



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پروژه‌ی درس مبانی شبیه‌سازی عددی

عنوان:

شبیه‌سازی مدار سیارات فراخورشیدی در سیستم‌های دوتایی

استاد درس:

دکتر حسین عباسی

ارائه‌دهندگان:

بهنود بندی
آریا ایماق نائینی

*چکیده:

تعداد بسیار زیادی از ستارگان بخشی از سیستم‌های دوتایی هستند و همچنین در بسیاری از این ستاره‌ها سیاراتی فراخورشیدی وجود دارند که تعدادی از آن‌ها نیز کشف شده‌اند. با توجه به اینکه دینامیک سیستم‌های گرانشی شامل دو مولفه یا بیشتر در حالت کلی حل تحلیلی ندارد و همچنین دوره تناوب برخی از این سیارات بسیار زیاد است و با رصد کردن نیز مسیر آن‌ها قابل بررسی نیست، برای بررسی مدار این سیارات باید از شبیه‌سازی استفاده کنیم. در این پروژه ما سعی داریم چند مدار بسته و پایدار را در یک سیستم دوتایی نوعی بررسی کنیم. در آینده می‌توان با تعمیم این مسئله مدار را برای سیستم‌های پیچیده‌تر با مولفه‌های بیشتر بررسی کرد و همچنین می‌توان با محاسبه کمربند حیات هر سیستم احتمال وجود حیات در سیارات را بررسی کرد.

*مقدمه:

از دیرباز بشر همواره به دنبال آن بوده است که همتایی مانند خود در آسمان‌ها بیابد و این کنجکاوی تا به امروز نیز ادامه داشته است. همانطور که دور یک ستاره معمولی مانند خورشید تعدادی سیاره در حال گردش هستند، انتظار می‌رود دور دیگر ستارگان نیز سیاراتی وجود داشته باشند! نخستین رصد یک سیاره فراخورشیدی (Exoplanet) در سال ۱۹۸۸ انجام شد و نخستین تایید وجود یک سیاره سال ۱۹۹۲ صورت گرفت (PSRB1257+12B,C) که دور یک ستاره نوترونی در صورت فلکی سنبله می‌چرخد. با اکتشافات انجام شده تا ۱ ژوئن ۲۰۱۹ وجود ۴۰۷۱ سیاره در ۳۰۴۱ سامانه سیاره‌ای تایید شده است که ۶۵۹ سیستم بیش از یک سیاره تایید شده دارند! عمده این سیارات توسط تلسکوپ فضایی کپلر کشف شده‌اند که متعلق به ناسا و موسسه فناوری کالیفرنیا (CALTECH) می‌باشند. بیش از ۸۵ درصد ستاره‌ها در سامانه‌هایی با دو مولفه ستاره‌ای یا بیشتر قرار دارند. لفظ ستاره دوتایی نخستین بار در سال ۱۸۰۲ توسط سر ویلیام هرشل به کار رفت و تعریف او برای ستاره دوتایی اینگونه است: "یک ستاره دوتایی واقعی متشکل از دو ستاره است که یکدیگر را جذب می‌کنند". دو ستاره که به صورت تصادفی از دید ناظر زمینی به صورت دوتایی مشاهده می‌شوند، دوتایی دیدگانی یا نوری نام دارد که مشهورترین آن‌ها ستاره‌های عناق و سها در صورت فلکی دب اکبر هستند. با توجه به تعداد زیاد ستاره‌های دوتایی انتظار می‌رفت دور ستاره‌های دوتایی نیز سیارات فراخورشیدی

وجود داشته باشند. نخستین سیاره کشف شده در سیستم دوتایی PSRB1620-26 کشف شد که جرمی معادل با ۲/۵ برابر جرم خورشید دارد.

* مسئله سه جسم:

در گرانش مسئله دینامیک سه جسم مسئله‌ای است که از سو مولفه تشکیل شده باشد که این سه جسم، دو به دو باهم برهم‌کنش گرانشی داشته باشند. این دینامیک بر خلاف مسئله دو جسم در حالت عمومی حل تحلیلی خوش تعریف ندارد و برای حل آن باید از روش‌های عددی استفاده کرد. این مسئله، نوع خاص مسئله n جسم است. معادلات عمومی حرکت در یک سیستم سه جسم گرانشی به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}.\end{aligned}$$

معادلات بالا یک مجموعه با نه معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دو است که در آن‌ها m_i جرم و r_i مکان جسم i ام است.

در این بررسی جرم سیاره نسبت به جرم دو ستاره بسیار کوچک است و می‌توان از تاثیر جرم سیاره روی مسیر حرکت دو ستاره صرف نظر کرد. همچنین این مسئله را در شرایطی خاص حل می‌کنیم: فرض می‌کنیم جرم دو ستاره باهم برابر است و همواره بر روی یک دایره به شعاع R حرکت می‌کنند. در این حالت معادلات ما به شکل زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 &= -\frac{GM(r_1 - r_2)}{(2R)^3}, \\ \ddot{r}_2 &= -\frac{GM(r_2 - r_1)}{(2R)^3}\end{aligned}$$

که در این معادلات بردار مکان جسم ۱ (r_1) با منفی بردار مکان جسم ۲ ($-r_2$) برابر است. در نتیجه معادله حرکت سیاره به این شکل در می آید:

$$\ddot{r}_p = -\frac{GM(r_p-r_1)}{|r_p-r_1|^3} - \frac{GM(r_p+r_1)}{|r_p+r_1|^3}$$

قرارداد می کنیم که دو ستاره روی مدار دایروی خود با سرعت زاویه ω به دور دستگاه مرکز جرم دو ستاره می گردد. پس برای مکان دو ستاره می توان چنین نوشت:

$$r_1 = (R\cos(\omega t), R(\sin(\omega t), 0)$$

$$r_2 = -r_1$$

با حل معادلات حرکت به صورت عددی می توانیم مکان سیاره را محاسبه کنیم.

*حل عددی مسئله سه جسم:

حال می خواهیم مسئله سه جسم را به صورت عددی حل کنیم. برای این امر، از یک روش حل عددی مرتبه اول استفاده می کنیم که در آن مکان سیاره در هر لحظه با توجه به مکان قبلی و شتاب گرانشی آن محاسبه می شود. شتاب گرانشی در قسمت قبل معرفی شده است که مستقل از زمان می باشد. در ابتدا شرایط اولیه این مسئله با مقادیر r_0 و v_0 تعیین می شود. مکان سیاره از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$r_1(i) = R(\cos\omega(i-1)\Delta t, \sin\omega(i-1)\Delta t)$$

$$r_2 = -r_1$$

که مولفه سرعت در آن از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$v_p(i) = v_p(i-1) + a_p(i-1)\Delta t$$

همچنین بردار r_i از این رابطه محاسبه می شود:

$$r_p(i+1) = r_p(i) + v_p(i)\Delta t$$

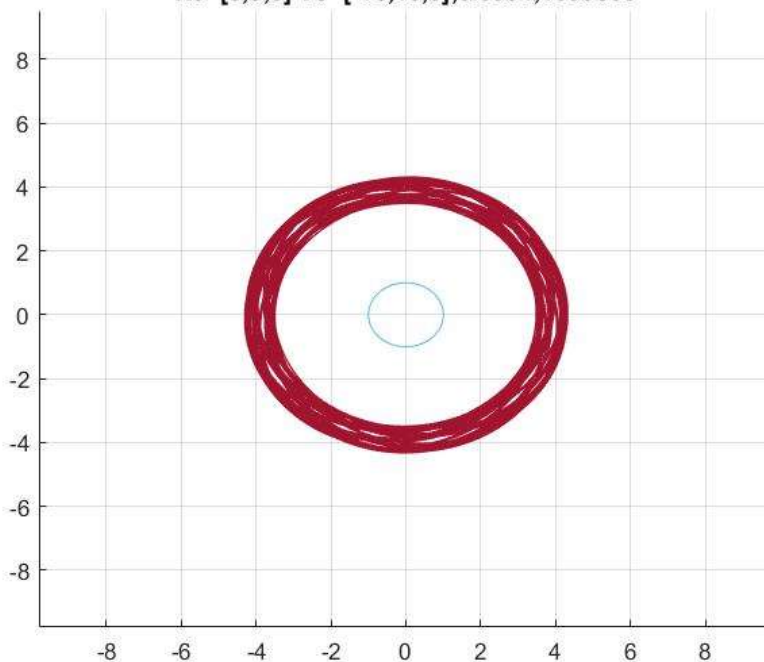
در این معادلات خطای v_p از مرتبه Δt^2 می باشد. در معادله مربوط به مکان علاوه بر خطا از مرتبه Δt^2 که به دلیل حذف جملات مرتبه بالاتر ایجاد می شود، یک خطا از مرتبه Δt^3 به دلیل وجود خطا در v_p ایجاد می شود. با توجه به اینکه Δt های انتخاب شده کوچک تر از یک است، از خطای Δt^3 صرف نظر می کنیم. پس مرتبه خطای موقعیت Δt^2 می باشد.

*نتایج:

حال به بررسی چند شبیه سازی انجام شده می پردازیم:
در نمودارهای زیر، شکل مدار و نمای لیپانوف هر کدام به ازای مقادیر اولیه مختلف زمان و مکان و همچنین Δt های مختلف رسم شده است.

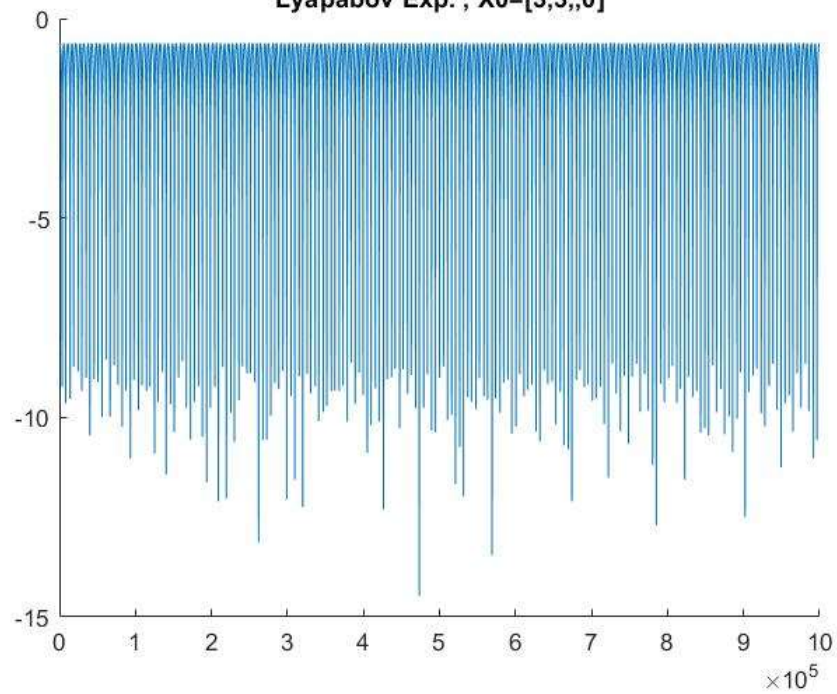
$$\Delta t = 0.0001, n = 1000000$$

$$X0=[3,3,0] \quad V0=[-15,15,0], 0.0001, 1000000$$



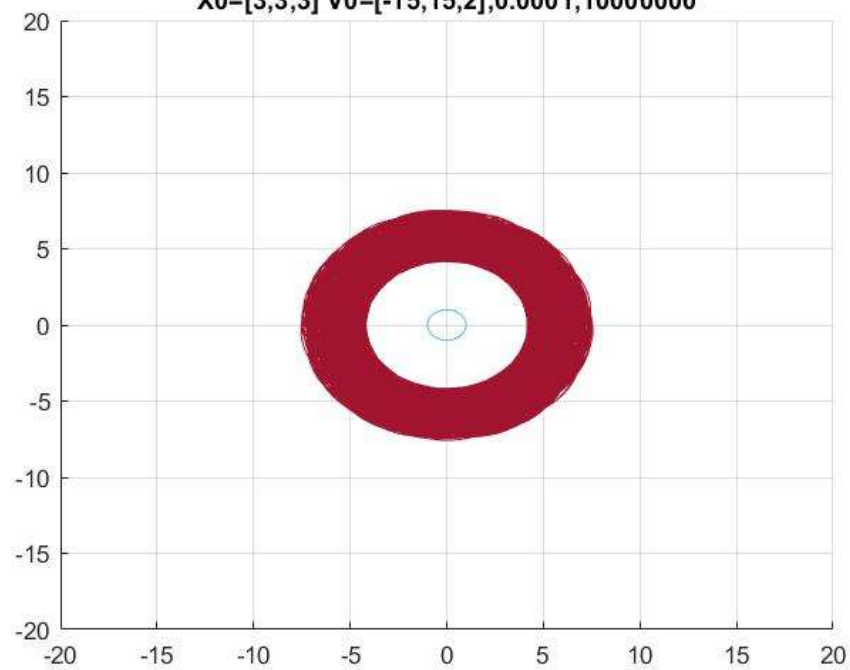
$\Delta t = 0.0001, n = 1000000$

Lyapabov Exp. , $X_0=[3,3,,0]$

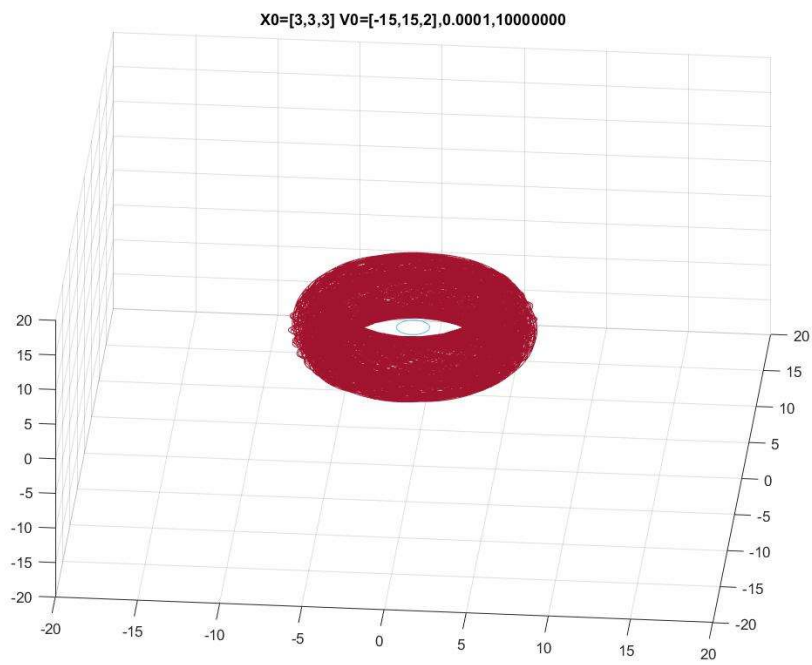


$\Delta t = 0.0001, n = 10000000$

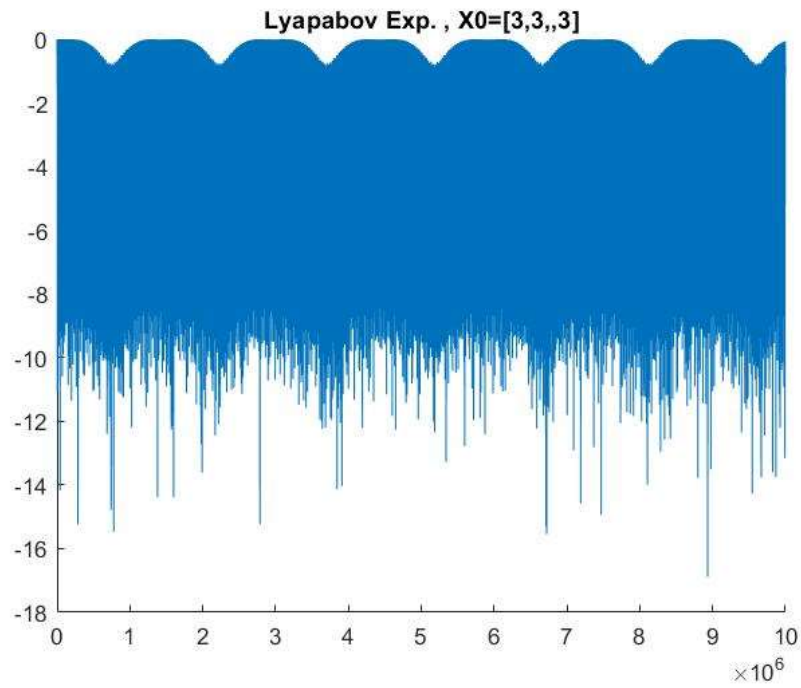
$X_0=[3,3,3]$ $V_0=[-15,15,2], 0.0001, 10000000$



$$\Delta t = 0.0001, n = 10000000$$

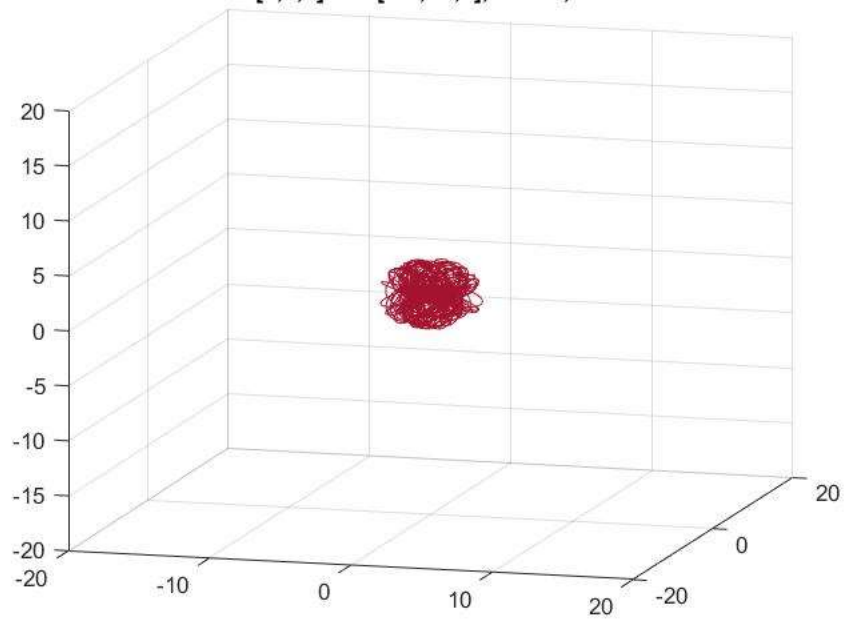


$$\Delta t = 0.0001, n = 10000000$$



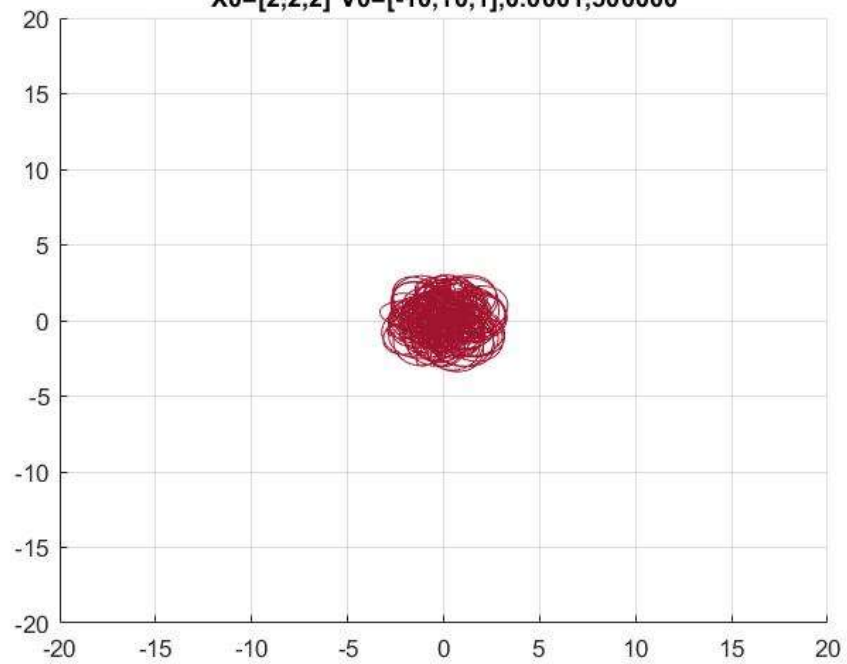
$\Delta t = 0.0001, n = 500000$

$X0=[2,2,2]$ $V0=[-10,10,1], 0.0001, 500000$

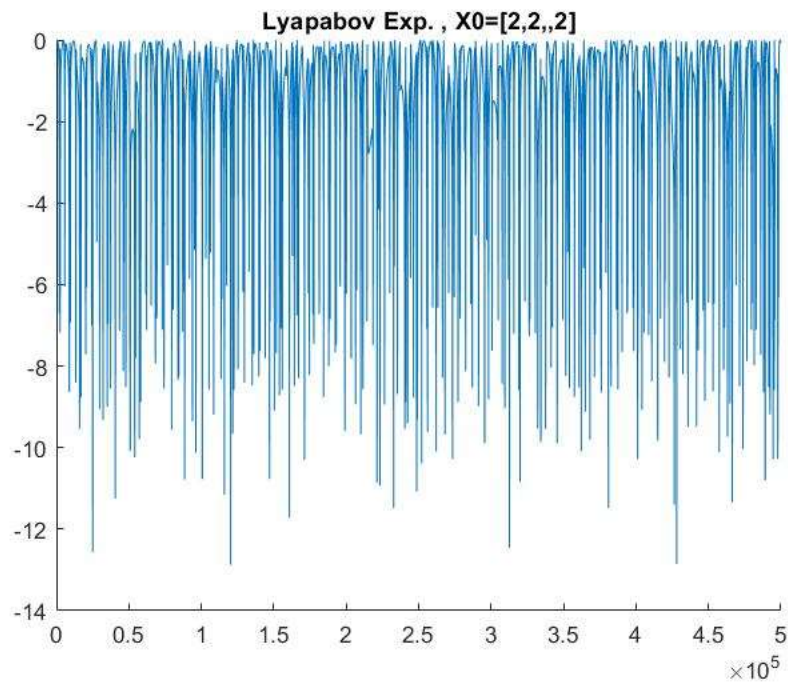


$\Delta t = 0.0001, n = 500000$

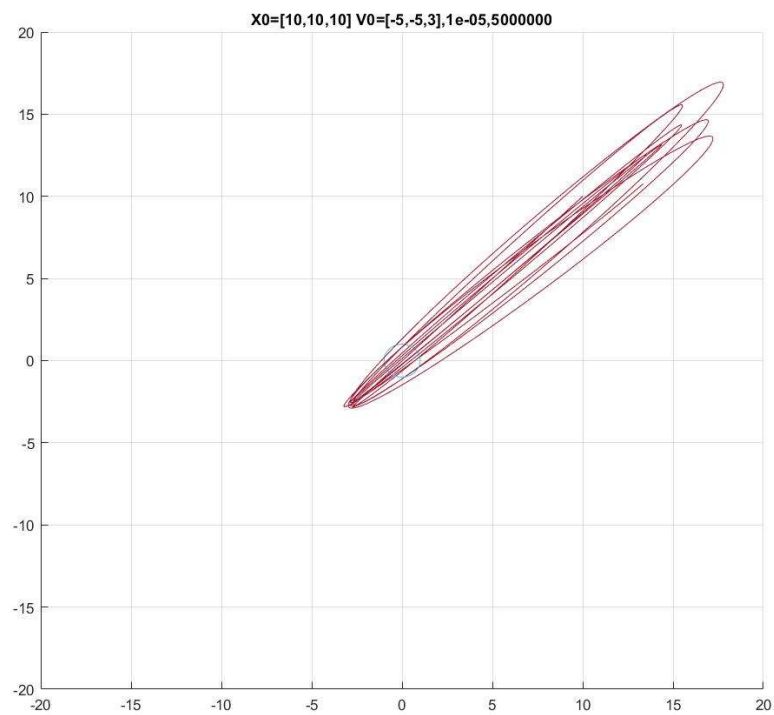
$X0=[2,2,2]$ $V0=[-10,10,1], 0.0001, 500000$



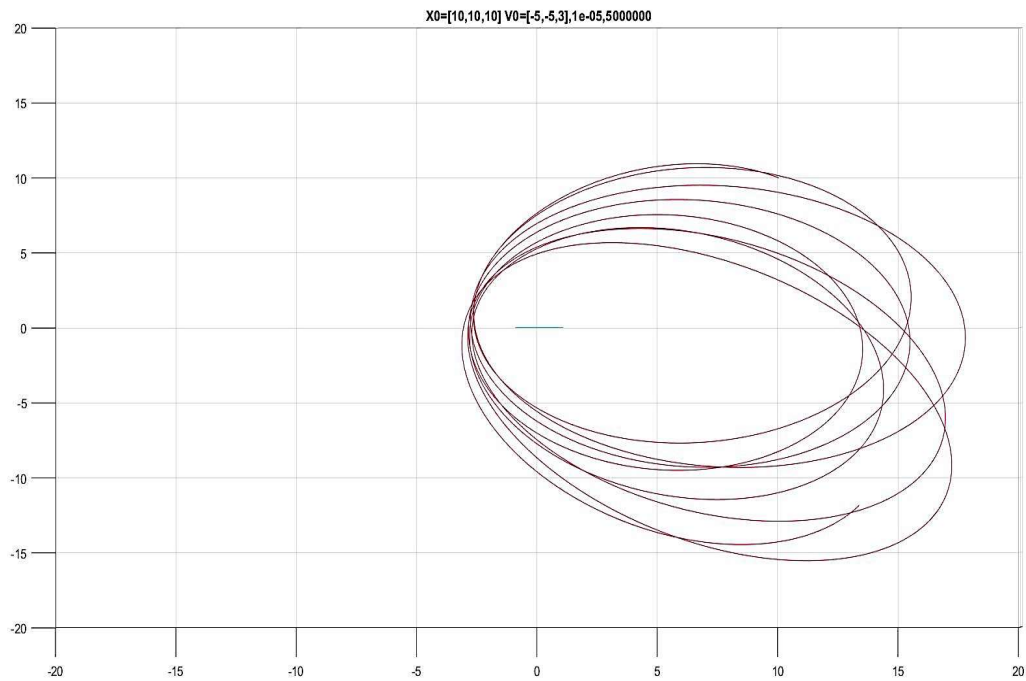
$$\Delta t = 0.0001, n = 500000$$



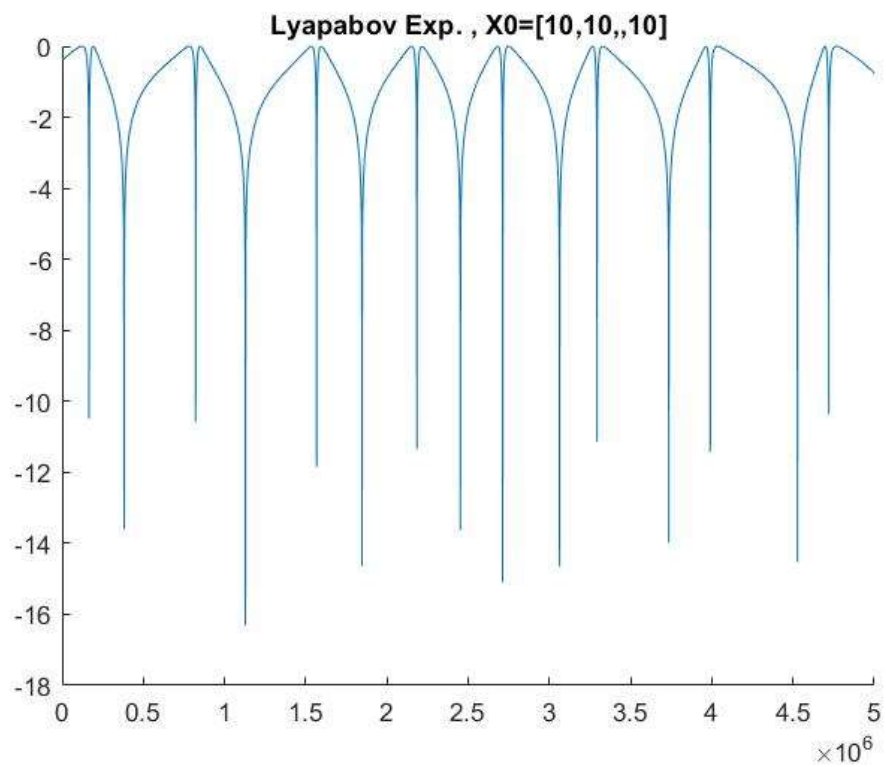
$$\Delta t = 0.0001, n = 5000000$$



$$\Delta t = 0.0001, n = 5000000$$

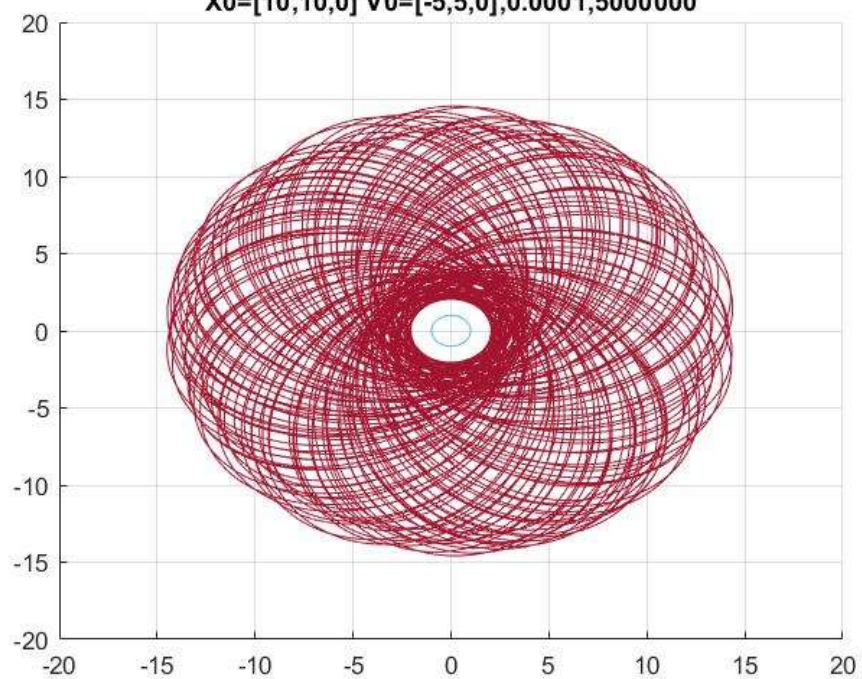


$$\Delta t = 0.0001, n = 5000000$$



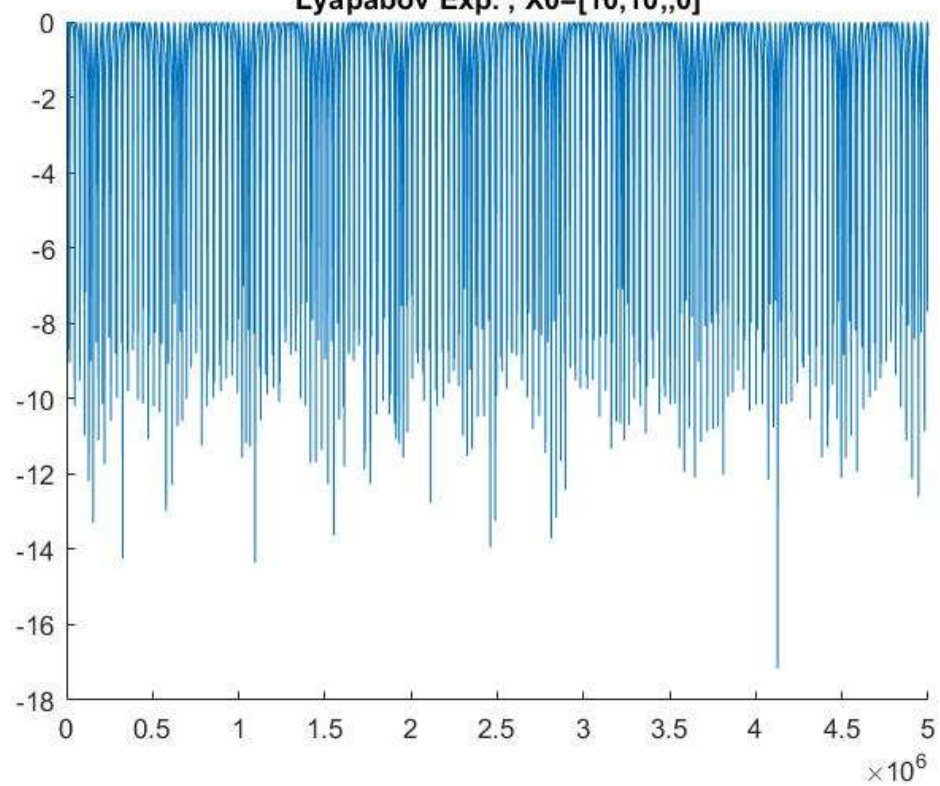
$\Delta t = 0.0001, n = 5000000$

$X0=[10,10,0]$ $V0=[-5,5,0], 0.0001, 5000000$



$\Delta t = 0.0001, n = 1000000$

Lyapabov Exp. , $X0=[10,10,,0]$



با توجه به شکل مدارهای شبیه‌سازی شده و نمودار نمای لیاپانوف آن‌ها نتیجه می‌گیریم در این سیستم دوتایی فرضی مدارهای بسته و پایداری برای سیارات می‌تواند وجود داشته باشد. نمای لیاپانوف این مدارها در برخی نقاط به مقدار صفر می‌رسد که در آن نقاط سیستم رفتار آشوبناک پیدا می‌کند و انتظار می‌رود تغییراتی که در شکل مدار رخ می‌دهد به واسطه پدیده آشوب باشد.

*منابع:

1. Book: Planetary systems – Springer A&A Library
2. Book: Chaos in astronomy – Springer A&A Library
3. Book: Orbital Mechanics for engineering students
4. Book: Gravitational N-Body Simulation – J. Aarseth-University of Cam.
5. Site: <https://exoplanets.nasa.gov/>
6. Site: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>
7. Site: <https://spaceplace.nasa.gov/all-about-exoplanets/en/>

* کد شبیه‌سازی و نتایج را می‌توانید از صفحه گیت هاب زیر دریافت کنید:

https://github.com/Behnoodbandi/Binary_sys_exoplanet