Übungsblatt 2

Aufgabe 1 Rechnen Sie folgende Gleichungen aus der Vorlesung zum Thema Fehlerfortpflanzung mit einer 2-Bit Mantisse nach:

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \left(1.11_2 \cdot 2^{-1} +_{\mathbb{M}} (-1.10)_2 \cdot 2^{-1}\right) +_{\mathbb{M}} 1.10_2 \cdot 2^{-3} \\ &= 1.00_2 \cdot 2^{-3} +_{\mathbb{M}} 1.10_2 \cdot 2^{-3} \\ &= 1.01_2 \cdot 2^{-2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= 1.11 \cdot 2^{-1} +_{\mathbb{M}} \left((-1.10)_2 \cdot 2^{-1} +_{\mathbb{M}} 1.10_2 \cdot 2^{-3}\right) \\ &= 1.11_2 \cdot 2^{-1} +_{\mathbb{M}} (-1.00_2) \cdot 2^{-1} \\ &= 1.10_2 \cdot 2^{-2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Die Taylor-Reihe von e^x ist

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

a) Berechnen Sie e^{-20} und $1.0/e^{20}$ über die Taylor-Reihe in single precision. Dazu addieren Sie die Terme der Taylor-Entwicklung so lange auf, bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert.

b) Eine weitere Möglichkeit besteht in der Berechnung von e^{-20} durch die Formel

$$e^{-20} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-20}{n}\right)^n.$$

Was ergibt sich numerisch für e^{-20} bei größer werdendem n?

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen des Funktionsaufrufs $exp()$, definiert in `math.h`

d) Es gilt die Ungleichung

$$e^x < 1/(1-x) \quad \text{für} \quad x < 1,$$

Ist diese immer füllt?

Aufgabe 3 Wie am Ende von Kapitel 1 beschrieben, ist die Auswertung des Ausdrucks $1 - \sqrt{1-x^2}$ für kleine x gut konditioniert aber numerisch instabil. Besser wäre es $\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ zu berechnen. Programmieren Sie beide Ausdrücke und vergleichen Sie die Ergebnisse für $x = 10^{-i}$, $i = 1, \ldots, 15$.