Black-Scholes 모형과 파생상품 설계의 이해

- BS Model, FX Option Structuring, and Exotic Options

- 목 차 -

1. Black-Scholes 모형

(1) Black-Scholes 모형

1. 주식 가격의 수학적 Modeling

- 삼성전자 보통주 종가 일별 시계열 : 1995.01.03 ~ 2012.04.24

$$S(t) = e^{\mu t} \ (\mu > 0)$$

$$\ln Z(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$
$$(\sigma > 0)$$

(※논문: Fischer Black & Myron Scholes(1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy, 81.)

(1) Black-Scholes 모형 (계속)

2. Black-Scholes 모형의 가정

- **기초자산 가격에 대한 (수학적) 가정 :** "배당이 없는 주식 가격의 로그수익률은 정규분포를 따름."

  ① 기초자산 가격(S)의 초단기간 수익률이 Normal 분포를 따른다고 가정:

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{S(t)} \sim N\left(\mu \cdot \Delta t, \sigma^2 \cdot \Delta t\right)$$

(※①μ(Drift)는 기초자산 가격의 (연간)기대수익률, ②σ(Volatility)는 기초자산 가격의 (연간)변동성.)

  ② 연속시간 확률미분방정식(Continuous-Time Stochastic Differential Equation)으로 표현하면,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

(※W(t)~N(0, t): 표준 브라운 운동(Brownian Motion).)

  ③ 위 확률미분방정식을 풀면,

$$S(T) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W(T)} \Rightarrow \ln\frac{S(T)}{S(0)} \sim N\left((\mu-\frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\right).$$

- **금융시장에 대한 가정 :** "배당이 없는 주식 가격의 로그수익률은 정규분포를 따름."

  ① 무위험 이자율은 상수이고, 자금을 아무런 제약 없이 무위험 이자율로 원하는 만큼 차입/예치 할 수 있다.

  ② 주식을 아무런 제약 없이 원하는 수량 만큼(예 : 0.1주) 사거나 팔 수 있다. 거래비용은 없다.

  ③ 기초자산 주식을 발행한 기업은 부도가 나지 않는다.

(2) Black-Scholes 공식

1. Black-Scholes 공식

- 옵션 프리미엄(Premium): 옵션 가격 ↔ 옵션의 (위험중립) 현재 가치 ↔ Hedging(Replicating) Cost

- BS 가정에서 도출된, 배당이 없는 주식에 대한 European Call/Put 옵션의 이론가격:

$$\mathrm{Call}^{BS}(K,T,S,r,\sigma)=[S\cdot N(d_1)-K\cdot e^{-r\cdot T}\cdot N(d_2)] \quad \& \quad \mathrm{Put}^{BS}(K,T,S,r,\sigma)=K\cdot e^{-r\cdot T}\cdot N(-d_2)-S\cdot N(-d_1)],$$

$$\text{where } N(\cdot)=\text{CDF of } N(0,1),\ d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}} \ \& \ d_2=d_1-\sigma\cdot\sqrt{T}.$$

(※S : 기초자산 현재가격, σ : 기초자산 가격 변동성, K : 옵션 행사가격, T : 옵션 잔존만기, r : 무위험 이자율.)

- (예) 배당이 없는 어떤 주식의 현재가격이 4,200원이고 변동성(연간)은 20%라고 한다. 현재 시장의 무위험 이자율이 10%라고 할 때, 이 주식을 기초자산으로 하고 행사가격이 4,000원, 만기가 6개월인 유럽형 Call/Put 옵션의 프리미엄을 BS 공식을 통해 계산하시오. (답: C=476.xx원, Put = 81.xx원)

(생각!)

- [Q1] 옵션 만기일≠결산일. BS 공식에서 T에 무엇을 적용?

- [Q2] 시장에 이자율의 종류는 무수히 많다. BS 공식에서 r에 무엇을 적용?

(2) Black-Scholes 공식

1. Black-Scholes 공식 (계속)

- European Call 옵션 R 코드:

```
getBSCallPrice = function(T, K, S, sig, r)
{
    #T=옵션 만기, K=옵션 행사가격, S=기초자산 가격, sig = 변동성, r = 이자율
    d1 = (log(S/K) + (r+0.5*sig^2)*T)/(sig*sqrt(T))
    d2 = d1 - sig*sqrt(T)
    BSCall = S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)

    return(BSCall)
}

#함수 사용
T=1; K=95; S=100; sig=0.2; r=0.02
getBSCallPrice(T, K, S, sig, r)
```

(2) Black-Scholes 공식 (계속)

2. 위험중립 가격계산 공식(Risk-Neutral Pricing Formula)

- 위험중립 가격계산 공식: $\boxed{V(t) = \tilde{E}_t^Q[e^{-\int_t^T r_u du} \cdot V(T)]}$

- 위험중립 가격계산 공식을 통한 BS 공식 유도:

$$Call^{BS}(K,T,S,r,\sigma) = \tilde{E}_0^Q[e^{-r\cdot T} \cdot (S(T)-K)^+] \quad \& \quad Call^{BS}(K,T,S,r,\sigma) = \tilde{E}_0^Q[e^{-r\cdot T} \cdot (K-S(T))^+]$$

- (예) 위험중립 가격계산 공식을 통한 이론 선도가격(F^*) 유도:
  - 만기=T, 선도가격=K인 Fwd Buy 계약의 현재가치: $V = \tilde{E}_0^Q[e^{-r\cdot T} \cdot (S(T)-K)]$
  - IF K=F^*, V must be “0” by the definition of F^*. ➔ $0 = \tilde{E}_0^Q[e^{-r\cdot T} \cdot (S(T)-F^*)] \rightarrow F^* = \tilde{E}_0^Q[S(T)]$.
  - Since the expectation is calculated under the risk-neural probability, $\tilde{E}_0^Q[S(T)] = e^{-r\cdot T} \cdot S$

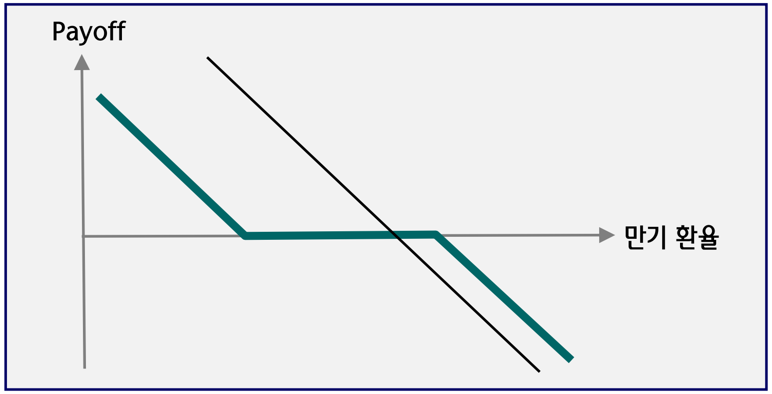
➔ $F^* = e^{r\cdot T} \cdot S$

2. FX 옵션 설계의 이해

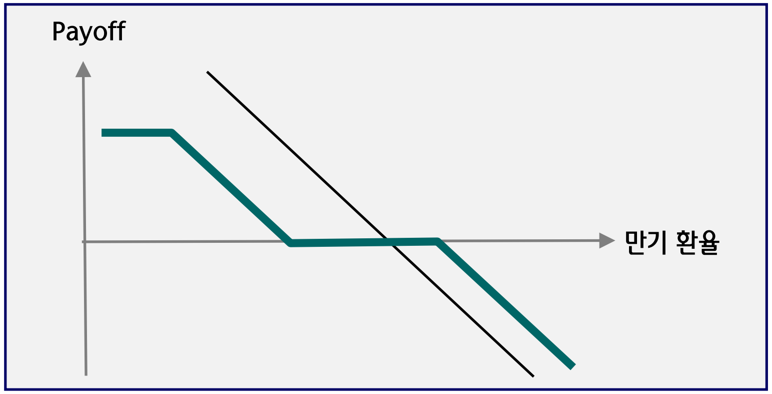
(1) 합성 선물환

1. Unlevered 구조 (Payoff의 기울기 절대값 ≤ 1)

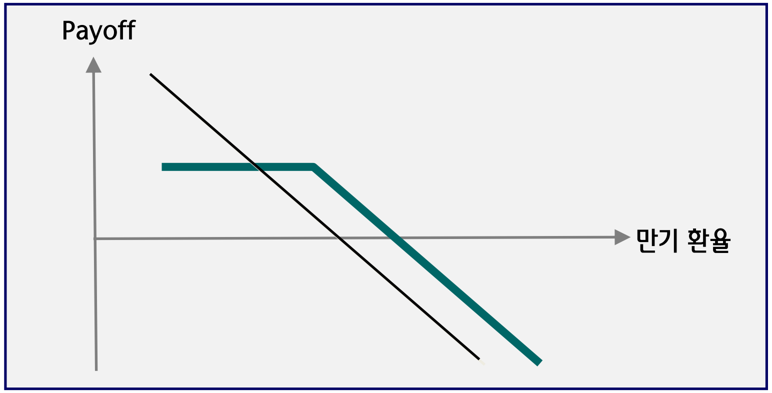
- Range Forward(매도)



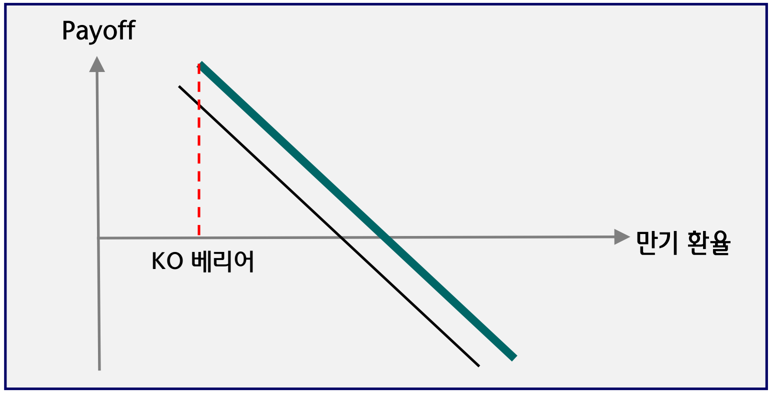
- Seagull Forward(매도)



- Enhanced Forward(매도)



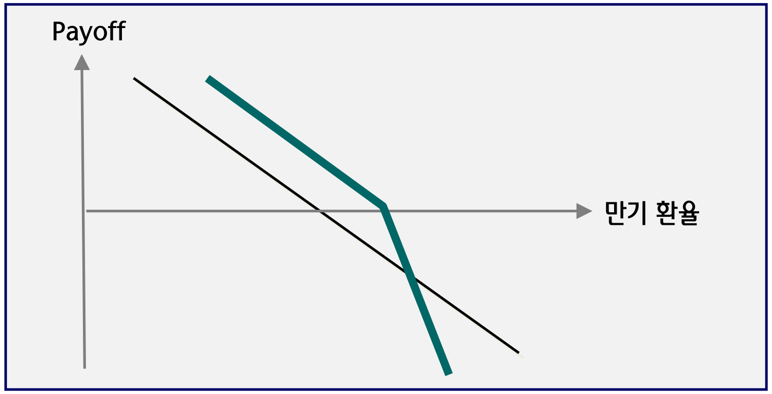
- Knock-Out Forward(매도)



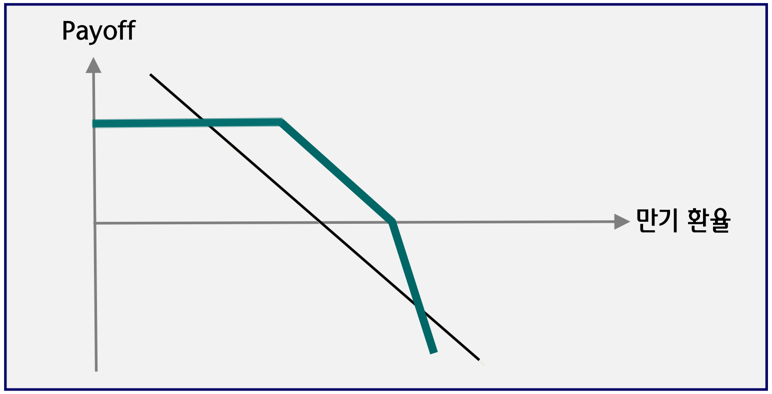
(1) 합성 선물환 (계속)

2. Levered 구조 (Payoff의 기울기 절대값 ≥ 1)

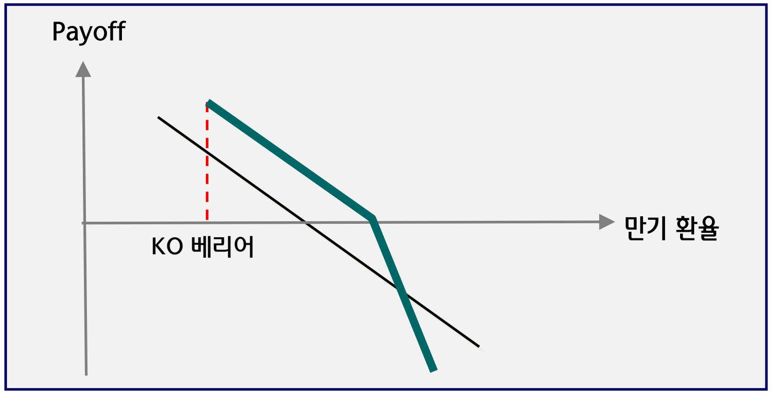
- Target Forward(매도)



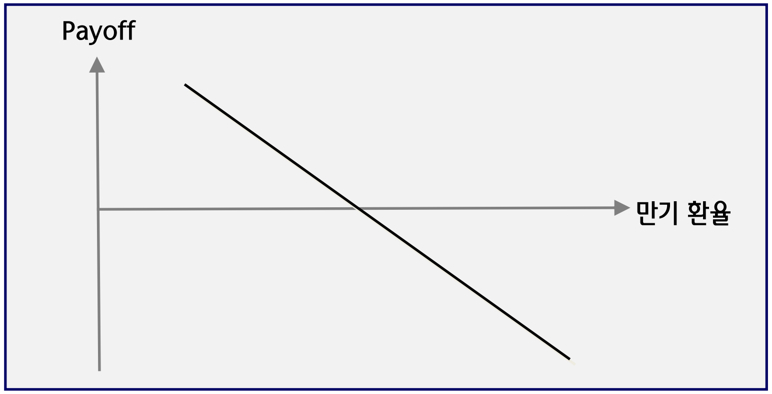
- Enhanced Target Forward(매도)



- Knock-Out Target Forward(매도)



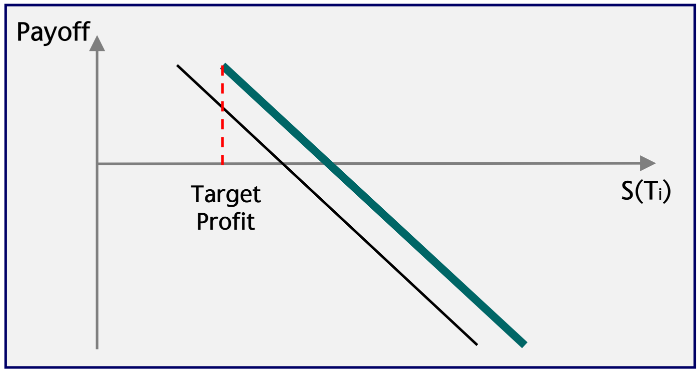
- [   ] Forward(매도)



(2) 구조화 상품

1. TRF(Target Forward)

• **Payoff**(Unlevered, 매도)

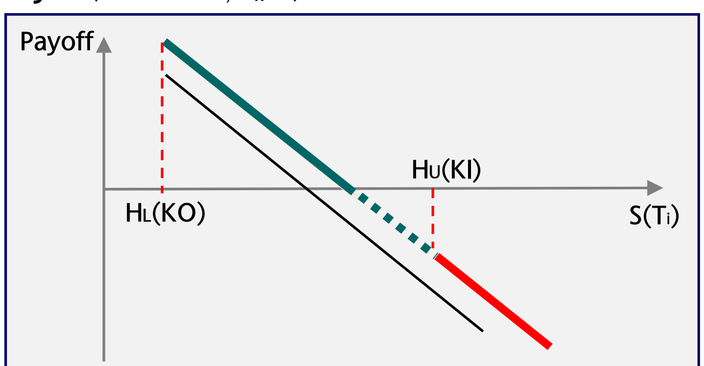


• **설명**

만기환율($S(T_i)$)	환율결정(Fixing)일 USD/KRW 시장평균환율(로이터 KFTC18 화면)		
만기(T)	1년(매월 결제) → 총 12개 옵션		
계약환율(K)	1,000원	Target Profit	100원($1당)
손익 구조 (Payoff)	1) 매월 계약금액($)을 계약환율로 매도. → $1당 '결정환율이(Fixing Rate) – 계약환율(K)'만큼 손익 발생.		
	2) 누적 손익이 목표누적이익(Target Profit)에 도달하는 경우 계약 자동 종료.		
	3) 해당월의 '결정환율(Fixing Rate) – 계약환율(K)'이 잔여 목표누적이익을 초과하는 경우에는 잔여 목표누적이익만큼만 이익으로 인식.		

2. KIKO(Knock-In Knock-Out) Forward

• **Payoff**(Unlevered, 매도)



• **설명**

만기환율($S(T_i)$)	환율결정(Fixing)일 USD/KRW 시장평균환율(로이터 KFTC18 화면)		
만기(T)	1년(매월 결제) → 총 12개 옵션	**KO 베리어**(H_L)	1,010원
계약환율(K)	1,130원	**KI 베리어**(H_U)	1,175원
관찰기간	직전월 옵션 결제 익영업일 ~ 해당월 결제 옵션의 환율결정일		
손익 구조 (Payoff,)	1) 관찰기간 중 KI 베리어 Touch X : 만기환율이 계약환율보다 낮은 경우에는 계약금액($)을 계약환율로 매도, 만기환율이 계약환율보다 높은 경우에는 거래이행 없이 시장환율로 매도.		
	2) 관찰기간 중 KI 베리어 Touch O : 계약환율로 계약금액 매도.		
	3) 관찰기간 중 KO 베리어 Touch O : KI 여부에 관계 없이 계약 종료.		

(3) FX Hedge 사례

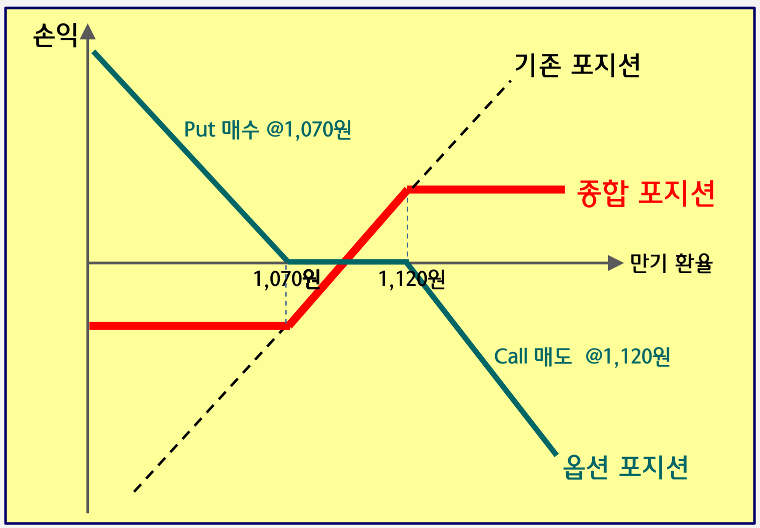
2. 수출기업 환 Hedge 사례

• Range Forward 매도

- Put(K_1) 매수 + Call(K_2) 매도 (※$K_1 < K_2$)
- 환율 변동에 따른 손실위험을 일정범위로 제한하기 위해 활용

< 계약 내용 >

- 현재 Spot 환율: ₩1,076.2/$, • 약정 기간: 7개월
- Buy USD Put(₩1,070/$) by $10,000,000
- Sell USD Call(₩1,120/$) by $10,000,000



만기환율	1,070원 미만	1,070원~1,120원	1,120원 이상
옵션포지션	1,070원에 매도	없음	1,120원에 매도

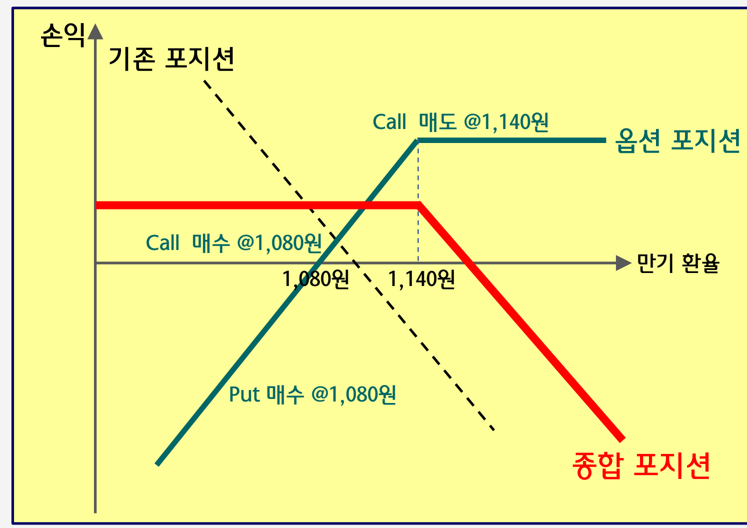
3. 수입기업 환 Hedge 사례

• Enhanced Forward 매수

- Call(K_1) 매수 + Put(K_1) 매도 + Call(K_2) 매도 (※$K_1 < K_2$)
  ➔ 결과적으로, '<u>만기 환율 < K_2인</u>' 경우 정해진 환율(K_1)로 매수.

< 계약 내용 >

- 현재 Spot 환율: ₩1,079.4/$, • 약정 기간: 6개월
- Sell USD Put(₩1,080/$) and Buy USD Call(₩1,080/$) by $2,000,000
- Sell USD Call(₩1,140/$) by $2,000,000



만기환율	1,140원 미만	1,140원 이상
옵션포지션	1,080에 매수	만기 환율에 관계 없이 액면 $1당 60원 수취

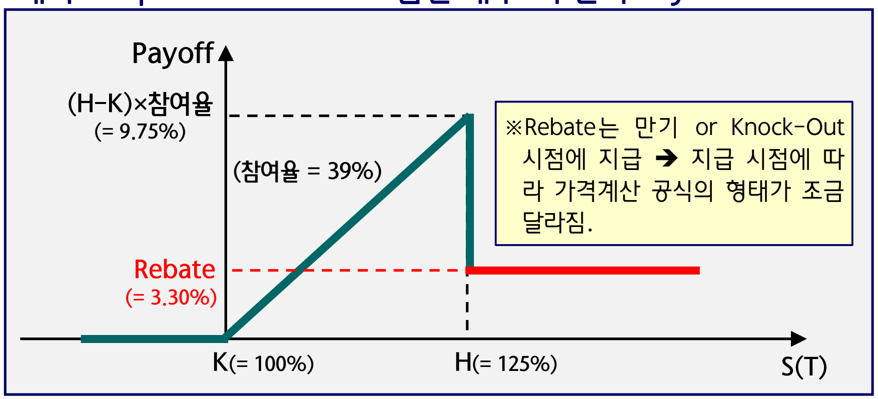
(1) 단일자산(Single-Asset) 옵션

1. Barrier 옵션

1.1 Standard Barrier 옵션

- 기초자산 가격이 특정 수준(Barrier) Touch 시 Vanilla Payoff가 소멸(Knock-Out) 또는 생성(Knock-In)되는 옵션.

<예시 : "Up-Out Barrier Call 옵션 매수"의 만기 Payoff>



만기(T)	1년
기초 자산(S)	현대자동차(005380)
이자 지급	만기 일시 지급 (※최대 이자 9.75%)
행사가격(K)	100%
베리어(H)	125%
만기 지급 이자	가입기간 중 장중 지수가 단 한 번도 베리어 이상인 적이 없는 경우, Max[S(T)/S(0)-K, 0] x 참여율(39%), 아닌 경우 3.30%(=Rebate).
만기가격(S(T))	KOSPI200의 발행일 대비 만기일 종가 비율

- 총 8가지 형태의 구조 : [Up or Down] + [Out or In] + [Call or Put] Barrier 옵션.
  (S(0)<H) (H<S(0)) (옵션 소멸) (옵션 생성)

- Up-Out Call과 Down-In Put이 주로 활용.

- 만기 Payoff 수식 :

  - **Up-Out Call** (S(0)<H) : $\text{Payoff}(S, K, H, T) = [S(T) - K]^{+} \times 1_{\{\text{Max}[S(t),\, 0 \le t \le T] < H\}} + \text{Rebate} \times 1_{\{\text{Max}[S(t),\, 0 \le t \le T] \ge H\}}$.
  - **Down-In Put** (H<S(0)) : $\text{Payoff}(S, K, H, T) = \text{Rebate} \times 1_{\{\text{Min}[S(t),\, 0 \le t \le T] > H\}} - [K - S(T)]^{+} \times 1_{\{\text{Min}[S(t),\, 0 \le t \le T] \le H\}}$.

(1) 단일자산(Single-Asset) 옵션 (계속)

1. Barrier 옵션 (계속)

1.2 Non-Standard Barrier 옵션

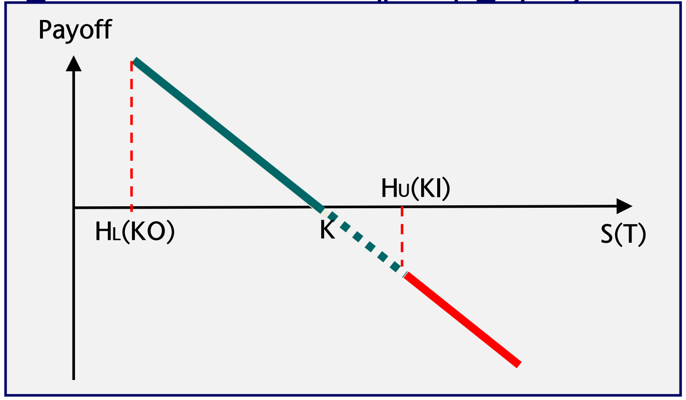
- Standard Barrier 옵션의 구조에서 Barrier 조건을 일부 변형.

• Discrete Barrier 옵션 : Barrier 관찰 주기를 이산시간으로 변형. (예) 일별 종가의 Barrier Touch 여부 관찰 → Daily Monitoring.
(※Standard Barrier 옵션은 연속시간 관찰을 가정. → Continuous Monitoring.)

• Partial-Time Barrier 옵션 : Barrier 관찰 기간을 옵션 기간 중 일부로 축소. (예) Partial-Time Start Barrier, Partial-Time End Barrier, Window Barrier (※Standard Barrier 옵션은 Barrier 관찰 기간이 옵션 기간 전체임.)

• Double Barrier 옵션 : Barrier를 두 개(H_L, H_U)설정. 단, $H_L < S(0) < H_U$. (예) Double-Out Call

<참고 : "FX KIKO Forward 매도"의 만기 Payoff>



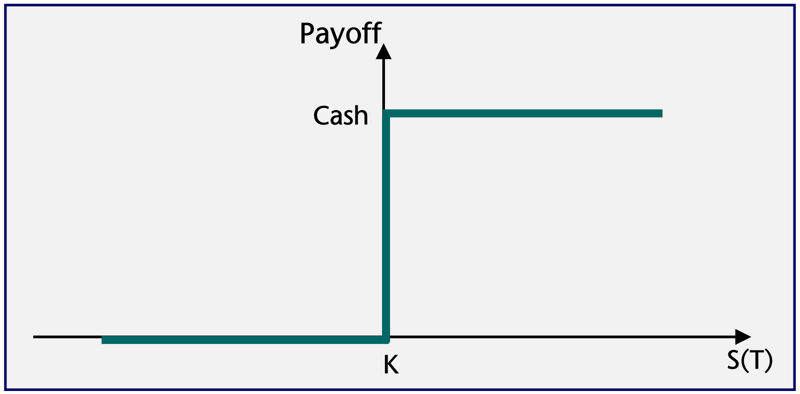
만기환율(S(T))	만기일 USD/KRW 시장평균환율(로이터 KFTC18 화면)		
만기(T)	1년	계약환율(K)	1,130원
KI 베리어(H_U)	1,175원	KO 베리어(H_L)	1,010원
관찰기간	만기일 1개월 전부터 만기일까지		
손익 구조 (Payoff)	1) 관찰기간 중 KI 베리어 Touch X : 만기환율이 계약환율보다 낮은 경우에는 계약금액을 계약환율로 매도, 만기환율이 계약환율보다 높은 경우에는 거래이행 없이 시장환율로 매도.		
	2) 관찰기간 중 KI 베리어 Touch O : 계약환율로 계약금액 매도.		
	3) 관찰기간 중 KO 베리어 Touch O : KI 여부에 관계 없이 계약 종료.		

• Soft Barrier 옵션 : ① Barrier를 구간으로 설정. ② Barrier Touch를 결정하는 Max[S(t), t∈관찰기간] or Min[S(t), t∈관찰기간]이 Barrier 구간 [H_L, H_U] 내 어디에 놓여있는 지에 따라 Knock-Out/In이 서서히(proportionately) 진행.

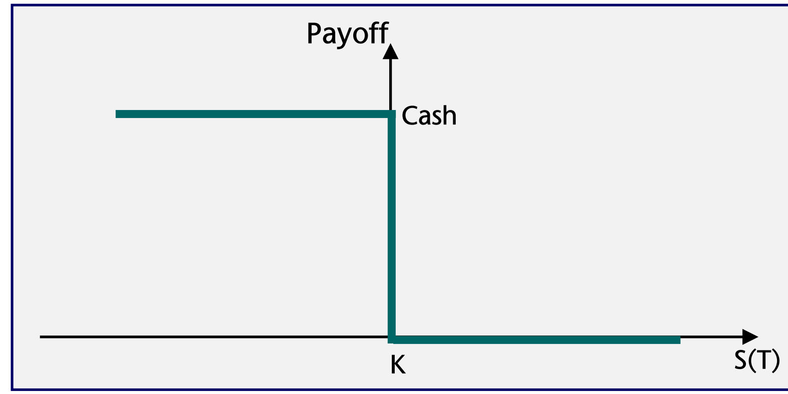
(1) 단일자산(Single-Asset) 옵션 (계속)

2. Digital 옵션(Cash-or-Nothing 옵션)

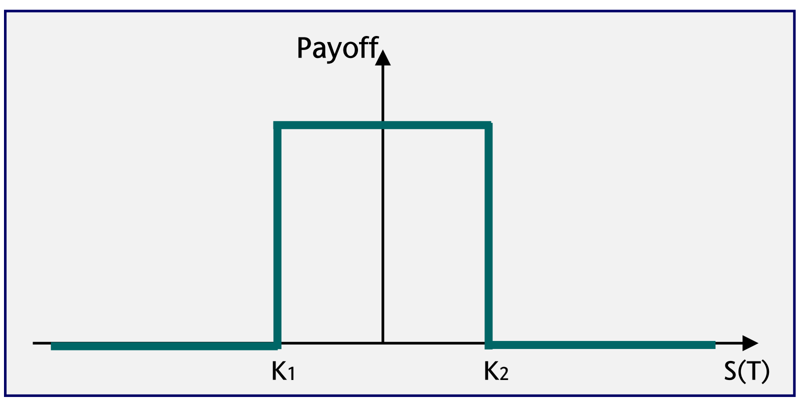
- Digital Call 옵션 : Payoff(S, K, T) = Cash × $1_{\{S(T) \geq K\}}$



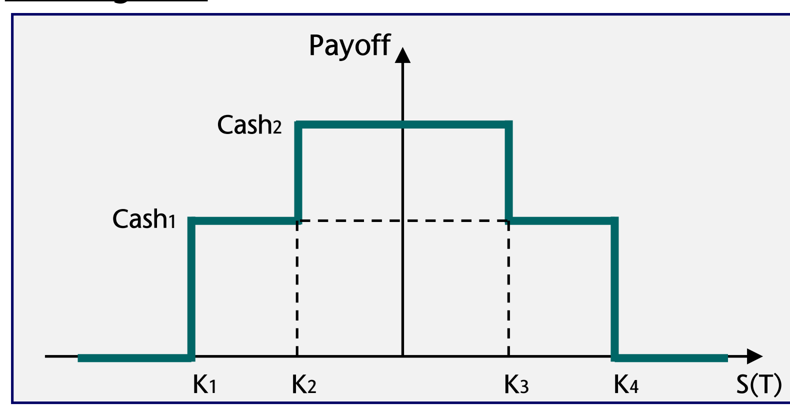
- Digital Put 옵션 : Payoff(S, K, T) = Cash × $1_{\{S(T) \leq K\}}$



- Digital Spread



- Wedding Cake



- One-Touch Digital 옵션 : Call(S, K, T) = Cash × $1_{\{Max[S(t),\ 0 \leq t \leq T] \geq K\}}$, Put(S, K, T) = Cash × $1_{\{Min[S(t),\ 0 \leq t \leq T] \leq K\}}$

(1) 단일자산(Single-Asset) 옵션 (계속)

3. Average Rate 옵션(Discrete Sampling Arithmetic Asian 옵션)

- Asian 옵션

① 정의 : 만기 Payoff가 옵션기간 중 관찰되는 기초자산 가격의 "평균"에 의해 결정되는 옵션.

② 종류 : ⅰ) 평균 계산방식에 따라 Geometric Average / Arithmetic Average Asian 옵션으로, ⅱ) 평균 계산에 사용되는 기초자산 가격 관찰주기에 따라 Discrete Sampling / Continuous Sampling Asian 옵션으로 분류.

<Asian 옵션 Payoff에 적용되는 기초자산 가격 평균 A(t,T) 계산>

구 분	Geometric Average	Arithmetic Average
Continuous Sampling	$A(t,T) = e^{\frac{1}{T-t}\int_t^T \ln S(u)du}$	$A(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T S(u)\,du$
Discrete Sampling	$A(t,T) = e^{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln S(t_i)}$	$A(t,T) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S(t_i)$

- Average Rate 옵션

① 정의 : Discrete Sampling Arithmetic Asian 옵션. 일반적으로 Daily Fixing.

② 종류 : 행가가격 고정 여부에 따라 Fixed-Strike / Floating-Strike Average Rate 옵션으로 분류.

<Discrete-Sampling Arithmetic Asian 옵션 Payoff>

구 분	European Call	European Put
Fixed-Strike	$[A(0,T) - K]^+$	$[K - A(0,T)]^+$
Floating-Strike	$[S(T) - A(0,T)]^+$	$[A(0,T) - S(T)]^+$

(2) 다중자산(Multi-Asset) 옵션

1. Best(or Worst) Performer 옵션

- 만기 Payoff가 $Max[S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)]$ 또는 $Min[S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)]$에 의해 결정되는 옵션.

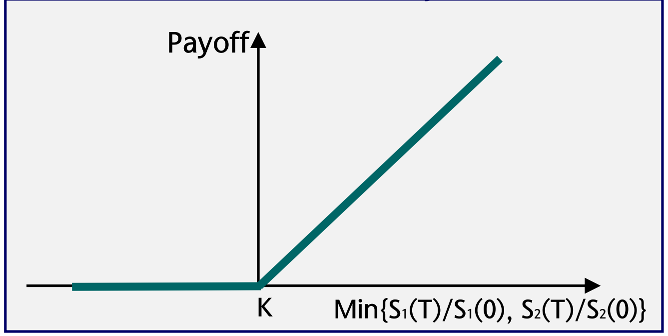
  ① Best Performer Call 옵션 : $Payoff(T) = [Max\{S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)\} - K]^+$

  ② Best Performer Put 옵션 : $Payoff(T) = [K - Max\{S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)\}]^+$

  ③ Worst Performer Call 옵션 : $Payoff(T) = [Min\{S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)\} - K]^+$

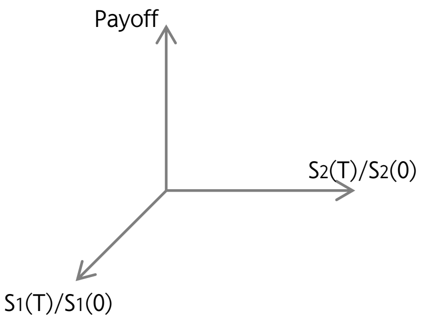
  ④ Worst Performer Put 옵션 : $Payoff(T) = [K - Min\{S_1(T)/S_1(0), S_2(T)/S_2(0)\}]^+$

<Worst Performer Call 옵션 Payoff>

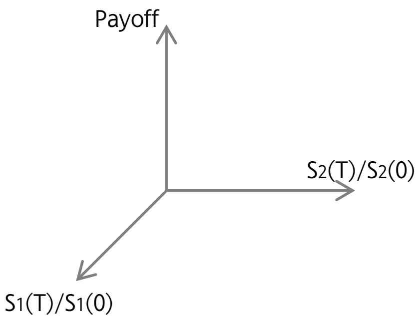


- Barrier/Digital Payoff로 확장 or 기초자산 개수 3개로 확장 가능.
- 주로 Worst Performer 형태로 ELS/ELB/ELD 구조화에 활용.
- (생각!) 만기 Payoff를 3차원 공간상에 그려봅시다.

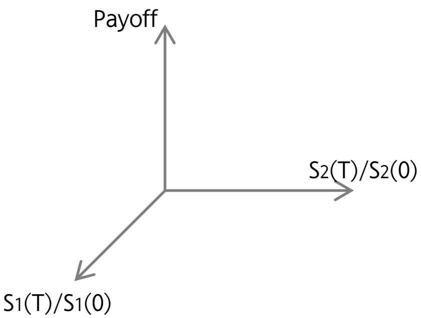
① Best Performer Call



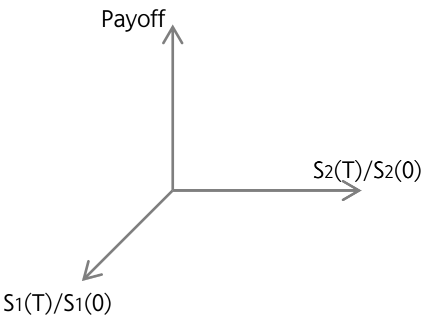
② Best Performer Put



③ Worst Performer Call



④ Worst Performer Put



3. Exotic Option 소개

(2) 다중자산(Multi-Asset) 옵션 (계속)

2. Spread 옵션

- **정의** : 만기 Payoff가 '$S_1(T) - S_2(T)$'에 의해 결정되는 옵션.

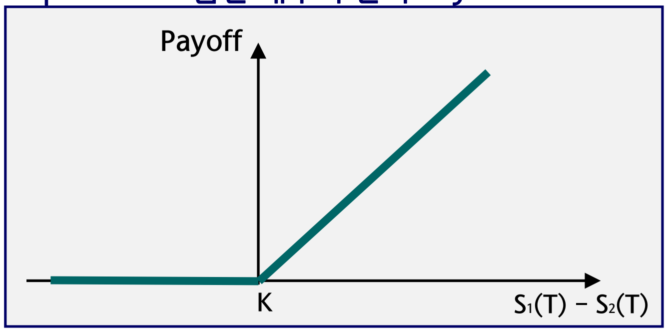
  ① Spread Call 옵션 : $Payoff(T) = [\{S_1(T) - S_1(0)\} - K]^+$

  ② Spread Put 옵션 : $Payoff(T) = [K - \{S_1(T) - S_2(T)\}]^+$

  ③ Spread Digital Call 옵션 : $Payoff(T) = Cash \times 1_{\{S_1(T) - S_2(T) \geq K\}}$

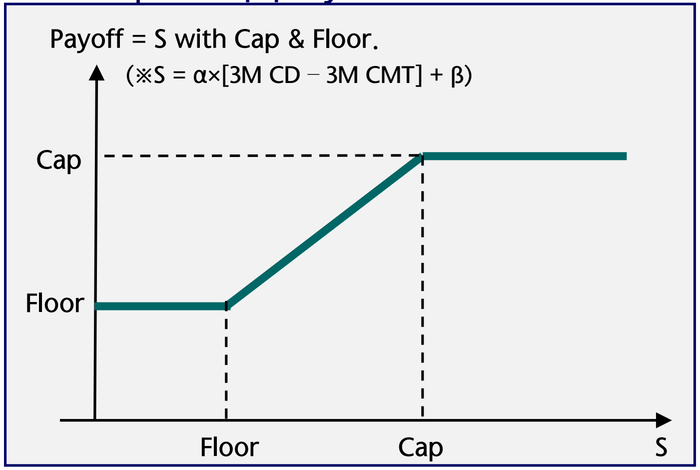
  ④ Spread Digital Put 옵션 : $Payoff(T) = Cash \times 1_{\{S_1(T) - S_2(T) \leq K\}}$

<Spread Call 옵션 매수의 만기 Payoff>



- **(생각!)** Power Spread 구조화 채권(매입) 이자 분해

<Power Spread 이자 Payoff>



- Payoff = Max[Min{S, Cap}, Floor] = ①S + ②$[Floor-S]^+$ – ③$[S-Cap]^+$

  ① $S = \alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT) + \beta$

  ② $[Floor-S]^+ = [Floor - \alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT) - \beta]^+$
  $= [(Floor - \beta) - \alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT)]^+$
  $= \alpha \times [K_L - (3M\ CD - 3M\ CMT)]^+$. 단, $K_L = (Floor - \beta)/\alpha$.

  ③ $[S-Cap]^+ = [\alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT) + \beta - Cap]^+$
  $= [\alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT) - (Cap - \beta)]^+$
  $= \alpha \times [(3M\ CD - 3M\ CMT) - K_U]^+$. 단, $K_U = (Cap - \beta)/\alpha$.

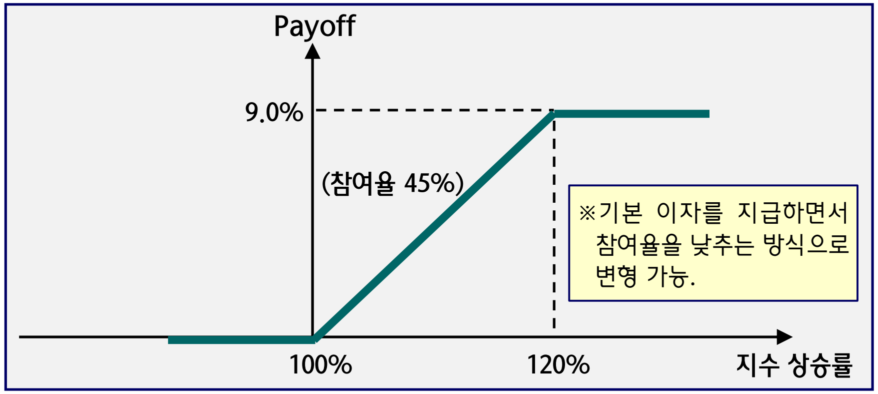
$$= \alpha \times (3M\ CD - 3M\ CMT) + \beta + \underbrace{\alpha \times [K_L - (3M\ CD - 3M\ CMT)]^+}_{\text{(Spread Put 옵션)}} - \underbrace{\alpha \times [(3M\ CD - 3M\ CMT) - K_U]^+}_{\text{(Spread Call 옵션)}}$$

4. 옵션 Payoff 설계 사례

(1) 바닐라·디지털 옵션 설계

1. 바닐라 옵션 이용

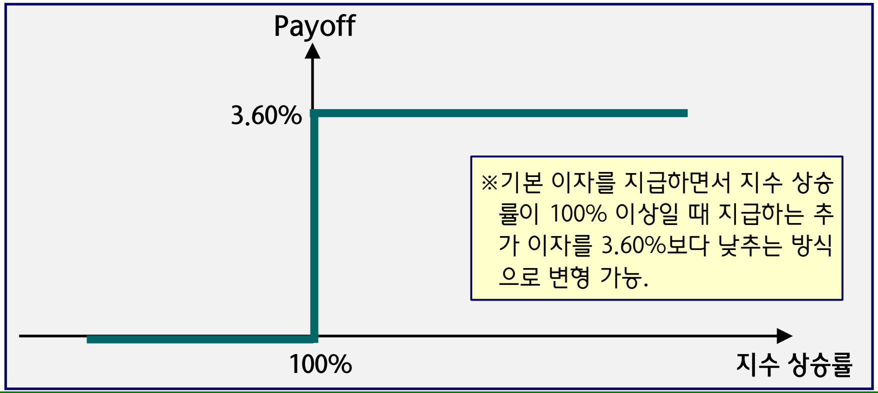
• Call Spread 형



만기	1년
기초 자산	KOSPI200 지수
이자 지급	만기 일시 지급
행사가격1(K_1)	100%
행사가격2(K_2)	120%
참여율	45%
만기 지급 이자	$([Max[Min\{S(T)/S(0), K_2\}, K_1] - 1) \times$ 참여율
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가

2. Digital 옵션 이용

• 기본 Digital 형 (※참고 : One-Touch Digital 형)



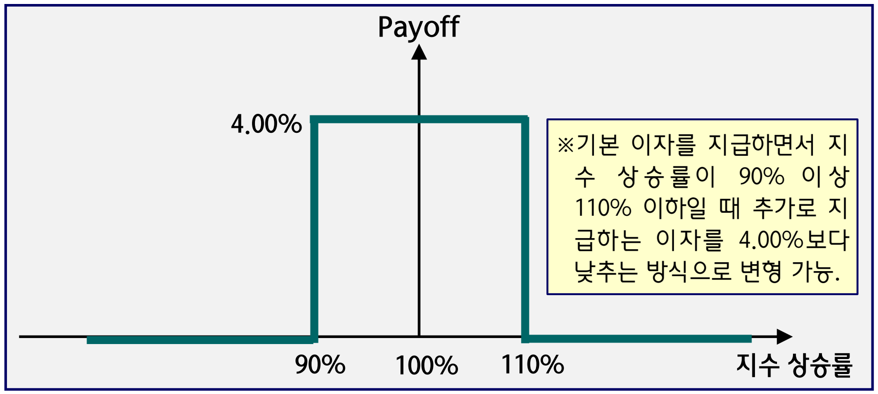
만기	1년	
기초 자산	KOSPI200 지수	
이자 지급	만기 일시 지급	
행사가격(K)	100%	
만기 지급 이자	$S(T)/S(0) \geq K$	3.60%
	$S(T)/S(0) < K$	0.00%
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가	
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가	

4. 옵션 Payoff 설계 사례

(1) 바닐라·디지털 옵션 설계 (계속)

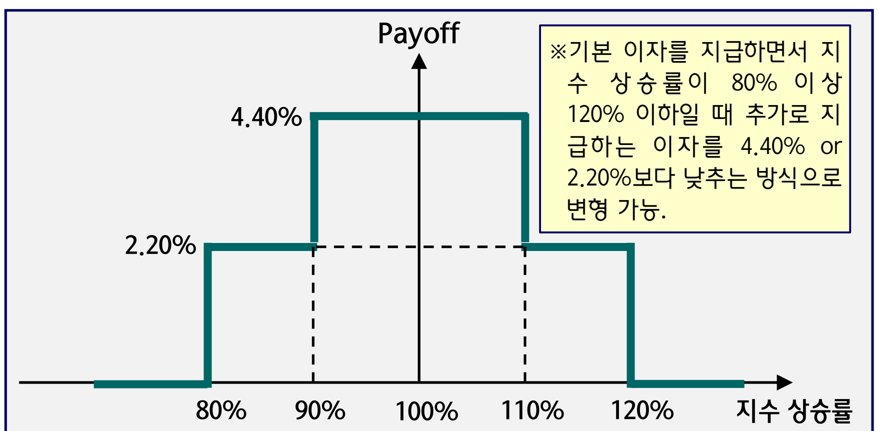
2. Digital 옵션 이용 (계속)

• 혼합 Digital 형 ①



만기	6개월	
기초 자산	KOSPI200 지수	
이자 지급	만기 일시 지급	
행사가격1(K_1)	90%	
행사가격2(K_2)	110%	
만기 지급 이자	$K_1 \leq S(T)/S(0) \leq K_2$	(연) 4.00%
	Otherwise	0.00%
기준가격($S(0)$)	발행일의 KOSPI200 종가	
만기가격($S(T)$)	만기일의 KOSPI200 종가	

• 혼합 Digital 형 ② (※웨딩 케이크)



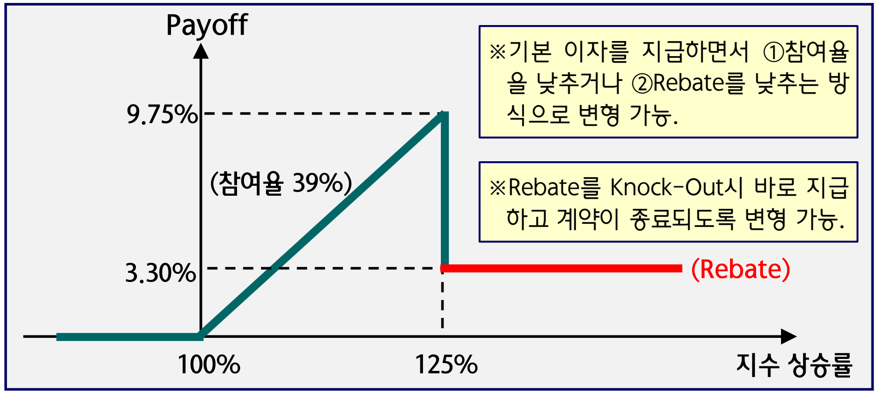
만기	1년		
기초 자산	KOSPI200 지수		
이자 지급	매월 지급		
행사가격1(K_1)	80%	행사가격2(K_2)	90%
행사가격3(K_3)	110%	행사가격4(K_4)	120%
만기 지급 이자	$K_i \leq S(T)/S(0) < K_{i+1}$	2.20%(i=1,3), 4.40%(i=2)	
	Otherwise	0.00%	
기준가격($S(0)$)	발행일의 KOSPI200 종가		
만기가격($S(T)$)	만기일의 KOSPI200 종가		

4. 옵션 Payoff 설계 사례

(2) 베리어 옵션 설계

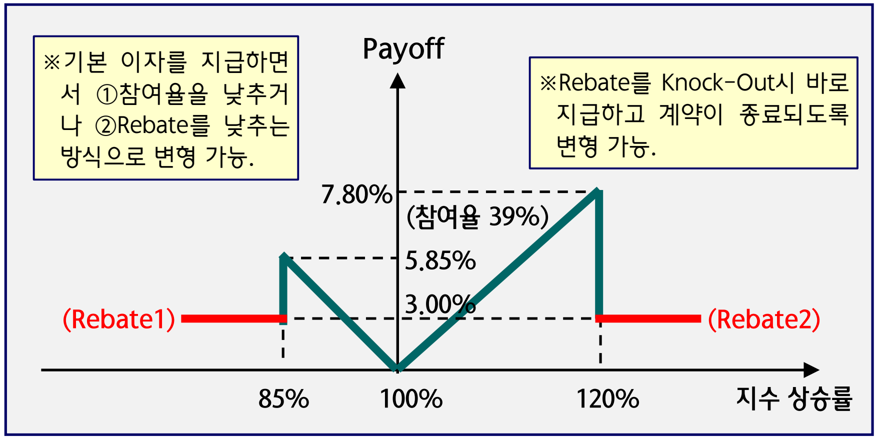
1. Knock-Out 베리어 옵션 이용

• Up-Out Call 형



만기	1년
기초 자산	현대자동차(005380)
이자 지급	만기 일시 지급
행사가격(K)	100%
베리어(H)	125%
만기 지급 이자	가입기간 중 장중 지수가 단 한 번도 베리어 이상인 적이 없는 경우, Max[S(T)/S(0)-K, 0] x 참여율, 아닌 경우 3.30%(=Rebate).
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가

• 양방향 Knock-Out 형



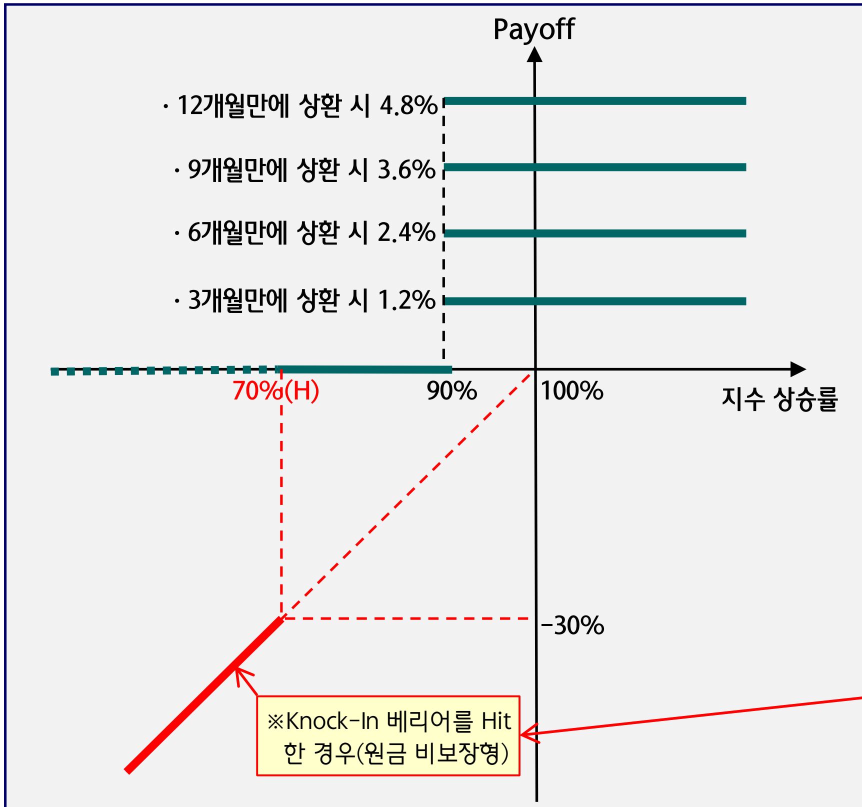
만기	1년		
기초 자산	현대자동차(005380)		
이자 지급	만기 일시 지급		
행사가격(K)	100%		
베리어1(H_1)	85%	베리어2(H_2)	120%
만기 지급 이자	가입기간 중 장중 지수가 단 한 번도 베리어를 Hit한 적이 없는 경우 |S(T)/S(0)-K| x 참여율, 아닌 경우 3.00%(=Rebate).		
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가		
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가		

4. 옵션 Payoff 설계 사례

(3) 오토-콜러블 상품 설계

1. 원금 보장 구조

- Hi-Five 원금 보장형
  - 매 3개월(관찰시점)마다 KOSPI200 지수 상승률이 행사가격(=90%) 이상이면 조기 상환 금리(=연 4.8%)를 지급하고 조기 상환되며, 만기까지 상환 되지 않았을 경우에도 원금이 보장되는 상품.



만기	1년		
기초 자산	KOSPI200		
이자 지급	상환 시 지급	상환 주기	3개월
관찰시점(T_i)	T_i = i×3M for i = 1, 2, 3, 4.		
행사가격(K)	90%		
(조기)상환 조건	$S(T_i)/S(0) \geq K$ for i = 1, 2, 3, 4.		
조기상환 이자율	(연) 4.8%		
만기상환 이자율	$S(T)/S(0) \geq K$	(연) 4.8%	
	$S(T)/S(0) < K$	0.0%(※원금만 지급)	
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가		
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가		
관찰가격($S(T_i)$)	관찰시점(T_i) 에서의 KOSPI200 종가		
Knock-In 조건	지급 가능한 이자 수준을 더 크게 만들기 위하여, Knock-In Put(매도) 속성을 추가한 원금 비보장형으로 발행 되기도 함.		
KI 베리어(H)	70%		

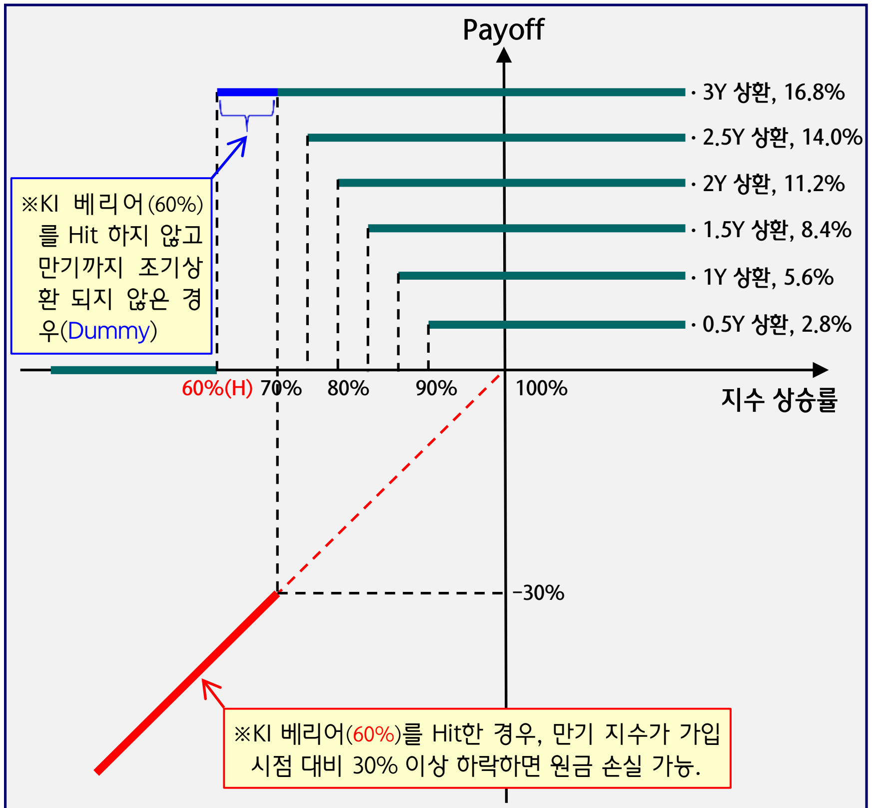
※Note : 조기상환 결정을 위한 행사가격이 모든 중간 평가일(3M, 6M, 9M, 12M)에서 동일함.

(3) 오토-콜러블 상품 설계 (계속)

2. 원금 비보장 구조

• **Step-Down 원금 비보장형**

– 매 6개월(관찰시점)마다 KOSPI200 지수 상승률이 정해진 행사가격 이상이면 조기상환 금리(=연 5.6%)를 지급하고 계약이 종료. 만기까지 Knock-In 베리어를 Hit하지 않은 상태로 조기상환 되지 않았을 경우 Dummy 이자(=연5.6%)를 지급.



만기	3년		
기초 자산	KOSPI200		
이자 지급	상환 시점 지급	상환 주기	6개월
관찰시점(T_i)	$T_i = i \times 6M$ for i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.		
행사가격(K_i)	$K_i = 95\% - i \times 5\%$		
(조기)상환 조건	$S(T_i)/S(0) \geq K_i$ for i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.		
조기상환 이자율	(연) 5.6%		
만기상환 이자율	$S(T)/S(0) \geq K_6$	16.8%(연 5.6%)	
	$S(T)/S(0) < K_6$	베리어를 Hit 하지 않은 경우 16.8%(=Dummy), Hit한 경우 KI Put 매도 속성이 발동됨.	
기준가격(S(0))	발행일의 KOSPI200 종가		
만기가격(S(T))	만기일의 KOSPI200 종가		
관찰가격(S(T_i))	관찰시점(T_i) 에서의 KOSPI200 종가		
Knock-In 조건	만기 이전에 한 번이라도 $S(t)/S(0) \leq H$인 경우가 발생한 상태에서 만기까지 조기상환 되지 않고, 만기 지수가 가입시점 대비 30% 이상 하락한 경우 원금 손실이 발생함.		
KI 베리어(H)	60%		

※**Super Step-Down 형** : 원금 손실 Payoff의 원천인 Put(매도)의 형태가 Knock-In Put이 아니라 Vanilla Put인 경우

(3) 오토-콜러블 상품 설계 (계속)

3. 그 외 변형(상품 구조의 진화)

• Two Asset으로의 확장

① 일반적으로 Worst Performer(= Min{$S_1(T)/S_1(0)$, $S_2(T)/S_2(0)$}) 기준으로 Payoff가 결정되며, Payoff의 형태는 앞에서 살펴본 Single Asset인 경우와 동일함. ➔ ※Rainbow 옵션

② Worst Performer가 아닌, 평균(= {$S_1(T)/S_1(0) + S_2(T)/S_2(0)$}/2) 기준으로 Payoff가 결정되는 형태의 Two Asset Auto-Callable 상품 등장(2014년).

• 이자 월지급 방식

- 조기상환 시 or 만기 시 일시에 이자를 지급하지 않고, 매월 지급.

• 만기상환 조건의 변형

- Booster 조건 : 만기 조기상환 및 Dummy 이자 지급 조항을 삭제하는 대신, Levered ATM Call(※투자자 매수) 속성 추가.

• 조기상환 조건의 변형

① Up-Out 베리어 조건 추가.

② 킹크랩형: 조기상환 조건이 $S(T_i)/S(0) \geq K_i$ 가 아닌, $KL_i \leq S(T_i)/S(0) \leq KU_i$ 의 레인지 형태. + 더블 베리어 KI Put 내재.

③ 리자드(Lizzard)형:

• Cliquet: (월별) 누적 수익률에 의해 조기상환, 지급 이자 등이 결정되는 구조.

• Himalaya: 기초자산 바스켓 내 종목들의 수익률을 주기적으로 체크하여, 수익률이 가장 높은 종목을 바스켓에서 제거한 후 남은 종목 중 Worst Performer의 수익률 기준으로 조기상환, 지급 이자 등이 결정되는 구조.

• **상품 진화는 현재 진행형.. (끊임없이 경쟁)**