



University of Tehran

## آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۷ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

### سؤال ۱.

در سرشماری سال ۱۳۹۵، درصد خانوارهایی که زیر خط فقر زندگی می کنند برابر با  $۱۶/۸\%$  اعلام شد. در سال ۱۳۹۹ یک دانشجوی اقتصاد در دانشگاه تهران با بررسی مجموع درآمدهای ۱۵۰۰ خانوار ایرانی که به صورت تصادفی انتخاب شده بودند، به این نتیجه رسید که  $۱۸/۴\%$  خانوارهای ایرانی زیر خط فقر زندگی می کنند. با طراحی و اجرای آزمون فرض مناسب بررسی کنید آیا درصد خانوارهای زیر خط فقر در این ۵ سال افزایش یافته است یا خیر؟

### سؤال ۲.

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌هایی با اندازه‌ی  $n$  از متغیر تصادفی برنولی  $Ber(0.9)$  باشند.

الف) با استفاده از نامساوی چبی شف مقدار  $\alpha$  را به گونه‌ای تعیین کنید که برای نمونه‌ای با اندازه  $n = 90$  داشته باشیم:

$$P\{|\bar{X} - p| \geq 0.05\} \leq \alpha$$

ب) با استفاده از نامساوی چبی شف، مقدار  $n$  را به گونه‌ای به دست آورید که داشته باشیم:

$$P\{|\bar{X} - p| \geq 0.03\} \leq 0.1$$

### سؤال ۳.

میانگین نمره آمار و احتمال ۸۱ دانشجوی دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تهران که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند برابر با ۱۳ و انحراف معیار آن برابر با ۳ است. بازه‌های اطمینان  $90\%$ ،  $95\%$  و  $99\%$  را برای میانگین نمره درس آمار و احتمال کل دانشجویان این دانشکده پیدا کنید.

### سؤال ۴.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع‌های احتمال داده شده هستند. در هر حالت برای  $\theta$  تخمین *Maximum Likelihood* را بیابید.

- a)  $f(x; \theta) = (\frac{1}{2\theta^3})x^2 e^{-\frac{x}{\theta}}; \quad 0 < x < \infty, 0 < \theta < \infty$   
 b)  $f(x; \theta) = (\frac{1}{2})e^{-|x-\theta|}; \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$

## سوال ۵.

تابع چگالی احتمال (pdf) زیر برای  $X$  به ما داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{4}{\theta^3})x & 0 < x < \frac{\theta}{2} \\ (-\frac{4}{\theta^3})x + \frac{4}{\theta} & \frac{\theta}{2} < x \leq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\theta \in \Omega = \{\theta : 0 < \theta \leq 2\}$$

الف) تخمین گر  $\theta$  را با استفاده از روش ممان‌ها بیابید.

ب) برای مشاهدات زیر از  $X$  تخمین نقطه‌ای از  $\theta$  را ارائه دهید.

$$0.4188, 0.3557, 0.2577, 0.2408, 0.3206, 0.5592, 0.4532, 0.5422, 0.240, 0.5601$$

## پاسخ.

سوال (۱)

$$H_0 : k = 0.168, H_1 : k > 0.168$$

که در آن منظور از  $k$  درصد خانوارهای زیر خط فقر است.

$$np = 1500 \times 0.168 = 252 > 10, n(1-p) = 1248 > 10$$

پس شرط استقلال و بزرگ بودن نمونه برقرار است و می‌توانیم از  $CLT$  استفاده کنیم.

$$\hat{k} = 18.4 \times \hat{k} \sim N(16.8 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) = N(16.8 \sqrt{16.8 \times \frac{83.2}{1500}}) = N(16.8, 0.96)$$

$$p_{value} = P(z > \frac{18.4 - 16.8}{0.9653}) = P(z > 1.65) = 1 - P(z \leq 1.65) = 0.0495 < 0.05$$

بنابراین فرض صفر رد می‌شود و می‌توان گفت درصد خانوارهای زیر خط فقر افزایش یافته است.

سوال (۲) الف)

$$P\{|x - \mu| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \rightarrow P\{|x - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow P\{|\bar{X} - E(\bar{X})| \geq \epsilon\} \leq \frac{Var(\bar{X})}{\epsilon^2} \quad (1)$$

$$X \sim Bernoulli(0.9) \rightarrow E(X) = 0.9, Var(X) = p(1-p) = 0.09$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = 0.9, Var(\bar{X}) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = 0.01 \quad (2)$$

با استفاده از روابط (۱) و (۲):

$$P\{|\bar{X} - 0.9| \geq 0.05\} \leq \frac{0.01}{0.05^2} = 0.4 \rightarrow \alpha = 0.4$$

ب) با استفاده از روابط (۱) و (۲) بخش الف:

$$P\{|\bar{X} - 0.9| \geq 0.03\} \leq \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{0.03^2} = 0.01 \rightarrow n = 1000$$

سوال ۳)

$$n = 81, \bar{X} = 13, S = 3$$

شرایط قضیه  $CLT$  برقرار است. بازه‌ی اطمینان  $1 - \alpha$  برابر است با:

$$(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}})$$

بازه‌ی اطمینان ۹۰٪: (۱۲/۵۵, ۱۳/۵۵)

بازه‌ی اطمینان ۹۵٪: (۱۲/۳۵, ۱۳/۶۵)

بازه‌ی اطمینان ۹۹٪: (۱۲/۱۴, ۱۳/۸۵)

سوال ۴) برای هر دو حالت، ابتدا  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$  را محاسبه کنید. سپس از این عبارت  $Ln$  بگیرید و سعی کنید عبارت حاصل را بیشینه کنید.

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{3} \quad \text{الف)}$$

ب)  $\hat{\theta} = Median$ . راهنمایی: عبارت  $\sum_{i=1}^n |x_i - \theta|$  توسط میانه ماکزیمم می‌شود.

سوال ۵) الف)

$$\mu = E(X) = \int_0^{\theta} x f(x) dx = \frac{1}{2} \theta \rightarrow \frac{1}{2} \theta = \bar{X} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = 2\bar{X}$$

ب)

$$\bar{X} = \frac{0.3206 + 0.2408 + 0.2577 + \dots + 0.5422 + 0.4532 + 0.5592}{10} = 0.37323 \Rightarrow$$

$$\hat{\theta} = 2\bar{X} = 2 \times 0.37323 = 0.74646$$