채권의 이해와 분석 2

- Price, Sensitivity, and Zero-rate Curve

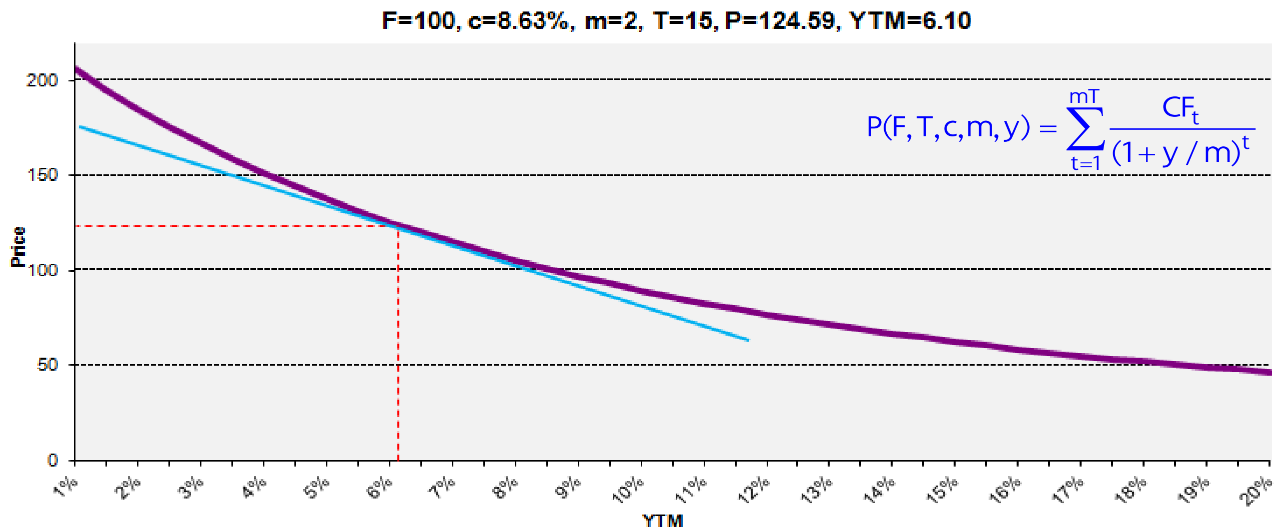
- 목 차 -

1. 채권가격 분석

(1) YTM과 채권가격의 관계

1. 채권가격=P(수익률) 공식을 통한 수익률(YTM)과 채권가격의 관계 관찰

- (예) 액면(F)=100, 만기(T)=15, 이표율(c)=8.63%, 이표주기=6개월, 시장가격(P)=124.59, YTM=6.1%



2. 수익률과 채권가격의 관계

- 채권가격과 수익률은 역의 비선형 관계
- 수익률 하락 시 채권가격 상승 폭 > 수익률 상승 시 채권가격 하락 폭 ➔ 비대칭성
- 수익률이 낮은 상태에 있을수록 수익률 변화에 따른 채권가격 변화 "폭"과 "비대칭성"은 증가

(2) 듀레이션 (Duration)

1. 금액 듀레이션 (Cash Duration)

- **정의**: CD = dP/dy. 단, P=채권가격 & y=YTM.

- 이표채의 CD: $$\frac{dP(F,T,c,m,y)}{dy} = \sum_{t=1}^{mT} CF_t \times \frac{d(1+y/m)^{-t}}{dy} = \sum_{t=1}^{mT} CF_t \times (-t) \times (1+y/m)^{-t-1} \times (\frac{1}{m})$$
$$= \frac{-1}{(1+y/m)} \times \sum_{t=1}^{mT} (\frac{t}{m}) \times \frac{CF_t}{(1+y/m)^t} = \frac{-1}{(1+y/m)} \times \sum_{t=1}^{mT} (\frac{t}{m}) \times CF_t \times DF_t$$

- $\Delta P \fallingdotseq -CD \times \Delta y$ ➔ <u>해석: 수익률이 Δy 변할 때(상승 or 하락) 채권가격의 변화(하락 or 상승)</u>

- (예) F=10,000, T=5, c=5%, m=1인 기말불 이표채의 YTM이 10%라고 할 때, 금액 듀레이션을 계산하시오.

t(첨자)	CF_t	DF_t	PV_t	$(t/m) \times PV_t$
1	500	0.9524	476	476
2	500	0.9070	454	907
3	500	0.8638	432	1,296
4	500	0.8227	411	1,645
5	10,500	0.7835	8,227	41,135
Sum			10,000	45,460
Cash Duration (= Sumx(−1)/(1+y/m))				−43,295

- $CF_t = F \times (c/m)$ for $t \neq m \times T$, $F \times (1+c/m)$ for $t = m \times T$
- $DF_t = 1/(1+y/m)^t$
- $PV_t = CF_t \times DF_t$
- YTM 25bp↓ 시, CD를 이용한 채권가격 변화 계산:
  $\Delta P \fallingdotseq -CD \times \Delta y = (-33{,}066) \times (-0.0025) \fallingdotseq +83$

(2) 듀레이션 (Duration)

2. 수정 듀레이션 (Modified Duration or Hicks Duration)

- **정의**: MD = (dP/dy)/P = CD/P
- 이표채의 MD: $\frac{dP}{dy}\times\frac{1}{P}=\frac{-1}{(1+y/m)}\times\underbrace{\sum_{t=1}^{mT}(\frac{t}{m})\times\frac{CF_t\times DF_t}{P}}=\frac{-1}{(1+y/m)}\frac{1}{P}\sum_{t=1}^{mT}(\frac{t}{m})CF_tDF_t$
  (※Duration or Macaulay Duration)
- ΔP ≒ P×MD×Δy ➔ MD×Δy의 해석: 수익률이 Δy 변할 때(증가 or 감소) 채권가격의 변화(감소 or 증가)율
- (예) 앞의 Cash Duration 예제와 동일한 조건에서, MD 및 이를 이용한 ΔP를 계산하시오.

3. PBVP (Price Value of a Basis Point)

- PVBP = CD×(0.0001) or P×MD×(0.0001) ➔ YTM 1bp 변화에 따른 채권가격(가치) 변화

4. 듀레이션의 성질

- YTM 수준이 높을수록 듀레이션은 감소
- 다른 모든 조건이 일정할 때, 만기가 길 수록 듀레이션은 체감적으로 증가
- 다른 모든 조건이 일정할 때, Coupon Rate이 높을수록 듀레이션은 감소

(3) 볼록도 (Convexity)

1. 듀레이션 민감도의 한계

- 수익률 변화(Δy)가 작은 경우에만 정확
  - 채권가격 함수는 비선형인 반면, 듀레이션 민감도(CD, MD)는 접선의 기울기(dP/dy)에 기반하여 정의되므로, 수익률 변화(Δy)가 클 수록 듀레이션을 통해 계산한 채권가격 변화(ΔP)의 오차 증가

- (예) 실제 ΔP vs. 듀레이션을 이용한 ΔP 추정치 : F=10,000, T=5, c=5%, m=1, YTM=10%인 이표채

YTM	ΔYTM	P	Actual ΔP	ΔP using Dur.	Error
1%	-9%	11,941	3,837	2,976	861
4%	-6%	10,445	2,341	1,984	357
7%	-3%	9,180	1,075	992	83
10%	0%	8,105	0	0	0
13%	3%	7,186	-918	-992	74
16%	6%	6,398	-1,706	-1,984	278
19%	9%	5,719	-2,385	-2,976	591

➔ ① ΔYTM의 크기가 클 수록 Error의 크기도 증가

② Error = Actual ΔP – Duration based ΔP > 0 :Duration은 ΔP 폭을 항상 과소하게 측정

(3) 볼록도 (Convexity)

2. 볼록도 (Convexity)

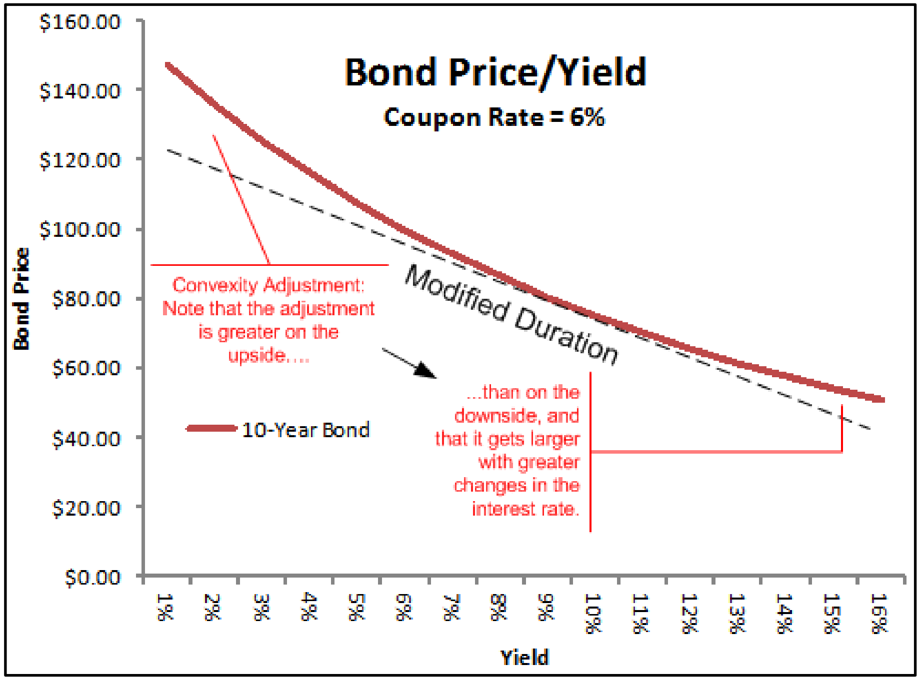
- Motivation: 듀레이션의 한계점 보완

- Taylor Expansion:

  – $$f(x)-f(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ f^{(n)}=\frac{d^n f}{dx^n}$$
  $$\approx f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

➔ $$P(y+\Delta y)-P(y)\approx P'(y)\Delta y+\frac{1}{2}P''(y)(\Delta y)^2$$

➔ $$\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}\approx\frac{P'(y)}{P(y)}\Delta y+\frac{1}{2}\frac{P''(y)}{P(y)}(\Delta y)^2$$



- 정의: $C = (d^2P/dy^2)/P$

- Convexity에 의한 ΔP ≒ ½×P×C×$(\Delta y)^2$

➔ ½×Convexity×$(\Delta y)^2$ 의 해석: 수익률이 Δy 변화(증가 or 감소)할 때 Convexity에 의한 채권가격 변화(증가)율

(3) 볼록도 (Convexity)

2. 볼록도 (Convexity, 계속)

- 이표채의 Convexity: $\frac{d^2P}{dy^2}\times\frac{1}{P}=\frac{1}{(1+y/m)^2}\times\sum_{t=1}^{mT}\frac{t}{m}\times\frac{t+1}{m}\times\frac{CF_t\times DF_t}{P}=\frac{1}{(1+y/m)^2}\frac{1}{P}\sum_{t=1}^{mT}\frac{t}{m}\frac{(t+1)}{m}CF_tDF_t$

- (예) F=10,000, T=3, c=8%, m=1인 기말불 이표채의 YTM이 10%라고 할 때, Convexity를 계산하시오.

t(첨자)	t/m	(t+1)/m	CF_t	DF_t	PV_t	(t/m)×PV_t	(t/m)×(t+1)/m×PV_t
1	1	2	800	0.9091	727	727	1,455
2	2	3	800	0.8264	661	1,322	3,967
3	3	4	10,800	0.7513	8,114	24,343	97,370
Sum					9,503	26,392	102,792
Convexity (=Sum÷$(1+y/m)^2$÷P)							8.94

➔ 이 과정을 일반화하여 Convexity를 계산하는 R 함수를 작성하시오.

3. 볼록도의 성질

- 수익률이 하락할수록 채권의 볼록성은 증가
- 다른 모든 조건이 일정할 때, 이표율이 낮을수록 채권의 볼록성은 증가

(3) 볼록도 (Convexity)

4. 듀레이션과 Convexity를 이용한 채권가격 변화 예측

• Δy 만큼의 YTM 변화에 따른 채권가격 변화율: $\frac{\Delta P}{P} \approx MD \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot C \cdot (\Delta y)^2$

• (예) 앞 쪽 예제에서 YTM 1% 하락/증가 시, 듀레이션과 Convexity를 모두 이용하여 ΔP를 예측하시오.

5. 유효 듀레이션 (Effective Duration), 유효 볼록성 (Effective Convexity)

• $ED = \frac{ED^{+} + ED^{-}}{2}$, where $ED^{+} = \frac{P(y+\Delta y) - P(y)}{\Delta y} \frac{1}{P(y)}$ and $ED^{-} = \frac{P(y) - P(y-\Delta y)}{\Delta y} \frac{1}{P(y)}$

• $EC = \frac{P(y+\Delta y) - 2P(y) + P(y-\Delta y)}{(\Delta y)^2} \frac{1}{P(y)}$

• 필요성:

– 상당히 큰 Δy에 대한 채권가격 변화를 분석하는 경우

– 옵션부채권, 구조화채권 등 채권가격을 공식이 아닌 복잡한 방법을 통해야만 얻을 수 있는 경우

• (예) 앞 쪽 예제에서 YTM 1% 하락/증가 시, 유효 듀레이션을 계산하시오.

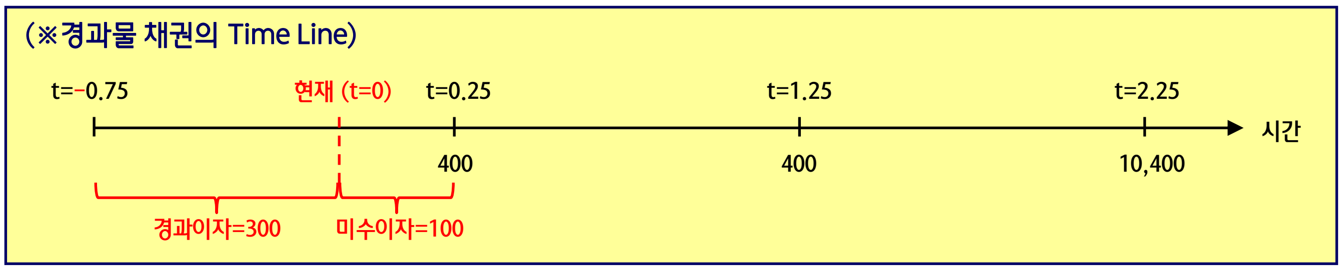
2. 채권가격 분석: 일반화

(1) 경과물 채권의 가격 분석

1. 경과이자 (Accrued Interest)

- **정의**: 현재 이자부리 기간 중 이미 경과된 기간에 대한 이자

- **(예)** F=10,000, c=4%, T=3, 연1회 이자지급, YTM=5%. 발행 후 9개월 경과한 상태.



- Q1> 현재 시점에 채권을 매도한다고 할 때, 경과이자는 누구의 것인지? ➔ 매도자

- Q2> 현재 시점에 채권가격 계산 시, 경과이자를 포함해야 하는지? ➔ 가격의 정의에 따라 다르다.

  ① Dirty(or Full) Price: 경과이자 포함 YES (한국)

  ② Clean Price: 경과이자 포함 NO (미국)

  Dirty Price = Clean Price + 경과이자

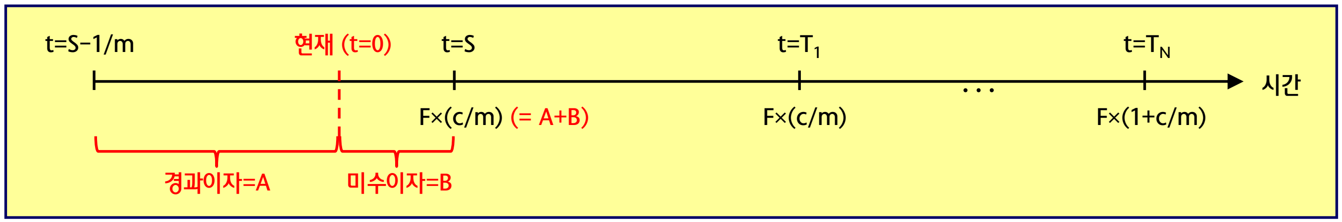
- Q3> 현재 시점에 채권가격 계산 시, Short period의 할인(discounting)은 어떻게 하는지? ➔ 단리 할인

2. 채권가격 분석: 일반화

(1) 경과물 채권의 가격 분석

2. 경과이자를 고려한 채권가격, 민감도 계산

- 경과물 이표채의 Time Line:



- Dirty Price:

- Clean Price:

- (예) 발행일=2017.08.09, 만기=3년, 원금=10,000, 이표율=10%(Quarterly 후급)인 이표채가 2017.08.14에 거래되었다. YTM=12.36%라고 할 때, 거래가격을 Dirty Price로 각각 계산하시오. (소수점 이하 반올림)

  ➔ 답: 9,431 (※경과이자 = 10,000×10%/4×5/92 = 14)

2. 채권가격 분석: 일반화

(2) 채권가격의 금리 민감도

1. Malkiel의 채권가격 정리 (B.G. Malkiel)

- 옵션 조항이 없는 고정이자 이표채 or 무이표채의 가격과 수익률 사이에는 아래의 관계가 성립

① 채권가격은 수익률과 반대 방향으로 움직인다.

② 채권의 잔존기간이 길수록 동일할 수익률 변동에 대한 가격 변동 폭은 커진다.

③ 채권수익률 변동에 의한 채권가격 변동은 만기가 길어질수록 증가하나, 그 증가율은 체감한다.

④ 채권수익률 하락으로 인한 가격 상승은 동일한 폭의 채권수익률 상승에 의한 가격 하락 보다 크다.

⑤ 이표율이 높을수록, 이자지급 주기가 짧을수록 동일 수익률 변동에 대한 가격 변화율은 작아진다.

2. 포트폴리오 Duration, Convexity

- CD(A+B) = CD(A) + CD(B)
- PVBP(A+B) = PVBP(A) + PVBP(B)
- MD(A+B) = $w_A \cdot$MD(A) + $w_B \cdot$MD(B), where w_A = P(A)/P(A+B) and w_A = P(A)/P(A+B)
- C(A+B) = $w_A \cdot$C(A) + $w_B \cdot$C(B), where w_A = P(A)/P(A+B) and w_A = P(A)/P(A+B)

2. 채권가격 분석: 일반화

(3) 채권 투자수익 분석

1. 채권 투자 수익률의 분해

- 채권 투자수익 = 자본수익(Capital Gain) + 이자수익(Interest Gain) + 재투자 수익 (Reinvestment Gain)

(주식 투자수익 = 자본수익(Capital Gain) + 배당수익(Dividend Gain) + 재투자 수익 Reinvestment Gain))

2. YTM 계산 근사 공식

- $YTM \approx \dfrac{(F-P)/T + F \cdot c}{(F+P)/2}$, where F = Notional Amount,

  P = Markt Price,

  T = Time to Maturity in years,

  c = Coupon Rate (annualized).

- 해석:

  ① (F + P)/2: 현재부터 만기까지의 채권의 평균 가격

  ② (F – P)/T: 만기까지 보유 시 얻게되는 연평균 자본수익

  ③ F·c: 연간 이자수익

(1) Zero (or Zero Rate) Curve

1. YTM의 한계점

- 모든 만기의 YTM이 동일하다고 가정 (Flat Yield Curve)
- 금리 변동 시 모든 만기의 YTM이 동일하게 움직인다고 가정 (Parallel Shift of Yield Curve)
- 채권의 중간 이자에 대한 재투자 수익률로 해당 채권의 YTM을 가정

2. Zero Rate (or Zero-coupon Rate)

- 정의: 중간 현금흐름이 없는 채권(무이표채) or 단일 현금흐름을 할인하는데 적용되는 할인율
- 할인계수(Discount Factor): 미래 현금흐름을 현재가치로 환산할 때 곱해지는 계수

– $DF_T = \dfrac{1}{(1+R_T \cdot T)}$ ← 단리(Simple Add-on) 이자율: $V(T) = V(0)\times(1 + R_T T)$

$= \dfrac{1}{(1+R_T^{'} / m)^{m \cdot T}}$ ← 연 n회 이자지급 복리 이자율: $V(T) = V(0)\times(1 + R'_T/m)^{mT}$

$= e^{-r_T \cdot T}$ ← 연속복리(Continuous Compounding) 이자율: $V(T) = V(0)\times e^{r_T T}$

(1) Zero (or Zero Rate) Curve

3. Zero Curv 붓스트랩 (Bootstrap)

- **개념**: 채권 시장가격(or Yield Curve)으로부터, 단기→장기 순서로 만기별 Zero Rate(or DF)을 역산하는 과정

  ※비단 채권 뿐 아니라, 주식(배당), 스왑, 옵션 등 다른 금융상품에도 적용 가능한 일반적인 절차임.

- (예) 채권 Yield Curve로 부터 Zero Curve를 Bootstrap

<만기별 채권가격(※액면=100, 연2회 이자 지급 가정)>

시장 정보			Bootstrap 결과	
만기(년)	채권 가격	연간 쿠폰	DF	Zero Rate
0.5	94.9	0	0.9490	10.4693%
1.0	90.0	0	0.9000	10.5361%
1.5	96.0	8	0.8520	10.6809%
2.0	101.6	12	0.8056	10.8080%

<만기별 DF 및 Zero Rate(※r, 연속복리 Yield Convention)>

① T = 0.5Y : $DF_{0.5Y} = \frac{94.9}{100} = 0.9490 = e^{-r_{0.5Y}\times 0.5}$. ➔ $r_{0.5Y} = 10.4693\%$.

② T = 1Y : $DF_{1Y} = \frac{90.0}{100} = 0.9000 = e^{-r_{1Y}\times 1.0}$. ➔ $r_{1Y} = 10.5361\%$.

(※*Zero Rate의 Yield Convention 선택은 자유롭게 할 수 있으나, 계산의 편의성 때문에 연속복리 방식이 가장 널리 사용됨.*)

③ T = 1.5Y :

평가일(= O/N) — 3M — 6M — 9M — 1Y — 1Y3M — 1Y6M → 만기

6M: 4, 1Y: 4, 1Y6M: 4+100

(96.0 = 4×$DF_{0.5Y}$ + 4×DF_{1Y} + 104×$DF_{1.5Y}$)

➔ $DF_{1.5Y} = \frac{96.0-(4\times DF_{0.5Y}+4\times DF_{1Y})}{(4+100)} = 0.8520 = e^{-r_{1.5Y}\times 1.5}$.

➔ $r_{1.5Y} = 10.6890\%$.

④ T = 2Y :

평가일(= O/N) — 3M — 6M — 9M — 1Y — 1Y3M — 1Y6M — 1Y9M — 2Y → 만기

6M: 6, 1Y: 6, 1Y6M: 6, 2Y: 6+100

(101.6 = 6×$DF_{0.5Y}$ + 6×DF_{1Y} + 6×$DF_{1.5Y}$ + 106×DF_{2Y})

➔ $DF_{2Y} = \frac{101.6-(6\times DF_{0.5Y}+6\times DF_{1Y}+106\times DF_{1.5Y})}{(6+100)} = 0.8056 = e^{-r_{2Y}\times 2.0}$. ➔ $r_{2Y} = 10.8080\%$.

⑤ T = 1.3Y: $r_{1.3Y} = \frac{(1.5-1.3)}{(1.5-1)}\times r_{1Y} + \frac{(1.3-1)}{(1.5-1)}\times r_{1.5Y} = 10.6230\%$. ➔ $DF_{1.3Y} = e^{-r_{1.3Y}\times 1.3} = 0.8710$. (※*인접한 만기의 Zero Rates을 보간!*)