Suy luận logic - kiểm chứng

TS. Nguyễn Thị Phương Trâm
Email: ntptram@hcmuaf.edu.vn

Giới thiệu

- Hai vấn đề trong toán học:
  1. Khi nào một suy luận toán học là ĐÚNG?
  2. **PHƯƠNG PHÁP** nào để xây dựng các suy luận toán học?

Giới thiệu - Trong tin học

- Điều cần nhất cho người học CNTT là **tư duy chính xác phải được hình thành ngay từ đầu.**
- **Mục tiêu** của chương là cung cấp
  - Những suy luận đúng đắn
  - Những công cụ xây dựng nên các suy luận đó
- Làm thế nào để kiếm chứng 1 chương trình máy tính?
  - Thử với dữ liệu có sẵn?
  - Tính đúng đắn chỉ có thể bảo đảm được bằng chứng minh nó luôn tạo ra kết quả đúng.

Giới thiệu - Trong tin học

- Điều cần nhất cho người học CNTT là **tư duy chính xác phải được hình thành ngay từ đầu.**
- **Mục tiêu** của chương là cung cấp
  - Những suy luận đúng đắn
  - Những công cụ xây dựng nên các suy luận đó
- Làm thế nào để kiếm chứng 1 chương trình máy tính?
  - Thử với dữ liệu có sẵn?
  - Tính đúng đắn chỉ có thể bảo đảm được bằng chứng minh nó luôn tạo ra kết quả đúng.

Các khái niệm

- **Giả thiết (Hypothesis)**
  - – Những mệnh đề/phát biểu đúng được sử dụng để tranh luận hoặc nghiên cứu

Quy tắc suy diễn

- Để chứng minh một định lý, ta xuất phát từ **một số khẳng định** đúng $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gọi là **các giả thiết (tiền đề),** ta áp dụng các phép suy diễn để suy ra một khẳng định **đúng q,** gọi là kết luận.
- Nói cách khác, ta thực hiện các suy diễn có dạng:
  Nếu p_1 và p_2 và . . . và p_n thì q.
- Ta viết phép suy diễn trên theo các cách sau đây :
  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$
- Hoặc dùng mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ \ldots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Kiểm tra một phép suy diễn

- Để kiểm tra một phép suy diễn **$(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \Rightarrow q$** có hợp logic hay không?

→ Ta chứng minh biểu thức logic

  - $(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \rightarrow q$ là hằng đúng
  - hay $(p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n) \rightarrow q \Leftrightarrow 1$

- Một suy diễn **hợp logic** ta gọi là một **qui tắc suy diễn (hay luật suy diễn)**.

Ví dụ qui tắc suy diễn

$p \to q$
p

$\therefore q$

- Xác định xem mô hình sau đây có phải là một qui tắc suy diễn hay không?
- Mệnh đề tương ứng của phép suy diễn là $((p \to q) \wedge p) \to q$.
- Lập bảng chân trị ta có:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- Biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to$ là hằng đúng. Do đó, mô hình suy luận trên là một qui tắc suy diễn.

Ví dụ qui tắc suy diễn

Hoặc áp dụng các luật logic biến đổi tương đương

$((p \to q) \wedge p) \to q = ((\neg p \vee q) \wedge p) \to q$ (luật kéo theo)

$= ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)) \to q$ (luật phân bố)

$= (0 \vee (q \wedge p)) \to q$ (luật về phần tử bù)

$= (q \wedge p) \to q$ (luật đơn giản)

$= \neg(q \wedge p) \vee q$ (luật kéo theo)

$= (\neg q \vee \neg p) \vee q$ (luật De Morgan)

$= (\neg q \vee q) \vee \neg p$ (luật giao hoán và kết hợp)

$= 1 \vee \neg p$ (luật về phần tử bù) $= 1$ (luật đơn giản)

Vậy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng, nên ta có qui tắc suy diễn $((p \to q) \wedge p) \Rightarrow q$

Kiểm tra suy luận sau

- Nếu Minh lười học thì Minh sẽ trượt môn Toán rời rạc.
  Mà Minh trượt môn toán rời rạc.
  Suy ra Minh lười học.
- Đặt p = " Minh lười học", q = "Minh trượt môn Toán rời rạc"
- Mô hình suy trên có dạng:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

- Mệnh đề tương ứng phép suy diễn $(p \to q) \wedge q \to p$

Kiểm tra suy luận

- Kiểm tra mệnh đề $((p \to q) \land q) \to p$ có hằng đúng không?
- Lập bảng chân trị ta có:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \land q$	$((p \to q) \land q) \to p$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- Biểu thức $((p \to q) \land q) \to p$ không là hằng đúng.
  Do đó, mô hình suy luận trên không hợp logic (nguỵ biện).

Các qui tắc suy diễn cơ bản

Qui tắc suy diễn	Mệnh đề hằng đúng tương ứng	Tên gọi
$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \to (p \vee q)$	Luật cộng
$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \to p$	Luật rút gọn
$\dfrac{\begin{matrix} p \to q \\ p \end{matrix}}{\therefore q}$	$((p \to q) \wedge p) \to q$	Luật khẳng định (Modus Ponens)

Các qui tắc suy diễn cơ bản

Qui tắc suy diễn	Mệnh đề hằng đúng tương ứng	Tên gọi
$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$	Luật phủ định (Modus tollens)
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Tam đoạn luận (Syllogism)
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$	Tam đoạn luận tuyển

Quy tắc suy diễn cơ bản - Luật cộng

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $p \rightarrow (p \vee q)$

- Ví dụ:
  - p = “Bây giờ trời đang mưa”; q = ”Trời tối”
  - Giả sử p = “Bây giờ trời đang mưa” là đúng
    Thì theo luật cộng ta có $p \vee q$ = “Bây giờ trời đang mưa hoặc trời tối” đúng

Quy tắc suy diễn cơ bản - Luật rút gọn

$$\frac{p \land q}{\therefore p}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $(p \land q) \to p$

- Ví dụ:

  p = "Bây giờ trời đang mưa"; q = "Trời tối"

  Giả sử $p \land q$ = "Bây giờ trời đang mưa và trời tối" là đúng
  Thì theo luật rút gọn ta có p = "Bây giờ trời đang mưa" là đúng

Luật khẳng định (Modus Ponens)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad p \quad} \\ \therefore q \end{array}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
- **Ví dụ:**
  – Nếu trăng tán thì trời mưa. $(p \rightarrow q)$
  Mà trăng tán (p)
  Suy ra trời mưa (q)
  – Nếu Minh lười học thì Minh sẽ trượt môn Toán rời rạc. $(p \rightarrow q)$
  Mà Minh lười học. (p)
  Suy ra Minh trượt môn toán rời rạc. (q)

Luật phủ định (Modus tollens)

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$

- **Ví dụ:**

  Nếu Minh lười học thì Minh sẽ trượt môn Toán rời rạc. ($p \rightarrow q$)
  Mà Minh không trượt môn toán rời rạc ($\neg q$)
  Suy ra Minh không lười học. ($\neg p$)

Quy tắc Tam đoạn luận

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

- **Ví dụ 1:**

  Nếu chúng ta đoàn kết thì chúng ta mạnh. $(p \rightarrow q)$
  Nếu chúng ta mạnh thì chúng ta sẽ đánh thắng mọi kẻ thù. $(q \rightarrow r)$
  Vậy thì, nếu chúng ta đoàn kết thì chúng ta sẽ đánh thắng mọi kẻ thù. $(p\rightarrow r)$

Quy tắc Tam đoạn luận

- Ví dụ 2:
  - Một cái xe rẻ thì khó kiếm
    Cái gì khó kiếm thì đắt
    Suy ra Một cái xe rẻ thì đắt
  - Suy luận này hoàn toàn hợp logic. Tuy nhiên kết luận mâu thuẫn do dựa trên một giả thiết sai.

Tam đoạn luận tuyển

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$$

- Quy tắc này sử dụng hằng đúng $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
- **Ví dụ:**

p: “Lan có mặt tại hiện trường vụ án”; q: “Tú có mặt tại hiện trường vụ án”.
Nếu (p v q) = “Lan có mặt tại hiện trường vụ án hoặc Tú có mặt tại hiện trường vụ án”. đúng
và $\neg$p = “Lan không có mặt tại hiện trường vụ án” là đúng
thì suy ra “Tú có mặt tại hiện trường vụ án”.

Luyện tập

Quy tắc suy diễn nào được sử dụng trong các lập luận sau:

1. Ai học giỏi môn Toán cũng sẽ học giỏi môn Toán hoặc môn Tin.
2. Nếu bạn giỏi cả hai môn Toán và Văn thì bạn học giỏi **môn Toán.**
3. Nếu trời mưa thì trận bóng đá sẽ bị hoãn lại. **Hôm nay trời mưa thật**, thế thì trận bóng đá chắc chắn sẽ bị hoãn lại rồi.
4. **Nếu** hôm nay trời mưa thì trận đá bóng sẽ bị hoãn lại. Trận bóng đá đã diễn ra, do vậy hôm nay trời không mưa.
5. Nếu bạn bơi lâu dưới nắng thì da bạn sẽ bị rám nắng. Nếu da bạn bị rám nắng thì trông bạn thật là đen. Vậy nếu bạn bơi lâu dưới nắng thì trông bạn thật đen.
6. Nếu bạn làm bài tập thật chăm chỉ thì bạn có thể nắm vững giáo trình này. Nếu bạn nắm vững giáo trình thì bạn sẽ thi đỗ kỳ thi tốt nghiệp. Vậy nếu bạn làm bài tập thật chăm chỉ thì bạn sẽ thi đỗ kỳ thi tốt nghiệp.

Ví dụ về quy tắc suy diễn cơ bản

- Xét xem suy luận sau đây có đúng hay không?

  Nếu ca sĩ Ngọc Sơn không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn.
  Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì phải trả tiền vé lại cho người xem.
  Nhưng tiền vé đã không trả cho người xem.
  Vậy ca sĩ Ngọc Sơn đã trình diễn.

- Đặt
  - p = “Ca sĩ Ngọc Sơn đã trình diễn”
  - q = “Số vé bán ra ít hơn 50 vé”
  - r = “Đêm diễn sẽ bị hủy bỏ”
  - s = “Ông bầu rất buồn”
  - t = “Trả tiền vé cho người xem”

Khi đó ta có mô hình suy diễn:

$(\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

$r \rightarrow t$

$\neg t$

$\therefore p$

Thực hiện các bước suy diễn

$(\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
$r \rightarrow t$
$\neg t$

$\therefore p$

Vì	$(\neg p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	(Tiền đề)
	$r \wedge s \rightarrow r$	(Luật rút gọn)
	$r \rightarrow t$	(Tiền đề)
	$\therefore\ (\neg p \vee q) \rightarrow t$	(Tam đoạn luận)
mà	$\neg t$	(Tiền đề)
	$\therefore\ \neg(\neg p \vee q)$	(Luật phủ định Modus Pollens)
hay	$p \wedge \neg q$	(Luật logic De Morgan)
	$\therefore\ p$	(Luật rút gọn)

Các qui tắc suy diễn trên vị từ và lượng từ

- **Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng**
  - *Nếu một mệnh đề **đúng** có dạng lượng từ hóa, trong đó có một biến x$\in$ A, bị buộc bởi lượng từ phổ dụng ". Khi đó nếu thay thế x bởi a $\in$ A thì ta sẽ được một mệnh đề đúng.*

$$\forall x,\ p(x)$$

$$\text{------------}$$

$$\therefore p(a)$$

- **Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng**
  - *Nếu ta thay thế biến x trong vị từ P(x) bởi một phần tử **a** cố định nhưng tùy ý thuộc miền xác định của biến x mà mệnh đề nhận được có chân trị là đúng, tức là P(a) = 1, thì **mệnh đề lượng từ hóa** **"x : P(x) là một mệnh đề đúng.***

Ví dụ

- Xét suy luận:

  Mọi người đều chết
  Socrate là người
  nên Socrate phải chết
- Phát biểu "Mọi người đều chết" được biểu diễn bằng mệnh đề:

  $\forall x$, (x là người) $\rightarrow$ "x sẽ chết"
- Áp dụng qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng với x = Socrate ta được mệnh đề đúng sau: (Socrate là người) $\rightarrow$ (Socrate phải chết)
- Theo giả thiết ta có (Socrate là người)
  Nên (Socrate phải chết) (Luật khẳng định)

Các qui tắc suy diễn trên vị từ và lượng từ

- **Mệnh đề 1**: Cho p(x) và q(x) là các vị từ theo biến $x \in A$, và a là một phần tử cố định tùy ý thuộc A. Khi ấy ta có qui tắc suy diễn sau đây:

$$\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$$
$$p(a)$$

$$\therefore q(a)$$

- **Mệnh đề 2:** Cho p(x), q(x) và r(x) là các vị từ theo biến $x \in A$. Ta có qui tắc suy diễn sau:

$$\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$$
$$\forall x, q(x) \rightarrow r(x)$$

$$\therefore \forall x, p(x) \rightarrow r(x)$$

Các phương pháp chứng minh

- Mỗi bài toán cần chứng minh (CM):
  - Giả thiết
  - Kết luận

  →Việc chỉ ra cái nào là giả thiết, cái nào là kết luận sẽ giúp cho việc CM dễ dàng hơn thông qua việc sử dung các Phương pháp chứng minh thích hợp

  → Các Phương pháp chứng minh trong dạng bài toán này là có liên quan đến mệnh đề kéo theo

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Các phương pháp chứng minh

- Trong môn học này, các định lý là các mệnh đề kéo theo p → q, kết luận q đúng bất chấp giả thiết p là đúng hay sai thì mệnh đề p → q luôn luôn đúng → để CM p → q, ta cần CMR q là đúng
- Việc chứng minh các định lý luôn luôn có **các tiền đề** được giả định là đúng để suy ra kết luận là đúng. Các lập luận chỉ ra được tính đúng đắn của kết luận từ các giả thiết đúng của định lý dựa trên các luật logic và các luật suy diễn.
- Chúng ta có nhiều phương pháp chứng minh như: **chứng minh trực tiếp, chứng minh bằng cách phân chia trường hợp, phản chứng, phản ví dụ, và chứng minh qui nạp.**

Chứng minh trực tiếp

- Phương pháp chứng minh suy diễn trực tiếp từ giả thiết đến kết luận thông qua việc áp dụng các luật suy diễn, các định lý, các nguyên lý và các kết quả đã biết.
- **Ví dụ:** Giả sử p, r, s, t, u là các mệnh đề và ta có các mệnh đề sau đây là đúng (giả thiết):

$$
\begin{array}{ll}
p \rightarrow r & (1) \\
r \rightarrow s & (2) \\
t \vee \neg s & (3) \\
\neg t \vee u & (4) \\
\neg u & (5) \\
\hline
\therefore \neg p &
\end{array}
$$

  – Hãy chứng minh mệnh đề p là sai, tức là chứng minh mệnh đề $\neg$p là đúng

Chứng minh

Từ (1) và (2) ta suy ra:
$p \to s$ (6) (luật suy diễn tam đoạn luận)
(3) có thể viết dưới dạng
$s \to t$ (7) (luật logic về phép toán kéo theo)
Từ (6) và (7) ta suy ra:
$p \to t$ (8) (tam đoạn luận)
(4) có thể viết lại dưới dạng:
$t \to u$ (9) (luật logic về phép toán kéo theo)
Từ (8) và (9) ta suy ra:
$p \to u$ (10) (tam đoạn luận)
Từ (10) và (5) ta suy ra:
$\neg p$ (11) (luật phủ định Modus Tollens),
Vậy mệnh đề $\neg p$ là đúng.

$p \to r$ (1)
$r \to s$ (2)
$t \vee \neg s$ (3)
$\neg t \vee u$ (4)
$\neg u$ (5)

$\therefore \neg p$

Luyện tập

- Bằng phương pháp trực tiếp

$$((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge s \wedge t \wedge p \wedge (p \rightarrow (u \rightarrow q)) \wedge (s \rightarrow (r \vee \neg t)) \Rightarrow \neg u$$

Chứng minh bằng phản chứng

- Phép chứng minh bằng phản chứng một khẳng định hay một mệnh đề nào đó, ta thường giả sử rằng mệnh đề cần chứng minh là sai rồi từ đó **suy ra một điều mâu thuẫn với giả thiết hay các tiền đề của bài toán**, từ đó đi **đến kết luận rằng mệnh đề là đúng**.
- Cơ sở cho phương pháp chứng minh phản chứng là tương đương logic sau:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q = (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \rightarrow 0$$

Ví dụ

- Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng cho chứng minh sau:
- Ta giả sử kết luận $(\neg r \to s)$ là sai,
  tức là $\neg(\neg r \to s)$ là đúng.
  Ta có: $\neg(\neg r \to s) = \neg(r \vee s)$ Luật kéo theo
  $= (\neg r \wedge \neg s)$ Luật De Morgan
- Như vậy ta thêm vào giả thiết $\neg r \wedge \neg s$
  và chứng minh:

$p \to r$
$\neg p \to q$
$q \to s$

$\therefore \neg r \to s$

$p \to r$
$\neg p \to q$
$q \to s$
$\neg r$
$\neg s$

$\therefore 0$

Chứng minh

Ta có:

$p \rightarrow r$ (1)

$\neg r$ (4)

$\therefore \neg p$ (6) (Luật phủ định)

Mặt khác

$\neg p \rightarrow q$ (2)

$q \rightarrow s$ (3)

$\therefore \neg p \rightarrow s$ (7) (Tam đoạn luận)

$\neg p$ (6)

$\therefore s$ (8) (Luật khẳng định)

(8) & (5): $(s \wedge \neg s) \Leftrightarrow 0$ (luật phần tử bù)

$p \rightarrow r$ (1)

$\neg p \rightarrow q$ (2)

$q \rightarrow s$ (3)

$\neg r$ (4)

$\neg s$ (5)

$\therefore 0$

BÀI TẬP: Chứng minh bằng phản chứng

Chứng minh:Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng cho chứng minh sau:

$$
\begin{array}{l}
p \wedge q \\
p \rightarrow (r \wedge q) \\
r \rightarrow (s \vee t) \\
\neg s \\
\hline
\therefore t
\end{array}
$$

Chứng minh bằng cách phân chia trường hợp

- Cơ sở cho phương pháp chứng minh là qui tắc sau:

$$
\begin{array}{c}
p_1 \to q \\
p_2 \to q \\
\dots \\
p_n \to q \\
\hline
(p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n) \to q
\end{array}
$$

- Trong phương pháp này, để chứng minh một sự **khẳng định nào đó** ta xem xét tất cả các trường hợp của giả thiết và chứng minh rằng trong mỗi trường hợp ta đều có mệnh đề cần chứng minh là đúng, và từ đó đi đến kết luận mệnh đề cần chứng minh là đúng.

Ví dụ

- Cho một số nguyên n, hãy chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.
- Ta có $n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$, và số tự nhiên n có một trong 3 dạng ứng với 3 trường hợp dưới đây:
- Trường hợp 1: $n = 3k$, với k là một số nguyên.
  $n^3 + 2n = 3k(9k^2 + 2)$ chia hết cho 3.
- Trường hợp 2: $n = 3k+1$, với k là một số nguyên.
  $n^3 + 2n = (3k+1)((3k+1)^2 + 2) = (3k+1)(9k^2 +6k+3)$
  $= (3k+1)3(3k^2 +2k+1)$ chia hết cho 3.
- Trường hợp 3: $n = 3k+2$, với k là một số nguyên.
  $n^3 + 2n = (3k+2)((3k+2)^2 + 2) = (3k+2)(9k^2 +12k+6)$
  $= (3k+2)3(3k^2 +4k+2)$ chia hết cho 3.
- Trong mọi trường hợp (có thể có) ta đều có $n^3 + 2n$ đều chia hết cho 3.

Phản ví dụ

- Dùng để kiểm chứng một phép suy diễn là sai
- Để chứng minh phép suy diễn $p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n \Rightarrow q$ là sai ta phải chứng minh mệnh đề $p_1 \wedge p_2 \wedge . . . \wedge p_n \rightarrow q$ không phải là hằng đúng.
- Ta chỉ cần tìm và chỉ ra một trường hợp cụ thể của các biến mệnh đề mà ứng với chúng ta có các tiền đề **$p_1, p_2, \ldots, p_n$ đều đúng nhưng kết luận q là sai.**

Ví dụ

- Hãy kiểm tra suy luận sau đây

$$\begin{array}{c} p \to r \\ p \\ \neg r \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- **Để tìm một phản ví dụ** ta chỉ cần chỉ ra một trường hợp về chân trị của các biến mệnh đề sao cho các tiền đề trong phép suy luận là đúng còn kết luận là sai.
- Hay nói cách khác ta sẽ tìm p, q, và r thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$$\begin{cases} p \to r = 1 \\ p = 1 \\ \neg r \to q = 1 \\ \mathbf{q = 0} \end{cases}$$

- Dễ dàng tìm thấy một trường hợp phản ví dụ là: $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$.
- Vậy suy luận đã cho là không đúng.

BÀI TẬP: Phản ví dụ

- Tìm phản ví dụ cho suy luận sau

$$
\text{c)}\quad \begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore s \end{array}
$$

Chứng minh bằng quy nạp

- Giả sử ta cần tính tổng N số nguyên lẻ đầu tiên. Với N =1..5, chúng ta có:
- $N = 1: 1 = 1 = 1^2$
- $N = 2: 1 + 3 = 4 = 2^2$
- $N = 3: 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $N = 4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
- $N = 5: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

→ tổng N số lẻ đầu tiên là N^2

→ **CM ?**

Chứng minh bằng quy nạp

- **Phương pháp chứng minh:**
  - n, n_0 là số tự nhiên.

1. Kiểm chứng *P(n) đúng với* $n=n_0$

Chứng minh bằng quy nạp

- **Phương pháp chứng minh**
  - n, n_0 là số tự nhiên.

1. Kiểm chứng ***P(n) đúng với*** $n=n_0$
2. Giả sử $P(n)$ đúng với n: $n_0 \le n \le k$ n = k
3. Chứng minh ***P(n) đúng với*** $n=k+1$
4. Kết luận $\forall n \ge n_0\, P(n)$ là đúng

$[P(n_o) \land (P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n, P(n)$ = k

Chứng minh bằng quy nạp

- **Ví dụ 1:** $n \geq 1$ là số nguyên. CMR:

$$P(n):\ \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Chứng minh bằng quy nạp

1- Kiểm chứng với n=1

$VT = 1$ $\qquad VP = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$

Vậy P(n) đúng với n = 1

2- Giả sử P(n) đúng với n = k > 1

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

3- CM P(n) đúng với n = k + 1

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

=>P(k+1) đúng

Chứng minh bằng quy nạp

- **Ví dụ 2:** n ≥ 1 là số nguyên. Tìm công thức tính tổng n số lẻ đầu tiên và chứng minh công thức đó.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+....+(2n-1) = n^2$$

Chứng minh bằng quy nạp

1- Kiểm chứng với n=1

VT = 1

VP = $n^2 = 1^2 = 1$

Vậy P(n) đúng với n = 1

2- **Giả sử P(n) đúng với n = k > 1**

$$1+3+5+.....+(2k-1)=k^2$$

3- **CM đúng với n = k + 1**

$$1+3+5+.....+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

$$1+3+5+.....+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

=> P(k+1) đúng

BÀI TẬP: Kiểm tra suy luận

- Kiểm tra các suy luận sau

a)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to \neg q \\ r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ \neg q \to \neg p \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} p \to (q \wedge r) \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \\ p \\ \hline \therefore t \end{array}$$

Bài tập Kiểm tra một phép suy diễn

- Có 2 giả thiết
  - Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic.
  - Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó
- Bằng cách chuyển các giả thiết trên thành các mệnh đề chứa các biến và các toán tử logic. Hãy xác định xem mỗi một trong các khẳng định sau là các kết luận có cơ sở của các giả thiết đã cho không :

Bài tập Kiểm tra một phép suy diễn

a) Nếu Môn toán là không dễ thì nhiều sinh viên thích môn logic.
b) Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.
c) Môn toán là dễ hoặc môn logic là khó.
d) Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.
e) Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

BÀI TẬP 3

Hãy xác định xem các suy luận sau có hợp logic không?

a) Nếu Bình đi làm về muộn thì vợ anh ta rất giận dữ. Nếu An thường xuyên vắng nhà thì vợ anh ta rất giận dữ. Nếu vợ Bình hay vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ sẽ nhận được lời than phiền. Mà Hà không nhận được lời than phiền. Vậy Bình đi làm về sớm và An ít khi vắng nhà.

b) Nếu muốn dự họp sáng thứ ba thì Đức phải dậy sớm. Nếu Đức đi nghe nhạc tối thứ hai thì Đức sẽ về trễ. Nếu về trễ và thức dậy sớm thì Đức phải đi họp mà chỉ ngủ dưới 7 giờ. Nhưng Đức không thể đi họp nếu ngủ dưới 7 giờ. Do đó hoặc là Đức không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc là Đức phải bỏ họp sáng thứ ba.