Lista 3

Allan

10/03/2021

Questão 1

Considerando $\Omega \subset [0,1)$ e $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$

No qual ω é o primeiro digito da expansão decimal de um número escolhido neste intervalo, sabendo que exíste apenas os dígitos $\{0, 1, 2, ..., 9\} = \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_{10}\}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que, $X(\omega_i) = x_i$, para, $i = \{1, 2, ..., 10\}$

Sabendo que:

$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$

Obtemos que X é uma distribuição uniforme discreta

$$p_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{, se } x \in \Omega \\ 0 & \text{, se } x \notin \Omega \end{cases}$$

Questão 2

a)

Sabendo que

$$X \sim B(n,p)\ ,\ n = \{0, 1, ...\}$$

$$p_x(x) = P(X = x) \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$$

Assim

$$Y = n - X$$

$$\begin{aligned} P(Y = y) = P(n - X = y) &= P(X = n - y) \\ &= \begin{cases} \binom{n}{n-y} p^{n-y} (1-p)^{n-(n-y)} & , y \in \{n, n-1, n-2, \dots, 0\} \\ 0 & \text{, c.c} \end{cases} \end{aligned}$$

b)

Sabendo que

$$X \sim Geom(p)\ ,\ x = \{1, 2, ...\}$$

$$p_x(x) = P(X = x) \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , x \in \{1, 2, ...\} \\ 0 & ,\ \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim

$$Y = X - 1$$

$$\begin{aligned} P(Y = y) = P(X - 1 = y) = P(X = y + 1) \\ = \begin{cases} p(1-p)^{(y+1)-1} & , y \in \{2, 3, 4, ...\} \\ 0 & ,\ \text{c.c} \end{cases} \end{aligned}$$

c)

Sabendo que

$$X \sim Pascal(r, p)\ ,\ r = \{1, 2, ...\}$$

$$p_x(x) = P(X = x) \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & , x \in \{r, r+1, ...\} \\ 0 & ,\ \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim

$$Y = X - r$$

$$\begin{aligned} P(Y = y) = P(X - r = y) = P(X = y + r) \\ = \begin{cases} \binom{(y+r)-1}{r-1} p^r (1-p)^{(y+r)-r} & , x \in \{2r, 2r+1, ...\} \\ 0 & ,\ \text{c.c} \end{cases} \end{aligned}$$

Questão 3

$\{X = x = n^o$ de bolas vermelhas$\}$

$$\begin{cases} p & = \frac{n^o \text{ de Vermelhas}}{n^o \text{ de Vermelhas + pretas}} = \frac{6}{10} \\ (1-p) & = \frac{n^o \text{ de Pretas}}{n^o \text{ de Vermelhas + pretas}} = \frac{4}{10} \end{cases}$$

Seja n é o tamanho da amostra

a) (sem repo.)

$$X \sim Hgeo(10, 6, n),\ n \leq 6$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}} & , x \in \{0, 1, ..., n\} \\ 0 & , \text{c.c} \end{cases}$$

b) (com repo.)

$$X \sim B(n, 0.6)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

Questão 4

$$p_x(x) = \begin{cases} c2^x & , x \in \{1, 2, 3, \ldots, N\} \\ 0 & , \text{ c.c} \end{cases}$$

Para ser uma função de probabilidade:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_x(x_i) = 1$$

Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} c2^{x_i} &= 1 \\ \Rightarrow c &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{x_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \\ \therefore c &= \frac{1 - (\frac{1}{2})^N}{1 + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Questão 5

$$X \sim Geom(0.8)$$

$$p_x(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & , x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad F_x(x) = \begin{cases} 1 - (1-p)^x & , x \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

a)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_x(3) = (1 - 0.8)^3 = (0.2)^3$$

b)

$$\begin{aligned} P(\{4 \leq X \leq 7\} \cup \{X > 9\}) &= F_x(7) - F_x(3) + 1 - F_x(9) \\ &= 1 - (0.2)^7 - (1 - (0.2)^3) + 1 - (0.2)^9 \\ &= 1 + (0.2)^3 - (0.2)^7 - (0.2)^9 \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(\{3 \leq X \leq 5\} \cup \{7 \leq X \leq 10\}) &= F_x(5) - F_x(2) + F_x(10) - F_x(6) \\
&= 1 - (0.2)^5 - (1 - (0.2)^2) + 1 - (0.2)^{10} - (1 - (0.2)^6) \\
&= (0.2)^2 - (0.2)^5 + (0.2)^6 - (0.2)^{10}
\end{aligned}
$$

Questão 6

$$
\begin{gathered}
X : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; X(\omega) = x, \omega \in \{0, 1, \dots, 99\} \\
P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{100}
\end{gathered}
$$

a)

$$
P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{i=0}^{24} \frac{1}{100} = 1 - \frac{25}{100} = \frac{75}{100}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(2.6 < X < 12.2) &= P(X \leq 12) - P(X \leq 2) \\
&= \sum_{i=0}^{12} \frac{1}{100} - \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{100} \\
&= \frac{13}{100} - \frac{3}{100} \\
&= \frac{10}{100}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(\{8 < X \leq 10\} \cup \{30 < X \leq 32\}) &= P(X \leq 10) - P(X \leq 7) + P(X \leq 32) - P(X \leq 29) \\
&= \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{100} - \sum_{i=0}^{7} \frac{1}{100} + \sum_{i=0}^{32} \frac{1}{100} - \sum_{i=0}^{29} \frac{1}{100} \\
&= \frac{11}{100} - \frac{8}{100} + \frac{33}{100} - \frac{30}{100} \\
&= \frac{6}{100}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
P(25 \leq X \leq 30) &= P(X \leq 30) - P(X \leq 24) \\
&= \sum_{i=0}^{30} \frac{1}{100} - \sum_{i=0}^{24} \frac{1}{100} \\
&= \frac{31}{100} - \frac{25}{100} \\
&= \frac{6}{100}
\end{aligned}
$$

Questão 7

$$X \sim Poisson(2)$$

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2}2^x}{x!} & , x \in \{0, 2, ...\} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad F_x(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ e^{-2} \sum_{k=0}^{x} \frac{2^x}{k!} & , x \geq 0 \end{cases}$$

a)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-2}2^0}{0!} = 1 - e^{-2}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\{X > 2\} \mid \{x < 5\}) &= \frac{P(\{X > 2\} \cap \{X < 5\})}{P(X < 5)} \\ &= \frac{P(\{2 < X < 5\})}{P(X < 5)} \\ &= \frac{F_x(4) - F_x(2)}{F_x(4)} \\ &= 1 - \frac{F_x(2)}{F_x(4)} \\ &= 1 - \frac{1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-2}2^x}{x!}}{1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-2}2^x}{x!}} \end{aligned}$$

Questão 8

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega \in \{1, 2, ..., 12\}\}, \text{ e } |\Omega| = 12.12$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}/X(\max[\omega_1, \omega_2]) = x$$

Para o 12 (i=12) ser maior, onde ele é o maior, temos: (A ordem não importa)

- Se tirar 12 na 1^a jogada A, (temos 12 possib. pra comparar)
  - $|A| = 12$
- Se tirar 12 na 2^a jogada B (temos 12 possib. pra comparar)
  - $|B| = 12$
- Tirar 12 nas 2 jogadas $A \cap B$ (não são disjuntos)
  - $|A \cap B| = 1$

Assim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12+12-1}{12^2} = \frac{24-1}{12^2}$
Fazendo para $k = i - 1$ (11) ser o maior:

- Se tirar k na 1^a jogada A

- $|A| = i - 1$

- Se tirar k na 2^a jogada B
  - $|B| = i - 1$
- Tirar k nas 2 jogadas $A \cap B$ (não são disjuntos)
  - $|A \cap B| = 1$

Assim:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{(i-1+i-1)-1}{12^2} = \frac{(2i-2)-1}{12^2} = \frac{2(i-1)-1}{12^2} = \frac{2k-1}{12^2}$
Então:

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{12^2} & , \ x \in \{1, 2, \dots, 12\} \\ 0 & , \ \text{c.c} \end{cases}$$

Questão 9

a)

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega \in \{1, 2, \dots, 12\}, \ \omega_i \neq \omega_j, \ i \neq j\}, \text{ e } |\Omega| = 12.11$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}/X(\max[\omega_1, \omega_2]) = x$$

Para o 12 (i=12) ser maior, onde ele é o maior, temos: (A ordem não importa)

- Se tirar 12 na 1^a jogada, A (temos 11 possib. de comparação)
  - $|A| = 11$
- Se tirar 12 na 2^a jogada B (temos 11 possib. de comparação)
  - $|B| = 11$
- Tirar 12 nas 2 jogadas $A \cap B$ (são disjuntos)
  - $|A \cap B| = \emptyset$

Assim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{11+11}{12.11} = \frac{22}{12.11}$
Fazendo para $k = i - 1$ (11) ser o maior:

- Se tirar k na 1^a jogada A (temos 10 possib. de comparação)
  - $|A| = i - 2$
- Se tirar k na 2^a jogada B (temos 10 possib. de comparação)
  - $|B| = i - 2$
- Tirar k nas 2 jogadas $A \cap B$ (são disjuntos)
  - $|A \cap B| = \emptyset$

Assim:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{(i-2+i-2)}{12.1} = \frac{(2i-4)}{12.11} = \frac{2(i-2)}{12.11} = \frac{2(i-1-1)}{12.11} = \frac{2(k-1)}{12.11} = \frac{(k-1)2!(12-2)!}{12!} = \frac{(k-1)}{\binom{12}{2}}$

Então:

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)}{\binom{12}{2}} & , \ x \in \{2, 3, \dots, 12\} \\ 0 & , \ \text{c.c} \end{cases}$$

*Lembrando que $p_x > 0$ quando $x \in \Omega$

b)

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \in \Omega} p_x(x)$$

Fazendo

$$\sum_{x:k \in \Omega} p_x(k) = \sum_{x=2}^{k} \frac{(x-1)}{\binom{12}{2}} \overbrace{=}^{x-1=n|_1^{k-1}} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{n}{\binom{12}{2}} \overbrace{=}^{j=k-1} \frac{\frac{j(j-1)}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{12}{2}}$$

Assim:

$$p_x(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ \frac{\binom{[x]}{2}}{\binom{12}{2}} & , \ 2 \leq x < 12 \\ 1 & , x \geq 12 \end{cases}$$

Questão 10

(não importa a ordem)

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n) : \omega \in \{1, \dots, r\}, \omega_i \neq \omega_j, \ \forall i \neq j\}$$

$$Y : \Omega \to \mathbb{R} / Y(\max[\omega_1, \dots, \omega_n]) = y$$
$$Z : \Omega \to \mathbb{R} / Z(\min[\omega_1, \dots, \omega_n]) = z$$

a)

Como na questão 9 (o mesmo processo),

$$P(Y = y) = \underbrace{\frac{\overbrace{y-1}^{\substack{\text{y-1 números} \\ \text{menores que y} \\ \text{para ele ser o maior}}}}{\binom{r}{n}}}_{\substack{\text{Escolher n de r} \\ \text{sem ordem}}}$$

Portanto:

$$F_y(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y \in \Omega} p_y(y)$$

Fazendo

$$\sum_{y:k\in\Omega} p_y(k) = \sum_{y=2}^{k} \frac{(y-1)}{\binom{r}{n}} \overbrace{=}^{x-1=i|_1^{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{\binom{r}{n}} \overbrace{=}^{j=k-1} \frac{\frac{j(j-1)}{2}}{\binom{r}{n}} = \frac{\binom{j}{n}}{\binom{r}{n}}$$

Assim:

$$p_y(y) = \begin{cases} 0 & , y < n \\ \frac{\binom{[y]}{n}}{\binom{r}{n}} & , \ n \leq x < r \\ 1 & , y \geq r \end{cases}$$

b)

Pensando em os 2 (“$n = 2$”) primeiros números:

Para o 1 (i=1) ser menor, onde ele é o menor, temos: (A ordem não importa)

- Se tirar 1 na 1^a jogada, A (temos r-1 possib. de comparação)
  - $|A| = r - 1$
- Se tirar 1 na 2^a jogada B (temos r-1 possib. de comparação)
  - $|B| = r - 1$
- Tirar 1 nas 2 jogadas $A \cap B$ (são disjuntos)
  - $|A \cap B| = \emptyset$

Assim $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{r-1+r-1}{n.(n-1)} = \frac{2(r-1)}{n.(n-1)}$

Fazendo para $k = i + 1$ (2) ser o menor:

- Se tirar k na 1^a jogada A (temos r-2 possib. de comparação)
  - $|A| = r - (i + 1)$
- Se tirar k na 2^a jogada B (temos r-2 possib. de comparação)
  - $|B| = r - (i + 1)$
- Tirar k nas 2 jogadas $A \cap B$ (são disjuntos)
  - $|A \cap B| = \emptyset$

Assim:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{r-(i+1)+r-(i+1)}{r.(r-1)} = \frac{2(r-(i+1))}{r.(r-1)} = \frac{2(r-k)}{r.(r-1)} = \frac{(r-k)2!(r.(r-1))!}{r!} = \frac{(r-k)}{\binom{r}{2}}$

Extrapolando para $n = n$ temos:

- Para $z \in \{1, 2, ..., r\}$

$$P(Z = z) = \underbrace{\frac{\overbrace{r - z}^{\substack{\text{r-z números} \\ \text{maiores que z} \\ \text{para ele seja o menor}}}}{\binom{r}{n}}}_{\substack{\text{Escolher n de r} \\ \text{sem ordem}}}$$

- Para $z \notin \{1, 2, ..., r\}$

$$P(Z = z) = 0$$

Portanto:

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = \sum_{z \in \Omega} p_z(z)$$

Fazendo

$$\sum_{z : k \in \Omega} p_z(k) = \sum_{z=1}^{k} \frac{(r - z)}{\binom{r}{n}} = ...(continuar)$$

Assim:

$$p(Z \geq z) = \begin{cases} 0 & , y < n \\ \frac{\binom{[y]}{n}}{\binom{r}{n}} & , \ n \leq x < r \\ 1 & , y \geq r \end{cases}$$

Questão 11

$$X : \Omega \to \mathbb{R}/X(\omega) \in \{0, \ \pm 1, \ \pm 2\}$$

- $\overbrace{P(X = -2)}^{1 \ de \ 2} = \overbrace{P(X = -1)}^{2 \ de \ 2}$
- $P(X = 1) = P(X = 2)$
- $P(X > 0) = P(X < 0) = P(X = 0)$
- $\underbrace{P(X = -2) + P(X = -1)}_{1 \ de \ 3} = \underbrace{P(X = 2) + P(X = 1)}_{2 \ de \ 3} = \underbrace{P(X = 0)}_{3 \ de \ 3}$

$P(X < 0) = \frac{1}{3}$

$P(x = 1) = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , k = \pm 1, \ \pm 2 \\ \frac{1}{3} & , k = 0 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & X < -2 \\ \frac{1}{6}, & -2 \leq X < -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 \leq X < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq X < 1 \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

Questão 12

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , X < -0 \\ \frac{x}{2} & , 0 \leq X < 1 \\ \frac{2}{3} & , 1 \leq X < 2 \\ \frac{11}{12} & , 2 \leq X < 3 \\ 1 & , X \geq 3 \end{cases}$$

a)

$$P(X < 3) = \frac{11}{12}$$

b)

$$P(X = 1) = \frac{2}{3}$$

c)

$$P(X = 1) = \frac{2}{3}$$

d)

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - 0$$

e)

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 1 - \frac{2}{3}$$

f)

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 1 - \frac{2}{3}$$