University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۱ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۴۰۰

گردآورنده: مهدی جهانی

آخرین تاریخ به‌روزرسانی October ۲۱، ۲۰۲۲

سؤال ۱.

یک بازی به اسم رنگ رزی داریم. در این بازی $n(n > 1; n \in N)$ رنگ داریم. این بازی n مرحله دارد. در هر مرحله یک رنگ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر در دو مرحله متوالی دو رنگ یکسان انتخاب کنیم می‌بازیم. حداکثر مقدار n چه قدر باشد تا ما حداقل ۴۰درصد شانس برد داشته باشیم.

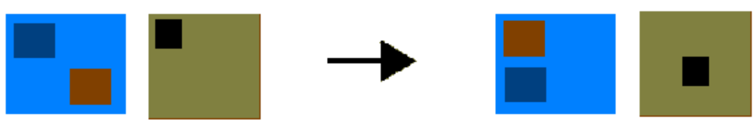
سؤال ۲.

یک تاس را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم و اعداد به دست آمده را در یک سطر پشت هم می‌نویسیم. احتمال اینکه این اعداد دقیقا شامل ۳ بلوک با اعداد زوج باشند چه قدر است؟ منظور از یک بلوک تعدادی عدد پشت سر هم هستند. به عنوان مثال دنباله‌ی ۱, ۲, ۸, ۶, ۵, ۳, ۷, ۸, ۲ به ترتیب از چپ به راست شامل یک بلوک با اعداد فرد (۱)، یک بلوک با اعداد زوج (۲, ۸, ۶)، یک بلوک با اعداد فرد (۵, ۳, ۷) و یک بلوک با اعداد زوج (۸, ۲) است.

سؤال ۳.

ده جعبه خالی با اندازه‌های متفاوت داریم. اندازه‌ی جعبه‌ها به گونه‌ای است که تمام جعبه‌های کوچک‌تر از یک جعبه را می‌توان به صورت جدا از هم داخل آن جعبه قرار داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را داخل بزرگترین جعبه قرار داد؟ توجه کنید برخی جعبه‌ها می‌توانند داخل برخی جعبه‌های دیگر قرار بگیرند و همچنین ترتیب و نحوه‌ی قرارگیری جعبه‌ها اهمیت ندارد و تنها این موضوع اهمیت دارد که چه جعبه‌هایی داخل جعبه‌های دیگر قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر دو روش چیدمان با یک دیگر متفاوتند اگر و تنها اگر دو جعبه مانند x, y موجود باشند که در حال اول یکی داخل دیگری باشد و در حالت دوم این دو جعبه داخل یکدیگر نباشند.

به عنوان مثال دو چیدمان زیر یکسان هستند:



سؤال ۴.

ثابت کنید تعداد حالت‌های رنگ‌آمیزی یک جدول ۱۰×۱۰ به دو رنگ سیاه و سفید، به طوری‌که هیچ دو خانه سیاهی مجاور ضلعی نباشند، بین $۲^{۵۰}$ و $۳^{۵۰}$ است.

سؤال ۵.

با ۷ مهره به رنگ‌های سبز، صورتی، بنفش، نارنجی، نقره‌ای، طلایی و آبی چند دست‌بند می‌توان ساخت، به طوری که هیچ دوتایی از مهره‌های صورتی، نارنجی و طلایی مجاور نباشند؟

سؤال ۶.

به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را دور دایره چید به طوری که مجموع هر سه عدد مجاور بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

سؤال ۷.

یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم ۰ نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۲۵۸ و ۸۲۱ اعداد یکنوا هستند ولی اعداد ۴۴۴ و ۴۸۲ یکنوا نیستند.مجموع همه اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

سؤال ۸.

یک بازی به نام رولت سوسکی داریم. این بازی دو نفره است. نفر اول یک عدد طبیعی مانند n انتخاب می‌کند. سپس نفر دوم یک سکه را $n \times ۲$ بار پرتاب می‌کند و در صورتی می‌برد که حداقل n بار خط بیاید.

آ) نفر اول در این بازی شانس بیشتری دارد یا نفر دوم؟

ب) شانس برد نفر اول را بر حسب n به دست آورید.

سؤال ۹.

فرض کنید مجموعه A شامل تمام اعداد طبیعی ۷ رقمی باشد که از ارقام ۱ و ۲ و ۳ تشکیل شده باشند. یک عدد را به صورت تصادفی از این مجموعه انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع ارقام این عدد ۱۴ باشد را بیابید.

راهنمایی: از توابع مولد استفاده کنید.

سؤال ۱۰.

در یک بازی که به صورت پرتاب متوالی یک سکه است، منظور از H شیر آمدن سکه و منظور از T خط آمدن آن است. می‌دانیم که احتمال H آمدن این سکه p و احتمال T آمدن آن $q = ۱ - p$ است. اگر دو H پشت سرهم یا دو T پشت سرهم بیاید پرتاب سکه‌ها تمام می‌شود. اگر بازی با HH تمام شود، فرد برنده این بازی است و اگر با TT تمام شود، فرد بازنده بازی خواهد بود. برای مثال اگر بازی به

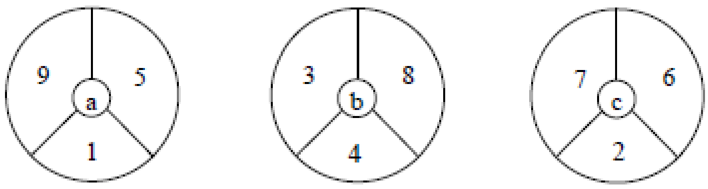
صورت $HTH\underline{TT}$ پایان یابد، فرد بازنده و اگر به صورت $THTHT\underline{HH}$ پایان یابد فرد برنده است. احتمال برد فرد را بیابید.

سؤال ۱۱.

دو کارت قرمز و یک کارت آبی در یک ردیف به صورتی قرار دارند که کارت آبی در وسط دو کارت دیگر است. هر بار جای کارت میانی را با یکی از دو کارت دیگر عوض می‌کنیم. پس از n بار تکرار چقدر احتمال دارد که در وضعیت نهایی، کارت آبی بین دو کارت دیگر قرار گرفته باشد؟

سؤال ۱۲.

دو بازیکن در یک بازی به صورت زیر شرکت می‌کنند. بازیکن A یکی از سه گردونه زیر را انتخاب و سپس بازیکن B یکی از دو گردونه باقی‌مانده را انتخاب می‌نماید. هر دو بازیکن گردونه‌ها را به چرخش درآورده و گردونه‌ای که با عدد بزرگتر متوقف می‌شود برنده اعلام می‌گردد. فرض کنید هر گردونه با شانس برابر در یکی از نواحی متوقف گردد. در این صورت آیا شما ترجیح می‌دهید بازیکن A باشید یا بازیکن B؟ پاسخ خود را شرح دهید.



سؤال ۱۳.

با در نظر گرفتن تمام زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ی اعداد از ۱ تا n به طوری که $۱ \leq r \leq n$، میانگین کوچکترین عضو تمام این زیرمجموعه‌ها را محاسبه می‌کنیم. نشان دهید که این میانگین برابر است با $\frac{n+۱}{r+۱}$.

راهنمایی: با استفاده از قاعده پاسکال، ابتدا نشان دهید: $\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r-۱} + \binom{n-۲}{r-۱} + \cdots + \binom{r-۱}{r-۱}$

سؤال ۱۴.

دو تاس را با هم آنقدر پرتاب می‌کنیم تا مجموع آن دو برابر ۵ یا ۷ شود. احتمال اینکه مجوع ۵ زودتر ظاهر شود چه‌قدر است؟

پاسخ.

سوال ۱)

پاسخ برابر با ۶ است.

سوال ۲)

پاسخ برابر با $\frac{\binom{۱۱}{۶}}{۲^{۱۰}} = \frac{۳^{۱۰} \times \binom{۱۱}{۶}}{۶^{۱۰}}$ است.

سوال ۳)

پاسخ برابر با $۹!$ است.

سوال ۴)

راهنمایی: برای حل این سوال سعی کنید دو راه برای رنگ کردن جدول پیدا کنید. یکی راه‌حلی خوشبینانه که دقیق نباشد و کران بالا با آن به دست بیاید، یکی هم راه‌حل بدبینانه که مطمئن باشید خروجی آن شرایط مسئله را رعایت می‌کند اما همه‌ی حالت‌های ممکن را پوشش نمی‌دهد و برای کران پایین به کار می‌رود.

سوال ۵)

پاسخ برابر با $\frac{3! \times \frac{4!}{1!}}{2}$ است.

سوال ۶)

پاسخ برابر با $2 \times 2 \times 3! \times 3! = 144$ است.

سوال ۷)

پاسخ برابر با $\binom{9}{4} \times 11110$

سوال ۸)

در صورتی که حالت‌بندی کنید درمی‌یابید که نفر دوم شانس بیشتری دارد.

الف) پاسخ برابر با

$$\frac{\binom{2n}{n} + \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2}}{2^{2n}} = \frac{1}{2} + \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}$$

است.

سوال ۹)

پاسخ برابر با

$$\frac{1 + 42 + 210 + 140}{3^7} = \frac{393}{3^7}$$

سوال ۱۰)

پاسخ برابر با

$$P(W) = \frac{p^2}{1 - pq} + \frac{p^2 \times q}{1 - pq} = \frac{p^2 \times (2 - p)}{1 - p(1 - p)}$$

است.

سوال ۱۱)

اگر فرض کنیم که A_n جواب مسئله در زمانی باشد که n پرتاب متوالی داشته باشیم، آن‌گاه پاسخ برابر با $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ خواهد بود.

سوال ۱۲)

اگر حالت‌بندی کنید متوجه خواهید شد که گردونه‌ها برتری نسبت به یکدیگر ندارند. بنابراین استراتژی برد زمانی که نفر B باشید با شماست.

سوال ۱۳)

پاسخ برابر با

$$m = \frac{\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \cdots + \binom{r}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

است.

سوال ۱۴)

پاسخ نهایی برابر با $\frac{2}{5}$ است.
راهنمایی: پیشامد A_n را تعریف کنید به طوری که در پرتاب n اُم مجموع ۵ ظاهر شود و در هیچ یک از پرتاب‌های قبلی نیز مجموع ۵ یا ۷ نداشته باشیم. باید مجموع A_n ها را حساب کنید.