University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۵ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

سؤال ۱.

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots$ از هم مستقل هستند و هر کدام از آن ها میانگین μ و واریانس σ^2 دارند.
همین‌طور در نظر بگیرید که $Y_n = X_n + X_{n+1}$. برای مقادیر $j = 0, 1, 2$ مطلوب است $Cov(Y_n, Y_{n+j})$. توجه کنید به ازای مقادیر مختلف j جواب متفاوت خواهد بود.

سؤال ۲.

متغیر تصادفی X را به این شکل در نظر بگیرید که به صورت تصادفی از اعداد $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ انتخاب می‌شود. همینطور متغیر تصادفی Y نیز به این صورت تعریف می‌شود که به صورت تصادفی از اعداد $\{1, \ldots, X\}$ انتخاب خواهد شد.

الف) تابع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y را بدست آورید.

ب) تابع احتمال شرطی متغیر تصادفی X با داشتن $Y = i$ را به ازای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ بدست آورید.

ج) پاسخ دهید که آیا دو متغیر تصادفی X و Y مستقل هستند یا خیر ؟ برای پاسخ خود دلیل مناسب بیاورید.

سؤال ۳.

یک ربات در وسط یک زمین بازی وجود دارد. این زمین بازی به شکل مربع بوده و هر ضلع آن ۱۰ کیلومتر می‌باشد. یک بسته به شکل کاملا تصادفی در هر مکانی از این زمین می‌تواند بیفتد. ربات در این زمین بازی با انجام حرکات ساده‌ی بالا، پایین، راست و چپ می‌تواند از مکان $(0, 0)$ به مکان مربوط به بسته در (x, y) برسد. اگر D را مقدار مسافتی که ربات برای رسیدن به بسته طی می‌کند در نظر بگیریم، $E\{D\}$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴.

فاصله‌ی یک ماهواره از زمین را با استفاده از یک ابزار اندازه‌گیری فاصله‌های نجومی می‌سنجیم. عددی که این ابزار نمایش می‌دهد برابر است با فاصله‌ی واقعی به علاوه خطایی با توزیع نرمال $N(0, 4)$. قبل از اینکه از ابزار استفاده کنیم، باوری که نسبت به فاصله‌ی واقعی داریم دارای توزیع نرمال $N(\mu = 98, \sigma^2 = 16)$ است. فرض کنید که ابزار عدد ۱۰۰ را نمایش داده است،

الف) تابع چگالی باور قبلی ما نسبت به فاصله‌ی واقعی چیست؟

ب) احتمال اینکه ابزار عدد ۱۰۰ را نشان بدهد به شرط اینکه بدانیم فاصله‌ی واقعی برابر با t است را بدست آورید.

ج) تابع چگالی باور جدید ما نسبت به فاصله‌ی واقعی را بعد از مشاهده‌ی عددی که ابزار نمایش می‌دهد، چیست؟ می‌توانید از ثابت‌ها در تابع چگالی خود استفاده کنید و نیازی به ساده‌سازی نیست.

سؤال ۵.

تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ۳(y-x), & ۰ \leq x \leq y \leq ۱ \\ ۳(x-y), & ۰ \leq y \leq x \leq ۱ \\ ۰, & \text{otherwise} \end{cases}$$

توجه کنید که تابع چگالی فوق نسبت به x و y تقارن کامل دارد.

الف) ضریب همبستگی X و Y را بدست آورید.

ب) تابع چگالی شرطی Y به شرط X را محاسبه کنید.

سؤال ۶.

فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y میزان بارندگی سالیانه برحسب میلی‌متر در ناحیه‌های A و B به‌ترتیب را مشخص می‌کنند. فرض کنید توزیع توأم این دو متغیر به صورت زیر است:

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy, & x \geq ۰,\ y \geq ۰,\ ۲۰ \leq x+y \leq ۳۰ \\ ۰, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) ناحیه‌ای که در آن $f(x,y)$ مثبت است را رسم کرده و مقدار k را پیدا کنید.

ب) با پیدا کردن توابع چگالی حاشیه‌ای پاسخ دهید که آیا X و Y از هم مستقل‌اند؟

ج) احتمال اینکه در یک سال مجموع بارندگی‌های این دو ناحیه کمتر از ۲۵ میلی‌متر باشد، چقدر است؟

د) امید ریاضی مجموع بارندگی سالیانه‌ی دو ناحیه را بدست آورید.

ه) کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را بدست آورید.

و) واریانس مجموع بارندگی سالیانه این دو ناحیه را بدست آورید.

سؤال ۷.

متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-۲x} + \frac{۱}{۲}e^{-x}, & x > ۰ \\ ۰, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) تابع مولد X را بدست آورید.

ب) با استفاده از تابع مولد بدست آمده، میانگین و واریانس X را بدست آورید.

سؤال ۸.

X و Y دو متغیر تصادفی مستقل هستند. توابع مولد ممان هر یک به شرح زیر هستند:

$$m_X(t) = \frac{۱}{۱-۵t},\ \text{if}\ t < \frac{۱}{۵}; \qquad m_Y(t) = \frac{۱}{(۱-۵t)^۲},\ \text{if}\ t < \frac{۱}{۵}$$

مقدار $E\{(X+Y)^۲\}$ را بدست آورید.

سؤال ۹.

متغیرهای تصادفی K و N دارای تابع احتمال توأم زیر می‌باشند:

$$P_{N,K}(n,k) = \begin{cases} \frac{۱۰۰^n e^{-۱۰۰}}{(n+۱)!}, & n = ۰,۱,...; k = ۰,۱,..,n \\ ۰, & otherwise \end{cases}$$

دو تابع احتمال $P_{K|N}(k|n)$ و $P_N(n)$ را بیابید.

سؤال ۱۰.

روی دایره‌ی $X^۲ + Y^۲ \le r^۲$ دو متغیر تصادفی X و Y دارای pdf به شکل زیر می‌باشند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi r^۲} & x^۲ + y^۲ \le r^۲ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

مقدار $f_{Y|X}(y|x)$ را بیابید.

سؤال ۱۱.

یک مغازه‌ی پیتزا فروشی n نوع پیتزای مختلف عرضه می‌کند. فرض کنید X مشتری در روز به این مغازه مراجعه می‌کنند که X یک متغیر تصادفی گسسته و نامنفی با تابع مولد ممان $M_X(s) = E[e^{sX}]$ است. هر مشتری یکی از n نوع پیتزا را به صورت کاملا تصادفی سفارش می‌دهد(هر کدام از n نوع پیتزا با احتمال برابر انتخاب می‌شوند). همچنین نوع پیتزای انتخاب‌شده توسط هر مشتری، مستقل از تعداد مشتریان دیگر و نوع پیتزایی است که آن‌ها سفارش می‌دهند. تعیین کنید به صورت میانگین چند نوع پیتزا در روز توسط این مغازه عرضه می‌شود؟ رابطه‌ی نهایی صرفا بر حسب n و تابع مولد ممان X است.

پاسخ.

سوال ۱)

$$j = ۰ \Rightarrow$$
$$Cov(Y_n, Y_n) = Var(Y_n) = ۲\sigma^۲$$

$$j = ۱ \Rightarrow$$
$$Cov(Y_n, Y_{n+۱}) = Cov(X_n + X_{n+۱}, X_{n+۱} + X_{n+۲}) = \sigma^۲$$

$$j = ۲ \Rightarrow$$
$$Cov(Y_n, Y_{n+۲}) = Var(Y_n) = ۰$$

در حل این مسئله به این موضوع توجه کنید که با توجه به استقلال X_i ها، $Cov(X_i, X_j) = ۰,\ i \neq j$

سوال ۲) الف)

$$P_{XY}(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{۱}{۵x} & y \leq x \\ ۰ & x < y \end{cases}$$

ب)

$$P_{X|Y}(X|Y = i) = \frac{P_{X,Y}(x, y = i)}{P_Y(y = i)} = \frac{P_{Y|X}(y = i|x)P_X(x)}{\sum_{k=i}^{۵} P_{Y|X}(y = i|x = k)P_X(x = k)}$$

ج) از آنجا که مقادیر Y کاملا به مقداار X وابسته است، می‌توانیم بگوییم این دو متغیر وابسته هستند.

سوال ۳)

$$E\{D\} = E\{|X| + |Y|\} = ۲E\{|X|\} = ۲\int_{-۵}^{۵} \frac{|x|}{۱۰}\, dx = ۵$$

سوال ۴) فرض کنید متغیر تصادفی D باور ما نسبت به فاصله‌ی واقعی و متغیر تصادفی X عدد نشان‌داده شده توسط ابزار باشد. همچنین متغیر تصادفی G نشانگر خطای اندازه‌گیری دستگاه است.

الف)

$$D \backsim N(۹۸, ۱۶) \rightarrow f_D(D = t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi} \times ۴} e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{(t-۹۸)^۲}{۱۶})}$$

ب) متغیرهای G و D از هم مستقل هستند.

$$X = D + G$$
$$G \backsim N(۰, ۴)$$

$$f(X = x|D = t) = f(D+G = x|D = t) = \frac{f(D = t, G = x - t)}{f(D = t)} = \frac{f_D(t)f_G(x - t)}{f_D(t)} \rightarrow$$

$$f(X = ۱۰۰|D = t) = f_G(۱۰۰ - t) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi} \times ۴} e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{(t-۱۰۰)^۲}{۱۶})}$$

ج)

$$f(D = t|X = ۱۰۰) = \frac{f(X = ۱۰۰|D = t)(D = t)}{f(X = ۱۰۰)}$$

دو احتمال موجود در صورت کسر را در بخش های قبل بدست آوردیم. مخرج کسر نیز با قانون احتمال کل بدست می‌آید.

سوال ۵) الف)

$$f_X(x) = ۳(x^۲ - x + \frac{۱}{۲}),$$

$$f_Y(y) = ۳(y^۲ - y + \frac{۱}{۲})$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},\ \sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) \rightarrow$$

$$E(X)=\int_0^1 3x(x^2-x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\rightarrow E(Y)=\frac{1}{2}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^y 3xy(y-x)\,dxdy+\int_0^1\int_y^1 3xy(x-y)\,dxdy=\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \sigma_{XY}=\frac{1}{15}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{20}$$

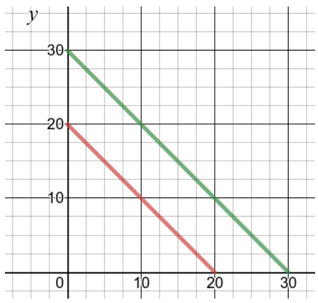
$$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\frac{1}{10}\Rightarrow \rho_{XY}=\frac{-\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}=-\frac{1}{2}$$

ب)

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$f_{Y|X=x}(y|x)=\begin{cases}\frac{y-x}{x^2-x+\frac{1}{2}} & x\le y\le 1\\ \frac{x-y}{x^2-x+\frac{1}{2}} & 0\le y\le x\\ 0 & \textit{otherwise}\end{cases}$$

سوال ۶) الف) ناحیه‌ی چگالی مثبت به صورت زیر خواهد بود:



ناحیه با احتمال بزرگتر از صفر، ناحیه‌ی بین دو خط $y=-x+20$ و $y=-x+30$ است.

$$k=\frac{3}{81250}$$

ب)

$$f_X(x)=\begin{cases}250kx-10kx^2 & 0\le x\le 20\\ 450kx-30kx^2+\frac{1}{2}kx^3 & 20<x\le 30\end{cases}$$

با توجه به تقارنی که بین X و Y در این مسئله وجود دارد، با یک روند مشابه و تنها با تغییر x ها به y تابع چگالی حاشیه‌ای Y برابر خواهد بود با:

$$f_Y(y)=\begin{cases}250ky-10ky^2 & 0\le y\le 20\\ 450ky-30ky^2+\frac{1}{2}ky^3 & 20<y\le 30\end{cases}$$

مشخص است که X و Y مستقل نیستند، چراکه رابطه‌ی $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ برقرار نیست.

ج) برای بازه‌ی $0\le x\le 20$ و سپس برای $20\le x\le 30$ انتگرال‌گیری کنید. بنابراین:

$$P(X+Y\le 25)=\frac{27500}{3}k+\frac{10625}{24}k\overset{k=\frac{3}{81250}}{=\!=}0{,}3548=35{,}48\%$$

د) مشابه بخش قبل، ابتدا برای $0\le x\le 20$ و سپس برای بازه‌ی $20<x\le 30$ محاسبه می‌کنیم:

$$E\{X+Y\}=600000k+\frac{310000}{3}k=25{,}97\%$$

ه)

$$E(XY) = \int_{۰}^{۲۰}\int_{۲۰-x}^{۳۰-x} kx^{۲}y^{۲}\,dydx + \int_{۲۰}^{۳۰}\int_{۰}^{۳۰-x} kx^{۲}y^{۲}\,dydx = ۱۳۶/۴۱۰۳$$

$$E(X) = E(Y) = \frac{E(X+Y)}{۲} = ۱۲/۹۸۴۵$$

$$Cov(X,Y) = ۱۳۶/۴۱۰۳ - (۱۲/۹۸۴۵)^{۲} = -۳۲/۱۹$$

$$E(X^{۲}) = E(Y^{۲}) = ۲۰۴/۶۱۵۴ \to \sigma_X^{۲} = \sigma_Y^{۲} = ۲۰۴/۶۱۵۴ - (۱۲/۹۸۴۵)^{۲} = ۳۶/۰۱۸۲ \Longrightarrow$$

$$\rho = \frac{-۳۲/۱۹}{۳۶/۰۱۸۲} = -۰/۸۹۴$$

و)

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + ۲Cov(X,Y) = ۷/۶۶$$

سوال ۷) الف)

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{۰}^{\infty} e^{tx}(e^{-۲x} + \frac{۱}{۲}e^{-x})\,dx = \frac{۱}{۲-t} + \frac{۱}{۲(۱-t)^{۲}},\ t < ۱$$

ب)

$$E[X] = m'_X(t=۰) = \frac{۳}{۴}$$

$$E[X^{۲}] = m''_X(t=۰) = \frac{۵}{۴}$$

$$Var(X) = E[X^{۲}] - (E[X])^{۲} = \frac{۵}{۴} - (\frac{۳}{۴})^{۲} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

سوال ۸) با توجه به ویژگی خطی بودن اپراتور امید ریاضی و همچنین مستقل بودن متغیرهای تصادفی X و Y امید ریاضی خواسته شده به صورت زیر در می‌آید.

$$\mathbb{E}(X+Y)^{۲} = \mathbb{E}(X^{۲} + ۲XY + Y^{۲}) = \mathbb{E}(X^{۲}) + \mathbb{E}(Y^{۲}) + ۲\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}[X] = m'_X(t=۰) = ۵$$

$$\mathbb{E}[Y] = m'_Y(t=۰) = ۱۰$$

$$\mathbb{E}[X^{۲}] = m''_X(t=۰) = ۵۰$$

$$\mathbb{E}[Y^{۲}] = m''_Y(t=۰) = ۱۵۰ \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}(X^{۲}) + \mathbb{E}(Y^{۲}) + ۲\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = ۵۰ + ۲\times۵\times۱۰ + ۱۵۰ = ۳۰۰$$

سوال ۹)

$$P_N(n) = \sum_k P_{N,K}(n,k) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱۰۰^n e^{-۱۰۰}}{(n+۱)!} = \frac{۱۰۰^n e^{-۱۰۰}}{n!}$$

$$P_{K|N}(k|n) = \frac{P_{K,N}(k,n)}{P_N(n)} = \frac{\frac{۱۰۰^n e^{-۱۰۰}}{(n+۱)!}}{\frac{۱۰۰^n e^{-۱۰۰}}{n!}} = \frac{۱}{n+۱}$$

سوال ۱۰)

$$x^{۲} + y^{۲} \le r^{۲} \to -\sqrt{r^{۲}-x^{۲}} \le y \le \sqrt{r^{۲}-x^{۲}}$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}}^{\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}} \frac{۱}{\pi r^{۲}}dy = ۲\int_{۰}^{\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}} \frac{۱}{\pi r^{۲}}dy = ۲\frac{\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}}{\pi r^{۲}}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y,X(x,y)}}{f_X(x)} = \frac{\frac{۱}{\pi r^{۲}}}{۲\frac{\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}}{\pi r^{۲}}} = \frac{۱}{۲\sqrt{r^{۲}-x^{۲}}}$$

سوال ۱۱) برای حل سوال از متغیر تصادفی I که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم :

$$I_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر حداقل یکی از X مشتری از نوع i پیتزا خریده باشد.} \\ ۰ & \textit{otherwise} \end{cases}$$

حال متغیر تصادفی N را که نشان‌دهنده تعداد نوع پیتزا است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N = I_۱ + I_۲ + ... + I_n$$

$$\mathbb{E}(N_i|X) = P(\text{احتمال آنکه پیتزای امi توسط حداقل یکی از X مشتری سفارش داده شده باشد}) = ۱ - (۱ - \frac{۱}{n})^X$$

$$\mathbb{E}(N|X) = \sum_{i=۱}^{n} ۱ - (۱ - \frac{۱}{n})^X = n(۱ - (۱ - \frac{۱}{n})^X)$$

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N|X)) = n(۱ - \mathbb{E}((۱ - \frac{۱}{n})^X))$$

طبق رابطه امید ریاضی و با توجه به اینکه متغیر تصادفی X گسسته است، داریم:

$$\mathbb{E}((۱ - \frac{۱}{n})^X)) = \sum_{i=۱}^{q} P(x_i)(۱ - \frac{۱}{n})^{x_i}$$

از طرفی طبق رابطه تابع مولد ممان داریم:

$$M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = \sum_{i=۱}^{q} P(x_i)e^{sx_i}$$

بنابراین برای رسیدن به مقدار امید ریاضی خواسته شده کافی است در تابع مولد ممان به جای مقدار s مقدار $Ln(۱ - \frac{۱}{n})$ را قرار دهیم:

$$\Rightarrow \mathbb{E}(N) = n(۱ - M_X(Ln(۱ - \frac{۱}{n})))$$