University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین ششم - قضایای حدی

طاها و مهسا

سؤال ۱.

به شما فرصتی استثنایی برای مزایده بر روی یک جعبه سحرآمیز و پاداشی سحر آمیز داده شده است. مقدار پاداش حداقل صفر و حداکثر ۱ میلیون دلار است و البته مقدار دقیق آن نامعلوم است. فرض می‌کنیم مقدار حقیقی جایزه (V) از توزیع uniform و بر روی $[۰,۱]$ پیروی می‌کند. بازی به این صورت است که شما باید یک مقدار پول را به عنوان مبلغ پیشنهادی جایزه، اعلام کنید. این مقدار دلخواه را b می‌نامیم. لازم به ذکر است که در صورتی در این بازی سود خواهید کرد که مبلغ پیشنهادیتان، نسبت به مبلغ واقعی جایزه، نه خیلی بیشتر باشد و نه خیلی کمتر! اگر $b < \frac{۲}{۳}V$ باشد ، آنگاه پیشنهاد شما رد شده و هیچ ضرری در کار نخواهد بود. در غیر این صورت، پیشنهاد شما پذیرفته شده و جایزه را برنده می شوید که مقدار نتیجه برای شما $V - b$ خواهد بود. انتخاب بهینه شما برای بیشینه کردن امید سود حاصل چقدر است؟

پاسخ .

با توجه به شرایط ذکر شده در مسئله، مقادیر بالای $\frac{۲}{۳}$ برای b منطقی نیست. چرا که با توجه به حد بالای V، با مقدار $b \geq \frac{۲}{۳}$ حتما وارد بازی می‌شویم و پس از آن، مقادیر بزرگ‌تر فقط منجر به ضرر خواهند بود. پس محدوده‌ی $[۰, \frac{۲}{۳}]$ را برای b متصور می‌شویم.

$$E[V-b] = E[V-b|b > \frac{۲}{۳}V]P(b > \frac{۲}{۳}V) = [E[V|V < \frac{۳}{۲}b] - b]P(V < \frac{۳}{۲}b)$$

با توجه به Uniform بودن توزیع V داریم:

$$[E[V|V < \frac{۳}{۲}b] - b]P(V < \frac{۳}{۲}b) = (\frac{۳}{۴}b - b)\frac{۳}{۲}b = -\frac{۳}{۸}b^{۲}$$

بنابراین بهترین مقدار برای دریافت بیشترین امید ریاضی از سود حاصل $b = ۰$ خواهد بود! یعنی این بازی یک بازی شیادانه است و بهترین انتخاب شرکت نکردن در مزایده است!

سؤال ۲.

ایمیل‌ها در یک سیستم ارسال و دریافت ایمیل، به صورت غیر همزمان وارد $inbox$ می‌شوند. فرض کنید T_n زمانی باشد که nامین ایمیل دریافت می‌شود (این زمان‌ها به صورت پیوسته محاسبه شده و از یک مبدأ زمانی مشخصی اندازه گیری می‌شوند). فرض کنید که زمان‌های بین دو دریافت ایمیل، به صورت متغیرهای تصادفی $i.i.d$ در نظر گرفته شوند که توزیع نمایی با پارامتر λ دارند (طبق توضیحات درس، می‌دانیم

که فاصله بین دو نقطه تصادفی با توزیع پواسون، دارای توزیع نمایی است). فرض کنید هر ایمیل با احتمال p، یک ایمیل $non-spam$ و با احتمال $q = ۱ - p$، یک ایمیل $spam$ باشد. فرض کنید X زمانی باشد که اولین پیام $non-spam$ دریافت شود.

آ) میانگین و واریانس X را محاسبه کنید.

ب) تابع مولد گشتاور X را محاسبه کرده و از روی آن و مقایسه آن با توابع مولد گشتاور توزیع‌هایی که یاد گرفته‌اید، توزیع X را پیدا کنید.

پاسخ.

آ) X را به این صورت بازنویسی میکنیم: $X = X_۱ + X_۲ + ... + X_N$ که در آن، X_i مدت زمان بین $i-۱$امین ایمیل و iامین ایمیل برای $i > ۱$ بوده و $X_۱ = T_۱$است. طبق توضیحات داده شده در سوال، X_iها به صورت متغیرهای تصادفی $i.i.d$ هستند که توزیع نمایی با پارامتر λ دارند. همچنین طبق بازنویسی بالا نیز واضح است که N یک متغیر تصادفی است که توزیع هندسی با پارامتر p دارد. پس خواهیم داشت:

$$X_i \sim Expo(\lambda), N \sim Geom(p) \Rightarrow E[X] = E[E[X|N]] = E[E[X_۱ + X_۲ + ... + X_N]]$$
$$= E[NE[X_i]] = E[N\frac{۱}{\lambda}] = \frac{۱}{p\lambda}$$

و برای واریانس نیز خواهیم داشت:

$$Var(X) = E[Var(X|N)] + Var(E[X|N]) = E[N\frac{۱}{\lambda^۲}] + Var(N\frac{۱}{\lambda})$$
$$\Rightarrow Var(X) = \frac{۱}{p\lambda^۲} + \frac{۱-p}{p^۲\lambda^۲} = \frac{۱}{p^۲\lambda^۲}$$

ب) از بازنویسی قسمت قبل استفاده می‌کنیم. داریم:

$$E[e^{tX}] = E[E[e^{tX_۱}e^{tX_۲}...e^{tX_N}|N]]$$
$$= E[E[e^{tX_۱|N}]E[e^{tX_۲|N}]...E[e^{tX_N|N}]] = E[M_۱(t)^N]$$

که $M_۱(t)$ همان تابع مولد گشتاور $X_۱$ است که طبق توزیع آن، میدانیم برابر است با: $\frac{\lambda}{\lambda-t}(t < \lambda)$. حال طبق تعریف امید ریاضی و توزیع N خواهیم داشت:

$$E[e^{tX}] = E[M_۱(t)^N] = p\Sigma_{n=۱}^{\infty}M_۱(t)^n q^{n-۱} = \frac{p}{q}\Sigma_{n=۱}^{\infty}M_۱(t)^n q^n$$
$$= \frac{p}{q}\frac{qM_۱(t)}{۱-qM_۱(t)} = \frac{\frac{p\lambda}{\lambda-t}}{۱-\frac{q\lambda}{\lambda-t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda-t}$$

باید دقت کنید که برای محاسبه مجموع دنباله هندسی، فرض کردیم که اندازه قدرنسبت کوچکتر از یک است تا این مجموع، همگرا شود. پس ناحیه همگرایی برابر است با:

$$qM_۱(t) < ۱ \Rightarrow (۱-p)\lambda < \lambda - t \Rightarrow t < p\lambda$$

با مقایسه ناحیه همگرایی و تابع مولد گشتاور X با توابع مولد گشتاور توزیع‌هایی که آموخته‌ایم، درمی‌یابیم که X دارای توزیع نمایی با پارامتر $p\lambda$ است ($X \sim Expo(p\lambda)$).

سؤال ۳.

اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیر های تصادفی i.i.d و دارای چگالی $f_X(x)$ و توزیع انباشته ی $F_X(x)$ باشند و تعریف کنیم:

$$Z = max(X_1, X_2, ..., X_n)$$
$$W = min(X_1, X_2, ..., X_n)$$
$$R = Z - W$$

آ) تابع $f_R(r)$(تابع چگالی متغیر تصادفی R) را بر حسب $f_X(x)$ و $F_X(x)$ بیابید.

ب) با فرض اینکه متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد، $f_R(r)$ را بیابید.

پاسخ .

آ)

$$p_1 = P\{X \leq w\} = F_X(w)$$

$$p_2 = P\{w < X \leq w + dw\} = F_X(w)dw$$

$$p_3 = P\{w + dw < X \leq z\} = F_X(z) - F_X(w + dw)$$

$$p_4 = P\{z < X \leq z + dz\} = F_X(z)dz$$

$$p_5 = P\{X > z + dz\} = 1 - F_X(z + dz)$$

$$f_{ZW}(z, w) = P\{z < Z \leq z + dz, w < W < w + dw\}$$

$$= \frac{n!}{0!1!(n-2)!1!0!} p_1^0 p_2^1 p_3^{n-2} p_4^1 p_5^0$$

$$= n(n-1)f_X(z)f_X(w)[F_X(z) - F_X(w)]^{n-2}, z > w$$

$$f_R(r) = P\{Z - W = r\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(r + w, w)dw$$

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)f_X(r + w)f_X(w)[F_X(r + w) - F_X(w)]^{n-2}dw, r > 0$$

ب)

$$
\begin{aligned}
&F_X(x) = ۱ - e^{-\lambda x}, f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > ۰ \Rightarrow w > ۰ \\
&f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-۱)\lambda e^{-\lambda(r+w)}\lambda e^{-\lambda w}\left[e^{-\lambda w} - e^{-\lambda(r+w)}\right]^{n-۲} dw \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-۱)\lambda^۲ e^{-n\lambda w - \lambda r}\left[۱ - e^{-\lambda r}\right]^{n-۲} dw \\
&\quad = (n-۱)\lambda e^{-\lambda r}\left[۱ - e^{-\lambda r}\right]^{n-۲}\int_{-\infty}^{\infty} n\lambda e^{-n\lambda w} dw \\
&\quad = (n-۱)\lambda e^{-\lambda r}\left[۱ - e^{-\lambda r}\right]^{n-۲}\int_{۰}^{\infty} n\lambda e^{-n\lambda w} dw \\
&\quad \Rightarrow f_R(r) = (n-۱)\lambda e^{-\lambda r}\left[۱ - e^{-\lambda r}\right]^{n-۲} \quad r > ۰
\end{aligned}
$$

سؤال ۴.

یک تکه چوب به طول l در اختیار داریم. این چوب را از نقطه‌ای دلخواه که دارای توزیعی به صورت یکنواخت در طول چوب است می‌شکنیم و تکه‌ی شکسته باقی‌مانده را نگه می‌داریم. سپس این کار را با تکه چوب باقی‌مانده تکرار می‌کنیم.

آ) امید ریاضی طول تکه چوب باقی‌مانده بعد از ۲ بار شکستن آن چقدر است؟

ب) واریانس طول تکه چوب باقی‌مانده بعد از ۲ بار شکستن آن چقدر می‌شود؟

پاسخ .

آ) فرض کنید متغیر تصادفی Y طول تکه چوب باقی مانده بعد از یک بار و همچنین متغیر تصادفی X نیز طول تکه چوب باقی مانده بعد از شکستن آن برای بار دوم باشد.

با استفاده از قانون امید ریاضی کل که به شکل زیر است داریم:

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$

همچنین $E[X|Y] = \frac{Y}{۲}$ و $E[Y] = \frac{l}{۲}$ است. پس با استفاده از رابطه بالا داریم:

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[\frac{Y}{۲}] = \frac{۱}{۲}E[Y] = \frac{l}{۴}$$

ب) برای یافتن واریانس از قانون واریانس کل استفاده میکنیم.

$$var(X) = E[var(X|Y)] + var(E[X|Y])$$

$$var(Y) = \frac{l^۲}{۱۲}$$

$$var(X|Y) = \frac{Y^۲}{۱۲}$$

همچنین می دانیم که $E[X|Y] = \frac{Y}{۲}$ است پس :

$$var(E[X|Y]) = var(\frac{Y}{۲}) = \frac{۱}{۴}var(Y) = \frac{l^۲}{۴۸}$$

با کمک انتگرال گیری در بازه ۰ تا 1، $E[var(X|Y)]$ برابر با $\frac{l^۲}{۳۶}$ شده و در نهایت مقدار واریانس X برابر با $\frac{۷l^۲}{۱۴۴}$ خواهد شد.

سؤال ۵.

در این سؤال می‌خواهیم یکی از چالش هایی که بعد از افزایش روزافزون پیک‌های آنلاین در تهران بوجود آمده است را بررسی کنیم. فرض کنید برای هر زمان t تعداد آدم‌هایی که به یک رستوران زنگ می‌زنند، دارای توزیع پواسون با متغیر λ باشد. اگر زمان رسیدن اولین پیکی که به رستوران می‌رسد (مستقل از زمان زنگ زدن مشتری‌ها) به طور یکنواخت در بازه $(۰, T)$ توزیع شده باشد، میانگین و واریانس تعداد غذاهایی که پیک اول باید ببرد را بدست بیاورید.

پاسخ .

فرض کنید برای هر $t \geq ۰$، متغیر $N(t)$ برابر با تعداد زنگ هایی باشد که تا آن زمان به رستوران زده می شوند و Y نیز زمانی باشد که پیک به رستوران می رسد. لذا متغیر مدنظر ما $N(Y)$ است.

$$E[N(t)|t = Y] = E[N(Y)|Y] = \lambda Y$$
$$\Longrightarrow E[N(Y)] = E[E[N(Y)|Y]] = \lambda E[Y] = \frac{\lambda T}{۲}$$
$$E[N(t)^۲|t = Y] = E[N(Y)^۲|Y] = \lambda Y(\lambda Y + ۱)$$
$$\Longrightarrow E[N(Y)^۲] = E[E[N(Y)^۲|Y]] = \lambda^۲ E[Y^۲] + \lambda E[Y] = \lambda^۲(\frac{T^۲}{۴} + \frac{T^۲}{۱۲}) + \lambda\frac{T}{۲}$$
$$var(N(Y)) = E[N(Y)^۲] - (E[N(Y)])^۲ = \lambda^۲(\frac{T^۲}{۴} + \frac{T^۲}{۱۲}) + \lambda\frac{T}{۲} - \frac{\lambda^۲T^۲}{۴} = \lambda^۲\frac{T^۲}{۱۲} + \lambda\frac{T}{۲}$$

سؤال ۶.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی تواما نرمال با میانگین های صفر و واریانس های $\sigma^۲$ و ضریب همبستگی r باشند.

آ) ثابت کنید متغیر های تصادفی $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقل اند.

ب) حاصل $E[X^۳ - Y^۳|X - Y]$ را بیابید.

پاسخ .

آ)

$$f_{XY}(x,y) = \frac{۱}{۲\pi\sigma_۱\sigma_۲\sqrt{۱-r^۲}} \exp\left\{-\frac{۱}{۲}G(x,y)\right\}$$
$$G(x,y) = \frac{۱}{۱-r^۲}\left[\left(\frac{x-\mu_۱}{\sigma_۱}\right)^۲ - ۲r\left(\frac{x-\mu_۱}{\sigma_۱}\right)\left(\frac{y-\mu_۲}{\sigma_۲}\right) + \left(\frac{y-\mu_۲}{\sigma_۲}\right)^۲\right]$$
$$U = X - Y, V = X + Y \Rightarrow |J| = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = ۲ \Rightarrow f_{UV}(u,v) = \frac{۱}{۲}f_{XY}(x,y)$$
$$\sigma_۱ = \sigma_۲ = \sigma, \mu_۱ = \mu_۲ = ۰ \Rightarrow f_{UV}(u,v) = \frac{۱}{۴\pi\sigma^۲\sqrt{۱-r^۲}} \exp\left\{-\frac{۱}{۲\left(۱-r^۲\right)} \times \frac{x^۲+y^۲-۲rxy}{\sigma^۲}\right\}$$
$$= \frac{۱}{۴\pi\sigma^۲\sqrt{۱-r^۲}} \exp\left\{-\frac{v^۲(۱-r)+u^۲(۱+r)}{۴\sigma^۲\left(۱-r^۲\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1+r)}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma\sqrt{2(1+r)}}\right)^2\right\} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2(1-r)}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{2(1-r)}}\right)^2\right\}$$
$$= f\left(v \mid 0, 2\sigma^2(1+r)\right) \times f\left(u \mid 0, 2\sigma^2(1-r)\right)$$

بنابراین دو متغیر تصادفی U و V از هم دیگر مستقلند.

ب)

$$\begin{aligned} E\left[X^3 - Y^3 \mid X - Y\right] &= E\left[\left(\frac{U+V}{2}\right)^3 - \left(\frac{V-U}{2}\right)^3 \mid U\right] \\ &= \frac{1}{4}E\left[U^3 + 3UV^2 \mid U\right] \\ &= \frac{U^3}{4} + \frac{3U}{4}E\left[V^2 \mid U\right] \\ &= \frac{U^3}{4} + \frac{3U}{4}E\left[V^2\right] \end{aligned}$$

با توجه به قسمت قبل:

$$E\left[V^2\right] = \sigma_V^2 + E[V]^2 = 2\sigma^2(1+r)$$

بنابراین:

$$E\left[V^2\right] = 2\sigma^2(1+r), U = X - Y \Rightarrow E\left[X^3 - Y^3 \mid X - Y\right] = \frac{X-Y}{4}\left[(X-Y)^2 + 6\sigma^2(1+r)\right]$$

سؤال ۷.

فردی هر روز برای حضور در محل کار خود تاکسی می‌گیرد. او هر روز صبح، در ایستگاه منتظر تاکسی می‌ماند اما هر تاکسی که به ایستگاه می‌رسد، به احتمال ۰٫۸ و مستقل از تاکسی‌های دیگر پر است. او تعداد تاکسی‌هایی که از دست می‌دهد را می‌شمرد تا بتواند سوار یک تاکسی شود. زمانی که سوار تاکسی می‌شود، به تعداد تاکسی‌هایی که از دست داده، تاس پرتاب می‌کند و مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب تاس‌ها را حساب کرده و به آن اندازه به راننده انعام می‌دهد. امید ریاضی انعامی که این فرد هر روز پرداخت می‌کند را بیابید.

سؤال ۸.

در یک روز، یکی از اساتید دانشکده در زمانی که دارای توزیع یکنواخت بین ساعت ۹ صبح و ۱ بعد از ظهر است به آزمایشگاه خود می‌رود. سپس او مشغول به انجام یک آزمایش می‌شود و هنگامی که آن را تمام کرد آن جا را ترک می‌کند. زمان طول آزمایش دارای توزیع نمایی با پارامتر

$$\lambda(y) = \frac{1}{5-y}$$

است که در آن y طول زمان بین ۹ صبح و زمان رسیدن به آزمایشگاه است. در همین حال یکی از دانشجویان دکتری وی می‌خواهد او را ببیند. دانشجوی دکتری در زمانی دارای توزیع یکنواخت بین ۹ صبح و ۵ بعد از ظهر به آزمایشگاه استاد می‌رسد؛ اگر او را پیدا نکند می‌رود و دیگر باز نخواهد گشت و اگر او را بیابد زمانی را که دارای توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است با وی می‌گذراند. استاد پس از حضور دانشجو مدتی را با او همراهی و سپس به کار خود برای تمام شدن آزمایش ادامه خواهد داد. امید ریاضی زمانی که دانشجو با استاد می‌گذارند و امید ریاضی زمانی که استاد آزمایشگاه‌اش را ترک می کند را بیابید.

پاسخ .

سوال ۱)

$$E[V-b] = -\frac{۳}{۸}b^۲$$

بهترین مقدار برای دریافت بیشترین امید ریاضی از سود حاصل $b = ۰$ خواهد بود! یعنی این بازی یک بازی شیادانه است و بهترین انتخاب شرکت نکردن در مزایده است!

سوال ۲) (آ) X را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم: $X = X_۱ + X_۲ + ... + X_N$
که در آن، X_i مدت زمان بین $i-۱$امین ایمیل و iامین ایمیل برای $i > ۱$ بوده و $X_۱ = T_۱$است.

$$X_i \sim Expo(\lambda), N \sim Geom(p) \Rightarrow$$

$$E[X] = \frac{۱}{p\lambda}, Var(X) = \frac{۱}{p^۲\lambda^۲}$$

(ب) از بازنویسی قسمت قبل استفاده می‌کنیم. داریم:

$$E[e^{tX}] = E[E[e^{tX_۱}e^{tX_۲}...e^{tX_N}|N]] = E[M_۱(t)^N]$$

که $M_۱(t)$ همان تابع مولد گشتاور $X_۱$ است که طبق توزیع آن، میدانیم برابر است با: $\frac{\lambda}{\lambda-t}(t < \lambda)$. بنابراین:

$$E[e^{tX}] = E[M_۱(t)^N] = p\Sigma_{n=۱}^{\infty} M_۱(t)^n q^{n-۱} = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

باید دقت کنید که برای محاسبه مجموع دنباله هندسی، فرض کردیم که اندازه قدرنسبت کوچکتر از یک است تا این مجموع، همگرا شود. پس ناحیه همگرایی برابر است با:

$$qM_۱(t) < ۱ \Rightarrow (۱-p)\lambda < \lambda - t \Rightarrow t < p\lambda$$

با مقایسه ناحیه همگرایی و تابع مولد گشتاور X با توابع مولد گشتاور توزیع‌هایی که آموخته‌ایم، درمی‌یابیم که X دارای توزیع نمایی با پارامتر $p\lambda$ است ($X \sim Expo(p\lambda)$).

سوال ۳) (آ)

$$f_{ZW}(z,w) = P\{z < Z \leq z+dz, w < W < w+dw\} = n(n-۱)f_X(z)f_X(w)[F_X(z)-F_X(w)]^{n-۲}, z > w$$

$$f_R(r) = P\{Z - W = r\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(r+w,w)dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n(n-۱)f_X(r+w)f_X(w)[F_X(r+w) - F_X(w)]^{n-۲}dw, r > ۰$$

(ب)

$$F_X(x) = ۱ - e^{-\lambda x}, f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > ۰ \Rightarrow w > ۰$$

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} n(n-۱)\lambda e^{-\lambda(r+w)}\lambda e^{-\lambda w}\left[e^{-\lambda w} - e^{-\lambda(r+w)}\right]^{n-۲} dw \Rightarrow$$

$$f_R(r) = (n-۱)\lambda e^{-\lambda r}\left[۱ - e^{-\lambda r}\right]^{n-۲} \quad r > ۰$$

سوال ۴) (آ) فرض کنید متغیر تصادفی Y طول تکه چوب باقی مانده بعد از یک بار و همچنین متغیر تصادفی X نیز طول تکه چوب باقی مانده بعد از شکستن آن برای بار دوم باشد.

$$E[X] = E[E[X|Y]] = E[\frac{Y}{۲}] = \frac{l}{۴}$$

(ب)

$$var(X) = E[var(X|Y)] + var(E[X|Y]) \Rightarrow$$

$$Var(x) = \frac{۷l^۲}{۱۴۴}$$

سوال ۵) فرض کنید برای هر $t \geq ۰$، متغیر $N(t)$ برابر با تعداد زنگ هایی باشد که تا آن زمان به رستوران زده می شوند و Y نیز زمانی باشد که پیک به رستوران می رسد. لذا متغیر مدنظر ما $N(Y)$ است

$$E[N(t)|t = Y] = E[N(Y)|Y] = \lambda Y$$

$$\Longrightarrow E[N(Y)] = E[E[N(Y)|Y]] = \lambda E[Y] = \frac{\lambda T}{۲}$$

$$Var(N(Y)) = E[N(Y)^۲] - (E[N(Y)])^۲ = \lambda^۲(\tfrac{T^۲}{۴} + \tfrac{T^۲}{۱۲}) + \lambda\tfrac{T}{۲} - \tfrac{\lambda^۲T^۲}{۴} = \lambda^۲\tfrac{T^۲}{۱۲} + \lambda\tfrac{T}{۲}$$

سوال ۶) (آ) $f_{UV}(u, v)$ را بدست آورید و نشان دهید که:

$$f_{UV}(u, v) = f\left(v \mid ۰, ۲\sigma^۲(۱+r)\right) \times f\left(u \mid ۰, ۲\sigma^۲(۱-r)\right)$$

(ب)

$$E\left[X^۳ - Y^۳ \mid X - Y\right] = \frac{X - Y}{۴}\left[(X - Y)^۲ + ۶\sigma^۲(۱+r)\right]$$

سوال ۷) فرض می‌کنیم T متغیر تصادفی انعامی باشد که این فرد، هرروز پرداخت می‌کند. این متغیر را به این صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$T = T_۱ + T_۲ + ... + T_N$$

که در آن T_iها، مقدار ظاهرشده در پرتاب iامین تاس بوده و N نیز تعداد اکسی‌هایی است که از دست داده. پس خواهیم داشت

$$E[T] = E[E[T|N]] = E[E[T_۱ + T_۲ + ... + T_N]] = E[NE[T_i]] = ۱۴$$

سوال ۸) Y: متغیر تصادفی فاصله زمان رسیدن استاد از ۹ صبح
Z: متغیر تصادفی فاصله زمان رسیدن دانشجو از ۹ صبح
X: متغیر تصادفی مدت زمان آزمایش
S: متغیر تصادفی مدت زمان با هم بودن استاد و دانشجو

به ۲ حالت مسئله را تقسیم می کنیم حالت اول دانشجو در زمان حضور استاد در آزمایشگاه وارد شود و متمم این حالت. همچنین در نظر داشته باشید اگر دانشجو، استاد را ببیند مدت زمانی که با او سپری می‌کند از توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ خواهد بود.

$$E[S] = E[S|Y < Z < X+Y]P(Y < Z < X+Y) + E[S|(Y < Z < X+Y)']P((Y < Z < X+Y)')$$

$$\Rightarrow E[S] = \frac{۱}{۲} \times P(Y < Z < X + Y) = ۹/۶min$$

$$E[LeaveTime] = E[X + Y + S|Y < Z < X + Y]P(Y < Z < X + Y) +$$

$$E[X + Y|(Y < Z < X + Y)']P((Y < Z < X + Y)') = \frac{۱۱}{۲} \times ۰/۳۲ + ۰/۶۸ \times ۵ = ۵/۱۶$$

پس امید ریاضی ساعت ترک ۵/۱۶ ساعت پس از ۹ صبح است.