Lista 8

Allan

15/04/2021

Questão 1

Com a função de distribuição de X como:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x}{a} & , 0 \leq x < a \\ 1 & , x \geq a \end{cases}$$

Temos $Y = \min(X, a/2)$ no qual a f.d é

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leq y) = \\ =& P(\min(X, a/2) \leq y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ P(X \leq y) & , 0 \leq y < \frac{a}{2} \\ 1 & , y \geq \frac{a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \frac{y}{a} & , 0 \leq y < \frac{a}{2} \\ 1 & , y \geq \frac{a}{2} \end{cases}$

Questão 2

Seja $(\Omega, P, \mathbb{A})$, no qual $\Omega = (-10, 10)$ e $\mathbb{A} = \mathbb{B}(\Omega)$, $\forall A \in \mathbb{A}$, definimos $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\omega \mapsto X(\omega)$, pelo qual X é uma v.a.

X é definida como:

$$X(\omega) = \begin{cases} -5 & \text{se} \quad -10 < \omega < -5 \\ \omega & \text{se} \quad -5 \leq \omega \leq 5 \\ 5 & \text{se} \quad 5 \leq \omega \leq 10 \end{cases}$$

$$P(-5 \leq X \leq 5) = 1$$

sabendo que $P(A) = \frac{\int_A}{|\Omega|} = \int_A \frac{1}{20}$ e $Im(X) = x = [-5, 5]$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -5 \\ P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) = & , -5 \leq x < 5 \\ P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = -5\}) + & \\ +P(\{\omega \in \Omega | -5 < X(\omega) \leq x\}) = & \\ P((-10,-5)) + P([-5,x]) & \\ 1 & , x \geq 5 \end{cases}$$

então $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -5 \\ \int_{-10}^{-5} \frac{du}{20} + \int_{-5}^{x} \frac{du}{20} & , -5 \leq x < 5 \\ 1 & , x \geq 5 \end{cases}$

Questão 3

a)

Sabendo $X \sim N(0,1)$ e $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$Y = \sigma X + \mu$$

onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \in \mathbb{R}) = 1$

- Para $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sigma X + \mu \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

assim

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& F_Y'(y) = F_X'\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) . \frac{d}{dy}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \\ =& f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) . \frac{1}{\sigma} = \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

ou seja, $Y \sim N(\mu, \sigma)$

b)

Sabendo que $X \sim Cauchy(0,1)$ e $f_X(x) = \frac{1}{\pi[1+x^2]}$ para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$Y = bX + a$$

onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \in \mathbb{R}) = 1$

- Para $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(bX + a \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

assim

$$\begin{aligned}
f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y-a}{b}\right) = \\
=& f_X\left(\frac{y-a}{b}\right) \cdot \frac{1}{b} = \\
=& \frac{1}{\pi b\left[1 + \left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right]}
\end{aligned}$$

ou seja, $Y \sim Cauchy(a, b)$

Questão 4

Seja $X \sim Exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$, para $x > 0$, temos

$$Y = cX, \ c > 0$$

onde $P(X > 0) = 1$ e $P(Y > 0) = 1$

- Para $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

- Para $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{c}\right) = F_X\left(\frac{y}{c}\right)$$

assim para $y > 0$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X\left(\frac{y}{c}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{c}\right) = \\
=& f_X\left(\frac{y}{c}\right) \frac{1}{c} = \\
=& \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c} y}
\end{aligned}$$

Portanto $Y \sim Exp(\frac{\lambda}{c})$

Questão 5

Seja $X \sim U(0,1)$, para $x = [0,1]$, temos que

$$Y = X^{\frac{1}{\beta}},\ \beta \neq 0$$

onde $P(0 \leq X \leq 1) = 1$

1. Para $\beta > 0$, $P(0 \leq X^{\frac{1}{\beta}} \leq 1) = 1$

- onde $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

- onde $0 < y < 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{\beta}} \leq y) = \overbrace{P(X \leq y^{\beta})}^{\substack{\text{Ao elevar a inegualdade} \\ \text{sob } \beta\text{, o conjunto} \\ 0<y<1 \text{ tbm é elevado} \\ \text{virando } 0^{\beta}<y^{\beta}<1^{\beta}= \\ 0<y^{\beta}<1 \\ \text{onde é importante para} \\ \text{identificar os limites} \\ \text{onde não zera } F_X(x)}} = F_X(y^{\beta})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(y^{\beta}).\frac{d}{dy}(y^{\beta}) = \\
=& f_X(y^{\beta}).\beta y^{\beta-1} = \\
=& \frac{1}{1-0}.\beta y^{\beta-1} = \\
=& \beta y^{\beta-1}
\end{aligned}$$

- onde $y > 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$$

Portanto para $\beta > 0$, $f_Y(y) = \begin{cases} \beta y^{\beta-1} & ,0 < y < 1 \\ 0 & ,\ c.c \end{cases}$

1. Para $\beta < 0$, (Inverte a igualdade) ,$P(X^{\frac{1}{\beta}} > 1) = 1$

- onde $y \leq 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{\beta}} \leq y) = \overbrace{P(X \geq y^{\beta})}^{y^{\beta} \geq 1^{\beta}} = 1 - P(X \leq y^{\beta}) = 1 - 1 = 0$$

- onde $y > 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^{\frac{1}{\beta}} \leq y) = \overbrace{P(X \geq y^\beta)}^{y^\beta < 1^\beta} = 1 - P(X \leq y^\beta) = 1 - F_X(y^\beta)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = -F'_X(y^\beta)\frac{d}{dy}(y^\beta) = \\ =& - f_X(y^\beta)\beta y^{\beta-1} = \\ =& - \beta y^{\beta-1}\end{aligned}$$

Portanto para $\beta < 0$, $f_Y(y) = \begin{cases} -\beta y^{\beta-1} & , y > 1 \\ 0 & , \end{cases}$

Questão 6

Seja X uma v.a com $f_X(x) = f$

a)

Sob $Y = |X|$, $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \geq 0) = 1$

- Para $y < 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

- Para $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

  então

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(y).\frac{d}{dy}(y) - F'_X(-y).\frac{d}{dy}(-y) = \\ =& f_X(y) + f_X(-y)\end{aligned}$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y) & , \ y \geq 0 \\ 0 & , \ y < 0 \end{cases}$

b)

Sob $Y = X^2$, $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \geq 0) = 1$

- Para $y < 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

- Para $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-y^{\frac{1}{2}} \leq X \leq y^{\frac{1}{2}}) = F_X(y^{\frac{1}{2}}) - F_X(-y^{\frac{1}{2}})$$

então

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(y^{\frac{1}{2}}).\frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{2}}) - F'_X(-y^{\frac{1}{2}}).\frac{d}{dy}(-y^{\frac{1}{2}}) = \\ =& f_X(y^{\frac{1}{2}}).\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-y^{\frac{1}{2}}).\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ =& \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(y^{\frac{1}{2}}) + f_X(-y^{\frac{1}{2}})] \end{aligned}$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(y^{\frac{1}{2}}) + f_X(-y^{\frac{1}{2}})] & , y \geq 0 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$

Questão 7

Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$ com $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

a)

Para $Y = |X|$, onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \geq 0) = 1$

- Para $y \geq 1$

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(-y)^2}{2\sigma^2}}$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}[e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}] & , y \geq 0 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$

b)

Para $Y = X^2$, onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y \geq 0) = 1$

- Para $y \geq 1$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(y^{\frac{1}{2}}) + f_X(-y^{\frac{1}{2}})] = \frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{y}{2\sigma^2}}]$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2y\pi}}[e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} + e^{\frac{y}{2\sigma^2}}] & , y \geq 0 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$

Questão 8

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $x \in \mathbb{R}$

para $Y = e^X$

onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ e $P(Y > 0) = 1$

- Para $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(\ln(y)).\frac{d}{dy}(\ln(y)) = \\ =& f_X(\ln(y)).\frac{1}{y} = \\ =& \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Para $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases}$

Questão 9

???? Seja $Y = X^2$, $Y \sim Exp(\lambda)$, para $y \geq 0$, onde $P(Y \geq 0) = 1$

$X = Y^{\frac{1}{2}}$

- Para $X \geq 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(Y^{\frac{1}{2}} \leq x) = P(Y \leq x^2) = F_Y(x^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_X(x) =& F'_X(x) = F'_Y(x^2).\frac{d}{dx}(x^2) = \\ =& f_Y(x^2).2x = \\ =& \lambda e^{-x^2\lambda}.2x = \end{aligned}$$

Questão 10

Seja $\Theta \sim U[-\pi/2, \pi/2]$

a)

$X = tan(\Theta)$, onde $P(X \in \mathbb{R}) = 1$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(tan(\Theta) \leq x) = P(\Theta \leq arctan(x)) = F_\Theta(arctan(x))$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_X(x) =& F_X(x) = F'_\Theta(arctan(x)).\frac{d}{dx}(arctan(x)) = \\ =& f_\Theta(arctan(x)).\frac{d}{dx}(arctan(x)) = \\ =& \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)}.\frac{1}{1-x^2} = \\ =& \frac{1}{\pi(1+x^2)} =\end{aligned}$$

Portanto $X \sim Cauchy(0,1)$

b)

$Y = sin(\Theta)$, onde $P(-1 \leq Y \leq 1) = 1$

- Para $y \leq -1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

- Para $-1 < y < 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(sin(\Theta) \leq y) = P(\Theta \leq arcsin(x)) = F_\Theta(arcsin(y))$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_Y(y) =& F_Y(y) = F'_\Theta(arcsin(y)).\frac{d}{dx}(arcsin(y)) = \\ =& f_\Theta(arcsin(y)).\frac{d}{dy}(arcsin(y)) = \\ =& \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)}.\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \\ =& \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

- Para $y \geq 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\Omega) = 1$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & , -1 < y < 1 \\ 0 & , \ c.c \end{cases}$

e

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < -1 \\ \int_{-1}^{y} \frac{arcsin(u)}{\pi}\ du = \frac{arcsin(y)+\pi/2}{\pi} & , -1 \leq y < 1 \\ 1 & , y \geq 1 \end{cases}$$

Questão 11

Seja $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$, pra $x > 0$, onde $P(X > 0) = 1$ e

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$$

a)

$Y = cX$, tem como $P(Y > 0) = 1$

- Para $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = P(X \leq \frac{y}{c}) = F_X(\frac{y}{c})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(\frac{y}{c}).\frac{d}{dx}(\frac{y}{c}) = \\ =& f_X(\frac{y}{c}).\frac{1}{c} = \\ =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda \frac{y}{c}} (\frac{y}{c})^{\alpha-1} \frac{1}{c}\end{aligned}$$

- Para $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda \frac{y}{c}} (\frac{y}{c})^{\alpha-1} \frac{1}{c} & , y > 0 \\ 0 & , \ y \leq 0 \end{cases}$

b)

$Y = \sqrt{X}$, tem como $P(Y > 0) = 1$

- Para $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_Y(y) =& F'_Y(y) = F'_X(y^2).\frac{d}{dx}(y^2) = \\ =& f_X(y^2).2y = \\ =& \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y^2} (y^2)^{\alpha-1} 2y\end{aligned}$$

- Para $y \leq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\phi) = 0$$

Portanto $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda y^2} (y^2)^{\alpha-1} 2y & , y > 0 \\ 0 & , \ y \leq 0 \end{cases}$