Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Wahr oder falsch?

a) Man solle bei einer Summe immer die kleineren Summanden zuerst addieren, da dabei die Rechengeschwindigkeit schneller ist.

b) Zwei Näherungen an denselben exakten Wert mit demselben absoluten Fehler sind immer identisch.

c) Der absolute Fehler einer Nächerung ist immer größer oder gleich ihrem relativen Fehler

Aufgabe 2 Wir wissen aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f^{'}(z) \cdot h, \quad \text{mit} \quad z \in [x_0, x_0+h]$$

Interpretiert man h als einen Fehler der Eingabe - dann wird meist δ_x anstatt h geschrieben, so lässt sich der Mittelwertsatz verwenden, um eine obere Schranke für den Fehler des Funktionswertes δ_y anzugeben.

$$\delta_y = f(x+\delta_x) - f(x) = f^{'}(z) \cdot \delta_x \ \text{ mit } \ z \in [x, x+\delta_x]$$

und damit

$$\delta_{y,max} = |f(x+\delta_x) - f(x)| = M \cdot \delta_x \ \text{ mit } \ M = \max_{z \in [x, x+\delta_x]} |f'(z)|$$

Geben Sie eine obere Schranke für den absoluten Fehler bei der Auswertung von $f(x) = \sin(x)$ und von $f(x) = x^3$ in Abhängigkeit des Eingabefehlers an.

Aufgabe 3 Entscheiden Sie, ob die rechte oder die linke Seite des folgenden Ausdrucks weniger fehleranfällig ist.

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x \ \text{ für } \ x \approx 0$$

Der Fehler beim Berechnen von $\cos(x)$ sei dabei ε_1, bei der Differenz ε_2, bei $\sin(x)$ ε_3 und bei dem Quadrat ε_4. Alle Fehler sind kleiner als die Maschinengenauigkeit ε_M

Aufgabe 4 Für welche Werte von x ergibt sich für den Ausdruck

$$f(x) = 1 + \sin x$$

ein hoher relativer Fehler? Geben Sie ein besseres Verfahren zur Berechnung des Ausdrucks an.