Математическая статистика

Практическое задание 3

В данном задании рассматриваются свойства условного математического ожидания. В частности, рассматривается модель смеси гауссовских распределений.

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма `"[номер группы] Фамилия Имя - Задание 3"`. Квадратные скобки обязательны. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `3.N.ipynb` и `3.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.
- Некоторые задачи отмечены символом *. Эти задачи являются дополнительными. Успешное выполнение большей части таких задач (за все задания) является необходимым условием получения бонусного балла за практическую часть курса.
- Баллы за каждую задачу указаны далее. Если сумма баллов за задание меньше 25% (без учета доп. задач), то все задание оценивается в 0 баллов.

Баллы за задание:

- Задача 1 - 3 балла
- Задача 2 - 1 балл
- Задача 3 - 2 балла
- Задача 4 - 7 баллов
- Задача 5* - 10 баллов

In [1]:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.stats as sps
from math import *
```

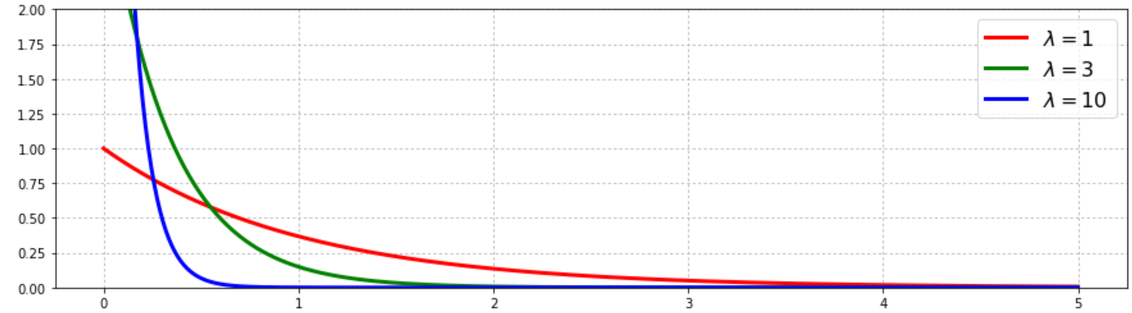
Задача 1. На вероятностном пространстве $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathsf{P})$, где P --- экспоненциальное распределение с параметром λ, задана случайная величина ξ по правилу $\xi(\omega) = \omega$. Сигма-алгебра $\mathcal{G}$ порождена счетной системой событий $\{B_n\}_{n\geq 1}$, где $B_n = \{n-1\leq \omega

- плотности распределения P для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$
- ξ и $\mathsf{E}(\xi|\mathcal{G})$ как функции от ω для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$
- ξ^2 и $\mathsf{E}(\xi^2|\mathcal{G})$ как функции от ω для $\lambda \in \{1, 3, 10\}$

Используйте приведенный ниже шаблон. Одному и тому же значению λ во всех графиках должен соответствовать один и тот же цвет.

In [2]:

```
# График 1
grid = np.linspace(0, 5, 1000)
plt.figure(figsize=(15, 4))
for λ, color in [(1, 'red'), (3, 'green'), (10, 'blue')]:
    plt.plot(grid, sps.expon(scale=1 / λ).pdf(grid), lw=3, color=color, label='$\\lambda={}$'.format(λ))
    plt.legend(fontsize=16)
    plt.ylim((0, 2))
    plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



In [3]:

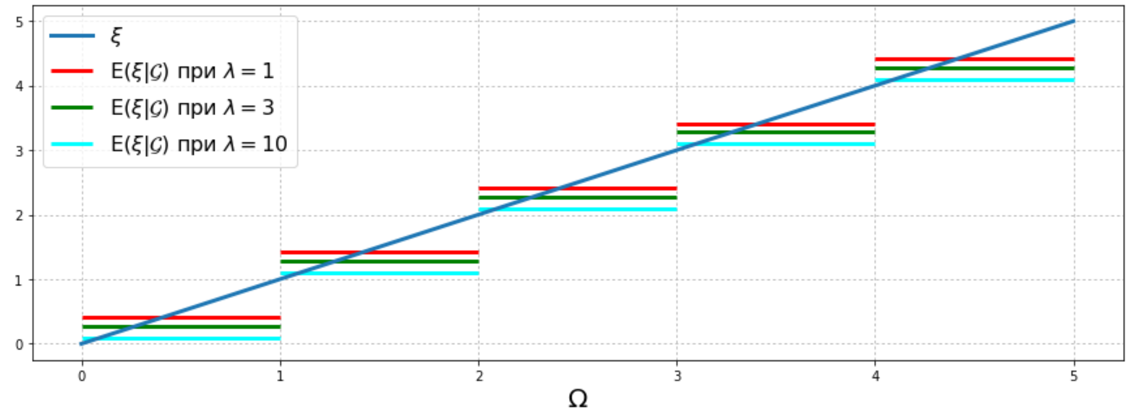
```
def draw(xi_label, function, integral):
    grid = np.linspace(0, 5, 1000)
    plt.figure(figsize=(15, 5))
    plt.plot(grid, [function(x) for x in grid], lw=3, label='${}$'.format(xi_label))
    for λ, color in [(1, 'red'), (3, 'green'), (10, 'cyan')]:
        # [0, 5) = [0, 1) □ ... □ [4, 5)
        # D_i := [i, i + 1)
        for i in range(5):  # события из сигма-алгебры
            # Для графика ξ: E(ξ * I_{D_i}) = int λ * x * exp(-λx) = -exp(-λx)(λx+1)/λ from i to i+1
            # Для графика ξ^2: E(ξ^2 * I_{D_i}) = int λ * x^2 * exp(-λx) = -exp(-λx)(λ^2*x^2 + 2λx + 2) / λ^2 from i to i+1
            expect = integral(λ, i + 1) - integral(λ, i)

            # P(D_i) = P([i, i + 1)) = (1 - exp(-λ(i+1))) - (1 - exp(-λi))
            p_d_i = exp(-λ * i) - exp(-λ * (i + 1))

            plt.hlines(expect / p_d_i, i, i + 1, color=color, lw=3, label=('$\\mathsf{{E}}({}|\\mathcal{{G}})$ при $\\lambda = {}$'.format(xi_label, λ) if i == 0 else ''))
        plt.xlabel('$\\Omega$', fontsize=20)
        plt.legend(fontsize=16)
        plt.grid(ls=':')
    plt.show()
```

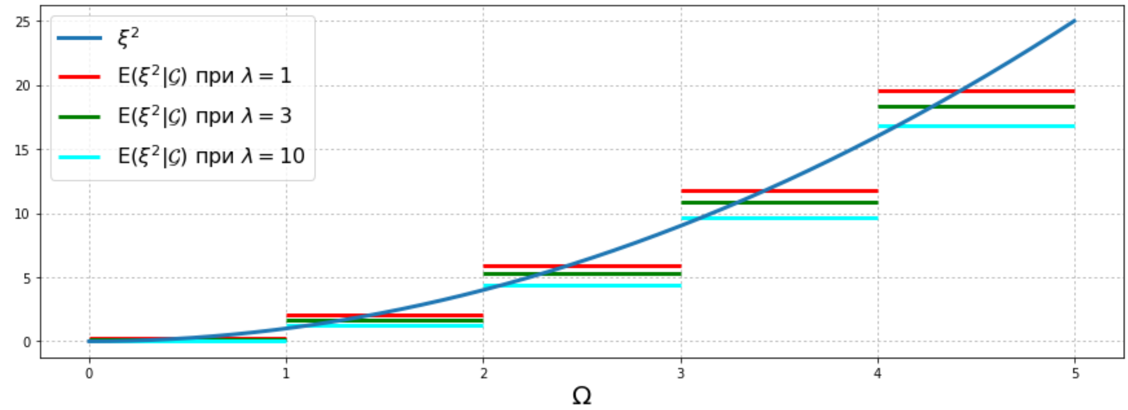
In [4]:

```
# График 2
draw('\\xi', lambda x: x, lambda λ, x: -exp(-λ * x) * (λ * x + 1) / λ)
```



In [5]:

```
# График 3
draw('\\xi^2', lambda x: x * x, lambda λ, x: -exp(-λ * x) * (λ ** 2 * x ** 2 + 2
 * λ * x + 2) / λ ** 2)
```



Вывод: Мы убедились, что $E(\xi|G)$ и $E(\xi^2|G)$ являются G измеримыми случайными величинами. Также они в некотором смысле являются усреднением случайной величины по сигма-алгебре.

Задача 2. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, где $a = 0$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$. Для $y \in \{-3, 0, 1, 5\}$ постройте графики условной плотности $f_{\xi_1|\xi_2}(x\,|y)$.

$|\Sigma| = 36$

$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$

$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x,y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

$(x,y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5}{18}(x^2+y^2) - \frac{4}{9}xy$

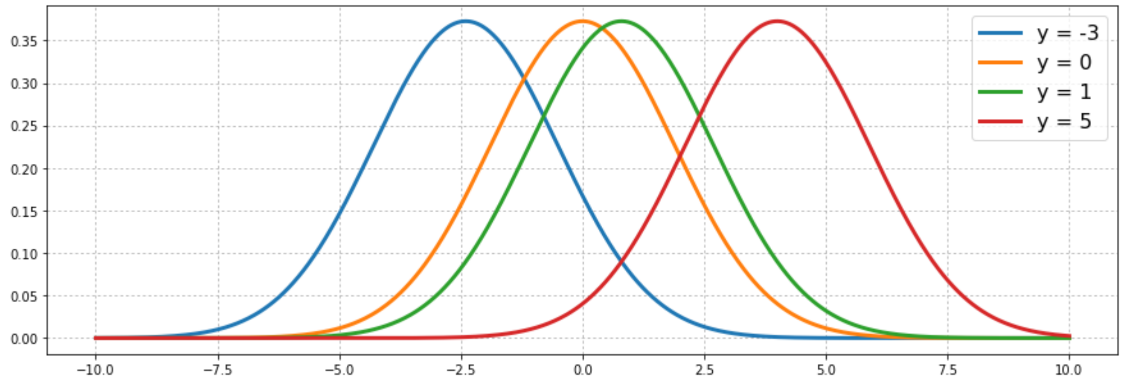
$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{1}{2}(\frac{5}{18}(x^2+y^2)-\frac{4}{9}xy)} = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{5}{36}(x^2+y^2)+\frac{2}{9}xy}$

$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dx = \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} e^{-\frac{y^2}{20}}$

$f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \frac{f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{\sqrt{5}}{6} e^{-\frac{5}{36}x^2 - \frac{4}{45}y^2 + \frac{2}{9}xy}$

In [6]:

```
grid = np.linspace(-10, 10, 1000)
plt.figure(figsize=(15, 5))
for y in [-3, 0, 1, 5]:
    f_ξ1_ξ2 = sqrt(5) / 6 * np.exp(-5 / 36 * grid ** 2 - 4 / 45 * y ** 2 + 2 / 9
 * grid * y)
    plt.plot(grid, f_ξ1_ξ2, linewidth=3, label='y = {}'.format(y))
    plt.legend(fontsize=16)
    plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Вывод: Мы построили график условной плотности при нескольких фиксированных значениях y. Видим, что значение y влияет на сторону, в которую смещён график.

Задача 3. Имеется множество серверов, которые периодически выходят из строя. Обозначим ξ_i время между i-м моментом выхода из строя сервера и $(i+1)$-м. Известно, что величины ξ_i независимы в совокупности и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ.

Обозначим N_t --- количество серверов, которые вышли из строя к моменту времени t (в начальный момент времени $N_0 = 0$). В курсе случайных процессов будет доказано, что для любых $s < t$ величина $N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s))$ и независима с N_s. При этом N_t как функция от t будет называться пуассоновским процессом интенсивности λ.

Вам нужно знать, сколько серверов нужно докупить к моменту времени t взамен вышедших из строя. В момент времени s предсказанием количества серверов, вышедших из строя к моменту времени t, будем считать величину $\mathsf{E}(N_t|N_s)$.

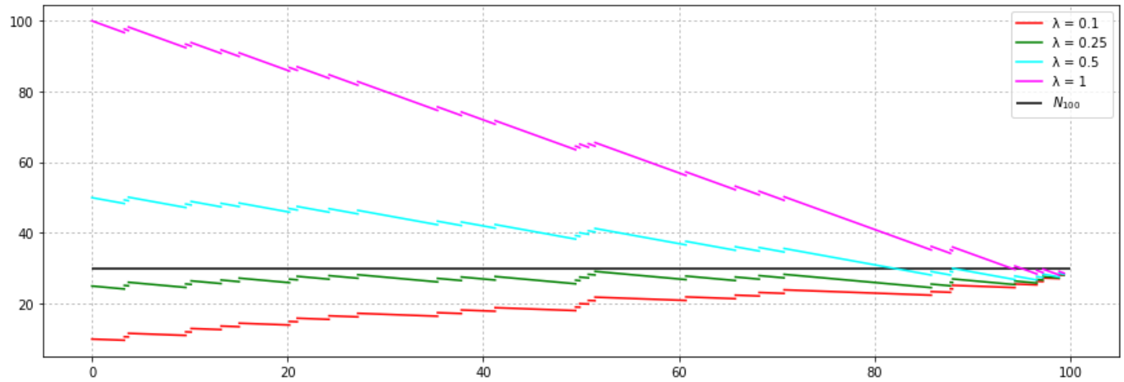
Сгенерируйте выборку случайных величин ξ_i для $\lambda = 1/4$ в количестве, чтобы их сумма была больше 100. Для $t = 100$ постройте графики зависимости величины $\mathsf{E}(N_t|N_s)$ от s в предополжении, что условное математическое ожидание было посчитано при значении $\lambda \in \{1/10, 1/4, 1/2, 1\}$. Нарисуйте также на графике горизонтальную прямую уровня N_{100}.

$E(N_t|N_s) = E(N_t - N_s|N_s) + E(N_s|N_s)$
$N_t - N_s$ независим с N_s, поэтому $E(N_t - N_s|N_s) = E(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$
N_s является N_s измеримой, поэтому $E(N_s|N_s) = N_s$
Итак, $E(N_t|N_s) = \lambda(t-s) + N_s$

In [18]:

```
# чтобы сумма была больше ста, нужна взять чуть больше 25 штук
# для простоты возьмём 100
ξs = sps.expon(scale=4).rvs(size=100)
assert ξs.sum() > 100

t = 100
plt.figure(figsize=(15, 5))
for λ, color in [(1 / 10, 'red'), (1 / 4, 'green'), (1 / 2, 'cyan'), (1, 'magent
a')]:
    for n_s in range(len(ξs)):
        s = ξs[:n_s].sum()
        if s + ξs[n_s] > t:
            break
        x1 = s
        x2 = s + ξs[n_s]
        y1 = λ * (t - x1) + n_s
        y2 = λ * (t - x2) + n_s
        plt.plot([x1, x2], [y1, y2], color=color, label='λ = {}'.format(λ) if n_
s == 0 else '')
n_100 = min([n for n in range(len(ξs)) if ξs[:n].sum() >= t])
plt.hlines(n_100, 0, t, label='$N_{100}$')
plt.legend()
plt.grid(ls=':')
plt.show()
```



Вывод: Видно, что когда мы считаем матожидание для $\lambda = 1/4$, то есть для настоящего значения λ, получается очень точное предсказание числа вышедших из строя серверов. Для остальных λ предсказание тем точнее, чем s ближе к t, причём чем ближе значение λ к настоящему, тем лучше предсказание.

Задача 4. Рассмотрим модель смеси многомерных гауссовских распределений, то есть распределение, имеющее плотность $p(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} p_k(x) \mathsf{P}(T = k)$, где T --- случайная величина, принимающая значения $\{1, \ldots, K\}$ и имеющая смысл номера компоненты смеси, а $p_k(x)$ --- плотность распределения $N(a_k, \Sigma_k)$.

Загрузите датасет "Ирисы Фишера", используя следующий код.

In [20]:

```
from sklearn.datasets import load_iris

data = load_iris()
sample = data['data']  # выборка
sample_types = data['target']  # номера компонент смеси
```

В предположении, что каждый класс имеет гауссовское распределение, оцените его параметры. Используйте для этого функции `numpy.mean` и `numpy.cov`. Проверьте, что матрица ковариаций получилась правильной --- возможно, придется предварительно поменять порядок осей (транспонировать). Напечатайте полученные оценки.

In [24]:

```
means_of_type = []
covaritaions_of_type = []

for type in [0, 1, 2]:
    # первые 50 ирисок --- первого класса, вторые 50 --- второго, последние 50 -
-- третьего
    sample_of_type = sample[type * 50:(type + 1) * 50]
    mean_of_type = np.mean(sample_of_type, axis=0)
    covaritaion_of_type = np.cov(sample_of_type.T)
    print(mean_of_type)
    print(covaritaion_of_type)
    print()

    means_of_type.append(mean_of_type)
    covaritaions_of_type.append(covaritaion_of_type)
```

```
[ 5.006  3.418  1.464  0.244]
[[ 0.12424898  0.10029796  0.01613878  0.01054694]
 [ 0.10029796  0.14517959  0.01168163  0.01143673]
 [ 0.01613878  0.01168163  0.03010612  0.00569796]
 [ 0.01054694  0.01143673  0.00569796  0.01149388]]

[ 5.936  2.77   4.26   1.326]
[[ 0.26643265  0.08518367  0.18289796  0.05577959]
 [ 0.08518367  0.09846939  0.08265306  0.04120408]
 [ 0.18289796  0.08265306  0.22081633  0.07310204]
 [ 0.05577959  0.04120408  0.07310204  0.03910612]]

[ 6.588  2.974  5.552  2.026]
[[ 0.40434286  0.09376327  0.3032898   0.04909388]
 [ 0.09376327  0.10400408  0.07137959  0.04762857]
 [ 0.3032898   0.07137959  0.30458776  0.04882449]
 [ 0.04909388  0.04762857  0.04882449  0.07543265]]
```

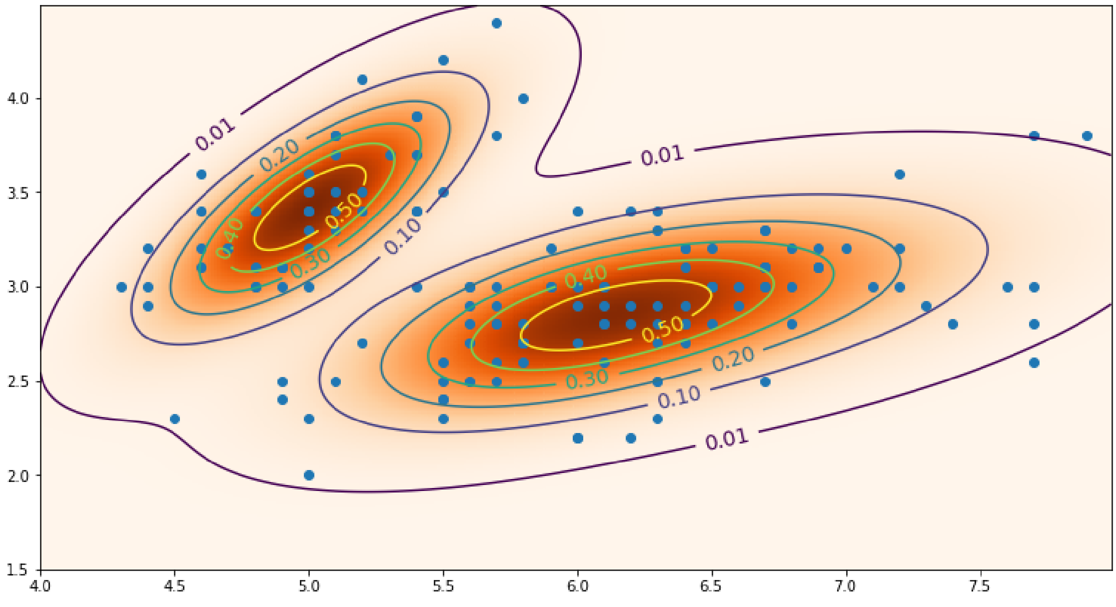
Нарисуйте график плотности (тепловую карту) в проекции на первые две координаты и нанесите на график точки выборки. При выполнении задания полезно вспомнить решение части 3 задачи 1 задания 1. Используйте шаблон ниже.

Имеем три четырёхмерных случайных вектора:
$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_4) \sim N(a_1, \Sigma_1)$
$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_4) \sim N(a_2, \Sigma_2)$
$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_4) \sim N(a_3, \Sigma_3)$
Рассматриваются первые две компоненты каждого вектора:
$\xi' = (\xi_1, \xi_2) \sim N(a'_1, \Sigma'_1)$
$\zeta' = (\zeta_1, \zeta_2) \sim N(a'_2, \Sigma'_2)$
$\eta' = (\eta_1, \eta_2) \sim N(a'_3, \Sigma'_3)$
Требуется построить усреднённую плотность этих векторов, то есть $\frac{\rho_{\xi'} + \rho_{\zeta'} + \rho_{\eta'}}{3}$

In [28]:

```
grid = np.mgrid[4:8:0.01, 1.5:4.5:0.01]
densities = [sps.multivariate_normal.pdf(np.dstack((grid[0], grid[1])), means_of
_type[type][:2], covaritaions_of_type[type][:2, :2]) for type in range(3)]
density = np.mean(densities, axis=0)

plt.figure(figsize=(13, 7))
plt.pcolormesh(grid[0], grid[1], density, cmap='Oranges')
plt.scatter(sample[:, 0], sample[:, 1])
CS = plt.contour(grid[0], grid[1], density, [0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5])
plt.clabel(CS, fontsize=14, inline=1, fmt='%1.2f', cmap='Set3')
plt.show()
```



Вычислите условное математическое ожидание $\mathsf{E}(X | I\{T \neq k\} = 1)$ для всех $k = 1, 2, 3$, где X --- случайный вектор, имеющий распределение смеси. Постройте графики условной плотности $p_{X|I\{T\neq k\}}(x\,|1)$ в проекции на первые две координаты. Подберите хорошие значения линий уровня.

In [ ]:

```
...
```

Классифицируйте все пространство по принципу $k = \arg\max_k p_{X|I\{T=k\}}(x|1)$.

Посчитайте долю ошибок на выборке. Нарисуйте классификацию всего пространства в проекции на пары координат (0, 1), (1, 3) и (2, 3), где закрасьте разными цветами области, которые образовались в результате классификации.

In [ ]:

```
...
```

Вывод: У нас есть три класса, однако второй и третий очень похожи, это видно из значений среднего второй и третьей компонент смеси, а также из графика плотности.

Задача 5*. В предыдущей задача информация о принадлежности наблюдения конкретной компоненте смеси была известна заранее. Как быть в случае, если такой информации нет? Задача оценки параметров распределения смеси может быть решена с помощью иттерационного EM-алгоритма.

Опишите, как работает EM-алгоритм (это обязательное условие, при котором эта задача будет проверяться). Затем примените EM-алгоритм к Ирисам Фишера и к некоторым искусственно сгенерированным датасетам. Исследуйте, как результат зависит от параметров алгоритма. Сделайте вывод.

Разобраться в EM-алгоритме помогут:

https://basegroup.ru/community/articles/em (https://basegroup.ru/community/articles/em)

http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%95%D0%9C-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC (http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%95%D0%9C-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC)

https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation%E2%80%93maximization_algorithm (https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation%E2%80%93maximization_algorithm)

Bishop, C.M. Pattern Recognition and Machine Learning, глава 9.

Реализация EM-алгоритма для смеси гауссовских распределений:

http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.mixture.GaussianMixture.html#sklearn.mixture.Gaus
(http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.mixture.GaussianMixture.html#sklearn.mixture.Gaus