Q1.

الف)

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-3K|}$$

$$P_x = \langle |x[n]|^2 \rangle_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} \left| \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-3K|} \right|^2} \quad N=3$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-3K|+2} = \frac{1}{\cancel{2\times3+1}\ 7} \sum_{N=-3}^{3} \sum_{K=-\infty}^{\infty} 4^{-|n-3K|+2}$$

ارزی توان است

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n+N-3K|} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-3K|}$$

$$N \to 3P \to \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n+\underbrace{3p-3K}_{3(p-K)}|} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2^{-|n-3K'|}$$

$$3K' = 3(P-K) \quad \xrightarrow{\text{کوچکترین}} P \to N=3$$

Q2 الف)

$$y[n] = x[n] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]$$

خطی؟ :

$$y_1[n] = x_1[n] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]$$

$$y_2[n] = x_2[n] \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]$$

خطی است

$$\to y_3[n] = (x_1[n] + x_2[n]) \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]$$

$$y_3[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

Scanned with CamScanner

TI $\rightarrow y[n] = x[n]\sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]$

$y[n-N_0] = x[n-N_0]\sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-N_0-3K]$ ✗

تغییرپذیر با زمان (شیفت)

$\rightarrow y[n]' = x[n-N_0]' \underbrace{\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]}$

حافظه دار $\rightarrow$ خاصیت غربالگری $\rightarrow$ نیز وابسته است $\rightarrow$ مقادیر غیر n $\rightarrow$ است ✓

علی $\rightarrow$ نیست $\rightarrow \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[3K] \rightarrow$ مقادیر بعد n ✗

پایدار $\rightarrow$ است $x[n] < \infty \rightarrow \underbrace{x[n]}_{\text{محدود}} \underbrace{\sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta[n-3K]}_{\text{محدود}} < \infty$ ✓ محدود

وارون پذیر $\rightarrow$ چون خطی است $\rightarrow$ ورودی غیر صفر $\Rightarrow$ خروجی غیر صفر ✗

$\Rightarrow$ [۳n] مضرب ۳ $\rightarrow$ داده های از دست رفته $\rightarrow x[n]$ چند مقدار می توانند داشته باشند

$h[n] = (1-n)(\frac{1}{2})^n u[n+1]$ و $x[n] = (\frac{1}{3})^n (u[n] - u[n-5])$ (ب Q3

$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]h[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[n-K]h[n]$

$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{3})^K \underbrace{(u[K]-u[K-5])}_{(0\leq K\leq 5)} \times (1-n+K)(\frac{1}{2})^{n-K} u(n-K+1)$

$-K+n+1$

$K\leq n+1$

$\begin{cases} 0\leq K\leq n+1 & n<4 \\ 0\leq K<5 & n\geq 4 \end{cases}$

۵ مقدار

$\rightarrow y[n] = \overset{1}{\cancel{x[0]}}h[n] + \overset{\frac{1}{3}}{\cancel{x[1]}}h[n-1] + \overset{\frac{1}{9}}{\cancel{x[2]}}h[n-2] + \overset{\frac{1}{27}}{\cancel{x[3]}}h[n-3]$

$+\underset{\frac{1}{81}}{\cancel{x[4]}}h[n-4] + \underset{\frac{1}{3^5}}{\cancel{x[5]}}h[n-5]$

$\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$ $T = 8$

$\frac{\pi}{6}$ $T = 12$

$2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \omega$

$x[n] = \cos\left[\frac{\pi n}{4}\right] \sin\left[\frac{\pi n}{6}\right]$ Q4

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-j2\pi f_0 kn} \rightarrow x[n] = \sum_{k}^{N_0} c_k e^{j2\pi f_0 n}$$

$$\rightarrow x[n] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)n\right) - \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)n\right)\right]$$

$\frac{5}{12}\pi$ $\frac{1}{12}\pi$

$\frac{5}{12} \rightarrow 24 = N$

$$\rightarrow c_k = \frac{1}{24} \sum_{n=1}^{24} x[n] e^{-j2\pi f_0 kn} = \frac{1}{48} \sum_{n=1}^{24} \left[\sin\left(\frac{5\pi}{12} n\right) - \sin\left(\frac{1}{12} n\right)\right] e^{-j2\pi f_0 k_0}$$

$N_0 = 7$, $0 \le k \le 6$, $c_k = 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi k}{8}\right)$ Q5

$$x[n] = \sum_{k}^{N_0} c_k e^{j2\pi f kn} = \sum_{k}^{7} c_k e^{j2\pi f kn}$$

$$1 + \frac{3}{4}\sin(0) e^{\cancel{j2\pi f(0)n}} + 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{j2\pi f n}$$

$$1 + \quad 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{j2\pi f n} + 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{j4\pi f n} + 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) e^{j6\pi f n}$$

$$+ 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{j8\pi f n} + 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) e^{j10\pi f n} + 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{6\pi}{8}\right) e^{j12\pi f n}$$

$$+ 1 + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) e^{j14\pi f n}$$

Scanned with CamScanner

Q6

$w[n] = \underset{N_0}{x[n]} + \underset{M_0}{y[n]}$

الف)

$w[n+N_0] = x[n+N_0] + y[n+N_0]$ → دوره $N_0 M_0$

$\rightarrow \underbrace{}_{\text{پریودیک}} \quad \underbrace{}_{\text{پریودیک}}$

$w[n+N_0] = w[n] \Rightarrow x[n+N_0] + y[n+N_0] = x[n] + y[n]$

ب) ← با افزایش دوره تناوب ← ک.م.م N_0, M_0 ← ضرایب سری فوریه $x[n]$ با $x[n]$

در بازه $0<n<M_0N_0$ ... برابر است و $y[n]$ در بازه $0<n<(M_0 N_0)$ با $y[n]$ در بازه $0<n<M_0$ برابر

← طبق سیگما ضرایب، ضرایب غیر ... / با فوریه ... اصلی صفر می‌شوند

است ← پس با پریود ک.م.م $M_0 N_0$ داریم ← $[\underset{x[n]}{c_k} + \underset{y[n]}{d_k}]$ ضرایب

DTFT Q7

الف) $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-3] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} H(f) \times X(f)$

$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} u[n]$

$\rightarrow H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-3] e^{-j2\pi f n}$

$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j2\pi f n}$

$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} u[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} e^{-j2\pi f n}$

$\rightarrow Y(f) = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j2\pi f n} \times \sum_{\substack{n=0 \\ n=3}}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} e^{-j2\pi f n}$

$Y(f) = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j2\pi f n} \times \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1} e^{-j2\pi f n} \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j2\pi f n} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2m-1} e^{-j2\pi f n}$

$\sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{5}\right)^m e^{-j2\pi f(n+m)} \longrightarrow x[n]h[n] = \int_1 Y(f) e^{j2\pi f n} df$

Q7

$$y[n] = \int_1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{5}\right)^{m} e^{-j2\pi f(m+\ell)} e^{j2\pi f n} df$$

Q8

الف

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 < f < \omega \\ 0 & \omega < f < \pi \end{cases} \rightarrow x(f) = \{$$

$$X(f) \xleftrightarrow{FS} x[-K] \rightarrow \int_{-\omega}^{\omega} X(f) e^{-j2\pi f t} dt \Longrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-j2\pi f\omega} - e^{+j2\pi\omega}$$

$$\rightarrow \frac{\sin(-\omega n)}{-\pi n} = x[-n] \checkmark$$

ب)

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{K^2} \sin\left(\frac{\pi K}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi K}{7}\right) \rightarrow \pi^2 \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi K}{5}\right)}{\pi K} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi K}{7}\right)}{\pi K}$$

چون موهومی ندارد کانجوگیت آن با خودش برابر است

$$\xrightarrow{\text{پارسوال}} \int_1 X_1(f) \times X_2(f) \, df = \pi^2 \int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{7}} (1) \times (1) \, df = \frac{2\pi^3}{7}$$

$$\frac{\pi}{7} - -\frac{\pi}{7}$$