Lista de Exercícios 9

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição uniforme em (0,1). Obtenha:
   a) $P\left(| X - Y | \leq \frac{1}{2} \right)$
   b) $P\left(\left| \frac{X}{Y} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \right)$

2. Suponha que os tempos que dois estudantes levam para resolver um problema são independentes e se distribuem exponencialmente com parâmetro λ. Determine a probabilidade de que o primeiro estudante necessite pelo menos do dobro do tempo gasto pelo segundo para resolver o problema.

3. Seja $f(x,y) = ce^{-(x^2-xy+4y^2)/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   a) Determine o valor de c para que f seja uma densidade.
   b) Se X e Y têm densidade conjunta f, determine as densidades marginais de X e Y e verifique se são independentes.

4. Suponha que X e Y têm densidade conjunta uniforme no interior do triângulo com vértices em (0,0), (2,0) e (1,2). Obtenha $P(X \leq 1, Y \leq 1)$).

5. Sejam X e Y v.a.'s contínuas independentes tendo as densidades marginais especificadas abaixo. Obtenha, em cada item, a densidade de $Z = X + Y$.
   a) $X \sim Exp(\lambda_1)$ e $Y \sim Exp(\lambda_2)$
   b) $X \sim Gama(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim Gama(\alpha_2, \lambda)$
   c) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

6. Verifique que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição comum $N(0,1)$, então $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ tem distribuição $Gama(n/2\,, 1/2)$ (esta distribuição é conhecida como *qui-quadrado com n graus de liberdade* e denotada por $\chi^2(n)$).
   (*Sugestão*: use os exercícios (7b) da lista 8 e (5b) anterior.)

7. Suponha que se escolhe aleatoriamente um ponto no plano de tal forma que suas coordenadas X e Y se distribuem independentemente segundo a densidade normal $N(0, \sigma^2)$. Obtenha a função densidade da v.a. R que representa a distância do ponto escolhido à origem. (Esta densidade é conhecida como densidade de *Rayleigh*).

8. Sejam X e Y v.a.'s i.i.d. com distribuição comum $Exp(\lambda)$. Obtenha a densidade de $Z = \frac{Y}{X}$.

9. Sejam X e Y v.a.'s independentes tais que $X \sim Gama(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim Gama(\alpha_2, \lambda)$. Obtenha a densidade de $Z = \frac{X}{X+Y}$. $\left(\textit{Sugestão}\text{: expresse } Z \text{ em função de } \frac{Y}{X}\right)$

10. Sejam U e V v.a.'s i.i.d. com distribuição comum $N(0,1)$. Seja $Z = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}\, V$, onde $-1 < \rho < 1$.
    a) Obtenha a densidade de Z.
    b) Obtenha a densidade conjunta de U e Z.
    c) Obtenha a densidade conjunta de $X = \mu_1 + \sigma_1 U$ e $Y = \mu_2 + \sigma_2 Z$, onde $\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$. Esta densidade é conhecida como *densidade normal bidimensional*.

11. Sejam R e Θ v.a.'s independentes de modo que R tem densidade de *Rayleigh*:

$$f_R(r) = \begin{cases} \sigma^{-2} r e^{-r^2/2\sigma^2}, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

e Θ se distribui uniformemente em $\Theta \sim U(-\pi, \pi)$. Mostre que se $X = R cos\Theta$ e $Y = R sen\Theta$ são v.a.'s independentes e que cada uma tem densidade normal $N(0, \sigma^2)$.

Exercício	**Resposta**
1	a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{12}$
2	$\frac{1}{3}$
3	a) $c = \frac{\sqrt{15}}{4\pi}$; b) $X \sim N(0, 16/15)$, $Y \sim N(0, 4/15)$, com X e Y não independentes
4	$\frac{3}{8}$
5	a) $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ b) $Z \sim Gama(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$ c) $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
7	$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$
8	$f_{\frac{Y}{X}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$
9	$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_1 - 1}(1-z)^{\alpha_2 - 1}, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$: densidade $Beta(\alpha_1, \alpha_2)$
10	$N(0,1)$ $f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\sigma^2}} exp\left[-\frac{u^2 - 2\rho uz + z^2}{2(1-\sigma^2)}\right]$, $(u,z) \in \mathbb{R}^2$ $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. $.\ exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right]$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$