \ldots$$

Tétel. Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek.

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
3. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;
4. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$;
5. $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$;
6. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Tétel (az exp függvény néhány tulajdonsága).

1. $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp(x) > 0$.
2. Az exp függvény szigorúan monoton növekedő, azaz bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén igaz az
$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad \exp(x) < \exp(y)$$
implikáció.
3. Bármely $p, q \in \mathbb{N}_0$, $q \geq 2$ számra
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Bizonyítás.

1. Világos, hogy
$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 = 1 \qquad \text{és} \qquad \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$
Az is könnyen belátható, hogy tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots > 1,$$
és így – az $x \in \mathbb{R}$, $y := -x$ szereposztással – a korábbiak következtében
$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x), \qquad \text{azaz} \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0.$$
2. Ha $x, y \in \mathbb{R}$: $x < y$, akkor $0 < y - x$, így
$$1 < \exp(y-x) = \exp(y+(-x)) = \exp(y) \cdot \exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}, \qquad \text{azaz} \qquad \exp(x) < \exp(y).$$

3. Mivel

$$e = \exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}}_{q-\text{szor}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q, \qquad \text{így} \qquad \exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{1/q},$$

következésképpen

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}}_{p-\text{szer}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}.$$

Kézenfelvő tehát, hogy az e szám hatványait tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetén így értelmezzük:

$$e^x := \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A következő állításban összefoglaljuk az exp függvény megismert tulajdonságait.

Tétel [az exp **függvény tulajdonságai].**

1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra

$$e^x := \exp x := \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R});$$

2. $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ és

$$\exp(x) > 0 \; (x \in \mathbb{R});$$

3. **függvényegyenlet**:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad (x \in \mathbb{R});$$

4. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x};$$

5. $\exp \uparrow$.

Tétel [addíciós összefüggések, linearizáló formulák]. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbi állítások.

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y), \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \\
\mathrm{sh}(x \pm y) &= \mathrm{sh}(x) \, \mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{ch}(x) \, \mathrm{sh}(y), \\
\mathrm{ch}(x \pm y) &= \mathrm{ch}(x) \, \mathrm{ch}(y) \pm \mathrm{sh}(x) \, \mathrm{sh}(y), \\
\mathrm{sh}(2x) &= 2 \, \mathrm{sh}(x) \, \mathrm{ch}(x), \\
\mathrm{ch}(2x) &= \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x), \\
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= 1, \\
\mathrm{ch}^2(x) &= \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}, \\
\mathrm{sh}^2(x) &= \frac{\mathrm{ch}(2x) + 1}{2}.
\end{aligned}$$

A gyakorlat anyaga

Feladat. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

1. $\sum \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
2. $\sum \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x+2)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
3. $\sum \left(\frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot x^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
4. $\sum \left(\frac{2^n}{n+3} \cdot (x-3)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
5. $\sum_{n=0} \left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot x^n\right) \quad (\alpha \in (1,+\infty),\ x \in \mathbb{R});$
6. $\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$
7. $\sum_{n=1} \left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Legyen
$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\sqrt[n]{|a_n|} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty),$$
így a hatványsor konvergenciasugara 1: $|x| < 1$ esetén konvergens, $|x| > 1$ esetén divergens. Ha $|x| = 1$, azaz $x = \pm 1$, akkor
$$\pm\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \pm e \neq 0 \quad (n \to \infty)$$
következtében $\sum(\pm a_n)$ divergens, így a hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.

2. Legyen
$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right) = \lim\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \lim\left(\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\right) = 4,$$

így a hatványsor konvergenciasugara 4. Mivel

$$|x+2|<4 \quad\Longleftrightarrow\quad -4<x+2<4 \quad\Longleftrightarrow\quad -6<x<2,$$

ezért a hatványsor $x\in(-6,2)$ esetén konvergens, $x\in\mathbb{R}\backslash[-6,2]$ esetén divergens. Ha $x\in\{-6;2\}$, akkor legyen

$$\xi_n := \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot(\pm 4)^n\right| \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} > 1,$$

így $0\leq\xi_n<\xi_{n+1}$, tehát a $(\xi_n)\notin c_0$ ((ξ_n) nem nullsorozat), következésképpen

$$\mathrm{KH}\left(\sum(a_n x^n)\right) = (-6,2).$$

3. Legyen

$$a_n := \frac{3^n+(-2)^n}{n} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}\right|\right) =$$

$$= \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\right|\right) = 3.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{3}$: $|x|<\frac{1}{3}$ esetén konvergens, $|x|>\frac{1}{3}$ esetén pedig divergens.

$$|x|=\frac{1}{3} \quad\Longleftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{3}.$$

Világos, hogy $x = \frac{1}{3}$ esetén a sor minorálható a $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3n}\right)$ divergens sorral, így maga is divergens, $x = -\frac{1}{3}$ esetén a sor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

konvergens sorok összege, így maga is konvergens. Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum(a_n x^n)\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

4. Legyen

$$a_n := \frac{2^n}{n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n+3}} \longrightarrow 2 \qquad (n \to \infty),$$

ui. az $n \to \infty$ határesetben

$$1 \longleftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+3} \leq \sqrt[n]{n+3n} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1.$$

Így a hatványsor konvergensiasugara $\frac{1}{2}$.

$$|x-3| < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a hatványsor $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\backslash\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha

- $x = \frac{5}{2}$, akkor a

$$\sum\left(\frac{(-1)^n}{n+3}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens;

- $x = \frac{7}{2}$, akkor a

$$\sum\left(\frac{1}{n+3}\right)$$

sor divergens.

Mindez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{KH}\left(\sum (a_n(x-3)^n)\right) = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

5. Legyen

$$a_n := \frac{n!}{\alpha^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot \frac{\alpha^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\right) = \lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right) = +\infty,$$

így a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$, tehát konvergenciahalmaza $\mathbb{R}$.
Megjegyezzük, hogy ha

$$u_n := \frac{n+1}{\alpha^{2n+1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot n\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n + \frac{1}{\alpha^{2n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\lim(u_n) = 0$, így a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index esetén fennálló $u_n > 0$ reláció következtében

$$\lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty.$$

6. Látható, hogy

$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1} \cdot 3^n}{2n-1} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Ha

$$a_n := \frac{2^{n-1} \cdot 3^n}{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot 3^n}{4n-2}} = \frac{6}{\sqrt[n]{4n-2}} \longrightarrow 6 \qquad (n \to \infty),$$

ui. az $n \to \infty$ határesetben

$$1 \longleftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{4n-2} \leq \sqrt[n]{10n} = \sqrt[n]{10} \cdot \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara: $\frac{1}{6}$. Mivel

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6} \iff -\frac{1}{6} < x - \frac{1}{3} < \frac{1}{6} \iff \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = \frac{1}{6}$, akkor a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{(-1)^n}{4n-2}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=1} \left(\frac{1}{4n-2}\right)$$

sor divergens, hiszen

$$\frac{1}{4n-2} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}.$$

Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right)\right) = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

7. Látható, hogy

$$\sum_{n=1} \left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot (3x+1)^n\right) = \sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Ha

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{(n+1)^3 + (n+1) + 1}}{\sqrt{n^3+n+1}} = \frac{\sqrt{n^3+3n^2+4n+3}}{\sqrt{n^3+n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}} \longrightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = 1.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara: 1. Mivel

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x + \frac{1}{3} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ esetén pedig divergens.

Ha $x = -\dfrac{4}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x = \dfrac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor konvergens, ui. a $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sor konvergens majoránsa:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right)\right) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

11. oktatási hét

Az előadás anyaga

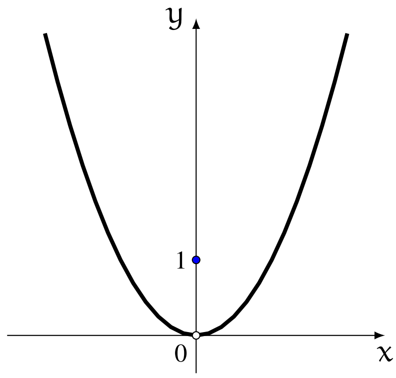
Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valamely $a \in \mathbb{R}$ pontbeli határértékével a függvénynek azt a tulajdonságát fogjuk precíz módon megfogalmazni, hogy ha $x \neq a$ tetszőlegesen közel van a-hoz, akkor az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel vannak valamely A valós számhoz. A szóban forgó tulajdonságot többek között a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

szimbólummal fogjuk jelölni. Az $x \neq a$ feltétel **rendkívül fontos!** Szeretnénk megvizsgálni a függvényértékeket az a-hoz közeli pontokban független attól, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban vagy mennyi ott a függvény értéke.

Példa. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



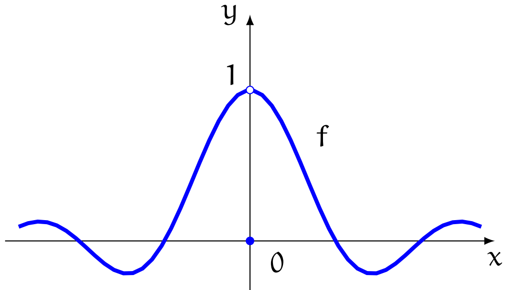
függvényt. A 0-tól különböző pontokban a függvény az x^2 értéket veszi fel, ezért az $a = 0$ pont közelében a függvényértékek tetszőlegesen közel lehetnek a 0-hoz. Ez azt jelenti, hogy hogy

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Azonban $f(0) \neq 0$, azaz a 0 pontban a függvény értéke nem 0.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{\sin(x)}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}).$$



A függvény az $a = 0$ pontban ezzel a képlettel nem értelmezhető. A 0 pont közelében nem tudjuk megállapítani a függvényértékek viselkedését, mert két „nagyon kicsi” szám hányadosáról van szó. Ha a függvényt valamely komputeralgebrai rendszerrel ábrázoljuk, akkor azt látjuk, hogy a szóban forgó függvényértékek 1 közelében vannak. Hamarosan igazolni fogjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

A függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy x értékekre is vizsgálhatjuk, és ekkor legyen $a := +\infty$. Az a tulajdonság, hogy „x tetszőlegesen közel van $a = +\infty$-hez” azt jelenti, hogy „x értéke tetszőlegesen nagy lehet”. Az $a := -\infty$ is lehet, és ekkor a függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív x-ekre vizsgáljuk.

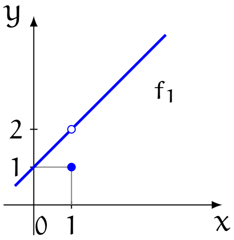
Hasonlóan megengedhetjük azt is, hogy A szintén akár $-\infty$ vagy $+\infty$ is legyen. Például a

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty, \qquad \text{ill. a} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$

tulajdonság azt jelenti, hogy ha $x \neq 2$ elég közel van 2-höz, akkor az $f(x)$ függvényértékek akármilyen nagy értékeket vesznek fel, illetve ha x értéke elég nagy, akkor a $g(x)$ függvényértékek akármilyen nagy abszolút értékű negatív értékeket vesznek fel.

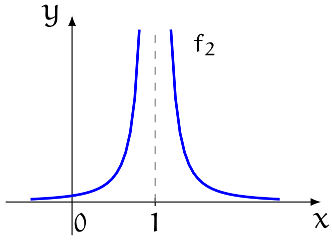
Példa. Legyen $\boxed{a = 1}$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_1(x) := \begin{cases} x+1 & (x \neq 1), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$



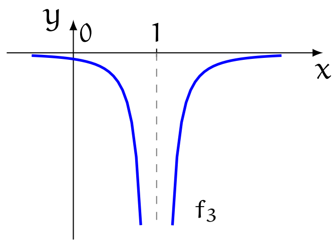
$$\boxed{\lim_{x\to 1} f_1(x) = 2}$$

$$f_2(x) := \frac{1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1).$$



$$\boxed{\lim_{x\to 1} f_2(x) = +\infty}$$

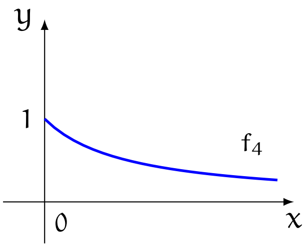
$$f_3(x) := -\frac{1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1).$$



$$\boxed{\lim_{x\to 1} f_3(x) = -\infty}$$

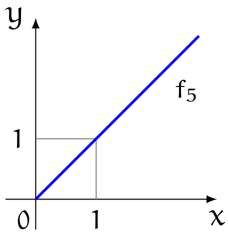
Példa. Legyen most $\boxed{a = +\infty}$, és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_4(x) = \frac{1}{x+1} \quad (x \geq 0).$$



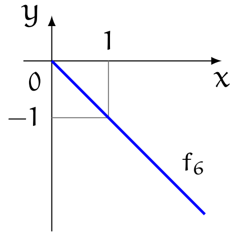
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = 0}$$

$$f_5(x) = x \quad (x \geq 0).$$



$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_5(x) = +\infty}$$

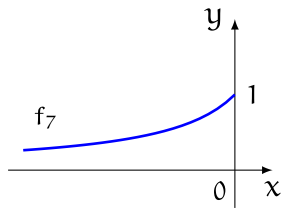
$$f_6(x) = -x \quad (x \geq 0).$$

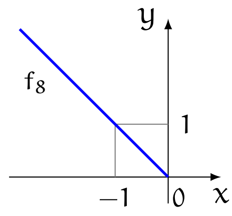


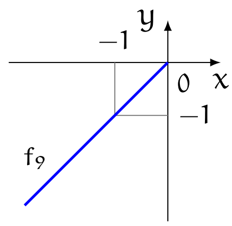
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_6(x) = -\infty}$$

Példa. Végül $\boxed{a = -\infty}$ esetén tekintsük a következő függvényeket:

$$f_7(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \le 0). \qquad f_8(x) = -x \quad (x \le 0). \qquad f_9(x) = x \quad (x \le 0).$$







$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_7(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f_8(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f_9(x) = -\infty}$$

Összefoglalva: függvényhatárértéket az alábbi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontokban vizsgálhatunk:

$$a \in \mathbb{R} \quad (\text{végesben}) \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{matrix} a = +\infty \\ a = -\infty \end{matrix}\right\} \quad (\text{végtelenben}),$$

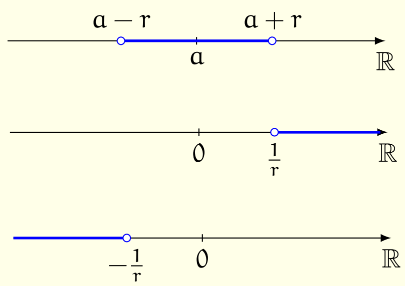
és ekkor az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték lehet:

$$A \in \mathbb{R} \quad (\text{véges}) \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{matrix} A = +\infty \\ A = -\infty \end{matrix}\right\} \quad (\text{végtelen}).$$

Ez összesen 9-féle lehetőséget jelent. Azonban mindegyik mögött ugyanaz az alapgondolat áll. Ezért a sorozatok határértékéhez hasonlóan, környezetek segítségével egységes definíciót fogunk adni a határérték fogalmára.

Emlékeztető. Legyen $0 < r \in \mathbb{R}$. Ekkor valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$ kibővített értelemben vett valós szám **r-sugarú környezet**ének neveztük az alábbi halmazt:

$$K_r(a) := \begin{cases} (a-r, a+r), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\dfrac{1}{r}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$



Célszerű még a

$$\dot{K}_r(a) := K_r(a) \setminus \{a\} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

ún. **pontozott környezet** fogalmát is bevezetni. Ez csak akkor különbözik az eredeti **környezet** fogalmától, ha $a \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$\dot{K}_r(a) := (a - r, a + r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$

Ennek a fogalomnak a bevezetése azért célszerű, mert az a pontbeli függvényhatárérték értelmezéséhez nem szükséges, hogy a függvény értelmezve legyen az a pontban. Ezzel szemben nélkülözhetetlen, hogy a függvény értelmezve legyen az a minden pontozott környezetének legalább az egyik pontjában, mivel az a-hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos a következő fogalom.

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem a $\mathcal{H}$ halmaz

- **torlódási pont**ja (jelben: $a \in \mathcal{H}'$), ha a minden környezetében van $\mathcal{H}$-nak a-tól különböző eleme:

$$\forall r > 0: \qquad \dot{K}_r(a) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset.$$

- **izolált pont**ja, ha nem torlódási pontja $\mathcal{H}$-nak:

$$\exists r > 0: \qquad K_r(a) \cap \mathcal{H} = \{a\}.$$

Megjegyzések.

1. Valamely $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ halmaz, ill. $a \in \mathbb{R}$ esetén igaz az

$$a \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall r > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad 0 < |x - a| < r$$

ekvivalencia.

2. Ha $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$, akkor

- $-\infty$ pontosan abban az esteblen torlódási pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ha $\mathcal{H}$ alulról nem korlátos:

$$-\infty \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha;$$

- $+\infty$ pontosan abban az esteblen torlódási pontja a $\mathcal{H}$ halmaznak, ha $\mathcal{H}$ felülről nem korlátos:

$$+\infty \in \mathcal{H}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > \omega.$$

Példák.

1. $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$;
3. $(0,1)' = [0,1]$;
4. $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$: $\mathcal{H}$ véges $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}' = \emptyset$;
5. $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$ és $\mathbb{Z}' = \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$;
6. Ha az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra, illetve az $A \in \mathbb{R}$ számra $\lim(x_n) = A$, akkor
$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}\}' = \{A\},$$
ui. minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $N \leq n \in \mathbb{N}$, akkor
$$|x_n - A| < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy az előző példákból látható, hogy ha $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{H}'$, akkor lehet, hogy $a \in \mathcal{H}$, de előfordulhat az is, hogy $a \notin \mathcal{H}$.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondtuk, hogy az f függvénynek az a pontban $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, jelben:
$$\lim_a f = A \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \longrightarrow A \quad (x \to a),$$
ha
$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f \qquad \text{esetén} \qquad (x \in K_\delta(a) \backslash \{a\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Megjegyzések.

1. A
$$\lim_a f = A \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A$$
egyenlőség a pontos megfogalmazása annak, hogy „az a-hoz közeli helyeken $f(x)$ az A-hoz van közel”.

2. Függvény határértékét csak a függvény értelmezési tartományának torlódási pontjaiban, azaz az $a \in \mathcal{D}_f'$ halmaz elemeiben értelmeztük. Ekkor $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}_f$ is lehetséges. Ezért a határérték szempontjából érdektelen, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban, és ha igen, akkor ott mi a függvény helyettesítési értéke.

3. Ha $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, azaz f sorozat, akkor $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$ és $\lim_{+\infty} f$ nem más, mint sorozat határértéke:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} (f(n)) = A.$$

4. Pontozott környezetekkel a fenti definíció így is írható

$$\lim_a f = A \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad \left(x \in \dot{K}_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)\right).$$

5. Attól függően, hogy a, illetve A valós szám vagy $\pm\infty$, a

$$\lim_a f = A \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = A$$

egyenlőségre a következő szóhasználatot vezetjük be:

- **végsben vett véges határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$;
- **végsben vett végtelen határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A = \pm\infty$;
- **végtelenben vett véges határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A \in \mathbb{R}$;
- **végtelenben vett végtelenben határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A = \pm\infty$.

(a) **végesben vett véges határérték.** Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \ (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

(b) **végesben vett végtelen határérték:**

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_a f = +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, P > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > P)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. $a \in \mathcal{D}_f' \cap \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_a f = -\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, N < 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

(c) **végtelenben vett véges határérték.**

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, ill. $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{+\infty} f = A \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$, ill. $A \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{-\infty} f = A \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

(d) **végtelenben vett végtelen határérték.**

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, P > 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) > P)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

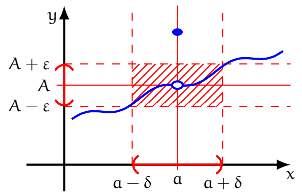
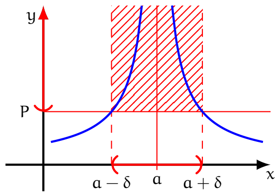
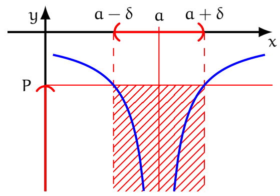
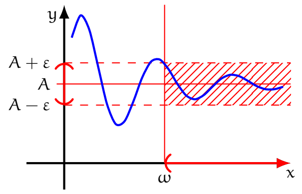
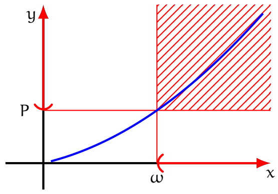
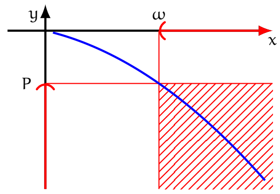
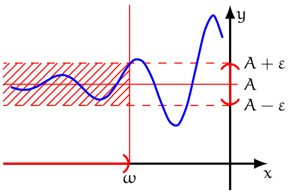
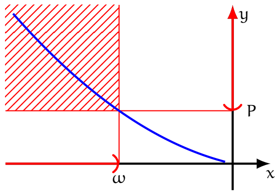
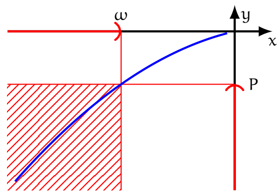
$$\lim_{+\infty} f = -\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, N < 0 \quad \exists\, \omega > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x > \omega \quad \Rightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, P > 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) > P)\,.$$

- Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $-\infty \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall\, N < 0 \quad \exists\, \alpha < 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) < N)\,.$$

<table>
<tr><th>$A = \lim\limits_{a} f$</th><th>$A \in \mathbb{R}$</th><th>$A = +\infty$</th><th>$A = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}$</td>
<td>
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>
$\forall P > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad f(x) > P$</td>
<td>
$\forall N < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta: \quad f(x) < N$</td></tr>
<tr><td>$a = +\infty$</td>
<td>
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega: \quad |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>
$\forall P > 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega: \quad f(x) > P$</td>
<td>
$\forall N < 0\ \exists \omega > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > \omega: \quad f(x) < N$</td></tr>
<tr><td>$a = -\infty$</td>
<td>
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha: \quad |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>
$\forall P > 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha: \quad f(x) > P$</td>
<td>
$\forall N < 0\ \exists \alpha < 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x < \alpha: \quad f(x) < N$</td></tr>
</table>

Tétel. Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ elem eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists \varepsilon > 0\colon K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε-hoz

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A) \qquad \text{és} \qquad \exists \mu > 0\ \forall x \in \dot{K}_\mu(a) \cap \mathcal{D}_f \quad f(x) \in K_\varepsilon(B).$$

Legyen $\Delta := \min\{\delta,\ \mu\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\Delta(a) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset, \qquad \text{de } \dot{K}_\Delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset,\ \text{mert } a \in \mathcal{D}_f'.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}$;
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

Útm.

1. Legyen
$$f(x):=\sqrt{2x+5}\qquad(-5/2\le x\in\mathbb{R}),$$
így $2\in\mathcal{D}'_f$. Látható, hogy „ha x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\sqrt{9}=3$-hoz". Sejtés: $\lim\limits_2 f=3$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ adott. Ekkor tetszőleges $x\in\mathcal{D}_f$ esetén
$$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+5}-3\right|\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3}\le$$
$$\le\frac{2}{3}\cdot|x-2|<\varepsilon\quad\Longleftrightarrow\quad|x-2|<\frac{3\varepsilon}{2}.$$
Így a
$$\delta:=\frac{3\varepsilon}{2}$$
választás megfelelő.

2. Legyen
$$f(x):=\frac{1}{1+x}\qquad(-1\neq x\in\mathbb{R}),$$
így $0\in\mathcal{D}'_f$. Látható, hogy ha „x közel van 0-hoz, akkor $f(x)$ közel van 1-hez". Így sejthető, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1.$$
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x\in\mathcal{D}_f$ számra
$$|f(x)-1|=\left|\frac{1}{1+x}-1\right|=\left|\frac{-x}{1+x}\right|=\frac{1}{|1+x|}\cdot|x-0|.$$

Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |1 + x|$, így

$$|f(x) - 1| < 2|x| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

3. Legyen
$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$, hiszen $\mathcal{D}_f$ sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor
$$f(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2+1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}}, \qquad \text{így sejthető, hogy} \qquad \lim_{\pm\infty} f = \frac{1}{2}.$$
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra
$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-3|}{4x^2 + 2} = \frac{3}{4x^2 + 2} < \frac{3}{4x^2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{3}{4\varepsilon}.$$
Tehát az
$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}$$
választás megfelelő.

4. Legyen
$$f(x) := \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1; 2\}),$$
így $1 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ számra
$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{(x + 1)(x^2 + 3)}{x - 2} = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x - 2},$$
ezért „ha x közel van 1-hez, akkor $f(x)$ közel van (-8)-hoz”. Sejtés: $\lim_{1} f = -8$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x) - (-8)| = \left|\frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x-2} + 8\right| = \left|\frac{x^3 + x^2 + 11x - 13}{x-2}\right| =$$

$$= \frac{|x^2 + 2x + 13|}{|x-2|} \cdot |x-1|.$$

Megjegyzés. A harmadik egyenlőség a Horner-módszer következménye (vö. (vö. Matematikai alapozás, 7-10. oldal)):

	1	1	11	-13
1	1	2	13	0

Könnyen belátható (**HF**), hogy ha

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \iff -\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2},$$

akkor

$$|x-2| = 2 - x > \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad |x| < \frac{3}{2}.$$

Következésképpen

$$\frac{|x^2 + 2x + 13|}{|x-2|} \le \frac{|x|^2 + 2|x| + 13}{1/2} < \frac{(3/2)^2 + 2 \cdot (3/2) + 13}{\frac{1}{2}} = \frac{47}{2} < 24.$$

Innen már látható, hogy a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{24}\right\}$ választás megfelelő.

Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

határérték-reláció!

Útm. Legyen

$$f(x) := \sqrt[n]{x} \qquad (x \in [0, +\infty)).$$

Így $a \in \mathcal{D}_f'$ és két eset van:

- $a > 0$: legyen $\varepsilon > 0$ adott és $\delta := \min\left\{a, \varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\right\}$. Ekkor minden $0 < |x-a| < \delta$ valós számra

$$\left|f(x) - \sqrt[n]{a}\right| = \left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| \overset{(4)}{=} \frac{|x-a|}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{x^{n-k}a^{k-1}}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}} \leq a), \\[3ex] \dfrac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \varepsilon & (\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}} > a), \end{cases}$$

  tehát $\lim\limits_{a} f = \sqrt[n]{a}$.

- $a = 0$: tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a} f \neq \sqrt[n]{a}$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ (így pl. $\delta := \varepsilon^n$) esetén $\exists x \in (0, \delta)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $\exists x \in (0, \varepsilon^n)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $x \geq \varepsilon^n$, ami nem igaz.

A következő tétel azt állítja, hogy a függvényhatárérték sorozatok határértékével jellemezhető.

Tétel [határértékre vonatkozó átviteli elv]. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor

$$\lim_a f = A \quad \iff \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to+\infty}(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = A.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ha $\lim\limits_{a} f = A$, akkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad \big(x \in \dot{K}_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)\big)$$

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített szám. Ekkor igaz a

$$\lim(x_n) = a \quad \Longrightarrow \quad \delta\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N},\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}\colon x_n \in K_\delta(a)$$

implikáció. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $(x_n) \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, ezért $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n \geq N$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $(f(x_n))$ sorozatnak van határértéke és $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n)) = A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to+\infty}(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x_\delta \in \mathcal{D}_f : \quad \big(x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \quad \wedge \quad f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A)\big)\,.$$

A

$$\delta := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

választással azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in \mathcal{D}_f : \quad \big(x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \quad \wedge \quad f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)\big)\,.$$

Az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a-hoz tart (hiszen $x_n \in K_{1/n}(a)$), de a függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata nem tart A-hoz (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$), ami ellentmond a feltételünknek.

Tétel. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény, akkor nem léteznek az $\lim_{\pm\infty} f$ határértékek.

Bizonyítás. Ha f nem állandó függvény, akkor van olyan $a, b \in \mathcal{D}_f$, hogy $f(a) \neq f(b)$. Ha f még periodikus is, akkor van olyan $p \in (0, +\infty)$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \pm np, b \pm np \in \mathcal{D}_f$, továbbá

$$f(a \pm np) = f(a), \quad f(b \pm np) = f(b) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen

$$x_n := a \pm np, \quad y_n := b \pm np \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \pm\infty, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = f(a) \neq f(b) = \lim(f(y_n)).$$

A fenti tétel következtében pl.

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{tg}(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{ctg}(x).$$

A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó közrefogási elv közvetlen következménye az alábbi tételben megfogalmazott állítás.

Tétel [Sandwich-tétel]. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{H}'$ és

$$\exists K(a)\ \forall x \in \dot{K}(a) \cap \mathcal{H} : \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Ha

$$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a g \quad \text{és} \quad \lim_a f = \lim_a g = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor

$$\exists \lim_a h \quad \text{és} \quad \lim_a h = A.$$

A sorozatoknál láttuk, hogy a három algebrai művelet és a határérték képzés sorrendje a „legtöbb esetben” felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy ez igaz függvényhatárértékre is.

Tétel. Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_a f =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \exists \lim_a g =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. $\exists \lim_a (f+g)$ és $\lim_a (f+g) = A + B$, ha az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van;
2. $\exists \lim_a (fg)$ és $\lim_a (fg) = AB$, ha az $AB \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van;
3. $\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right)$ és $\lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$, ha az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

Bizonyítás. A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó analóg állítás közvetlen következménye.

Megjegyzés. Kritikus határertekek vizsgálata. Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben” alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára fentebb megfogalmazott állításokat. Ezek az eredmenyek akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli

$$A \pm B; \qquad AB; \qquad \frac{A}{B}$$

műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs ertelmezve, akkor a megfelelő függvenyek határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a kritikus határertekeket röviden a

$$(+/-\infty)+/-(+/-\infty), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{1}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert” követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon” (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékre átalakítani.

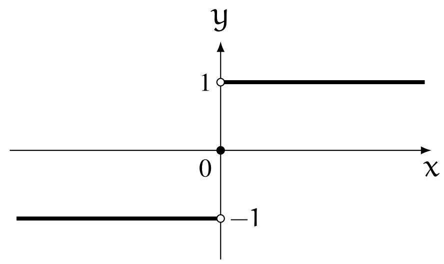
Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor a

$$\dot{K}_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a) \cup (a, +\infty)$$

pontozott környezetnek van egy $(a-\varepsilon, a)$ bal oldali és egy $(a, +\infty)$ jobb oldali része. Előfordulhat, hogy az f függvénynek nincs határértéke az a pontban, de ha leszűkítjük a függvényt a pont bal vagy jobb oldali környezetére, akkor az így kapott függvénynek már van határértéke az a pontban.

Példa. A szignumfüggvény esetében a

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$$



$f(x) = \operatorname{sgn} x$

határérték nem létezik. Ennek az az oka, hogy tetszőleges, pozitív tagból álló, 0-hoztartó (x_n) sorozat esetén minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\operatorname{sgn}(x_n) = 1$; ugyanakkor minden, negatív tagból álló, 0-hoztartó (x_n) sorozat esetén minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $\operatorname{sgn}(x_n) = -1$. Megadható tehát két 0-hoz tartó sorozat, amelynek képsorozatainak határértéke nem egyenlő, és így az átviteli elv szerint a határérték nem létezik a 0 pontban. Azonban más a helyzet, ha a szignum függvény 0 pont köröli viselkedését csak a bal vagy jobb oldali környezetében vizsgáljuk. Világos, hogy

$$f_b := \operatorname{sgn}|_{(-\infty,0)} \equiv -1 \qquad \text{és} \qquad f_j := \operatorname{sgn}|_{(0,+\infty)} \equiv 1.$$

Ebből nem nehéz igazolni, hogy

$$\exists \lim_{x\to 0} f_b(x) = -1 \qquad \text{és} \qquad \exists \lim_{x\to 0} f_j(x) = 1.$$

Az előző gondolatmenet alkalmazható bármilyen (valós) halmazon értelmezett f függvényre. Ha $a \in \mathcal{D}_f'$, akkor a torlódási pontja a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)$ vagy a $\mathcal{D}_f \cap (a, \infty)$ halmaznak (vagy mindkettőnek). Ekkor azt mondjuk, hogy a **bal** vagy **jobb oldali torlódási pontja** $\mathcal{D}_f$-nek. Most is vizsgálhatjuk az

$$f_b := f|_{\mathcal{D}_f \cap(-\infty,a)} \qquad \text{vagy} \qquad f_j := f|_{\mathcal{D}_f \cap(a,+\infty)}$$

függvények határértékei az a pontban, de célszerűbb ehhez egy külön jelölést bevezetni.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a - \delta, a)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van **bal oldali határértéke**, jelben

$$\exists \lim_{a-0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a-0} f(x), \qquad \exists f(a-0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a-\delta, a))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a - \delta < x < a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A))\,.$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a, a + \delta)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van **jobb oldali határértéke**, jelben

$$\exists \lim_{a+0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \exists f(a+0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a, a+\delta))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a < x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A))\,.$$

Megjegyzés. A definíciókból könnyen látható, hogy

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f_b(x) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f_j(x),$$

ahol

$$f_b := f|_{\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)} \qquad \text{és} \qquad f_j := f|_{\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)}.$$

Ez azt jelenti, hogy egy függvény pontbeli bal és jobb oldali határértéke speciális függvények pontbeli határértéke. Ezért az új határértékre is alkalmazhatók a tanult alaptételeket a megfelelő módosításokkal. Például az átviteli elv alapján

$$\lim_{a+0} f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty),\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A.$$

Példák.

1. $\lim\limits_{0\pm 0} \operatorname{sgn} = \pm 1.$

2. Ha
$$f(x) := [x] \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén
$$\lim_{m-0} f = m - 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{m+0} f = m.$$

3. Ha
$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
akkor minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén
$$\lim_{m-0} f = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{m+0} f = 0.$$

4. Ha
$$f(x) := \frac{1}{x} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R}),$$
akkor
$$\lim_{0-0} f = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{0+0} f = +\infty.$$

5. Legyen
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x - 1 & (x < 1), \\ x^2 - x & (x \geq 1). \end{cases}$$
Ekkor
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 0,$$
így
$$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = 0.$$

A definíciókból könnyen igazolható az alábbi tételbeli állítás.

Tétel. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor
$$\exists \lim_{a} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\exists \lim_{a \pm 0} f \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \right)$$

Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$[x] := \max\{m \in \mathbb{Z} : \ m \leq x\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egészrész-függvényre

$$\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

teljesül.[15] Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x - 1 < [x] \leq x,$$

ezért minden $0 \neq x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$

Ha

- $x \in (-\infty, 0)$, akkor

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) > x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \geq x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

  A Sandwich-tétel értelmében létezik a bal oldali haártérték, és

$$\lim_{x \to 0-0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

- $x \in (0, +\infty)$, akkor

$$1 - x = x\left(\frac{1}{x} - 1\right) < x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

  A Sandwich-tétel értelmében létezik a jobb oldali határérték, és

$$\lim_{x \to 0+0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

Mindez azt jelenti, hogy létezik 0-ban a határérték, és

$$\lim_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1. \quad \blacksquare$$

[15] Pál Jenő megoldása.

Tétel [hatványsor összegfüggvényének a határértéke]. Ha a

$$\sum \left(a_n(x-c)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara R és

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (x \in K_R(c)),$$

akor bármely $b \in K_R(c)$ esetén

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-c)^n.$$

Bizonyítás.

1. lépés. Először megmutatjuk, hogy igaz az

$$(*) \qquad r \in (0, R) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{a } \sum_{n=1} \left(n a_n r^{n-1}\right) \quad \text{sor abszolút konvergens}$$

implikáció. Legyen $\rho \in (r, R)$. Ekkor $c+\rho \in (c-R, c+R)$, ami a $\sum\left(\alpha_n(x-c)^n\right)$ hatványsor konvergenciahalmazának belseje, azaz a hatványsor konvergens az $x = c+\rho$ pontban. Ezért az $x - c = \rho$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy a $\sum\left(a_n\rho^n\right)$ sor konvergens, és így $\lim(a_n\rho^n) = 0$. Következésképpen az $(a_n\rho^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n\rho^n| \le M.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|a_n| \le \frac{M}{\rho^n}, \qquad \text{így} \qquad \left|n a_n r^{n-1}\right| = \frac{1}{r} n |a_n| r^n \le \frac{M}{r} n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = Anq^n,$$

ahol

$$A := \frac{M}{r} \qquad \text{és} \qquad q := \frac{r}{\rho} < 1.$$

A gyökkritérium következtében

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Anq^n} = q < 1 \qquad \text{azaz} \qquad \text{a } \sum_{n=1} \left(Anq^n\right) \quad \text{sor konvergens.}$$

Így a majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1} \left(na_n r^{n-1}\right)$ sor abszolút konvergens, azaz igaz a $(*)$ állítás.

2. lépés. Tekintsünk most egy tetszőleges $b \in K_R(c)$ pontot. Válasszuk meg r-et úgy, hogy igaz legyen a

$$0 \leq |b-c| < r < R \qquad \Longrightarrow \qquad b \in K_r(c)$$

implikáció. Legyen

$$C := \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|r^{n-1} < +\infty,$$

hiszen $(*)$ miatt a fenti sor konvergens. Ekkor minden $x \in K_r(c)$ esetén igazak a következő becslések:

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(b)| = \\
&= \quad \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(b-c)^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\left((x-c)^n-(b-c)^n\right)\right| \leq \\
&\leq \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left((x-c)^n-(b-c)^n\right)\right| \leq \\
&\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x-b| \cdot \left(|x-c|^{n-1} + |x-c|^{n-2}\cdot|b-c| + \cdots + |b-c|^{n-1}\right) \leq \\
&\overset{|x-c|<r,\, |b-c|<r}{\leq} \quad |x-b| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} = C \cdot |x-b|.
\end{aligned}$$

Így

$$0 \leq \left|f(x)-f(b)\right| \leq C\cdot|x-b| \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

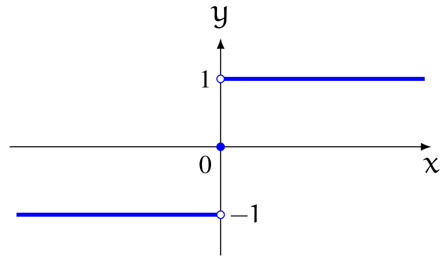
A függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv alapján tehát

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b).$$

Nevezetes határértékek

1. Az előjelfüggvény (vagy szignumfüggvény) határértéke a 0 pontban.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & (x \in (0, +\infty)), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x \in (-\infty, 0)). \end{cases}$$



szignumfüggvény

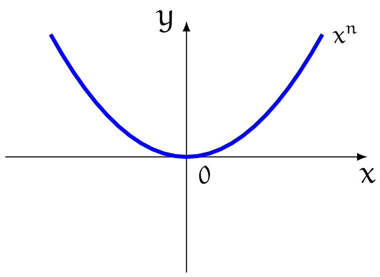
Már igazoltuk, hogy

$$\lim_{0-0} \operatorname{sgn} = -1, \ \lim_{0+0} \operatorname{sgn} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{0} \operatorname{sgn}.$$

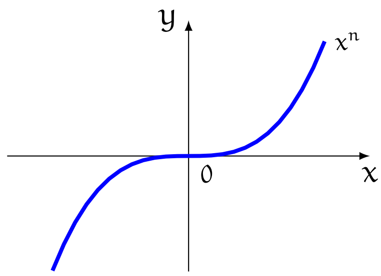
2. Hatványfüggvények határértéke.

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N})$$

n páros



n páratlan



Mivel

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}},$$

ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.
A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatáról szóló álításokból következnek az alábbi állítások:

2. (a)
$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \qquad (a \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N}).$$

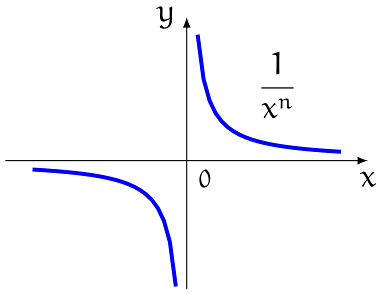
2. (b)
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. (c)
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})), \\ -\infty & (n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}_0)). \end{cases}$$

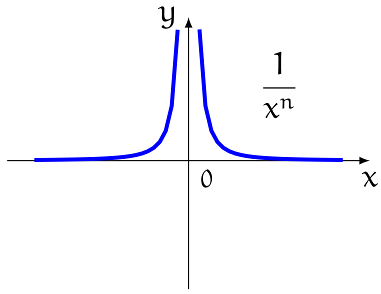
3. Reciprokfüggvények határértéke.

$$f(x) := \frac{1}{x^n} \qquad (0 \neq x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

n páratlan



n páros



Mivel

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}_f' = (\mathbb{R} \setminus \{0\})' = \overline{\mathbb{R}},$$

ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.
A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatáról szóló állításokból következnek az alábbi állítások:

3. (a)
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n} \qquad (0 \neq a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})\,.$$

3. (b)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az átviteli elvvel igazolható, hogy

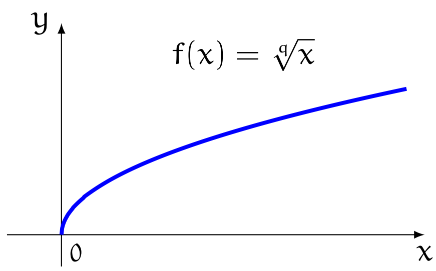
3. (c)
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} = +\infty & (n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})), \\ \nexists & (n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}_0)). \end{cases}$$

Ha n páratlan, akkor

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty, \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

4. Gyökfüggvények határértéke.

$$f(x) := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \qquad (x \in [0, +\infty),\ q \in \mathbb{N})\,.$$



Mivel $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$, ezért $\mathcal{D}_f' = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:

4. (a)
$$\lim_{x\to a} \sqrt[q]{x} = \sqrt[q]{a} \qquad (a \in [0, +\infty),\ q \in \mathbb{N})$$

4. (b)
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty \qquad (q \in \mathbb{N})$$

5. Polinomok határértéke.

Tétel. Legyen $r \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$: $a_r \neq 0$. Ekkor a

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom határértékéről a következők állíthatók.

1. Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{\alpha} p = p(\alpha)$;
2. $\lim\limits_{+\infty} p = \operatorname{sgn}(a_r)(+\infty)$;
3. $\lim\limits_{-\infty} p = (-1)^r \operatorname{sgn}(a_r)(+\infty)$.

Bizonyítás.

1. Mivel bármely $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $r \in \mathbb{N}_0$ esetén $\lim\limits_{x\to\alpha} x^r = \alpha^r$, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel következményeként

$$\lim_{\alpha} p = \lim_{x\to\alpha} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_r\alpha^r = p(\alpha).$$

2. Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = x^r \cdot \left(\frac{a_0}{x^r} + \frac{a_1}{x^{r-1}} + \ldots + a_r\right),$$

továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty \quad (r \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért az állítás a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján nyilvánvaló.

3. Az előbbihez hasonlóan igazolható.

Megjegyzések.

1. Mivel
$$\mathcal{D}_p = \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{D}_p' = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}},$$
ezért a határértéket tetszőleges $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgáltuk.

2. A fenti feladatban az utolsó két állítás azat jelenti, hogy polinomok „viselkedését” a $\pm$ végtelen környezetében a polinom a_r főegyütthatója és r fokszámának paritása határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik az $a_r x^r$ főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

3. Világos (vö. Tétel), hogy
$$\begin{aligned}\lim_{-\infty} p &= \lim_{x\to+\infty} p(-x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{r} a_k(-x)^k = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k a_k x^k = \operatorname{sgn}((-1)^r a_r)(+\infty) = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_r)(+\infty).\end{aligned}$$

Példák.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+2x+7) = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x+2) = -\infty$

6. Racionális függvények

Tétel. Legyen $p, q \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$: $a_p b_q \neq 0$ és
$$\mathcal{H} := \{\xi \in \mathbb{R} : \; b_0 + b_1\xi + \ldots + b_p\xi^p = 0\}.$$
Ekkor az
$$R(x) := \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_px^p}{b_0 + b_1x + \ldots + b_qx^q} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H})$$
racionális függvény esetében, ha $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$, úgy $\lim\limits_{\alpha} R = R(\alpha)$, továbbá
$$\lim_{+\infty} R = \begin{cases} 0 & (p<q), \\ \dfrac{a_p}{b_q} = \dfrac{a_p}{b_p} & (p=q), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_p}{b_q}\right)(+\infty) & (p>q), \end{cases} \quad \text{és} \quad \lim_{-\infty} R = \begin{cases} 0 & (p<q) \\ \dfrac{a_p}{b_q} = \dfrac{a_p}{b_p} & (p=q), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_p}{b_q}\right)(-1)^{p-q}(+\infty) & (p>q). \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$ esetén

$$R(x) = x^{p-q} \cdot \frac{\frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \ldots + a_p}{\frac{b_0}{x^q} + \frac{b_1}{x^{q-1}} + \ldots + b_q},$$

ezért $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$ esetén a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{\alpha} R = \lim_{x\to\alpha} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_q x^q} = \frac{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_p\alpha^p}{b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_q\alpha^q} = R(\alpha).$$

Igaz továbbá, hogy

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \ldots + a_p}{\frac{b_0}{x^q} + \frac{b_1}{x^{q-1}} + \ldots + b_q} = \frac{a_p}{b_q},$$

ill.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p-q} = \begin{cases} 0 & (p < q), \\ 1 & (p = q), \\ +\infty & (p > q), \end{cases}$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} x^{p-q} = \begin{cases} 0 & (p < q) \\ 1 & (p = q), \\ (-1)^{p-q}(+\infty) & (p > q), \end{cases}$$

ezért az állítás nyilvánvaló.

Példák. A fentiek alapján világos, hogy

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = 1;$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 7x^2 + 5x - 1} = 0;$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 23}{-3x^3 - 5x^2 + 31x + 1} = -\frac{2}{3};$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 11x + 2}{x^2 + 3x + 2} = +\infty.$

7. Az exp, a sin és a cos függvény végesben vett határértéke.
Az exp, a sin, a cos, z sh és a ch függvényt hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük. Ezért az előző tétel szerint a függvényeknek minden $a \in \mathbb{R}$ pontban van határértéke, és azok egyenlők az a-ban vett

helyettesítési értékekkel:

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a, \quad \lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a), \quad \lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a), \quad \lim_{x\to a} \mathrm{sh}(x) = \mathrm{sh}(a), \quad \lim_{x\to a} \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(a).$$

8. Az exp függvény határértéke $(\pm\infty)$-ben.

Mivel

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots > x \qquad (x \geq 0)$$

és $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, ezért

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, ezért (vö. Tétel)

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \big(\text{az } y = -x \text{ helyettesítéssel}\big) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Így

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

9. Az $\mathbb{R}\backslash\{0\} \ni x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ határértéke a 0 pontban.

Tétel. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $0 \notin \mathcal{R}_f$, ill. $\lim\limits_a f = 0$, akkor fennáll a

$$\lim_a \frac{\sin \circ f}{f} = 1$$

határérték-reláció.

Bizonyítás. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^5 \cdot \varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)!},$$

így

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+5)!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$|\varphi(x)| < 1 \quad (|x| < 1),$$

ui. a teljes indukcióval könnyen belátható

$$n! > 2^n \qquad (4 \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség következtében tertszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+5)!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n+5)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+5}} =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{24} < 1.$$

A fentiek alapján bármely $a \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\left(\frac{\sin \circ f}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \left(f(x) - \frac{f^3(x)}{6} + f^5(x) \cdot \varphi(f(x))\right).$$

Mivel $\lim_a f = 0$, ezért az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x \in (K_\delta(a) \backslash \{a\}) \cap \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)| = |f(x) - 0| < 1, \qquad \text{azaz} \qquad |\varphi(f(x))| < 1.$$

Így

$$\lim_a \frac{\sin \circ f}{f} = \lim_{x \to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 - \frac{(0)^2}{6} + 0 = 1.$$

A gyakorlat anyaga

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Útm.

1. Megmutatjuk, hogy
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

1. módszer. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x\longrightarrow 0$ határátmenetben

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=$$

$$=\frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\longrightarrow 1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

2. módszer. A cos függvény definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

3. módszer. Mivel tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$1-\cos(x)=1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

2. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0.$$

1. módszer. A törtet bővítve azt kapjuk, hogy az $x\to 0$ határátmenetben

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)}=-\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)+1}=$$

$$=(-\sin(x))\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\longrightarrow 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0.$$

2. módszer. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=-\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x\longrightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0=0\qquad(x\to 0).$$

3. módszer. A cos függvény definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}=0.$$

Megjegyezzük, hogy a későbbiek szempontjából is igen hasznos az alábbi (ún. **linearizáló**) **formulák** ismerete:

$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2},\qquad\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}\qquad(x\in\mathbb{R}),$$

ill.

$$\mathrm{sh}^2(x)=\frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2},\qquad\mathrm{ch}^2(x)=\frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

3. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

1. módszer. Az exponenciális függvényre vonatkozó elemi ismeretek felhasználásával adódik, hogy tetszőleges $0\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{e^x-1}{x}-1=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}-1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\longrightarrow 0\qquad (x\to 0),$$

2. módszer. Ha $0<|x|<1$, akkor

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right|=\left|x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!}\right|<|x|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=|x|\cdot(e-2),$$

ahonnan ismét

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)=0,\qquad \text{azaz}\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$$

következik.

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik!

1. $f(x) := c \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R})$;
2. $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R};\ a := 0)$;
3. $f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};\ a \in \mathbb{R})$;
4. $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (0 \neq x \in \mathbb{R};\ 0 \neq a \in \mathbb{R})$;
5. $f(x) := \sqrt{x} \quad (0 \leq x \in \mathbb{R};\ 0 < a \in \mathbb{R})$;
6. $f(x) := \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R})$;
7. $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R})$;
8. $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R};\ a := 0)$;
9. $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\};\ a := -1)$;
10. $f(x) := \begin{cases} x^4\left(\sqrt{2}+\sin(1/x)\right) & (0 \neq x \in \mathbb{R}), \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad (a := 0)$;
11. $f(x) := x + (x-1)\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right) \quad (0 < x \in \mathbb{R};\ a := 1)$.

Útm.

1. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{c-c}{x-a} = 0 \longrightarrow 0 \qquad (x \to a).$$

2. Ha $a := 0$, akkor bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \mathrm{sgn}(x) \longrightarrow \pm 1 \qquad (x \to 0 \pm 0).$$

3. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a} =$$

$$= x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}) \longrightarrow na^{n-1} \quad (x \to a).$$

4. Ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = -\frac{1}{xa} \longrightarrow -\frac{1}{a^2} \quad (x \to a).$$

5. Ha $0 < a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{a\}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (x \to a).$$

6. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} \stackrel{h:=x-a}{=} \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h} =$$

$$= \cos(a)\cdot\frac{\sin(h)}{h} + \sin(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} \longrightarrow \cos(a)\cdot 1 + \sin(a)\cdot 0 \quad (h \to 0),$$

következésképpen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \cos(a).$$

7. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor bármely $a \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{e^x - e^a}{x-a} = e^a \cdot \frac{e^{x-a}-1}{x-a} \stackrel{h:=x-a}{=} e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^a \cdot 1 = e^a \quad (h \to 0),$$

következésképpen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = e^a.$$

8. Ha $a := 0$, akkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \longrightarrow \pm\infty \quad (x \to 0 \pm 0)\,,$$

9. Ha $a := -1$, akkor tetszőleges $-1 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{\dfrac{x+2}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{8}}{x + 1} = \frac{x^2 + 8x + 7}{8(x+1)(x^2 - 9)} = \frac{(x+1)(x+7)}{(8x+8)(x^2 - 9)} =$$

$$= \frac{x + 7}{8(x^2 - 9)} \longrightarrow \frac{6}{-64} = -\frac{3}{32} \qquad (x \to -1).$$

10. Ha $a := 0$, akkor tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^3 \left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0),$$

ui. a

$$\mathcal{D}_f \ni x \mapsto \sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

függvény korlátos és

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0.$$

11. Ha $a := 1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) \longrightarrow 1 + \frac{\pi}{4} \quad (x \to 1) \qquad \Big/ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big/ .$$

12. oktatási hét

Az előadás anyaga

Tétel [monoton függvény határértéke]. Legyen $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α, β)-n, akkor f-nek minden $a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek, pontosabban

a) ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x > a\} \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x < a\},$$

b) ha $f \searrow (\alpha, \beta)$-n, akkor

$$\lim_{a+0} f = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x > a\} \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x < a\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk. Legyen

$$m := \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x > a\}.$$

Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

i) tetszőleges $x \in (\alpha, \beta), \ x > a$ esetén $m \leq f(x)$,

ii) bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x_1 \in (\alpha, \beta), \ x_1 > a$, hogy $f(x_1) < m + \varepsilon$.

Így

$$m \leq f(x_1) \leq m + \varepsilon.$$

Mivel $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, ezért

$$m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \varepsilon \qquad (x \in (a, x_1)).$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \ a < x < a + \delta \colon \ \underbrace{0 \leq f(x) - m < \varepsilon}_{f(x) \in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és az m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in (\alpha, \beta), \ x > a\}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható.

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekedő. Ha

- $+\infty \in \mathcal{D}_f'$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ határérték, és
$$\lim_{x\to+\infty} f = \sup \mathcal{R}_f.$$
- $-\infty \in \mathcal{D}_f'$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to-\infty} f$ határérték, és
$$\lim_{x\to-\infty} f = \inf \mathcal{R}_f.$$

A „folytonos” kifejezést a mindennapi életben is gyakran használjuk. A folytonosságról alkotott intuitív képünk alapján pl. egy intervallumon értelmezett valós értékű függvényt akkor célszerű folytonosnak nevezni, ha a függvény grafikonját az íróeszköz felemelése nélkül meg tudjuk rajzolni. A továbbiakban arról lesz szó, hogy valós-valós függvényekre a szemléletünk alapján adódó ezzel kapcsolatos tulajdonságot hogyan lehet matematikai szempontból precíz formában megfogalmazni. Első lépésként azonban a pontbeli folytonosság fogalmát kell megismerni.

Tegyük fel, hogy egy képlettel megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény helyettesítési értékét akarjuk kiszámítani egy adott $a \in \mathcal{D}_f$ pontban. Előfordulhat, hogy a-nak csak közelítő értékeivel számolhatunk. Ez a helyzet például akkor, ha a értékeit mérés segítségével határozzuk meg, tehát a-nak csak a műszerek pontosságától függően jobb vagy rosszabb x közelítő értékeit ismerjük. A mért x értékből kiszámítva $f(x)$-et azt reméljük, hogy ha a-t jó közelítéssel, vagyis kis hibával adtuk meg, akkor $f(a)$ értékét is jó közelítéssel fogjuk megkapni $f(x)$-ből. Ilyenkor feltételezzük azt, hogy ha a mérési adatok kevéssel térnek el a tényleges értéktől, akkor a mérési adatokból számított érték is csak kevéssé tér el a ténylegestől. Ezekben az esetekben tehát adva van egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, és feltételezzük, hogy $f(x)$ közel lesz $f(a)$-hoz, feltéve, hogy x elég kevéssé tér el a-tól. Valós-valós függvénynek ezt a tulajdonságát nevezzük pontbeli folytonosságnak.

Definíció. Azt mondtuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $f \in \mathfrak{C}[a]$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \qquad (|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \,.$$

Megjegyezzük, hogy

- a pontbeli folytonosságot csak értelmezési tartománybeli pontokban értelmeztük. Ezért csak ilyen pontokban lehet vizsgálni a folytonosságot.
- ha f az **állandófüggvény**, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$, ui. tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz minden $\delta > 0$ jó választás.
- a folytonosság definíciójából rögtön következik, hogy ha a izolált pontja az f függvény értelmezési tartományának, azaz alkalmas $r > 0$ szám esetén

$$K_r(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\},$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett a $\delta := r$ megfelelő választás.

Feladat. A definíció alapján mutassuk meg, hogy folytonosak az alábbi függvények!

1. $f(x) := |x^2 - 4| \quad (x \in [-3, 5]);$ 2. $f(x) := x^2 + 2x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Útm.

1. Legyen $a \in [-3, 5]$, $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor bármely $x \in [-3, 5]$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left||x^2 - 4| - |a^2 - 4|\right| \leq \left|(x^2 - 4) - (a^2 - 4)\right| = \left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot |x - a| \leq \\ &\leq (|x| + |a|) \cdot |x - a| \leq 10 \cdot |x - a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x - a| < \varepsilon/10. \end{aligned}$$

Ha tehát $\delta := \dfrac{\varepsilon}{10}$, akkor bármely $x \in [-3, 5]$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ adott. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 + 2x - 3 - (a^2 + 2a - 3)| = |x^2 - a^2 + 2x - 2a| = \\ &= |x + a + 2| \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

Ha $x \in (a - 1, a + 1)$, akkor

$$|x + a + 2| = |x - a + 2a + 2| \leq |x - a| + |2a| + 2 \leq 2|a| + 3,$$

így
$$|f(x) - f(a)| \leq (2|a| + 3) \cdot |x - a| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - a| < \varepsilon/(2|a| + 3).$$
A
$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|a| + 3}\right\}$$
választás tehát megfelelő, azaz tetszőleges $x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Tétel [Előjeltartás]. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Ekkor az a pontnak van olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

Bizonyítás. Az f függvény a pontbeli folytonossága következtében tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz, így az $\varepsilon := f(a)$-hoz is van olyan $\delta > 0$, hogy bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, azaz
$$|f(x) - f(a)| < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < f(x) < 2f(a).$$

Eddig a folytonosságot a határértékhez hasonlóan pontban értelmeztünk. De folytonosság értelmezhető a függvény egész értelmezési tartományára vonatkozóan is.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **függvény folytonos** (jelben $f \in \mathfrak{C}$), ha az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonos.

Ez azt jelenti, hogy a racionális törtfüggvények, a gyökfüggvények, illetve az exp, a sin és a cos függvények folytonosak.

Megjegyzés. Úgy tűnik, hogy a most bevezetett fogalom eltér a folytonosság intuitív képétől, amit középiskolában tanultunk. Például az
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{x}$$
függvény folytonos, hiszen $0 \notin \mathcal{D}_f$, és ezért ott nem vizsgálhatjuk meg a folytonosságot. A többi pontban folytonos a hányadosra vonatkozó műveleti tétel alapján. Azonban grafikonja nem rajzolható meg a ceruza felemelése nélkül. Mégis intervallumon értelmezett függvények esetében ez az intuitív kép megmarad.

Más a helyzet, ha a folytonosságot egy $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_f$ halmazon szeretnénk bevezetni.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f függvény folytonos a $\mathcal{H}$ halmazon (jelben $f \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$), ha

$$\forall a \in \mathcal{H} \text{ esetén } f|_{\mathcal{H}} \in \mathfrak{C}[a],$$

ahol $f|_{\mathcal{H}}$ jelöli az f függvény $\mathcal{H}$ halmazra való leszűkítését, azaz az

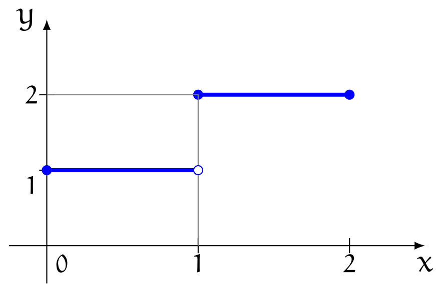
$$f|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad f|_{\mathcal{H}}(x) := f(x)$$

függvényt.

Vigyázat! az „f folytonos $\mathcal{H}$-n” nem jelenti azt, hogy f a $\mathcal{H}$ halmaz minden pontjában folytonos, hanem az, hogy $f|_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{H}$ halmaz minden pontjában folytonos, ami nem ugyanaz. Például az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

függvény folytonos az $[1, 2]$ halmazon, de $f \notin \mathfrak{C}[1]$.



Tétel [folytonosságra vonatkozó átviteli elv]. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor igaz az

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \quad \lim_{n \to \infty} (x_n) = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{n \to \infty} (f(x_n)) = f(a).$$

ekvivalencia.

Bizonyítás. Ha

- a izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek , akkor egyrészt $f \in \mathfrak{C}[a]$, másrészt

$$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim(x_n) = a \quad \Longrightarrow \quad x_n = a \text{ m.m. } n\text{-re} \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) = f(a) \text{ m.m. } n\text{-re},$$

  és így $\lim\big(f(x_n)\big) = f(a)$. A két állítás tehát ekvivalens.

- a torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in \mathfrak{C}[a] \iff \exists \lim_a f = f(a)$. A határértékre vonatkozó átviteli elv szerint ez ekvivalens azzal, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} (x_n) = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) = A = f(a).$$

  Nem nehéz meggondolni, hogy ez ekvivalens a tételben szereplő feltétellel.

Megjegyzés. Az, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **nem folytonos** valamely $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt jelenti, hogy

$$f \notin \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, \delta > 0\; \exists\, x \in \mathcal{D}_f : \quad (|x-a| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon).$$

Sorozatokkal ugyanez megfogalmazva:

$$\exists\, x_n \in \mathcal{D}_f \ (n \in \mathbb{N}) : \ \lim(x_n) = a \qquad \text{és} \qquad (\nexists \lim(f(x_n)) \quad \vee \quad \lim(f(x_n)) \neq f(a)).$$

Példa. Az

$$f(x) := \{x\} := x - [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény, ill. $a \in \mathbb{Z}$ esetén $f \notin \mathfrak{C}[a]$, ui. ha

$$x_n := a - \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\lim(x_n) = a$ és

$$\lim(f(x_n)) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - \left[a - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim\left(a - \frac{1}{n} - (a-1)\right) = 1 \neq 0 = f(a).$$

Megjegyezzük, hogy a folytonosság definíciója alapján világos, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, úgy az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha f-nek van a-ban határértéke, és az egyenlő az a-ban felvett $f(a)$ függvényértékkel.

Tétel [a határérték és a folytonosság kapcsolata]. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Ha $a \in \mathcal{D}_f \backslash \mathcal{D}_f'$, azaz az a pont izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in \mathfrak{C}[a]$.
2. Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor igaz az

   $$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_a f = f(a)$$

   ekvivalencia.

Feladat. Jelölje $r > 0$ egy $m > 0$ tömegű testnek a Föld középpontjától vett távolságát. A Föld nehézségi, ill. gravitációs erőtere által a testre gyakorolt erő nagysága:

$$F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(r) := \begin{cases} \dfrac{\gamma m M r}{R^3} & (r < R), \\ \\ \dfrac{\gamma m M}{r^2} & (r \geq R), \end{cases}$$

ahol M a Föld tömege, R a Föld sugara, $\gamma > 0$ pedig a gravitációs állandó. Folytonosan függ-e a gravitációs erő az r távolságtól, azaz folytonos-e fenti függvény?

Útm. Világos, hogy $F|_{(0,R)}$ és $F|_{(R,+\infty)}$ folytonos. Mivel

$$R \in \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}'_F \qquad \text{és} \qquad \lim_{r \to R} F(r) = \frac{\gamma m M}{R^2} = F(R),$$

ezért F folytonos.

Tétel. Ha $f, g \in \mathfrak{C}[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, úgy

$$\lambda f \in \mathfrak{C}[a], \qquad f + g \in \mathfrak{C}[a], \qquad f \cdot g \in \mathfrak{C}[a], \qquad \frac{f}{g} \in \mathfrak{C}[a] \;\; (\text{ha } g(a) \neq 0).$$

Bizonyítás. A tétel állítása a folytonosságra vonatkozó átviteli elvnek, továbbá a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételnek közvetlen következménye.

A fenti tétel következményeként elmondható, hogy a hatványfüggvények folytonosak, így a polinomok, ill. a racionális függvények is folytonosak.

Tétel. Minden hatványsor összefüggvénye folytonos.

Bizonyítás. Legyen R és f a $\sum (a_n(x-c)^n) \quad (x \in \mathbb{R})$ hatványsor konvergenciasugara és összegfüggvénye. Így,

- ha $R = 0$, úgy $\mathcal{D}_f = \{c\}$, hiszen ekkor a hatványsor csak az $x = c$ pontban konvergens. Következésképpen c izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, és így $f \in \mathfrak{C}[c]$.

- ha $0 < R \leq +\infty$, úgy a hatványsor konvergenciahalmazának belseje $(c-R, c+R)$. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel szerint egy hatványsor összegfüggvényének van határértéke a konvergenciahalmaza minden b belső pontjában, és a határérték megegyezik a pont behelyettesítésével kapott sor összegével, ami nem más, mint $f(b)$, azaz

$$\exists \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}[b].$$

  Tehát a hatványsor folytonos a konvergenciahalmaz minden belső pontjában.

- ha $0 < R < +\infty$ és a hatványsor konvergens a konvergenciahalmaz valamelyik határpontjában, akkor is igazolható az összegfüggvény folytonosságát ezekben a pontokban. Ennek bizonyítása elég hosszadalmas, azért azt nem részletezzük.

Következésképpen az exp, a sin, a cos, az sh és a ch függvények folytonosak.

Tétel [az összetett függvény folytonossága]. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, továbbá valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $g \in \mathfrak{C}[a]$ és $f \in \mathfrak{C}[g(a)]$, akkor $f \circ g \in \mathfrak{C}[a]$.

Bizonyítás.

1. lépés. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, sőt $g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f] \neq \emptyset$. Így képezhető az $f \circ g$ kompozíció és $a \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ is igaz.

2. lépés. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f\circ g} \subset \mathcal{D}_g$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in \mathfrak{C}[a]$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv következtében $\lim\left(g(x_n)\right) = g(a)$. Jelölje

$$b := g(a) \qquad \text{és} \qquad y_n := g(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in \mathfrak{C}[b]$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt $\lim\left(f(y_n)\right) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f\big(g(a)\big) = (f \circ g)(a) \qquad \text{és} \qquad f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Megmutattuk tehát, hogy $\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f\circ g}$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(y_n)) = f(b) = (f \circ g)(a).$$

Így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv felhsználásával azt kapjuk, hogy $f \circ g \in \mathfrak{C}[a]$.

Az iménti tétel értelmében a

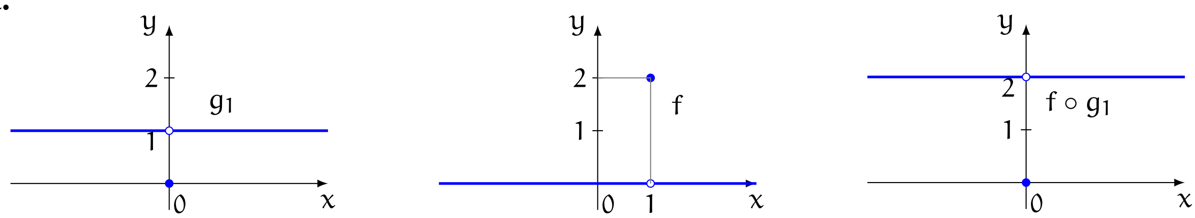
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin(x^2)$$

függvény folytonos minden $a \in \mathbb{R}$ pontban, hiszen

$$h = f \circ g, \qquad \text{ahol} \qquad f(x) := \sin(x) \;\; (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad g(x) := x^2 \;\; (x \in \mathbb{R}),$$

és f, g folytonos minden $\mathbb{R}$-beli pontban. Függvényhatárérték esetében más a helyzet. Az összetett függvényre általában nem „örökli" a külső függvény határértékét.

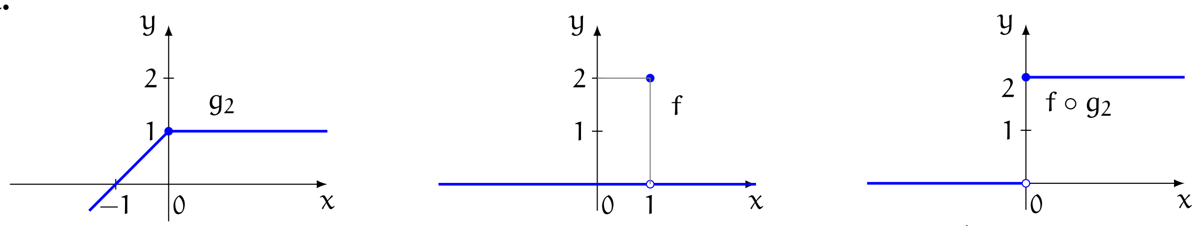
Példa.



$\lim\limits_{0} g_1 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{0}(f \circ g_1) = 2$

Ebben az esetben $\qquad \lim\limits_{0}(f \circ g_1) = 2 \neq 0 = \lim\limits_{1} f\,.$

Példa.



$\lim\limits_{0} g_2 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\nexists \lim\limits_{0}(f \circ g_2)$

Ebben az esetben $\qquad \nexists \lim\limits_{0}(f \circ g_2)\,.$

Vegyük észre, hogy a példákban mindkét g_1, g_2 függvény felveszi az $y = 1$ értéket a 0-nak minden pontozott környezetében, valamint az f függvény nem folytonos az 1 pontban. A következő tétel azt állítja, hogy ez okozza a problémát.

Tétel [az összetett függvény határértéke]. Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, ill. $a \in \overline{\mathbb{R}}$, majd tegyük fel, hogy

$$a \in \mathcal{D}_g', \ \exists \lim_a g =: b \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad b \in \mathcal{D}_f', \ \exists \lim_b f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. ha $b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f \in \mathfrak{C}[b]$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) = A,$$

azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

2. ha a g függvény nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke az a pontban, és

$$\lim_{x \to a} f\left(g(x)\right) = \lim_{y \to b} f(y) = A.$$

Bizonyítás.

1. lépés. Az $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ feltételből következik, hogy $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$.

2. lépés. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$ egy olyan sorozat, amire $\lim(x_n) = a$ teljesül. Tekintsük az

$$y_n := g(x_n) \in \mathcal{D}_f \quad \text{és a} \quad z_n := f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ha igazolni tudjuk, hogy $\lim(z_n) = A$, akkor a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint a tétel mindkét állítása teljesül.

3. lépés. A tétel feltétele szerint $\exists \lim_a g = b$. Mivel $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_g \setminus \{a\}$, $\lim(x_n) = a$ teljesül, így a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint

$$(\star) \qquad (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n = b$$

teljesül. Ekkor

1. ha $f \in \mathfrak{C}[b]$, akkor $(\star)$ miatt a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint

$$\lim_{n \to +\infty} (z_n) = \lim_{n \to +\infty} (f(y_n)) = f(b) = A.$$

2. tegyük fel, hogy g nem veszi fel a b értéket egy $\dot{K}(a)$ pontozott környezetben, azaz

$$\forall x \in \dot{K}(a) \cap \mathcal{D}_g\colon g(x) \neq b, \quad \text{ahol} \quad \dot{K}(a) := K(a) \setminus \{a\}.$$

Mivel $\lim(x_n) = a$, így véges sok index kivételével $x_n \in K(a)$. Véges sok tag elhagyása nem befolyásolja a határértéket, ezért feltételezhető, hogy $x_n \in K(a)$ minden n-re. De $x_n \neq a$, ezért $x_n \in \dot{K}(a)$ minden n-re. Ekkor a g feltétele miatt $y_n = g(x_n) \neq b$ minden n-re. Ezzel $(\star)$-ot átírhatjuk az alábbi módon:

$$(\star\star) \qquad (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{b\}, \qquad \lim_{n\to+\infty} (y_n) = b.$$

Mivel $\exists \lim\limits_{b} f = A$, így $(\star\star)$ miatt a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv következtében

$$\lim_{n\to+\infty} (z_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(y_n)) = A.$$

Mindkét esetben igazoltuk, hogy $\lim(z_n) = A$.

Megjegyzések.

1. Ha $b \notin \mathcal{D}_f'$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f\,(g(x)) = f(b)$, hiszen ekkor $f \in \mathfrak{C}[b]$, és csak a folytonosságot használtuk fel a bizonyítás 1. pontjában.

2. Vegyük észre, hogy ha $b = \pm\infty$, akkor b nem egy számérték, amit a g függvény fel tud venni. Ezért ebben az esetben a tétel 2. állítása szerint az összetett függvény mindig „örökölni” fogja a külső függvény határértékét.

3. A tétel mindkét állításának eredménye a

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to b} f(y) \qquad \big(y = g(x) \to b, \text{ ha } x \to a\big)$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim\limits_{x\to a} f\,(g(x))$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés. A tétel értelmében ez a helyettesítés akkor alkalmazható, ha

- f folytonos a b pontban,

vagy

- g nem veszi fel a b értéket az a egy pontozott környezetében (pl. ha g invertálható, mondjuk nem állandó, lineáris függvény).

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvény **szakadási helye**, ha $f \notin \mathfrak{C}[a]$. A szakadás

- **elsőfajú**, ha $\exists\, f(a \pm 0) \in \mathbb{R}$, speciálisan
  1. **megszüntethető szakadás**ról beszélünk, ha $f(a-0) = f(a+0)$;
  2. **ugrás**ról beszélünk, ha $f(a-0) \neq f(a+0)$. Az $|f(a+0) - f(a-0)|$ számot az f függvény a **pontbeli ugrás**ának nevezzük.
- **másodfajú**, ha nem elsőfajú.

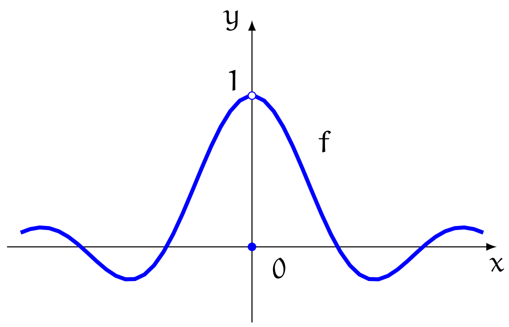
A „megszüntethető szakadás” elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az a pontban megváltoztatva az f függvény értékét ott folytonossá tehető, ui. ekkor az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a \neq x \in \mathcal{D}_f), \\ \lim\limits_{a} f & (x = a) \end{cases}$$

függvény folytonos a-ban, hiszen $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_a f = \lim\limits_a \widetilde{f}$.

Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



függvénynek megszüntethető szakadása van a 0 pontban, mert

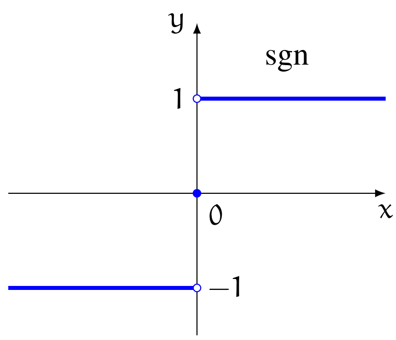
$$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Ezért a 0 pontban felvett függvényérték megváltoztatásával kapott

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény már folytonos a 0 pontban. Egyébként a fenti f függvény folytonos a többi 0-tól különböző pontban, mert felírható a folytonos $\sin$ és id függvények hányadosaként.

Példa. Tekintsük az alábbi függvényt (**előjelfüggvény**t, ill. a



szignumfüggvényt).

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & (x \in (-\infty, 0))\,, \\ 0 & (x = 0), \\ 1 & (x \in (0, +\infty))\,. \end{cases}$$

A 0 pontban a függvénynek elsőfajú szakadási helye van, hiszen

$$\exists \lim_{0-0} \operatorname{sgn} = -1, \qquad \exists \lim_{0+0} \operatorname{sgn} = 1,$$

de ezek különböznek. Így nem tudjuk a szakadást „megszüntetni” a 0 pontban. Megpróbálhatnák az $f(0)$ értéket módosítani -1-re vagy 1-re, de ezzel csak az egyik „oldali szakadást” szüntetnénk meg. Ez mégis egy nagyon fontos jelenséghez vezet:

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy

- az f függvény **balról folytonos** az a pontban (jelben $f \in \mathfrak{C}_-[a]$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a - \delta < x \leq a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

- az f függvény **jobbról folytonos** az a pontban (jelben $f \in \mathfrak{C}_+[a]$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a \leq x < a + \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Az f függvény bal vagy jobb oldali folytonossága lényegében a függvénynek az a pont valamely bal vagy jobb oldali környezetre történő leszűkítésének a folytonosságát jelenti.

Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in \mathfrak{C}[a] \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in \mathfrak{C}_-[a] \cap \mathfrak{C}_+[a].$$

A fentiek értelmében az

$$f_1(x) := \begin{cases} -1 & (x \in (-\infty, 0])\,, \\ 1 & (x \in (0, +\infty)) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f_2(x) := \begin{cases} -1 & (x \in (-\infty, 0))\,, \\ 1 & (x \in [0, +\infty)) \end{cases}$$

függvények esetében az f_1 függvény balról folytonos a 0 pontban, mert a 0 minden $(-r, 0]$ baloldali környezetben $f|_{(-r,0]} \equiv -1$, ami folytonos a 0 pontban. f_1 folytonos (és így balról folytonos) minden más $a \neq 0$

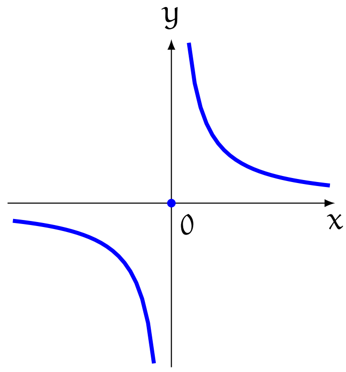
pontban, hiszen ekkor az a-nak mindig van olyan környezetre, ahol f_1 állandó. Tehát f_1 balról folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, amit úgy rövidíthetünk, ha csak annyit mondunk, hogy az f_1 függvény balról folytonos. Hasonlóan vizsgálhatjuk az f_2 függvény jobbról folytonosságát.

Visszatérve a függvények elsőfajú szakadási helyeire, már igazoltuk, hogy minden nyílt intervallumom értelmezett monoton függvénynek létezik véges bal és jobb oldali határértéke. Ezért az ilyen függvényeknek legfeljebb megszüntethető vagy elsőfajú szakadási helyei lehetnek.

Nem nehéz példát mutatni másodfajú szakadási helyre. Elegendő, ha a $\lim\limits_{a-0} f$ vagy a $\lim\limits_{a+0} f$ egyoldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik, de nem véges.

Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



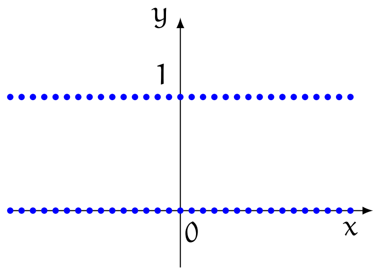
függvénynek másodfajú szakadási helye van a 0 pontban, mert a

$$\lim_{0-0} f = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{0+0} f = +\infty$$

egyoldali határértékek bár léteznek, de nem végesek.

Példa. Más okokból, de az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$



ún. **Dirichlet-függvény** minden $a \in \mathbb{R}$ helyen másodfajú szakadása van. Ez azért van, mert

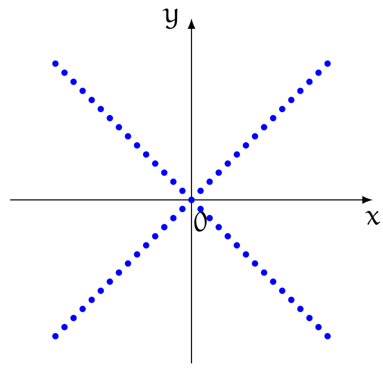
$$\nexists \lim_{a-0} f \quad \text{és} \quad \nexists \lim_{a+0} f \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

A fenti állítás nem nehéz átviteli elvvel igazolni. Ehhez felhasználjuk azt a tényt, hogy $\forall a \in \mathbb{R}$ és $\forall \delta > 0$ esetén az $(a - \delta, a)$ és az $(a, a + \delta)$ intervallum végtelen sok racionális és irracionális számot tartalmaz. Ezért

$$\exists (x_n) : \mathbb{N} \to (a - \delta, a) \cap \mathbb{Q} \colon \ \lim(x_n) = a \quad \text{és} \quad \exists (y_n) : \mathbb{N} \to (a - \delta, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \colon \ \lim(y_n) = a.$$

Azonban $f(x_n) = 1$ és $f(y_n) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így az átviteli elv szerint $\nexists \lim\limits_{a-0} f$. Hasonlóan igazolható, hogy $\nexists \lim\limits_{a+0} f$. Ezzel olyan függvényt találtunk, amely intervallumon értelmezett, de sehol sem folytonos.

Példa. Az



$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

függvény folytonos az $a = 0$ pontban. Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ estén a $\delta := \varepsilon$ választás mellett

$$|x - 0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - f(0)\right| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

Másrészt minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont a függvény másodfajú szakadási helye. Ezt a Dirichlet-függvénynél alkalmazott technikával lehet igazolni, ti.

$$\exists (x_n) : \mathbb{N} \to (a - \delta, a) \cap \mathbb{Q}\colon \lim(x_n) = a \quad \text{és} \quad \exists (y_n) : \mathbb{N} \to (a - \delta, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\colon \lim(y_n) = a.$$

Ekkor az $n \to \infty$ határesetben

$$f(x_n) = x_n \longrightarrow a \qquad \text{és} \qquad f(y_n) = -y_n \longrightarrow -a,$$

így az átviteli elv szerint, ha $a \neq -a$, azaz $a \neq 0$, akkor $\nexists \lim\limits_{a-0} f$. Hasonlóan igazolható, hogy $\nexists \lim\limits_{a+0} f$, ha $a \neq 0$.

Példa. Tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \left(x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1\right), \\ 1 & (x = 0,) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Thomae-függvényt.[16] Erről a függvényről – többek között- a következő tudható:

1. f korlátos, ui. értékkészlete nyilvánvalóan az

$$\left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

halmaz.

2. f periodikus az 1 periódussal:

$$f(x + n) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$

[16] Carl Johannes Thomae (1840-1921) német matematikus.

ui. ha

- $x \in \mathbb{Q}$, akkor alkalmas $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ esetén $x = \frac{p}{q}$. Ekkor

$$x + n = \frac{p}{q} + n = \frac{p + nq}{q}.$$

  Ha $d|p$ és $d|q$, akkor $d|(p + nq)$. Ha pedig $d|(p + nq)$ és $d|q$, akkor $d|((p + nq) - nq)$, azaz $d|p$. Következésképpen

$$(p + nq, q) = (p, q) = 1 \qquad \text{és} \qquad f(x + n) = \frac{1}{q} = f(x).$$

- $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, akkor $x + n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ és így $f(x + n) = f(x) = 0$.

3. Bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{a} f = 0$, ui. a periodicitás következtében feltehető, hogy $a \in [0, 1)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ olyan index, amelyre $n > 1/\varepsilon$. Ekkor f értelmezése miatt tetszőleges $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, illetve tetszőleges $x = p/q \in \mathbb{Q}$: $(p, q) = 1$, $q > n$ esetén $|f(x)| < 1/n$. Ez azt jelenti, hogy az

$$|f(x) - 0| > \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség a $(-1, 1)$ intervallum pontjai közül kizárólag a

$$0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}, \ldots, \pm\frac{1}{n},\ \pm\frac{2}{n}, \ldots, \pm\frac{n-1}{n} \tag{34}$$

pontokban teljesül. Legyen ezek közül p_1/q_1 az a-tól különböző, a-hoz legközelebbi tört, ill. $\delta := \left|\frac{p}{q} - a\right|$. Következésképpen az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumban nincsen a-tól különböző, (34) alatti szám, így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 < |x - a| < \delta = \left|\frac{p}{q} - a\right| \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - 0| = |f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

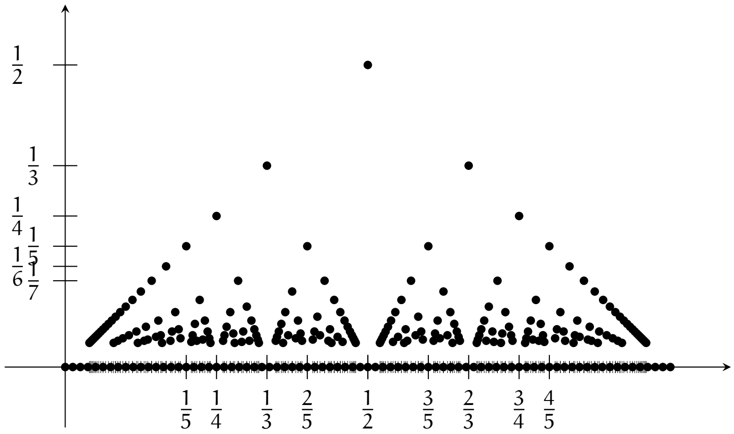
4. Bármely $a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$, hiszen $f(a) = 0$, így

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = f(a).$$

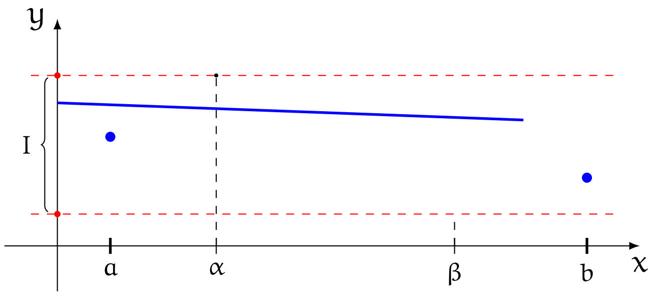
5. Bármely $a \in \mathbb{Q}$ esetén f-nek a-ban megszüntethető szakadása van, hiszen $f(a) \neq 0$, de

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \neq f(a).$$

Az alábbi ábra mutatja a függvény grafikonját:



Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Tekintsünk meg egy ilyen függvény grafikonjából készített ábrát!



Azt látjuk, hogy a függvény értékkészlete szintén egy I korlátos és zárt intervallumon. Ebben a részben bizonyítani fogjuk, hogy ez a jelenség igaz minden ilyen típusú függvényre, nevezetesen azt igazoljuk, hogy egy $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon

1. korlátos,
2. felveszi a maximumát és a minimumát,
3. felvesz minden olyan értéket, ami a minimum és a maximum között van.

Az alábbiakban feltesszük, hogy $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \in \mathfrak{C}[a, b]$. Emlékeztetünk, hogy már korábban a $\mathfrak{C}[a, b]$ szimbólummal jelöltük a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmazát. A korábbi definíciónk szerint ez azt jelenti, hogy

$$f \in \mathfrak{C}[a, b] \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ [a, b] \subset \mathcal{D}_f, \\ \forall x \in (a, b) \colon f \in \mathfrak{C}[x], \\ f \in \mathfrak{C}_+[a], \\ f \in \mathfrak{C}_-[b]. \end{cases}$$

Vigyázat! $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ azt jelenti, hogy az $f|_{[a,b]}$ függvény folytonos, ami *nem jelenti* azt, hogy az eredeti f függvény az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos.
Az első tulajdonság állítása világos, ezért rögtön igazolni fogjuk.

Tétel. Ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$, akkor f korlátos az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a,b]$-n, azaz

$$\forall K > 0\text{-hoz } \exists x \in [a,b]: \ |f(x)| > K.$$

Ekkor a $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists x_n \in [a,b]\colon \big|f(x_n)\big| > n.$$

Az $(f(x_n))$ sorozat tehát nem korlátos. Mivel

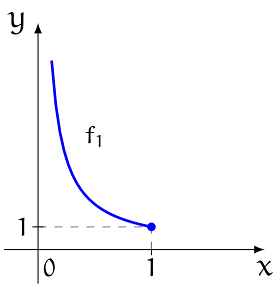
$$x_n \in [a,b] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata, amelynek határértékét jelölje: $\alpha := \lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k})$. Ekkor nyilván $\alpha \in [a,b]$. Ugyanakkor $f \in \mathfrak{C}[\alpha]$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv következtében

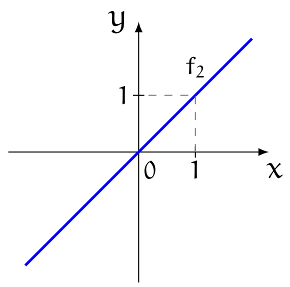
$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k})) = f\left(\lim_{k\to\infty}(x_{n_k})\right) = f(\alpha) \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $(f(x_{n_k}))$ sorozat korlátos, ami ellentmond $(*)$-nak.

Megjegyzés. A tételben az f függvény korlátos és zárt intervallumon való folytonossága lényeges feltétel, bármelyik elhagyásával ui. hamis állítást kapunk.
Példa. Az alábbi függvények nem korlátosak:



$f_1(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1])$



$f_2(x) := x \quad (x \in \mathbb{R})$

Ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$, akkor az $f\,[[a,b]]$ képhalmaz korlátossága következtében

$$\inf\{f(x) \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\} \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \sup\{f(x) \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\} \in \mathbb{R},$$

de egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy van két $[a,b]$ intervallumbeli elem, ahol a függvény ezt a infimumot és szuprémumot felveszi.

Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek szélsőérték-feladatokra, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán léteznek ilyenek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak a következő fogalmak.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f-nek az α pontban

1. **abszolút maximuma van** (α **abszolút maximumhelye** f**-nek**), ha

$$f(x) \le f(\alpha) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

   Ekkor az $f(\alpha)$ helyettesítési értéket f **abszolút maximumának** nevezzük.

2. **abszolút minimuma van** (α **abszolút minimumhelye** f**-nek**), ha

$$f(\alpha) \le f(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$

   Ekkor az $f(\alpha)$ helyettesítési értéket f **abszolút minimumának** nevezzük.

3. **abszolút szélsőértékhe van** (α **abszolút szélsőértékhelye** f**-nek**), ha f-nek α-ban abszolút maximuma vagy abszolút minimuma van.

Megjegyezzük, hogy egy függvénynek több abszolút maximum-, illetve minimumhelye is lehet.

Tétel [Weierstraß]. Valamely korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye:

$$f \in \mathfrak{C}[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \alpha, \beta \in [a,b],\ \forall x \in [a,b] :\ f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha).$$

Bizonyítás. Már igazoltuk, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f korlátos $[a,b]$-n. Ezért

$$m := \inf\big\{f(x) \,\big|\, x \in [a,b]\big\} \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad M := \sup\big\{f(x) \,\big|\, x \in [a,b]\big\} \in \mathbb{R}.$$

Most belátjuk, hogy az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists \alpha \in [a,b]\colon f(\alpha) = M$. A szuprémum definíciója következtében

$$\forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists y_n \in \mathcal{R}_f\colon M - \frac{1}{n} < y_n \leq M.$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \ (n \in \mathbb{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists x_n \in [a,b]\colon f(x_n) = y_n.$$

Az így értelmezett $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt a sorozatnak van (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje $\alpha := \lim(x_{n_k})$. Ekkor $\alpha \in [a,b]$. Ugyanakkor $f \in \mathfrak{C}[\alpha]$. Így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv következtében

$$\lim_{k\to+\infty} (f(x_{n_k})) = f\left(\lim_{k\to+\infty} (x_{n_k})\right) = f(\alpha).$$

Mivel minden n_k indexre

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \leq M$$

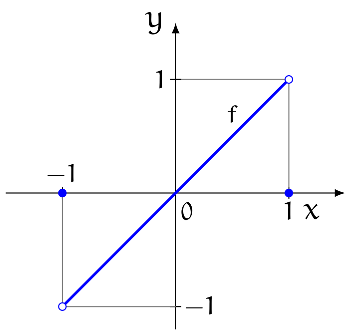
teljesül, ezért $\lim\limits_{k\to+\infty} (y_{n_k}) = M$, ahonnan $f(\alpha) = M$ következik. Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése.

Megjegyezzük, hogy az f függvény folytonos volta lényeges feltétel.

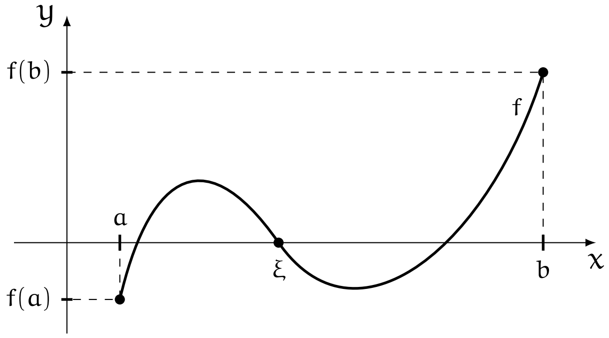
Példa. Az

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in (-1,1)), \\ 0 & (x = \pm 1) \end{cases}$$

függvény korlátos, de nem folytonos függvénynek nincsenek abszolút szélsőértékei, pedig a $[-1,1]$ korlátos és zárt intervallumon van értelmezve.



A harmadik tulajdonság igazolása előtt vegyük észre, hogy ha $f \in \mathfrak{C}[a,b]$ és f az $[a,b]$ intervallum két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, akkor f-nek az $[a,b]$ intervallumban legalább egy zérushelye van. A szemléletünk alapján nyilvánvalónak tűnő állítást szemlélteti a következő ábra abban az esetben, amikor $f(a) < 0 < f(b)$:



Tétel [Bolzano]. Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény az intervallum két végpontjában különböző előjelű értéket vesz fel, akkor a függvénynek legalább egy zérushelye van, azaz

$$f \in \mathfrak{C}[a,b] \text{ és } f(a)\cdot f(b) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b)\colon f(\xi) = 0.$$

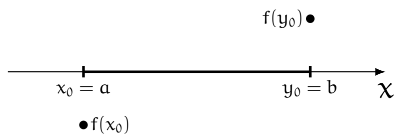
Bizonyítás. Az állítás bizonyításának az alapja az ún. **Bolzano-féle felezési eljárás**.

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

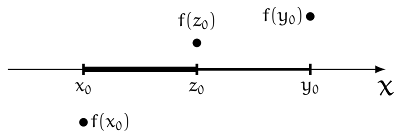
Legyen

$$[x_0, y_0] := [a, b]$$

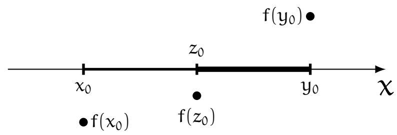


Az intervallumot megfelezzük. Legyen $z_0 := \dfrac{x_0 + y_0}{2}$.
Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ zérushelye f-nek.
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$.



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$



Ha $f(z_0) \neq 0$, akkor olyan $[x_1, y_1]$ intervallumot sikerült megadni, amire

$$f(x_1) < 0 < f(y_1)$$

teljesül, ezért átveheti az $[x_0, y_0]$ intervallum szerepét, de a hossza ennek fele, azaz $\dfrac{b-a}{2}$. Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is ugyanaz a három eset lehetséges. Ha a z_1 felezőpontban $f(z_1) \neq 0$, akkor az intervallumból azt a felét tartjuk meg, amelynek két végpontjában f különböző előjelű. Ez lesz az $[x_2, y_2]$ intervallum, amivel az eljárás megismételhető.

Folytassuk az eljárást! Ekkor vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben olyan $[x_n, y_n]$ intervallumsorozatot kapunk, amire minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$,

ii) $f(x_n) < 0 \quad \text{és} \quad f(y_n) > 0$,

iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$.

A Cantor-tétel felhasználásával látható, hogy az i) tulajdonságból az következik, hogy fenti egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres. A iii) tulajdonságból következik, hogy ez a metszet egyelemű halmaz, hiszen minden eleme x_n és y_n között található. Jelölje ξ a metszet egyedüli elemét, azaz legyen

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] =: \{\xi\}.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért az átvételi elv szerint

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

De a ii) tulajdonságból az következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to+\infty} f(y_n),$$

azaz $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.
A bizonyítás hasonlóan történik az $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$ esetben.

Megjegyezzük, hogy A Bolzano-tétel bizonyításában szereplő intervallumfelezési eljárás azért is fontos, mert olyan numerikus módszert biztosít, amivel közelítőleg meg tudjuk keresni intervallumon folytonos f függvény egyik zérushelyét, vagyis az $f(x) = 0$ egyenletnek egy megoldását. Ehhez először két pontot kell találni, ahol a függvény előjelet vált, és ezután addig alkalmazunk az eljárást, amíg a zérushelyet tartalmazó $[x_n, y_n]$ intervallum hossza kisebb lesz, mint egy előre megadott hibakorlát. Ekkor az intervallum bármely értéke megfelelő közelítése lesz a keresett zérushelynek.
Példa. Megmutatjuk, hogy az

$$\ln(x) + 3 = e^x$$

egyenletnek van megoldása a $(0, +\infty)$ intervallumon. Valóban, ha

$$f(x) := \ln(x) + 3 - e^x \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

akkor $f \in \mathfrak{C}[1,2]$, továbbá

$$f(1) \cdot f(2) = (\ln(1) + 3 - e) \cdot \left(\ln(2) + 3 - e^2\right) < 0,$$

ui.

$$\ln(1) + 3 - e = 3 - e > 0 \qquad \text{és} \qquad \ln(2) + 3 - e^2 < \ln(e) + 3 - e^2 = 4 - e^2 < e^2 - e^2 = 0.$$

Következésképpen van olyan $\xi \in (1,2)$, amelyre

$$f(\xi) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \ln(\xi) + 3 = e^{\xi}.$$

A Bolzano-tétel általánosítása a következő

Tétel [Bolzano–Darboux-tétel]. Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értéke az intervallum két végpontjában különböző, akkor a függvény minden értéket felvesz, ami e két függvényérték között van, azaz

$$f \in \mathfrak{C}[a,b] \text{ és } f(a) < f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall c \in \big(f(a), f(b)\big)\text{-hez } \exists \xi \in (a,b):\ f(\xi) = c,$$

illetve

$$f \in \mathfrak{C}[a,b] \text{ és } f(a) > f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall c \in \big(f(b), f(a)\big)\text{-hez } \exists \xi \in (a,b):\ f(\xi) = c.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt az

$$\varphi(x) := f(x) - c \qquad (x \in [a,b])$$

függvényre.

Megjegyezzük, hogy a tétel az intervallumon folytonos függvényekről alkotott szemléletes képünket (miszerint az ilyen függvények grafikonját a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatjuk) támasztja alá.

A gyakorlat anyaga

Feladat. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén folytonos az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény?

1. $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1 & (x \leq 1), \\ 3 - x & (x > 1); \end{cases}$

2. $f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) & (x > 0), \\ \alpha - 2x & (x \leq 0). \end{cases}$

Útm.

1. Világos (vö. korábbi tételek), hogy f folytonos a $(-\infty, 1)$ és az $(1, +\infty)$ intervallumok minden pontjában, azaz az $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ halmazon. Mivel

$$\lim_{1-0} f = \lim_{x \to 1-0} (\alpha x^2 + 4x - 1) = \alpha x^2 + 4 - 1 = \alpha + 3 = f(1)$$

és

$$\lim_{1+0} f = \lim_{x \to 1+0} (3 - x) = 3 - 1 = 2,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha + 3 = 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -1.$$

2. A korábbiak fényében látható, hogy f folytonos a $(-\infty, 0)$ és az $(0, +\infty)$ intervallumok minden pontjában, azaz az $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ halmazon. Mivel

$$\lim_{0-0} f = \lim_{x \to 0-0} (\alpha - 2x) = \alpha = f(0)$$

és

$$\lim_{0+0} f = \lim_{x \to 0+0} \exp\left(-\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x \to 0+0} \left(-\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp(-\infty) = 0,$$

ezért

$$f \in \mathfrak{C}[0] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 0.$$

Feladat. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} & (x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}), \\ \alpha & (x=2), \\ 0 & (x=5). \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

Útm. Világos, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén $f \in \mathfrak{C}[a]$. Mivel minden $x \in \mathbb{R}\backslash\{2;5\}$ esetén

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim\limits_{2} f = \dfrac{1}{3}$, tehát

$$f \in \mathfrak{C}[2] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{3},$$

egyébként f-nek 2-ben megszüntethető szakadása van. Mivel

$$\lim_{5\pm 0} f = \pm\infty,$$

ezért f-nek 5-ben másodfajú szakadása van. ■

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van legalább egy valós gyöke!

Útm. Legyen

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

páratlan (n-ed)fokú polinom. Ekkor, mint tudjuk,

$$\lim_{+\infty} p = \begin{cases} +\infty & (a_n > 0), \\ -\infty & (a_n < 0) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{-\infty} p = \begin{cases} -\infty & (a_n > 0), \\ +\infty & (a_n < 0). \end{cases}$$

Így van olyan $a < b$, hogy

$$\operatorname{sgn}(p(a) \cdot p(b)) = -1.$$

Mivel p folytonos, ezért van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $p(\xi) = 0$.

A Bolzano-téel bizonyítása során (vö. 11. $\boxed{\textbf{EA}}$)valójában egy közelítő eljárást alkalmaztunk az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására. Ez az ún. **intervallumfelezési eljárás** (vö. numerikus analízis). Ez a közelítő eljárás (**iterációs módszer**) a következő: legyen az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \cdot f(b) < 0$, valamint $x_0 := a$, $x_1 := b$ és

$$x_{n+1} := \frac{x_n + x_{s_n}}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$s_n := \max\{k \in \{0, \ldots, n\} : \; f(x_n) \cdot f(x_k) \leq 0\}$$ [17]

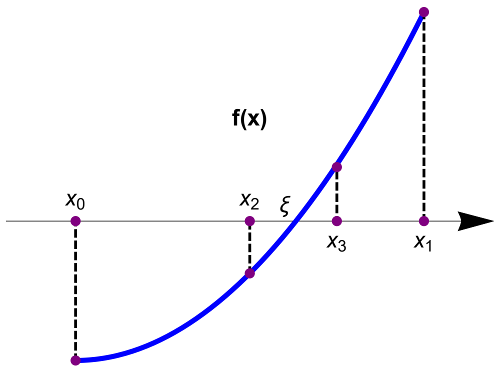
Ekkor teljes indukcióval

$$|x_m - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad (n \leq m \in \mathbb{N}),$$

így létezik a

$$\xi := \lim(x_n) \in [a, b].$$

határérték. Az f folytonossága és az átviteli elv miatt $f(\xi) = 0$.



10. ábra. Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása: ξ.

Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$p(x) := x^3 + x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsuk ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal!

[17]Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $s_n = n$, azaz $f(x_n)^2 \leq 0 \iff f(x_n) = 0$, akkor $x_k = x_n$ $(n \leq k \in \mathbb{N})$.

Útm. Mivel

$$p(0) = -1 < 0, \qquad p(1) = 1 > 0,$$

ezért Bolzano-tétel következtében van olyan $\xi \in (0,1)$, hogy $p(\xi) = 0$. Mivel bármely $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén

$$\begin{aligned} p(x) - p(y) &= x^3 + x - 1 - (y^3 + y - 1) = x^3 - y^3 + x - y = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = \\ &= (x-y)\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1\right) < 0, \end{aligned}$$

ezért egyetlen ilyen ξ létezik, melynek közelítése:

n	x_n	$h_n = \dfrac{b-a}{2^n}$	$\operatorname{sgn}(f(x_n))$
0	0	1	-1
1	1	$5 \cdot 10^{-1}$	1
2	$1/2$	$2.5 \cdot 10^{-1}$	-1
3	$3/4$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	1
4	$5/8$	$0.625 \cdot 10^{-1} < 10^{-1}$	-1
5	$11/16$		

Így a keresett közelítő érték: $\xi \approx 11/16$.

13. oktatási hét

Az 2. zárthelyi feladatai

A gyakorlat anyaga

Gyakorló (házi) feladatok. Lássuk be, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + x^3 + 6x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\})$$

függvénynek van zérushelye!

Útm. Világos, hogy f folytonos, továbbá

$$f(0) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{8} + 3 - 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} > 0.$$

Mivel

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},$$

ezért alkalmas

$$c \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathcal{D}_f$$

számra $f(c) = 0$.

Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletek megoldhatók az I intervallumon!

1. $\cos(x) = x$, $I := (0,1)$;
2. $\ln(x) = e^{-x}$, $I := (1,3)$;
3. $e^x = 2 - x$, $I := \mathbb{R}$;
4. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$, $I := \mathbb{R}$;
5. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} = e^{x^2}$, $I := (0,2)$.

Útm.

1. Ha

$$f(x) := \cos(x) - x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = \cos(1) - 1 < 0,$$

hiszen

$$\cos(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = 1 + \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}\right) + \ldots < 1.$$

Ezért alkalmas $\xi \in I := (0, 1)$ esetén $f(\xi) = 0$.

2. Ha

$$f(x) := \ln(x) - e^{-x} \qquad (x \in (0, +\infty)),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = -\frac{1}{e} < 0, \qquad f(3) = \ln(3) - \frac{1}{e^2} > 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (1, 2)$ esetén $f(\xi) = 0$.

3. Ha

$$f(x) := e^x - 2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(1) = e - 2 + 1 > 0, \qquad f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\xi) = 0$.

4. Ha

$$f(x) := x^5 - x^2 + 2x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor f folytonos,

$$f(0) = 3 > 0, \qquad f(-1) = -1 < 0,$$

ezért alkalmas $\xi \in I := (-1, 0)$ esetén $f(\xi) = 0$.

5. Ha

$$f(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - e^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}),$$

akkor f folytonos. Mivel

$$\lim_{0+0} f = +\infty - \frac{1}{2} - e^0 = +\infty, \qquad \text{és} \qquad \lim_{2-0} f = \frac{1}{2} + (-\infty) - e^4 = -\infty,$$

ezért alkalmas $a \in (0, 1)$, illetve $b \in (1, 2)$ esetén $f(a) > 0$, ill. $f(b) < 0$. Mivel $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ és

$f(a)\cdot f(b)<0$, ezért a Bolzano-tétel következtében van olyan

$$\xi\in(a,b)\subset(0,2)=I,$$

hogy $f(\xi)=0$:

$$\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi-2}-e^{\xi^2}=0,\qquad \text{azaz}\qquad \frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi-2}=e^{\xi^2}.$$

Gyakorló (házi) feladatok.

1. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha\in[0,+\infty)$ esetén fennáll a

$$2\cos(\pi\alpha)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}}=e^{\alpha}$$

egyenlőség!

2. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha\in(0,\pi)$ esetén fenáll a

$$\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+\alpha+1}\right)=\frac{\cos(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}$$

egyenlőség!

3. Igazoljuk, hogy alkalmas $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ esetén fenáll az

$$\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha)+x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=0$$

egyenlőség!

Útm.

1. Az

$$f(x):=2\cos(\pi x)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}-e^{x}\qquad(x\in[0,+\infty))$$

függvény folytonos, továbbá

$$f(0)=2\cos(0)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{0}}}-e^0=1>0\qquad \text{és}\qquad f(1)=2\cos(\pi)\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1}}}-e^1=-\frac{2}{\sqrt{2}}-e<0.$$

2. Az
$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right) - \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \qquad (x \in [0,\pi])$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = \ln(1) - \frac{\cos(0)}{1+\sin(0)} = -1 < 0$$
és
$$f(\pi) = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) - \frac{\cos(\pi)}{1+\sin(\pi)} = \ln\left(\frac{\pi^2+1}{\pi^2+\pi+1}\right) + 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e\cdot\pi^2+e > \pi^2+\pi+1,$$
és ez igaz, hiszen
$$e\cdot\pi^2+e > 2\pi^2+e = \pi^2+\pi^2+e > \pi^2+\pi+e > \pi^2+\pi+1.$$

3. Az
$$f(x) := \left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) + x\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
függvény folytonos, továbbá
$$f(0) = -\frac{\pi}{6} < 0 \qquad \text{és} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} > 0.$$

Gyakorló (házi) feladatok.

1. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{D}_f$ intervallum, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}_f$ és A véges. Mutassuk meg, hogy van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel fennál az
$$f(t) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x)$$
egyenlőség!

2. Igazoljuk, hogy ha valamely $-\infty < a < b < +\infty$ esetén a
$$\varphi : [a, b] \to [a, b]$$
függvény folytonos, akkor alkalmas $u \in (a, b)$ esetén $\varphi(u) = u$ teljesül (**Brouwer-féle fixponttétel**)!

3. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről azt tudjuk, hogy folytonos és
$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$
(**Cauchy-féle függvényegyenlet**). Mutassuk meg, hogy f vagy azonosan nulla vagy fennáll az $f = \exp_{f(1)}$ egyenlőség!

Útm.

1. Legyen
$$\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \{f(x) |\ x \in A\}.$$
Ekkor $m, M \in \mathcal{R}_f$ és
$$m \leq \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x) \leq M$$
(számtani közép). Mivel $\mathcal{R}_f$ intervallum, ezért $f^{-1}[[m, M]] \subset \mathcal{D}_f$, így a Bolzano-tétel alkalmazásával van olyan $t \in \mathcal{D}_f$, amellyel
$$f(t) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{x \in A} f(x).$$

2. Világos, hogy a
$$\psi(x) := \varphi(x) - x \qquad (x \in [a, b])$$

függvény folytonos, továbbá

$$\psi(a) = \varphi(a) - a \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \psi(b) = \varphi(b) - b \leq 0,$$

hiszen

$$\varphi(a) \geq a \qquad \text{és} \qquad \varphi(b) \leq b.$$

A

$$\psi(a) = 0, \qquad \text{ill. a} \qquad \psi(b) = 0$$

egyenlőség csak a

$$\varphi(a) = a, \qquad \text{ill. a} \qquad \varphi(b) = b$$

esetben fordul elő. Ez azt jelenti, hogy vagy az

$$u := a, \qquad \text{ill.} \qquad u := b$$

fixpontja φ-nek, vagy

$$\psi(a) > 0, \qquad \text{ill.} \qquad \psi(b) < 0.$$

Így a Bolzano-tétel következtében va olyan $u \in (a, b)$, amelyre

$$0 = \psi(u) = \varphi(u) - u,$$

azaz

$$\varphi(u) = u.$$

3. **1. lépés.** Megmutatjuk, hogy, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(c) = 0$, akkor

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Valóban, ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(c) = 0$, akkor

$$f(x) = f(x - c + c) = f(x - c) \cdot f(c) = f(x - c) \cdot 0 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. lépés. $f(0) \in \{0, 1\}$, ui. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$, ezért $f(0) \cdot (f(0) - 1) = 0$.

3. lépés. Így tehát, ha $f(0) = 1$, akkor – lévén $1 > 0$ – azt kapjuk, hogy $f(x) > 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Legyen ebben az esetben $a := f(1) > 0$.

4. lépés. Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(n \cdot x) = (f(x))^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Speciálisan $x := 1$ esetén tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $f(n) = a^n$.

5. lépés. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 < a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \qquad \text{ezért} \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}.$$

6. lépés. Tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{a} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(q \cdot \frac{\ln(a)}{q}\right)} = \\ &= \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\exp\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \sqrt[q]{\prod_{k=1}^{q} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right)} = \prod_{k=1}^{p} \exp\left(\frac{\ln(a)}{q}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\ln(a)}{q}\right) = \exp\left(\frac{p}{q} \ln(a)\right) = a^{p/q} =: a^r \end{aligned}$$

Megjegyzés. Tetszőleges $\alpha \in (0, +\infty)$, ill. $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$\alpha^0 = \exp(0 \cdot \ln(\alpha)) = \exp(0) = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \alpha^{-r} = \exp(-r \cdot \ln(\alpha)) = \frac{1}{\exp(r \cdot \ln(\alpha))} = \frac{1}{a^r}.$$

7. lépés. Mivel minden $0 < r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$1 = f(0) = f(r - r) = f(-r) \cdot f(r), \qquad \text{ezért} \qquad f(-r) = \frac{1}{f(r)} = \frac{1}{a^r} = a^{-r}.$$

Így beláttuk, hogy bármely $r \in \mathbb{Q}$ számra $f(r) = a^r$.

8. lépés. Mivel f folytonos és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $r_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, hogy $\lim(r_n) = x$, ezért

$$f(x) = f \lim(r_n)) = \lim(f(r_n)) = \lim\left(\exp_a(r_n)\right) = \exp_a(\lim(r_n)) = \exp_a(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Emlékeztető (Weiertrsaß-tétel). Ha $f \in \mathfrak{C}[a, b]$, akkor f-nek van abszolút minimuma és abszolút maximuma, azaz alkalmas $\alpha, \beta \in [a, b]$ esetén fennáll az

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \qquad (x \in [a, b])$$

egyenlőtlenségpár.

Feladat. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá $\lim_{x \to \pm\infty} f = +\infty$. Mutassuk meg, hogy f-nek van abszolút minimuma.

Útm.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy f alulról korlátos. A $\lim_{x \to -\infty} f = +\infty$ határérték-reláció következtében a $P := 1$ választással alkalmas $0 > a \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) > 1 \qquad (\mathbb{R} \ni x < a).$$

A $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ határérték-reláció következtében az $P := 1$ választással alkalmas $0 < b \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) > 1 \qquad (b < x \in \mathbb{R}).$$

Mindez azt jelenti, hogy f alulról korlátos az $\mathbb{R} \backslash [a, b]$ halmazon. Vizszont f folytonossága (így $f \in \mathfrak{C}[a, b]$) következtében f (alulról) korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy f alulról korlátos.

2. lépés. Legyen

$$m := \inf(\mathcal{R}_f) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor f alulról való korlátossága következtében $m \in \mathbb{R}$. Ha most $P := m + 1$ akkor alkalmas $0 > \xi \in \mathbb{R}$, ill. $0 < \eta \in \mathbb{R}$ számokkal

$$f(x) > m + 1 \qquad (x \in (-\infty, \xi) \cup (\eta, +\infty)).$$

Következésképpen

$$m = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [\xi, \eta]\}.$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[\xi, \eta]$, hiszen f folytonos, ezért alkalmas $\alpha \in [\xi, \eta]$ esetén $f(\alpha) = m$. Mindez azt jelenti, hogy α az f abszolút minimumhelye, $f(\alpha)$ pedig abszolút minimuma.

Házi feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f \in \mathfrak{C}$ és tegyük fel, hogy $\lim_{+\infty} f =: A \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy f korlátos függvény!

Útm. A feltétel szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz létezik olyan $\omega \in (0, +\infty)$, hogy minden $x \in (\omega, +\infty)$ esetén $|f(x) - A| < 1$, azaz

$$(*) \qquad A - 1 < f(x) < A + 1 \quad (x \in (\omega, +\infty)) \; .$$

Mivel $f \in \mathfrak{C}[a, \omega]$, ezért Weierstraß tétele alapján minden $x \in [a, \omega]$ esetén van olyan $x_m, x_M \in [a, \omega]$, hogy

$$f(x) \geq f(x_m) =: m \qquad \text{és} \qquad f(x) \leq f(x_M) =: M,$$

így

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (x \in [a, \omega]).$$

Ebből és $(*)$-ból következik, hogy

$$k := \min\{m, A - 1\} \leq f(x) \leq \max\{M, A + 1\} =: K \qquad (x \in \mathcal{D}_f = [a, +\infty)).$$

A fentiek alapján $k \leq K$ is igaz, ami azt jelenti, hogy f korlátos.

A Függelék

Tétel (Rekurziótétel: Dedekind (1888)). Legyen H tetszőleges (nem-üres) halmaz, $h \in H$, $f : H \to H$. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény (**sorozat**) van, amelyre

(i) $\varphi(0) = h$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n+1) = f(\varphi(n))$.

Biz.

1. lépés. Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi : \mathbb{N}_0 \to H$ rendelkezik a fenti tulajdonsággal. Ekkor $\varphi = \psi$, ui.

- $n = 0$ esetén
$$\varphi(0) = h = \psi(0);$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n) = \psi(n)$, akkor
$$\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = f(\psi(n)) = \psi(n+1).$$

2. lépés. Legyen

$$\mathcal{H} := \{A \subset \mathbb{N}_0 \times H : \ \textbf{i)}\, (0,h) \in A, \ \textbf{ii)}\, \forall n \in \mathbb{N}_0\, \forall k \in H : \ (n,k) \in A \ \Rightarrow \ (n+1, f(k)) \in A\}.$$

Ekkor nyilvánvalóan $\mathbb{N}_0 \times H \in \mathcal{H}$ és bármely $B \in \mathcal{H}$ esetén $(0,h) \in B$, ezért

$$D := \bigcap_{A \in \mathcal{H}} A$$

a legszűkebb $\mathbb{N}_0 \times H$-beli halmaz, amelyre **i)** és **ii)** teljesül. Ekkor

1. bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexhez pontosan egy olyan $b \in H$ van, hogy $(n,b) \in D$ teljesül, ui.
   - $n = 0$ esetén $(0,h) \in D$, továbbá ha valamely $h \neq c \in H$ esetén $(0,c) \in D$, akkor $D \setminus \{(0,c)\}$ még mindig rendelkezik az **i)** és **ii)** tulajdonsággal, ami ellentmond annak, hogy D a legszűkebb ilyen halmaz.
   - ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén pontosan egy olyan $b \in H$ van, amelyre $(n,b) \in D$, akkor az **ii)** tulajdonság következtében $(n+1, f(b)) \in D$. Ha valamely $d \neq f(b) \in H$ esetén $(n+1, d) \in D$ volna, akkor $D \setminus \{(n+1, d)\}$ rendelkezne az **ii)** tulajdonsággal, ami ellentmondana annak, hogy D a legszűkebb ilyen.

2. a fentiek következtében pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény van, hogy

$$\text{graph}(\varphi) = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times H : \; m = \varphi(n)\} = D.$$

   Ekkor

   - az **i)** azt jelenti, hogy $\varphi(0) = h$;
   - a **ii)** tulajdonság pedig azt, hogy $(n+1, f(\varphi(n)) \in D$, azaz

$$\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. Általánosítás. Legyen H halmaz, $h \in H$, $k \in \mathbb{N}$, $f : H^k \to H$. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény (**sorozat**) van, amelyre

(i) $\varphi(0) = h$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n+k) = f(\varphi(1), \ldots, \varphi(n))$.

B Függelék

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz

1. **zárt**, ha $H = \emptyset$ vagy $H \neq \emptyset$ és tetszőleges konvergens $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to H$ sorozatra $\lim(x_n) \in H$.
2. **nyílt**, ha $H^c := \mathbb{R} \backslash H$ komplementere zárt.
3. **kompakt**, ha bármely $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to H$ sorozat esetén van olyan $\nu \in \mathcal{I}$ indexsorozat, hogy $\lim(x_{\nu_n}) \in H$, azaz bármely H-beli sorozatnak van H-ban konvergens részsorozata.

Megjegyezzük, hogy bármely $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b$ esetén az $[a, b]$ intervallum zárt halmaz (ez indokolja a „zárt" intervallum elnevezést), ugyanakkor a $(0, 1)$ (nyílt) intervallum nem zárt halmaz. Hasonlóan zárt maga az $\mathbb{R}$ halmaz vagy pl. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén az

$$[a, +\infty), \qquad \text{ill. a} \qquad (-\infty, a]$$

„félegyenes".

Definíció. Valamely $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz esetén az $f : H \to H$ függvényt **kontrakció**nak nevezzük, ha alkalmas $q \in [0, 1)$ számmal

$$|f(u) - f(v)| \leq q \cdot |u - v| \qquad (u, v \in H).$$

A q szám neve **kontrakciós állandó**.

Példák.

1. Ha $H := [1, +\infty)$ és

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (t \in H),$$

akkor f kontrakció, ui.

- bármely $t \in H$ esetén (a mértani és számtani közép közötti egyenlőtlenség következtében)

$$[f(t)]^2 = 4 \cdot \frac{[f(t)]^2}{4} = 4 \cdot \left(\frac{\frac{t}{2} + \frac{1}{t}}{2}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{4}{2} = 2 \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R}),$$

azaz ($f(t) > 0$ miatt) $f(t) \geq \sqrt{2} > 1$;

- tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$|f(u) - f(v)| = \left|\frac{u}{2} + \frac{1}{u} - \frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right| = |u - v| \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{uv}\right| < \frac{1}{2} \cdot |u - v|,$$

  azaz (pl.) $q := 1/2$ kontrakció állandó.

2. Ha $H := \left[0, \frac{1}{3}\right]$ és

$$f(t) := t^2 + \frac{1}{8} \qquad (t \in H),$$

akkor f kontrakció, ui.

- bármely $t \in H$ esetén

$$0 \le f(t) = t^2 + \frac{1}{8} \le \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72} < \frac{24}{72} = \frac{1}{3},$$

  azaz $f(t) \in H$;

- bármely $u, v \in H$ esetén

$$|f(u) - f(v)| = \left|u^2 - v^2\right| = |u + v| \cdot |u - v| \le \frac{2}{3} \cdot |u - v|. \quad \square$$

Kontrakciók fontos szerepet játszanak pl. a közelítő számításokban (ld. **numerikus analízis**). Az alábbi tétel mintegy alapját képezi az említett alkalmazásoknak.

Tétel (fixponttétel). Tegyük fel, hogy $\emptyset \ne H \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $f : H \to H$ kontrakció a $q \in [0, 1)$ kontrakciós állandóval. Ekkor

1. pontosan egy olyan $\alpha \in H$ szám van, amelyre $f(\alpha) = \alpha$;

2. bármely $u \in H$ esetén az

$$x_0 := u, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   rekurzióval definiált (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \alpha$;

3. az iménti (x_n) sorozatra fennáll az

$$|x_n - \alpha| \le \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

   egyenlőtlenség (**hibabecslés**).

Bizonyítás.

1. lépés A $0^0 := 1$ megállapodással megmutatjuk, hogy fennáll az

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{35}$$

becslés. Valóban,

- az $n = 0$ esetben az állítás nyilvánvaló.
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén fennáll az (35) egyenlőtlenség, akkor

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq q \cdot |x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot q^n \cdot |x_1 - x_0| = q^{n+1} \cdot |x_1 - x_0|.$$

2. lépés Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat Cauchy-féle. Ha $m, n \in \mathbb{N}_0$ és (pl.) $m > n$, akkor

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leq \\
&\leq q^{m-1} \cdot |x_1 - x_0| + q^{m-2} \cdot |x_1 - x_0| + \ldots + q^{n+1} \cdot |x_1 - x_0| + q^n \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= \left(q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^{n+1} + q^n\right) \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= q^n \cdot \left(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \ldots + q + 1\right) \cdot |x_1 - x_0| = \\
&= q^n \cdot \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.
\end{aligned}$$

Mivel (q^n) nullsorozat, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ index, hogy bármely

$N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre
$$q^n < \frac{(1-q)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}.$$
Következésképpen bármely $N \leq m, n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_m - x_n| < \varepsilon$, azaz (x_n) Cauchy-féle.

3. lépés A Cauchy-féle konvergenciakritérium következtében az (x_n) sorozat konvergens is. Legyen $\alpha := \lim(x_n)$. Mivel H zárt halmaz, ezért $\alpha \in H$. Belátjuk, hogy $f(\alpha) = \alpha$. Valóban,

$$0 \leq |f(\alpha) - \alpha| = |(f(\alpha) - f(x_n)) + (f(x_n) - \alpha)| \leq |f(\alpha) - f(x_n)| + |f(x_n) - \alpha| =$$

$$= |f(\alpha) - f(x_n)| + |x_{n+1} - \alpha| \leq q \cdot |x_n - \alpha| + |x_{n+1} - \alpha| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

csak úgy teljesülhet, ha $f(\alpha) - \alpha = 0$, azaz $f(\alpha) = \alpha$.

4. lépés Tegyük fel, hogy valamely $\beta \in H$ számra $f(\beta) = \beta$. Ekkor

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq q \cdot |\alpha - \beta| \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1-q) \cdot |\alpha - \beta| \leq 0.$$

Mivel $0 \leq q < 1$ ezért innen $(0 \leq)|\alpha - \beta| \leq 0$, azaz $|\alpha - \beta| = 0$ következik. Tehát $\alpha = \beta$.

5. lépés A 2. lépésbeli

$$|x_m - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0, \ m > n)$$

becslés, ill a tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ indexre fennálló

$$\lim_{m \to \infty} (x_m - x_n) = \alpha - x_n, \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{m \to \infty} (|x_m - x_n|) = |\alpha - x_n|$$

határértékreláció figyelembevételével az

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

hibabecslés adódik. ■

A fenti tételben szereplő α számot a tételbeli f függvény **fixpontj**ának, magát a tételt **fixponttétel**nek nevezzük. Az α fixpont tehát az
$$f(x) = x \qquad (x \in H)$$
egyenletnek a megoldása. Éppen ezért a fixponttétel a közelítő számítások, módszerek (ld. numerikus

analízis) egyik legfontosabb eszköze.

Példa. Egy korábbi példában szereplő

$$f(t) := \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R})$$

kontrakció esetében az $f(x) = x$ egyenlet

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \qquad (1 \leq t \in \mathbb{R})$$

alakú. Könnyű ellenőrizni, hogy ennek az egyenletnek egyetlen α gyöke van az $[1, +\infty)$ halmazban, nevezetesen $\alpha = \sqrt{2}$, hiszen bármely $x \in [1, +\infty)$ esetén

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2 = 2x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{2}.$$

Ha a fixponttételt au $u := 2$ „kezdőértékkel” alkalmazzuk, akkor az

$$x_0 := 2, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatot kapjuk (**Heron-féle** vagy **babiloni gyökkeresési algoritmus**). A fixponttétel következtében tehát az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = \sqrt{2}$, továbbá a $q := 1/2$ kontrakciós állandóval

$$\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} \cdot |x_0 - x_1| = \frac{|2 - 3/2|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$