

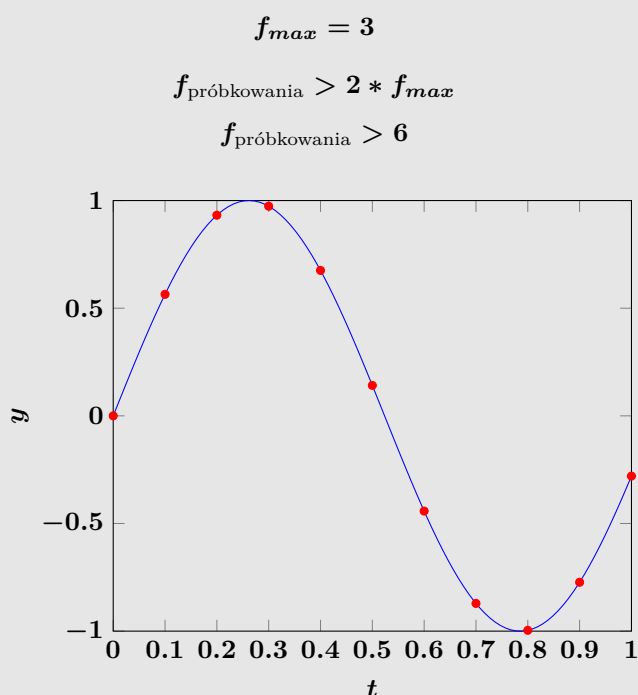
# Spis treści

Zadanie 1 . . . . .	1
Zadanie 2 . . . . .	1
Zadanie 3 . . . . .	1
Zadanie 4 . . . . .	2
Zadanie 5 . . . . .	2
Zadanie 6 . . . . .	3

## Zadanie 1

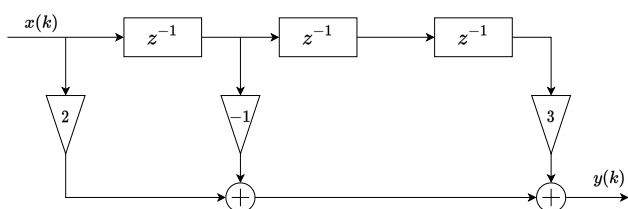
Omówić zasadę doboru częstotliwości próbkowania; Zilustrować na przykładzie sygnału  $t = 0 : 1$ ;  $y = \sin(2 * \pi * 3 * t)$ ; narysuj sygnał i widmo sygnału po spróbkowaniu. 4p

Częstotność próbkowania musi być większa niż dwukrotność częstotliwości najwyższej składowej sygnału.



## Zadanie 2

Dla filtra o następującej strukturze:



- podać rodzaj(SOI/NOI) i rząd filtra; 1p
- wyznaczyć odpowiedź impulsową; 1p
- narysować odpowiedź na sygnał:  $x(k) = \delta(k - 1) - \delta(k - 3)$ ; 4p
- wyznaczyć równanie różnicowe opisujące filtr; 2p

e) wyznaczyć transmitancję filtra; wyznaczyć charakterystykę częstotliwościową filtra; 2p

f) określić stabilność filtra; 1p

- Filtr jest SOI, rząd filtra to 3.
- odpowiedź impulsowa to:  $h(k) = 2 * \delta(k) + (-1) * \delta(k - 1) + 3 * \delta(k - 3)$
- Odpowiedź sygnału:

k	y(k)
0	0
1	2
2	-1
3	-2
4	4
5	0
6	-3
7	0

d) Równanie różnicowe:

$$2x(k) - 1x(k - 1) + 3x(k - 3)$$

e) Transmitacja filtra:

$$y(k) = 2 + (-1)z^{-1} + 3z^{-3}$$

Charakterystyka częstotliwościowa filtra:

f) Filtr jest stabilny

Zależność między charakterystyką częstotliwościową  $H(e^{j\omega})$  a transmitancją

Transmitancja:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Charakterystyka częstotliwościowa:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega T_s} + \dots + b_n \cdot e^{-j\omega n T_s}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\omega T_s} + \dots + a_n \cdot e^{-j\omega n T_s}}$$

$H(e^{j\omega})$  można otrzymać podstawiając  $z = e^{j\omega T_s}$  do wzoru na transmitancję  $H(z)$ .

## Zadanie 3

Na przykładzie filtra dolnoprzepustowego omówić podstawowe cechy ciągłego filtra Czebyszewa. Porównać charakterystyki częstotliwościowe filtra analogowego i cyfrowego. 3p

Charakterystyka amplitudowa filtra jest równomiernie zafalowana w paśmie przepustowym oraz monotoniczna w zaporowym lub charakterystyka amplitudowa monotoniczna w paśmie przepustowym oraz równomiernie zafalowana w zaporowym.

Filtr Czebyszewa zwykle ma niższy stopień niż filtr

Butterwortha przy tych samych wymaganiach (dzięki bardziej stromej charakterystyce w paśmie przejściowym).

Porównanie:

Zalety transformacji biliniowej (z analogowego na cyfrowy):

- zachowana stabilność,
- brak efektu nakładania się widm.

Wady transformacji biliniowej:

- zniekształcenie osi częstotliwości.

#### Chat GPT:

Filtry Czebyszewa są rodzajem filtrów, które zapewniają optymalizację między szerokością pasma przenoszenia a tłumieniem w paśmie zaporowym. Są one nazwane na cześć rosyjskiego matematyka Pafnutiego Czebyszewa. Podstawowe cechy filtrów Czebyszewa to:

Ryple (fale) w paśmie przenoszenia: Filtry Czebyszewa typu 1 mają charakterystyczną cechę, która polega na tym, że mają ryple (fluktuacje) w paśmie przenoszenia. Wielkość tych rypli jest jednym z parametrów projektowania filtru. Większe ryple prowadzą do szybszego tłumienia poza paśmie przenoszenia, ale kosztem większych zniekształceń w paśmie przenoszenia.

Szybkość tłumienia: Filtry Czebyszewa są znane z tego, że zapewniają szybkie tłumienie poza paśmie przenoszenia. W porównaniu do innych typów filtrów, takich jak filtry Butterwortha, filtry Czebyszewa mogą osiągnąć tłumienie o określonej wielkości przy mniejszej liczbie stopni (rzędu filtru).

Optymalizacja Czebyszewa: Filtry Czebyszewa są zaprojektowane tak, aby minimalizować maksymalne odchylenie od idealnej charakterystyki w określonym zakresie częstotliwości. Oznacza to, że filtr Czebyszewa zapewnia optymalne rozwiązanie problemu Czebyszewa.

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów analogowych i cyfrowych różnią się pod wieloma względami:

Zakres częstotliwości: Filtry analogowe działają na sygnałach ciągłych i mogą przetwarzać sygnały o dowolnej częstotliwości, ograniczonej tylko przez charakterystyki sprzętowe. Z drugiej strony, filtry cyfrowe działają na sygnałach dyskretnych i są ograniczone przez częstotliwość Nyquista, która jest połową częstotliwości próbkowania.

Stabilność: Filtry analogowe mogą mieć problemy ze stabilnością, zwłaszcza dla filtrów o wysokim rzędzie. Filtry cyfrowe są zazwyczaj bardziej stabilne, chociaż mogą wystąpić problemy ze stabilnością w przypadku filtrów IIR.

## Zadanie 4

Podać warunek liniowej fazy filtrów SOI dla  $N$  parzystego i nieparzystego i omówić jaki wpływ ma liniowa faza na filtrowany sygnał? **3p**

Filtr FIR (SOI) ma liniową charakterystykę fazy, gdy jest symetryczny lub antysymetryczny, co znaczy, że jego odpowiedź impulsowa spełnia jeden z poniższych warunków:

Symetryczny (typ I i II):  $h[n] = h[N - n]$  dla wszystkich  $n$ , gdzie  $N$  to rząd filtru.

Antysymetryczny (typ III i IV):  $h[n] = -h[N - n]$  dla wszystkich  $n$ .

Filtry FIR, które spełniają te warunki, nazywane są filtrami o liniowej fazie.

Liniowa faza jest pożądana, ponieważ utrzymuje relacje fazowe pomiędzy różnymi składowymi częstotliwościowymi sygnału. Innymi słowy, wszystkie składowe częstotliwościowe sygnału są przesunięte w czasie o tę samą ilość, co oznacza, że kształt sygnału jest zachowany po filtracji. To jest szczególnie istotne w wielu zastosowaniach, takich jak przetwarzanie dźwięku i obrazu, gdzie zachowanie kształtu sygnału jest kluczowe. W przeciwnym razie, jeśli faza nie jest liniowa, różne składowe częstotliwościowe mogą być przesunięte o różne ilości, co prowadzi do zniekształceń, takich jak "rozmycie" sygnału.

$$n = k$$

## Zadanie 5

Podać definicje funkcji autokorelacji  $R$ , funkcji autokowariancji  $C$  ergodycznego **1p**, stacjonarnego szeregu losowego  $X$ . Wyznaczyć wartość średnią tego procesu oraz funkcję autokorelacji z dostępnej realizacji czasowej  $x = [3, 5, 2, 4, 2]$  tego procesu losowego. Narysować tę funkcję autokorelacji. **3p** Wyznaczyć macierz autokorelacji  $R$ . **2p**

Funkcja autokorelacji jest miarą podobieństwa między wartością sygnału w danym czasie a wartościami sygnału w innych czasach. Definiuje ona zależność między dwiema kolejnymi wartościami sygnału i mierzy, jak bardzo te wartości są skorelowane. Funkcja autokowariancji mierzy kowariancję między dwiema wartościami sygnału w różnych momentach czasowych. Jest to szczególny przypadek funkcji autokorelacji, w którym oczekiwana wartość sygnału jest równa zero. Szereg losowy  $X$  jest nazywany stacjonarnym jeśli jego średnia nie zależy od czasu oraz funkcja autokorelacji zależy tylko od różnicy między czasami, a nie od samych czasów. Stacjonarny szereg losowy ergodyczny spełnia dodatkowo warunek, że wartości średnie uzyskane na podstawie jednych realizacji są reprezentatywne dla wartości średnich uzyskanych na podstawie innych realizacji.

$$(3 + 5 + 2 + 4 + 2)/5 = 3.2$$

$$R(0) = (1/5) * [(3 - 3.2)^2 + (5 - 3.2)^2 + (2 - 3.2)^2 + (4 - 3.2)^2 + (2 - 3.2)^2] = 1.76$$

$$R(1) = (1/4) * [(3-3.2)(5-3.2) + (5-3.2)(2-3.2) + (2-3.2)(4-3.2) + (4-3.2)(2-3.2)] = -0.8$$

$$R(2) = (1/3) * [(3-3.2)(2-3.2) + (5-3.2)(4-3.2) + (2-3.2)(2-3.2)] = 0$$

$$R(3) = (1/2) * [(3-3.2)(4-3.2) + (5-3.2)(2-3.2)] = -0.8$$

$$R(4) = (1/1) * [(3-3.2) * (2-3.2)] = 0$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.76 & -0.8 & 0 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 1.76 & -0.8 & 0 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 1.76 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 0 & -0.8 & 1.76 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 0 & -0.8 & 1.76 \end{bmatrix}$$

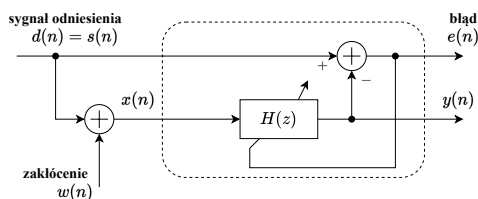
## Zadanie 6

Filtr Wienera zazwyczaj jest filtrem SOI i pracuje w strukturze

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) = h^T x(n)$$

$$h = [h_0, h_1, \dots, h_M]^T$$

$$x(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2) \dots, x(n-M)]^T$$



Podać wskaźnik jakości optymalizacji, który prowadzi do uzyskania optymalnego zbioru współczynników filtru  $h$ . Podać rozwiązanie problemu optymalizacji w postaci macierzowo-wektorowego równania Wienera-Hopfa. **4p**

Filtr Wienera jest zaprojektowany do minimalizacji średniej kwadratowej błęd (MSE - mean square error) między sygnałem oczekiwanym a rzeczywistym sygnałem wyjściowym. MSE jest wskaźnikiem jakości optymalizacji, który jest zdefiniowany jako:  $E(d(n) - y(n))^2$  gdzie:

$E\{\dots\}$  oznacza wartość oczekiwaną (średnią),  $d(n)$  to oczekiwany (docelowy) sygnał,  $y(n)$  to rzeczywisty sygnał wyjściowy.

Równanie Wienera-Hopfa Równanie Wienera-Hopfa to kluczowe równanie w teorii filtrów Wienera, które pozwala na wyznaczenie optymalnych współczynników filtru. W przypadku liniowego, czasowo niezmiennego filtru Wienera, równanie Wienera-Hopfa ma postać:  $R_{xx} * h = r_{dx}$  gdzie:

$R_{xx}$  to autokorelacyjna macierz sygnału wejściowego  $x$ ,

$h$  to wektor współczynników filtru, który chcemy optymalizować,

$r_{dx}$  to wektor krzyżowej funkcji korelacji między sygnałem wejściowym  $x$  a sygnałem docelowym  $d$ .

Rozwiązaniem tego równania jest wektor optymalnych współczynników filtru  $h$ . Możemy to zrobić, na przykład, za pomocą metody odwracania macierzy lub innych technik rozwiązywania równań liniowych.