PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN (Design and Analysis of Algorithms)

L/O/G/O

GV: HUỲNH THỊ THANH THƯƠNG

Email: hh.thanhthuong@gmail.com

thuonghtt@uit.edu.vn

CHƯƠNG 3

THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

Algorithm Design

Nội dung

- ❖ Phương pháp chia để trị
  (Divide and Conquer)
- ❖ Phương pháp giảm để trị
- ❖ Phương pháp tham lam
- ❖ Phương pháp quay lui, nhánh cận, cắt tỉa
- ❖ Phương pháp quy hoạch động
- ❖ Các phương pháp khác

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ý tưởng:

- Để giải 1 bài toán có kích thước n, chia bài toán đã cho thành 1 số bài toán con có kích thước nhỏ hơn.
- Giải các bài toán con rồi tổng hợp kết quả lại để được lời giải của bài toán ban đầu
    - Giải các bài toán con : lại chia kích thước nhỏ hơn nữa
    - Quá trình dẫn đến những bài toán mà lời giải hiển nhiên, dễ dàng thực hiện (bài toán cơ sở)

The Divide and Conquer Paradigm

1. DIVIDE into smaller subproblems

2. CONQUER subproblems recursively.

3. COMBINE solutions of subproblems into one for the original problem.

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Mô hình

```
void D&C(N)  // N là kích thước dữ liệu của bài toán
{
        if( N đủ nhỏ)
                Giải bài toán; (đôi khi không làm gì cả)
        else
        {
                Chia bài toán N thành các bài toán con
        kích thước N1, N2, …, Nm

                for (i = 1; i <= m; i++)
                        D&C(Ni);

                Tổng hợp kết quả ( có hoặc không tường minh )
        }
}
```

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 1: Bài toán tìm MaxMin

Tìm giá trị Max, Min trong đoạn [l, r] của mảng A có n phần tử.

- Tìm thuật toán có độ phức tạp O(n) ?
- Giải bằng nhiều cách:
  - Cách 1
  - Cách 2
  - Cách 3: chia để trị

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 1: Bài toán tìm MaxMin

- Chia

  - Nếu l = r → giải trực tiếp

  - Ngược lại, chia bài toán thành 2 bài toán con rời nhau

- Trị

  - Tìm kiếm Max1, Min1 trên bài toán con 1

  - Tìm kiếm Max2, Min2 trên bài toán con 2

- Tổng hợp: - Tổng hợp kết quả

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 2: Thuật toán Quick Sort

- Chia
  - Chọn 1 phần tử bất kỳ trong mảng làm nút trục, xác định vị trí hợp lệ của nút này trong mảng (vị trí pivot).
  - Phân hoạch các phần tử còn lại sao cho từ vị trí 0 đến pivot-1 đều có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng nút trục, từ vị trí pivot+1 đến n-1 lớn hơn nút trục.
- Đệ quy
  - Sắp xếp 2 mảng con.
- Tổng hợp
  - Không tổng hợp kết quả 1 cách tường minh (đã thực hiện trong quá trình phân hoạch)

Chia để trị - Divide and Conquer

❖Ví dụ 2: Thuật toán Quick Sort

```
void QuickSort (int a[], int left, int right )
{

    int pivot;
    if (left >= right)    return;        //điều kiện dừng

    if (left < right)                    //bước đệ qui

            partition (a, left, right, &pivot);

                        dãy con 1: a[i] <= a[pivot], i < pivot

                        dãy con 2: a[i]  >  a[pivot], i > pivot

            QuickSort (a, left, pivot - 1);

            QuickSort (a, pivot+1, right);

    }
```

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 3: Thuật toán Merge Sort

- Chia

  - Nếu mảng A rỗng hoặc chỉ có một phần tử thì trả về chính A (đã có thứ tự).

  - Ngược lại, chia A thành 2 mảng con

- Đệ quy

  - Sắp xếp 2 mảng con

- Tổng hợp

  - Xếp xen kẽ hai mảng con đã có thứ tự

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 3: Thuật toán MergeSort

```
Merge-Sort(A,l,r)
{
        if (l < r) then
        {
                mid = (l+r)/2;
                Merge-Sort(A,l,mid); // SX ds con L1
                Merge-Sort(A,mid+1,r); // SX ds con L2
                Merge(A,l,mid,r);
        }
}
```

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 4: Bài toán tìm hạng trong không gian 2D

- Cho tập S có n điểm trong 2D, hạng của điểm X là số lượng các điểm mà X trội hơn

  S={(3,1), (2, 4), (5, 2), (1, 4), ….}

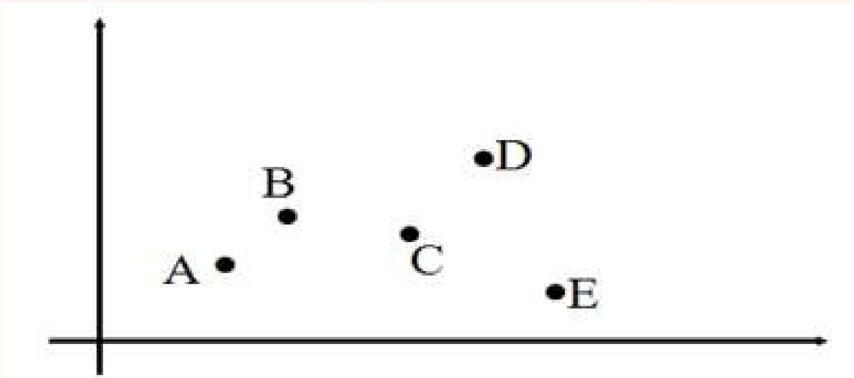
Cho điểm A(a_1, a_2) và B(b_1, b_2). A được gọi là "trội hơn" B nếu $a_1 > b_1$ và $a_2 > b_2$.

- Thiết kế thuật toán để sắp hạng các điểm trong tập S?

Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 4: Bài toán sắp hạng trong không gian 2D

- Cho điểm $A(a_1, a_2)$ và $B(b_1, b_2)$. A được gọi là "trội hơn" B nếu $a_1 > b_1$ và $a_2 > b_2$.



Chia để trị - Divide and Conquer

❖ Ví dụ 4: Bài toán tìm hạng trong không gian 2D

- Ý tưởng 1: So sánh trực tiếp từng cặp điểm

  - Độ phức tạp O(n^2)

- Ý tưởng 2: Áp dụng pp chia để trị

  - Độ phức tạp O(?)

Nội dung

- Phương pháp chia để trị
  (Divide and Conquer)
- Phương pháp giảm để trị
  (Decrease and Conquer)
- Phương pháp tham lam
- Phương pháp quay lui, nhánh cận, cắt tỉa
- Phương pháp quy hoạch động
- Các phương pháp khác

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Ý tưởng:

- Để giải 1 bài toán P(n) có kích thước n, ta giảm kích thước của nó, giải 1 bài toán con có kích thước nhỏ hơn.
- Giải bài toán con rồi tìm cách suy ra lời giải của bài toán ban đầu

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Mô hình:

- Kiểu top-down (dẫn đến 1 giải thuật đệ quy)
- Kiểu bottom-up (giải thuật lặp)

```
void D&C(n)  // n là kích thước dữ liệu của bài toán
{
        if( n đủ nhỏ)
                Giải bài toán; (đôi khi không làm gì cả)
        else
        {
                Giảm kích thước bài toán n ta được 1 bài toán con
                kích thước m (m<n)

                D&C(m);

                Suy ra kết quả từ lời giải của bài toán con
        }
}
```

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ 3 trường hợp giảm kích thước:

1. Decrease by a constant: hằng số -1, -2, -3,..
2. Decrease by a factor: hệ số 1/2, 1/3,…
3. Variable size decrease

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Ví dụ 1: Tính lũy thừa x^n ($x \neq 0$)

- Công thức đệ quy: $x^n = x^{n-1}.x$
- Giảm kích thước bởi cùng 1 hằng số (không đổi) là 1

```
Pow(x,n)
{
    if(n=0) return 1;
    return Pow(x,n-1)*x;
}
```

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Ví dụ 2: Binary Search

- Giảm kích thước bởi cùng 1 hệ số là ½
- binarySearch(a,n) chuyển thành tìm kiếm trên mảng con có kích thước giảm đi 1 nửa

```
int binarySearch(int a[], int n, int l, int r, int x)
{
    if (l>r) return -1;

    int mid = (l+r)/2;

    if (x == a[mid]) return mid;
    if (x < a[mid]) return binarySearch(a,n,l,mid-1,x);
    return binarySearch(a,n,mid+1,r,x);

}
```

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Ví dụ 3: Tìm USCLN (a,b)

- Brute-force (dựa theo định nghĩa của USCLN): phân tích 2 số ra thừa số nguyên tố → tìm thừa số chung lớn nhất
- 2 cách giải theo kiểu Giảm để trị: dãy liên tiếp các phép toán %, -
- Giảm kích thước của biến/tham số

```
Mã giả: CHƯA XÉT SỐ ÂM
Topdown(Đệ quy)
ucln(a,b)
{
    if(b==0) return a
    return ucln(b,a%b)
}
```

```
Bottom-up(Quá trình lặp)
ucln(a,b)
{
    while(b khác 0)
    {
        r=a%b;
        a=b;
        b=r;
    }
    return a;
}
```

Giảm để trị - Decrease and Conquer

❖ Ví dụ 4: Tìm n! hoán vị của 1 tập gồm n phần tử $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

- Cách 1: Quay lui - Backtracking
- Cách 2: Giảm để trị - Decrease and Conquer