

**6. feladatsor: Gauss-számsík, egységgyökök****1. feladat**

A sík mely geometriai transzformációjának felelnek meg a következő leképezések?

- (a)  $z \mapsto 3z + 2$
- (b)  $z \mapsto (1 + i)z$
- (c)  $z \mapsto 1/\bar{z}$

**2. feladat**

A Gauss-számsíkon egy négyzet középpontja a  $K = 1 + 2i$  illetve egyik csúcsa az  $A = 5 + 4i$  komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

**3. feladat**

Legyen  $z, w$  két különböző komplex szám! Írja fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve súlypontját, melyeknek  $z, w$  csúcsai!

**4. feladat**

Forgassa el síkban a  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektort (a) 34 (b)  $-176$  fokkal.

**5. feladat**

Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 2\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = 3\}$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0\}$$

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- |                |                |                     |                     |                |                           |
|----------------|----------------|---------------------|---------------------|----------------|---------------------------|
| (a) $A$        | (b) $B$        | (c) $C$             | (d) $D$             | (e) $A \cap B$ | (f) $A \cup B$            |
| (g) $A \cap C$ | (h) $B \cup C$ | (i) $A \setminus B$ | (j) $A \triangle B$ | (k) $A \cap D$ | (l) $C \setminus \bar{B}$ |

**6. feladat**

Ábrázolja a következő halmazokat a Gauss-számsíkon.

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i + 2| = 10\}$
- (b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$
- (c)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z\}$
- (d)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq |z + 3|\}$
- (e)  $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z + i - 2| \leq 4\}$

**7. feladat**

Az alábbi számok közül melyek egységgyökök, mennyi ezek rendje, milyen  $n$ -re lesznek ezek  $n$ -edik egységgyökök, illetve primitív  $n$ -edik egységgyökök?

- |   |                              |   |
|---|------------------------------|---|
| (a) $1$   | (b) $-1$                     | (c) $i$                                       |
| (d) $1 + i$   | (e) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$   | (f) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$                   |
| (g) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  | (h) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ | (i) $\cos(\sqrt{2}\pi) + i \sin(\sqrt{2}\pi)$ |
| (j) $\cos\left(\frac{\pi}{361}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{361}\right)$ |                              |   |

**8. feladat**

Mutassuk meg, hogy ha  $\varepsilon^4 = i$ , akkor  $4 \mid o(\varepsilon)$ !

**9. feladat**

Ha  $o(\varepsilon) = 128$ , akkor mennyi lehet  $o(i \cdot \varepsilon)$ ?

**10. feladat**

- (a) A  $z = -1 - \sqrt{3}i$  egyik negyedik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$ . Alkalmas primitív negyedik egységgyök segítségével állítsa elő a többi negyedik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi negyedik gyökét.
- (b) A  $z = -i$  egyik hatodik gyöke  $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . Alkalmas primitív hatodik egységgyök segítségével állítsa elő a többi hatodik egységgyököt majd ezek felhasználásával számítsa ki  $z$  többi hatodik gyökét.
- (A komplex gyökvonás képlete nem használható.)