«بنام خدا» «۴۰۱۱۲۳۴۰۱۱۹۰۲» «سیگنال ها و سیستم ها»

① فرض کنید: $h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$, $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$ کانولوشن های زیر را حساب کنید.

الف) $y_1[n]=x[n]*h[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]=h[-1]x[n+1]+h[1]x[n-1]$

$=2x[n+1]+2x[n-1] \Rightarrow y_1[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]-2\delta[n-2]+2\delta[n-1]+4\delta[n-2]$

$-2\delta[n-4]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]-2\delta[n-4]$

ب) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n+2-k]=y_1[n+2]$

ج) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n+2-k]=y_1[n+2]$

② در یک سیستم خطی S رابطه زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن برقرار است: $y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,g[n-2k]$

که در آن $g[n]=u[n]-u[n-4]$ می باشد.

الف) برای $x[n]=\delta[n-1]$، $y[n]$ را بیابید $\Rightarrow \begin{cases} x[n]=\delta[n-1] \\ y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]\,g[n-2k] \Rightarrow y[n]=g[n-2]=u[n-2]-u[n-6] \end{cases}$

ب) برای $x[n]=\delta[n-2]$، $y[n]$ را بیابید $\Rightarrow x[n]=\delta[n-2] \Rightarrow y[n]=g[n-4]=u[n-4]-u[n-8]$

ج) آیا سیستم S، LTI است؟ $\Rightarrow$ سیستم LTI نیست

د) برای $x[n]=u[n]$، $y[n]$ را بیابید $\Rightarrow x[n]=u[n] \Rightarrow y[n]=\sum_{-\infty}^{+\infty} u[k]\,g[n-2k]=\sum_{-\infty}^{+\infty} g[n-2k]$

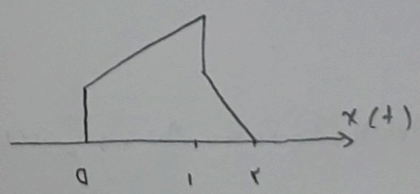
$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{+\infty} u[n-2k]-u[n-4-2k]=\begin{cases} 1 & n=0,1 \\ 2 & n>1 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

③ کانولوشن دو سیگنال زیر را تعیین و رسم کنید: $h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$, $x(t)=\begin{cases} t+1 & 0\le t\le 1 \\ 2-t & 1<t\le 2 \\ 0 \end{cases}$

$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$

$\Rightarrow y(t)=x(t+2)+2x(t+1)=\begin{cases} t+3 & -2<t\le -1 \\ t+4 & -1<t\le 0 \\ 2-2t & 0<t\le 1 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$



④ سیستم زمان-گسسته ای را با پاسخ ضربه ی زیر در نظر بگیرید: $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

الف) عدد صحیح A را چنان بیابید که $h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$ باشد.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]-A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}u[n-1]=\delta[n] \xrightarrow[\text{می دهیم}]{\text{n=1 را قرار}} \frac{1}{5}-A=0 \Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

ب) پاسخ ضربه $g[n]$ را برای سیستم LTI ای که معکوس سیستم ۱ است، تعیین کنید.

$$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]=h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right) \Rightarrow g[n]=\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]$$

---

⑤ کدام یک از پاسخ های ضربه ی زیر متناظر با سیستم های LTI پایدار است؟

الف) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h_1(\tau)d\tau|=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-2j)\tau}u(\tau)d\tau=\int_0^{\infty}e^{-\tau}d\tau=1$ پایدار است

ب) $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|h_2(\tau)d\tau|=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\cos(2\tau)u(\tau)d\tau=\int_0^{+\infty}|e^{-\tau}\cos(2\tau)|d\tau$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\tau}|\cos(2\tau)|d\tau<\infty$ پایدار است

ج) $h_3[n]=n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty}|h_3[k]|=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|k\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|u[n]=\sum_0^{+\infty}k\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right|=\infty$

پایدار نیست

د) $h_4[n]=3^n u[-n+10] \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty}|h_4[k]|=\sum_{-\infty}^{+\infty}3^n u[-n+10]=\sum_{-\infty}^{10}3^k=$ یک عدد محدود $\Rightarrow$ سیستم پایدار است

---

⑥ یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادله ی تفاضلی زیر با هم مرتبط شده‌اند:

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]$$

برای $x[n]=\delta[n-1]$ ، $y[n]$ را بیابید.

$$x[n]=\delta[n-1] \Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+\delta[n-1]$$

چون سیستم علّی است برای $n<1$ ، $y[n]=0$ است لذا:

$$\left.\begin{array}{l} y[1]=\frac{1}{2}y[0]+1=1 \\ y[2]=\frac{1}{2}\times 1+0=\frac{1}{2} \\ \vdots \\ y[m]=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \end{array}\right\} \Rightarrow y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

---

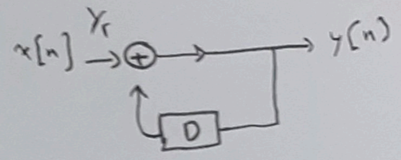
⑦ سطح زیر یک سیگنال زمان-پیوسته $v(t)$ به صورت زیر است $A_v=\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)dt$ نشان دهید اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ آنگاه $A_y=A_xA_h$.

$$A_y=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau dt$$

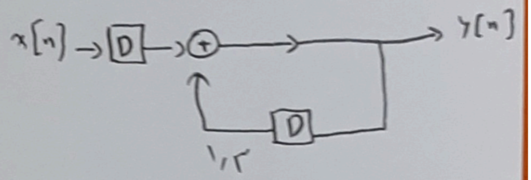
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)dt=A_xA_h$$

۸) نمایش های دیاگرام بلوکی سیستم های LTI علی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را رسم کنید:

الف) $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$



ب) $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n-1] \Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n-1]$



---

۹) توابع زیر پاسخ های ضربه سیستم های LTI زمان - گسسته هستند. برای هر سیستم تعیین کنید که آیا علی و یا پایدار است.

الف) $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$

علی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]=0$ پایدار است زیرا $\frac{1}{5}<1$ بود، و حاصل محدود می‌شود $\frac{5}{4}<\infty$

ب) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

غیرعلی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]\neq 0$ پایدار است زیرا $0.8<1$ ، صفر، و حاصل محدود است

پ) $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

غیرعلی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]\neq 0$ ناپایدار است زیرا $2>1$ و حاصل محدود نمی‌شود

ت) $h[n] = (5)^n u[3-n]$

غیرعلی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]\neq 0$ پایدار است زیرا $\frac{1}{5}<1$ ، حاصل محدود می‌شود

---

۱۰) کانولوشن $y[n] = x[n] * h[n]$ را برای سیگنال های زوج زیر محاسبه کنید.

الف) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n] \Rightarrow y[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha^k u[k] \alpha^{n-k} u[n-k]$

$= \alpha^n \sum_{0}^{+\infty} u[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$

ب) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n-4]$

$h[n] = 4^n u[2-n]$

$= 4^n \left(\sum_{n=4}^{+\infty} (-\frac{1}{8})^k u[2-n+k] \right) =$

$$\begin{cases} 4^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{8})^k - \sum_{k=0}^{3} (-\frac{1}{8})^k \right) & n \leq 6 \\ 4^n \left(\sum_{0}^{\infty} (-\frac{1}{8})^k - \sum_{0}^{n-1} (-\frac{1}{8})^k \right) & n > 6 \end{cases}$$