Lista de Exercícios 4

1. A função de probabilidade conjunta de uma vetor aleatório (X, Y) é dada por

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(2x+y), & x = 1,2; \ \ y = 1,2 \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.
a) Determine o valor de k.
b) Determine as funções de probabilidade marginais de X e Y.
c) São X e Y independentes?

2. Considere um experimento de lançar três vezes duas moedas distintas A e B. Suponha que a moeda A é honesta, isto é, $P(cara) = P(coroa) = 1/2$, e a moeda B não é honesta com $P(cara) = 1/4$ e $P(coroa) = 3/4$. Seja X a v.a. que denota o número de caras resultantes da moeda A e Y a v.a. que denota o número de caras da moeda B.
a) Determine os valores possíveis do vetor (X, Y).
b) Determine as funções de probabilidade marginais de X e Y.
c) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y.
d) Calcule $P(X = Y)$, $P(X > Y)$ e $P(X + Y \leq 4)$.

3. Seja X uma variável aleatória geometricamente distribuída com parâmetro p e seja M uma constante tal que $M \in \{1,2,\ldots\}$. Determine a função de probabilidade de $Y = \min(X, M)$.

4. Considere 10 lançamentos independentes de um dado honesto e seja X_i o número de ocorrências da face i, para $i = 1,2,\ldots,6$.
a) Determine a função de probabilidade conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_6$.
b) Determine as funções de probabilidade marginais de X_i, para $i = 1,2,\ldots,6$.
c) São X_i, $i = 1,2,\ldots,6$, independentes?

5. Suponha que se distribui aleatoriamente $2r$ bolas em r caixas. Seja X_i o número de bolas na caixa i.
a) Obtenha a função de probabilidade conjunta de $X_1, \ldots, X_r$.
b) Obtenha a probabilidade de que cada caixa contenha exatamente 2 bolas.

6. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes que se distribuem uniformemente sobre $\{0,1,\ldots,N\}$. Determine:
a) $P(X \geq Y)$.
b) $P(X = Y)$.
c) a função de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.
d) a função de probabilidade de $W = \max(X, Y)$.
e) a função de probabilidade de $U = |Y - X|$.

7. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com funções de probabilidade geométricas de parâmetros p_1 e p_2, respectivamente. Obtenha:
   a) $P(X \geq Y)$.
   b) $P(X = Y)$
   c) a função de probabilidade de $Z = \min(X, Y)$.
   d) a função de probabilidade de $W = X + Y$.

8. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com a mesma função de probabilidade geométrica de parâmetro p. Sejam $Z = Y - X$ e $W = \min(X, Y)$.

   a) Mostre que para z e $w \geq 1$ inteiros:

$$P(W = w, Z = z) = \begin{cases} P(X = w - z)P(Y = w), & z < 0 \\ P(X = w)P(Y = w + z), & z \geq 0 \end{cases}$$

   b) Conclua de (a) que para z e $w \geq 1$ inteiros:

$$P(W = w, Z = z) = p^2(1-p)^{2(w-1)}(1-p)^{|z|}.$$

   c) Use (b) e o exercício 7(c) para mostrar que W e Z são independentes.

9. Sejam X e Y v.a.'s independentes. Determine a função de probabilidade de $Z = X + Y$ nos seguintes casos:
   a) $X \sim Poisson(\lambda_1)$ e $Y \sim Poisson(\lambda_2)$.
   b) X e Y uniformemente distribuídas sobre $\{1,2, \dots, N\}$

10. Sejam $X_1, \dots, X_l$ v.a.'s independentes, tais que $X_j \sim Poisson(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, l$. Determine a função de probabilidade de $Z = X_1 + \cdots + X_l$.

11. Considere um experimento com três resultados possíveis que ocorrem com probabilidades p_1, p_2 e p_3, respectivamente. Suponha que se realiza n repetições independentes do experimento e seja X_i o número de vezes que ocorre o resultado i, i =1, 2, 3.
   a) Determine a probabilidade de $X_1 + X_2$.
   b) Para cada z, determine $P(X_2 = y | X_1 + X_2 = z)$, $y \in \mathbb{R}$.

12. Use a aproximação de *Poisson* para calcular a probabilidade de:
   a) que no máximo 2 dentre 50 motoristas tenham carteiras de habilitação inválida se normalmente 5% dos motoristas o tem;
   b) que uma caixa com 100 fusíveis contenha no máximo 2 fusíveis defeituosos se 3% dos fusíveis fabricados são defeituosos.

13. Lança-se um dado até observar o número 6. Considere X o número de lançamentos até observar 6 pela primeira vez. Responda:
   a) qual é a probabilidade de que sejam necessários seis lançamentos no máximo?
   b) quantos lançamentos são necessários para que a probabilidade de obter 6 seja no mínimo 1/2?

14. Sejam X e Y sejam v.a.'s independentes com distribuição de *Poisson* de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Para cada $z \in \{0,1, \dots\}$ determine $P(X = x | X + Y = z)$, $x \in \mathbb{R}$.

15. Sejam X, Y e Z v.a.'s independentes com distribuições de *Poisson* de parâmetros λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente. Para cada $m = 0,1,2,\ldots$, determine $P(X = x, Y = y, Z = z | X + Y + Z = m)$, para números inteiros x, y e z.

Exercício	**Resposta**
1	**a)** $\frac{1}{18}$ **b)** $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(4x+3), & x = 1,2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$; $p_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{18}(2y+6), & y = 1,2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$ **c)** não
2	**a)** $\{(i,j): i,j = 0,1,2,3\}$ **b)** $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0 \text{ ou } 3 \\ \frac{3}{8}, & x = 1 \text{ ou } 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$; $p_Y(y) = \begin{cases} \frac{27}{64}, & y = 0 \text{ ou } 1 \\ \frac{9}{64}, & y = 2 \\ \frac{1}{64}, & y = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ **c)** $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$; **d)** $\frac{136}{512}, \frac{306}{512}$ e $\frac{499}{512}$
3	$P(Y = k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1}, & k = 1,\ldots,M-1 \\ (1-p)^{M-1}, & k = M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
4	**a)** Multinomial de parâmetros $n = 10$, $p_i = 1/6$, $i = 1,2,\ldots 6$; **b)** $X_i \sim B(n, p_i)$; **c)** não
5	**a)** Multinomial de parâmetros $n = 2r$, $p_i = 1/r$, $i = 1,\ldots,r$. **b)** $\frac{(2r)!}{2^r r^{2r}}$
6	**a)** $\frac{N+2}{2(N+1)}$; **b)** $\frac{1}{N+1}$; **c)** $p_Z(z) = \begin{cases} \frac{2(N-z)+1}{(N+1)^2}, & z = 0,1,\ldots,N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$; **d)** $p_W(z) = \begin{cases} \frac{2z+1}{(N+1)^2}, & z = 0,1,\ldots,N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$; **e)** $p_U(z) = \begin{cases} \frac{1}{N+1}, & z = 0 \\ \frac{2(N-z+1)}{(N+1)^2}, & z = 1,\ldots,N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
7	**a)** $\frac{p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$; **b)** $\frac{p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$; **c)** $Geométrica(p_1 + p_2 - p_1p_2)$; **d)** $p_W(z) = \begin{cases} \frac{p_1p_2}{p_1-p_2}[(1-p_2)^{z-1} - (1-p_1)^{z-1}], & z = 2,3,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
9	**a)** $Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$; **b)** $p_U(z) = \begin{cases} \frac{z-1}{N^2}, & z = 2,\ldots,N \\ \frac{2N-z+1}{N^2}, & z = N+1,\ldots,2N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
10	$Poisson(\lambda_1 + \cdots + \lambda_l)$

11	**a)** $B(n, p_1 + p_2)$; **b)** $\begin{cases} \binom{z}{y}\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}\right)^{z-y}\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right)^{y}, & y = 0,1,\dots,z \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
12	**a)** $e^{-5/2}\,\frac{53}{8}$; **b)** $e^{-3}\,\frac{17}{2}$
13	**a)** $1 - (5/6)^6$; **b)** 4
14	$\begin{cases} \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{z-x}, & x = 0,1,\dots,z \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
15	$\frac{m!}{x!y!z!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{x}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{y}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{z}$, $x, y, z \in \{0,1,2,\dots\}$ e $x + y + z = m$