Lista 7

Allan

15/04/2021

Questão 1

Sob $P(|X-1|=2)=0$, indica uma v.a contínua, assim:

$$\begin{aligned} P(|X-1|\geq 2) =& 1-P(|X-1|\leq 2)=1-P(-2\leq X-1\leq 2)= \\ =& 1-P(-1\leq X\leq 3)=1-[F_X(3)-F_X(-1)] \\ =& F_X(-1)+1-F_X(3) \end{aligned}$$

Questão 2

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ,x<0 \\ \frac{x}{a} & ,0\leq x<a \\ 1 & ,x\geq a \end{cases}$$

Questão 3

$$\begin{aligned} X(u,v) &= u+v \\ x &= [0,1] \end{aligned}$$

Para um quadrado no plano $u\times v$ obtemos duas funções:

$X:\Omega\to\mathbb{R}\ (u,v)\to X(u,v)=u+v$

Notemos que $P(0\leq X\leq 2)=1$

Sabendo que a área do quadrado $[0,1]\times[0,1]$ é igual a 1.

então divididos os casos em 4:

- $x<0$

$$F_X(x)=0$$

- $0 \leq x < 1$

$$\begin{aligned}
F_X(x) =& P(X \leq x) = \frac{\text{área}(\{(u,v) \in \Omega | u+v \leq x\})}{\text{área}(\Omega)} = \\
=& \text{área}(\{(u,v) \in \Omega | u+v \leq x\}) = \\
\\
=& \int_0^x \int_0^{x-u} 1 \; dvdu = \\
=& \int_0^x x - u \; du = \\
=& x.x - \frac{x^2}{2} = \\
=& \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

- $1 \leq x < 2$

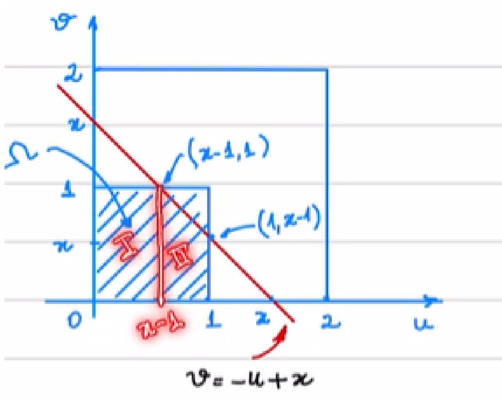

Figura 1: Gráfico para u x v.

$$\begin{aligned}
F_X(x) =& P(X \leq x) = \frac{\text{área}(\{(u,v) \in \Omega | u+v \leq x\})}{\text{área}(\Omega)} = \\
=& \text{área}(\{(u,v) \in \Omega | u+v \leq x\}) = \\
\\
=& \int_0^{x-1} \int_0^1 1 \; dvdu \; + \int_{x-1}^1 \int_0^{x-u} 1 \; dvdu = \\
=& \int_0^{x-1} 1 \; du \; + \int_{x-1}^1 x - u \; du = \\
=& x - 1 + x - \frac{1}{2} - [x(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}] = \\
=& x - 1 + x - \frac{1}{2} - x(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} = \\
=& x - 1 + x - \frac{1}{2} - x^2 + x + \frac{x^2 - 2x + 1}{2} = \\
=& -1 + 2x - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

- $x \geq 2$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$$

Portanto

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & , 0 \leq x < 1 \\ -1 + 2x - \frac{x^2}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}$$

Questão 4

Sabendo que $F'_X(x) = f_X(x)$, então:

2)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{a} & , 0 \leq x < a \\ 1 & , x \geq a \end{cases}$$

3)

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & , 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$$

Questão 5

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0, & , X \leq 0 \end{cases}$$

Para $F(m) = \frac{1}{2} = G(m) = 1 - F(m)$

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda m} &= 1 - (1 - e^{-\lambda m}) \\ 1 - e^{-\lambda m} &= 1 - 1 + e^{-\lambda m} \\ 1 - e^{-\lambda m} &= e^{-\lambda m} \\ 2e^{-\lambda m} &= 1 \\ e^{-\lambda m} &= \frac{1}{2} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\lambda m \\ \ln 1 - \ln 2 &= -\lambda m \\ \frac{1}{\lambda} \ln 2 &= m \end{aligned}$$

Assim $m = \frac{1}{\lambda} \ln 2$

Questão 6

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

Então

$$\begin{aligned}
P(1 \leq |X| \leq 2) = &\int_1^2 \frac{1}{2}e^{-|x|}\ dx = \\
= &\int_1^2 \frac{1}{2}e^{-x}\ dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2}e^{x}\ dx = \\
= &\frac{1}{2}[-e^{-x}]|_1^2 + \frac{1}{2}[e^{x}]|_{-2}^{-1} = \\
= &\frac{1}{2}[-e^{-2} - (-e^{-1})] + \frac{1}{2}[e^{-2} - e^{-1}] = \\
= &\frac{1}{2}[-e^{-2} + e^{-1}] + \frac{1}{2}[e^{-1} - e^{-2}] = \\
= &e^{-1} - e^{-2}
\end{aligned}$$

Questão 7

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2(|x|+1)},\ x \in \mathbb{R}$$

- Se $x < 0$

$$F'(x) = \frac{2(-x+1) + 2x}{(2(-x+1))^2} = \frac{1}{2((-x+1))^2}$$

- Se $x > 0$

$$F'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(2(x+1))^2} = \frac{1}{2((x+1))^2}$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{2((|x|+1))^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$