Lista de Exercícios 6

1. Suponha que X se distribui uniformemente em $\{1, \ldots, N\}$. Determine $VarX$. (*Sugestão*: use o exercício 4 da Lista 5.)

2. Considere a seguinte função:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} x^{-(r+2)}, & x = 1,2,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde *c* é um número real positivo e *r* um número inteiro positivo.

a) Mostre que a série $\sum_{x=1}^{\infty} x^{-(r+2)}$ é convergente. Conclua que *p* é uma função de probabilidade com $c = \sum_{x=1}^{\infty} x^{-(r+2)}$.

b) Seja *X* uma v.a. com função de probabilidade *p*. Mostre que EX^r é finito, mas *X* não tem nenhum momento de ordem maior do que *r*.

3. Em ensaios de Bernoulli independentes, com probabilidade *p* de sucesso, sejam *X* o número de ensaios até a ocorrência do *r*-ésimo sucesso e *Y* o número de fracassos anteriores ao *r*-ésimo sucesso. Determine $VarX$ e $VarY$. (*Sugestão*: use o exercício 8 da Lista 5.)

4. Suponha que *X* e *Y* são duas v.a.'s independentes, tais que $EX^4 = 2$, $EX^2 = 1$, $EY^2 = 1$e $EY = 0$. Determine $Var(X^2\,Y)$.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s i.i.d. com média μ e variância σ^2 e seja $\bar{X} = S_n/n$, onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(Se $X_1, \ldots, X_n$ têm função de distribuição *F*, dizemos que $X_1, \ldots, X_n$ é uma *amostra aleatória* de tamanho *n* da v.a. *X*, cuja função de distribuição é *F*, e $\bar{X}$ é chamada *média amostral*.)
Mostre que:

a) $E\bar{X} = \mu$ b) $Var\bar{X} = \sigma^2/n$ c) $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2$

6. Suponha que tenhamos dois baralhos de *n* cartas, cada um com as cartas numeradas de 1 a *n*. Utilizando-se estas cartas forma-se *n* pares, de tal forma que cada par contendo uma carta de cada baralho. Dizemos que ocorre um encontro na posição *i*, se o par *i* é constituído de cartas de mesmo número. Seja S_n o número de encontros.
Determine:

a) ES_n b) $VarS_n$

(*Sugestões*:
(I) para cada $i = 1,2, \ldots n$, considere a v.a. X_i definida por: $X_i = 1$ se ocorre um encontro na *i*-ésima posição e $X_i = 0$ caso contrário. Assim, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$;
(II) Use os seguintes resultados: para cada $i, j = 1,2, \ldots n$, tem-se que:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n} \text{ e } P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}, \text{ se } i \neq j)$$

7. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes tendo variâncias finitas e positivas σ_1^2, σ_2^2 e σ_3^2, respectivamente. Obtenha a correlação entre $X_1 - X_2$ e $X_2 + X_3$.

8. Suponha que X e Y são duas v.a.'s tais que $\rho(X,Y) = 1/2$, $VarX = 1$ e $VarY = 2$. Obtenha $Var(X - 2Y)$.

9. Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e 2 pretas. Extrai-se uma amostra sem reposição de tamanho dois. Sejam U e V os números de bolas vermelhas e pretas, respectivamente, na amostra. Determine $\rho(U,V)$.

10. Suponha que uma caixa contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Seleciona-se, ao acaso e sem reposição, duas bolas da caixa. Sejam X o número da primeira bola e Y o número da segunda bola. Determine $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$.

Exercício	**Resposta**
1	$\frac{N^2-1}{12}$
3	$VarX = \frac{r(1-p)}{p^2}$; $VarY = \frac{r(1-p)}{p^2}$
4	2
6	**a)** 1; **b)** 1
7	$\frac{-\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\sigma_2^2+\sigma_3^2)}}$
8	$9 - 2\sqrt{2}$
9	-1
10	$Cov(X,Y) = -\frac{1}{3}$; $\rho(X,Y) = -\frac{1}{2}$