

Katedra informatiky  
Přírodovědecká fakulta  
Univerzita Palackého v Olomouci

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Demonstrace práce s datovými strukturami



2018

Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Kühn,  
Ph.D.

Patrik Becher

Studijní obor: Aplikovaná informatika,  
prezenční forma

## **Bibliografické údaje**

Autor:	Patrik Becher
Název práce:	Demonstrace práce s datovými strukturami
Typ práce:	bakalářská práce
Pracoviště:	Katedra informatiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Rok obhajoby:	2018
Studijní obor:	Aplikovaná informatika, prezenční forma
Vedoucí práce:	Mgr. Tomáš Kühn, Ph.D.
Počet stran:	34
Přílohy:	1 CD/DVD
Jazyk práce:	český

## **Bibliographic info**

Author:	Patrik Becher
Title:	Data Structure Demonstration
Thesis type:	bachelor thesis
Department:	Department of Computer Science, Faculty of Science, Palacký University Olomouc
Year of defense:	2018
Study field:	Applied Computer Science, full-time form
Supervisor:	Mgr. Tomáš Kühn, Ph.D.
Page count:	34
Supplements:	1 CD/DVD
Thesis language:	Czech

## Anotace

*Cílem bakalářské práce bylo vytvořit nástroj pro podporu výuky algoritmizace, konkrétně práce se základními stromovými datovými strukturami (binární vyhledávací stromy, AVL stromy, červenočerné stromy). Výsledná aplikace podporuje vizualizaci vybraných datových struktur, včetně názorné demonstrace běžně prováděných operací s těmito datovými strukturami se souběžným zobrazením pseudokódu prováděné operace.*

## Synopsis

*Toto mně doplní Míša... :D*

**Klíčová slova:** Binární vyhledávací stromy, Binární strom, AVL strom, Červenočerný strom, Stromové animace Java, JavaFX

**Keywords:** Binary search trees, Binary Tree, AVL tree, Redblack tree, Tree animations, Java, JavaFX

Rád bych poděkoval panu Mgr. Tomáši Kührovi Ph.D. za vedení této bakalářské práce a panu RNDr. Arnoštu Večerkovi za odbornou pomoc a poskytnuté materiály k práci. Dále bych chtěl poděkoval mé rodině a přítelkyni za podporu při tvorbě.

*Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci včetně příloh vypracoval/a samostatně a za použití pouze zdrojů citovaných v textu práce a uvedených v seznamu literatury.*

datum odevzdání práce

podpis autora

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Stromy</b>	<b>8</b>
2.1	Binární strom . . . . .	10
2.2	Binární vyhledávací strom . . . . .	10
2.2.1	Vyhledávání . . . . .	11
2.2.2	Vkládání . . . . .	13
2.2.3	Odebírání . . . . .	16
2.3	AVL strom . . . . .	18
2.3.1	Rotace . . . . .	21
2.3.2	Vyhledávání . . . . .	22
2.3.3	Vkládání . . . . .	22
2.3.4	Odebírání . . . . .	23
2.4	Červeno-černý strom . . . . .	25
2.4.1	Transformace . . . . .	26
2.4.2	Vyhledávání . . . . .	27
2.4.3	Vkládání . . . . .	28
	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
	<b>Conclusions</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>První příloha</b>	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Druhá příloha</b>	<b>32</b>
<b>C</b>	<b>Obsah přiloženého CD/DVD</b>	<b>32</b>
	<b>Literatura</b>	<b>34</b>

## Seznam obrázků

1	Příklady neorientovaných stromů . . . . .	8
2	Popis stromu . . . . .	9
3	Binární strom . . . . .	10
4	Rozdílné výšky stromu . . . . .	11
5	Postup vyhledávání hodnoty 5 . . . . .	12
6	Postup vkládání hodnoty 6 - hledání . . . . .	14
7	Postup vkládání hodnoty 6 - vložení . . . . .	14
8	Postup odebírání hodnoty 4 . . . . .	17
9	Vyvážený strom . . . . .	19
10	Výpočet faktoru vyvážení pro uzel $u$ . . . . .	19
11	Ukázka vyváženého AVL stromu . . . . .	20
12	Rotace RR . . . . .	21
13	Rotace LL . . . . .	21
14	Rotace RL . . . . .	22
15	Rotace LR . . . . .	22
16	Postup vkládání hodnoty 5 . . . . .	23
17	Postup odebírání hodnoty 1 . . . . .	25
18	Ukázka vyváženého ČČ stromu . . . . .	25
19	Rotace RR . . . . .	26
20	Rotace LL . . . . .	26
21	Rotace RL . . . . .	27
22	Rotace LR . . . . .	27
23	Přebarvení 1 . . . . .	28
24	Přebarvení 2 . . . . .	28

## Seznam zdrojových kódů

1	search . . . . .	12
2	Result - Třída . . . . .	14
3	search - úprava . . . . .	15
4	insert . . . . .	15
5	delete . . . . .	18
6	computeFactor . . . . .	20

# 1 Úvod

Tato aplikace vznikla za účelem výuky základních binárních stromů. Obsahuje podporu pro *Binární vyhledávací*, *AVL* a *Červenočerné stromy*. Program pomocí animací zobrazuje operace: *Vyhledávání*, *Vkládání* a *Odebírání* prvků ze stromů. Souběžně s animací zobrazuje stručný pseudokód aktuálně prováděné operace. Dále umožňuje *Opakovat poslední operaci* a *Generování náhodných stromů*.

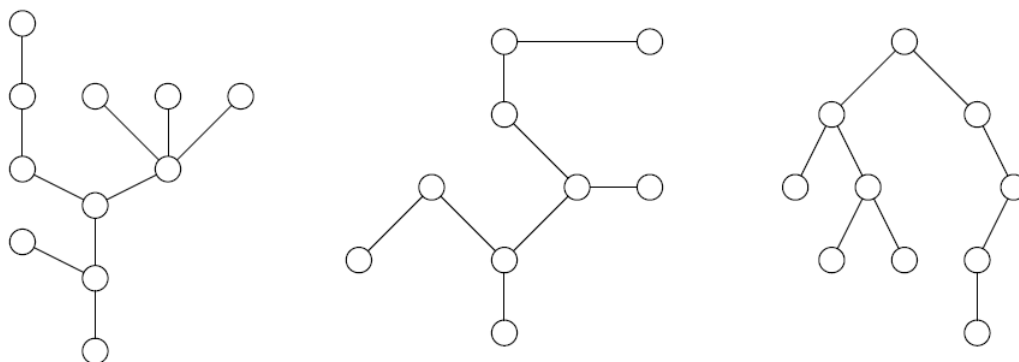
Text samotné práce se dělí na dvě části: *Teoretickou část*, ve které se zabývám teorií vybraných stromů a *Programovou část*, která popisuje samotnou implementaci a funkcionalitu programu.

## 2 Stromy

V kapitole jsou vysvětleny základní pojmy, které jsou nezbytné k pochopení vlastností *stromů* obsažených v aplikaci. V podkapitolách jsou osvětleny principy pro tvorbu a následnou práci s konkrétními *binárními vyhledávacími stromy*. Využitím těchto principů byl naprogramován tento výukový nástroj.

### Definice 1 (Strom)

*Strom* je neorientovaný <sup>1</sup> souvislý <sup>2</sup> graf bez kružnic <sup>3</sup> [1].



Obrázek 1: Příklady neorientovaných stromů

Strom je datová struktura, která představuje stromovou strukturu propojených *uzlů* <sup>4</sup>. Uzly jsou mezi sebou vzájemně spojeny pomocí *hran* <sup>5</sup>. Strom složený z uzlů  $U$  má  $|U - 1|$  hran.

### Definice 2 (Kořenový strom)

*Kořenový strom* je strom, ve kterém je vybrán jeden vrchol (kořen). Může to být kterýkoliv vrchol. Bývá to ale vrchol, který je v nějakém smyslu na vrcholu hierarchie objektů, která je stromem reprezentována. [1]

<sup>1</sup>Mezi každými dvěma vrcholy existuje právě jedna cesta.

<sup>2</sup>Vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf.

<sup>3</sup>Přidáním jakékoli hrany vznikne graf s kružnicí.

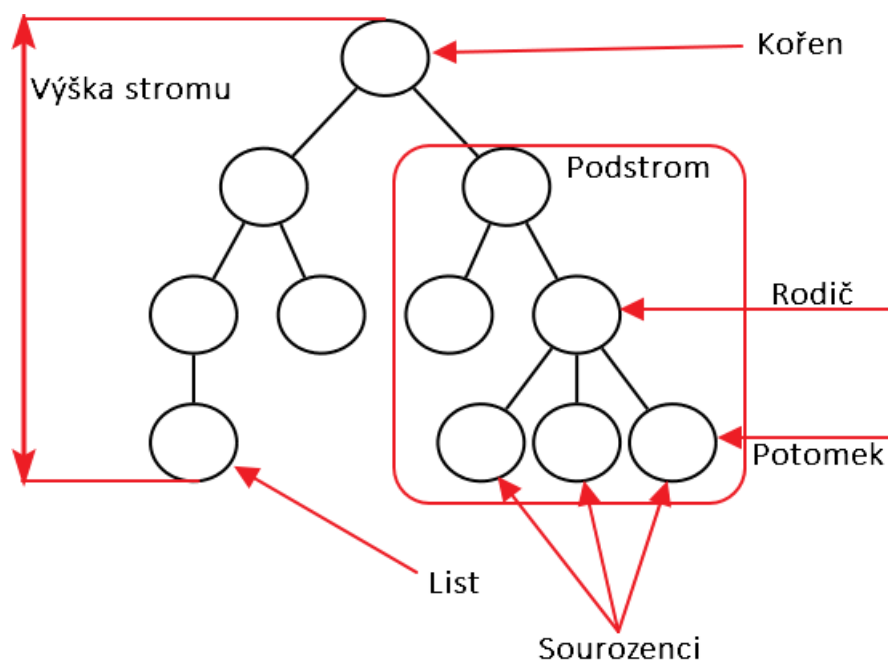
<sup>4</sup>Prvek obsahující hodnotu.

<sup>5</sup>Představuje cestu mezi spojenými uzly.



### Důležité pojmy:

- **Uzel** – Jednoduše jakýkoliv prvek stromu.
- **Kořen** – Jeden konkrétní uzel, který se nachází na vrcholu stromu. Pouze tento uzel nemá *rodiče*.
- **Potomek, následník** – Uzel, který je hranou přímo připojen k jinému uzlu, cestou od kořene.
- **Rodič, předchůdce** – Uzel, který má alespoň jednoho potomka.
- **Sourozenci** – Skupina uzlů, které mají stejného rodiče.
- **Podstrom** – Část stromu, která je úplným stromem, s tím, že kořen tohoto podstromu má svého rodiče.
- **Koncový uzel, list** – Uzel bez potomků.
- **Výška stromu** – Nejdelší délka cesty od kořene k uzlu.



Obrázek 2: Popis stromu

### Definice 3 ( $m$ -ární stromy)

Kořenový strom se nazývá  $m$ -ární, právě když každý jeho vrchol má nejvýše  $m$  potomků. 2-ární strom se nazývá binární. Kořenový strom se nazývá úplný  $m$ -ární, právě když každý jeho vrchol nemá buď žádného nebo má právě  $m$  potomků.[2]

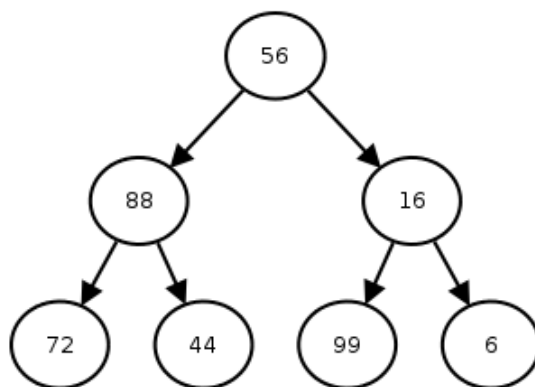
## 2.1 Binární strom

### Definice 4 (Binární strom)

*Binární strom* je typ kořenových stromů, ve kterém každý obsažený uzel má maximálně 2 potomky.

Každý uzel obsahuje tyto vlastnosti:

- **Klíč** – Hodnota uložená v uzlu.
- **Ukazatel na levého potomka**
- **Ukazatel na pravého potomka**
- **Ukazatel na jednoho rodiče** – Tento ukazatel není povinný.



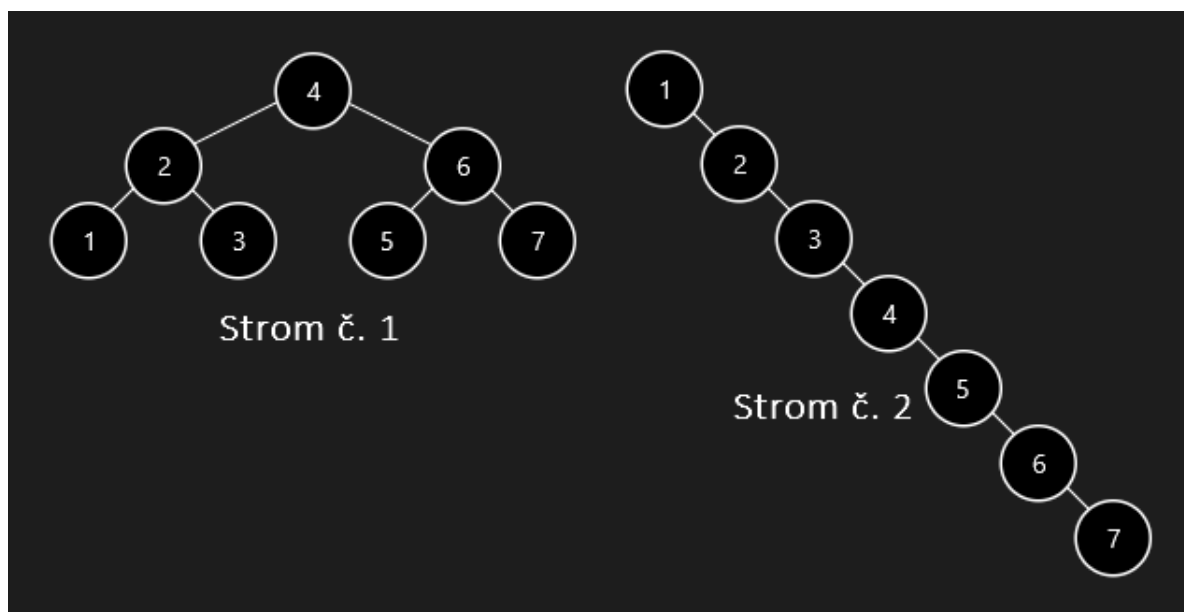
Obrázek 3: Binární strom

## 2.2 Binární vyhledávací strom

Binární *vyhledávací* strom (zkratka BVS), je speciální typ binárního stromu, kde platí následující:

- Každý **pravý** potomek  $P$  rodiče  $R$  má vyšší hodnotu  $h$  než jeho rodič. Platí tedy:  $P.h > R.h \Rightarrow$  Pravý podstrom uzlu  $R$  obsahuje pouze uzly, které mají vyšší hodnotu než uzel  $R$ .
- Každý **levý** potomek  $L$  rodiče  $R$  má nižší hodnotu  $h$  než jeho rodič. Platí tedy:  $P.h > L.h \Rightarrow$  Levý podstrom uzlu  $R$  obsahuje pouze uzly, které mají nižší hodnotu než uzel  $R$ .
- Ve stromě se nenachází dva uzly se stejnou hodnotou.

Toto uspořádání uzlů v BVS usnadňuje vyhledávání. Operace nad BVS stromem s výškou  $h$  mají časovou složitost  $\theta(h)$ . V nejhorším případě může mít BVS výšku rovnu  $n - 1$ , kde  $n$  je počet uzlů. Oba případy jsou zobrazeny na obrázku 4.



Obrázek 4: Rozdílné výšky stromu

### 2.2.1 Vyhledávání

Operace *vyhledávání* patří k nejčastěji používané operaci s BVS. Při *vyhledávání* je potřeba zadat hodnotu  $x$ , kterou chceme vyhledat. Postupně dochází k porovnávání hodnot uzlů s  $x$ . Výsledkem vyhledávání je buď uzel, který obsahuje hodnotu  $x$  nebo takový uzel neexistuje.

#### Přesný postup vyhledávání:

##### 1. krok – počáteční

Na začátku vyhledávání je třeba určit aktuální uzel, který označíme  $u$ . Hledanou hodnotu označíme  $x$ .

V tomto kroku  $u$  bude kořen stromu, pokud strom nemá kořen, hodnota  $x$  je nenalezena a tím vyhledávání končí.

##### 2. krok – průběžný

Zde dochází k porovnávání  $x$  a hodnoty aktuálního uzlu  $u$ . Hodnotu  $u$  označíme  $u.h$ .

Pokud je  $u$  prázdný, vyhledávání končí neúspěchem.

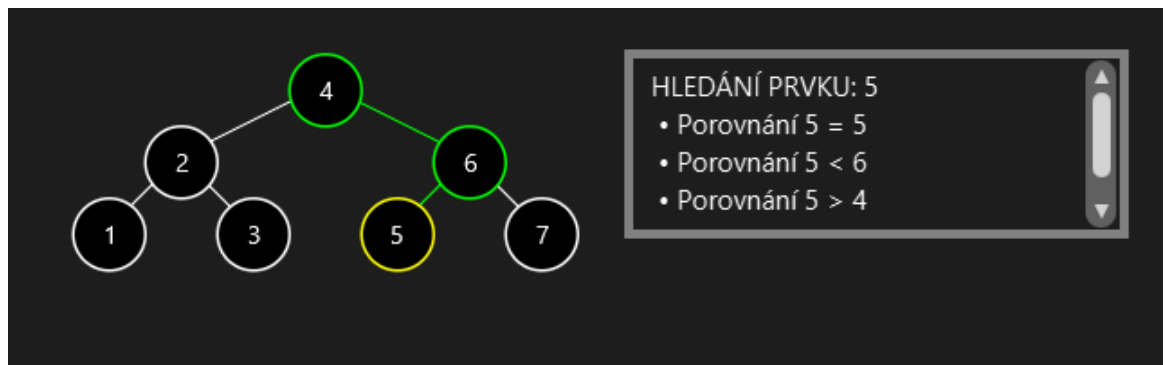
#### Při porovnávání mohou nastat tyto možnosti:

- $x > u.h$

V tomto případě jako  $u$  nastavíme pravého potomka  $u$ . A znovu provedeme 2. krok.

- $x < u.h$   
V tomto případě jako  $u$  nastavíme levého potomka  $u$ . A znovu provedeme 2. krok.
- $x = u.h$   
Hledaná hodnota  $x$  byla nalezena v  $u$ . Vyhledávání tedy končí.

Na obrázku 5 je zvýrazněna cesta průchodů stromem při vyhledávání uzlu s hodnotou 5. Na obrázku je i zaznamenána historie porovnávání.



Obrázek 5: Postup vyhledávání hodnoty 5

### Zdrojový kód vyhledávání v jazyku Java:

```

1 Node search(int value, Node node) { //value je hledaná hodnota, node
    je při prvním volání kořen
2   if (node == null) {
3     return null; //uzel nebyl nalezen
4   }
5
6   if (value > node.getValue()) { //pokud je hledaná hodnota vyšší než
    má aktuální uzel
7     search(value, node.getRight()); //nastavím uzel na pravého potomka
8   } else if (value < node.getValue()) { //pokud je hledaná hodnota
    vyšší než má aktuální uzel
9     search(value, node.getLeft()); //nastavím uzel na levého potomka
10  } else { //pokud není vyšší ani nižší, tak se musí rovnat
11    return node; //vrátím nalezený uzel
12  }
13 }
  
```

Zdrojový kód 1: search

### 2.2.2 Vkládání

Při  *vkládání*  zadané hodnoty  $x$  je nejprve nutné prohledat strom, jestli se zde  $x$  již nenachází. Pokud je nalezen uzel s hodnotou  $x$ , je výsledkem operace nalezený uzel. V případě, že daný strom tento uzel neobsahuje, je jako potomek posledního prohledávaného uzlu vložen nový uzel s hodnotou  $x$ .

#### Přesný postup vkládání:

**1. krok** – počáteční

Na začátku vkládání je třeba určit aktuální uzel, který označíme  $u$ . Vkládanou hodnotu označíme  $x$ .

V tomto kroku  $u$  bude kořen stromu. Pokud strom nemá kořen, vytvoříme nový uzel s hodnotou  $x$  a ten vložíme do stromu. Uzel se stane kořenem stromu, čímž vkládání končí.

**2. krok** – vyhledávání, vkládání

Před vkládáním je nejprve nutno ověřit, zde se ve stromu nenachází uzel s hodnotou  $x$ .

#### Vyhledávání může dopadnout těmito způsoby:

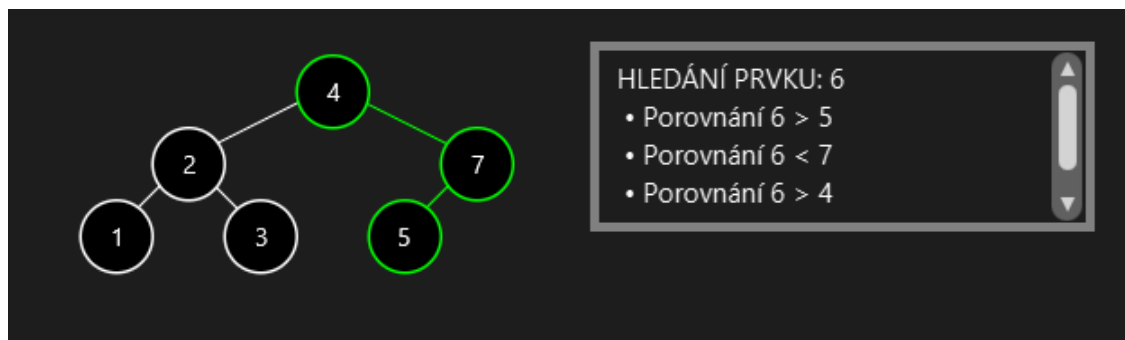
- Prvek byl nalezen.  
Pokud byl uzel s hodnotou  $x$  nalezen, vkládání končí neúspěchem.
- Prvek nebyl nalezen, přičemž platí  $x > u.h^6$ .  
Vytvoříme nový uzel s hodnotou  $x$  a vložíme jako pravého potomka  $u^7$ .
- Prvek nebyl nalezen, přičemž platí  $x < u.h^6$ .  
Vytvoříme nový uzel s hodnotou  $x$  a vložíme jako levého potomka  $u^7$ .

Na obrázku 6 je zvýrazněna cesta průchodů stromem při vyhledávání uzlu s hodnotou 6. Samotné vložení je na obrázku 7.

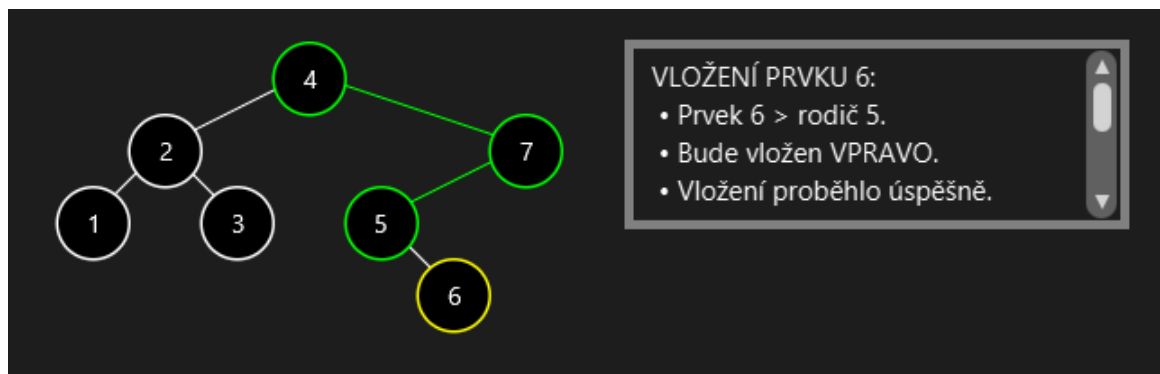
---

<sup>6</sup>Hodnota posledního navštíveného uzlu při hledání.

<sup>7</sup>Poslední navštívený uzel při hledání.



Obrázek 6: Postup vkládání hodnoty 6 - hledání



Obrázek 7: Postup vkládání hodnoty 6 - vložení

### Zdrojový kód vkládání v jazyku Java:

Před samotnou funkcí insert je třeba vytvořit třídu Result, která bude dále použita:

```

1 Class Result() {
2     private Node node; //poslední navštívený uzel (hledaný/rodič)
3     private boolean isFind; //parametr pro určení zda byl uzel nalezen
4
5     public Result(Node node, boolean isFind) { //konstruktor
6         ...
7     }
8     ...
9 }

```

Zdrojový kód 2: Result - Třída

Dále je potřeba trochu poupravit již známou funkci `search` 1:

```
1 Result search(int value, Node node) { //value je hledaná hodnota,  
    node je při prvním volání kořen  
2     if (value > node.getValue()) {  
3         if (node.getRight() != null) {  
4             search(value, node.getRight()); //pokud má pravého potomka  
5         } else {  
6             return new Result(node, false); //pokud nemá pravého potomka,  
                node = rodič vkládaného  
7         }  
8     } else if (value < node.getValue()) {  
9         if (node.getLeft() != null) {  
10            search(value, node.getLeft()); //pokud má levého potomka  
11        } else {  
12            return new Result(node, false); //pokud nemá levého potomka,  
                node = rodič vkládaného  
13        }  
14    } else {  
15        return new Result(node, true);  
16    }  
17 }
```

Zdrojový kód 3: `search` - úprava

Nyní funkce `insert`:

```
1 Node insert(int value) {  
2     Result result = search(value); //nejprve vyhledáme value  
3     if (result.isFind()) { //pokud byl uzel s danou hodnotou nalezen  
4         return result.getNode();  
5     } else { //dále vkládáme nově vytvořený uzel:  
6         if (value > result.getNode().getValue()) {  
7             result.getNode().setRight(new Node(value)); //bude pravý potomek  
8         } else {  
9             result.getNode().setLeft(new Node(value)); //bude levý potomek  
10        }  
11    }  
12    return null;  
}
```

Zdrojový kód 4: `insert`

### 2.2.3 Odebírání

Při *odebírání* zadané hodnoty  $x$  je stejně jako u vkládání nejprve nutné prohledat strom, zda se odebíraný uzel s hodnotou  $x$  ve stromě nachází. Pokud je uzel nalezen, je následně smazán a struktura stromu případně upravena.

#### Přesný postup odebírání:

**1. krok** – počáteční

Na začátku odebírání je třeba určit aktuální uzel, který označíme  $u$ . Odebíranou hodnotu označíme  $x$ .

V tomto kroku  $u$  bude kořen stromu. Pokud strom nemá kořen odebírání končí, uzel s hodnotou  $x$  nebyl nalezen.

**2. krok** – vyhledávání

Před odebíráním je nejprve nutno uzel s hodnotou  $x$  vyhledat.

#### Vyhledávání může dopadnout těmito způsoby:

- Prvek nebyl nalezen.  
Pokud se uzel s hodnotou  $x$  ve stromě nenachází, odebírání končí neúspěchem.
- Prvek byl nalezen.  
Nyní můžeme nalezený uzel  $u$  odebrat.

**3. krok** – odebírání

#### Odebírání $u$ má tyto možnosti:

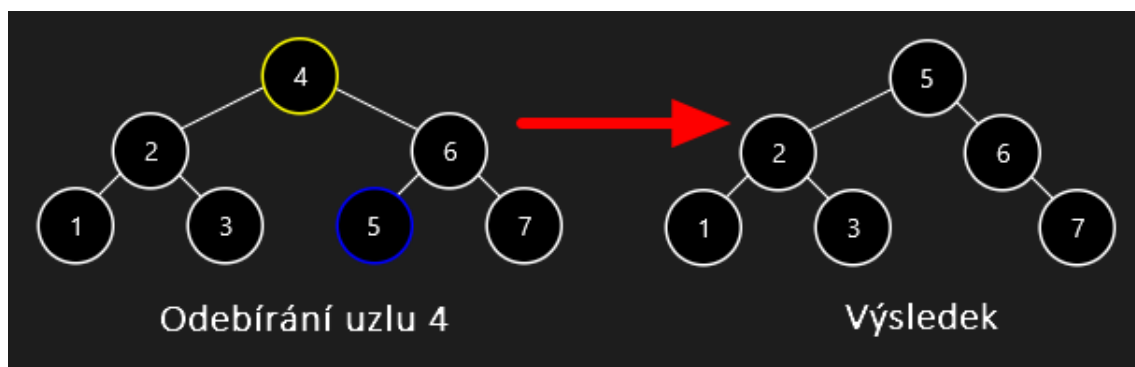
- Pokud  $u$  je list<sup>8</sup>.  
List  $u$  může být odebrán.
- $u$  má jednoho potomka.  
 $u$  bude nahrazen podstromem potomka.
- $u$  má dva potomky.
  - $u$  bude nahrazen *nejlevějším* prvkem z *pravého* podstromu.
  - $u$  bude nahrazen *nejpravější* prvkem z *levého* podstromu.

V následujícím obrázku 8 je ukázka mazání uzlu s hodnotou 4, který je následně nahrazen uzlem s hodnotou 5, který je *nejlevější* prvek z *pravého* podstromu.

---

<sup>8</sup>Nemá žádné potomky.





Obrázek 8: Postup odebírání hodnoty 4

Zdrojový kód<sup>9</sup> odebírání v jazyku Java:

---

<sup>9</sup>Tento kód je pouze zjednodušená implementace k lepšímu pochopení odebírání.

```

1 boolean delete(int value) {
2     Node removeNode = result.getNode();
3     Node helpNode; //pomocná proměnná
4
5     Result result = search(value); //vyhledám hodnotu
6
7     if (!result.isFind()) { //pokud ho nenajdu
8         return false;
9     }
10
11     if ((removedNode.getLeft() != null) && (removedNode.getRight() !=
12         null)) { //Pokud má dva potomky
13         helpNode = removedNode.getRight(); //dosadím pravého potomka
14
15         while (helpNode.getLeft() != null) { //a hledám nejlevějšího
16             helpNode = helpNode.getLeft();
17         }
18         removeNode.setNode(helpNode);
19     } else if (removedNode.getLeft() != null) { //pouze levý potomek
20         removeNode.setNode(removedNode.getLeft());
21     } else if (removedNode.getRight() != null) { //pouze pravý potomek
22         removeNode.setNode(removedNode.getRight());
23     } else { //pokud je to list
24         removeNode.delete(); //odstráním list ze stromu
25     }
26
27     return true;
28 }

```

Zdrojový kód 5: delete

## 2.3 AVL strom

Určitým způsobem by se dalo tvrdit, že *AVL strom* je binární vyhledávací strom, který má ale jednu zásadní odlišnost. Složitost všech operací u BVS je závislá na výšce stromu, je tedy žádoucí udržovat výšku stromu co nejnižší. *AVL strom* je tedy vyvážený binární vyhledávací strom.

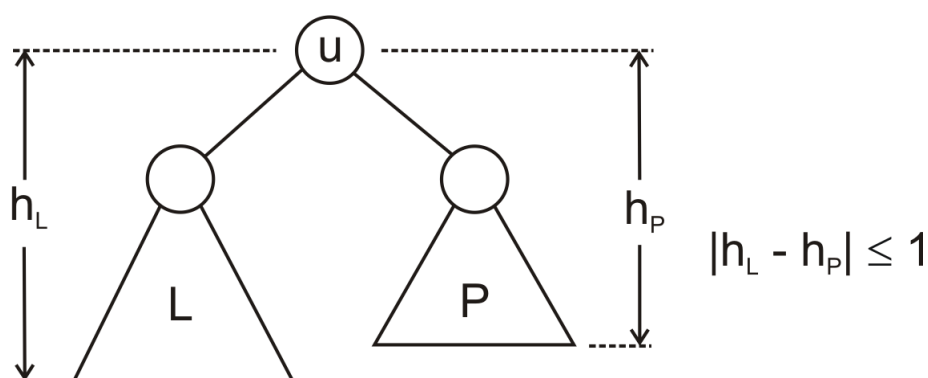
### Definice 5 (Vyvážený strom)

Strom je vyvážený tehdy a jen tehdy, je-li rozdíl výšek každého uzlu nejvýše 1.<sup>[6][4]</sup>

Kvůli udržování vyváženosti stromu mají operace *ukládání* a *odebírání* složitost  $\theta(\log(n))$ .

V následujícím obrázku 9 je předchozí definice o vyváženém stromu názorně vysvětlena. Nejprve je třeba zavést pojmy:

- $u$  – aktuální uzel.
- $L$  – levý podstrom  $u$ .
- $P$  – pravý podstrom  $u$ .
- $h_L$  – výška levého podstromu.
- $h_P$  – výška pravého podstromu.

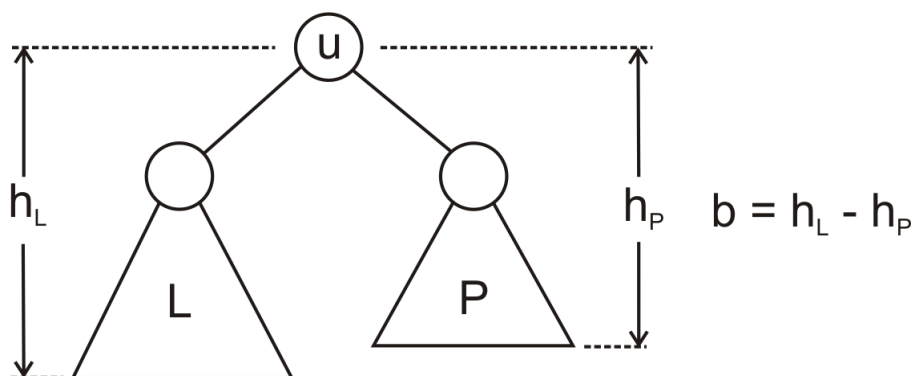


Obrázek 9: Vyvážený strom

### Faktor vyvážení

Pro kontrolu dodržení pravidla o vyvážení, je třeba pro každý uzel zavést novou vlastnost *faktor vyvážení uzlu*. Tuto vlastnost budeme značit  $b$  (anglicky balance).  $b$  obsahuje informaci o aktuálním vyvážení daného podstromu.

Nabývá hodnot  $\langle -2, 2 \rangle$ , přičemž uzel je vyvážený pokud jeho faktor  $b$  je 1, 0 nebo -1. Při operaci přidávání nebo odebírání, může být  $b$  2 nebo -2, pak je ale nutné provést transformaci, která dosáhne vyvážení daného uzlu.

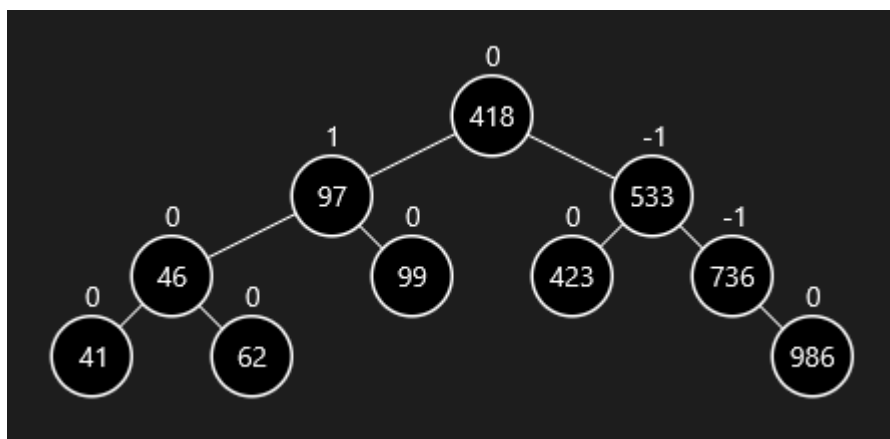


Obrázek 10: Výpočet faktoru vyvážení pro uzel  $u$

## Zdrojový kód rekurzivního výpočtu faktoru v jazyku Java:

```
1 int computeFactor() {
2     int lHeight = 0; //výška levého podstromu
3     int rHeight = 0; //výška pravého podstromu
4
5     if (left != null) { //pokud má levý podstrom
6         lHeight = left.computeFactor();
7     }
8
9     if (right != null) { //pokud má pravý podstrom
10        rHeight = right.computeFactor();
11    }
12
13    factor = lHeight - rHeight;
14
15    return Math.max(rHeight, lHeight) + 1;
16 }
```

Zdrojový kód 6: computeFactor



Obrázek 11: Ukázka vyváženého AVL stromu

Každý uzel ALV stromu obsahuje tyto vlastnosti:

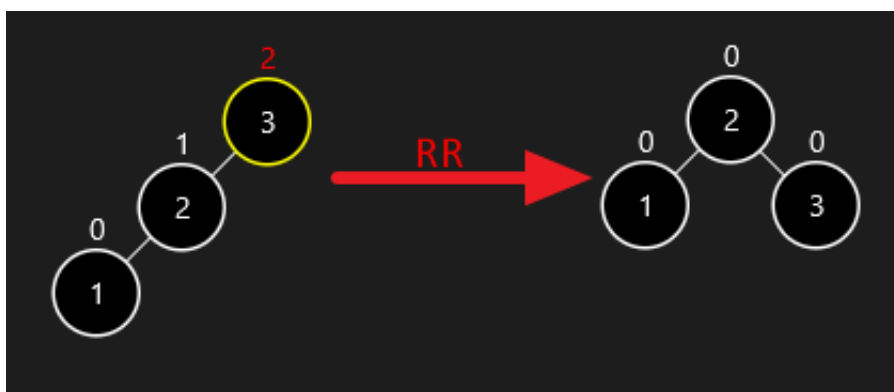
- **Klíč** – Hodnota uložená v uzlu.
- **Faktor vyvážení** – Faktor vyvážení daného uzlu.
- **Ukazatel na levého potomka**
- **Ukazatel na pravého potomka**
- **Ukazatel na jednoho rodiče**

### 2.3.1 Rotace

K obnově vyváženosti uzlů se používají *rotace*. *Rotace* pouze změní ukazatele uzlů v nevyvážené části stromu, aby došlo k opětovnému vyvážení. V AVL stromu se k vyvažování podle typu nevyvážené části stromu, používají tyto rotace:

#### Jednoduchá rotace RR

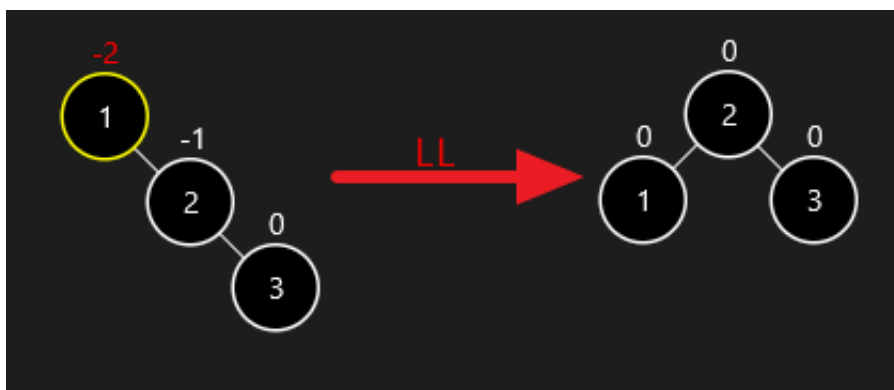
Nevyvážený uzel má  $b = 2$ , jeho *levý potomek* má  $b = 0$  nebo  $b = 1$ .



Obrázek 12: Rotace RR

#### Jednoduchá rotace LL

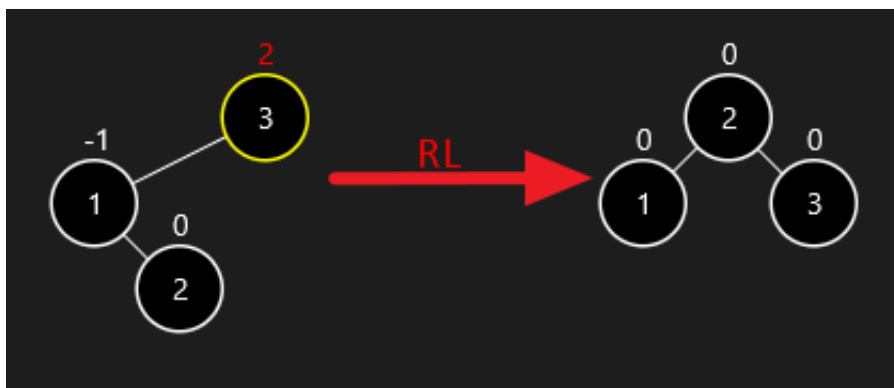
Nevyvážený uzel má  $b = -2$ , jeho *pravý potomek* má  $b = -1$  nebo  $b = 0$ .



Obrázek 13: Rotace LL

### Dvojitá rotace RL

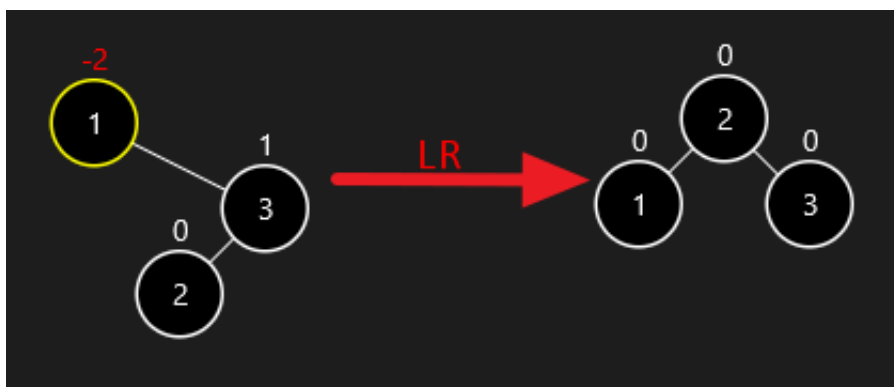
Nevyvážený uzel má  $b = 2$ , jeho *levý potomek* má  $b = 1$ .



Obrázek 14: Rotace RL

### Dvojitá rotace LR

Nevyvážený uzel má  $b = -2$ , jeho *pravý potomek* má  $b = 1$ .



Obrázek 15: Rotace LR

## 2.3.2 Vyhledávání

*Vyhledávání* u AVL stromu se nijak neliší od toho v BVS.

## 2.3.3 Vkládání

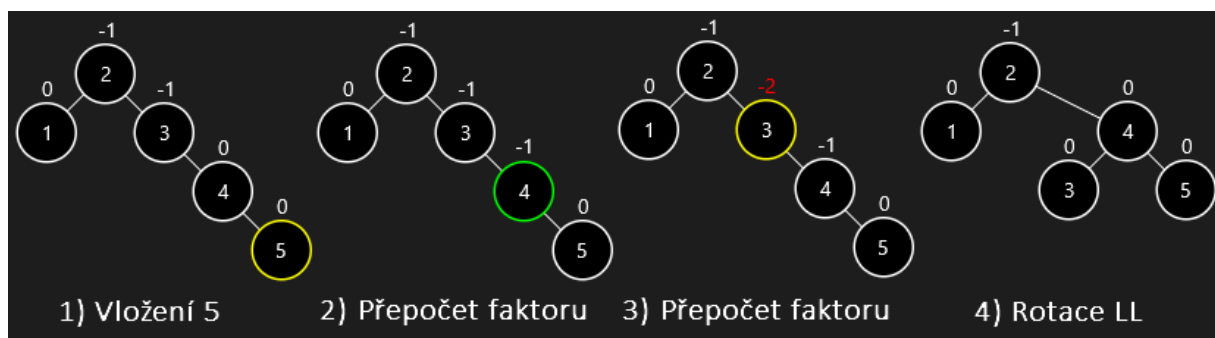
*Vkládání* je založeno na *vkládání* u BVS. Navíc je zde přidán krok aktualizace faktoru vyvážení, kde od nově vloženého uzlu postupně u určitých uzlů přepočítáváme  $b$ . Pokud se strom kvůli vložení nového uzlu stává nevyváženým, tak provedeme jednu z rotací, čímž daný strom vyvážíme.

### Přesný postup vkládání:

- 1. krok** – počáteční  
Stejně jako u BVS.
- 2. krok** – vyhledávání, vkládání  
Novému uzlu po vložení nastavíme faktor vyvážení na 0 a  $u$  nastavíme na předchůdce nově vloženého uzlu.  
Pokud nově vložený uzel je kořen vkládání úspěšně končí.
- 3. krok** – výpočet faktoru vyvážení  
V tomto kroku v aktuálním uzlu  $u$  aktualizujeme faktor vyvážení  $b$ .

### Po aktualizaci $u.b$ mohou nastat tyto případy:

- $u.b = 1$  nebo  $u.b = -1$   
Pokud  $u$  je kořen, vkládání úspěšně končí. Jinak  $u$  nastavíme na rodiče  $u$  a znovu opakujeme krok 3.
- $u.b = 2$  nebo  $u.b = -2$   
Provede se příslušná rotace.  
Pokud po provedení rotace je  $u.b = 0$  nebo je nyní  $u$  kořen, vkládání úspěšně končí. Jinak  $u$  nastavíme na předchůdce  $u$  a znovu opakujeme krok 3.
- $u.b = 0$   
Vkládání úspěšně končí.



Obrázek 16: Postup vkládání hodnoty 5

### 2.3.4 Odebírání

*Odebírání* je založeno na stejnojmenné operaci u BVS. Navíc je zde jako u *vkládání* přidán krok aktualizace faktoru vyvážení, kde od odstraněného uzlu postupně u určitých uzlů přepočítáváme  $b$ . Pokud se strom, kvůli odebrání uzlu stává nevyváženým, tak provedeme jednu z rotací, čímž daný strom vyvážíme.

### Přesný postup odebírání:

1. **krok** – počáteční  
Stejně jako u BVS.
2. **krok** – vyhledávání  
Stejně jako u BVS.
3. **krok** – odebírání

#### Odebírání $u$ má tyto možnosti:

- Pokud  $u$  je list.  
List  $u$  může být odebrán.  
Pokud byl  $u$  kořen, odebírání úspěšně končí. Jinak nastavíme  $u$  na rodiče  $u$ .
- $u$  má jednoho potomka.  
 $u$  bude nahrazen podstromem potomka. Pokud byl  $u$  kořen, odebírání úspěšně končí. Jinak nastavíme  $u$  na rodiče  $u$ .
- $u$  má dva potomky.
  - $u$  bude nahrazen *nejlevějším* prvkem z *pravého* podstromu, zároveň tento prvek získá faktor vyvážení z  $u$ .
  - $u$  bude nahrazen *nejpravějším* prvkem z *levého* podstromu, zároveň tento prvek získá faktor vyvážení z  $u$ .

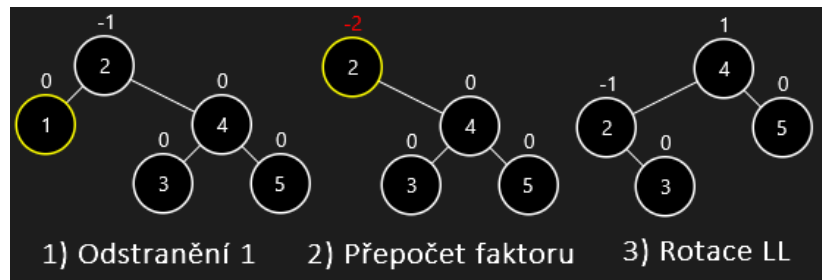
Rodiče uzlu, který nahradil  $u$  uložíme do  $u$ .

4. **krok** – výpočet faktoru vyvážení  
V tomto kroku v aktuálním uzlu  $u$  aktualizujeme faktor vyvážení  $b$ .

#### Po aktualizaci $u.b$ mohou nastat tyto případy:

- $u.b = \langle -1, 1 \rangle$   
Pokud  $u$  je kořen, odebírání úspěšně končí. Jinak  $u$  nastavíme na rodiče  $u$  a znovu opakujeme krok 4.
- $u.b = 2$  nebo  $u.b = -2$   
Provede se příslušná rotace.  
Pokud po provedení rotace je  $u.b = 0$  nebo je nyní  $u$  kořen, odebírání úspěšně končí. Jinak  $u$  nastavíme na předchůdce  $u$  a znovu opakujeme krok 4.





Obrázek 17: Postup odebrání hodnoty 1

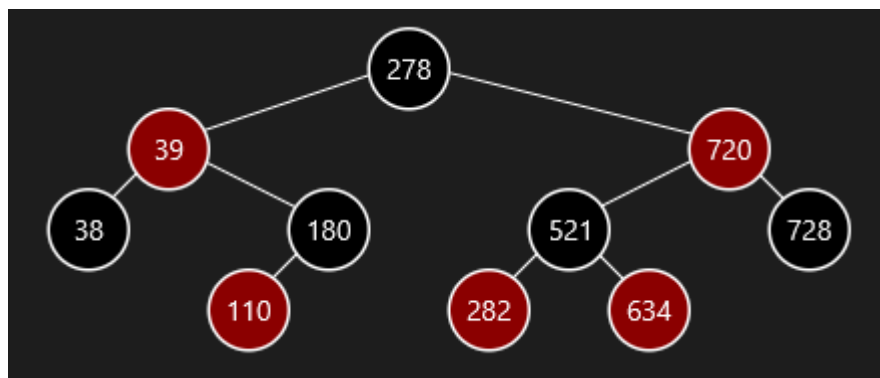
## 2.4 Červeno-černý strom

*Červeno-černý strom* (zkratka ČČ) vyvážený BVS. Na rozdíl od AVL stromu je ČČ strom vyvažován na základě barevného označení uzlů. Tímto vyvažováním má časovou složitost operací *vlození* a *odebrání*  $\theta(\log(n))$ .

„Červeno-černý strom zajišťuje, že žádná cesta z kořene do libovolného listu stromu nebude dvakrát delší než kterákoli jiná, to znamená, že strom je přibližně vyvážený.“<sup>[4]</sup>

**ČČ strom musí splňovat tyto vlastnosti:**

- Každý uzel má červenou nebo černou barvu.
- Kořen stromu má vždy barvu černou.
- Ve stromu se nenacházejí dva červené uzly jdoucí po sobě.
- Každý červený uzel, který není list, má dva černé potomky.
- Cesta od kořene ke všem listům obsahuje vždy stejný počet černých uzlů.<sup>10</sup>



Obrázek 18: Ukázka vyváženého ČČ stromu

<sup>10</sup>Je zde započítán i samotný list, pokud má černou barvu.

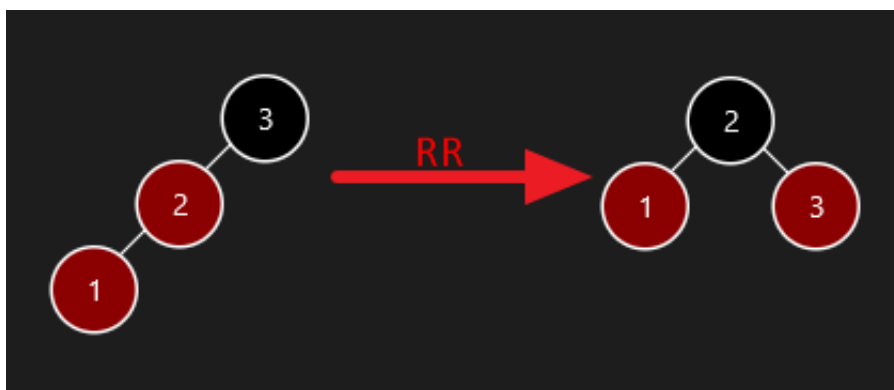
Každý uzel ČČ stromu obsahuje tyto vlastnosti:

- Klíč – Hodnota uložená v uzlu.
- Obarvení uzlu – Barva uzlu.
- Ukazatel na levého potomka
- Ukazatel na pravého potomka
- Ukazatel na jednoho rodiče

#### 2.4.1 Transformace

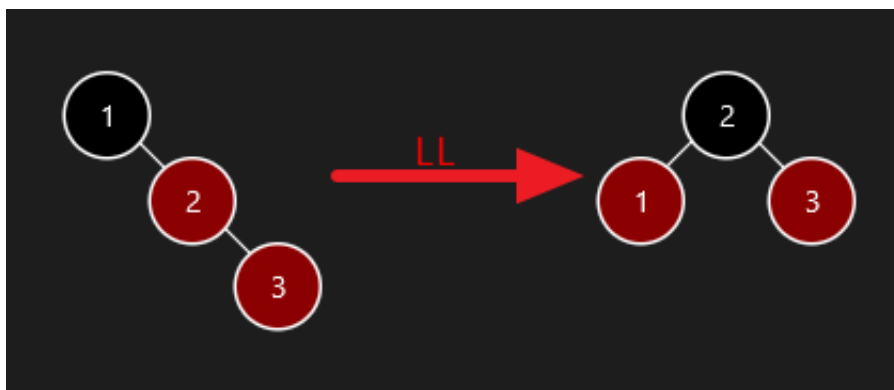
K obnově vyváženosti uzlů se používají *transformace*. Používají se zde stejně jako u AVL stromu *Rotace* a navíc je zde nová transformace *přebarvení*. Tyto *transformace* se používají k opětovnému vyvážení nevyváženého stromu.

##### Jednoduchá rotace RR



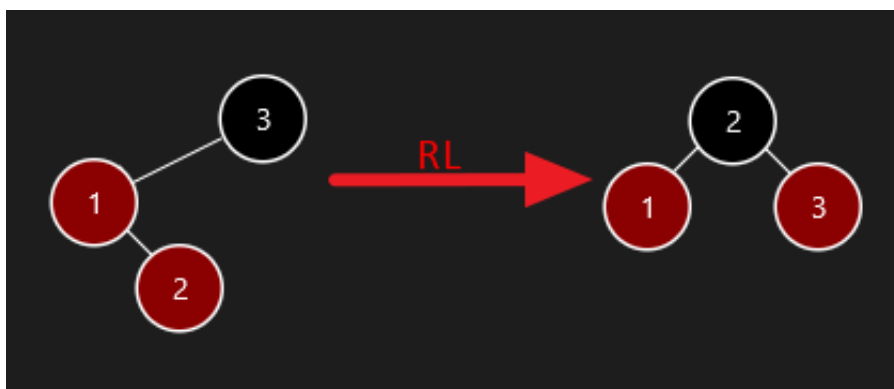
Obrázek 19: Rotace RR

##### Jednoduchá rotace LL



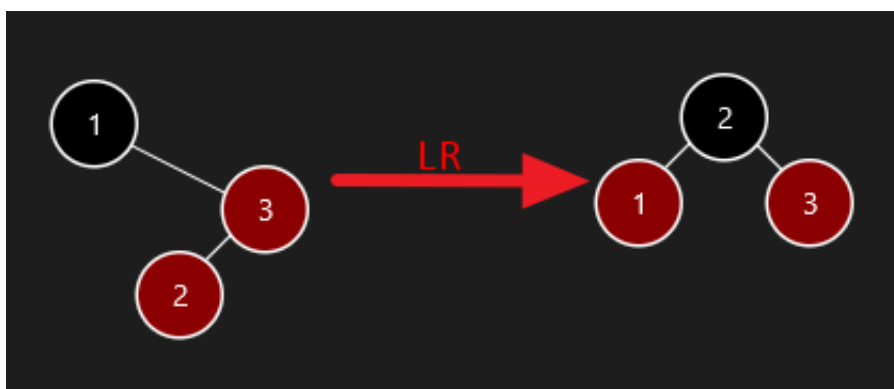
Obrázek 20: Rotace LL

### Dvojitá rotace RL



Obrázek 21: Rotace RL

### Dvojitá rotace LR



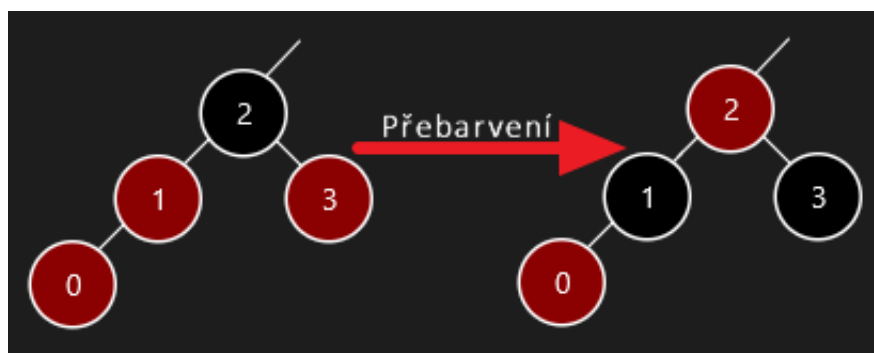
Obrázek 22: Rotace LR

### Přebarvení + symetrické případy

Pokud má ten vyšší z dvojice červených po sobě jdoucích uzlů červeného sourozence, tak on i jeho sourozenec získá černou barvu a jejich rodič, pokud se nejedná o kořen, získá červenou barvu.

#### 2.4.2 Vyhledávání

*Vyhledávání* u ČČ stromu se nijak neliší od toho v BVS.



Obrázek 23: Přebarvení 1



Obrázek 24: Přebarvení 2

### 2.4.3 Vkládání

*Vkládání* je založeno na *vkládání* u BVS. Navíc je zde přidán krok kontroly barev, kvůli vyvážení stromu. Pokud se ve stromu po vložení objeví dva po sobě jdoucí uzly s červenou barvou, provedeme příslušné transformace, aby strom splňoval vlastnosti ČČ stromu.

Každý nový uzel má automaticky při vkládání červenou barvu.

#### Přesný postup vkládání:

1. **krok** – počáteční  
Stejně jako u BVS.
2. **krok** – vyhledávání, vkládání  
Vložíme nový uzel  $u$  na příslušné místo a  $u$  nastavíme na předchůdce tohoto uzlu, je-li nový uzel kořen, nastavíme mu černou barvu a vkládání úspěšně končí.
3. **krok** – kontrola obarvení stromu  
Pokud má  $u$  černou barvu, vkládání úspěšně končí. Jinak provedeme příslušnou transformaci:

- Rotaci  
Po provedení rotace se strom stává vyváženým a vkládání úspěšně končí.
- Přebarvení  
Po přebarvení nastavíme  $u$  na předchůdce  $u$ .  
Pokud je nyní  $u$  černý, tak se jedná o kořen a vkládání úspěšně končí.  
Jinak nastavíme  $u$  na rodiče  $u$  a znovu provedeme krok 3.

## **Závěr**

Závěr práce v „českém“ jazyce.

## Conclusions

Thesis conclusions in “English”.

## A První příloha

Text první přílohy

## B Druhá příloha

Text druhé přílohy

## C Obsah přiloženého CD/DVD

Na samotném konci textu práce je uveden stručný popis obsahu přiloženého CD/DVD, tj. jeho závazné adresářové struktury, důležitých souborů apod.

### **bin/**

Instalátor `INSTALATOR` programu, popř. program `PROGRAM`, spustitelné přímo z CD/DVD. / Kompletní adresářová struktura webové aplikace `WEBOVKA` (v ZIP archivu) pro zkopírování na webový server. Adresář obsahuje i všechny runtime knihovny a další soubory potřebné pro bezproblémový běh instalátoru a programu z CD/DVD / pro bezproblémový provoz webové aplikace na webovém serveru.

### **doc/**

Text práce ve formátu PDF, vytvořený s použitím závazného stylu KI PřF UP v Olomouci pro závěrečné práce, včetně všech příloh, a všechny soubory potřebné pro bezproblémové vygenerování PDF dokumentu textu (v ZIP archivu), tj. zdrojový text textu, vložené obrázky, apod.

### **src/**

Kompletní zdrojové texty programu `PROGRAM` / webové aplikace `WEBOVKA` se všemi potřebnými (příp. převzatými) zdrojovými texty, knihovnami a dalšími soubory potřebnými pro bezproblémové vytvoření spustitelných verzí programu / adresářové struktury pro zkopírování na webový server.

### **readme.txt**

Instrukce pro instalaci a spuštění programu `PROGRAM`, včetně všech požadavků pro jeho bezproblémový provoz. / Instrukce pro nasazení webové aplikace `WEBOVKA` na webový server, včetně všech požadavků pro její bezproblémový provoz, a webová adresa, na které je aplikace nasazena pro účel testování při tvorbě posudků práce a pro účel obhajoby práce.

Navíc CD/DVD obsahuje:

### **data/**

Ukázková a testovací data použitá v práci a pro potřeby testování práce při tvorbě posudků a obhajoby práce.



**install/**

Instalátory aplikací, runtime knihoven a jiných souborů potřebných pro provoz programu PROGRAM / webové aplikace WEBOVKA, které nejsou standardní součástí operačního systému určeného pro běh programu / provoz webové aplikace.

**literature/**

Vybrané položky bibliografie, příp. jiná užitečná literatura vztahující se k práci.

U veškerých cizích převzatých materiálů obsažených na CD/DVD jejich zahrnutí dovoluují podmínky pro jejich šíření nebo přiložený souhlas držitele copyrightu. Pro všechny použité (a citované) materiály, u kterých toto není splněno a nejsou tak obsaženy na CD/DVD, je uveden jejich zdroj (např. webová adresa) v bibliografii nebo textu práce nebo v souboru `readme.txt`.

## Literatura

- [1] BĚLOHLÁVEK, Radim. Algoritmická matematika 2 - část 1 [online]. 2012-05-15. [cit. 2018-07-07]. Dostupné z: <http://belohlavek.inf.upol.cz/vyuka/algoritmicka-matematika-2-1.pdf>
- [2] BĚLOHLÁVEK, Radim; VYCHODIL, Vilém. Diskrétní matematika pro informatiky II [online]. 2010-10-16. [cit. 2018-07-07]. Dostupné z: <http://belohlavek.inf.upol.cz/vyuka/dm2.pdf>
- [3] VEČERKA, Arnošt. Studijní materiály ALM-2
- [4] DVORSKÝ, Jiří. Algoritmy I.[online]. 2007-02-27. [cit. 2018-07-07]. Dostupné z: <http://www.cs.vsb.cz/dvorsky/Download/SkriptaAlgoritmy/Algoritmy.pdf>
- [5] FINLAYSON, Ian. Binary Search Trees [online]. [cit. 2018-07-07]. Dostupné z: <http://cs.umw.edu/~finlayson/class/fall12/cpsc230/notes/17-binary-search-trees.html>
- [6] ADELSON-VELSKII, G. M.; LANDIS, E. M. An algorithm for the organization of information. Soviet Mathematics Doklady, 3:1259–1263, 1962. [online]. [cit. 2018-07-07] Dostupné z: <http://professor.ufabc.edu.br/~jesus.mena/courses/mc3305-2q-2015/AED2-10-avl-paper.pdf>
- [7] CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles E.; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. Introduction to Algorithms, 978-0-262-03384-8, 1990. [online]. 2011-04-04 [cit. 2018-07-07]. Dostupné z: <http://belohlavek.inf.upol.cz/vyuka/Cormen-RB-trees.pdf>
- [8] GALLES, David. Data Structure Visualizations [online]. [cit. 2018-07-07] Dostupné z: <https://www.cs.usfca.edu/galles/visualization/Algorithms.html>
- [9] ORACLE Java documentation [online]. [cit. 2018-07-07] Dostupné z: <https://docs.oracle.com/javase/8/javase-clienttechnologies.htm>