

Übungsblatt 7

Eine Audiosignal wird 33 mal pro Sekunde aufgezeichnet, es besteht aus zwei Tönen mit 4 und mit 6 Herz und einem Rauschen. Erzeugen Sie die entsprechenden Werte, indem Sie die Funktion

$$y(t) = \cos(6 \cdot t \cdot 2\pi/33) + 0.5 \sin(4 \cdot t \cdot 2\pi/33) + (\text{rand()} \% 5 + 1.0)/100.0$$

an den den Stützstellen $t = 0, \dots, 32$ berechnen. Das Rauschen wird hier über Zufallszahlen simuliert. Um das analoge Signal wieder zu rekonstruieren, interpolieren Sie die Stützpunkte durch eine Summe von Kosinus- und Sinus-Funktionen (trigonometrische Interpolation

http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische_Interpolation).

$$p(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{16} a_i \cos(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t/33) + \sum_{i=1}^{16} b_i \sin(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t/33)$$

Die 33 Koeffizienten a_0 , a_i und b_i werden so berechnet, dass die Werte von $p(t)$ bei $t = 0, \dots, 32$ exakt mit den Werten von $y(t)$ übereinstimmen, oder anders ausgedrückt, berechnen Sie die interpolierende Funktion mit den 33 Interpolationsfunktionen $g_i(t)$, $i = 0, \dots, 32$:

$$\begin{aligned} g_0(t) &= 1 \\ g_i(t) &= \cos(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t/33), \quad i = 1, \dots, 16 \\ g_{i+16}(t) &= \sin(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot t/33), \quad i = 1, \dots, 16 \end{aligned}$$

Das entspricht einer Frequenzanalyse. Wenn Sie anschließend alle “kleinen” Koeffizienten vor den Interpolationsfunktionen gleich Null setzen, entspricht die Interpolationsfunktion fast der Originalfunktion, jedoch ohne Rauschen und mit kleinen Abweichungen in den Koeffizienten vor den Sinus- bzw. Kosinus-Termen.

Es gibt zwei Arten die Koeffizienten zu berechnen, einmal durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems mit Hilfe der Gauß-Elimination, und einmal direkt durch Multiplikation mit der inversen Matrix (reelle Formulierung der Diskreten Fourier-Transformation). Führen Sie beide Möglichkeiten durch.