LISTA DE EXERCÍCIOS 8

1. Considere um ponto escolhido uniformemente no intervalo [0, a]. Seja X a distância da origem ao ponto escolhido. Obtenha a função de distribuição de $Y = min(X, a/2)$.

2. Escolhe-se aleatoriamente um ponto em (–10, 10). Seja X uma variável aleatória definida de tal forma que X represente a coordenada do ponto se o mesmo estiver em [–5, 5], $X = -5$ se o ponto estiver em (–10, –5) e $X = 5$ se o ponto estiver em (5, 10). Obtenha a função de distribuição de X.

3. Verifique que:
   (a) $X \sim N(0,1)$ se, e somente se, $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.
   (b) $X \sim Cauchy(0,1)$ se, e somente se, $bX + a \sim Cauchy(a, b)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$.

4. Suponha que $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Obtenha a densidade de $Y = cX$, onde $c > 0$.

5. Suponha que $X \sim U(0,1)$. Obtenha a densidade de $Y = X^{1/\beta}$, onde $\beta \neq 0$.

6. Seja X uma variável aleatória contínua com densidade f.
   (a) Obtenha uma fórmula para a densidade de $Y = |X|$ em termos de f.
   (b) Obtenha uma fórmula para a densidade de $Y = X^2$ em termos de f.

7. Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. Obtenha a densidade de:
   (a) $Y = |X|$
   (b) $Y = X^2$.

8. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Obtenha a densidade de $Y = e^X$. Essa densidade chama-se *densidade lognornal*.

9. Seja X uma v.a. contínua com densidade simétrica f (ou seja, f é função par e seu gráfico simétrico em torno de zero) e tal que $X^2 \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Obtenha f.

10. Seja $\Theta \sim U[-\pi/2, \pi/2]$. Determine a função de distribuição e a densidade de:
    (a) $X = tan(\Theta)$
    (b) $Y = sen(\Theta)$.

11. Seja $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$. Determine a densidade de
    (a) $Y = cX$, onde $c > 0$
    (b) $Y = \sqrt{X}$.

Exercício	Resposta
1	$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{y}{a}, & 0\le y<\frac{a}{2}\\ 1, & y\ge \frac{a}{2}\end{cases}$
2	$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-5\\ \frac{x+10}{20}, & -5\le x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$
4	$Y\sim Exp\left(\frac{\lambda}{c}\right)$
5	Se $\beta>0$ então: $f_Y(y)=\begin{cases}\beta\, y^{\beta-1}, & 0<y<1\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$ Se $\beta<0$ então: $f_Y(y)=\begin{cases}-\beta\, y^{\beta-1}, & y>1\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$
6	(a) $f_Y(y)=\begin{cases}f(y)+f(-y), & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ (b) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$
7	(a) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ (b) $Y\sim Gama\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sigma^2}\right)$
8	$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(ln\, y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$
9	$f(x)=\lambda\|x\|e^{-\lambda x^2},\ x\in\mathbb{R}$
10	(a) $X\sim Cauchy(0,1)$ (b) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \frac{1}{\pi}\left(arcsin\, y+\frac{\pi}{2}\right), & -1\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$
11	(a) $Y\sim Gama\left(\alpha,\frac{\lambda}{c}\right)$; (b) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{2\alpha-1}e^{-\lambda y^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$