

Lista 2

Allan

02/03/2021

Questão 1

(Com reposicao, E importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{., -\}, i = 1, \dots, n\}$$

a)

$$|A| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_n = 2^n$$

b)

$$|B| = 2 \text{ ou } 2^2 \text{ ou } 2^3 \dots 2^n$$

Quantas configurações podem ser de n ou menos simbolos:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j=1}^n 2^j = 2 + 2^2 + \dots + 2^n \\ s_n &= 2 + 2^2 + \dots + 2^n \\ 2s_n &= 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} \\ 2s_n - s_n &= -2 + 2^{n+1} \\ sn &= 2(2^n - 1) \end{aligned}$$

Questão 2

(Sem reposicao, e importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_r) : x_i \in \{1, \dots, n\}, i = 1, \dots, r, x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$$

$$A_i = \{\text{Obter sucesso na } i\text{-ésima tentativa}\}$$

$$\bullet \frac{F}{1^\circ} \cdot \frac{F}{2^\circ} \cdot \frac{F}{3^\circ} \dots \frac{F}{r-1} \cdot \frac{S}{r}$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c \cap A_r) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{P(A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{P(A_2^c|A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-3}{n-2}}_{P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)} \dots \frac{n-(r-1)}{n-(r-2)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n-(r-1)}}_{P(A_r|A_1^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c)} = \frac{1}{n}$$

Questão 3

(Sem reposicao, E importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, i = 1, \dots, 6\}$$

$$|\Omega| = 10.10.10...10 = 10^6$$

$$A = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, i = (1, \dots, 6), x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$$

$$|A| = \frac{10!}{(\underbrace{10-6}_{\substack{10 \text{ paradas} \\ \text{com base em} \\ 6 \text{ pessoas sem} \\ \text{repetir}}})!} = \frac{10!}{4!} = 10.9.8.7.6.5 = A_{10,6}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_{10,6}}{10^6}$$

Questão 4

(Sem reposicao, importa a ordem)

$x_i = j \Leftrightarrow$ bola i na caixa j

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n\}$$

$$|\Omega| = r.r...r = r^n$$

- $A_j = \{A \text{ caixa } j \text{ com } 2, \text{ sendo a } n\text{-ésima bola a segunda desta}\}, j = 1, \dots, r$

A caixa j com a bola n (fixo) e uma bola dentre as $n-1$ restantes nas r caixas:

- $\overline{1} \cdots \overline{j-1} \cdot \frac{2}{j} \cdot \overline{j+1} \cdots \overline{r}$

$$|A_j| = \overbrace{\underbrace{(n-1)}_{\substack{n-1 \text{ bolas (Possibilidades)} \\ \text{para colocar na caixa } j}} \cdot \underbrace{(r-1).(r-2)\dots(r-(n-2))}_{\substack{r \text{ caixas} \\ n-2 \text{ bolas para as } r-1 \text{ caixas}}}}^{r \text{ caixas}}$$

- $A = A_1 \cap \dots \cap A_r ; \text{Dijuntos}$
- $|A| = \sum_{j=1}^r |A_j| ; \text{Dijuntos}$

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{j=1}^r [(n-1)(r-1)\dots(r-(n-2))] \\
&= r.(n-1)(r-1)\dots(r-(n-2)) \\
&= (n-1) \cdot \frac{r!}{(r-(n-1))!} \\
&= (n-1)A_{r,n-1}
\end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{(n-1)A_{r,n-1}}{r^n}$$

Questão 5

(Com reposisao, e não importa a ordem)

- $x_i = j \Leftrightarrow$ bola i na caixa j

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, n\}, i = 1, \dots, n, \}$$

$$|\Omega| = n.n.n\dots n = n^n$$

a)

$A_i = \{\text{caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia}\}$

$B_j = \{\text{Caixa i vazia. Caixa j com 2 bolas e as n-2 caixas com 1 bola}\}$

- $A_i = \cup_{j=2}^n B_j$

$$|B_j| = \underbrace{\binom{n}{2} \cdot 1}_{\substack{\text{Escolher 2} \\ \text{bolas dentre n} \\ \text{para a caixa j}}} \cdot \underbrace{(n-2)!}_{\substack{\text{Colocar as outras n-2} \\ \text{bolas nas n-2 caixas}}}$$

- $P(B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

$$P(A_i) = \sum_{j=2}^n P(B_j) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$

Todas as possibilidades de uma caixa vazia:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$$

b)

1.

- $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo) e as outras } n-1 \text{ caixas com as } n \text{ bolas distribuidas aleatoriamente}\}$

$$|C| = \underbrace{(n-1) \dots (n-1)}_{n \text{ bolas para as } n-1 \text{ caixas}} = (n-1)^n$$

$$P(C) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

2.

- $A = \{\text{Apenas 1 caixa vazia}\}; i = 2, \dots, n$
- $A_i = \{\text{caixa } i \text{ sem a bola e as } (n-1) \text{ caixas com as } n \text{ bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia}\}$
- $|A| = \sum_{i=1}^n P(A_i) = \frac{n(n-1) \binom{n}{2} (n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2} (n)!}{n^n}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{n^n}}{\frac{(n-1)^n}{n^n}} = \frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{(n-1)^n}$$

c)

- $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo) e as outras } n-1 \text{ caixas com as } n \text{ bolas distribuidas aleatoriamente}\}$
- $A = \{\text{Apenas 1 caixa vazia}\}; i = 2, \dots, n$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{n^n}}{\frac{\binom{n}{2} (n)!}{n^n}} = \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Questão 6

(Com reposicao, e não importa a ordem)

- $x_i = j \Leftrightarrow \text{bola } i \text{ na caixa } j$

$$\Omega = \{[x_1, \dots, x_n] : x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n, \}$$

$$|\Omega| = \underbrace{r \cdot r \cdot r \dots r}_{n \text{ bolas com } r \text{ possib. de caixas}} = r^n$$

$A = \{\text{Caixa 1 tenha } j \text{ bolas e } r-1 \text{ caixas com } j-n \text{ bolas distribuidas aleatoriamente}\}$

$$|A| = \underbrace{\binom{n}{j}}_{\substack{j \text{ bolas de } n \\ \text{para a caixa 1 sem} \\ \text{importar a ordem}}} \cdot \underbrace{(r-1)^{(n-j)}}_{\substack{n-j \text{ bolas com a} \\ \text{posib. de } r-1 \text{ caixas}}}$$

- $P(A) = \frac{\binom{n}{j} \cdot (r-1)^{(n-j)}}{r^n}$

Questão 7

* **A complementar...**

(Sem reposicao, e não importa a ordem)

$$\begin{cases} x = b \text{ bolas pretas} \\ y = r \text{ bolas vermelhas} \end{cases}$$

- $S = \{x_1, \dots, x_b, y_1, \dots, y_r\}$

ω = Bola retirada da caixa

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n : \omega_i \in S, i = 1, \dots, n, \omega_i \neq \omega_j, p/i \neq j\}$$

$$|\Omega| = \binom{b+r}{n}$$

- $A_i = \{\text{Tirar bola preta } n-1 \text{ vezes}\}$

Não Importa a ordem

- $A = \{[y_1, \dots, y_{n-1}] : |y_i \in \{1, \dots, r\}, \forall \{1, \dots, n-1\}\}$

$$P(A) = \frac{\overbrace{\binom{r}{n-1}}^{\text{De } r \text{ bolas } n-1 \text{ são tiradas}}}{\underbrace{\binom{b+r}{n-1}}_{\text{De } b+r \text{ bolas } n-1 \text{ são tiradas}}}$$

- $B_n|A = \{A \text{ n-ésima bola é preta e as } n-1 \text{ bolas não são}\}$

$$P(B_n|A) = \frac{\overbrace{b}^{\text{Quantas bolas podem ser a n-ésima preta}}}{\underbrace{b+r-(n-1)}_{\text{De } b+r \text{ bolas } n-1 \text{ foram tiradas}}}$$

$$P(A \cap B_n) = P(A) \cdot P(B_n|A) = \frac{\binom{r}{n-1}}{\binom{b+r}{n-1}} \cdot \frac{b}{b+r-(n-1)}$$

Questão 8

a)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}^{1 \text{ naipes de 4 para exatamente esta sequência de 1 possibilidade de cartas}}}{\binom{52}{5}}$$

b)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1}}^{1 \text{ de 4 naipes}} \cdot \overbrace{10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}^{10 \text{ possib. p primeira carta e sequencialas apenas 1 para o resto}}}{\binom{52}{5}}$$

c)

A ordem importa

- $(x, x, x, x, y) \neq (y, y, y, y, x)$; 2 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{2}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 2 para serem os números} \\ \text{e 4 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}} \cdot \overbrace{2}^{\substack{\text{Número de ordens} \\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1}}^{\substack{\text{De 4 naipes tirar os 4} \\ \text{de 13 cartas tirar 1 número} \\ \text{1 de 48 para a 5ª carta}}}}{\binom{52}{5}}$$

d)

A ordem importa

- $(x, x, x, y, y) \neq (y, y, y, x, x)$; 2 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 2 para serem de mesmo número} \\ \text{e 3 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 2 de 4 de naipes diferentes}}} \cdot \overbrace{2}^{\substack{\text{Número de ordens} \\ \text{que importa}}}}{\binom{52}{5}}$$

e)

Não importa a ordem

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5}}^{\text{De 4 naipes 1 p 5 cartas de uma das 13 do naipe}}}{\binom{52}{5}}$$

f)

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{1} \cdot 10}^{10 \text{ números para a } 1^{\text{a}} \text{ Carta vezes os naipes possíveis}} \cdot \overbrace{\binom{4}{1} \cdot 1 \cdot \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot \binom{4}{1} \cdot 1 \cdot \binom{4}{1} \cdot 1}^{4 \text{ cartas possíveis para cada sequência com base no naipe}} - \overbrace{\binom{4}{1} \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}^{4 \text{ naipes com sequência do mesmo}}}{\binom{52}{5}}$$

g)

Ordem importa

- $(x, x, x, y, z) \neq (y, y, y, z, x) \neq (z, z, z, x, y)$; 3 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3}}^{\text{De 13 cartas, 3 para serem os números 3 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes}} \cdot \overbrace{3}^{\text{Número de ordens que importa}}}{\binom{52}{5}}$$

h)

Ordem importa

- $(x, x, y, y, z) \neq (y, y, z, z, x) \neq (z, z, x, x, y)$; 3 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3}}^{\text{De 13 cartas, 3 para serem os número 2 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes}} \cdot \overbrace{3}^{\text{Número de ordens que importa}}}{\binom{52}{5}}$$

i)

Ordem importa

- $(w, w, x, y, z) \neq (x, x, y, z, w) \neq (y, y, z, w, x) \neq (z, z, w, x, y)$; 4 formas diferentes

$$\frac{\overbrace{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4}}^{\substack{\text{De 13 cartas, 4 para serem} \\ \text{os número} \\ \text{2 de 4 naipes diferentes} \\ \text{e 1 de 4 de naipes diferentes}}} \cdot \overbrace{4}^{\text{Número de ordens que importa}}}{\binom{52}{5}}$$

Questão 9

(Sem reposicao, E não importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, i = 1, \dots, 10, x_i \neq x_j\}$$

$$|\Omega| = \binom{10}{3}$$

$$\frac{\overbrace{\binom{8}{1} \cdot 1 \cdot 1}^{\substack{\text{Escolher e 6 o 3 (fixo)} \\ \text{Escolher o 3º número} \\ \text{entre 10 - 2 restantes}}}}{\binom{10}{3}}$$

Questão 10

$$\frac{\overbrace{\binom{r-k}{n-k} \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \dots 1}^k}^{\substack{\text{Pegar k objetos (fixo)} \\ \text{e entre os r-k restantes} \\ \text{pegar n-k que falta pra completar a amostragem n}}}}{\binom{r}{n}}$$

Questão 11

Classes dos baralhos $\begin{cases} \text{vermelhas} = 26 \text{ cartas} \\ \text{pretas} = 26 \text{ cartas} \end{cases}$

Escolher 2 de cada classe sem importar a ordem:

$$\frac{\binom{26}{2} \cdot \binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}$$

Questão 12

- $A = \{\text{Pelo menos 1}\}$
- $P(A) = 1 - P(A^c)$

Das 5 premiadas 0 teve
o bilhete adquirido
e das n-5 não premiadas
3 constaram

$$1 - \frac{\overbrace{\binom{5}{0} \cdot \binom{n-5}{3}}}{\binom{n}{3}}$$