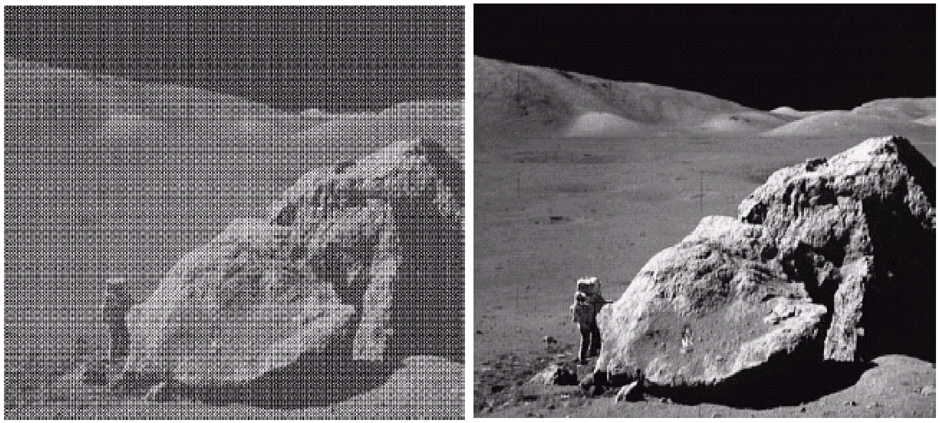
第八章
图像复原

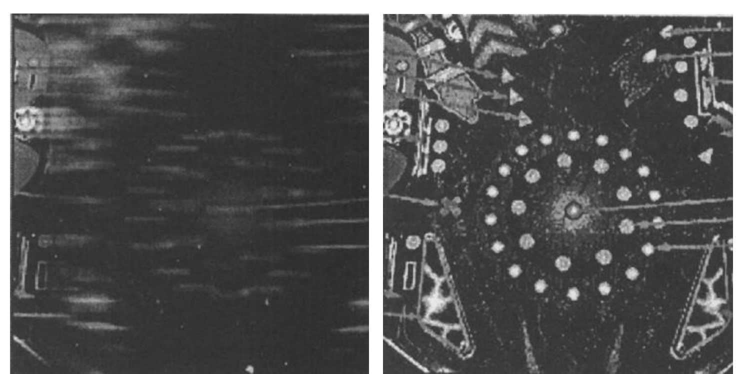
常见产生退化的图像示例



条带

湍流

离焦、畸变等



运动

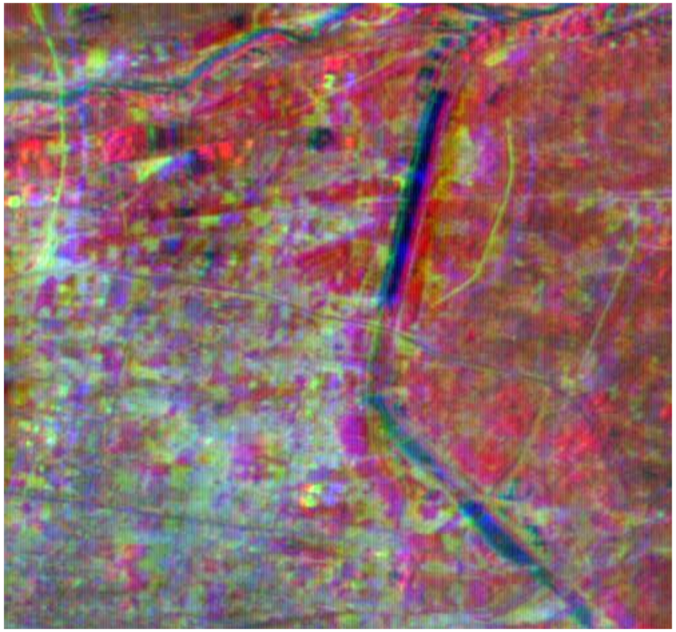
图像复原（Restoration）

目的在于消除或减轻在**图像成像过程中造成的图像品质下降即退化现象**，恢复图像的本来面目，图像复原是图像处理的重要内容

关键技术：成像过程模型化

复原前

复原后

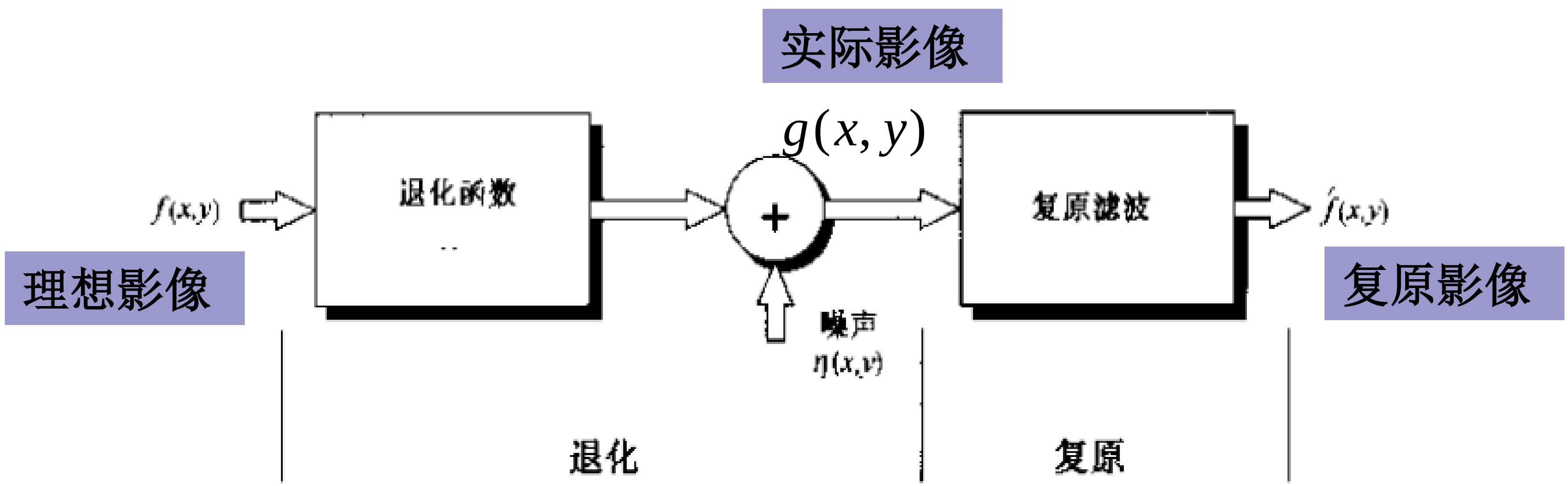


主要内容

- 图像退化的数学模型
- 建立退化函数：运动模糊复原方法
- 逆滤波和维纳滤波复原方法

一、 图像退化的数学模型

- 图像的退化和复原模型如下图所示。图像的退化由成像过程的退化函数和噪声n(x, y)两部分引起。



通用图像退化模型

建立退化函数，确定函数关系

以光学成像系统为例，建立图像退化的数学模型

光学系统是**空间不变线性系统**

什么是线性系统

$$\begin{cases} \sigma[af_1(x,y)+bf_2(x,y)]=\sigma[af_1(x,y)]+\sigma[af_2(x,y)] & \text{叠加性} \\ \sigma[af_1(x,y)]=a\sigma[f_1(x,y)] & \text{均匀性} \end{cases}$$

f（x， y）是激励函数，（输入）；

g（x， y）是系统的响应（输出）。

- 线性系统的叠加性能可以使一个复杂的激励如果能分解成多个基元激励的线性组合，那么总响应可以看成各个基元激励响应的线性组合

什么是空间不变系统

对于任意的 $f(x,y)$ α,β

具有输入输出关系 $g(x,y)=\sigma[f(x,y)]$

如果 $\sigma[f(x-\alpha,y-\beta)]=g(x-\alpha,y-\beta)$

系统称为位置不变系统（或空间不变系统），这个定义说明光学系统上任一点的响应只取决于该点的输入值，而与该点的位置无关。

复杂f（x，y）经过一个线性、位不变系统后的响应是？

复杂的f（x，y）分解成多个基元激励的线性组合

- 一个最简单的基元函数就是脉冲函数（δ函数），具有筛选性

$$\delta(x,y)=\begin{cases}\infty & x=0, y=0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\delta(x-\alpha,y-\beta)=\begin{cases}\infty & x=\alpha, y=\beta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta$$

权重因子

$$g(x,y)=\sigma[f(x,y)]$$
$$=\sigma[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta]$$

如果σ是线性算子，将相加特性扩展为积分，则

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma[f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)]d\alpha d\beta$$

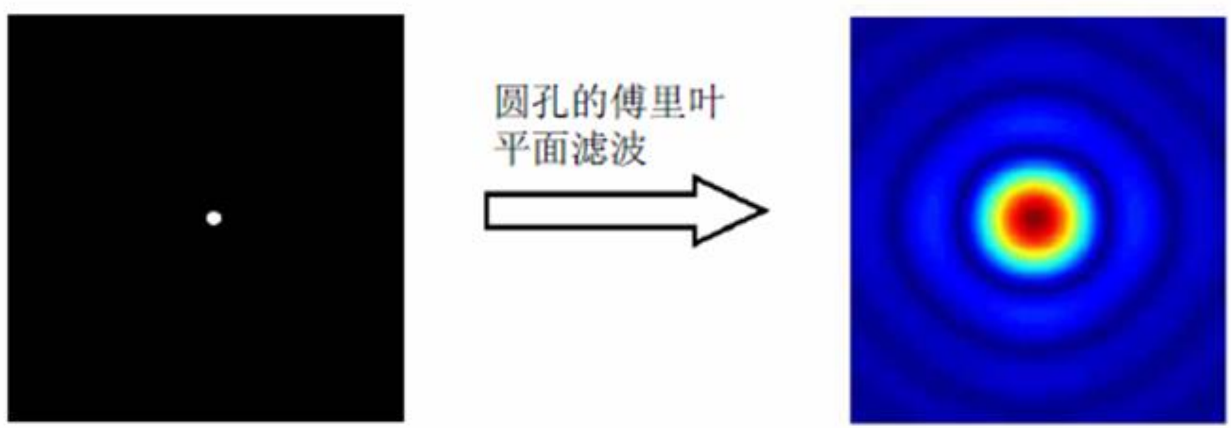
$f(\alpha,\beta)$独立于x, y ，使用均匀性, 可得出

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\sigma[\delta(x-\alpha,y-\beta)]d\alpha d\beta$$

$$h(x,\alpha,y,\beta)=\sigma[\delta(x-\alpha,y-\beta)]$$

称为系统的冲激响应（系统的脉冲响应函数）。在光学系统中，冲激为一光点，具有爱里斑的特性。

所以 $h(x,\alpha,y,\beta)$ 称为点扩散函数（PSF-Point-Spread Function），



线性系统可由其冲激响应来表示

在位置不变的情况下，可得

$$\sigma[\delta(x-\alpha,y-\beta)]=h(x-\alpha,y-\beta)$$

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\, h(x-\alpha,y-\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

对于任意输入f，已知线性系统的冲激响应，它的响应g是冲激响应和输入函数的简单卷积。

所有的物理光学系统在一定程度上模糊（扩散）光点，模糊程度由光学部件的质量决定

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha,\beta)\, h(x,\alpha,y,\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

Fredholm积分。是线性系统理论的核心

输入图像f（x， y）产生一幅退化图像g（x， y）。

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+n(x,y)$$

图像退化的数学模型

图像复原的目的就是获得关于原始图像的近似估计 $\hat{f}(x,y)$ 使其尽可能接近原始图像。主要方法是基于不同的图像的复原滤波器

傅立叶变换后 $$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

H（u，v）系统的传递函数

Origin $f(x, y)$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$w(x, y)$

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(a)

Padded f

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b)

Initial position for w

1	2	3	0	0	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0	0	0
7	8	9	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c)

Full correlation result

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	9	8	7	0	0	0
0	0	0	6	5	4	0	0	0
0	0	0	3	2	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(d)

Cropped correlation result

0	0	0	0	0
0	9	8	7	0
0	6	5	4	0
0	3	2	1	0
0	0	0	0	0

(e)

Rotated w

9	8	7	0	0	0	0	0	0
6	5	4	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(f)

Full convolution result

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	3	0	0	0
0	0	0	4	5	6	0	0	0
0	0	0	7	8	9	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

(g)

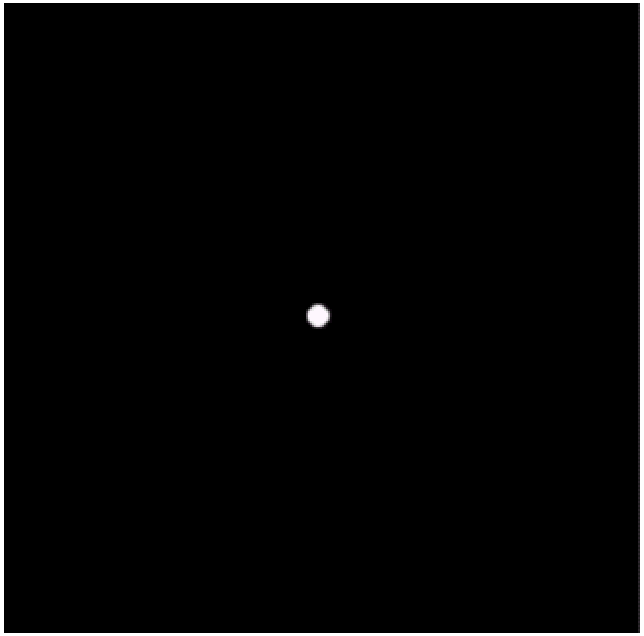
Cropped convolution result

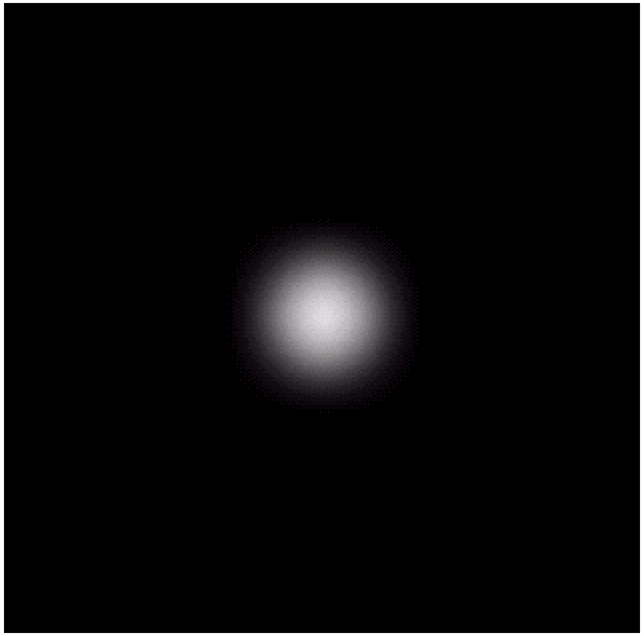
0	0	0	0	0
0	1	2	3	0
0	4	5	6	0
0	7	8	9	0
0	0	0	0	0

(h)

二、 计算退化模型和运动模糊复原方法

- 试验法





$$H(u,v)=\frac{G(u,v)}{A}$$

A为冲激强度，理想冲激的傅立叶变换

估计法

- 退化模型基于大气湍流的物理特性。

$$H(u,v)=e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

- 大气湍流模型
- 1）可忽略的湍流，

剧烈湍流，k=0.0025

中等湍流，k=0.001;轻微湍流k=0.00025

计算法

运动（匀速）模糊的退化模型和复原方法

- 运动模糊：拍摄正在做匀速运动的物体，使被摄物体在曝光期间内相对像面产生位移，使像出现模糊。

- 假设物面函数f(x,y)(理想像)相对成像系统有一移动，令$x_0(t)$和$y_0(t)$分别是景物在x,y方向运动分量，T是采集时间长度。那么忽略其它因素，实际采集到的由于运动而造成的模糊图像g(x,y)为：

$$g(x,y)=\int_0^T f[x-x_0(t),y-y_0(t)]dt$$

(8-1)

$$x_0(t)=\frac{a}{T}t$$

它的傅立叶变换可以表示为：

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy \\
&= \int_{0}^{T}[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f[x-x_0(t),y-y_0(t)]\exp[-j2\pi(ux+vy)]dxdy]dt \\
&= F(u,v)\int_{0}^{T}\exp\{-2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]\}dt
\end{aligned}
$$

- 如果定义：

$$
H(u,v) = \int_{0}^{T}\exp\{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]\}dt \qquad (8\text{-}2)
$$

则上式可写成我们熟悉的形式：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) \qquad (8\text{-}3)$$

- 那么如果知道了运动分量x_0y_0就可以代入公式求出H(u, v).

- 点扩散函数的概念，可以理解为物（理想点）经过成像线性系统后成的像，反应了成像系统成像特性所以公式中的H(u, v)就是运动造成模糊情况下的点扩散函数对应的传递函数。

举例说明运动模糊的复原方法

这里介绍两种方法，一种是在**空间域方法**，作卷积运算，另一种是**频域方法**，滤波复原图像f(x, y).

- 为讨论方便，假设物体的运动状态为：仅在x方向有一均匀的直线运动，则$y_0(t)=0$。且令在曝光时间T内的总移动量为a，物体沿x方向的变化量可表示为:

$$x_0(t) = \frac{a}{T}t \qquad (8\text{-}4)$$

空域方法：

由于$y_0(t)=0$, 将（8-1）式简化成如下形式：

$$g(x)=\int_0^T f(x-x_0(t))dt$$

$$=\int_0^T f(x-\frac{a}{T}t)\quad dt$$

如果令t'=at/T, 上式可写成：

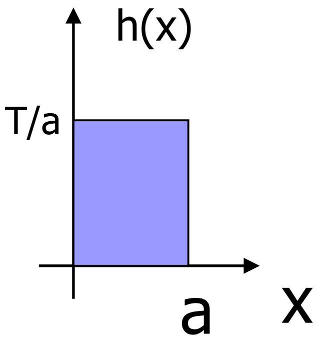
$$g(x)=\int_0^a f(x-t')\frac{T}{a}dt'=f(x)*h(x)$$

$$h(x)=T/a \qquad\qquad 0\le x\le a$$

它就是沿x方向造成运动模糊的点扩散函数，h(x)的完整形式可表示为：

$$h(x)=\begin{cases} T/a & 0\le x\le a \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

可见，点扩散函数是一个矩形



运动物体沿x方向移动时的图像退化模型。

运动模糊复原：

- 选择一个函数m(x)，使其与模糊图像g(x)卷积得到真实图像f(x)的最佳值。所以有：

$$\hat{f}(x) = g(x) * m(x) = f(x) * h(x) * m(x)$$

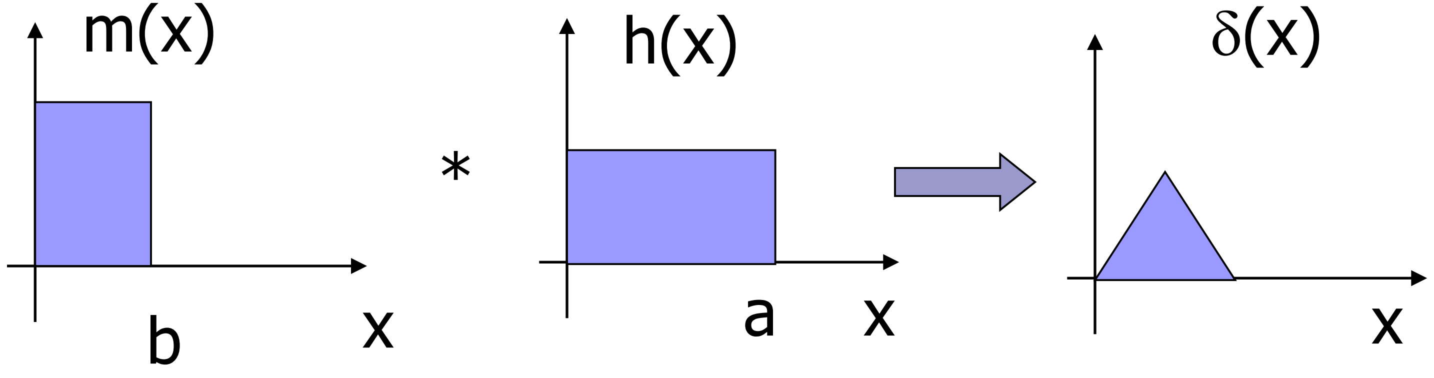
- 如果所选的m(x)与h(x)的卷积结果能构成一δ函数，那么由δ的筛选性，能得到输入图像的最佳解，即：

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

$$= f(x) * \delta(x)$$

如何选取函数m(x)

- 要想选择一个函数使与矩形函数h(x)卷积成为δ函数，这需要利用对函数卷积结果的先验知识。
- 如果将形状为三角形的脉冲函数，近似为δ函数，那么m(x)也应是一个矩形函数。如图所示



不做傅立叶变换

成像时，当像面不在理想的焦平面上，产生像面对成像系统离焦。这时，一个点光源的物，在象面上会弥散成一个圆盘状。这时，点扩散函数h(x, y)可表示为：

$$h(x,y)=\begin{cases} h_0 & \sqrt{x_0^2+y_0^2}\le r_0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中，h_0表示为光强。R_0是模糊圆的半径。

消除匀速直线运动造成的模糊示例

- 下图是给出的一个恢复示例。图（a）为1幅由于摄象机与被摄物体之间存在相对匀速直线运动而造成模糊的256*256图像。这里在拍摄期间物体水平移动的距离为图像在该方向尺寸的1/8，即32像素，这种模糊的图像可借助公式进行恢复。图(b)是取移动距离为32而得到的结果，而图（c）（d）的距离均不是32，所以恢复效果比较差

（a）　（b）　（c）　（d）

消除匀速直线运动造成的模糊

另例：

- 原图

- 复原图


龙同步带有限公
LONG SYNCHRONOUS BELT CO
龙同步带有限公
LONG SYNCHRONOUS BELT CO

频域方法

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)+n(x,y)$$

傅立叶变换后

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)+N(u,v)$$

例如：前面的运动模糊的点扩散函数h已知，傅立叶变换后 **传递函数**

$$H(u)=\frac{T}{(\pi ua)}\sin(\pi ua)e^{-j(\pi ua)}$$

三、逆滤波和维纳滤波复原方法

逆滤波

根据退化模型的频域表示法，可以得到如下形式：

$$\hat{F}(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)} \qquad u,v = 0,1,...M-1$$

上式给出的恢复方法就称为逆滤波。

将上式求反变换就是恢复后的图像：

$$\hat{f}(x,y) = \Im^{-1}[\hat{F}(u,v)] = \Im^{-1}[\frac{G(u,v)}{H(u,v)}] \qquad x,y = 0,1,...,M-1$$

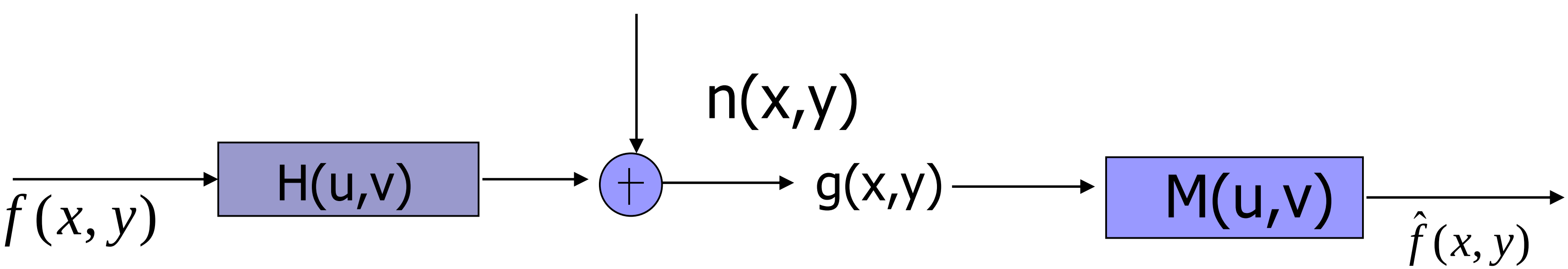
问题：

上式中如果H(u,v)在uv平面上取零或很小的值，就会带来计算上的困难，另外噪声还会带来更为严重的问题：

带入噪声上式为：

$$\hat{F}(u,v)=F(u,v)+\frac{N(u,v)}{H(u,v)} \qquad u,v=0,1,\ldots M-1$$

如果H(u, v)很小或为零，N(u, v)/H(u, v)就会使恢复结果与理想结果有很大的差距。一般情况下逆滤波器并不正好是1/H(u, v)，而是u, v的某个函数，记为M(u, v)。M(u. v)常称为恢复转移函数，这样图像退化和恢复模型可用下图表示：



常见的方法是取M(u, v)为如下表达式：

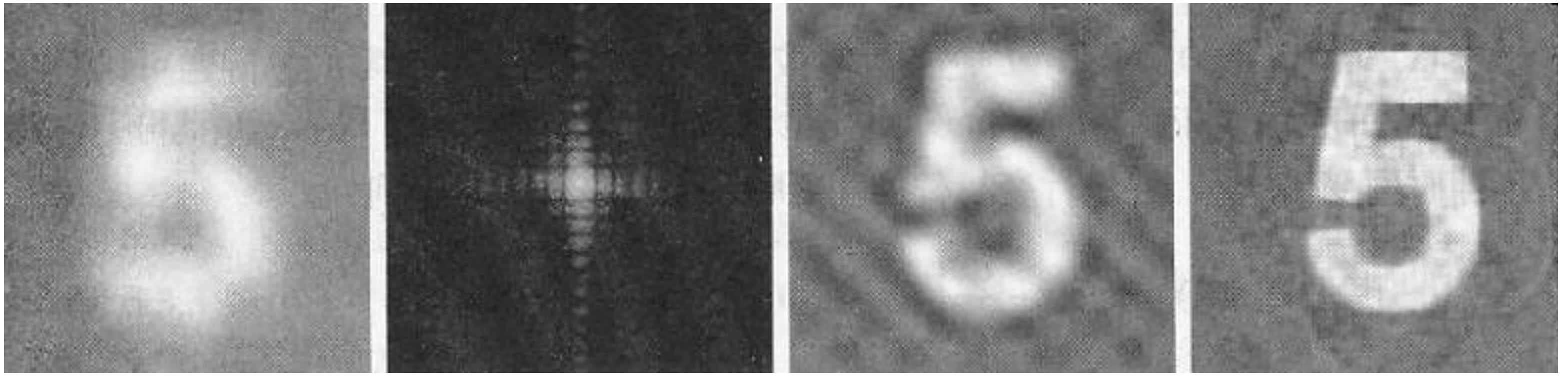
$$M(u,v)=\begin{cases}1/H(u,v) & if\ u^2+v^2\le w_0^2\\ 1 & if\ u^2+v^2>w_0^2\end{cases}$$

- 其中w_0的选取原则是将H(u, v)为零的点除去。这种方法的缺点是恢复后图像的振铃效应较明显。一种改进的方法是取M(u, v)为：

$$M(u,v)=\begin{cases}k & if\ H(u,v)\le d\\ 1/H(u,v) & other\end{cases}$$

举例：

- 图a是一幅用低通滤波器对理想图像进行模糊得到的模拟退化图像。所用低通滤波器的傅立叶变换如图b所示。根据上面两个的恢复公式，得到结果分别为图c和图d。显然，图c中振铃效果很明显。



（a）　（b）　（c）　（d）

图像恢复

维纳滤波（Wiener Filtering）

- 维纳滤波器是指使复原图像与原图像之间的均方误差最小的滤波器。具有二维传递函数的维纳滤波器：

$$\frac{H^*(u,v)P_f(u,v)}{|H(u,v)|^2 P_f(u,v)+P_n(u,v)}$$

$$\hat{F}(u,v)=\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2+P_n(u,v)/P_f(u,v)}G(u,v)$$

P_f和P_n分别为信号和噪声的功率谱

模型的能量表示

- 如果把图像作为二维随机过程的一个样本，定义它的自相关的傅立叶变换为它的功率谱密度，简称**功率谱**。

用Pg表示为已退化图像的功率谱，P_f为理想图像的功率谱，系统传递函数用H(u, v)表示，则有下式成立：

$$P_g = P_f \, | \, H(u,v) \, |^2$$

此方法的特点：

- （1）当$H(u,v) \longrightarrow 0$或幅值很小时，分母不为零，不会出现逆滤波方法中严重的运算误差。
- （2）当$P_n \longrightarrow 0$时，维纳滤波器复原方法就是逆滤波复原方法。
- （3）当$P_f \longrightarrow 0$时，$\hat{F}(u,v) \longrightarrow 0$，这表示图像无有用信息存在，我们不能从完全是噪声的信号中恢复有用信息。
- （4）对于受噪声影响的图像，维纳滤波的效果好于逆滤波的。

举例：

- 下图 a中一列是将1幅正常图像与平滑函数

$$h(x, y) = \exp[\sqrt{(x^2 + y^2)} / 240]$$

卷积产生模糊，再迭加零均值，方差分别为8，16，32的

高斯随机噪声而得到的1组待恢复图像。

图b所示一列是

用逆滤波方法分别进行恢复得到的结果。

图c 所示一列是
采用维纳滤波方法分别进行恢复得到的结果。比较各图，克制维纳滤波在图像受噪声影响时效果比逆滤波要好，而且噪声越强优势越明显。

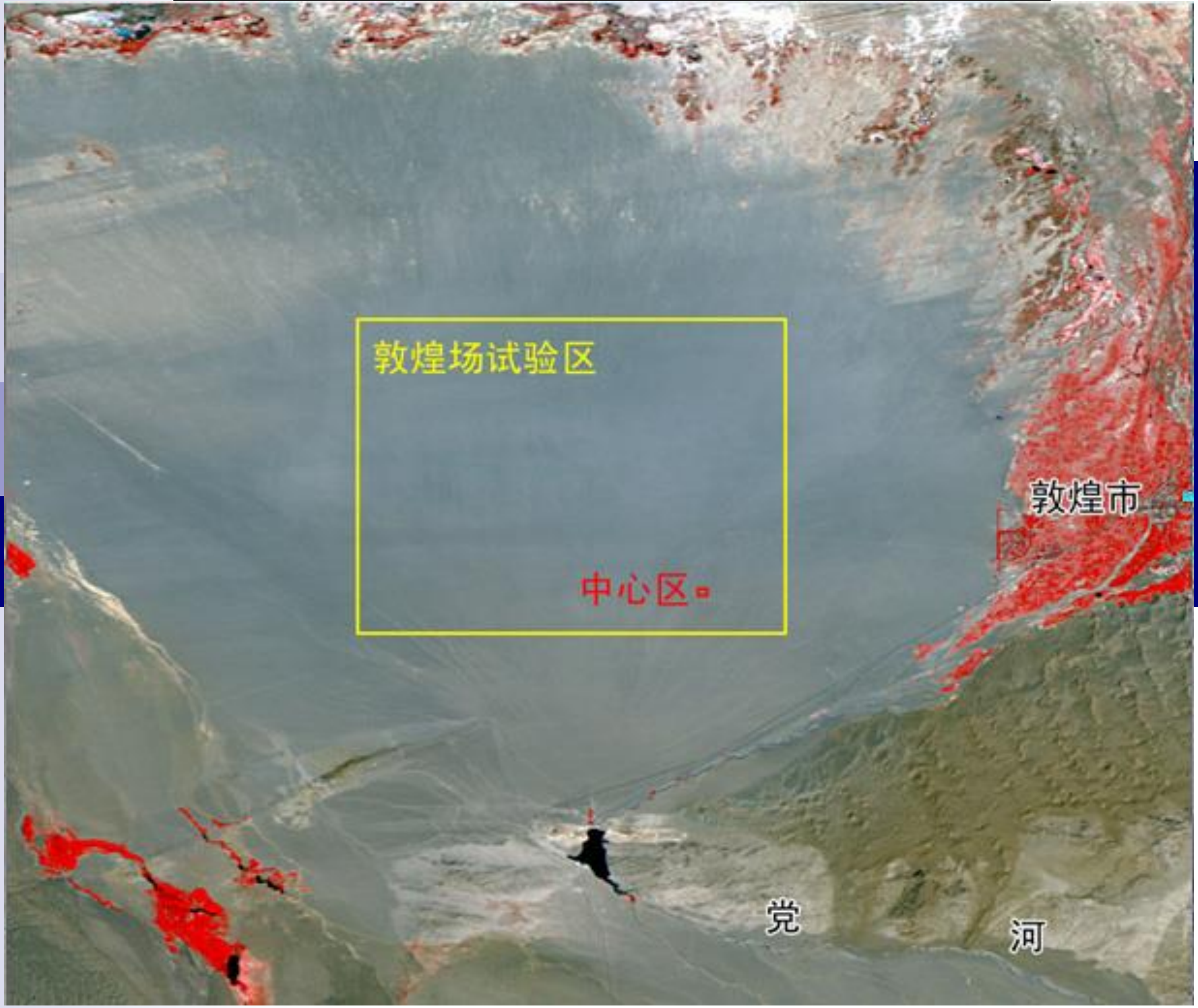


(a) (b) (c)

总结：

- 由于图像复原技术是将**图像成像过程模型化**，然后根据这个模型采用相反的过程以得到原始图像，因此，图像恢复要根据一定的**图像退化模型**来进行，这实际上给复原带来了很大困难，因为我们**有时无法真正了解图像退化的原因并建立模型**，只能采用相关方法进行估计，所以，目前图像复原技术仍然是数字图像处理技术中的重要内容。

我国的定标场

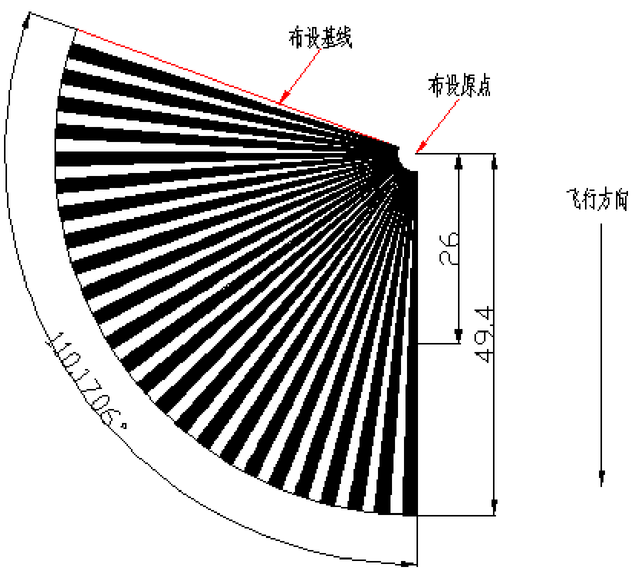


无人机定标场

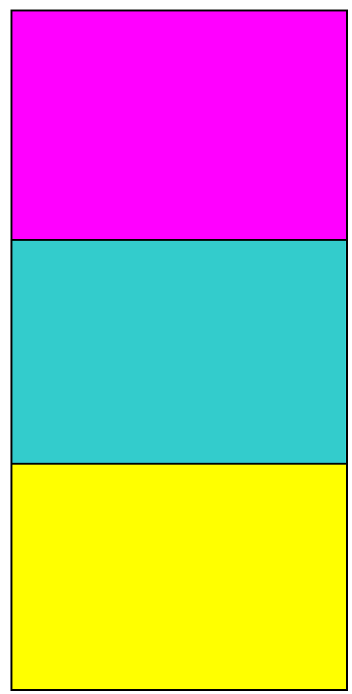
拟建 机场跑道
定标场（北方）靶标区示意图
光学靶标区
载荷辐射与MTF定标验证靶标
几何空间分辨率定标验证靶标
光谱定标靶标
厂部
扩展靶标区
有源定标器
其它SAR靶标布设参照南方场
炮台
内蒙古自治区巴彦淖尔市明安定标场（北方场）
北纬40° 51′ 26.44″
东经109° 37′ 25.94″
50 米
比例尺: 1:1000

辐射特性靶标的设计规划

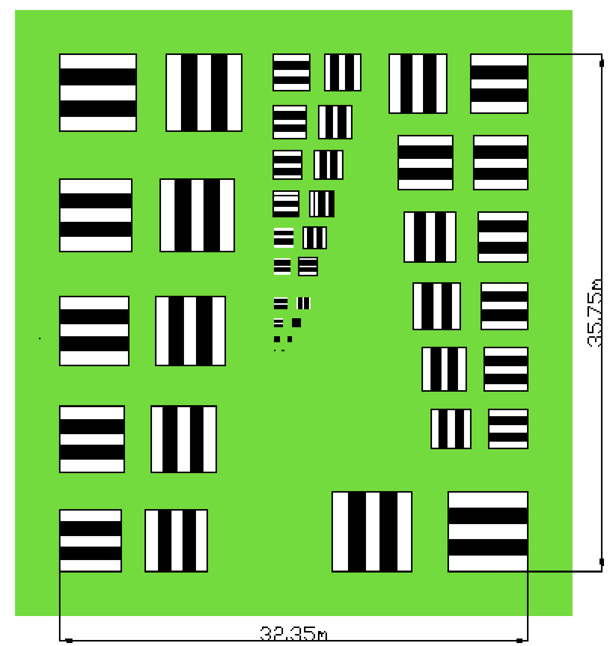
圆点标　　　　十字标示意图



扇形靶标

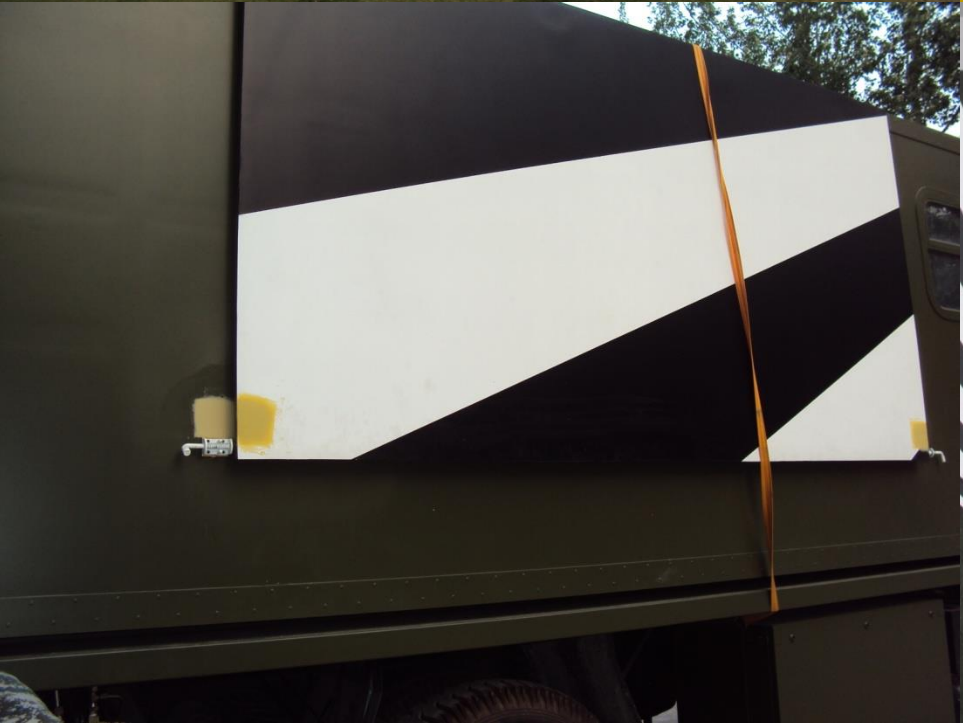


光谱特性靶标



条形靶标






附：计算退化模型

- 一维函数

在退化模型中，H是线性系统，图像经过线性系统后产生退化，所以计算退化模型就是要求出系统H的数学模型。

在卷积定理的阐述中，曾经指出图像经过一个线性系统后的结果是图像函数与线性系统的卷积分。

$$g(x,y)=f(x,y)*h(x,y)$$

傅立叶变换后

$$G(u,v)=F(u,v)H(u,v)$$

退化模型的离散化

在计算退化模型中引入的循环矩阵是满足卷积离散化的矩阵形式（根据卷积公式仔细分析此循环矩阵）。

循环矩阵的确定

- 假设对2个函数f(x)和h(x)进行均匀采样（离散化），结果分别放在尺寸分别为A，B的两个数组中。对f(x)，x的取值范围是0，1，2，…,A-1,对h(x)，x的取值范围是0，1，2，…B-1。借助卷积计算g(x)。为了避免卷积的各个周期重叠（设每个采样函数的周期为M），我们取M≥A+B-1.并将不足处用零扩展补齐。如果用$f_e(x)$和$h_e(x)$表示扩展的函数，它们的卷积为：

$$g_e(x)=\sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)h_e(x-m) \qquad x=0,1,\ldots M-1$$

因为$f_e(x)$和$h_e(x)$的周期为M，所以$g_e(x)$的周期也为M。如用矩阵形式表示，上式可写为：

$$g = Hf = \begin{bmatrix} g_e(0) \\ g_e(1) \\ \cdots \\ g_e(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & \cdots & h_e(-M+1) \\ h_e(1) & h_e(0) & \cdots & h_e(-M+2) \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & \cdots & h_e(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \cdots \\ f_e(M-1) \end{bmatrix}$$

- 根据$h_e(x)$的周期可知 $h_e(x) = h_e(x+M)$ ，所以上式中的H可以进一步写成

$$H=\begin{bmatrix} h_e(0) & h_e(-1) & \dots & h_e(1) \\ h_e(1) & h_e(0) & \dots & h_e(2) \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ h_e(M-1) & h_e(M-2) & \dots & h_e(0) \end{bmatrix}$$

- 这里上式为循环矩阵（每行 最后1项等于下1行最前1项，最下1行最后1项等于第1行最前1项）

例：1- D退化系统计算示例

退化系统是由H决定的，这里H是1个循环矩阵。对A=4和B=3，根据前面的讨论可取M=6.这时需要在f(x)后补2个为零的元素，在h(x)后补3个为零的元素。所得H为6*6的矩阵。对于x=3，4，5，有$h_e(x)=0$，x=0，1，2，有$h_e(x)=h(x)$。所以

可得：

$$H=\begin{bmatrix} h(0) & & & & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & & & & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & & & \\ & h(2) & h(1) & h(0) & & \\ & & h(2) & h(1) & h(0) & \\ & & & h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$$

- 其中，未列出项为0。
- 将以上结果可以推广应用到2-D, 则有：

$$f_e(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & 0\le x\le A-1; and 0\le y\le B-1 \\ 0 & A\le x\le M-1 or B\le y\le N-1 \end{cases}$$

$$h_e(x,y)=\begin{cases} h(x,y) & 0\le x\le C-1; and 0\le y\le D-1 \\ 0 & C\le x\le M-1 or D\le y\le N-1 \end{cases}$$

- 对2-D情况有：

$$g_e(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n)h_e(x-m,y-n)$$

$$x=0,1,\ldots,M-1; \qquad y=0,1,\ldots,N-1$$

如　果考虑噪声，将M*N的噪声项加上，上式可写为：

$$g_e(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n)h_e(x-m,y-n)+n_e(x,y)$$

$$x=0,1,\ldots,M-1; \qquad y=0,1,\ldots,N-1$$

如果用矩阵表示，上式可写成：

$$g = Hf + n = \begin{bmatrix} H_0 & H_{M-1} & \cdots & H_1 \\ H_1 & H_0 & \cdots & H_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{M-1} & H_{M-2} & \cdots & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e(0) \\ f_e(1) \\ \cdots \\ f_e(MN-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_e(0) \\ n_e(1) \\ \cdots \\ n_e(MN-1) \end{bmatrix}$$

- 其中，每个H_i 是由扩展函数h_e（x, y）的第i行而来

$$H = \begin{bmatrix} h_e(i,0) & h_e(i,N-1) & \cdots & h_e(i,1) \\ h_e(i,1) & h_e(i,0) & \cdots & h_e(i,2) \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ h_e(i,N-1) & h_e(i,N-2) & \cdots & h_e(i,0) \end{bmatrix}$$

这里H是块循环矩阵

重点：

- 点扩散函数
- 退化模型的建立
- 滤波器的特点