Дискретная математика
Тема 4. Теория графов

Е.А.Перепелкин

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

2021

4.1 Основные определения

Определение

Графом называется совокупность двух конечных множеств – множества вершин V и множества ребер E, соединяющих вершины

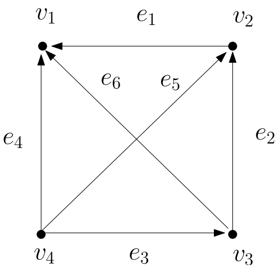
$$G = \langle V, E \rangle,$$

$$V = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}, \quad E = \{e_1; e_2; \ldots; e_m\}, \quad e_k = (v_i, v_j).$$

Ребра могут быть направленные и ненаправленные. Направленные ребра называются дугами.

Пример

Бинарное отношение $x > y$ на множестве чисел $V = \{1; 2; 3; 4\}$ описывается графом

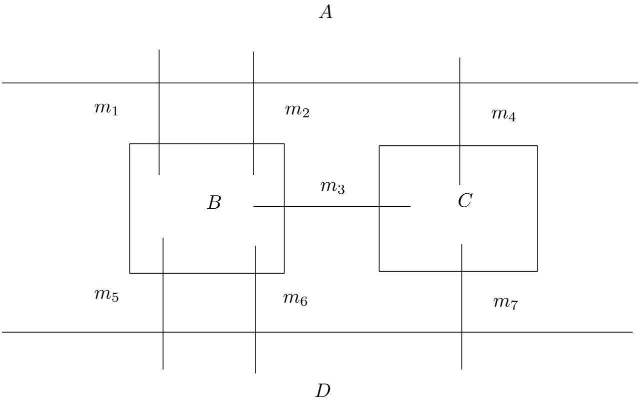


Здесь:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 3, \quad v_4 = 4,$$
$$e_1 = (2, 1) \quad e_2 = (3, 2), \quad e_3 = (4, 3),$$
$$e_4 = (4, 1), \quad e_5 = (4, 2), \quad e_6 = (3, 1).$$

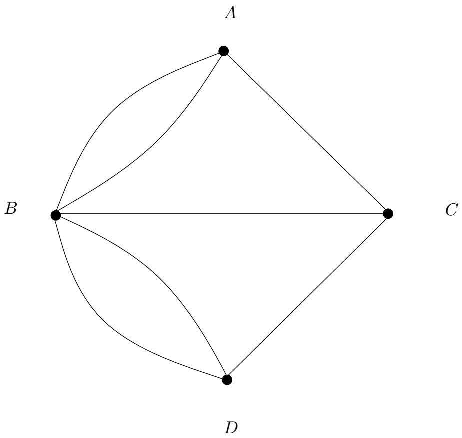
Пример (Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах, 1736 год)

Четыре части суши соединяют семь мостов.



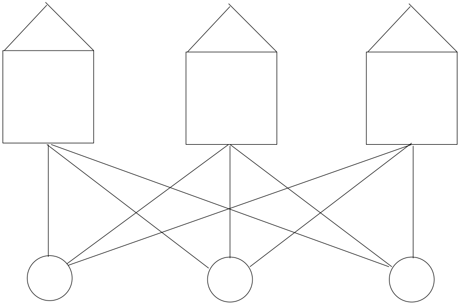
Необходимо обойти все части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку.

Граф задачи Эйлера



Пример (Задача о трёх домах и трёх колодцах)

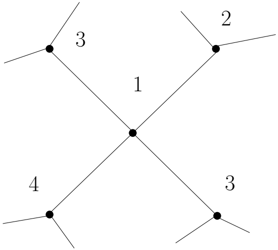
Необходимо провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.



Решение для более общей задачи о планарности графа было получено независимо Понтрягиным в 1927 и Куратовским в 1930 году.

Пример (Задача о четырёх красках)

Необходимо раскрасить карту, используя четыре краски, так, чтобы никакие две соседние области не были закрашены одним цветом. Вершины графа – области, ребра – границы. Необходимо расставить в вершинах графа цифры 1,2,3,4 так, чтобы рядом не было двух одинаковых цифр



Решение было получено в 1976 году с применением компьютера. Авторы: Аппель, Хакен.

Определение

Ребро $e = (v, v)$ называется петлей.

Определение

Граф без петель и кратных ребер называется простым.

Определение

Граф без петель, но с кратными ребрами называется мультиграфом.

Определение

Граф с петлями и кратными ребрами называется псевдографом.

Определение

Если множество ребер состоит из упорядоченных пар, то граф называется ориентированным (орграфом). Ребра орграфа называются дугами.

Ориентированный граф без кратных рёбер задаёт бинарное отношение на множестве вершин графа.

Определение

Если каждому ребру приписано некоторое неотрицательное число, то граф называется взвешенным (нагруженным).

Весом или стоимостью графа называется сумма весов его ребер.

Определение

Две вершины называются смежными, если существует ребро, соединяющее эти вершины.
Два ребра, примыкающие к одной вершине, называются смежными.
Вершина и примыкающее к ней ребро называются инцидентными.

Определение

Число ребер, инцидентных вершине v, называется степенью вершины и обозначается $d(v)$.

Определение

Для ориентированного графа число дуг, исходящих из вершины v, называется полустепенью исхода, а входящих – полустепенью захода. Эти числа обозначаются соответственно $d^{-}(v)$ и $d^{+}(v)$.

Определение

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер.

$$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \dots e_{k-1} v_k,$$

в которой любые два соседних элемента инцидентны.

Определение

Цепью называется маршрут, в котором все ребра различны.

Определение

Цепь называется простой, если все вершины в этой цепи различны. Простую цепь можно описать в виде последовательности вершин

$$v_1 v_2 \dots v_k.$$

Определение

Замкнутая цепь называется циклом.
Замкнутая простая цепь называется простым циклом.
Цикл, который содержит все ребра графа, называется эйлеровым.
Простой цикл, который проходит через все вершины графа, называется гамильтоновым.

Определение

Граф без циклов называется ациклическим.

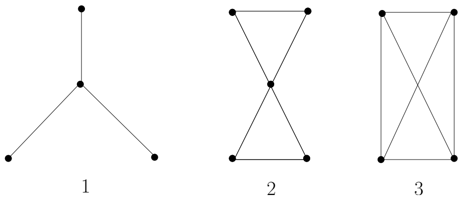
Определение

Граф с эйлеровым циклом называется эйлеровым.

Определение

Граф с гамильтоновым циклом называется гамильтоновым.

Пример



1 – ациклический граф; 2 – эйлеров граф; 3 – гамильтонов граф

Определение

Длиной маршрута называется количество ребер в нём с учётом повторений.
Расстоянием между двумя вершинами называется длина кратчайшей цепи, связывающей эти вершины.

Для нагруженного графа длина маршрута равна сумме весов ребер, составляющих маршрут.

Определение

Диаметром графа называется максимальное расстояние между вершинами графа.

Определение

Две вершины связаны, если существует соединяющая их цепь. Граф, в котором все вершины связаны, называется связным.

Определение

Компонентой связности графа называется множество вершин графа таких, что любые две вершины из этого множества связаны и никакая из этих вершин не связана с оставшимися вершинами графа.

Определение

Путь в ориентированном графе есть ориентированная цепь.
В простом ориентированном графе вершина u называется достижимой из вершины v, если существует путь, ведущий из v в u.

Определение

Граф, в котором каждые две вершины смежны, называется полным. Полный граф с n вершинами обозначают K_n.

Число рёбер в простом полном графе равно $n(n-1)/2$.

Определение

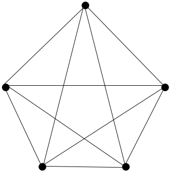
Двудольный граф $G = \langle V, E \rangle$ содержит два подмножества вершин V_1 и V_2 такие, что $V = V_1 \bigcup V_2$, $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$. При этом каждое ребро $e \in E$ инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2.

Определение

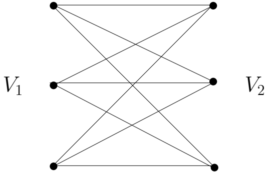
Двудольный граф $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ называется полным, если любые две вершины из множеств V_1 и V_2 смежны. Полный двудольный граф обозначают $K_{n,m}$, где n число вершин в V_1, m – число вершин в V_2.

Число рёбер в полном двудольном графе равно nm.

Пример



1



2

1 – полный граф K_5; 2 – полный двудольный двудольный граф $K_{3,3}$.

Определение

Неориентированный граф без циклов называется деревом.

Дерево с n вершинами всегда содержит $n-1$ ребро.

Определение

Несвязный неориентированный граф без циклов называется лесом.

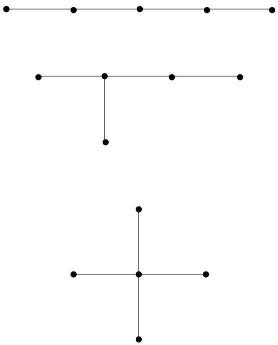
Определение

Дерево с выделенным корнем называется ориентированным.

Определение

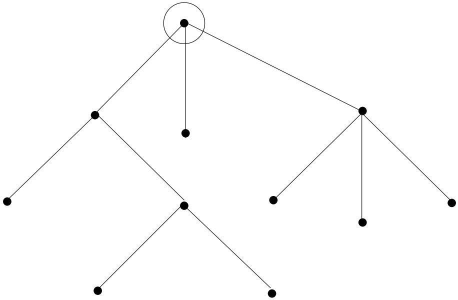
Бинарное (двоичное) дерево – это дерево с корнем, которое можно разбить на три части: корень, левое бинарное дерево и правое бинарное дерево, каждое из которых может быть пустым.

Пример



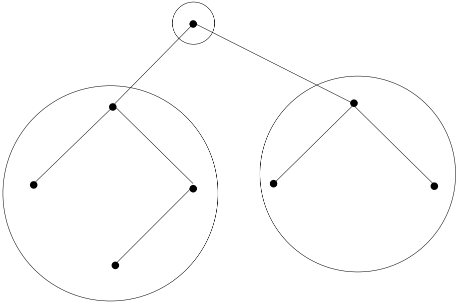
Деревья с пятью вершинами

Пример



Ориентированное дерево

Пример



Бинарное дерево

Определение

Подграфом графа $G = \langle V, E \rangle$ называется граф $G' = \langle V', E' \rangle$ такой, что $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Определение

Полный подграф некоторого графа называется кликой этого графа.

Определение

Максимальная клика графа – это клика с максимально возможным числом вершин.

Определение

Подграф $G' = \langle V', E' \rangle$ графа $G = \langle V, E \rangle$ называется остовным деревом графа, если он содержит все вершины графа $V' = V$ и является деревом.

Если n – число вершин, а m – число ребер графа G, то любое его остовное дерево имеет n вершин и $n - 1$ ребер.

Число $\gamma = m - n + 1$ называется цикломатическим числом графа G.

Определение

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются изоморфными, если существуют биекции

$$f : V_1 \leftrightarrow V_2, \;\; g : E_1 \leftrightarrow E_2$$

такие, что $G_2 = \langle f(V_1), g(E_1) \rangle$.

Два графа различны, если они не изоморфны.

4.2 Представления графов

1) Матрица смежности
2) Матрица инцидентности
3) Список ребер
4) Список смежности

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ – граф с n вершинами и m ребрами

Матрица смежности графа

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Матрица инцидентности

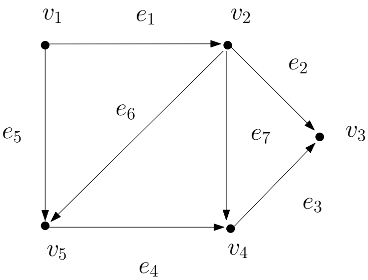
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Для неориентированного графа $b_{ij} = 1$, если вершина v_i и ребро e_j инцидентны. Иначе $b_{ij} = 0$.

Для ориентированного графа:

$b_{ij} = -1$, если вершина v_i и ребро $e_j = (v_i, v_k)$ инцидентны;
$b_{ij} = 1$, если вершина v_i и ребро $e_j = (v_k, v_i)$ инцидентны;
$b_{ij} = 0$, если вершина v_i и ребро e_j не инцидентны.

Пример



Матрица смежности

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица инцидентности

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Список рёбер

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Список смежности (массив связанных списков)

начало 1 $\to$ 2 $\to$ 5 конец

начало 2 $\to$ 3 $\to$ 4 $\to$ 5 конец

начало 3 конец

начало 4 $\to$ 3 конец

начало 5 $\to$ 4 конец

4.3 Основные теоремы

Теорема (Эйлер)

Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Теорема

В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Теорема

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют чётную длину.

Теорема

Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая вершина графа имеет чётную степень.

Рассмотрим простые графы с числом вершин $n \geq 3$.

Теорема (Дирак)

Если в графе степень любой вершины $d(v) \geq n/2$, то граф является гамильтоновым.

Теорема (Оре)

Если в графе для любых двух несмежных вершин $d(v_i) + d(v_j) \geq n$, то граф является гамильтоновым.

Определение

Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечения рёбер.

Теорема (Формула Эйлера)

Число областей (граней), на которые планарный граф разбивает плоскость, равно

$$f = m - n + 2,$$

где n – число вершин, m – число рёбер.

Теорема

Полный граф с пятью вершинами K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$ не являются планарными.

Определение

Два графа называются гомеоморфными, если они оба могут быть получены из одного графа, включением в его рёбра новых вершин степени 2.

Теорема (Понтрягин, 1927, Куратовский, 1930)

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или графу $K_{3,3}$.

Теорема

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, стягиваемого к графу K_5 или графу $K_{3,3}$.

4.4 Алгоритмы на графах

Задача обхода графа.

Задан простой неориентированнй граф. Необходимо обойти все вершины графа, начиная с заданной начальной вершины.

Метод поиска в глубину.

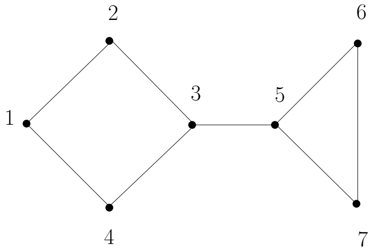
Начинаем с заданной вершины v. Переходим в любую вершину u, смежную с v. Из вершины u переходим в следующую вершину и т.д.

Если нет возможности перейти в новую вершину, то последнюю вершину отмечаем как использованную и возвращаемся на один шаг назад.

Продолжаем, пока не вернёмся в исходную вершину.

Рассматриваемые вершины образуют стек («последний пришёл – первый ушёл»). В начале стека находится вершина v.

Пример (Метод поиска в глубину)



Протокол работы алгоритма поиска в глубину оформим в виде таблицы. Обозначим: НВ – новая вершина, ИВ – использованная вершина, НН – новых вершин нет.
Начальная вершина – 3.

Стек	НВ	ИВ
3	5	
3,5	6	
3,5,6	7	
3,5,6,7	НН	7
3,5,6	НН	6
3,5	НН	5
3	2	
3,2	1	
3,2,1	4	
3,2,1,4	НН	4
3,2,1	НН	1
3,2	НН	2
3	НН	3

Метод поиска в ширину.

Пусть v – начальная вершина. Отметим все соседние с v вершины. Для каждой из этих вершин рассмотрим свои соседние вершины, которых ещё нет в списке отмеченных, и т.д. Продолжаем, пока не закончатся все вершины.

В методе поиска в ширину вершины образуют очередь («первый пришёл – первый ушёл»).

Пример

Очередь	НВ	ИВ
3	2,4,5	3
2,4,5	1	2
4,5,1	НН	4
5,1	6,7	5
1,6,7	НН	1
6,7	НН	6
7	НН	7

Задача о нахождении кратчайшего пути.

Пусть $G = \langle V, E \rangle$ – взвешенный ориентированный граф без петель. Заданы веса дуг $\rho(u, v) \geq 0$. Необходимо найти кратчайшие пути от заданной вершины s до всех вершины графа.

Алгоритм Дейкстры.

Алгоритм основан на свойстве кратчайшего пути. Обозначим через $d(u, v)$ длину кратчайшего пути из вершины u в вершину v. Пусть кратчайший путь из вершины s в вершину v проходит через вершину w. Тогда

$$d(s, v) = d(s, w) + d(w, v).$$

Каждой вершине присваиваются метки. Метка вершины $m(v)$ обозначает оценку длины пути от s до v. Метки пересчитываются по мере обхода графа в ширину. Окончательные значения меток будут равны кратчайшим расстояниям.

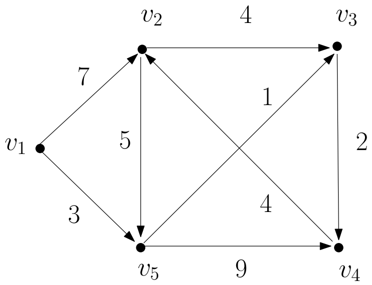
1) Присваиваем $m(s) = 0$ и $m(v) = \infty$ для всех остальных вершин.
2) Создаём множество вершин $S = \{\emptyset\}$. Во множестве S будут накапливаться вершины, для которых кратчайший путь определен.
3) Во множестве $V \setminus S$ определяем вершину w с минимальной меткой. Включаем её во множество S. На первом шаге это будет вершина s.
4) Пересчитываем метки тех вершин $v \in V \setminus S$, для которых существуют дуги (w, v), по правилу

$$m(v) = \min\{m(v), m(w) + \rho(w, v)\}$$

5) Повторяем п. 3. Останавливаемся, если множество S нельзя изменить.

Пример (Алгоритм Дейкстры)

Для графа



определим кратчайшие пути от вершины v_1 до всех остальных вершин графа. Протокол работы алгоритма Дейкстры оформим в виде таблицы.

Шаг	S	$V \setminus S$	$m(v_1)$	$m(v_2)$	$m(v_3)$	$m(v_4)$	$m(v_5)$
0	$\emptyset$	$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$	0	∞	∞	∞	∞
1	v_1	$v_2 v_3 v_4 v_5$	0	7	∞	∞	$\boxed{3}$
2	$v_1 v_5$	$v_2 v_3 v_4$	0	7	$\boxed{4}$	12	3
3	$v_1 v_5 v_3$	$v_2 v_4$	0	7	4	$\boxed{6}$	3
4	$v_1 v_5 v_3 v_4$	v_2	0	7	4	6	3
5	$v_1 v_5 v_3 v_4 v_2$	$\emptyset$	0	7	4	6	3

Последняя строка таблицы содержит значения длин кратчайших путей. Сами кратчайшие пути можно построить начиная с конечных вершин:

$$v_1 - v_2$$

$$v_1 - v_5 - v_3$$

$$v_1 - v_5 - v_3 - v_4$$

$$v_1 - v_5$$

Задача построения остовного дерева минимального веса.

Задан простой неориентированный взвешенный граф $\langle V, E\rangle$ с функцией весов ребер $f(v_i, v_j) > 0$, $(v_i, v_j) \in E$. Необходимо построить остовное дерево минимального веса.

Алгоритм Прима.

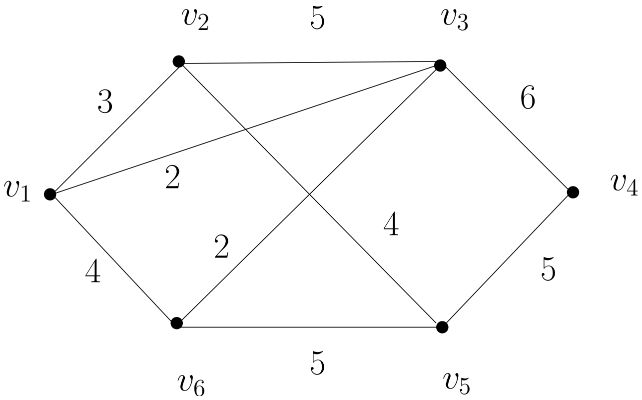
Выбираем одну из вершин графа в качестве корневой вершины дерева. Создаём дерево состоящее только из этой вершины.

На каждом шаге алгоритма к текущему дереву добавляем ребро наименьшего веса, соединяющее вершину из множества вершин дерева U и множества $V \setminus U$.

В процессе построения дерева образуется очередь рёбер с приоритетом, задаваемым весами рёбер.

Пример (Алгоритм Прима)

Для графа

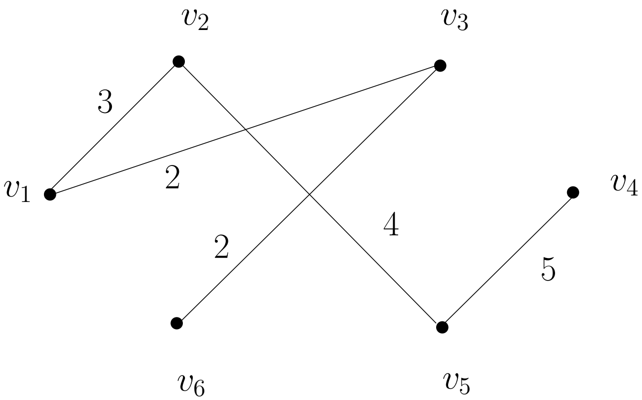


построить остовное дерево минимального веса.

Шаг	U	Очередь	$V \setminus U$
1	v_1	$f(v_1, v_3) = 2$ $f(v_1, v_2) = 3$ $f(v_1, v_6) = 4$	$v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$
2	$v_1 v_3$	$f(v_3, v_6) = 2$ $f(v_1, v_2) = 3$ $f(v_1, v_6) = 4$ $f(v_3, v_2) = 5$ $f(v_3, v_4) = 6$	$v_2 v_4 v_5 v_6$

3	$v_1 v_3 v_6$	$f(v_1, v_2) = 3$ $f(v_3, v_2) = 5$ $f(v_6, v_5) = 5$ $f(v_3, v_4) = 6$	$v_2 v_4 v_5$
4	$v_1 v_3 v_6 v_2$	$f(v_2, v_5) = 4$ $f(v_6, v_5) = 5$ $f(v_3, v_4) = 6$	$v_4 v_5$
5	$v_1 v_3 v_6 v_2 v_5$	$f(v_5, v_4) = 5$ $f(v_3, v_4) = 6$	v_4
6	$v_1 v_3 v_6 v_2 v_5 v_4$		

Остовное дерево



Вес дерева равен 16.