# Lista 5

Allan

02/04/2021

## Questão 1

### a)

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , x \in \{-2, 4\} \\ \frac{4}{8} & , x \in \{1\} \\ \frac{2}{8} & , x \in \{2\} \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

### b)

$$EX = \sum_x x p_x(x) = -2\frac{1}{8} + 1\frac{4}{8} + 2\frac{2}{8} + 4\frac{1}{8} = \frac{10}{8}$$

## Questão 2

### a)

$$\begin{aligned} E|X| = \sum_x |x| p_x(x) &= \sum_{x<0} (-x) p_x(x) + \sum_{x>0} x p_x(x) = \\ &= \overbrace{\sum_{x=-\infty}^{-1} (-x) \frac{1}{2(-x)((-x)+1)}}^{>0\,:\,x=-x|_{\infty}^{1}} + \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{2(x)(x+1)} = \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{2(x)(x+1)} + \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{2(x)(x+1)} = \\ &= 2\sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{2(x)(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)} = \infty \text{ Diverge (Serie harmonica)} \end{aligned}$$

### b)

Como a série $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)}$ diverge, a $E|X| \notin \mathbb{R}$, assim a esperança não está definida.

## Questão 3

### a)

Como $N > 0$ e $x \in \{1, 2, ..., N\}$, $p(x) > 0$, e para $x \notin \{1, 2, ..., N\}$, $p(x) = 0$.

Assim $p(x) \geq 0$ e para $x \in \{1, 2, ..., N\}$:

$$\sum_x p(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{2x}{N(N+1)} = \frac{2}{N(N+1)} \frac{N(N+1)}{2} = 1$$

Portanto $p(x)$ é uma função de probabilidade.

### b)

$$EX = \sum_x xp(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{2x^2}{N(N+1)} = \frac{2}{N(N+1)} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{2N+1}{3}$$

## Questão 4

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & , x \in \{1, ..., N\} \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$EX = \sum_x xp(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{x}{N} = \frac{N(N+1)}{2} \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 p(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{x^2}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \frac{1}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

## Questão 5

$$X \sim B(4, p)$$

$$\begin{aligned} E\left(sen\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right) &= \sum_x sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) p(x) = \sum_{x=0}^{4} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) \binom{4}{x} p^x (1-p)^{4-x} \\ &= sen(0)\binom{4}{0}(1-p)^4 + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\binom{4}{1}p(1-p)^3 + \\ &+ sen\left(\pi\right)\binom{4}{2}p^2(1-p)^2 + sen\left(\frac{\pi 3}{2}\right)\binom{4}{3}p^3(1-p) + \\ &+ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\binom{4}{4}p^4 = \\ &= 4p(1-p)^3 - 4p^3(1-p) \end{aligned}$$

## Questão 6

$$X \sim Poisson(\lambda)$$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & , x \in \{0,1,...\} \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$E\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sum_x \left(\frac{1}{1+x}\right) p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} =$$
$$= e^{-\lambda}\lambda^{-1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!} = e^{-\lambda}\lambda^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda^{-1} \left(-1 + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}\right) =$$
$$= e^{-\lambda}\lambda^{-1}\left(-1 + e^{\lambda}\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

## Questão 7

Como $x > 0$, uma possibilidade de calcular a esperança de uma v.a é utizilando o Teorema 3.

### a)

$$EZ = \sum_{z=1}^{\infty} P(Z \geq z)$$

Como $P(Z \geq z) = P(\min(X, M) \geq z)$ e $x \in \{1, 2, ...\}$

Então $M \geq z$ e $X \geq z$, pelo fato da v.a $X$ e $M$ serem comparadas a $z$.

Assim $z \in \{1, 2, ..., M\}$

$$EZ = \sum_{z=1}^{\infty} P(Z \geq z) = \sum_{z=1}^{M} P(X \geq z) = \sum_{z=1}^{M}\sum_{x=z}^{\infty} p(1-p)^{x-1} =$$
$$= \sum_{z=1}^{M} (1-p)^{z-1} = \sum_{z=0}^{M-1} (1-p)^z = \frac{1-(1-p)^{M-1+1}}{1-(1-p)}$$
$$= \frac{1-(1-p)^M}{p}$$

### b)

$$EW = \sum_w P(W \geq w)$$

Para $P(W \geq w) = 1 - P(W < w) = 1 - P(\max(X, M) < w)$

No qual $P(W < w)$ tem como $X < w$ e $M < w$,

assim

$$P(W < w) = \begin{cases} P(X < w) & , w \in \{M+1, M+2, ...\} \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

Sobre $w \in \{M+1, M+2, ...\}$,

$$P(\max(X, M) < w) = P(X < w) = P(X \leq w-1) = 1 - (1-p)^{w-1}$$

Como $x \in \{1, 2, 3, ...\}$, então

$$P(W \geq w) = \begin{cases} 1 - P(X < w) \\ 1 - 0 \end{cases} = \begin{cases} (1-p)^{w-1} & , w \in \{M+1, M+2, ...\} \\ 1 & , w \in \{1, 2, ..., M\} \end{cases}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} EW &= \sum_{w} P(W \geq w) = \sum_{w=1}^{M} 1 + \sum_{w=M+1}^{\infty} (1-p)^{w-1} =^{k=w-(M+1)|_0^\infty} \\ &= M + \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+M} = M + (1-p)^M \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \\ &= M + (1-p)^M \frac{1}{1-(1-p)} = \\ &= M + \frac{(1-p)^M}{p} \end{aligned}$$

# Questão 8

$$X \sim Pascal(r, p)$$

$$Y = X - r$$

No qual $r$ é a ocorrência de sucessos e $X - r$ seria o total sem nenhum sucesso.

$$p_x(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & , x \in \{r, r+1, ...\} \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x} x p_x(x) = \sum_{x=r}^{\infty} x \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} = \sum_{x=r}^{\infty} \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!} p^r (1-p)^{x-r} = \\ &= \sum_{x=r}^{\infty} \frac{r}{r} \frac{x!}{(x-r)!(r-1)!} p^r (1-p)^{x-r} = \sum_{x=r}^{\infty} r \frac{x!}{(x-r)!(r)!} p^r (1-p)^{x-r} = \\ &= rp^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x}{r} (1-p)^{x-r} = rp^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r}{r} (1-p)^x = rp^r \frac{1}{p^{r+1}} \\ &= \frac{r}{p} \end{aligned}$$

Para $Y = X - r$

$$EY = E(X - r) = EX - E(r) = \frac{r}{p} - r$$

## Questão 9

$$E(XY) = \sum_x \sum_y x.y.p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=-1}^{1} \sum_{y=0}^{1} x.y.p_{X,Y}(x,y) =$$
$$= \sum_{x=-1}^{1} x.p_{X,Y}(x,1) = 0$$

Para a independência:

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^{1} p_{X,Y}(x,y) = p + 1 - 2p = 1 - p$$
$$P(Y = y) = \sum_{x=-1}^{1} p_{X,Y}(x,y) = p + 1 - 2p + p = 1$$

No qual $P(X = x).P(Y = y) \neq P(X = x, Y = y)$.