파생상품 가격 결정 원리의 이해

- 무차익거래(No Arbitrage) 논리를 통한 선도·옵션 가격 결정

- 목 차 -

■ No-Arbitrage (무차익거래) 가정

1. Arbitrage (차익거래)

- 동일한 상품이 서로 다른 가격으로 거래되고 있을 때, 이 상품을 낮은 가격으로 사고 높은 가격으로 팔아서 이익을 얻는 거래 행위
- 두 개 이상의 시장에서 동시에 포지션을 취하면서 위험 없이 이득을 취하려는 투자전략
- "Free Lunch"
- 수학적 정의: ① $V(0)\leq 0$ and $Pr[V(T)\geq 0]=1$ and $Pr[V(T)>0]>0$ 또는 ② $V(0)<0$ and $Pr[V(T)\geq 0]=1$를 만족하는 투자기회
  - V(t): 어떤 투자기회(포트폴리오 or 전략)의 t시점 가치
  - ①: 현재 시점 가치가 Non-positive인 투자가 미래시점의 모든 경제상태에서 Non-negative인 수익을 발생시키고, 또한 (+)수익을 발생시키는 경제상태가 적어도 하나 존재하는 투자기회
  - ②: 현재 시점 가치가 (-)인 투자가 미래시점의 모든 경제상태에서 Non-negative 수익을 발생시키는 투자기회

■ No-Arbitrage (무차익거래) 가정

2. No-Arbitrage (무차익거래) 가정

- "금융시장에 Arbitrage 기회는 존재하지 않는다."
- "No Free Lunch"
- 무위험 자산의 수익률은 위험자산의 기대수익률 보다 작아야 함.
  - (예) 1년 만기 국채 수익률 < 삼성바이오로직스 보통주에 대한 연 기대 수익률
- 위험이 작은 자산의 기대수익률은 위험이 큰 자산의 기대수익률 보다 작아야 함.
  - (예) 만기가 동일한 무이표 국채(A)와 무이표 회사채(B)가 있을 때, $P_A > P_B$
- "Law of One Price (일물 일가의 법칙)"
- No Arbitrage Price ≡ 차익거래가 발생하지 않게 하는 파생상품 가격

3. 파생상품 가격 결정 원리

- 경제학적 접근: 파생상품 가격 = No Arbitrage Price
- 수학적 접근: 파생상품 가격 = 미래 현금흐름 현재가치의 기대값 = $E_0[PV(CF_t)]$ or $PV(E_0[CF_t])$

(※지금 부터는 시장에 이자율이 "무위험 이자율" 단 한 종류만 있다고 가정)

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

Q> Forward 계약 체결 시 얼마에 사거나 팔기로 약속해야 공정할까?

A> Arbitrage가 발생하지 않는 가격에 사거나 팔기로 하면 된다.

➔ "Cost of Carry Model (보유비용 모형)"

1. 주식 Forward

- 개념적인 도출 (S_t = t시점 주가, F_t = t시점 Fwd 가격, T = Fwd 만기)

(1) 주식 매수자금(S_0원) 보유 가정 시

(2) 주식 매수자금 미 보유 가정 시

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

1. 주식 Forward (계속)

- (Case 1) 기초자산 주식의 배당이 없는 경우 (r = 연속복리 무위험 이자율): $F_0(T) = S_0 \cdot e^{r \cdot T}$

- (Case 2) 기초자산 주식의 현금 배당금 = D(지급시점 = T_D)인 경우: $F_0(T) = (S_0 - I) \cdot e^{r \cdot T}$ (단, $I = D \cdot e^{-r \cdot T_D}$)

- (Case 3) 기초자산 주식의 연 배당률(연속복리) = d: $F_0(T) = S_0 \cdot e^{(r-d) \cdot T}$

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

1. 주식 Forward (계속)

- 정리하면,
  - $F_0 = S_0 e^{(r-d)T} = (S_0 - I)e^{rT}$ (※I = PV of Incomes from the underlying stock)

- (예) 현재 시장에서 S_0=50,000원, 3개월 단리금리=2% 라고 한다. ①배당이 없는 경우 및 ②q=1%, ③ D=300원(T_D=1개월 후) 세 경우에 대하여, 만기 3개월 선도가격을 각각 계산하시오. (※일수 고려X)

2. Forward 가격 결정

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

2. FX Forward

- FX 사전 지식

① **포지션 (Position)**

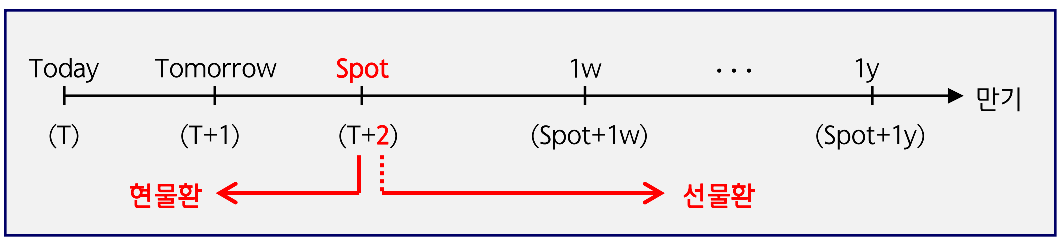
- 롱(Long) 포지션 : 외화자산 > 외화부채
- 숏(Short) 포지션 : 외화자산 < 외화부채
- 스퀘어(Square) 포지션 : 외화자산 = 외화부채

<환율 변동에 따른 포지션별 손익 방향>

환율 변동 ＼ 포지션	Long	Short	Square
환율 상승	이익	손실	-
환율 하락	손실	이익	-

② **현물환 (Spot)**: 계약(Fixing)일로 부터 2영업일 이내에 통화를 교환(Settlement)

- Zero Spot: 오늘(Today) Settlement 되는 외환 거래에 적용되는 환율



③ **선물환 (Forward)**: 계약(Fixing)일로 부터 2영업일 초과 후 통화를 교환(Settlement)

➔ 은행간 시장(장외) 거래 만기: 1w, 1m, 2m, 3m, 6m 1y

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

2. FX Forward (계속)

- 만기 T인 USD/KRW 선물환의 "이론" 선물환율

  - $F^*(T) = S_0 \times e^{[r^{₩}(T)-r^{\$}(T)]\times T} = S_0 \times \dfrac{DF^{\$}(T)}{DF^{₩}(T)} = S_0 \times \dfrac{[1+R^{₩}(T)\times T]}{[1+R^{\$}(T)\times T]}$: "Interest Rate Parity"

  - 단, S_0는 Today 적용 환율(Zero Spot), 이자율은 모두 [0,T] 적용 이자율이라고 가정.

- 만기 T인 USD/KRW 선물환의 "시장" 선물환율

  - 스왑포인트$(SP)_i \equiv 100x[F(T_i) - Spot]$, i = 1w, 1m, 2m, 3m, 6m, 1y.

    ➔ 선물환율과 Spot의 차이를 1전 단위로 표시 (※1pt = ₩0.01/$)

  - 선물환율은 일반적으로 스왑포인트의 형태로 고시(Quote) ➔ $F^{mkt}(T_i)$= Spot + $SP(T_i)/100$ if i > t/n

<스왑포인트 호가 예시 : 2015.05.06 마감 기준(Spot = 1,080.0)>

시장 정보	I	Today	o/n	t/n	1w	1m	2m	3m	6m	1y
	SP_i	-	3	3	22	95	190	290	510	790
계산	F_i	1,079.94	1,079.97	1,080.0	1,080.22	1,080.95	1,081.90	1,082.90	1,085.10	1,087.90

※o/n(Over Night), t/n(Tomorrow Next)

  - $T_{o/n}$=1/365, $T_{t/n}$=2/365, T_{1w}=2/365 + 7/365, T_{1m}=2/365+1/12, …(※휴일 무시). (예) $F(T_{1y})$ = F(367/365)

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

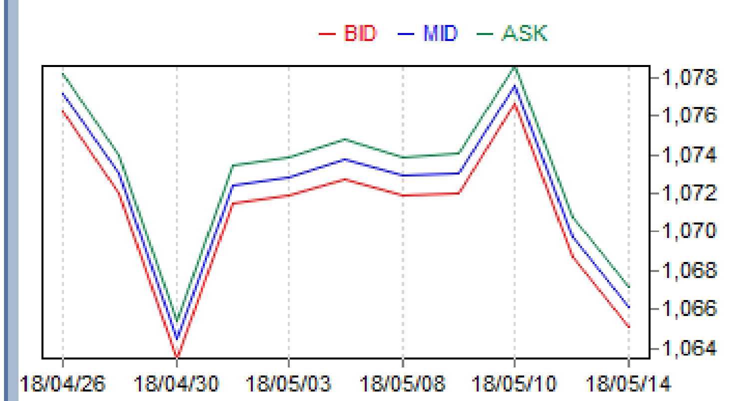
2. FX Forward (계속)

• 만기 T인 USD/KRW 선물환의 “시장” 선물환율 (계속) : 2018/05/15 기준. 장-단기 거래간 역전 관찰.

2018/05/15 | 서울외환 | 스왑포인트 | 3M | 현물기준 | 종 가 | 1067.50 | 일 중 | MID

기물	결제일	시간	BID	MID	ASK
ON	2018/05/15	15:33:56	-11	-1	10
TN	2018/05/16	15:33:56	-11	-1	10
1W	2018/05/23	08:15:52	-90	-10	70
1M	2018/06/18	16:01:56	-105	-65	-25
2M	2018/07/16	10:49:02	-245	-165	-85
3M	2018/08/16	15:24:15	-395	-295	-195
6M	2018/11/16	15:21:25	-870	-670	-470
1Y	2019/05/16	15:28:56	-1990	-1590	-1190

차트선택 : Forward



일자	시간		MID		SPOT
2018/05/14	15:24:15	-295	1064.55	-1.55	1067.50
2018/05/14	15:24:15	-295	1064.55	-1.55	1067.50
2018/05/14	10:27:33	-300	1062.60	-3.50	1065.60
2018/05/14	10:27:33	-300	1062.60	-3.50	1065.60
2018/05/14	10:04:57	-310	1062.60	-3.50	1065.70
2018/05/14	10:04:57	-310	1062.60	-3.50	1065.70
2018/05/14	08:15:52	-315	1066.15	0.05	1069.30
2018/05/14	08:15:52	-315	1066.15	0.05	1069.30
2018/05/11	15:13:13	-320	1065.10	-4.70	1068.30
2018/05/11	15:13:13	-320	1065.10	-4.70	1068.30
2018/05/11	15:03:38	-325	1065.45	-4.35	1068.70
2018/05/11	15:03:38	-325	1065.45	-4.35	1068.70
2018/05/11	14:05:59	-330	1065.20	-4.60	1068.50
2018/05/11	14:05:59	-330	1065.20	-4.60	1068.50
2018/05/11	14:05:59	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	14:05:59	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	10:19:19	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	10:19:19	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	10:19:19	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	10:19:19	-335	1065.15	-4.65	1068.50
2018/05/11	10:19:18	-335	1065.15	-4.65	1068.50

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

2. FX Forward (계속)

- (예1) Spot=₩1,000/$, 원화금리($R^{₩}$)=3%, 달러금리($R^{\$}$)=2% 가정. $F(T_{1m})$= ? (※휴일 무시)

- (예2) Page 7의 2015.05.06 자료 기준으로, 각 스왑포인트 고시만기에 대한 원화 연속복리 제로금리 $r^{₩}(T_i)$를 계산하시오 (단, 모든 만기에 대해 $r^{\$}(T_i)$=2% 가정).

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

2. FX Forward (계속) : Hedging 과정을 통한 가격 도출

(질문) 국내 수출업체가 은행에 1Y 만기 선물환 $1M 매도 요청. ➔ 선물환율(F)을 $1당 몇 원으로 결정해야 할까?

(답) "은행이 업체의 요구에 응하여 취한 선물환 매입 계약의 손익 = Hedge 거래의 손익" 이 되도록 F를 결정.

<은행의 USD/KRW 선물환 매입 및 "이론적" Hedge : 현물환율(S)=₩1,000/$, 원화금리($R^{₩}$)=2%, 달러금리($R^{\$}$)=1% 가정>

① 업체로부터 USD/KRW 선물환 $1M 매입 @F : USD 롱포지션 발생. ➔ 환포지션 Hedge를 위해 USD/KRW 현물환 매도 필요.

② USD/KRW 현물환 매도에 필요한 USD 자금을 선물환 만기까지 차입 @$R^{\$}$=1%. ➔ $이자비용 발생.

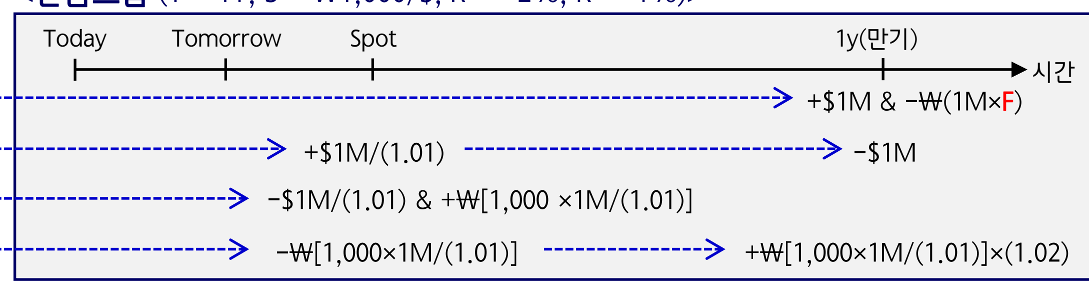
③ USD/KRW 현물환 매도 @S=₩1,000/$. : USD 지급 & KRW 수취.

④ 현물환 매도 결과 수취한 KRW 자금을 선물환 만기까지 예치 @$R^{₩}$=2%. ➔ ₩이자수익 발생.

<거래 흐름(은행 입장)>

구 분	거 래
대고객 거래	① 선물환 매입
Hedge 거래	② USD 차입
	③ 현물환 매도
	④ KRW 예치

<현금흐름 (T = 1Y, S = ₩1,000/$, $R^{₩}$ = 2%, $R^{\$}$ = 1%)>



• F의 결정? ➔ "**만기(1y)시점 현금흐름 총합 = 0**"이 되는 F를 찾는다.

➔ ΣCF(1Y) = +$1M − ₩(1M×F) − $1M + ₩[1,000×1M/(1.01)]×(1.02) = − ₩(1M×F) + ₩[1,000×1M/(1.01)]×(1.02) = 0.

➔ ∴F = 1,000×(1.02)/(1.01). ----(일반화)----> $F = S \times \frac{(1+R_{KRW}\times T)}{(1+R_{USD}\times T)} = \boxed{S \times \frac{DF_{USD}(T)}{DF_{KRW}(T)}}$ $(\fallingdotseq S\times[1 + (R_{KRW} - R_{USD})\times T].)$

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

3. 이자율 선도 (FRA)

- No-Arbitrage FRA 가격 = Implied Forward Rate

- Implied Forward Rate: $F(0,T_1,T_2)=\dfrac{DF(T_1)-DF(T_2)}{DF(T_2)\cdot(T_2-T_1)}$

4. Forward 계약의 가치

- Fwd Buy @ K: $V(t)=DF(T-t)\cdot[F_t(T)-K]$

- Fwd Sell @ K: $V(t)=DF(T-t)\cdot[K-F_t(T)]$

- (예) Page 10의 (예1)에서 Fwd Buy 계약 후 만기가 2주 남았을 때, Spot=₩1,050/$, $R^{₩}$=3%, $R^{\$}$=2.5%가 되었다고 한다. 이 때, 기 체결한 Fwd Buy 계약의 현재가치를 계산하시오.

■ No-Arbitrage Pricing of Forward Contract

5. Forward를 이용한 Arbitrage

- Forward 시장가격 vs. Forward 이론가격(↔복제를 통해 만들어낸 가격)
  - If 시장가격 < 이론가격 ➔ Buy Forward & Sell Spot.
  - If 시장가격 > 이론가격 ➔ Sell Forward & Buy Spot.
- (예) Page 10의 (예1)에서 1개월 만기 Fwd의 시장가격이 ₩1,100/$이라고 할 때, Arbitrage 전략을 제시하고 그 전략을 통해 얻을 수 있는 이익을 Fwd 만기시점 기준으로 계산하시오.

6. 이론과 현실의 차이

- 살 수 있는 가격(Ask) ≠ 팔 수 있는 가격(Bid), 차입금리 ≠ 투자(예치)금리
- 시장 참가자마다 접근할 수 있는 시장의 범위가 같지 않음. ➔ 각 시장 참가자의 복제가격이 같지 않음.
- 각종 거래 제약, 규제… 등.

■ Binomial Tree Model

1. 단일기간 이항 모형(Single-Period Binomial Tree Model)

($P_0=V_0$, $P_{1,u}=V_{1,u}$, $P_{1,d}=V_{1,d}$)

(1) 가정(1기간 모형)

i) 시간 : t=0 → t=T

ii) 기초자산 : S_0 → $S_{1,u} = u \cdot S_0$, $S_{1,d} = d \cdot S_0$

iii) MMA : $B_0 \longrightarrow B_T = B_0 \cdot e^{rT}$

iv) 무위험 이자율(r) : $d < e^{rT} < u$

(2) 목적 : 파생상품 현재가치(V_0) 계산

t=0 → t=T

<예 : Vanilla Call>

$\cdot V_0$ → $V_{1,u}$ ---> $V_{1,u} = (S_{1,u} - K)^+$

$\cdot V_0$ → $V_{1,d}$ ---> $V_{1,d} = (S_{1,d} - K)^+$

(3) 방법 : S(매입/매도) 및 B(예치/차입)를 통해 V의 Payoff를 복제

• 복제 포트폴리오(P) : $P_t = \Delta \times S_t + B_t$

t=0 → t=T

$\cdot P_0 = \Delta \cdot S_0 + B_0$ → $P_{1,u} = \Delta \cdot S_{1,u} + B_1$, $P_{1,d} = \Delta \cdot S_{1,d} + B_1$

➔ At t=T,

$$\begin{cases} P_{1,u} = V_{1,u} \\ P_{1,d} = V_{1,d} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \Delta \cdot S_{1,u} + B_1 = V_{1,u} \\ \Delta \cdot S_{1,d} + B_1 = V_{1,d} \end{cases}.$$

$$\therefore \ \Delta = \frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}, \quad B_0 = \frac{e^{-r\cdot T} \cdot (V_{1,d} \cdot S_{1,u} - V_{1,u} \cdot S_{1,d})}{(S_{1,u} - S_{1,d})}.$$

$$\Rightarrow V_0 = \Delta \cdot S_0 + B_0 = \left(\frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}\right) \cdot S_0 + \frac{e^{-r\cdot T} \cdot (V_{1,d} \cdot S_{1,u} - V_{1,u} \cdot S_{1,d})}{(S_{1,u} - S_{1,d})}$$

$$= \frac{V_{1,u} - V_{1,d}}{u-d} + \frac{e^{-r\cdot T} \cdot (V_{1,d} \cdot u - V_{1,u} \cdot d)}{u-d} = e^{-r\cdot T} \cdot \{q \cdot V_{1,u} + (1-q) \cdot V_{1,d}\}$$

$$= e^{-r\cdot T} \cdot \tilde{E}_0^{Q}[V_1], \ \text{where} \ \ q = \frac{e^{-r\cdot T} - d}{u-d}.$$

➔ q : 확률로 해석 가능. ➔ "**위험중립 확률**"

■ Binomial Tree Model

2. 위험중립 확률(Risk-Neutral Probability or Risk-Neutral Measure)의 이해

(1) 정의 : 위험 선호도가 중립적인 투자자의 기대에 내재된 자산가격 미래 움직임에 대한 확률적 가정
(=이익/손실 가능성에 무관심한)

(2) 용도 : 파생상품의 가치(가격)는 만기 Payoff의 **위험중립 기대값**을 **무위험 이자율**로 할인하여 계산할 수 있음.

(3) 위험중립 가격계산 공식(Risk-Neutral Pricing Formula) : $\boxed{V(t) = \tilde{E}_t^{Q}[e^{-\int_t^T r_u du} \cdot V(T)].}$

① 파생상품의 현재가치 = 위험중립 세상에서 계산된 파생상품 만기 Payoff 기대값의 현재가치.

[Note] 파생상품의 이론가치(가격)은 기초자산 가격이 상승 or 하락할 실제(??) 확률과 무관하게 결정.

➔ (Why?) 파생상품의 이론가치 = 파생상품의 Payoff를 "복제"하는데 필요한 비용의 현재가치.

② 파생상품 이론가치 계산 시 사용하는 결과적인 Tool로서 이해할 것.

[참고] 측도 변환(Change of Measure)

① "**측도(Measure)**" : 확률의 상위 개념을 의미하는 수학 용어.

② 측도 변환 : 기대값 계산을 보다 쉽게 수행하기 위해, 기대값은 그대로 유지하면서 확률변수가 취할 수 있는 값과 확률을 동시에 변화시키는 수학적 정리. **(예)** $6 = \Sigma(P_i \times X_i) = 0.6\times(5) + 0.4\times(7.5) = 0.2\times(10) + 0.8\times(0.5) = \cdots$.

$$\boxed{V(t) = \tilde{E}_t^{B}[B_t \cdot \frac{V(T)}{B_T}] = \tilde{E}_t^{U}[U_t \cdot \frac{V(T)}{U_T}].}$$

(※B, U : 기준재(Numeraire))

■ Binomial Tree Model

3. 다기간 이항 모형(Multi-Period Binomial Tree Model)

- "Option Pricing – A Simplified Approach" by John C.Cox, Stephen A.Ross, and Mark Rubinstein, Journal of Financial Economics, 1979.

- 2기간 모형

- 3기간 모형

- N기간 모형

  – $C_0 = e^{-rT}\sum_{j=1}^{N} {}_N C_j q^j (1-q)^{N-j} V_{N,u^j d^{N-j}}$, where $S_{N,j} = u^j d^{N-j} S_0$.

■ Binomial Tree Model

3. 다기간 이항 모형(Multi-Period Binomial Tree Model, 계속)

- (예1) S_0=20, u=1.1, d=0.9, r=0.12이라고 가정하자. K=21이고 T=0.25인 European Call Option의 현재가격을 1기간 Binomial Tree Model을 통해 계산하시오. (답: 0.633)

- (예2) S_0=50, u=1.2, d=0.8, r=0.05이라고 가정하자. K=52이고 T=2인 European Put Option의 현재가격을 2기간 Binomial Tree Model을 통해 계산하시오. (답: 4.1923)