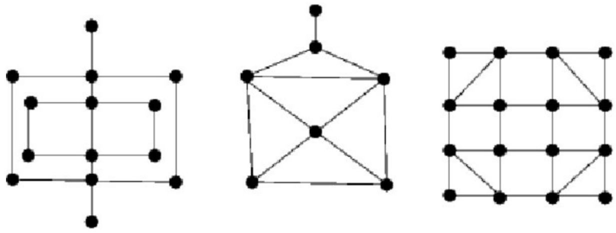
11. feladatsor: Hamilton-körök, nyílt és zárt Euler-vonalak

1. feladat

Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (=van-e nyílt/zárt Euler vonala a gráfnak)? Igazoljuk állításunk.



2. feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

3. feladat (*)

Mutassuk meg, hogy ha egy hurokélmentes gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!

4. feladat

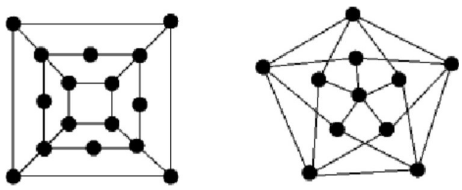
Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor bárhogyan töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő. Mi a helyzet, ha él helyett egy csúcsot törlünk?

5. feladat

Bizonyítsuk be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!

6. feladat

Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton-köre (útja)? Igazoljuk állításunk.



7. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből valamelyik élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!

8. feladat

Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz, hogy **(a)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört; **(b)** létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.

9. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a két csúcsosztálya azonos elemszámú!

10. feladat
Bejárható-e a 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

11. feladat (*)
Legyen $n \geq 3$ pozitív egész, és G egy n pontú *egyszerű* gráf. Bizonyítsa be, hogy ha G minden csúcsának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre!

12. feladat
Egy hotelbe 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tud tölteni a társaság!

13. feladat (*)
Mutassuk meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör. (Hogy kell ezt érteni?)

14. feladat (*)
Mutassuk meg, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen csúcsát, a maradékban már lesz.