Trabalho Autónomo 2

Análise de Redes

Student's name: Diogo Alexandre Alonso de Freitas Freitas;
Student's number: 104841;
Student's mail: daafs@iscte-iul.pt

1 *Que palavra(s) da lista seguinte descrevem cada uma das cinco redes abaixo:*

- *Dirigida*
- *Não dirigida*
- *Cíclica*
- *Acíclica*
- *Aproximadamente acíclica*
- *Planar*
- *Aproximadamente planar*
- *Árvore*
- *Árvore aproximada*

a) **A Internet, ao nível dos sistemas autónomos:** Exemplo

- **Não dirigida:** A comunicação entre sistemas autônomos ocorre em ambas as direções.
- **Ciclica:** Existem inúmeros caminhos entre dois sistemas autônomos, formando ciclos.
- **Aproximadamente planar:** A representação gráfica da Internet pode ser desenhada em um plano com um número mínimo de cruzamentos entre as arestas.

b) **Uma teia alimentar:** Exemplo

- **Dirigida:** A relação entre um predador e uma presa é unidirecional (um organismo alimenta-se de outro).
- **Acíclica:** Em geral, não há ciclos fechados na teia alimentar (um organismo não se alimenta de si mesmo nem existe uma cadeia alimentar circular infinita).
- **Aproximadamente planar:** A representação gráfica de uma teia alimentar pode ser desenhada em um plano com um número mínimo de cruzamentos.

c) **O caule e os ramos de uma planta:** Exemplo

- **Dirigida:** A relação entre o caule, ramos e folhas é hierárquica, com um fluxo de nutrientes em uma direção.
- **Árvore:** A estrutura ramificada da planta forma uma árvore, com um único nó raiz (o caule) e ramos se ramificando a partir dele (automaticamente é planar e ciclica).
- **Planar:** A representação gráfica da estrutura da planta pode ser desenhada em um plano sem cruzamentos entre as arestas.
- **Acíclica:** A estrutura do caule e dos ramos é hierárquica e direcionada, resultando em uma topologia acíclica.

d) **Uma teia de aranha:** `Exemplo`

- **Não Dirigida:** A aranha pode se mover em qualquer direção ao longo dos fios da teia.
- **Cíclica:** A teia de aranha forma uma estrutura complexa com muitos ciclos.
- **Aproximadamente planar:** Embora a teia tenha uma estrutura tridimensional, sua representação bidimensional pode ser feita com um número mínimo de cruzamentos.

e) **Uma clique completa de quatro nós:** `Exemplo`

- **Não dirigida:** Todos os nós estão conectados a todos os outros.
- **Cíclica:** Existem muitos ciclos possíveis entre os nós.

2 *Dê um exemplo real de cada um dos seguintes tipos de redes, sem incluir os cinco exemplos acima:*

f) **Uma rede dirigida acíclica (ou aproximadamente acíclica):** `Modelo de versionamento de software (Git)`

g) **Uma rede dirigida cíclica:** `Redes Sociais (exemplo do X, antigo Twitter)`

h) **Uma árvore (ou árvore aproximada):** `Árvore de decisão (machine learning)`

i) **Uma rede planar (ou aproximadamente plana):** `Redes de estradas ou ruas`

j) **Uma rede bipartida:** `Relação entre filmes e atores`

3 *Descreva sucintamente uma técnica empírica que poderia ser utilizada para medir a estrutura de cada uma das seguintes redes (i.e., para determinar completamente as posições de todas as arestas):*

k) **A World Wide Web:**

- **Técnica:** `Rastreamento da Web (Web Crawling)` $\Rightarrow$ A relação entre o caule, ramos e folhas é hierárquica, com um fluxo de nutrientes em uma direção.

l) **Uma rede de citações de artigos científicos:**

- **Técnica:** `Bases de dados bibliográficas:` $\Rightarrow$ Plataformas como Scopus, Web of Science e Google Scholar armazenam informações sobre artigos e suas citações, permitindo a construção de grafos de citação.

m) **Uma teia alimentar:**

- **Técnica:** `Análise de Redes Tróficas Estáveis` ⇒ A análise de redes tróficas estáveiscombina a informação sobre a dieta dos organismos, obtida através da análise de isótopos estáveis, com modelos de redes complexas, permitindo uma avaliação mais precisa da estrutura e resiliência das teias alimentares.

n) **Uma rede de amizades entre um grupo de colegas de trabalho:**

- **Técnica:** `Análise de e-mails` ⇒ Analisando o fluxo de e-mails, é possível inferir relações de comunicação.

o) **Uma rede elétrica:**

- **Técnica:** `Mapas de infraestrutura:` ⇒ Mapas que detalham a localização de subestações, linhas de transmissão e conexões.

4 *Uma rede simples é constituída por n nós num único componente. Qual é o número máximo possível de arestas que ele poderá ter? Qual é o número mínimo possível de arestas que ele poderá ter?*

Rede Simples Conexa: Uma rede simples é aquela onde não existem laços (arestas que conectam um nó a si mesmo) nem arestas múltiplas (mais de uma aresta conectando os mesmos dois nós). Se a rede é conexa, significa que existe um caminho entre qualquer par de nós.

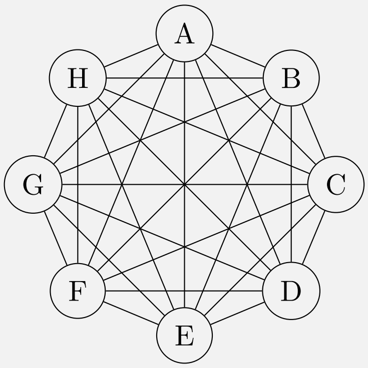
4.1 Número Máximo de Arestas

- **Grafo Completo:** O grafo completo é o grafo simples com o maior número possível de arestas para um dado número de nós. Em um grafo completo, cada nó está conectado a todos os outros nós.
- **Cálculo:** Para um grafo completo com n nós, o número total de arestas é dado pela combinação de n elementos tomados 2 a 2. Abaixo podemos visualizar a respetiva fórmula para calcular o máximo número de arestas que um determinado grafo com $\boldsymbol{n}$ nodes pode ter:

$$\mathrm{C}_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n*(n-1)}{2}$$

A seguir, será apresentado um exemplo de um grafo com 8 nós, contendo todas as ligações possíveis. Este grafo será utilizado como referência para verificar a correção da forma apresentada:

Exemplo 1: Número máximo de arestas de um grafo com 8 nós



Cálculos auxiliares:

$$C^8_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8*(8-1)}{2} = \frac{8*7}{2} = 28 \text{ arestas}$$

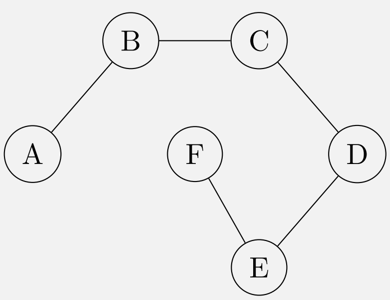
Pelos cálculos acima, podemos concluir que o número máximo de arestas que um grafo com 8 nodos pode ter é 28.

4.2 Número mínimo de arestas

O número mínimo de arestas que um grafo depende se esta necessita de possuir todos os nodos conectados ou não. Abaixo serão citados 2 casos diferentes, dependendo da interpretação do mesmo:

- **Grafo Vazio:** Um grafo que não possui arestas (ou seja, não conecta nenhum par de nós) é o caso mínimo. Portanto, para um grafo simples com $\boldsymbol{n}$ nós, o número mínimo de arestas é 0.
- **Grafo Conectado:** Se for necessário que todos os nós tenham alguma ligação, ou seja, haja um caminho entre qualquer par de nós, o número mínimo de arestas é $\boldsymbol{n}$ - 1. Isso corresponde a um grafo em forma de árvore, onde cada nó é conectado de forma que não haja ciclos. Abaixo, podemos visualizar um exemplo deste grafo com 6 nodos:

Exemplo 2: Número minimo de arestas de um grafo conectado com 6 nós

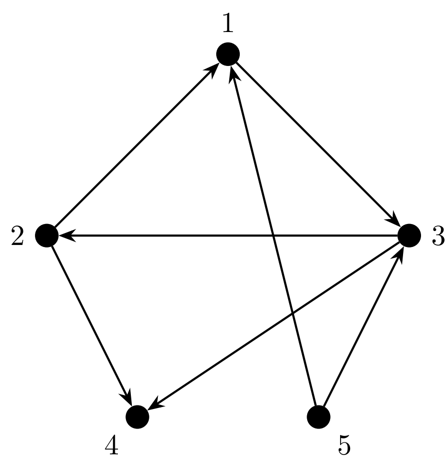


Cálculos auxiliares:

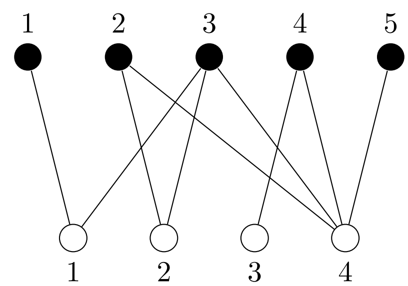
$$8 - 1 = 7$$

Pelo cálculo acima, podemos concluir que o número mínimo de arestas que um grafo conectado com 7 nodos pode ter é 6.

5 *Considere as duas redes seguintes:*



Rede dirigida **(a)**



A rede **(b)** não é dirigida, mas sim bipartida

a) **A matriz de adjacência da rede (a):**

Uma matriz de adjacência é uma tabela quadrada que representa a relação entre vértices de um grafo, onde cada elemento indica se existe ou não uma aresta entre os vértices correspondentes; para ler a matriz, verifica-se se o elemento a_{ij} é 1 existência de uma aresta entre os vértices V_i e V_j) ou 0 (não existe aresta).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **A matriz de incidência da rede (b):**

Uma matriz de incidência é uma tabela que representa a relação entre vértices e arestas de um grafo, onde as linhas correspondem aos vértices, as colunas correspondem às arestas e cada elemento indica se um vértice está ou não incidente a uma aresta; se o vértice está na aresta, o elemento é 1 (ou o peso da aresta em grafos ponderados), caso contrário, é 0. Para ler a matriz, verifica-se se o elemento a_{ij} é 1 (indicando que o vértice V_i está incidente à aresta e_j) ou 0 (não está incidente).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) **A matriz de projeção para a projeção da rede (b) nos seus nós pretos:**

A matriz de projeção para os nós pretos dá-se pelo cálculo da matriz de incidência B, multiplicado pela mesma matriz B transposta. Abaixo podemos visualizar a respetiva fórmula:

$$P_{ij}^{\text{nós pretos}} = \sum_{k=1}^{g} B_{ik}B_{jk} = \sum_{k=1}^{g} B_{ik}B_{kj}^{T} = BB^{T}$$

Para finalmente aplicar a fórmula, vamos então visualizar a sua respetiva matriz de incidência, como também a transposta:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com as 2 matrizes criadas, podemos finalmente prosseguir para o cálculo da matriz de projeção da projeção da rede **(b)**

$$B \cdot B^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por curiosidade, abaixo podemos visualizar o respetivo grafo de projeção dos nós pretos da rede **(b)**