Lista de Exercícios 10

1. Sejam X e Y v.a.'s independentes tais que $X \sim Gama(\alpha_1, \lambda)$ e $Y \sim Gama(\alpha_2, \lambda)$. Considere $Z = \frac{Y}{X}$.
   a) Determine para quais valores de α_1 e α_2 teremos EZ finita e calcule EZ neste caso.
   b) Determine para quais valores de α_1 e α_2 teremos EZ^2 finita e calcule $VarZ$ neste caso.

2. Seja $X \sim \chi^2(n)$ (ou seja, $X \sim Gama(n/2\,, 1/2)$). Calcule a esperança de $Y = \sqrt{X}$.

3. Sejam U_1 e U_2 v.a.'s i.i.d. com distribuição comum $Exp(\lambda)$ e seja $Y = max\{U_1, U_2\}$. Obtenha a esperança e a variância de Y.

4. Seja $X = sen\Theta$, em que $\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Determine EX e $VarX$.

5. Seja $X \sim N(0, \sigma^2)$. Determine a esperança e a variância das seguintes v.a.'s:
   a) $|X|$ b) X^2

6. Sejam X e Y v.a.'s com densidade conjunta
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\sqrt{15}}{4\pi} \exp\left\{-\frac{(x^2 - xy + 4y^2)}{2}\right\},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

7. Sejam X e Y v.a.'s independentes tais que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim Gama(\alpha, \lambda)$. Obtenha a esperança e a variância de $Z = XY$.

8. Sejam X e Y v.a.'s tais que $EX = EY = 0$, $VarX = VarY = 1$ e $\rho(X,Y) = \rho$. Mostre que: $X - \rho Y$ e Y são não-correlacionadas, $E(X - \rho Y) = 0$ e $Var(X - \rho Y) = 1 - \rho^2$.

9. Seja $X \sim U(a,b)$. Obtenha $M_X(t)$, função geradora de momentos de X.

10. Use a função geradora de momentos para obter a esperança e a variância de X, nos seguintes casos:
    a) $X \sim B(n,p)$ b) $X \sim Poisson(\lambda)$

11. Use a função geradora de momentos para obter os momentos de todas as ordens de X, nos seguintes casos:
    a) $X \sim N(0, \sigma^2)$ b) X tem densidade $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$

12. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes. Use a função geradora de momentos para obter a distribuição de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, nos seguintes casos:
    a) $X_i \sim Gama(\alpha_i, \lambda)$ b) $X_i \sim Exp(\lambda)$ c) $X_i \sim B(n_i, p)$ d) $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$
    para $i = 1, \ldots, n$.

13. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.'s i.i.d. tendo média μ e variância σ^2 e seja $\bar{X} = S_n/n$, onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. (Se $X_1, \dots, X_n$ têm f.d. comum F, dizemos que $X_1, \dots, X_n$ é uma *amostra aleatória* de tamanho *n* da v.a. X, cuja f.d. é F, e $\bar{X}$ é chamada *média amostral*.)
    a) Mostre que: $E\bar{X} = \mu$ e $Var\bar{X} = \sigma^2/n$
    b) Qual o tamanho da amostra que devemos considerar de tal forma que $P\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}\right) \geq 0{,}95$?

14. Da experiência passado, um professor sabe que a pontuação de um estudante no seu exame final é uma v.a. com média 75.
    a) Dê um limite superior para a probabilidade de que a pontuação do estudante excederá 85.
    b) Se, além disso, o professor também saiba que a variância da pontuação do estudante é 25, o que pode ser dito sobre a probabilidade de que o estudante terá uma pontuação entre 65 e 85?

15. Um corredor procura controlar seus passos em uma corrida de 100 metros. De sua experiência, ele sabe que o tamanho de seu passo na corrida é uma v.a. com média 0,97 metro e desvio-padrão 0,1 metro. Determine a probabilidade de que 100 passos difiram de 100 metros por não mais de 5 metros.

Exercício	**Resposta**
1	a) $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 0, EZ = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1}$ b) $\alpha_1 > 2, VarZ = \frac{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-1)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_1-2)}$
2	$\sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$
3	$EY = \frac{3}{2\lambda};\ VarY = \frac{5}{4\lambda^2}$
4	$EY = 0;\ VarX = \frac{1}{2}$
5	a) $E\|X\| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ Var\|X\| = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$ b) $EX^2 = \sigma^2,\ VarX^2 = 2\sigma^4$
6	$\rho = \frac{1}{4}$
7	$EZ = \frac{\mu\alpha}{\lambda};\ VarZ = \frac{\alpha(\sigma^2\alpha+\sigma^2+\mu^2)}{\lambda^2}$
9	$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$
10	a) $EX = np,\ VarX = np(1-p)$ b) $EX = VarX = \lambda$
11	a) $EX^m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ ímpar} \\ \frac{m!\,\sigma^m}{2^{m/2}\left(\frac{m}{2}\right)!} & \text{se } m \text{ par} \end{cases}$ b) $EX^m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ ímpar} \\ m! & \text{se } m \text{ par} \end{cases}$
12	a) $Gama(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$ b) $Gama(n, \lambda)$ c) $B(\sum_{i=1}^n n_i, p)$ d) $Poisson(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$
13	b) $n \geq 2000$
14	a) $P(X > 85) \leq \frac{75}{85}$ b) $P(65 \leq X \leq 85) \geq \frac{75}{100}$
15	0,9773