Rapport de Modélisation : K-Partitionnement Robuste

Bedis BACCAR & Rayen SELMI

Année 2025-2026

Introduction

Ce document présente la modélisation théorique du problème de partitionnement de graphe, d'abord dans sa version statique, puis dans sa version robuste face aux incertitudes sur les distances et les poids. Nous détaillons ensuite la méthodologie de résolution par l'algorithme de plans coupants (*constraint generation*) compatible avec une implémentation via `LazyCallback`.

1 Modélisation du problème statique (PLNE Compact)

Le problème statique consiste à partitionner les sommets V en au plus K parties respectant une capacité B, en minimisant le poids des arêtes internes.

Variables de décision

Nous définissons les variables binaires suivantes :

— $x_{ik} \in \{0,1\}$: vaut 1 si le sommet $i \in V$ est assigné à la partie $k \in \{1,\dots,K\}$.

— $y_{ij} \in \{0,1\}$: vaut 1 si l'arête $(i,j) \in E$ a ses deux extrémités dans la même partie.

Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE)

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} \ell_{ij} \cdot y_{ij} & \\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} x_{ik} = 1 & \forall i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i\in V} w_i \cdot x_{ik} \leq B & \forall k \in \{1,\dots,K\} \\
& y_{ij} \geq x_{ik} + x_{jk} - 1 & \forall (i,j) \in E, \forall k \in \{1,\dots,K\} \\
& x_{ik} \in \{0,1\} & \forall i \in V, \forall k \in \{1,\dots,K\} \\
& y_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in E
\end{array} \tag{1}
$$

Justification :

— La première contrainte assure que chaque sommet est dans une unique partie.

— La deuxième contrainte assure que le poids total d'une partie ne dépasse pas B.

— La troisième contrainte force y_{ij} à 1 si i et j sont tous deux dans la partie k (car $1+1-1=1$). Comme on minimise la somme pondérée des y_{ij}, le solveur mettra naturellement y_{ij} à 0 si les sommets sont dans des parties différentes.

2 Modélisation du problème robuste (Min-Max)

Dans la version robuste, nous considérons deux ensembles d'incertitude :
— U_1 : incertitude sur les distances (budget global L, variation max par arc 3).
— U_2 : incertitude sur les poids (budget global W, variation max par sommet W_v).
Le problème devient un problème d'optimisation robuste de type **Min-Max**. Nous cherchons la partition qui minimise le coût dans le pire scénario de distance, tout en garantissant la faisabilité (respect de la capacité B) pour le pire scénario de poids.

Formulation Min-Max

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \quad & \max_{\delta^1 \in U_1} \sum_{(i,j)\in E} \left(\ell_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)\right) y_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \text{Contraintes structurelles (assignation, liens } x - y\text{)} \\
& \max_{\delta^2 \in U_2} \sum_{i\in V} w_i(1+\delta^2_i)x_{ik} \leq B \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\}
\end{aligned} \tag{2}$$

Avec les ensembles d'incertitude définis par :

$$U_1 = \left\{ \delta^1 \in [0,3]^{|E|} \mid \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \leq L \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \delta^2 \in [0,W_v]^{|V|} \mid \sum_{v\in V} \delta^2_v \leq W \right\}$$

3 Résolution par plans coupants et LazyCallback

Nous adoptons ici l'approche de génération de contraintes, aussi appelée algorithme de plans coupants.

a) Modification du problème (Robustesse dans les contraintes)

Pour appliquer l'algorithme, nous reformulons l'objectif Min-Max en utilisant une variable auxiliaire z (représentant le coût robuste). La robustesse de l'objectif est transférée dans les contraintes sous forme d'une infinité d'inégalités (forme épigraphe).

Modèle Maître Théorique :

$$\begin{aligned}
\min_{z,\mathbf{x},\mathbf{y}} \quad & z \\
\text{s.c.} \quad & z \geq \sum_{(i,j)\in E} \left(\ell_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)\right) y_{ij} && \forall \delta^1 \in U_1 \\
& \sum_{i\in V} w_i(1+\delta^2_i)x_{ik} \leq B && \forall k \in \{1,\dots,K\}, \forall \delta^2 \in U_2 \\
& (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{X}_{\text{statique}}
\end{aligned} \tag{3}$$

b) Définition des ensembles initiaux U_1^* et U_2^*

Le problème maître restreint (celui passé au solveur initialement) ne considère qu'un sous-ensemble fini de scénarios $U_1^* \subset U_1$ et $U_2^* \subset U_2$. Nous initialisons ces ensembles avec le **scénario nominal** (aucune perturbation) :

$$U_1^* = \{\mathbf{0}_{|E|}\} \quad \text{et} \quad U_2^* = \{\mathbf{0}_{|V|}\}$$

Cela garantit que la première solution trouvée est au moins optimale pour le problème statique.

c) Sous-problèmes de séparation

Lorsqu'une solution entière candidate $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, z^*)$ est trouvée (dans le `LazyCallback`), nous devons vérifier si elle résiste aux pires scénarios. Nous résolvons des sous-problèmes d'optimisation (qui sont ici de simples problèmes linéaires continus ou des problèmes de sac-à-dos continus).

Sous-problème 1 : Séparation de l'Objectif (Distance) On cherche le pire scénario δ^1 pour la configuration d'arêtes fixée $\mathbf{y}^*$.

$$\mathcal{SP}_{\text{obj}}(\mathbf{y}^*) = \max_{\delta^1} \sum_{(i,j)\in E} \left[(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j) y^*_{ij}\right] \delta^1_{ij} \quad \text{s.c. } \delta^1 \in U_1 \tag{4}$$

Sous-problème 2 : Séparation des Poids (Faisabilité) Pour chaque partie k, on cherche le pire scénario δ^2 pour l'affectation fixée $\mathbf{x}^*$.

$$\mathcal{SP}_{\text{poids},k}(\mathbf{x}^*) = \max_{\delta^2} \sum_{i\in V} [w_i x^*_{ik}]\, \delta^2_i \quad \text{s.c. } \delta^2 \in U_2 \tag{5}$$

d) Conditions d'optimalité

Une solution $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, z^*)$ du problème maître restreint est optimale pour le problème robuste complet si et seulement si :

1. **Validité du coût :** L'estimation z^* couvre le coût du pire cas :

$$z^* \geq \sum_{(i,j)\in E} \ell_{ij} y^*_{ij} + \mathcal{SP}_{\text{obj}}(\mathbf{y}^*)$$

2. **Faisabilité robuste :** Pour chaque partie $k \in \{1, \dots, K\}$, le poids dans le pire cas ne dépasse pas B :

$$\sum_{i\in V} w_i x^*_{ik} + \mathcal{SP}_{\text{poids},k}(\mathbf{x}^*) \leq B$$

e) Expression des coupes ajoutées

Si les conditions ci-dessus ne sont pas remplies, on ajoute des contraintes (coupes) au problème maître en utilisant les solutions optimales $\bar{\delta}^1$ et $\bar{\delta}^2$ trouvées par les sous-problèmes.

1. Coupe d'optimalité (si z^* est trop bas) : On ajoute le scénario $\bar{\delta}^1$ à U^*_1, ce qui se traduit par la contrainte :

$$z \geq \sum_{(i,j)\in E} \left(\ell_{ij} + \bar{\delta}^1_{ij}(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)\right) y_{ij}$$

2. Coupe de faisabilité (si la partie k est trop lourde) : On ajoute le scénario $\bar{\delta}^2$ à U^*_2, ce qui se traduit par la contrainte :

$$\sum_{i\in V} w_i(1 + \bar{\delta}^2_i) x_{ik} \leq B$$

4 Résolution par dualisation

Dans cette partie, nous cherchons à transformer le problème robuste (Min-Max) en un programme linéaire entier unique (monolithique) en utilisant la dualité linéaire.

a) Reformulation de l'objectif robuste

L'objectif du problème robuste est de minimiser le pire coût possible compte tenu de l'incertitude sur les distances. L'expression initiale est donnée par :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \max_{\delta^1 \in U_1} \sum_{(i,j)\in E} \left(\ell_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)\right) y_{ij}$$

Pour isoler le terme dépendant des variables d'incertitude δ^1_{ij}, nous développons la somme. Les termes $\ell_{ij}y_{ij}$ sont constants par rapport à la maximisation sur δ^1. Nous pouvons donc les sortir du max :

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \left(\sum_{(i,j)\in E} \ell_{ij}y_{ij} + \max_{\delta^1 \in U_1} \sum_{(i,j)\in E} \left[(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij}\right] \delta^1_{ij} \right)$$

Le terme qui fait intervenir les variables δ^1_{ij} correspond au **coût additionnel maximal** (le "prix" de la robustesse sur l'objectif) :

$$\Phi(\mathbf{y}) = \max_{\delta^1 \in U_1} \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}(\mathbf{y}) \cdot \delta^1_{ij}$$

où nous posons $c_{ij}(\mathbf{y}) = (\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij}$ comme coefficient devant la variable d'incertitude.

b) Formulation explicite du problème interne

Pour utiliser la dualité, nous devons d'abord expliciter le problème d'optimisation interne qui détermine le pire scénario pour les distances. Pour une configuration de partitionnement fixée (c'est-à-dire quand les variables y_{ij} sont fixées), nous cherchons la valeur de δ^1 qui maximise le coût.

Ce problème, que nous noterons **(P-Interne)**, est un Programme Linéaire (PL) continu sur les variables δ^1_{ij}. Les contraintes proviennent de la définition de l'ensemble d'incertitude U_1 (budget global L et bornes individuelles 3).

$$\begin{aligned}
\text{(P-Interne)} \quad Z_{sub}(\mathbf{y}) = \max\nolimits_{\delta^1} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \underbrace{\left[(\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij}\right]}_{C_{ij}} \cdot \delta^1_{ij} & & \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \leq L & & \text{(Contrainte de budget)} \\
& \delta^1_{ij} \leq 3 & \forall (i,j) \in E \quad & \text{(Bornes sup)} \\
& \delta^1_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in E \quad & \text{(Positivité)}
\end{aligned} \tag{6}$$

Analyse de ce problème interne :

- Les coefficients de la fonction objectif $C_{ij} = (\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij}$ sont des constantes connues dans ce sous-problème (puisque $\mathbf{y}$ est fixé par le niveau supérieur).
- C'est un problème de maximisation. Comme il est imbriqué dans une minimisation globale, nous ne pouvons pas le résoudre tel quel dans un solveur unique.
- La stratégie consiste donc à formuler le **Dual** de ce problème interne. Par le théorème de la dualité forte (le problème est borné et réalisable), la valeur optimale du primal (maximisation) sera égale à la valeur optimale du dual (minimisation). Cette minimisation pourra alors s'intégrer naturellement à la minimisation globale du problème maître.

c) Dualisation par la méthode du Lagrangien

Pour transformer le problème de maximisation interne en un problème de minimisation (compatible avec l'objectif global), nous appliquons la dualité lagrangienne.

Étape 1 : Introduction des multiplicateurs de Lagrange Nous associons des variables duales aux contraintes du problème (P-Interne) :

— $\lambda \geq 0$: variable duale associée à la contrainte de budget global $\sum \delta^1_{ij} \leq L$.

— $\mu_{ij} \geq 0$: variables duales associées aux bornes individuelles $\delta^1_{ij} \leq 3$ pour chaque arête (i,j).

Étape 2 : Écriture de la fonction de Lagrange Le Lagrangien $\mathcal{L}(\delta^1, \lambda, \mu)$ intègre les contraintes dans la fonction objectif. Pour un problème de maximisation, nous ajoutons les termes de pénalité :

$$\mathcal{L}(\delta^1, \lambda, \mu) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}\delta^1_{ij} + \lambda \left(L - \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \right) + \sum_{(i,j)\in E} \mu_{ij} \left(3 - \delta^1_{ij}\right) \tag{7}$$

où nous rappelons que $C_{ij} = (\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij}$.

Étape 3 : Regroupement des termes Nous réorganisons l'expression pour isoler les variables primales δ^1_{ij} :

$$\mathcal{L}(\delta^1, \lambda, \mu) = \sum_{(i,j)\in E} \delta^1_{ij} \underbrace{(C_{ij} - \lambda - \mu_{ij})}_{\text{Gradient réduit}} + L\lambda + 3 \sum_{(i,j)\in E} \mu_{ij} \tag{8}$$

Étape 4 : Dérivation du problème dual La fonction duale $g(\lambda, \mu)$ est définie par le maximum du Lagrangien par rapport à $\delta^1 \geq 0$.

$$g(\lambda, \mu) = \max_{\delta^1 \geq 0} \mathcal{L}(\delta^1, \lambda, \mu)$$

Pour que ce maximum soit fini (et ne tende pas vers $+\infty$), le coefficient devant chaque δ^1_{ij} doit être négatif ou nul. Si $(C_{ij} - \lambda - \mu_{ij}) > 0$, on pourrait choisir $\delta^1_{ij} \to +\infty$ ce qui ferait exploser la fonction. Cette condition de finitude impose la contrainte duale :

$$C_{ij} - \lambda - \mu_{ij} \leq 0 \iff \lambda + \mu_{ij} \geq C_{ij}$$

Résultat : Le Programme Dual Le problème dual cherche à minimiser la borne supérieure donnée par le Lagrangien. En remplaçant C_{ij} par sa valeur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda,\mu} \quad & L\lambda + 3 \sum_{(i,j)\in E} \mu_{ij} \\ \text{s.c.} \quad & \lambda + \mu_{ij} \geq (\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j)y_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\ & \lambda \geq 0, \quad \mu_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in E \end{aligned} \tag{9}$$

Ce problème est désormais une **minimisation**, tout comme le problème maître global.

d) Reformulation des contraintes robustes (Incertitude sur les poids)

Contrairement à l'incertitude sur les distances qui affecte la fonction objectif, l'incertitude sur les poids δ^2 affecte les contraintes de capacité. La contrainte robuste pour une partie k est donnée par :

$$\max_{\delta^2 \in U_2} \sum_{i\in V} w_i(1 + \delta^2_i)x_{ik} \leq B$$

Pour isoler le terme dépendant de l'incertitude, nous développons l'expression et séparons la partie déterministe de la partie variable :

$$\sum_{i \in V} w_i x_{ik} + \underbrace{\max_{\delta^2 \in U_2} \sum_{i \in V} (w_i x_{ik}) \delta_i^2}_{\Psi_k(x)} \leq B \tag{10}$$

Le terme $\sum_{i \in V} w_i x_{ik}$ est constant vis-à-vis de la maximisation sur δ^2. Nous nous concentrons donc sur le terme de maximisation qui représente le **surplus de poids maximal** dans le pire scénario.

e) Exhiber les problèmes internes liés aux variables δ_i^2

Pour chaque cluster $k \in \{1, \ldots, K\}$, nous avons un sous-problème de maximisation distinct. Une fois les affectations $\mathbf{x}$ fixées, nous cherchons la perturbation δ^2 qui maximise le poids total de la partie k.

Notons ce problème **(P-Interne-Poids)**$_k$. Les contraintes sont issues de la définition de l'ensemble U_2 (budget global W et bornes individuelles W_v).

$$\begin{aligned}
(\text{P-Interne-Poids})_k \quad \Psi_k(\mathbf{x}) = \max_{\delta^2} \quad & \sum_{i \in V} \underbrace{(w_i x_{ik})}_{D_{ik}} \cdot \delta_i^2 & \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{i \in V} \delta_i^2 \leq W & \text{(Budget global)} \\
& \delta_i^2 \leq W_v & \forall i \in V \\
& \delta_i^2 \geq 0 & \forall i \in V
\end{aligned} \tag{11}$$

Ici, $D_{ik} = w_i x_{ik}$ représente le coefficient de sensibilité du nœud i pour le cluster k. Si le nœud n'est pas dans le cluster ($x_{ik} = 0$), son incertitude n'a aucun impact.

f) Dualiser ces problèmes

Nous appliquons la méthode du Lagrangien pour transformer ce problème de maximisation en minimisation. Puisque nous avons une contrainte robuste par cluster k, nous introduisons des variables duales spécifiques à chaque cluster k.

Étape 1 : Multiplicateurs de Lagrange Pour le cluster k fixé, nous définissons :

— $\alpha_k \geq 0$: variable duale pour la contrainte de budget global W.

— $\beta_{ik} \geq 0$: variables duales pour les bornes individuelles $\delta_i^2 \leq W_v$ de chaque nœud i.

Étape 2 : Fonction de Lagrange Nous formons le Lagrangien en pénalisant les violations des contraintes dans l'objectif de maximisation :

$$\mathcal{L}_k(\delta^2, \alpha_k, \beta_k) = \sum_{i \in V} D_{ik} \delta_i^2 + \alpha_k \left(W - \sum_{i \in V} \delta_i^2 \right) + \sum_{i \in V} \beta_{ik} \left(W_v - \delta_i^2 \right) \tag{12}$$

Étape 3 : Regroupement Nous factorisons par les variables primales δ_i^2 :

$$\mathcal{L}_k(\delta^2, \alpha_k, \beta_k) = \sum_{i \in V} \delta_i^2 (D_{ik} - \alpha_k - \beta_{ik}) + W \alpha_k + \sum_{i \in V} W_v \beta_{ik} \tag{13}$$

Étape 4 : Dérivation du Dual Pour que $\max_{\delta^2 \geq 0} \mathcal{L}_k$ soit borné, les coefficients devant chaque δ_i^2 doivent être négatifs ou nuls :

$$D_{ik} - \alpha_k - \beta_{ik} \leq 0 \iff \alpha_k + \beta_{ik} \geq w_i x_{ik}$$

Résultat du dual pour le cluster k : Le problème dual associé au pire scénario de poids pour la partie k s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
\min_{\alpha_k,\beta_{\cdot k}} \quad & W\alpha_k + \sum_{i\in V} W_v \beta_{ik} \\
\text{s.c.} \quad & \alpha_k + \beta_{ik} \geq w_i x_{ik} \quad \forall i \in V \\
& \alpha_k \geq 0, \quad \beta_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in V
\end{aligned} \tag{14}
$$

En remplaçant le terme $\Psi_k(\mathbf{x})$ par cette expression duale (qui est égale au pire coût par dualité forte), la contrainte de capacité robuste pour la partie k devient :

$$
\sum_{i\in V} w_i x_{ik} + \left(W\alpha_k + \sum_{i\in V} W_v \beta_{ik} \right) \leq B \tag{15}
$$

Cette inéquation, couplée aux contraintes $\alpha_k + \beta_{ik} \geq w_i x_{ik}$, garantit que la capacité est respectée même sous le pire scénario d'incertitude.

g) Formulation du problème robuste sous forme d'un PLNE monolithique

En rassemblant les résultats des sections précédentes, nous pouvons désormais écrire le problème de partitionnement robuste complet sous la forme d'un unique Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE).

Ce modèle intègre simultanément :
— La structure de partitionnement de base (x, y).
— La protection contre l'incertitude des distances (via les variables duales λ, μ).
— La protection contre l'incertitude des poids (via les variables duales α, β).

Variables de décision :
— $x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\}$: variables de partitionnement.
— $\lambda \geq 0, \mu_{ij} \geq 0$: variables duales pour l'objectif (distances).
— $\alpha_k \geq 0, \beta_{ik} \geq 0$: variables duales pour les contraintes de capacité k (poids).

Modèle complet :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in E} \ell_{ij} y_{ij} + L\lambda + \sum_{(i,j)\in E} 3\mu_{ij} \\
\text{s.c.} \quad & \textbf{1. Contraintes de structure :} \\
& \sum_{k=1}^{K} x_{ik} = 1 && \forall i \in V \\
& y_{ij} \geq x_{ik} + x_{jk} - 1 && \forall (i,j) \in E, \forall k \\
& \textbf{2. Contraintes duales (Objectif - Distances) :} \\
& \lambda + \mu_{ij} \geq (\hat{\ell}_i + \hat{\ell}_j) y_{ij} && \forall (i,j) \in E \\
& \textbf{3. Contraintes duales (Faisabilité - Poids) :} \\
& \sum_{i\in V} w_i x_{ik} + W\alpha_k + \sum_{i\in V} W_v \beta_{ik} \leq B && \forall k \in \{1, \ldots, K\} \\
& \alpha_k + \beta_{ik} \geq w_i x_{ik} && \forall k, \forall i \in V \\
& \textbf{4. Domaines :} \\
& x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\} \\
& \lambda, \alpha_k \geq 0 \\
& \mu_{ij}, \beta_{ik} \geq 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Ce modèle compact peut être résolu directement par un solveur type Gurobi ou CPLEX sans avoir recours à des callbacks, bien que le nombre de variables et de contraintes soit plus élevé que dans la version statique (multiplication par le nombre de clusters pour les variables β).

5 Stratégies de Résolution

Pour la phase expérimentale, nous distinguerons les méthodes de décomposition (basées sur la génération de contraintes) de la méthode monolithique. Voici la logique des deux algorithmes de décomposition :

Algorithme 1 : Plans Coupants Itératifs (Boucle Externe)

Il s'agit d'une approche séquentielle où le solveur est relancé à chaque itération :

1. **Résolution :** Résoudre le problème maître restreint à l'optimum.
2. **Séparation (Oracle) :** Identifier le pire scénario (sous-problème) pour la solution courante.
3. **Mise à jour :** Si la solution viole la robustesse, ajouter la contrainte correspondante (coupe) et retourner à l'étape 1. Sinon, l'algorithme termine.

Algorithme 2 : Branch-and-Cut (Lazy Callback)

C'est une approche intégrée qui ne construit qu'un seul arbre de recherche :

— Le solveur lance un Branch-and-Bound standard.
— **Interruption :** Dès qu'une solution entière candidate est trouvée, le processus est suspendu par un *callback*.
— **Vérification :** Les sous-problèmes sont résolus à la volée.
— **Coupe :** Si la solution n'est pas robuste, elle est rejetée par l'ajout immédiat d'une *Lazy Constraint* locale, sans redémarrer le solveur.

Conclusion

Ce rapport a permis de formaliser le problème de partitionnement de graphe sous incertitude, passant d'une modélisation statique compacte à une formulation robuste Min-Max couvrant les incertitudes sur les coûts et les capacités.

Pour répondre aux objectifs du projet, nous avons défini trois méthodes de résolution exactes que nous implémenterons et comparerons :

1. **Les Plans Coupants (Itératif) :** Résolution séquentielle par ajout de contraintes dans une boucle externe.
2. **Le Branch-and-Cut :** Génération dynamique des contraintes au sein de l'arbre de recherche via des *callbacks*.
3. **La Dualisation :** Résolution d'un unique PLNE monolithique obtenu par dualité lagrangienne.

La prochaine étape consistera à implémenter ces trois approches (ainsi qu'une heuristique) en Julia/Gurobi afin d'analyser leurs performances respectives sur des instances variées.