Atividade 4

Allan

12/03/2021

Seja X uma variável aleatória com função de densidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Obtenha a função de distribuição e a função de densidade de $Y = e^X$

Provando que X é uma V.a, temos que a sua função de densidade é dada por:

$$\begin{aligned}
F_X(\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \overbrace{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}^{u=e^{-x}\Big|_{\infty}^{1}} dx + \int_{0}^{\infty} \overbrace{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}^{u=e^{-x}\Big|_{1}^{0}} dx = \\
&= \int_{\infty}^{1} \frac{u+1-1}{(1+u)^2} du + \int_{1}^{0} \frac{u+1-1}{(1+u)^2} du = \\
&= \int_{\infty}^{1} \frac{1}{(1+u)} + \frac{-1}{(1+u)^2} du + \int_{1}^{0} \frac{1}{(1+u)} + \frac{-1}{(1+u)^2} du = \\
&= \left[\ln(1+u) + \frac{1}{1+u}\right]\Big|_{\infty}^{1} + \left[\ln(1+u) + \frac{1}{1+u}\right]\Big|_{1}^{0} = \\
&= \left[\ln(2) + \frac{1}{2} - \left(\ln(\infty) + \frac{1}{\infty}\right)\right] + \left[\ln(1) + 1 - \left(\ln(2) + \frac{1}{2}\right)\right] = \\
&= -\infty \neq 1
\end{aligned}$$

Assim X não é uma variável aleatória.

* Notação: $\lim_{u\to\infty} u = \infty$

Mas ao fazer $Y = e^X$, obtemos que $y > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Assim fazemos que:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(\ln(e^X) \leq \ln(y)) = P(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y))$$

e que sua densidade é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) =& F_Y(y)' = F_X'(\ln(y)) = f_X(\ln(y)).\frac{d}{dy}\ln(y) = \\
=& \frac{e^{-\ln(y)}}{(1+e^{-\ln(y)})^2}.\frac{1}{y} = \frac{e^{\ln(y^{-1})}}{(1+e^{\ln(y^{-1})})^2}.\frac{1}{y} = \\
=& \frac{y^{-1}}{(1+y^{-1})^2}.\frac{1}{y} = \frac{y^{-2}}{(1+y^{-1})^2} = \\
=& \frac{1}{y^2(1+y^{-1})^2} = \frac{1}{y^2(1+2y^{-1}+y^{-2})} = \\
=& \frac{1}{y^2+2y+1} = \\
=& \frac{1}{(y+1)^2}
\end{aligned}
$$

E provando sua que sua identidade é uma v.a:

Para $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

Para $y > 0$

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y))$$

e provando sua v.a

$$
\begin{aligned}
F_Y(\infty) = &\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{(y+1)^2}dy = \\
= &-\left[\frac{1}{y+1}\right]\Big|_0^{\infty} = -[0-1] = 1
\end{aligned}
$$

Assim sua função de distribuição é dada por:

Para $y > 0$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = &\int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \int_0^{y} \frac{1}{(u+1)^2}du = \\
= &-\left[\frac{1}{u+1}\right]\Big|_0^{y} = -\left[0 - \frac{1}{y+1}\right] = \frac{1}{y+1}
\end{aligned}
$$

Então

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ \frac{1}{y+1} & , y > 0 \end{cases}$$

Questão-Extra

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x}{a} & , 0 \leq x < a \\ 1 & , x \geq a \end{cases} \; e f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{a} & , 0 \leq x < a \\ 1 & , x \geq a \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \frac{y}{b} & , 0 \leq y < b \\ 1 & , y \geq b \end{cases} \; e f_X(x) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \frac{1}{b} & , 0 \leq y < b \\ 1 & , y \geq b \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{ab} & , 0 \leq x < a, 0 \leq y < b \\ 0 & , \; c.c \end{cases}$$

Então a

$$\begin{aligned} P(X < Y) =& P(X \leq Y, Y \in \mathbb{R}) = F_{X,Y}(y, \mathbb{R}) = \\ =& \int_0^b \int_0^y \frac{1}{ab} dx dy = \int_0^b \frac{y}{ab} dy = \\ =& \frac{y^2}{2ab} \Big|_0^b = \frac{b^2}{2ab} \\ =& \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade do ônibus A chegar antes de B, é a razão do tempo máximo de B sob 2 vezes o tempo máximo de A. Ou seja, para $0 < a \leq b$, no qual a é o tempo máximo do ônibus A chegar e o mesmo para b sobre o ônibus B, então esta probabilidade é pelo menos 0.5 vezes maior que de B. Em outras palavras, a probabilidade de A chegar antes de B é de pelo menos 50%.