Дискретная математика
Тема 2. Комбинаторика

Перепелкин Е.А.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП)

2021

2.1 Правила комбинаторики

Большинство задач комбинаторики связаны с выбором и определением числа элементов конечного множества, обладающих заданным свойством.

Комбинаторика основана на двух правилах.

Утверждение (Правило суммы)

Пусть объект A может быть выбран n способами, объект B – m способами. Тогда выбор «или A или B» может быть осуществлён $n + m$ способами.

Утверждение (Правило произведения)

Пусть последовательно выбираются два объекта A и B. Если объект A может быть выбран n способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран m способами, то последовательный выбор «A и B» может быть осуществлён nm способами.

Пример

На книжной полке стоят 5 книг по математике и 7 книг по информатике. Сколько существует способов выбрать одну книгу с полки?

Таких способов 12. Здесь мы применили правило суммы.

Пример

Сколько слов, содержащих 5 букв, можно составить из 26 букв латинского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны?

При составлении слов первую букву можно выбрать любой из 26 букв алфавита.

Вторая буква не должна совпадать с первой. Поэтому вторую букву можно выбрать 25-ю способами.

Аналогично третья, четвертая и пятая буквы могут быть выбраны 25-ю способами.

Согласно правилу умножения получаем $26 \cdot 25^4 = 10156250$ различных слов.

В теории множеств правилу суммы соответствует формула

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \quad A \cap B = \emptyset,$$

правилу произведения – формула

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Правило суммы и произведения можно обобщить на выбор нескольких объектов.

2.2 Перестановки, размещения, сочетания, разбиения

Пусть $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ конечное множество из n элементов.

Будем строить выборки элементов множества A, содержащие m элементов. Такие выборки будем называть (n, m)-выборками.

При построении выборки сначала выбираем первый элемент, затем второй и так далее, всего m элементов. Обозначим эти элементы

$$b_1, b_2, \ldots, b_m.$$

Если нас интересует порядок элементов в выборке, то будем говорить о упорядоченной выборке, иначе – о неупорядоченной выборке.

Упорядоченную выборку будем записывать в виде последовательности

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

неупорядоченную – в виде множества

$$\{b_1; b_2; \ldots; b_m\}.$$

При построении выборки, выбирая очередной элемент, мы можем исключить этот элемент из множества A, и тем самым запретить его повторный выбор, или можем вернуть выбранный элемент во множество A, и тем самым разрешить его повторный выбор.

Соответственно будем говорить о выборке без повторений и выборке с повторениями.

Пример

Рассмотрим множество $A = \{a; b; c; d; e; f\}$ из 6 элементов. Примеры выборок:

1) неупорядоченная $(6, 2)$-выборка без повторений $\{b; e\}$;
2) упорядоченная $(6, 3)$-выборка без повторений (a, c, d);
3) неупорядоченная $(6, 5)$-выборка с повторениями $\{c; e; e; f; f\}$;
4) упорядоченная $(6, 4)$-выборка с повторениями (b, c, c, f);

Заметим, что $(a, b, c) \neq (a, c, b)$, $\{a; b; c\} = \{a; c; b\}$.

Определение

Перестановкой n элементов называется упорядоченная (n, n)-выборка без повторений.

Пример

Всевозможные перестановки элементов множества $\{1; 2; 3\}$ имеют следующий вид:

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Определение

Размещением из n элементов по m называется упорядоченная (n, m)-выборка.

Определение

Сочетанием из n элементов по m называется неупорядоченная (n, m)-выборка.

Для размещений и сочетаний можно дать следующую интерпретацию.

Пусть есть n различных предметов и m различных корзин.
Необходимо разместить по одному предмету во все корзины.

Каждое такое размещение есть упорядоченная (n, m)-выборка, то есть размещение из n по m.

Пусть необходимо выбрать m предметов и поместить их в одну корзину.

Каждый такой выбор есть сочетание из n по m.

Обозначим:

P_n – число перестановок n элементов;
A_n^m – число размещений из n элементов по m без повторений;
$\overline{A}_n^m$ – число размещений из n элементов по m с повторениями;
C_n^m – число сочетаний из n элементов по m без повторений;
$\overline{C}_n^m$ – число сочетаний из n элементов по m с повторениями.

Теорема

Справедливы формулы:

$$P_n = n!,$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad \overline{A}_n^m = n^m,$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \quad \overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Доказательство.

При построении размещений без повторений первый элемент размещения можем выбрать n способами, второй $n-1$ способами, последний $n-m+1$ способами.

Выбор осуществляется последовательно. Таким образом, по правилу произведения

$$
\begin{aligned}
A_n^m = & n(n-1)\cdots(n-m+1) = \\
= & \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 1}{(n-m)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.
\end{aligned}
$$

Перестановки – это размещения без повторений в случае $m = n$. Поэтому

$$P_n = A_n^n = n!$$

Сочетания без повторений – это неупорядоченные (n, m)-выборки. Из каждого сочетания можно получить $m!$ размещений с помощью перестановки элементов сочетания.

Поэтому справедливо соотношение $C_n^m m! = A_n^m$, из которого получим

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

При построении размещений с повторениями первый элемент размещения можем выбрать n способами, второй и последующие также n способами. Поэтому по правилу произведения

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{nn\cdots n}_{m} = n^m.$$

Рассмотрим сочетания с повторениями. Пусть

$$A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}.$$

Каждая неупорядоченная выборка с повторениями может быть записана в следующем виде

$$\{\underbrace{a_1; \ldots; a_1}_{k_1}; \underbrace{a_2; \ldots; a_2}_{k_2}; \ldots; \underbrace{a_n; \ldots; a_n}_{k_n}\},$$

где k_i – число вхождений элемента a_i в выборку, $k_1 + \cdots + k_n = m$.

Выборку можно закодировать булевым вектором

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1},0,\underbrace{1,\ldots,1}_{k_2},0,\ldots,\underbrace{1,\ldots,1}_{k_n}).$$

где 0 выполняет роль разделителя.

Таким образом, число выборок равно числу булевых векторов длины $n+m-1$, содержащих ровно m единиц, и равно

$$C_{n+m-1}^{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

□

Для факториала справедлива формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

которая находит применение в оценке сложности алгоритмов.

Из формулы Стирлинга следует, что $n!$ растет быстрее, чем 2^n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = \infty.$$

Пример

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если все цифры в этих числах различны?

Составим первое число 12345. Все остальные числа получим перестановкой цифр этого числа.

Всего будет $5!=120$ различных чисел.

Пример

В студенческой группе из 25 человек необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Задача заключается в размещении без повторения 2-х элементов из 25. Число размещений равно

$$A_{25}^{2} = \frac{25!}{23!} = 600.$$

Пример

Сколько существует различных булевых векторов длины 8, содержащих ровно 3 единицы?

Ответом является число сочетаний из 8 по 3 без повторений

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Пример

Сколькими способами можно распределить k одинаковых предметов по n различным корзинам?

Для каждого предмета выбираем корзину. Таким образом, формируем неупорядоченные выборки из n по k с повторениями. Число таких выборок равно $\overline{C}_n^k$.

Пусть множество A с n элементами содержит повторяющиеся элементы m типов. Например, множество цифр числа 732773 содержит элементы трёх типов $\{7; 3; 2\}$. Обозначим через k_i число элементов i-го типа, $i = 1, \ldots, m$, $k_1 + \cdots + k_m = n$. Сколько можно получить различных перестановок элементов множества A?

Перестановка повторяющихся элементов не приводит к новым перестановкам. Поэтому число перестановок элементов множества с повторяющимися элементами будет равно

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Пример

Сколько различных слов можно получить из слова «информатика», переставляя буквы в этом слове?

Всего букв в слове 11. Буквы «и, а» встречаются дважды. Следовательно, число различных слов будет равно

$$\frac{11!}{2!2!} = 9979200.$$

Пусть A конечное множество, $|A| = n$. Зададим целые положительные числа $k_1, \dots, k_m$ такие, что

$$k_1 + \dots + k_m = n.$$

Теорема

Число разбиений множества A на m непересекающихся подмножеств

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad |A_i| = k_i$$

равно

$$C_n^{k_1,k_2,\dots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Доказательство.

Сначала построим первое подмножество как неупорядоченную (n, k_1)-выборку без повторений. Это можно сделать $C_n^{k_1}$ способами.

Затем построим второе подмножество. Для этого необходимо выбрать k_2 элементов из оставшихся $n - k_1$. Это можно сделать $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами.

И так далее, пока не останутся последние k_m элементов.

По правилу произведения получим

$$C_n^{k_1,k_2,\dots,k_m} = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_{m-2}}^{k_{m-1}} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k_1)!k_1!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)!k_2!} \cdots \frac{(n-k_1-\dots-k_{m-2})!}{(n-k_1-\dots-k_{m-1})!k_{m-1}!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

$\square$

Пример

Сколькими способами можно сформировать две подгруппы из группы студентов в 25 человек, если в одной подгруппе будет 12 студентов, во второй – 13?

Это можно сделать

$$C_{25}^{12,13} = \frac{25!}{12!13!} = 5200300$$

способами.

2.3 Биномиальные коэффициенты

Определение

Числа
$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$
называются биномиальными коэффициентами.

Теорема

Справедливы формулы:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1,$
2) $C_n^m = C_n^{n-m},$
3) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},$
4) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}.$

Доказательство.

Докажем, например, 3. Сумма коэффициентов C_{n-1}^{m} и C_{n-1}^{m-1} равна

$$C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} + \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} =$$
$$= \frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!} + \frac{m(n-1)!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_{n}^{m}.$$

□

Формулу

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

можно использовать для последовательного вычисления биномиальных коэффициентов.

Результаты вычислений образуют треугольник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

Каждый из внутренних элементов треугольника равен сумме двух элементов, расположенных над ним

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Биномиальные коэффициенты входят в формулу, которая получила название формулы бинома Ньютона.

Теорема (Формула бинома Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Формулу бинома Ньютона получим как следствие полиномиальной формулы.

Теорема (Полиномиальная формула)

$$(x_1+\dots+x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=n \\ k_1,\dots,k_m\geq 0}} C_n^{k_1,\dots,k_m} x_1^{k_1}\dots x_m^{k_m}.$$

Доказательство.

Рассматриваемое выражение запишем в виде произведения n скобок

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = (x_1 + \dots + x_m) \cdots (x_1 + \dots + x_m).$$

При раскрытии скобок получим m^n слагаемых следующего вида $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, которые могут содержать повторяющиеся переменные. Пусть число повторений переменных $x_1, \dots, x_m$ равно соответственно $k_1, \dots, k_m$. Тогда

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}, \quad k_1 + \dots + k_m = n.$$

Число таких слагаемых равно числу перестановок с повторениями

$$P_{k_1,\dots,k_m} = C_n^{k_1,\dots,k_m}.$$

$\square$

При $m = 2$ полиномиальная формула принимает вид формулы бинома Ньютона.

Как следствие формулы бинома Ньютона получим

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad 0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k.$$

Пример

Записать функцию $(x+1)^5$ в виде полинома. Применим формулу бинома Ньютона. Получим

$$(x+1)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_n^k x^k = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

2.4 Метод включений и исключений

Теорема

Пусть A конечное множество и $|A| = n$. Пусть заданы некоторые свойства $p_1, \dots, p_m$ элементов множества A. Обозначим число элементов множества A, обладающих свойствами $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$, через $N(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$. Тогда число элементов множества A, не обладающих ни одним из свойств $p_1, \dots, p_m$, равно

$$N(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_m) = n - \left(\sum_{1 \le i \le m} N(p_i) - \sum_{1 \le i < j \le m} N(p_i, p_j) + \dots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{m-1} N(p_1, \dots, p_m) \right).$$

Доказательство.

Обозначим через A_i подмножество элементов множества A, обладающих свойством p_i.

Тогда $\overline{A}_i = A \setminus A_i$ есть подмножество элементов, которые не обладают свойством p_i.

Пересечение этих подмножеств

$$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A}_i$$

есть подмножество элементов, которые не обладают ни одним из свойств $p_1, \ldots, p_m$.

Из формулы включения-исключения следует

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}\overline{A_i}\right| = |A| - \left(\sum_{1\le i\le m}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1}|A_1\cap\cdots\cap A_m|\right).$$

В этом соотношении

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m}\overline{A_i}\right| = N(\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_m),\quad |A| = n,\quad |A_i| = N(p_i),$$

$$|A_i\cap A_j| = N(p_i,p_j),\quad \ldots,\quad |A_1\cap\cdots\cap A_m| = N(p_1,\ldots,p_m).$$

Пример

В компании производителя программного обеспечения работают 50 человек.

Из числа сотрудников компании 20 ведут разработки на языке программирования C++,
19 – на языке Java,
16 – на языке PHP,
12 – на C++ и Java,
8 – на C++ и PHP,
10 – на Java и PHP,
5 – на C++, Java и PHP.

Сколько сотрудников не используют в своей работе ни один из указанных языков программирования?

Обозначим свойства сотрудников:

p_1 – сотрудник использует в своей работе язык программирования C++;

p_2 – сотрудник использует в своей работе язык программирования Java;

p_3 – сотрудник использует в своей работе язык программирования PHP.

По методу включений и исключений

$$\begin{aligned} N(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3) = & n - (N(p_1) + N(p_2) + N(p_3) - \\ & - N(p_1, p_2) - N(p_1, p_3) - N(p_2, p_3) + N(p_1, p_2, p_3)) = \\ = & 50 - (20 + 19 + 16 - 12 - 8 - 10 + 5) = 20. \end{aligned}$$

Пример

Сколько натуральных чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Обозначим свойства чисел:

p_1 – число делится на 2;

p_2 – число делится на 3;

p_3 – число делится на 5.

Пусть $[a]$ есть целая часть числа. Тогда

$$N(p_1) = \frac{100}{2} = 50, \quad N(p_2) = \left[\frac{100}{3}\right] = 33, \quad N(p_3) = \frac{100}{5} = 20,$$

$$N(p_1, p_2) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3}\right] = 16, \quad N(p_1, p_3) = \frac{100}{2 \cdot 5} = 10,$$

$$N(p_2, p_3) = \left[\frac{100}{3 \cdot 5}\right] = 6, \quad N(p_1, p_2, p_3) = \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5}\right] = 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} N(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3) = & n - (N(p_1) + N(p_2) + N(p_3) - \\ & - N(p_1, p_2) - N(p_1, p_3) - N(p_2, p_3) + N(p_1, p_2, p_3)) = \\ = & 100 - (50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3) = 26. \end{aligned}$$

2.5 Число беспорядков

Определение

Рассмотрим множество $A = \{a_1; \dots; a_n\}$. Беспорядком называется любая перестановка элементов множества A

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}),$$

в которой ни какой из элементов не находится на своем месте, $i_j \neq j$. Число беспорядков называют субфакториалом и обозначают $!n$.

Пример

Беспорядки множества $\{1; 2; 3\}$ имеют вид

$$(2, 3, 1), \quad (3; 1; 2).$$

Теорема

Число беспорядков множества из n элементов равно

$$!n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Доказательство.

Число беспорядков можно определить, применяя метод включений и исключений. Обозначим через p_i свойство перестановки – элемент a_i расположен на своем месте. Тогда

$$N(p_i) = (n-1)!, \quad N(p_i, p_j) = (n-2)!, \quad \ldots, \quad N(p_1, \ldots, p_n) = 0! = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{1 \le i \le n} N(p_i) = C_n^1 (n-1)!, \quad \sum_{1 \le i < j \le n} N(p_i, p_j) = C_n^2 (n-2)!, \quad \ldots$$

Искомое значение субфакториала

$$!n = N(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n).$$

Всего различных перестановок $n!$. Согласно методу включений и исключений

$$\begin{aligned} !n &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n 0! = \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

□

Для субфакториала справедливо рекуррентное соотношение

$$!n = !(n-1)n + (-1)^n, \quad !1 = 0.$$

На основе методов математического анализа доказывается, что $!n$ есть ближайшее целое к числу $n!/e$ или целая часть числа $(n!+1)/e$.

Пример

Есть n писем и n конвертов. Письма случайным образом размещаются в конверты. Какова вероятность, что по крайней мере одно письмо попадёт в свой конверт?

Эта вероятность равна

$$1 - \frac{!n}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63212.$$

2.6 Число функций

Теорема

Пусть $|A| = m$, $|B| = n$. *Число всех функций* $f : A \to B$ *равно* n^m.

Доказательство.

Каждая функция есть упорядоченная (n, m)-выборка с повторениями из элементов множества B. Следовательно, число функций равно числу размещений с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

$\square$

Теорема

Пусть $|A| = |B| = n$. *Число всех биекций* $f : A \leftrightarrow B$ *равно* $n!$.

Доказательство.

Каждая биекция есть перестановка элементов множества B. Следовательно, число биекций равно $n!$. $\square$

Теорема

Пусть $|A| = m$, $|B| = n$, $m \leq n$. *Число всех инъекций* $f : A \to B$ *равно* A_n^m.

Доказательство.

Каждая инъекция есть упорядоченная (n, m)-выборка без повторений из элементов множества B. Следовательно, число инъекций равно числу размещений без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

$\square$

Теорема

Пусть $|A| = m$, $|B| = n$, $m \geq n$. *Число всех сюръекций* $f : A \to B$ *равно*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Доказательство.

Пусть F – множество всех функций $f : A \to B$. Множество сюръекций

$$F_s = \{f \in F |\ \forall y \in B\ \exists x \in A : y = f(x)\}.$$

Обозначим

$$B = \{y_1; \dots ; y_n\}, \quad F_i = \{f \in F |\ y_i \notin f(A)\}.$$

Тогда

$$F_s = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}, \quad \overline{F_i} = F \setminus F_i.$$

Следовательно, по методу включений и исключений

$$|F_s| = \left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}\right| = |F| - \left(\sum_{1 \le i \le n} |F_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |F_i \cap F_j| + \right.$$

$$\left. + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |F_i \cap F_j \cap F_k| - \dots + (-1)^{n-1} |F_1 \cap \dots \cap F_n| \right).$$

Учитывая, что

$$|F| = n^m, \quad |F_i| = (n-1)^m, \quad |F_i \cap F_j| = (n-2)^m, \quad \ldots,$$

получим

$$|F_s| = C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

$\square$

Пример

Сколькими способами можно разместить 5 различных марок в 3 различных конверта, если в каждом конверте должна быть по крайне мере одна марка?

Для решения этой задачи применим теорему о числе сюръекций. В данном случае $m = 5$, $n = 3$. Следовательно, число способов размещения марок равно

$$C_3^0 3^5 - C_3^1 2^5 + C_3^2 1^5 = 150.$$

Задачи

1.

Кодовый замок содержит 6 дисков. На каждом диске 8 букв. Для набора одной комбинации букв необходимо 6 секунд. Сколько суток потребуется для перебора всех возможных комбинаций букв?

2.

Сколько имён пользователей компьютерной системы можно составить из 26 букв латинского алфавита и 10 десятичных цифр, если длина каждого имени 5 символов, первые два символа неповторяющиеся буквы?

3.

На книжной полке 5 книг по математике, 3 книги по физике и 7 книг по информатике. Все книги различные. Необходимо выбрать две книги по различным предметам. Сколькими способами это можно сделать?

4.

Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если каждую из них можно использовать не более двух раз?

5.

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, если в этих числах цифры возрастают?

6.

Сколько существует подмножеств B множества $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ таких, что $|B| = 3$ или $|B| = 5$?

7.

Сколько существует двоичных векторов длины 8, содержащих не более 3-х единиц?

8.

Сколькими способами можно разместить 7 одинаковых предметов в 5 различных корзин? Сколько существует таких размещений, если не допускаются пустые корзины?

9.

Сколькими способами можно разместить 3 красных и 4 синих шара в 7 различных коробок?

10.

Сколько существует решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

среди неотрицательных целых чисел?

11.

Сколько различных слов можно составить из слова «математика», переставляя буквы в этом слове?

12.

Сколько различных слов можно составить из слова «программа», если две буквы «м» не стоят рядом в этих словах?

13.

Сколькими способами можно распределить 12 различных книг по трём библиотекам при условии, что каждая получит 4 книги?

14.

Найти коэффициент при x^{11} в выражении $(1 + x^3 - x^5)^{20}$.

15.

Доказать справедливость формулы

$$C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}.$$

16.

Доказать справедливость равенства

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

17.

Следующая формула получила название свертки Вандермонда

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}, \quad m, n \geq k.$$

Доказать справедливость этой формулы, используя комбинаторные правила суммы и произведения.

18.

Студенты прошли тестирование по трём предметам : A, B, C. Число студентов в группе 50. Из них тест A сдали 22 студента, B – 20, C – 18, A и B – 12, A и C – 6, B и C – 10, A, B и C – 4 студента. Сколько студентов не сдали ни один из тестов? Сколько сдали ровно два теста? Сколько сдали не менее двух тестов? Решить эту задачу, применяя метод включений и исключений.

19.

Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 100000, содержат цифры 3,6 и 9?

20.

Сколькими способами можно распределить 10 различных книг по 5 библиотекам, если каждая библиотека должна получить не менее одной книги?

21.

Сколько чисел можно составить из числа 1234567, переставляя цифры этого числа, если ровно три цифры остаются на своём первоначальном месте?

22.

Сколько существует разбиений множества из 5 элементов на непустые подмножества?