In [72]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

В качестве априорного распределения возьмём сопряженное распределение к $N(a, \sigma^2)$, а именно $N(a_0, \sigma_0^2)$. Подберем такие параметры a_0 и σ_0^2, чтобы они учитывали свойство: $P(|\theta| < 0.5) \geq 0.95$. Найдем параметры, при которых выполняется равенство.

α_0 возьмем равным нулю.

$$P\left(-\frac{0.5}{\sigma_0} < \frac{\theta}{\sigma_0} < \frac{0.5}{\sigma_0}\right) = \alpha$$

$P\left(-z_{0.5-\alpha/2} < \frac{\theta}{\sigma_0} < z_{\alpha/2+0.5}\right) = \alpha,$ где z_α — квантиль уровня α.

$\frac{0.5}{\sigma_0} = z_{0.5-\alpha/2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = \frac{1}{2z_{0.5-\alpha/2}}.$ Теперь посчитаем σ_0, учитывая, что $\alpha = 0.95$.

In [73]:
```
sigma_0 = 1 / (2 * (sps.norm.ppf(0.5 - 0.95 / 2)))
print(abs(sigma_0))
print(sigma_0**2)
```

```
0.255106728462
0.0650794429068
```

Байесовская оценка : $\hat{\theta} = \dfrac{\frac{a_0}{\sigma_0^2} + \sum X_i}{\frac{1}{\sigma_0^2} + n},$

Оценка максимального правдоподобия : $\hat{\theta}_{\text{МП}} = \overline{X}$

Сгенерируем выборку $X_1, \ldots, X_{100}$ из стандартного распределения Коши - $Cauchy(0, 1)$:

In [74]:
```
N = 100
sample = sps.cauchy.rvs(loc=0, scale=1, size=N)
```

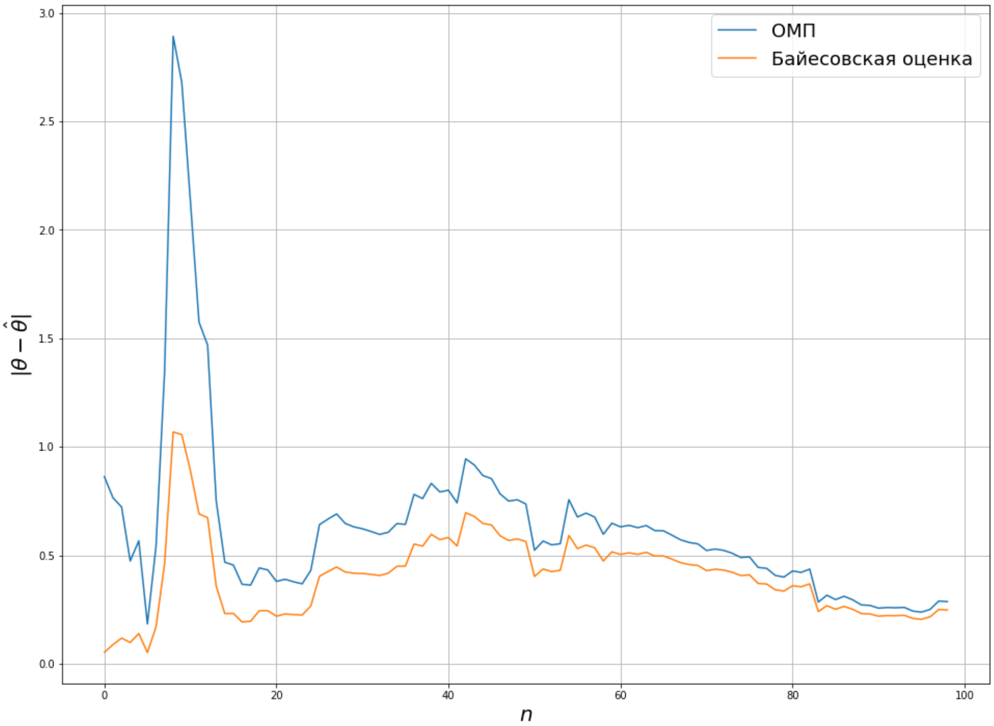
Построим график модуля отклонения оценки от истинного значения параметра $\theta = 0$:

In [75]:
```
theta = np.zeros(N - 1)

# Вычисляем ОМП
mle = [np.average(sample[:n]) for n in range (1, N)]

# Вычисляем Байесовскую оценку
bayes = [np.sum(sample[:n]) / (1 / sigma_0**2 + n) for n in
range (1, N)]

plt.figure(figsize=(16, 12))
plt.plot(abs(mle - theta), label='ОМП')
plt.plot(abs(bayes- theta), label='Байесовская оценка')
plt.xlabel(r'$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel(r'$| \theta - \hat{\theta}|$', fontsize = 20)
plt.legend(fontsize = 18)
plt.grid()
plt.show()
```



Вывод :

Из графика видно, что байесовская оценка ведёт себя лучше оценки максимального правдоподобия.
Поскольку мы изначально брали выборку из распределения Коши, которое не имеет матожидания, а потом рассматривали это как модель $N(\theta, 1)$, то неудивительно, что полученные оценки очень плохие.