



University of Tehran

## آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۲ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

گردآورنده: مهدی جهانی

آخرین تاریخ به روزرسانی ۱۲ January، ۲۰۲۳

### سؤال ۱.

یک تاس سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که جمع دو عدد دیده شده بیشتر از ۷ باشد را در هر یک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

الف) عدد اول مشاهده شده ۴ باشد.

ب) عدد اول مشاهده شده بیشتر از ۳ باشد.

پ) عدد اول مشاهده شده ۱ باشد.

ت) عدد اول مشاهده شده کمتر از ۵ باشد.

### سؤال ۲.

مثلی به راس‌های  $N$  و  $L$  و  $T$  داریم که درون یک دایره محاط شده است. می‌دانیم که رئوس مثلث به طور تصادفی روی محیط دایره انتخاب شده و تمام رئوس نیز روی یک نیم‌دایره هستند. احتمال این که تمام زوایای داخلی مثلث  $NLT$  کمتر از  $120^\circ$  درجه باشند را محاسبه کنید.

### سؤال ۳.

دو نقطه را به طور تصادفی روی محور افقی انتخاب می‌کنیم به طوری که هر دو بین  $0$  و  $1$  باشند. اگر بدانیم که فاصله دو نقطه کمتر از  $0.25$  است، احتمال این که مختصات یکی از نقاط کمتر از  $0.5$  و دیگری بیشتر از  $0.5$  باشد را محاسبه کنید.

### سؤال ۴.

فرض کنید که سه سکه سالم داریم. هر کدام را به طور مستقل می‌اندازیم. می‌دانیم که نتیجه حداقل دو تا از سکه‌ها مشابه خواهد بود. هم‌چنین می‌دانیم که سکه سوم به احتمال برابر شیر یا خط خواهد بود. آیا می‌توان نتیجه گرفت که احتمال این که همه سکه‌ها نتیجه مشابه داشته باشند، برابر  $0.5$  است؟ برای نظر خود دلیل بیاورید.

## سؤال ۵.

در یک مهمانی هر فردی که وارد می شود کلید خود را روی تنها میز موجود می گذارد. فرض کنید که در کل تعداد  $k$  نفر مهمان داریم. هنگام خروج نیز هر مهمان بدون توجه به کلیدها یک کلید را به طور تصادفی برداشته و می رود. این احتمال را که در آخر مهمانی هیچ کسی کلید اصلی خود را بر ندارد، محاسبه کنید.

## سؤال ۶.

در جریان انتخاب واحد ترم سوم احتمال این که یک دانشجو درس آمار و احتمال مهندسی را داشته باشد ۷۰ درصد و این احتمال برای درس مدارهای منطقی ۹۰ درصد است. حداقل احتمال این که در یک گروه دوستی ۴ نفره اکثر افراد هر دو درس را داشته باشند، چقدر است؟

## سؤال ۷.

در خانواده ای ۳ بچه حضور داشته که در کدام مستقل از بقیه می توانند پسر یا دختر باشند. با توجه به سه پیشامد زیر، به سوالات هر بخش پاسخ دهید:

$E_1$ : هر سه بچه جنسیت یکسان داشته باشند.  
 $E_2$ : حداکثر یک پسر بین بچه ها باشد.  
 $E_3$ : خانواده یک پسر و یک دختر را داشته باشد.

الف) نشان دهید که  $E_1$  از  $E_2$  و  $E_2$  از  $E_3$  مستقل است.

ب) آیا  $E_1$  از  $E_3$  مستقل است؟

پ) آیا نتایج فوق در حالتی که احتمال پسر بودن با دختر بودن متفاوت است، همچنان صدق می کنند؟

ت) آیا نتایج فوق در حالتی که در خانواده ۴ بچه حضور داشته باشند نیز صدق می کنند؟

## سؤال ۸.

از میان تمام زوج های مرتب به شکل  $(a, b)$  که از میان اعداد ۱ تا ۹۹ می توان انتخاب کرد (توجه داشته باشد که  $a$  و  $b$  می توانند برابر باشند) یک زوج مرتب را با احتمال یکسان از میان همه آنها انتخاب می کنیم. اگر بدانیم جمع دو عضو زوج مرتب انتخاب شده عددی زوج است، احتمال این که جمع یکان این دو عدد کمتر از ۱۰ باشد را محاسبه کنید.

## سؤال ۹.

(\*) یک دنباله باینری  $n$ -تصادفی در اختیار داریم. احتمال صفر و یک بودن هر بیت برابر  $0.5$  است. احتمال این که طول بلندترین رشته از یک های متوالی در این دنباله برابر  $k$  باشد، چقدر است؟ ( $0 \leq k \leq n$ )

پاسخ.

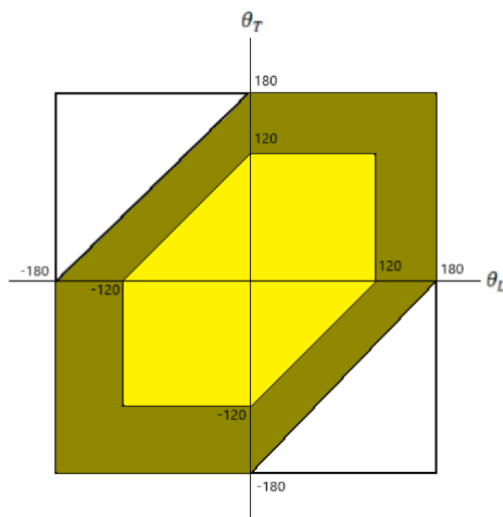
سوال ۱) (آ) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{1}{4} = \frac{3}{6}$  است.

(ب) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$  است.

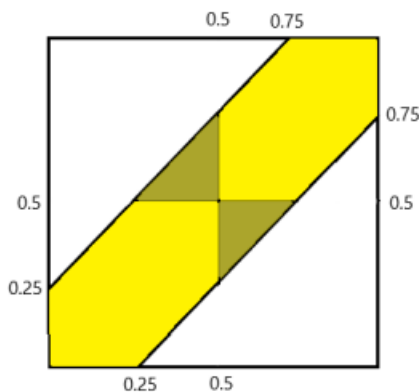
(ج) پاسخ نهایی برابر با ۰ است.

(د) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$  است.

سوال ۲) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{5}{9}$  است. تصویر زیر به عنوان راهنمایی به شما کمک خواهد کرد:



سوال ۳) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{1}{V} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$  است. تصویر زیر به عنوان راهنمایی به شما کمک خواهد کرد:



سوال ۴) گزاره آورده شده در صورت مسئله به پارادوکس گالتون مشهور بوده و به همین ترتیب صحیح نیست.

سوال ۵) احتمال نهایی خواسته شده توسط مسئله با فرمول  $P_t = 1 - 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$  محاسبه می شود که برای  $n$  های بزرگ به سمت  $\frac{1}{e}$  میل می کند.

سوال ۶) پاسخ نهایی برابر با  $P = 0.63^4 + \binom{4}{1} \times 0.63^3 \times 0.37^1$  است.

- سوال ۷) (آ) کافی است از فرمول اصلی اثبات استقلال احتمالها استفاده کنید.
- (ب) به این نکته توجه داشته باشید که رویداد ۲ و ۳ نمی‌توانند با هم رخ دهند.
- (ج) تنها در حالتی که یکی از دو احتمال دختر یا پسر بودن ۱ باشد، می‌توان گفت دو گزاره قسمت‌های قبلی همچنان صدق می‌کنند.
- (د) پاسخ این قسمت نیز منفی است. کافی است پیشامد ۲ و ۳ را در نظر بگیرید.

سوال ۸) پاسخ نهایی برابر با  $\frac{24.1}{49.1}$  است.

سوال ۹)