Logic Vị Từ (PREDICATE LOGIC)

TS. Nguyễn Thị Phương Trâm
Email: ntptram@hcmuaf.edu.vn

Tại sao sử dụng logic vị từ

- Logic mệnh đề chỉ xử lý trên các sự kiện, là các khẳng định có giá trị **đúng hoặc sai**
- Logic vị từ cho phép chúng ta nói về các **đối tượng**, **tính chất** của chúng, **quan hệ** giữa chúng, **phát biểu về một hay tất cả** các đối tượng nào đó mà không cần liệt kê trong chương trình.
- Các câu không thể biểu diễn bằng logic mệnh đề nhưng có thể biểu diễn bằng logic vị từ
  - Socrates là người nên socrates phải chết

Hạn chế của Logic mệnh đề

- Các câu liên quan đến các biến như :
  - “X > 3”
  - “X = Y + 4” ; “X + Y = Z” là những câu rất thường gặp trong các khẳng định toán học và trong các chương trình máy tính.

  → Các câu **không đúng,** cũng **không sai** **khi chưa cho giá trị thể của biến**

→ **Logic mệnh đề :** Không thể biểu diễn các phát biểu có chứa biến (variables)

  - Các biến KHÔNG có giá trị cụ thể
  - Xuất hiện nhiều trong thực tế.

Hạn chế của Logic mệnh đề

- Một số phát biểu tương đương:

"Not all birds fly." AND "Some bird don't fly."

"Không phải tất cả bánh đều ăn được."

"Chỉ một số bánh ăn được."

"Không phải mọi số nguyên đều là số lẻ." AND "Một số số nguyên là số lẻ."

→ Cách duy nhất để suy luận là liệt kê tất cả các mệnh đề một cách phân biệt

Vị từ (Predicate) và ví dụ

- Ví dụ: câu “x > 3” (x lớn hơn 3) có 2 bộ phận
  - “**x**”: là biến, là chủ ngữ của câu
  - “lớn hơn 3”: là vị ngữ, nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có
  - **Ta có thể ký hiệu:**
    - P(x): “x lớn hơn 3”,
    - x là biến
- Xét P(x): x>3
  - Mệnh đề P(4) có chân trị là TRUE (4 > 3).
  - Mệnh đề P(2) có chân trị là FALSE (2 > 3)

  →P(x) là giá trị hàm mệnh đề P tại x

Vị từ (vị ngữ) và ví dụ

- Thực tế: câu thường có **nhiều biến hơn**.
- Ví dụ: xét câu "$x = y + 3$"

  → $Q(x,y)$: $x=y+3$

  Xét chân trị của các mệnh đề $Q(1,2)$ và $Q(3,0)$?
- Ví dụ: xét câu "$x + y = z$" = $R(x,y,z)$. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề $R(1,2,3)$ và $R(0,0,1)$

Vị từ và ví dụ

- Xét phát biểu sau: p = “x > 3”
  - Phát biểu trên không phải là mệnh đề. Vì giá trị đúng hay sai của p phụ thuộc vào x

→ Ta đặt: p(x) = “x > 3”
  - Mặc dù p(x) không phải là mệnh đề, nhưng nếu cho x một giá trị cụ thể (trong không gian xét) thì ta được một mệnh đề có chân trị xác định:
  - Ví dụ: p(2) = 0, p(7) = 1
  - Ta gọi p(x) là vị từ theo biến x

Định nghĩa Vị từ (Predicate)

- **Định nghĩa 1: V**ị từ là một hàm mệnh đề mô tả thuộc tính của các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng.
- **Định nghĩa 2:** Cho A là một tập hợp khác rỗng. Giả sử, ứng với mỗi **x = a ∈ A** ta có một mệnh đề p(a). Khi đó, ta nói p = p(x) là một vị từ theo một biến (xác định trên A)
- **Tổng quát:** một phát biểu có n biến $x_1, x_2, ..., x_n$, biểu diễn là $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, được gọi là hàm mệnh đề.
- Ký hiệu: $P = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một vị từ theo n biến
- Ví dụ: P(x, y, z): x + y = z.

Predicate IS NOT Proposition

- Statement "x > 1" is not a proposition
- ➔ How to make it to be a proposition?
  - ☞ Cách 1: gán 1 giá trị cho biến x (Ex: $0 > 1$).
  - ☞ Cách 2: biến đổi câu trên thành

Có một số tự nhiên x sao cho $x > 1$

hoặc

Với mọi số tự nhiên x thì $x > 1$

Ví dụ

- Cho q(x, y) là phát biểu có dạng “x + y = 2”, với x, y là các số nguyên
  - Khi đó chân trị của q(3, 6) = 0 và q(5, -3) = 1
  - Còn q(3, y) = “3 + y =2” là vị từ phụ thuộc vào biến y
  - Còn q(x, 6) = “x + 6 =2” là vị từ phụ thuộc vào biến x

Không gian của vị từ

- Định nghĩa: có thể xem vị từ như là một ánh xạ P, ∀x ∈E ta được một ảnh P(x) ∈{0, 1}. Tập hợp E này được gọi là không gian của vị từ.
- Trọng lượng của vị từ: số biến của vị từ
- Ví dụ:
  - P(a,b) = {cặp số nguyên tương ứng thỏa a + b = 5}
  - Không gian của vị từ: Số nguyên
  - Trọng lượng: 2

Các phép toán trên các vị từ

- Phép **phủ định:** Cho p(x, y, …) là một vị từ theo các biến x, y, … .
  - Phủ định của **p**, ký hiệu là **¬p,**
    - là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề ¬(p(a, b, …)).
  - Nói một cách khác, vị từ **¬p** được định nghĩa bởi:

$$(\neg p)(x, y, \ldots) = \neg(p(x, y, \ldots))$$

Các phép toán trên các vị từ

- **Phép hội:** cho p(x, y, …) và q(x, y, …) là các vị từ theo các biến x, y, … . Phép hội của p và q, **ký hiệu là $p \wedge q$,**
  - là một vị từ mà khi thay các biến x, y, … bởi các phần tử cụ thể a, b, … tương ứng thì ta được mệnh đề $p(a, b, \ldots) \wedge q(a, b, \ldots)$.
  - Nói một cách khác, **vị từ $p \wedge q$** được định nghĩa bởi:

$$(p \wedge q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \wedge q(x, y, \ldots)$$

Các phép toán trên các vị từ

Một cách tương tự, các phép toán tuyển, kéo theo và tương đương của 2 vị từ p và q có thể được định nghĩa như sau:

- Phép tuyển
  $(p \vee q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \vee q(x, y, \ldots)$
- Phép kéo theo
  $(p \rightarrow q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \rightarrow q(x, y, \ldots)$
- Phép tương đương
  $(p \leftrightarrow q)(x, y, \ldots) = p(x, y, \ldots) \leftrightarrow q(x, y, \ldots)$

BÀI TẬP

Biểu diễn các câu sau ở dạng vị từ:

a) Mèo là động vật có vú
b) Lan là sinh viên học giỏi
c) Tất cả sư tử đều hung dữ
d) Một số sư tử không uống cà phê”

Lượng từ (quantifier) và Mệnh đề có lượng từ

- Để chuyển vị từ (hàm mệnh đề) thành mệnh đề → gọi là "sự lượng hoá"
- Ví dụ: Cho vị từ p(x) = "**$x + 1 > x$**".
  - Xét phát biểu "**Với mọi** số thực x, ta có $x + 1 > x$", ta viết là

    "$\forall x \in R, p(x)$"

  - Vì với mọi giá trị của $x \in R$ thì bất đẳng thức $x + 1 > x$ luôn luôn đúng, nên "$\forall x \in R, p(x)$" là một phát biểu đúng, vậy nó là một mệnh đề có chân trị xác định là 1.

Lượng từ và Mệnh đề có lượng từ

- Ví dụ 2: Cho vị từ p(x) = "**x chia hết cho 3**".
  - Xét phát biểu "**có một** số tự nhiên x sao cho x chia hết cho 3", ta viết là

    "$\exists x \in N, p(x)$"
  - Vì với giá trị x = 6 thì p(x) đúng, nên phát biểu "$\exists x \in N, p(x)$" là một mệnh đề đúng.
  - Tuy nhiên, phát biểu **"Với mọi** số tự nhiên x ta có x chia hết cho 3" viết là

    "$\forall x \in N, p(x)$" là một mệnh đề sai.

Lượng từ và Mệnh đề có lượng từ

- Ví dụ 3: Cho p(x) = "**$x + 1 = x$**".
  - Xét phát biểu "**có ít nhất một số** thực x sao cho $x + 1 = x$" hay viết

    "$\exists x \in R, p(x)$"

  - Vì đẳng thức $x + 1 = x$ luôn luôn sai với mọi giá trị của $x \in R$, nên phát biểu "$\exists x \in R, p(x)$" là mệnh đề sai.

Lượng từ và Mệnh đề có lượng từ

- Ngoài việc thay thế **giá trị cụ thể** cho các biến trong vị từ để được một mệnh đề,
- **Còn có một cách khác,** để chuyển từ vị từ sang mệnh đề, **ta gọi là lượng từ hóa một vị từ.**
- Để lượng từ hóa một vị từ, ta sử dụng các lượng từ **“phổ dụng” (hay “với mọi”) và "tồn tại" (hay "có ít nhất một").**

Định nghĩa Lượng từ

- Lượng từ "**Với mọi**" của vị từ p(x) là mệnh đề ***"với mọi giá trị của x trong miền xác định ta có p(x) đúng"***.

  Ký hiệu: "**$\forall$x $\in$ A, p(x)**" hay hiểu ngầm miền xác định $\forall$x, p(x)

- Lượng từ "Tồn tại" của vị từ p(x) là mệnh đề ***"tồn tại một giá trị x trong miền xác định sao cho p(x) đúng"*** hay ***"tồn tại ít nhất một giá trị x trong miền xác định sao cho p(x) đúng"***.

  Ký hiệu: **"$\exists$x $\in$ A, p(x)"** hay hiểu ngầm miền xác định $\exists$x, p(x)

Định nghĩa Lượng từ

- Phát biểu **"$\forall x, p(x)$ " và "$\exists x, p(x)$"** là các mệnh đề có chân trị xác định là **đúng hoặc sai**.
- Nếu các phần tử của miền xác định có thể liệt kê $x_1, x_2, ..., x_n$, thì lượng từ
  $\forall x \in A, p(x)$ tương đương với phép hội $p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge ... \wedge p(x_n)$
  $\exists x \in A, p(x)$ tương đương với phép tuyển $p(x_1) \vee p(x_2) \vee ... \vee p(x_n)$
- Trong nhiều phát biểu người ta có dùng cụm từ **"tồn tại duy nhất"**, **ký hiệu bởi $\exists!$,** như là một sự lượng từ hóa đặc biệt.

Các ví dụ

- **Ví dụ 1:** Cho vị từ P(n) = "n là một số nguyên tố".
  - Mệnh đề "**Với mọi** số tự nhiên n ta có n là nguyên tố" viết là: $\forall$**n** $\in$ **N, P(n)** và mệnh đề này có chân trị là 0 (sai), vì cho n = 6 thì p(6) sai.
  - Mệnh đề "**Có một số tự** nhiên n sao cho n là nguyên tố" viết là $\exists$**n** $\in$ **N,** P(n) và mệnh đề này có chân trị là 1 (đúng).
- **Ví dụ 2:** Cho **X = { 1, 2, 3 },** p(x) = "$x^2 < 10 \wedge x > 0$"
  - $\forall x \in X$, p(x) $\Leftrightarrow$ p(1) $\wedge$ p(2) $\wedge$ p(3) là mệnh đề có chân trị 1
  - $\forall$**x** $\in$ N, p(x) là mệnh đề sai
  - $\exists$**x** $\in$ **N**, p(x) là mệnh đề đúng.

Các ví dụ

- **Ví dụ 3:** Mệnh đề "**Ta có $x^2 > 0$, với mọi số thực x khác 0**" có thể được viết là
  $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}, x^2 > 0$ và mệnh đề nầy có chân trị là 1 (đúng).
- **Ví dụ 4**: $P(x)$ = "$x > 3$"
  ☞Domain: $x \in \Re$
  ☞Proposition: $\exists x\ P(x) \rightarrow$ **TRUE or FALSE?**

Ví dụ - Lượng từ $\forall$

- Lượng từ hoá phát biểu sau:

  "Tất cả sinh viên IT đều phải học môn toán rời rạc"

→Giải 1:

- P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- Proposition: $\forall xP(x)$
- Trong đó: x ngụ ý là một sinh viên IT (domain).

→Giải 2:

- S(x) = "x là một sinh viên IT"
- P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- Proposition: $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$

Làm sao để xác định chân trị?

- $\forall x P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$
- $\exists x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$

  Trong đó $x_1, x_2 \ldots x_n$ là mọi giá trị có thể có của x.

➲Kiểm tra mọi x_i đối với $\forall$ để xác định TRUE.

➲Tìm một giá trị x_i đối với $\exists$ để xác định TRUE.

Lượng từ hóa vị từ nhiều biến

- Định nghĩa: Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên AxB. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Lượng từ hóa vị từ nhiều biến

- Ví dụ: Cho vị từ $q(x, y)$ = "$x + y = x - y$".
  Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

- $\forall y, q(1, y) \Leftrightarrow \forall y, 1 + y = 1 - y \Leftrightarrow \forall y, 2y = 0$ có chân trị 0.
- $\exists x, q(x, 2) \Leftrightarrow \exists x, x + 2 = x - 2 \Leftrightarrow \exists x, 4 = 0$ có chân trị 0.
- $\exists x, \exists y, q(x, y) \Leftrightarrow \exists x, \exists y, x + y = x - y$.
  Chọn $x = 1$, chọn $y = 0$, $q(1, 0) = 1 + 0 = 1 - 0$ là mệnh đề đúng. Như vậy $\exists x, \exists y, q(x, y)$ có chân trị 1
- $\forall x, \exists y, q(x, y) \Leftrightarrow \forall x, \exists y, x + y = x - y$
  Cho x tuỳ ý, chọn $y = 0$, $q(x, 0) = x + 0 = x - 0$ luôn luôn đúng. Như vậy $\forall x, \exists y, q(x, y)$ có chân trị 1

Lượng từ hóa vị từ nhiều biến

- **<u>Định lý:</u>** Cho p(x, y) là một vị từ 2 biến x, y xác định trên AxB. Khi đó:

1. "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
2. "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
3. "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Ghi chú: chiều ngược lại của (3) không đúng

<u>Ví dụ 2 :</u> Xét hai mệnh đề lượng từ hóa của vị từ Q(x,y) = "x = y + 2" với $x, y \in \mathbb{R}$ *:*

$\forall x \exists y, Q(x, y) =$ "$\forall x \exists y,\ x = y + 2$". *Phát biểu là : "Với mọi số thực x, tồn tại số thực y thỏa mãn : x = y + 2". Đây là một mệnh đề ĐÚNG. Vì : với số thực x tùy ý, chọn y = x – 2 thì x = y + 2.*

$\exists y \forall x, Q(x, y) =$ "$\exists y \forall x,\ x = y + 2$". *Phát biểu là : "Tồn tại ít nhất một số thực y, để với mọi số thực x ta có: x = y+2". Đây là một mệnh đề SAI. Vì: với mọi số thực y, chọn x = y+3 thì* $x \neq y + 2$.

CÁC LƯỢNG TỪ

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$\forall x P(x)$	P(x) đúng với mọi x	Có một giá trị x để P(x) là sai
$\exists x P(x)$	Có một giá trị x để P(x) là đúng	P(x) sai với mọi x

- **<u>Ví dụ:</u>** Xác định phủ định chân lý của mệnh đề $\exists x(x^2 \geq 10)$ trong không gian các số nguyên dương không lớn hơn 4

Tồn tại $x = 4$ để *mệnh* đề $(x^2 \geq 10)$ đúng. Do đó, mệnh đề $\exists x(x^2 \geq 10)$ có giá trị chân lý là 1

Miền giá trị của biến

- Trong phát biểu toán học:
  - Một **tính chất** có thể **đúng** với mọi giá trị của biến trong một **miền đặc biệt** nào đó (Miền xác định – Toán phổ thông).
  - Domain (universe) of discourse:

    Miền không gian

  hoặc

    Vũ trụ biện luận

Ví dụ - Domain

"Tất cả sinh viên IT đều phải học môn toán rời rạc"

→Giải 1: Domain → Tất cả sinh viên IT

- P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- Proposition: $\forall x P(x)$
- Trong đó: x ngụ ý là một sinh viên IT (domain).

→Giải 2: Domain → Tất cả mọi sinh viên

- S(x) = "x là một sinh viên IT"
- P(x) = "x phải học môn toán rời rạc"
- Proposition: $\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$

Qui tắc phủ định lượng từ

- Cho p(x, y, z) là một vị từ bộ 3 biến $(x, y, z) \in A \times B \times C$. Hãy tìm phủ định của mệnh đề sau: $\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : p(x, y, z)$
- Theo qui tắc chung ta có :

$\neg(\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C, p(x, y, z))$

$\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, \neg p(x, y, z)$

Qui tắc phủ định lượng từ

- Dựa vào cách xác định **chân trị của các mệnh đề có lượng từ theo ngữ nghĩa tự nhiên của các phát biểu,** ta có các qui tắc phủ định mệnh đề có lượng từ sau đây:

$$\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg P(x) \qquad (1)$$

$$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg P(x) \qquad (2)$$

- Ví dụ 1:
  - Tìm phủ định của mệnh đề "tồn tại một số thực x sao cho $x^2 < 0$". Đặt $P(x) = "x^2 < 0"$. Mệnh đề đã cho được viết dưới dạng

    $\exists x, P(x)$,

  →mệnh **đề phủ định** cần tìm có dạng : $\forall x, \neg P(x)$.

  Vậy mệnh đề phủ định là: "Với mọi số thực x ta có $x^2 \geq 0$".

Ví dụ qui tắc phủ định lượng từ

- Thật ra nếu thực hiện từng bước theo các qui tắc (1) và (2) ta cũng đạt được mệnh đề phủ định như trên:

$$\neg(\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C : p(x, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A, \neg(\exists y \in B, \exists z \in C : p(x, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \neg(\exists z \in C : p(x, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \neg p(x, y, z)$$

PHỦ ĐỊNH CÁC LƯỢNG TỪ

Phủ định	**Mệnh đề tương đương**	**Khi nào phủ định đúng?**	**Khi nào sai?**
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) sai với mọi x	Có một x để P(x) là đúng
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Có một x để P(x) là sai	P(x) đúng với mọi x

- **Ví dụ:**

Xác định phủ định của mệnh đề $\forall x(x^2 \geq 0)$?

Tương đương logic của các mệnh đề lượng từ hóa

- Cho p(x) là 1 vị từ theo biến x, A là một mệnh đề không chứa lượng từ theo biến x. Ta có

  $\forall x, (p(x) \wedge A) \Leftrightarrow (\forall x, p(x)) \wedge A$

  $\exists x, (p(x) \wedge A) \Leftrightarrow (\exists x, p(x)) \wedge A$

  $\forall x, (p(x) \vee A) \Leftrightarrow (\forall x, p(x)) \vee A$

  $\exists x, (p(x) \vee A) \Leftrightarrow (\exists x, p(x)) \vee A$

Multiple Quantifiers: read from left to right

- Cho p(x) và q(x) là 2 vị từ ta có:
  – $\forall x, p(x) \wedge \exists x, q(x) \Leftrightarrow \forall x, \exists x, (p(x) \wedge q(x))$
  – $\forall x, p(x) \vee \exists x, q(x) \Leftrightarrow \forall x, \exists x, (p(x) \vee q(x))$

Thứ tự của lượng từ hóa của 2 biến

- Cho một vị từ p(x, y) theo 2 biến x, y. Nếu lượng từ hóa cả 2 biến x, y, trong đó ta lượng từ hóa biến y trước và **biến x sau** thì ta sẽ được 4 mệnh đề sau:
  - $\forall x, \forall y, p(x, y)$
  - $\exists x, \forall y, p(x, y)$
  - $\forall x, \exists y, p(x, y)$
  - $\exists x, \exists y, p(x, y)$

Thứ tự của lượng từ hóa của 2 biến

- Nếu ta lượng từ hóa biến x trước và lượng từ **hóa biến y sau, ta cũng được 4 mệnh đề như sau**:
  - $\forall y, \forall x, p(x, y)$
  - $\exists y, \forall x, p(x, y)$
  - $\forall y, \exists x, p(x, y)$
  - $\exists y, \exists x, p(x, y)$
- Rõ ràng điều phải lưu ý là trật tự các lượng từ là rất quan trọng nếu tất cả không cùng là lương từ phổ dụng hoặc tồn tại.

Thứ tự ưu tiên của lượng từ

Mệnh đề	Khi nào đúng?	Khi nào sai?
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	P(x,y) đúng với mọi cặp (x,y)	Có một cặp (x,y) để P(x,y) là sai
$\forall x \exists y P(x,y)$	Với mọi x, có một y để P(x,y) đúng	Có một x, để P(x,y) sai với mọi y
$\exists x \forall y P(x,y)$	Có một x, để P(x,y) đúng với mọi y	Với mọi x, có một y để P(x,y) sai
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y$	Có một cặp (x,y) để P(x,y) đúng	P(x,y) với sai với mọi cặp (x,y)

Các Ví dụ

- Ví dụ 1: Cho $p(x, y)$ = "$x + y = y + x$", Giả sử rằng không gian của các biến x và y là các số thực.
  - Xác định chân trị của các mệnh đề
    - $\forall x, \forall y, p(x, y)$ và
    - $\forall y, \forall x, p(x, y)$
  - Vì $p(x, y)$ đúng với mọi số thực x và y, nên các lượng từ $\forall x, \forall y, p(x, y)$ và $\forall y, \forall x, p(x, y)$ là mệnh đề đúng.

Các Ví dụ

- Ví dụ 2: Cho p(x, y) = “x + y = 0”, Giả sử rằng không gian của các biến x và y là các số thực.
  - Xác định chân trị của các mệnh đề
    - $\forall x, \exists y, p(x, y)$ → Với số thực x đã cho, luôn có số thực y = -x sao cho x + y = 0, nên mệnh đề $\forall x, \exists y, p(x, y)$ là mệnh đề đúng
    - $\exists y, \forall x, p(x, y)$ → Không có một số thực y sao cho x + y = 0 đúng với mọi số thực x nên mệnh đề $\exists y, \forall x, p(x, y)$ là mệnh đề sai.

Các ví dụ

- Ví dụ 3: Cho p(x, y) = “x ≤ y” với x, y $\in$ N
  - $\exists$x, $\forall$y, p(x, y)→ x=0 →đúng
  - $\forall$y, $\exists$x, p(x, y)→ đúng

BÀI TẬP

- Xét vị từ $P(x,y)$= "$x + 2y < 1$" theo 2 biến. X, y xác định trên RxR
  a) Mệnh đề "$\forall x \in R, \forall y \in R, x + 2y <1$" là đúng hay sai? Giải thích?

  b) Mệnh đề "$\forall x \in R, \exists y \in R, x + 2y <1$" là đúng hay sai? Giải thích?

  c) Mệnh đề "$\exists x \in R, \forall y \in R, x + 2y <1$" là đúng hay sai? Giải thích?

  d) Mệnh đề "$\exists x \in R, \exists y \in R, x + 2y <1$" là đúng hay sai? Giải thích?

Dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic

- **Ví dụ 1:** Diễn đạt câu "Tất cả các sinh viên lớp này đều đã học giải tích"
  - C1: Đặt p(x) = "x đã học giải tích". Khi đó câu trên có thể diễn dịch như sau: $\forall x, p(x)$, trong đó x thuộc tập các sinh viên trong lớp này
  - C2: Nếu đặt s(x) = "x ở lớp này" và p(x) = "x đã học giải tích". Khi đó câu trên có thể diễn đạt như sau: $\forall x, (s(x) \rightarrow p(x))$, trong đó x thuộc tập tất cả các sinh viên.

Dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic

- **Ví dụ 2:** Diễn đạt phát biểu "Có một sinh viên lớp này **chưa** hề nhìn thấy một chiếc máy tính"
  - Đặt: p(x) = "x là sinh viên lớp này"

    q(x) = "x đã nhìn thấy một chiếc máy tính"
  - Khi đó phát biểu có thể dịch thành $\exists x, (p(x) \wedge \neg q(x))$, trong đó x thuộc tập các sinh viên trong lớp này

Dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic

- **Ví dụ 3:** Diễn đạt phát biểu "**Mọi người** đều có chính xác một người bạn tốt nhất"
- Đặt $p(x, y)$ = "y là bạn tốt nhất của x"
  Phát biểu muốn nói rằng: với mỗi cá nhân x có một cá nhân y sao cho y là bạn tốt nhất của x, và nếu z là cá nhân khác y thì z không phải là bạn tốt nhất của x.
- Do đó phát biểu có thể dịch thành
  $\forall x, \exists y\ (p(x, y) \wedge \forall z\ ((z \neq y) \rightarrow \neg p(x, z))$

Dịch biểu thức logic sang ngôn ngữ tự nhiên

- Cho mệnh đề :

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y))))$$

- Trong đó
  - C(x): “x có máy tính”
  - F(x, y): “x, y là bạn”
  - x, y ∈ tất cả sinh viên trong trường
- Dịch sang ngôn ngữ tự nhiên:

→Với mọi sinh viên x trong trường, hoặc x có máy tính, hoặc tồn tại sinh viên y có máy tính và sinh viên x, y là bạn

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Dịch mệnh đề sau ra ngôn ngữ thông thường, với C(x) là câu "**x là diễn viên hài**", F(x) là "**x là người vui nhộn**" và không gian là tất cả mọi người trên thế giới.

a. $(\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$

b. $(\exists x(C(x) \land F(x))$

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Xác định chân lí các mệnh đề sau, nếu không gian bao gồm các số nguyên:

  a) $\forall n\ (n^2 \geq 0)$; b) $\exists n\ (n^2 = 2)$

  c) $\forall n\ (n^2 \geq n)$; d) $\exists n\ (n^2 < 0)$;

- **Bài 2**: Giả sử không gian của hàm mệnh đề $P(x)$ gồm các số nguyên 0, 1, 2, 3 và 4. Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng các phép hội, tuyển, phủ định:

  a) $\forall x P(x)$; b) $\exists x P(x)$

  c) $\forall x \neg P(x)$; d) $\neg\ (\exists x P(x))$;

BÀI TẬP:

Dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic

Dùng lượng từ với mọi diễn tả các câu sau, và xác định chân trị của mệnh đề được tạo:

a) "Mọi số nguyên dương chẵn không phải là số nguyên tố"

Đặt p(x) = "x là số chẵn",

q(x) = "x là số nguyên tố"

Phát biểu có dạng $\forall x \in N, p(x) \rightarrow \neg q(x)$

b) Tất cả sư tử đều hung dữ

c) Một số sư tử không uống cà phê"

d) Có một người phụ nữ đã bay tất cả các tuyến bay trên thế giới. (Mỗi tuyến bay có nhiều chuyến bay).

BÀI TẬP:
Dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic

- “Nếu một người là phụ nữ và là cha mẹ, thì người đó là mẹ của một người nào đó.”
- “Nếu x là người thì x sẽ phải chết”
- “Các sinh viên tin học phải học môn toán rời rạc”
- “Các sinh viên nữ trong lớp này đều dễ thương”