University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۱ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

گردآورنده: مهدی جهانی

آخرین تاریخ به‌روزرسانی January ۱۲، ۲۰۲۳

سؤال ۱.

جایگشت‌های موجود در کلمه‌ی ELLIPSE را در هر بخش طبق شرط ذکر شده پیدا کنید:
الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.
ب) جایگشت با حرف S شروع شود.
پ) دو حرف L کنار هم قرار داشته باشند.
ت) حروف به ترتیب حروف الفبا قرار بگیرند.

سؤال ۲.

۹ نفر می‌خواهند دور یک میز بنشینند. به چند حالت این کار امکان‌پذیر است اگر:
الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.
ب) محمدرضا و علیرضا بخواهند در کنار یکدیگر بنشینند.
پ) محمدرضا، علیرضا و حمیدرضا بخواهند در کنار یکدیگر بنشینند

سؤال ۳.

می‌خواهیم از بین ۴ مرد و ۶ زن یک مجموعه‌ی ۵ نفری انتخاب کنیم. در هر بخش طبق شرط ذکر شده تعداد راه‌های تشکیل این مجموعه‌ی ۵ نفری را محاسبه کنید:
الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.
ب) مجموعه تنها شامل زن‌ها باشد.
پ) حداقل یک مرد در مجموعه باشد.
ت) تعداد زن‌ها بیشتر باشد.

سؤال ۴.

چند عدد ۴ رقمی متمایز با ارقام ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵، ۶، ۷ وجود دارد؟

سؤال ۵.

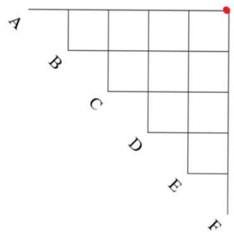
در بازی A ۳ بار یک تاس را می‌اندازیم و درصورتی برنده می‌شویم که حداقل یک بار ۱ بگیریم. در بازی B ۶ بار یک تاس را می‌اندازیم و در صورتی می‌بریم که حداقل دو بار ۱ بگیریم. در بازی C ۹ بار یک تاس را می‌اندازیم و در صورتی می‌بریم که حداقل سه بار ۱ بگیریم.
الف) با اثبات نشان دهید که در کدام یک از بازی‌ها شانس برد ما بیشتر است؟
ب) احتمال باخت در بازی A چقدر است؟
پ) دو روش باخت در بازی B چیست؟ احتمال هر یک چقدر است؟ به طور کلی احتمال باخت در بازی B چقدر است؟
ت) سه ورش باخت در بازی C چیست؟ احتمال هر یک چقدر است؟ به طور کلی احتمال باخت در بازی C چقدر است؟

سؤال ۶.

۱۵ نقطه را به فاصله‌های مساوی روی محیط یک دایره قرار داده‌ایم. تعداد مثلث‌هایی را بیابید که متساوی‌الاضلاع نبوده و از این نقاط تشکیل شده باشند.

سؤال ۷.

تام در نیم‌جدول زیر به دنبال جری می‌گردد. تام در نقطه قرمز رنگ در بالا سمت راست جدول قرار داشته و در هر مرحله به طور تصادفی یا به پایین و یا به سمت چپ می‌رود. تام می‌داند که جری در یکی از نقاط A و B و C و D و E و F پنهان شده است ولی اگر به یکی از این نقاط برسد و جری در آن حضور نداشته باشد، در آن‌جا گیر می‌کند.
الف) به جری پیشنهاد می‌کنید که در کدام یک از نقاط مشخص شده پنهان شود؟
ب) احتمال رسیدن تام به هر یک از ۶ نقطه پایانی را به دست آورده و بهترین نقطه یا نقاط را برای پنهان شدن به جری معرفی کنید.



سؤال ۸.

ابتدا عدد a و سپس عدد b را از مجموعه‌ی ۱, ۲, ۳, ..., ۹۹, ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که یکان عدد $۳^a + ۷^b$ برابر با ۸ باشد چقدر است؟

سؤال ۹.

۵ دانش‌آموز به همراه والدینشان (یعنی ۵ پدر و ۵ مادر) در مدرسه می‌خواهند در صف بایستند. برای هر ترتیبی از این ۱۵ نفر در صف متغیری به اسم adj تعریف می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی تعداد جایگاه‌هایی است که یک دانش‌آموز در کنار یک والد ایستاده باشد (این والد لزوماً پدر یا مادر خود او نیست). به طور مثال ترتیب PPPSSPPSPSPPSPP را در نظر بگیرید که در آن هر حرف S نشان‌دهنده‌ی یک دانش‌آموز و هر حرف P نشان‌دهنده‌ی یک والد باشد. در چنین ترتیبی از ۱۴ جایگاه موجود بین دو نفر متوالی در صف ۸ تای آن‌ها شرایط گفته شده را دارا بوده و به این ترتیب مقدار adj برای این ترتیب برابر ۸ خواهد بود. حال مقدار میانگین برای متغیر adj را در تمام جایگشت‌های مختلف این ۱۵ نفر بیابید.

سؤال ۱۰.

معادله‌های زیر را به روش ترکیبیاتی اثبات کنید.

الف) $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}$

ب) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

پ) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

سؤال ۱۱.

یک سکه سالم دو طرف شیر (H / Heads) یا خط (T / Tails) دارد و احتمال ظاهر شدن هر یک از آن‌ها با هم برابر است. این سکه را t بار به صورت مستقل از همدیگر پرتاب می‌کنیم. یک «سری» را بیشتری توالی ظاهر شدن یکی از طرف‌های سکه در حین پرتاب شدن تعریف می‌کنیم (یعنی بیشترین تعداد پرتاب پشت سر هم که نتیجه یک‌سان داشته باشند). مثلاً در توالی THHHHHHTTT ۳ سری متفاوت به طول‌های ۱، ۳ و ۶ داریم.

راهنمایی: فرض کنید که سکه‌ای را t بار پرتاب کنیم. خروجی تابع $P(t, L)$ را مجموع تعداد تمام سری‌های به طول L در تمام 2^t ترکیب ممکن از این t پرتاب در نظر می‌گیریم. به این ترتیب اگر خواسته مسئله برابر با حاصل تقسیم $P(t, L)$ بر مقدار 2^t خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر، جدول زیر را برای $t = 3$ در نظر بگیرید.

حاصل پرتاب	سری های به طول 1	سری های به طول ۲	سری های به طول ۳
TTT	0	0	1
TTH	1	1	0
THT	3	0	0
THH	1	1	0
HTT	1	1	0
HTH	3	0	0
HHT	1	1	0
HHH	0	0	1
مجموع کل	P(1,3) = 10	P(2,3) = 4	P(3,3) = 2

سؤال ۱۲.

۱۵۰ نفر برای ورود به یک سالن سینما با ۱۵۰ صندلی صف کشیده‌اند. نفر اول بلیط خود را گم کرده است. بنابراین به صورت تصادفی یک صندلی را انتخاب کرده و روی آن می‌نشیند. هر کدام از نفرات بعدی هم اگر صندلی خودشان خالی باشد که روی همان می‌نشینند و در غیر این صورت آن‌ها نیز یک صندلی خالی را به صوطرت تصادفی انتخاب می‌کنند. احتمال این که نفر آخر صف روی صندلی خود بنشیند چقدر است؟

پاسخ .

سوال ۱)
(آ) پاسخ نهایی برابر با $\frac{7!}{2!2!}$ است.
(ب) پاسخ نهایی برابر با $\frac{6!}{2!2!}$ است.
(ج) پاسخ نهایی برابر با $\frac{6!}{2!}$ است.

سوال ۲)
(آ) پاسخ نهایی برابر با $8!$ است.
(ب) پاسخ نهایی برابر با $2 \times 7!$ است.
(ج) پاسخ نهایی برابر با $6 \times 6!$ است.

سوال ۳)
(آ) پاسخ نهایی برابر با $\binom{10}{5} = 252$ است.
(ب) پاسخ نهایی برابر با $\binom{6}{5} = 6$ است.
(ج) پاسخ نهایی برابر با $252 - 6 = 246$ است.
(د) پاسخ نهایی برابر با ۱۸۶ است.

سوال ۴) پاسخ نهایی برابر با $840 + 180 + 180 + 6 = 1206$ است.

سوال ۵)
(آ) احتمال برنده شدن در بازی A بیشتر است.
(ب) احتمال برنده نشدن در این حالت برابر با $\frac{5^3}{6^3} \simeq 0.578$ و به همین ترتیب احتمال برنده شدن تقریباً معادل ۰٫۴۲۲ خواهد بود.
(ج) احتمال برنده نشدن در این حالت برابر با $\frac{5^6+6\times 5^5}{6^6} \simeq 0.736$ و به همین ترتیب احتمال برنده شدن تقریباً معادل ۰٫۲۶۴ خواهد بود.
(د) احتمال برنده نشدن در این حالت برابر با $\frac{\binom{9}{2}5^7+\binom{9}{1}5^8+5^9}{6^9} \simeq 0.821$ و به همین ترتیب احتمال برنده شدن تقریباً معادل ۰٫۱۷۹ خواهد بود.

سوال ۶) پاسخ نهایی برابر با $\binom{15}{3} - 5$ است.

سوال ۷) احتمال رسیدن به هر یک از نقاط نمودار به صورت زیر است:

$$P(A) = P(F) = \frac{1}{32}, \quad P(B) = P(E) = \frac{5}{32}, \quad P(C) = P(D) = \frac{10}{32}$$

به این ترتیب منطقی خواهد بود اگر جری در یکی از نقاط A یا F پنهان شود.

سوال ۸) پاسخ نهایی برابر با $\frac{۳}{۱۶} = \frac{۲۵\times۲۵}{۱۰۰\times۱۰۰} + \frac{۲۵\times۲۵}{۱۰۰\times۱۰۰} + \frac{۲۵\times۲۵}{۱۰۰\times۱۰۰} = P$ است. برای حل سوال با استفاده از قوانین هم‌نهشتی و باقی‌مانده‌ها به دنبال حالت‌هایی بگردید که خروجی مطلوب مسئله را تولید می‌کنند.

سوال ۹) پاسخ نهایی برابر با

$$\frac{۱۰۰ \times ۱۴!}{۱۵!} = \frac{۱۰۰}{۱۵} \simeq ۶/۶۶$$

است.

سوال ۱۰) (آ) برای حل این قسمت m + n + ۱ عدد متمایز را در نظر بگیرید که به صورت صعودی مرتب شده‌اند. سپس سعی کنید یک مسئله انتخاب را به دو حالت مختلف روی این مجموعه حل کنید.

(ب) فرض کنید که قرار است از بین n زن و n مرد تعداد n نفر را انتخاب کنید.

(ج) فرض کنید قرار است از یک کلاس افرادی را برای یک تیم فوتبال انتخاب کنید که تعداد از آن‌ها بازیکن اصلی باشند.

سوال ۱۱) هر سری به طول L در یک جایگشت به طول t از شیر یا خط در $t - L + ۱$ جایگاه مختلف می‌تواند قرار بگیرد. به این ترتیب روی حالت‌های مختلفی که t و L از لحاظ بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن نسبت به یکدیگر می‌توانند داشته باشند حالت‌بندی کنید.

سوال ۱۲) ابتدا سعی کنید ثابت کنید هنگام ورود آخرین نفر به سالن، برای تک صندلی باقی‌مانده دقیقا دو حالت وجود دارد. آن صندلی یا صندلی خود آخرین نفر است یا صندلی نفر اول. سپس سعی کنید نشان دهید که از طرفی، هنگامی که یکی از افراد مجبور به انتخاب تصادفی می‌شود (یعنی صندلی خودش اشغال شده است) هم صندلی نفر اول خالی است هم صندلی نفر آخر و هر دو صندلی شانس برابری برای انتخاب شدن دارند. از ترکیب این دو گزاره برای اثبات خواسته مسئله استفاده کنید.