LISTA DE EXERCÍCIOS 5

1. Seja X uma v.a. com função de distribuição dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{8}, & -2 \leq x < 1 \\ \frac{5}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine a função de probabilidade de X.

b) Calcule EX.

2. Seja X uma v.a. com função de probabilidade dada por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2|x|(|x|+1)}, & x = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Determine $\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{\infty} |x| p_X(x)$.

b) Mostre que EX não existe (ou seja, não está definida).

3. Seja N um número inteiro positivo e seja p a função definida por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{N(N+1)}, & x \in \{1,2,3,\ldots,N\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Mostre que p é uma função de probabilidade.

b) Seja X uma v.a. com função de probabilidade p. Determine EX.

Observação: $\sum_{x=1}^{N} x = \frac{N(N+1)}{2}$ e $\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

4. Suponha que X se distribui uniformemente em $\{1, \ldots, N\}$. Determine EX e EX^2.

5. Suponha que X tem distribuição binomial de parâmetros $n = 4$ e p. Obtenha $E\left(sen\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right)$.

6. Suponha que X tem distribuição de *Poisson* de parâmetro λ. Determine a esperança de $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição *Geométrica*(p) e seja $M > 0$ um número inteiro positivo. Determine a esperança das seguintes v.a.'s:

a) $Z = min(X, M)$

b) $W = max(X, M)$.

8. Em ensaios de Bernoulli independentes, com probabilidade p de sucesso, sejam X o número de ensaios até a ocorrência do r-ésimo sucesso e Y o número de fracassos anteriores ao r-ésimo sucesso. Determine EX e EY.

9. Seja (X, Y) um vetor aleatório com função de probabilidade conjunta dada por:

$$p_{X,Y}(x) = P(X = x, Y = y) = \begin{cases} p, & x \in \{-1, +1\},\ y = 0 \\ 1 - 2p, & x = 0,\ y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $0 < p < 1/2$.

Verifique que $E(XY) = EXEY$, mas X e Y não são independentes.

Exercício	**Resposta**
1	**a)** $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = -2 \text{ ou } x = 4 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$; **b)** $EX = \frac{5}{4}$
3	**b)** $\frac{2N+1}{3}$
4	$EX = \frac{N+1}{2}$ e $EX^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$
5	$4p(1-p)(1-2p)$
6	$\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$
7	**a)** $\frac{1-(1-p)^M}{p}$; **b)** $M + \frac{(1-p)^M}{p}$
8	$EX = \frac{r}{p}$; $EY = \frac{r(1-p)}{p}$