University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۶ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

سؤال ۱.

برای $\alpha > ۰$ تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف شده است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{\alpha^{۲}} & ۰ < x \times y < \alpha \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال و توزیع انباشته‌ی متغیر تصادفی $W = max\{\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X}\}$ را بدست آورید.

سؤال ۲.

فرض کنید که X و Y متغیرهای تصادفی با ضریب همبستگی ρ باشند. نشان دهید که:

$$E\{Var(Y|X)\} \leq (۱ - \rho^{۲})Var(Y)$$

سؤال ۳.

متغیرهای تصادفی مستقل X و Y که دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ و μ می‌باشند را در نظر بگیرید.

الف) توزیع S (توزیع مشترک مجموع این دو متغیر تصادفی) را بیابید.

ب) توزیع R توزیع مشترک نسبت X به S ($\frac{X}{X+Y}$) را بیابید.

ج) چگالی احتمال R را محاسبه کنید.

سؤال ۴.

فرض کنید رای دادن هر فرد یک جامعه به یک کاندید خاص توزیع برنولی $Ber(۰/۵۵)$ داشته باشد. همه نمونه‌های ممکن با اندازه ۳ را در این جامعه در نظر بگیرید و برای آنها میانگین و واریانس نمونه را حساب کنید. تابع جرم احتمال نمونه‌ها را به دست آورید.

سؤال ۵.

فرض کنید دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_1, ..., X_n\}$ با نمونه‌برداری از جامعه‌ای با توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ به دست آمده باشد. اگر $\overline{X}$ میانگین نمونه و S^2 واریانس نمونه باشند، نشان دهید:

الف) $Cov(\overline{X}, X_i - \overline{X}) = 0$

ب) $\overline{X}$ و S^2 مستقل از هم هستند.

سؤال ۶.

اگر X و Y دارای توزیع مشترک نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 ، واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 و ضریب همبستگی ρ باشند، نشان دهید که:

الف) $E\{X|Y\} = \mu_1 + \rho\sigma_1(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2})$

ب) $Var(X|Y) = \sigma_1^2(1-\rho^2)$

سؤال ۷.

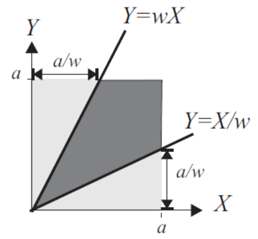
در قرعه‌کشی هفتگی بانک بلوط، مقدار پایه‌ی جایزه برابر است با ۱ میلیون تومان و به ازای هر ثبت‌نام که هزینه‌اش ۱ تومان است، به اندازه‌ی ۰.۵ تومان به جایزه اضافه می‌شود. قرعه‌کشی بصورت هفتگی انجام می‌شود و برای تبلیغ آن، در شروع هر روز میزان جایزه تا آن موقع اعلام می‌شود. در صبح روز i ام قبل از انجام قرعه‌کشی، مقدار لحظه‌ای جایزه یعنی J_i اعلام شده است. در این روز تعداد ثبت‌نام‌های انجام شده، N_i ، یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون و امید ریاضی J_i است. بنابراین ۶ روز قبل از قرعه‌کشی در ابتدای روز مقدار جایزه از ۱ میلیون تومان شروع می‌شود و N_6 ثبت‌نام صورت می‌گیرند. در روز قرعه‌کشی، مقدار جایزه در ابتدای روز برابر است با J_0 و N_0 ثبت‌نام نیز تا شب که قرعه‌کشی انجام شود، صورت می‌گیرد. امید ریاضی و واریانس J یعنی مقدار جایزه در زمان قرعه‌کشی در انتهای روز را بدست آورید. (راهنمایی: از امید ریاضی شرطی استفاده کنید.)

پاسخ.

سوال ۱) می‌دانیم که در هر حال W عددی بزرگتر از یا مساوی ۱ است، زیرا یکی از دو کسر داده شده صورتش از مخرجش بزرگتر یا مساوی خواهد بود. بنابراین برای F_W می‌دانیم که برای مقادیر کمتر از صفر مقدار آن صفر است. برای مقادیر بزرگتر یا مساوی ۱ داریم:

$$
\begin{aligned}
F_W(w) &= P[max(\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X}) \leq w] \\
&= P[(\frac{X}{Y}) \leq w,\ (\frac{Y}{X}) \leq w] \\
&= P[Y \geq \frac{X}{w},\ Y \leq wX] \\
&= P[\frac{X}{w} \leq Y \leq wX]
\end{aligned}
$$

ناحیه‌ای که عبارت بالا مشخص می‌کند در شکل زیر با هاشور نمایش داده شده است. چون احتمال به صورت یکنواخت پخش شده است، ترجیح می‌دهیم که بصورت هندسی مساله را با مساحت حل کنیم. مساحت هر کدام از دو مثلث روشن‌تر در مربع زیر برابر است با $\frac{a^2}{2w}$



بنابراین برای احتمال بالا داریم:

$$P[\frac{X}{w} \leq Y \leq wX] = ۱ - \frac{\frac{a^۲}{۲w} + \frac{a^۲}{۲w}}{a^۲} = ۱ - \frac{۱}{w}$$

و در نهایت برای CDF داریم:

$$F_W(w) = \begin{cases} ۰ & w < ۱ \\ ۱ - \frac{۱}{w} & w \geq ۱ \end{cases}$$

همچنین با مشتق گرفتن از این عبارت، به PDF می‌رسیم:

$$f_W(w) = \begin{cases} ۰ & w < ۱ \\ \frac{۱}{w^۲} & w \geq ۱ \end{cases}$$

سوال ۲) می‌دانیم که $Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X))$ و $-۱ \leq \rho \leq ۱$ و اینکه واریانس یک کمیت همیشه نامنفی است. اثبات را به صورت بازگشتی انجام می‌دهیم.

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\begin{cases} (۱ - \rho^۲)Var(Y) \geq E(Var(Y|X)) \\ Var(Y) \geq E(Var(Y|X)) \end{cases} \longrightarrow (۲ - \rho^۲)Var(Y) \geq ۲E(Var(Y|X))$$

$$\begin{cases} (۲ - \rho^۲)Var(Y) \geq ۲E(Var(Y|X)) \\ \rho^۲Var(Y) \geq ۰ \end{cases} \longrightarrow ۲Var(Y) \geq ۲E(Var(Y|X)) \Longrightarrow$$

$$Var(Y) \geq E(Var(Y|X))$$

به یک گزاره‌ی صحیح رسیدیم، پس فرض اولیه‌مان درست بوده و قضیه اثبات می‌شود.

سوال ۳) الف) با توجه به مستقل بودن دو متغیر تصادفی می‌توان نوشت:

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y)f_Y(y)\,dy = ۱ - e^{-\mu s} - (\frac{e^{-\mu s} - e^{-\lambda s}}{\lambda - \mu})$$

ب)

$$F_R(r) = P(\frac{X}{X+Y} \leq r) = \iint_{\frac{x}{x+y} \leq r} f_{XY}(x,y)\,dxdy = \iint_{\frac{x}{x+y} \leq r} f_X(x)f_Y(y)\,dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{r}{۱-r}y} f_X(x)f_Y(y)\,dxdy = ۱ - (\frac{\mu(۱-r)}{r\lambda + (۱-r)\mu})(e^{-s(\frac{r\lambda}{۱-r}+\mu)} - ۱)$$

ج)

$$f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr}$$

سوال ۴)

$$(0,0,0) : \hat{X} = 0;\ S^2 = 0;\ p = (0/55)^0(0/45)^3$$
$$(0,0,1) : \hat{X} = \frac{1}{3};\ S^2 = \frac{1}{3};\ p = (0/55)^1(0/45)^2$$
$$(0,1,0) : \hat{X} = \frac{1}{3};\ S^2 = \frac{1}{3};\ p = (0/55)^1(0/45)^2$$
$$(1,0,0) : \hat{X} = \frac{1}{3};\ S^2 = \frac{1}{3};\ p = (0/55)^1(0/45)^2$$
$$(1,0,1) : \hat{X} = \frac{2}{3};\ S^2 = \frac{1}{2};\ p = (0/55)^2(0/45)^1$$
$$(0,1,1) : \hat{X} = \frac{2}{3};\ S^2 = \frac{1}{2};\ p = (0/55)^2(0/45)^1$$
$$(1,1,0) : \hat{X} = \frac{2}{3};\ S^2 = \frac{1}{2};\ p = (0/55)^2(0/45)^1$$
$$(1,1,1) : \hat{X} = 1;\ S^2 = 0;\ p = (0/55)^3(0/45)^0$$

$$P(\hat{X} = 0) = (0/45)^3$$
$$P(\hat{X} = \frac{1}{3}) = 3(0/45)^2(0/55)^1$$
$$P(\hat{X} = \frac{2}{3}) = 3(0/45)^1(0/55)^2$$
$$P(\hat{X} = 1) = (0/55)^3$$
$$P(S^2 = 0) = (0/45)^3 + (0/55)^3$$
$$P(S^2 = \frac{1}{3}) = 3(0/45)^2(0/55)^1$$
$$P(S^2 = \frac{1}{2}) = 3(0/45)^1(0/55)^2$$

سوال ۵) الف) برای اثبات از روابط زیر استفاده کنید: اگر $\bar{X}$ میانگین نمونه باشد، آنگاه: $E(\bar{X}) = E(X_i) = \mu$ و همچنین داریم:

$$Var(\bar{X}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = Var(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}) = \sum_{i=1}^{n} Var(\frac{X_i}{n}) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

به این نکته نیز توجه کنید که از آنجا که هر کدام از متغیرهای تصادفی از یکدیگر مستقل هستند، پس: $Cov(X_i, X_j) = 0$

ب) طبق تعریف واریانس نمونه داریم:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

همچنین در قسمت الف ثابت کردیم که:

$$Cov(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$Cov(\bar{X}, (X_i - \bar{X})^2) = 0$$

پس:

$$Cov(S^2, \bar{X}) = Cov(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} Cov(\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}, \bar{X}) = 0$$

بنابراین S^2 و $\bar{X}$ مستقل هستند.

سوال ۶) با استفاده از رابطه موجود برای تابع چگالی دو متغیر تصادفی که دارای توزیع مشترک نرمال هستند، $f_{X,Y}(x,y)$ را بدست می‌آوریم.
از طرفی می‌دانیم: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
با ساده کردن رابطه‌ی فوق، به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} exp\{\frac{-[x-(\mu_1+\frac{\rho(y-\mu_2)\sigma_1}{\sigma_2})]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\} = \frac{1}{\sigma_{X|Y}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu_{X|Y})^2}{2\sigma^2_{X|Y}}}$$

بنابراین:

$$\sigma_{X|Y} = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2} \rightarrow Var(X|Y) = \sigma_1^2(1-\rho^2) \rightarrow \mu_{X|Y} = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1(y-\mu_2)}{\sigma_2}$$

سوال ۷) طبق گفته‌های سوال می‌دانیم که رابطه زیر برای $i = 1, 2, ..., 6$ و همینطور برای J نسبت به J_1 برقرار است و داریم: $J_6 = 10^6$.

$$J_{i-1} = J_i + \frac{N_i}{2}$$

و همینطور از آنجا که هر کدام از N_i ها از توزیع پواسون با امید ریاضی J_i تبعیت می‌کند، پارامتر آن نیز برابر J_i خواهد بود. همچنین می‌دانیم که اگر $J_i = j$ باشد، N_i یک توزیع پواسون با میانگین j دارد و داریم:

$$E(N_i^2|J_i=j) = Var(N_i|J_i=j) + (E(N_i|J_i=j))^2 = j + j^2$$

بنابراین برای امید ریاضی J رابطه‌ی بازگشتی زیر را داریم و از توالی این رابطه از J_1 تا J_6 داریم:

$$E(J_{i-1}|J_i) = E(J_i|J_i) + \frac{1}{2}E(N_i|J_i) = J_i + \frac{J_i}{2} = \frac{3J_i}{2}$$

$$E(J_{i-1}) = E(E(J_{i-1}|J_i)) = \frac{3}{2}E(J_i)$$

$$E(J_i) = (\frac{3}{2})^{6-i}10^6$$

و داریم:

$$E(J) = (\frac{3}{2}E(J_\cdot)) = (\frac{3}{2})^7 10^6$$

حال برای محاسبه‌ی واریانس نیز، می‌دانیم رابطه‌ی بازگشتی زیر برقرار است:

$$E(J_{i-1}^2) = (\frac{3}{2})^2 E(J_i^2) + \frac{E(J_i)}{4}$$

می‌دانیم که $E(J_6^2) = 10^{12}$. از این رابطه‌ی بازگشتی استفاده می‌کنیم تا مقادیر $E(J_i^2)$ را بدست آوریم. در نهایت خواهیم داشت:

$$Var(J) = E(J^2) - (E(J))^2 = \frac{10^6}{2}(\frac{3}{2})^6((\frac{3}{2})^7 - 1)$$