Lista 2

Allan

02/03/2021

Questão 1

(Com reposisao, E importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{\dots, -\}, i = 1, \dots, n\}$$

a)

$$|A| = \underbrace{2.2.2\dots 2}_n = 2^n$$

b)

$$|B| = 2$$
 ou 2^2 ou $2^3 \dots 2^n$

Quantas configurações podem ser de n ou menos simbolos:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} 2^{j} = 2 + 2^{2} + \dots + 2^{n}$$

$$s_{n} = 2 + 2^{2} + \dots + 2^{n}$$

$$2s_{n} = 2^{2} + 2^{3} + \dots + 2^{n+1}$$

$$2s_{n} - s_{n} = -2 + 2^{n+1}$$

$$s_{n} = 2(2^{n} - 1)$$

Questão 2

(Sem reposisao, e importa a ordem)

$$\Omega = \{(x_1, ..., x_r) : x_i \in \{1, ..., n\}, i = 1, ..., r, x_i \neq x_i, \forall i \neq j\}$$

 $A_i = \{\text{Obter sucesso na i-ésima tentativa}\}$

$$\bullet \quad \frac{F}{1^o}.\frac{F}{2^o}.\frac{F}{3^o}...\frac{F}{r-1}.\frac{S}{r}$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c \cap A_r) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{P(A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n-1}}_{P(A_2^c | A_1^c)} \cdot \underbrace{\frac{n-3}{n-2}}_{P(A_3^c | A_1^c \cap A_2^c)} \dots \underbrace{\frac{n-(r-1)}{n-(r-2)}}_{P(A_r | A_1^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c)} = \frac{1}{n}$$

(Sem reposisao, E importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, i = 1, \dots, 6\}$$

$$|\Omega| = 10.10.10...10 = 10^6$$

$$A = \{(x_1, \dots, x_6) : x_i \in \{1, \dots, 10\}, \ i = (1, \dots, 6), \ x_i \neq x_j, \ \forall \ i \neq j\}$$

$$|A| = \frac{10!}{(\underbrace{10-6}_{10 \text{ paradas}})!} = \frac{10!}{4!} = 10.9.8.7.6.5 = A_{10,6}$$

com base em
6 pessoas sem
repetir

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_{10,6}}{10^6}$$

Questão 4

(Sem reposisao, importa a ordem)

 $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n\}$$

$$|\Omega| = r.r...r = r^n$$

• $A_j = \{ A \text{ caixa j com 2, sendo a n-ésima bola a segunda desta} \}, j = 1, ..., r$

A caixa j com a bola n (fixo) e uma bola dentre as n-1 restantes nas r caixas:

•
$$\overline{1} \cdots \overline{j-1} \cdot \frac{2}{j} \cdot \overline{j+1} \cdots \overline{r}$$

$$|A_j| = \underbrace{\frac{(n-1)}{\text{n-1 bolas (Possibilidades)}}}_{\text{para colocar na caixa j}} \cdot \underbrace{\frac{(r-1).(r-2)...(r-(n-2))}{\text{n-2 bolas para as r-1 caixas}}}_{\text{n-2 bolas para as r-1 caixas}}$$

- $A = A_1 \cap ... \cap A_r$; Dijuntos
- $|A| = \sum_{j=1}^{r} |A_j|$; Dijuntos

$$|A| = \sum_{j=1}^{r} [(n-1)(r-1)...(r-(n-2))]$$

$$= r.(n-1)(r-1)...(r-(n-2))$$

$$= (n-1).\frac{r!}{(r-(n-1)!)}$$

$$= (n-1)A_{r,n-1}$$

$$P(A) = \frac{(n-1)A_{r,n-1}}{r^n}$$

(Com reposisao, e não importa a ordem)

• $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{1, \dots, n\}, \ i = 1, \dots, n, \}$$

$$|\Omega| = n.n.n..n = n^n$$

a)

 $A_i = \{$ caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia $\}$

 $B_j = \{$ Caixa i vazia. Caixa j com 2 bolas e as n-2 caixas com 1 bola $\}$

• $A_i = \bigcup_{j=2}^n B_j$

$$|B_j| = \underbrace{\binom{n}{2}.1}_{\substack{\text{Escolher 2} \\ \text{bolas dentre n} \\ \text{para a caixa j}}} \underbrace{\binom{n-2}!}_{\substack{\text{Colocar as outras n-2} \\ \text{bolas nas n-2 caixas}}}$$

• $P(B_j) = \frac{\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

$$P(A_i) = \sum_{j=2}^{n} P(B_j) = \frac{(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$

Todas as possibilidades de uma caixa vazia:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$$

b)

1.

• $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo) e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente}\}$

$$|C| = \underbrace{(n-1)...(n-1)}_{\text{n bolas para as n-1 caixas}} = (n-1)^n$$

$$P(C) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

2.

- $A = \{Apenas 1 \text{ caixa vazia}\}; i = 2, ...n$
- $A_i = \{ \text{caixa i sem a bola e as (n-1) caixas com as n bolas de tal forma que nenhuma caixa fique vazia} \}$
- $|A| = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}}{\frac{(n-1)^n}{n^n}} = \frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{(n-1)^n}$$

c)

- $C = \{\text{Caixa 1 vazia (fixo) e as outras n-1 caixas com as n bolas distribuidas aleatoriamente}\}$
- $A = \{Apenas 1 \text{ caixa vazia}\}; i = 2, ...n$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\binom{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}}{\binom{\binom{n}{2}(n)!}{n^n}} = \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n}$$

Questão 6

(Com reposisao, e não importa a ordem)

• $x_i = j \Leftrightarrow \text{ bola i na caixa j}$

$$\Omega = \{ [x_1, \dots, x_n] : x_i \in \{1, \dots, r\}, i = 1, \dots, n, \}$$

$$|\Omega| = \underbrace{r.r.r...r}_{\text{n bolas com r possib. de caixas}} = r^{r}$$

 $A = \{\text{Caixa 1 tenha j bolas e r-1 caixas com j-n bolas distribuidas aleatoriamente}\}$

$$|A| = \underbrace{\binom{n}{j}.1}_{\substack{\text{j bolas de n} \\ \text{para a caixa 1 sem} \\ \text{importar a ordem}}}^{\text{n-j bolas com a}} \underbrace{(r-1)^{(n-j)}}_{\substack{\text{total caixas} \\ \text{total constraints}}}$$

•
$$P(A) = \frac{\binom{n}{j}.(r-1)^{(n-j)}}{r^n}$$

* A complementar...

(Sem reposisao, e não importa a ordem)

$$\begin{cases} x = b \text{ bolas pretas} \\ y = r \text{ bolas vermelhas} \end{cases}$$

•
$$S = \{x_1, ..., x_b, y_1, ..., y_r\}$$

 $\omega = \text{Bola retirada da caixa}$

$$\Omega = \{ [\omega_1, \dots, \omega_n] : \omega_i \in S, \ i = 1, \dots, n, \ \omega_i \neq \omega_i, \ p/i \neq j \}$$

$$|\Omega| = \binom{b+r}{n}$$

• $A_i = \{\text{Tirar bola preta n-1 vezes}\}$

Não Importa a ordem

•
$$A = \{[y_1, ..., y_{n-1}] : |y_i \in \{1, ..., r\}, \forall \{1, ..., n-1\}\}$$

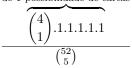
$$P(A) = \underbrace{\frac{\binom{r}{n-1}}{\binom{b+r}{n-1}}}_{\text{De b+r bolas}}$$

$$P(B_n|A) = \frac{b}{b}$$
De h+r bolas n-1 foram tiradas

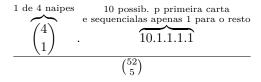
$$P(A \cap B_n) = P(A).P(B_n|A) = \frac{\binom{r}{n-1}}{\binom{b+r}{n-1}} \cdot \frac{b}{b+r-(n-1)}$$

a)

1 naipe de 4 para exatamente esta sequencia de 1 possibilidade de cartas



b)



c)

A ordem importa

• $(x, x, x, x, y) \neq (y, y, y, y, x)$; 2 formas diferentes

De 13 cartas, 2 para serem os números e 4 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\2\end{pmatrix}}_{\left(52\\5\right)}$ Número de ordens que importa

De 4 naipes tirar os 4 de 13 cartas tirar 1 número 1 de 48 para a 5° carta

$$\underbrace{\frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}}_{\left(\substack{5\\2}\right)}$$

d)

A ordem importa

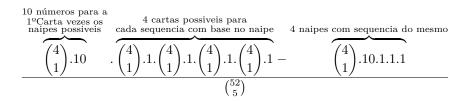
• $(x, x, x, y, y) \neq (y, y, y, x, x)$; 2 formas diferentes

De 13 cartas, 2 para serem de mesmo número e 3 de 4 naipes diferentes e 2 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}.$

e)

Não importa a ordem

f)



 $\mathbf{g})$

Ordem importa

• $(x, x, x, y, z) \neq (y, y, y, z, x) \neq (z, z, z, x, y)$; 3 formas diferentes

De 13 cartas, 3 para serem os números 3 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}.\underbrace{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}}$

h)

Ordem importa

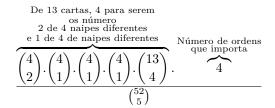
• $(x, x, y, y, z) \neq (y, y, z, z, x) \neq (z, z, x, x, y)$; 3 formas diferentes

De 13 cartas, 3 para serem os número 2 de 4 naipes diferentes e 1 de 4 de naipes diferentes $\underbrace{\left(\frac{4}{2}\right).\left(\frac{4}{2}\right).\left(\frac{4}{1}\right).\left(\frac{13}{3}\right)}_{\left(\frac{52}{5}\right)}.\underbrace{\begin{array}{c}\text{Número de ordens}\\\text{que importa}\end{array}}_{3}$

i)

Ordem importa

• $(w, w, x, y, z) \neq (x, x, y, z, w) \neq (y, y, z, w, x) \neq (z, z, w, x, y)$; 4 formas diferentes



Questão 9

(Sem reposisao, E não importa a ordem) $x_i = j \Leftrightarrow$ Pessoa i pular na parada j

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, ..., 10\}, i = 1, ..., 10, x_i \neq x_j\}$$

$$|\Omega| = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 Escolher e 6 o 3 (fixo) Escolher o 3° número entre 10 - 2 restantes

$$\frac{\underbrace{\binom{8}{1}.1.1}^{(10)}}{\binom{10}{3}}$$

Questão 10

Pegar k objetos (fixo) Pegar k objetos (fixo)
e entre os r-k restantes
pegar n-k que falta pra completar a amostragem n $\underbrace{\binom{r-k}{n-k}1.1....1}_{\binom{r}{n}}$

$$\underbrace{\binom{r-k}{n-k} \underbrace{1.1...1}^{k}}_{\binom{r}{n}}$$

Questão 11

Classes dos baralhos
$$\begin{cases} vermelhas = 26 \text{ cartas} \\ pretas = 26 \text{ cartas} \end{cases}$$

Escolher 2 de cada classe sem importar a ordem:

$$\frac{\binom{26}{2} \cdot \binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}$$

- $A = \{ \text{Pelo menos } 1 \}$
- $P(A) = 1 P(A^c)$

Das 5 premiadas 0 teve o bilhete adquirido e das n-5 não premiadas $\frac{3 \text{ constaram}}{\binom{5}{0} \cdot \binom{n-5}{3}}$

$$1 - \frac{\overbrace{\binom{5}{0}.\binom{n-5}{3}}^{\binom{n}{3}}}{\binom{n}{3}}$$