Lista 2

Allan

02/03/2021

Questão 1

(Com reposisao, E importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{.\, , -\}, i = [1, ..., n]\}$$

a)

$|A| = \underbrace{2.2.2 \; ... \; 2}_{n} = 2^n$

b)

$|B| = 2$ ou 2^2 ou $2^3 \ldots 2^n$

Quantas configurações podem ser de n ou menos simbolos:

$$
\begin{aligned}
|B| = \sum_{j=1}^{n} 2^j &= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\
s_n &= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\
2s_n &= 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} \\
2s_n - s_n &= -2 + 2^{n+1} \\
sn &= 2(2^n - 1)
\end{aligned}
$$

Questão 2

(Sem reposisao, e importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \{1, ..., n\},\ i = [1, ..., r],\ x_i \neq x_j,\ \forall\ i \neq j\}$$

$$A_i = \{\text{Obter sucesso na i-ésima tentativa}\}$$

- $\frac{F}{1^o} \cdot \frac{F}{2^o} \cdot \frac{F}{3^o} \cdots \frac{F}{r-1} \cdot \frac{S}{r}$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_{r-1}^c \cap A_r) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{P(A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{P(A_2^c|A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-3}{n-2}}_{P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)} \cdots \frac{n-(r-1)}{n-(r-2)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-(r-1)}}_{P(A_r|A_1^c \cap ... \cap A_{r-1}^c)} = \frac{1}{n}$$

Questão 3

(Sem reposisao, E importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_6) : x_i \in \{1, ..., 10\},\ i = [1, ..., 6]\}$$

$$|\Omega| = 10.10.10...10 = 10^6$$

$$A = \{(x_1, \ldots, x_6) : x_i \in \{1, ..., 10\},\ i = [1, ..., 6],\ x_i \neq x_j,\ \forall\ i \neq j\}$$

$$|A| = \frac{10!}{(\underbrace{10-6}_{\substack{\text{10 paradas} \\ \text{com base em} \\ \text{6 pessoas sem} \\ \text{repetir}}})!} = \frac{10!}{4!} = 10.9.8.7.6.5 = A_{10,6}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_{10,6}}{10^6}$$

Questão 4

(Sem reposisao, importa a ordem)

$x_i = j \Leftrightarrow$ bola i na caixa j

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{1, .., r\},\ i = [1, ..., n]\}$$

$$|\Omega| = r.r...r = r^n$$

- $A_j = \{$A caixa j com 2, sendo a n-ésima bola a segunda desta$\}, j = [1, ..., r]$

A caixa j com a bola n (fixo) e uma bola dentre as n-1 restantes nas r caixas:

- $\frac{}{1} \cdots \frac{}{j-1} \cdot \frac{2}{j} \cdot \frac{}{j+1} \cdots \frac{}{r}$

$$|A_j| = \overbrace{\underbrace{(n-1)}_{\substack{\text{n-1 bolas (Possibilidades)} \\ \text{para colocar na caixa j}}} \quad . \underbrace{(r-1).(r-2)...(r-(n-2))}_{\text{n-2 bolas para as r-1 caixas}}}^{\text{r caixas}}$$

- $A = A_1 \cap ... \cap A_r\ ; Dijuntos$
- $|A| = \sum_{j=1}^{r} |A_j|\ ; Dijuntos$

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{j=1}^{r}[(n-1)(r-1)...(r-(n-2))]\\ &= r.(n-1)(r-1)...(r-(n-2)\\ &= (n-1).\frac{r!}{(r-(n-1)!}\\ &= (n-1)A_{r,n-1}\end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{(n-1)A_{r,n-1}}{r^n}$$

Questão 5

(Com reposisao, e não importa a ordem)

- $x_i = j \Leftrightarrow$ bola i na caixa j

$$\Omega = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \{1,...,n\},\ i = [1,...,n],\}$$

$$|\Omega| = n.n.n...n = n^n$$

a)

$A_i = \{$caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia$\}$

$$B_j = \{\text{Caixa i vazia. Caixa j com 2 bolas e as n-2 caixas com 1 bola}\}$$

- $A_i = \cup_{j=2}^{n} B_j$

$$|B_j| = \underbrace{\binom{n}{2}.1}_{\substack{\text{Escolher 2}\\ \text{bolas dentre n}\\ \text{para a caixa j}}} \quad . \quad \underbrace{(n-2)!}_{\substack{\text{Colocar as outras n-2}\\ \text{bolas nas n-2 caixas}}}$$

- $P(B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

$$P(A_i) = \sum_{j=2}^{n} P(B_j) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$

Todas as possibilidades de uma caixa vazia:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$$

b)

1.

- $C = \{$Caixa 1 vazia (fixo) e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente$\}$

$$|C| = \underbrace{(n-1)...(n-1)}_{\text{n bolas para as n-1 caixas}} = (n-1)^n$$

$$P(C) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

2.

- $A = \{$Apenas 1 caixa vazia$\}; i = 2, ...n$
- $A_i = \{$caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia$\}$
- $|A| = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}}{\frac{(n-1)^n}{n^n}} = \frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{(n-1)^n}$$

c)

- $C = \{$Caixa 1 vazia (fixo) e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente$\}$
- $A = \{$Apenas 1 caixa vazia$\}; i = 2, ...n$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}}{\frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}} = \frac{(n-1)!}{n.(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Questão 6

(Com reposisao, e não importa a ordem)

- $x_i = j \Leftrightarrow$ bola i na caixa j

$$\Omega = \{[x_1, \ldots, x_n] : x_i \in \{1, ..., r\},\ i = [1, ..., n], \}$$

$$|\Omega| = \underbrace{r.r.r...r}_{\text{n bolas com r possib. de caixas}} = r^n$$

$A = \{$Caixa 1 tenha j bolas e r-1 caixas com j-n bolas distribuidas aleatoriamente$\}$

$$|A| = \underbrace{\binom{n}{j}.1}_{\substack{\text{j bolas de n} \\ \text{para a caixa 1 sem} \\ \text{importar a ordem}}} \quad . \quad \overbrace{(r-1)^{(n-j)}}^{\substack{\text{n-j bolas com a} \\ \text{posib. de r-1 caixas}}}$$

- $P(A) = \dfrac{\binom{n}{j}.(r-1)^{(n-j)}}{r^n}$

Questão 7

*** A complementar...**

(Sem reposisao, e não importa a ordem)

$$\begin{cases} \text{x = b bolas pretas} \\ \text{y = r bolas vermelhas} \end{cases}$$

- $S = \{x_1, ..., x_b, y_1, ..., y_r\}$

$\omega =$ Bola retirada da caixa

$$\Omega = \{[\omega_1, \ldots, \omega_n] : \omega_i \in S,\ i = [1, ..., n],\ \omega_i \neq \omega_j,\ p/i \neq j\}$$

$|\Omega| = \binom{b+r}{n}$

- $A_i = \{\text{Tirar bola preta n-1 vezes}\}$

Não Importa a ordem

- $A = \{[y_1, ..., y_{n-1}] : |y_i \in \{1, ..., r\}, \forall \{1, ..., n-1\}\}$

$$P(A) = \frac{\overbrace{\binom{r}{n-1}}^{\text{De r bolas n-1 são tiradas}}}{\underbrace{\dbinom{b+r}{n-1}}_{\substack{\text{De b+r bolas} \\ \text{n-1 são tiradas}}}}$$

- $B_n|A = \{\text{A n-ésima bola é preta e as n-1 bolas não são}\}$

$$P(B_n|A) = \frac{\overbrace{b}^{\text{Quantas bolas podem ser a n-ésima preta}}}{\underbrace{b + r - (n-1)}_{\text{De b+r bolas n-1 foram tiradas}}}$$

$$P(A \cap B_n) = P(A).P(B_n|A) = \frac{\binom{r}{n-1}}{\binom{b+r}{n-1}}.\frac{b}{b + r - (n-1)}$$

Questão 8

a)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1}.1.1.1.1.1}^{\substack{\text{1 naipe de 4 para} \\ \text{exatamente esta sequencia} \\ \text{de 1 possibilidade de cartas}}}}{\binom{52}{5}}$$

b)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{1 de 4 naipes}} \quad . \quad \overbrace{10.1.1.1.1}^{\substack{\text{10 possib. p primeira carta} \\ \text{e sequencialas apenas 1 para o resto}}}}{\binom{52}{5}}$$

c)

A ordem importa

- $(x, x, x, x, y) \neq (y, y, y, y, x)$; 2 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{2}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 2 para serem} \\ \text{os números} \\ \text{e 4 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}} \quad . \quad \overbrace{2}^{\substack{\text{Número de ordens} \\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1}}^{\substack{\text{De 4 naipes tirar os 4} \\ \text{de 13 cartas tirar 1 número} \\ \text{1 de 48 para a 5º carta}}}}{\binom{52}{5}}$$

d)

A ordem importa

- $(x, x, x, y, y) \neq (y, y, y, x, x)$; 2 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 2 para serem} \\ \text{de mesmo número} \\ \text{e 3 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 2 de 4 de naipes diferentes}}} \quad . \quad \overbrace{2}^{\substack{\text{Número de ordens} \\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

e)

Não importa a ordem

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{5}}^{\substack{\text{De 4 naipes 1}\\ \text{p 5 cartas de}\\ \text{uma das 13}\\ \text{do naipe}}}}{\binom{52}{5}}$$

f)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1}.10}^{\substack{\text{10 números para a}\\ \text{1ºCarta vezes os}\\ \text{naipes possiveis}}} \quad . \overbrace{\binom{4}{1}.1.\binom{4}{1}.1.\binom{4}{1}.1.\binom{4}{1}.1}^{\substack{\text{4 cartas possiveis para}\\ \text{cada sequencia com base no naipe}}} - \quad \overbrace{\binom{4}{1}.10.1.1.1}^{\text{4 naipes com sequencia do mesmo}}}{\binom{52}{5}}$$

g)

Ordem importa

- $(x,x,x,y,z) \neq (y,y,y,z,x) \neq (z,z,z,x,y);$ 3 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{3}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 3 para serem}\\ \text{os números}\\ \text{3 de 4 naipes diferentes}\\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}} \quad . \quad \overbrace{3}^{\substack{\text{Número de ordens}\\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

h)

Ordem importa

- $(x,x,y,y,z) \neq (y,y,z,z,x) \neq (z,z,x,x,y);$ 3 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{3}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 3 para serem}\\ \text{os número}\\ \text{2 de 4 naipes diferentes}\\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}} \quad . \quad \overbrace{3}^{\substack{\text{Número de ordens}\\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

i)

Ordem importa

- $(w, w, x, y, z) \neq (x, x, y, z, w) \neq (y, y, z, w, x) \neq (z, z, w, x, y);$ 4 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{4}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 4 para serem} \\ \text{os número} \\ \text{2 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}}\cdot \overbrace{4}^{\substack{\text{Número de ordens} \\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

Questão 9

(Sem reposisao, E não importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, ..., 10\},\ i = [1, ..., 10],\ x_i \neq x_j\}$$
$$|\Omega| = \binom{10}{3}$$

$$\frac{\overbrace{\binom{8}{1}.1.1}^{\substack{\text{Escolher e 6 o 3 (fixo)} \\ \text{Escolher o 3º número} \\ \text{entre 10 - 2 restantes}}}}{\binom{10}{3}}$$

Questão 10

$$\frac{\overbrace{\binom{r-k}{n-k}\overbrace{1.1....1}^{k}}^{\substack{\text{Pegar k objetos (fixo)} \\ \text{e entre os r-k restantes} \\ \text{pegar n-k que falta pra completar a amostragem n}}}}{\binom{r}{n}}$$

Questão 11

Classes dos baralhos $\begin{cases} vermelhas = 26 \text{ cartas} \\ pretas = 26 \text{ cartas} \end{cases}$

Escolher 2 de cada classe sem importar a ordem:

$$\frac{\binom{26}{2}\cdot\binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}$$

Questão 12

- $A = \{\text{Pelo menos 1}\}$
- $P(A) = 1 - P(A^c)$

$$1 - \frac{\overbrace{\binom{5}{0}\cdot\binom{n-5}{3}}^{\substack{\text{Das 5 premiadas 0 teve}\\ \text{o bilhete adquirido}\\ \text{e das n-5 não premiadas}\\ \text{3 constaram}}}}{\binom{n}{3}}$$