University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

تمرین چهارم - متغیرهای تصادفی توأماً توزیع شده

آرین و رضا

سؤال ۱.

توزیع احتمال رشد جمعیت یک شهر خاص از تابع توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f(x,k,\theta)=\begin{cases}\frac{k.\theta^k}{x^{k+۱}} & \theta\leq x\\ ۰ & O.W.\end{cases}$$

که در آن مقادیر k و θ دو ثابت مثبت هستند.

۱. ثابت کنید که این تابع یک تابع توزیع احتمال است.

۲. در صورتی که $k>۱$ امید ریاضی را محاسبه کنید.

۳. در صورتی که $k>۲$ مقدار واریانس را بیابید.

پاسخ .

۱. برای این مورد ابتدا باید ثابت کنیم که تابع همواره مثبت است و سپس باید ثابت کنیم مساحت زیر سطح نمودار برابر با ۱ است. با توجه به این که تابع برای مقادیر بزرگتر از صفر تعریف شده است و مقدار θ نیز همواره مثبت است، مقدار تابع در هر نقطه مثبت است. همچنین داریم:

$$\int_{\theta}^{\infty} f(x,k,\theta)dx = k\theta^k\int_{\theta}^{\infty} x^{-(k+۱)}dx = -\frac{k\theta^k}{kx^k}|_{\theta}^{\infty} = ۱$$

۲. با توجه به رابطه‌ی محاسبه‌ی امید ریاضی داریم:

$$E(X)=\int_{\theta}^{\infty} xf(x,k,\theta)dx = k\theta^k\int_{\theta}^{\infty} x^{-k}dx = \frac{k\theta^k}{۱-k}x^{۱-k}|_{\theta}^{\infty} = \frac{k\theta}{k-۱}$$

۳. ابتدا گشتاور مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم و سپس به محاسبه‌ی واریانس می‌پردازیم:

$$E(X^۲) = \int_{\theta}^{\infty} x^۲ f(x,k,\theta)dx = k\theta^k \int_{\theta}^{\infty} x^{۱-k}dx = \frac{k\theta^k}{۲-k} x^{۲-k}|_{\theta}^{\infty} = \frac{k\theta^۲}{k-۲}$$

$$Var(X) = E(X^۲) - E(X)^۲ = \frac{k\theta^۲}{k-۲} - \left(\frac{k\theta}{k-۱}\right)^۲$$

سؤال ۲.

فرض کنید X متغیر تصادفی نشان‌دهنده‌ی تخمینی از مقدار هزینه‌ی یک فرد خاص (بر حسب هزار تومان) در طول یک سال باشد:

۱. اگر تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی به صورت $x \geq ۰ \quad f(x) = k(۱ + \frac{۲x}{۵})^{-۷}$ باشد، مقدار k را بیابید.

۲. فرض کنید این فرد از یک شرکت بیمه استفاده می‌کند که برنامه‌ی پرداختی آن بدین شرح است:

برای هزینه‌های کمتر از ۵۰۰ هزار تومان چیزی نمی‌پردازد و برای هزینه‌های بیشتر از ۵۰۰ هزار تومان نیز تا ۸۰ درصد هزینه‌ی باقی‌مانده را می‌پردازد (یعنی ابتدا فرد ۵۰۰ هزار تومان را می‌پردازد و سپس بیمه ۸۰ درصد هزینه‌ی باقی‌مانده را می‌پردازد). همچنین در برنامه‌ی این بیمه بیشترین هزینه‌ای که فرد می‌پردازد نیز ۲ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان است (یعنی در صورتی که هزینه‌ی درمانی بیشتر از این مقدار شد، فرد تنها همین مقدار ۲ میلیون و ۵۰۰ هزار تومان را می‌پردازد و سایر هزینه‌ها هر چقدر باشد توسط بیمه پرداخت می‌شود).

ابتدا تابع مقدار هزینه‌ی پرداخت شده توسط بیمه را بر حسب متغیر تصادفی X بنویسید و سپس امید ریاضی آن را محاسبه کنید.

پاسخ.

۱. برای محاسبه‌ی k کافیست معادله‌ی $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱$ را حل کنیم تا به پاسخ برسیم:

$$\int_{۰}^{\infty} k\left(۱+\frac{x}{۲/۵}\right)^{-۷} dx = k\int_{۰}^{\infty} \left(۱+\frac{x}{۲/۵}\right)^{-۷} dx = \frac{۵k}{۲}\int_{۱}^{\infty} u^{-۷}du = -\frac{۵k}{۱۲}u^{-۶}|_{۱}^{\infty} = ۱$$

$$k = \frac{۱۲}{۵}$$

۲. تابع مورد نظر به صورت زیر می‌شود:

$$h(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۵۰۰, \\ \frac{۴}{۵}(x-۵۰۰) & ۵۰۰ \leq x \leq ۱۰۵۰۰, \\ x - ۲۵۰۰ & x \geq ۱۰۵۰۰ \end{cases}$$

بنابراین کافیست امید ریاضی تابع جدید را محاسبه کنیم:

$$E(h(X)) = \int_{۰}^{\infty} h(x)k\left(۱+\frac{x}{۲/۵}\right)^{-۷}dx$$

$$= k\int_{۵۰۰}^{۱۰۵۰۰}\frac{۴}{۵}(x-۵۰۰)\left(۱+\frac{x}{۲/۵}\right)^{-۷}dx + k\int_{۱۰۵۰۰}^{\infty}(x-۲۵۰۰)\left(۱+\frac{x}{۲/۵}\right)^{-۷}dx$$

$$= ۲k\int_{۲۰۱}^{۴۲۰۱}(۲/۵u - ۵۰۲/۵)u^{-۷}du + \frac{۵}{۲}\int_{۴۲۰۱}^{\infty}((۲/۵u - ۲۵۰۲/۵)u^{-۷}du$$

$$= ۱۲\left\{\frac{۱}{۵}\left(\frac{۱}{۲۰۱^۵} - \frac{۱}{۴۲۰۱^۵}\right) - \frac{۲۰۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲۰۱^۶} - \frac{۱}{۴۲۰۱^۶}\right)\right\} + \frac{۱۲}{۵}\left\{\frac{۵}{۴\times ۴۲۰۱^۵} - \frac{۲۵۰۲۵}{۲۴\times ۴۲۰۱^۶}\right\}$$

سؤال ۳.

رستوران زنجیره‌ای مک دونالد اخیرا ادعا کرده است که به منظور اهمیت داشتن سلامتی مشتریان از روغنی سالم‌تر برای پخت غذاهایش استفاده می‌کند اما از طرفی مزه‌ی غذاها چندان تغییر نکرده است به طوری که از بین هر ۱۰۰ نفری که یک غذای طبخ شده با آن روغن را می‌چشند ۹۷ نفر متوجه تغییر نمی‌شوند. با فرض درست بودن این ادعا در یک نمونه‌ی صدتایی از مشتریان موارد زیر را تخمین بزنید:

۱. احتمال این که حداقل ۴۰ درصد از افراد متوجه تفاوت مزه‌ی غذای طبخ شده با روغن جدید بشوند.

۲. احتمال این که حداکثر ۵ درصد متوجه این تفاوت بشوند.

پاسخ .

برای حل این سوال از تخمین توزیع دوجمله‌ای با استفاده از توزیع پواسون استفاده می‌کنیم چرا که مقدار n به اندازه‌ای نیست که بتوان با توزیع نرمال آن را تخمین زد (شرط $np(۱-p) \geq ۱۰$ برای این مسأله صادق نیست) شرایط تخمین با توزیع پواسون همخوانی دارد در نتیجه با $\lambda = np$ آن را تخمین می‌زنیم.

با توجه به آن که از بین صد نفری که غذا را چشیده‌اند، تنها سه نفر متوجه تفاوت شده‌اند احتمال تشخیص تفاوت برابر است با $p = ۰/۰۳$. با توجه به این مورد داریم:

$$\lambda = np = ۳$$

در نتیجه برای یافتن پاسخ دو پرسش مطرح شده باید از توزیع $Poi(۳)$ استفاده کنیم.

۱. احتمال این که حداقل ۴۰ درصد متوجع تغییر شوند برابر با $P(X \geq ۴۰)$ است. داریم:

$$P(X \geq ۴۰) = ۱ - P(X < ۴۰) = \sum_{i=۰}^{۳۹} \frac{۳^i e^{-۳}}{i!} = e^{-۳} \sum_{i=۰}^{۳۹} \frac{۳^i}{i!}$$

۲. احتمال این که حداکثر ۵ درصد متوجه این تفاوت بشوند برابر با $P(X \leq ۵)$ است. داریم:

$$P(X \leq ۵) = \sum_{i=۰}^{۵} \frac{۳^i e^{-۳}}{i!} = e^{-۳} \sum_{i=۰}^{۵} \frac{۳^i}{i!}$$

سؤال ۴.

فردی می‌خواهد یک بسته‌ی مکالمه‌ی تلفن همراه بخرد و با دو گزینه روبرو است. در گزینه‌ی اول به ازای هر دقیقه مکالمه باید ۱۰ تومان بپردازد و در گزینه‌ی دوم به ازای هر مدت زمان کمتر از ۲۰ دقیقه ۹۹ تومان و به ازای هر دقیقه‌ای که از ۲۰ دقیقه می‌گذرد نیز ۱۰ تومان اضافی باید بپردازد (یعنی در صورتی که مکالمه ۲۲ دقیقه طول بکشد باید ۱۱۹ تومان بپردازد). در صورتی که طول مکالمه‌ی این فرد از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند، مشخص کنید کدام گزینه برای وی مناسب‌تر است در صورتی که:

۱. میانگین زمان مکالمه‌ی وی ۱۰ دقیقه باشد.

۲. میانگین زمان مکالمه‌ی وی ۱۵ دقیقه باشد.

راهنمایی: برای مقایسه‌ی گزینه‌ها از امید ریاضی استفاده کنید.

پاسخ .

ابتدا موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

X: مدت زمان مکالمه

Y_1: متغیر تصادفی هزینه‌ی مکالمه با استفاده از بسته‌ی نخست

Y_2: متغیر تصادفی هزینه‌ی مکالمه با استفاده از بسته‌ی دوم

در هر دو حالت داریم:

$$E(Y_1) = 10 \times E(X)$$
$$E(Y_2) = P(X \leq 20) \times E(Y_2|X \leq 20) + P(X > 20) \times E(Y_2|X > 20)$$

از طرفی در محاسبه‌ی $E(Y_2|X > 20)$ می‌دانیم که برای ۲۰ دقیقه‌ی نخست باید ۹۹ تومان بپردازیم و برای هر دقیقه‌ی بیش از آن ۱۰ تومان. همچنین از آنجایی که زمان مکالمه از توزیع نمایی پیروی می‌کند و این توزیع نیز بی‌حافظه است، توزیع مدت زمان مکالمه‌ی بیش از ۲۰ دقیقه با توزیع مدت زمان مکالمه‌ی اولیه برابر است و در نتیجه میانگین آن نیز ۱۰ دقیقه می‌شود و داریم:

$$E(Y_2|X > 20) = 99 + 10 \times E(X)$$

حال با جایگذاری مقادیر در هر دو حالت به پاسخ نهایی میرسیم.

۱. با توجه به این که در توزیع نمایی مقدار میانگین برابر با $\frac{1}{\lambda}$ است، در نتیجه مقدار λ برابر با ۰/۱ می‌گردد. داریم:

$$E(Y_1) = 10 \times 10 = 100$$
$$E(Y_2) = P(m \leq 20) \times 99 + (1 - P(m \leq 20)) \times (99 + 100)$$
$$= P(m \leq 20) \times 99 + (1 - P(m \leq 20)) \times 199$$

در نتیجه:

$$E(Y_2) = (1 - e^{-0/1\times20}) \times 99 + e^{-0/1\times20} \times 199 = 99 + 100e^{-2} \simeq 112/53$$

بنابراین در حالتی که میانگین مدت زمان مکالمه ده دقیقه باشد میزان پرداختی به طور میانگین در حالت نخست کمتر است.

۲. در این حالت نیز داریم:

$$\lambda = \frac{1}{15} \simeq 0/06$$

در نتیجه:

$$E(Y_1) = 10 \times 15 = 150$$
$$E(Y_2) = P(m \leq 20) \times 99 + (1 - P(m \leq 20)) \times (99 + 150) =$$
$$= (1 - e^{-\frac{20}{15}}) \times 99 + e^{-\frac{20}{15}} \times 249 = 99 + 150e^{-\frac{4}{3}} \simeq 138/53$$

در نتیجه در این حالت که میانگین زمان مکالمه یک ربع است، میزان پرداختی در حالت دوم به طور میانگین کمتر است.

سؤال ۵.

یک بوم‌شناس می‌خواهد در یک محوطه نمونه‌برداری دایروی با توزیع یکنواخت نقطه‌ای را مشخص کند. فرض کنید $(x, y) \sim (X, Y)$ مختصات این نقطه باشد. اگر مرکز دایره در $(0, 0)$ بوده و شعاع دایره نیز R باشد،

الف) احتمال آنکه نقطه انتخاب شده در فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره باشد چقدر است؟

ب) احتمال آنکه هم y و هم x هر دو از ۰ حداکثر $\frac{R}{\sqrt{۲}}$ فاصله داشته باشد چقدر است؟

پ) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y چیست؟

ت) آیا این دو متغیر مستقلند؟

پاسخ.

با توجه به توضیحات داده شده تابع چگالی احتمال دو متغیر X و Y به شکل زیر است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{\pi R^۲} & x^۲+y^۲ \leq R^۲ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

الف) برای پاسخ به این سوال کافیست از این تابع در فضای دایره به شعاع $\frac{R}{۲}$ انتگرال بگیریم. لذا A در اینجا فضای یک دایره به شعاع $\frac{R}{۲}$ است.

$$P[(X,Y)\in A] = \iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_A \frac{۱}{\pi R^۲}dxdy$$

باتوجه به اینکه A فضای یک دایره است، از تغییر متغیر قطبی برای محاسبه‌ی انتگرال فوق استفاده می‌کنیم:

$$dxdy = rdrd\theta$$

$$\Rightarrow \iint\limits_A \frac{۱}{\pi R^۲}dxdy = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\frac{R}{۲}} \frac{۱}{\pi R^۲} rdrd\theta = \frac{۱}{\pi R^۲}\pi(\frac{R}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

ب) از آنجا که هر دو متغیر x و y می‌توانند از $-\frac{R}{\sqrt{۲}}$ تا $\frac{R}{\sqrt{۲}}$ حرکت کنند، اشتراک این دو فضا یک مربع به ضلع $\sqrt{۲}R$ می‌شود. لذا A در اینجا مربعی به ضلع $\sqrt{۲}R$ است.

$$P[(X,Y)\in A] = \iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_A \frac{۱}{\pi R^۲}dxdy = \frac{۱}{\pi R^۲}(\sqrt{۲}R)^۲ = \frac{۲}{\pi}$$

پ) حدود x و y را درون این دایره بدست می‌آوریم.

$$x^۲+y^۲ = R^۲$$

لذا x از $-\sqrt{R^۲-y^۲}$ تا $\sqrt{R^۲-y^۲}$ و y از $-\sqrt{R^۲-x^۲}$ تا $\sqrt{R^۲-x^۲}$ است.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^۲-x^۲}}^{\sqrt{R^۲-x^۲}} \frac{۱}{\pi R^۲}dy = \frac{۱}{\pi R^۲}\times ۲\sqrt{R^۲-x^۲} & -R\leq x\leq R \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^۲-y^۲}}^{\sqrt{R^۲-y^۲}} \frac{۱}{\pi R^۲}dx = \frac{۱}{\pi R^۲}\times ۲\sqrt{R^۲-y^۲} & -R\leq y\leq R \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

ت) برای آنکه این دو متغیر مستقل باشند لازم است تا pdf مشترک آن دو با حاصل‌ضرب pdf هر یک از آن دو متغیر باشد که اینطور نیست. پس مستقل نیستند.

سؤال ۶.

دو تایپیست با یکدیگر بر سر سریع‌تر تایپ کردن مسابقه می‌دهند. فرض کنید متغیر X و متغیر Y به ترتیب نمایانگر تعداد اشتباهات تایپی این دو تایپیست باشد. اگر اشتباهات این دو تایپیست به یکدیگر ارتباطی نداشته و توزیع احتمالی این دو متغیر نیز توزیع پواسون با پارامتر μ_1 و μ_2 باشند:

الف) تابع احتمال مشترک این دو متغیر چیست؟

ب) احتمال آنکه حداکثر یک اشتباه در مجموع هر دو متن تایپ شده رخ داده باشد چقدر است؟

پ) یک عبارت کلی برای احتمال آنکه مجموع تعداد ایرادات تایپی در متن تایپ شده توسط هر دو تایپیست برابر عدد k باشد بنویسید.

پاسخ .

الف) از آنجا که دو متغیر مستقلند، کافیست pmf این دو را در هم ضرب کنیم تا pmf مشترک آن دو بدست آید.

$$P_{XY}(x,y) = \begin{cases} p_X(x) \times p_Y(y) = e^{-\mu_1}\frac{\mu_1^x}{x!} \times e^{-\mu_2}\frac{\mu_2^y}{y!} = e^{-\mu_1-\mu_2}\frac{\mu_1^x\mu_2^y}{x!y!} & x,y \in \mathbb{N}. \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ب) کافیست این عبارت را حساب کنیم. $P(X+Y \leq 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1)$ با جایگذاری اعداد در تابع بدست آمده در بخش الف حاصل برابر می‌شود با

$$e^{-\mu_1-\mu_2}(1+\mu_1+\mu_2)$$

پ) $P(X+Y=k) = \sum_{m=0}^{k} P(X=m, Y=k-m)$ باقی را با جواب بخش های قبل جاگذاری و محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{m=0}^{k} e^{-\mu_1-\mu_2}\frac{\mu_1^m\mu_2^{k-m}}{m!(k-m)!} = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{k!} e^{-\mu_1-\mu_2}\frac{\mu_1^m\mu_2^{k-m}}{m!(k-m)!} = e^{-\mu_1-\mu_2} \times \frac{1}{k!} \times \sum_{m=0}^{k} \mu_1^m\mu_2^{k-m} \times \binom{k}{m}$$

$$= e^{-\mu_1-\mu_2} \times \frac{1}{k!} \times (\mu_1+\mu_2)^k$$

سؤال ۷.

میانگین و انحراف معیار نشست سه پایهٔ شرقی، میانی و غربی یک پل براساس جدول زیر است (اعداد برحسب سانتی‌متر هستند). می‌توان پذیرفت که نشست‌ها توزیع نرمال دارند و مستقل از هم هستند.

پایه	میانگین	انحراف معیار
شرقی	۱٫۰	۰٫۳
میانی	۱٫۵	۰٫۵
غربی	۱٫۰	۰٫۳

آ) احتمال این‌که مقدار نشست بیشینه از ۲ سانتی‌متر بیشتر شود چقدر است؟ (اگر مقدار نشست حداقل یکی از پایه‌های پل بیشتر از ۲ سانتی‌متر شود، آنگاه کل پل هم بیشتر از ۲ سانتی‌متر نشست خواهد داشت.)

ب) مقدار نشست مجاز پایهٔ میانی پل را چنان تعیین کنید که احتمال افزایش نشست این پایه از مقدار مجاز تعیین‌شده به ۰٫۰۰۲ محدود گردد.

پاسخ .

آ) برای محاسبه احتمال خواسته‌شده در این قسمت ابتدا احتمال اینکه مقدار نشست هر یک از پایه‌ها بیشتر از ۲ سانتی‌متر شود را حساب می‌کنیم:

$$A = \text{شرقی} \Longrightarrow P(X > ۲) = ۱ - P(\underbrace{\frac{X-۱}{۰/۳}}_{=Z} \leq \frac{۲-۱}{۰/۳}) = ۱ - ۰/۹۹۹۶ = ۰/۰۰۰۴$$

$$B = \text{میانی} \Longrightarrow P(X > ۲) = ۱ - P(\underbrace{\frac{X-۱/۵}{۰/۵}}_{=Z} \leq \frac{۲-۱/۵}{۰/۵}) = ۱ - ۰/۸۴۱۳ = ۰/۱۵۸۷$$

$$C = \text{غربی} \Longrightarrow P(X > ۲) = ۱ - P(\underbrace{\frac{X-۱}{۰/۳}}_{=Z} \leq \frac{۲-۱}{۰/۳}) = ۱ - ۰/۹۹۹۶ = ۰/۰۰۰۴$$

حال با توجه به خواسته سوال اجتماع رخ دادن هریک از پیشامدهای به‌دست آمده را حساب می‌کنیم. نکته حائز اهمیت این‌است که در صورت سوال ذکرشده این پیشامدها مستقل از یک‌دیگر هستند:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= (۰/۰۰۰۴) + (۰/۱۵۸۷) + (۰/۰۰۴) - (۰/۰۰۴ \times ۰/۱۵۸۷) - (۰/۰۰۴ \times ۰/۰۰۴) - (۰/۱۵۸۷ \times ۰/۰۰۴) + (۰/۰۰۴ \times ۰/۱۵۸۷ \times ۰/۰۰۴)$$

احتمال اینکه مقدار نشست بیشینه پل بیشتر از ۲ سانتی‌متر شود،تقریبا ۰/۱۵۹۴ است.

ب)

$$P(Z \geq \frac{X-۱/۵}{۰/۵}) = ۰/۰۰۲ \Longrightarrow P(Z \leq \frac{X-۱/۵}{۰/۵}) = ۰/۹۹۸ \overset{Z-table}{\Longrightarrow} \frac{X-۱/۵}{۰/۵} = ۲/۸۸ \Rightarrow X = ۲/۹۴$$

اگر مقدار نشست مجاز پایهٔ پل ۲/۹۴ باشد.آنگاه احتمال افزایش نشست این پایه از مقدار مجاز ۰/۰۰۲ خواهد بود.

پاسخ .

سوال ۱) (آ) صادق بودن ویژگی‌های یک تابع توزیع احتمال را بررسی کنید.

(ب)

$$E(X) = \frac{k\theta}{k-۱}$$

(ج)

$$Var(X) = E(X^۲) - E(X)^۲ = \frac{k\theta^۲}{k-۲} - \left(\frac{k\theta}{k-۱}\right)^۲$$

سوال ۲) (آ)

$$k = \frac{۱۲}{۵}$$

(ب) تابع مورد نظر به‌صورت زیر می‌شود:

$$h(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۵۰۰, \\ \frac{۴}{۵}(x - ۵۰۰) & ۵۰۰ \leq x \leq ۱۰۵۰۰, \\ x - ۲۵۰۰ & x \geq ۱۰۵۰۰ \end{cases}$$

$$E(h(X)) == ۱۲ \left\{ \frac{۱}{۵} \left(\frac{۱}{۲۰۱^{۵}} - \frac{۱}{۴۲۰۱^{۵}} \right) - \frac{۲۰۱}{۶} \left(\frac{۱}{۲۰۱^{۶}} - \frac{۱}{۴۲۰۱^{۶}} \right) \right\} + \frac{۱۲}{۵} \left\{ \frac{۵}{۴ \times ۴۲۰۱^{۵}} - \frac{۲۵۰۲۵}{۲۴ \times ۴۲۰۱^{۶}} \right\}$$

سوال ۳) (آ)

$$P(X \geq ۴۰) = e^{-۳} \sum_{i=۰}^{۳۹} \frac{۳^i}{i!}$$

(ب)

$$P(X \leq ۵) = e^{-۳} \sum_{i=۰}^{۵} \frac{۳^i}{i!}$$

از توزیع پوآسون استفاده کنید.

سوال ۴) X: مدت زمان مکالمه

$Y_۱$: متغیر تصادفی هزینه‌ی مکالمه با استفاده از بسته‌ی نخست

$Y_۲$: متغیر تصادفی هزینه‌ی مکالمه با استفاده از بسته‌ی دوم

(آ)

$$E(Y_۱) = ۱۰۰$$
$$E(Y_۲) = ۱۱۲/۵۳$$

(ب)

$$E(Y_۱) = ۱۵۰$$
$$E(Y_۲) = ۱۳۸/۵۳$$

از بی‌حافظه بودن توزیع نمایی استفاده کنید.

سوال ۵) (آ)

$$\frac{۱}{۴}$$

(ب)

$$\frac{۲}{\pi}$$

(ج)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^۲ - x^۲}}^{\sqrt{R^۲ - x^۲}} \frac{۱}{\pi R^۲} dy = \frac{۱}{\pi R^۲} \times ۲\sqrt{R^۲ - x^۲} & -R \leq x \leq R \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{R^۲ - y^۲}}^{\sqrt{R^۲ - y^۲}} \frac{۱}{\pi R^۲} dx = \frac{۱}{\pi R^۲} \times ۲\sqrt{R^۲ - y^۲} & -R \leq y \leq R \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

(د) مستقل نیستند.

سوال ۶) (آ)

$$P_{XY}(x, y) = \begin{cases} p_X(x) \times p_Y(y) = e^{-\mu_۱} \frac{\mu_۱^x}{x!} \times e^{-\mu_۲} \frac{\mu_۲^y}{y!} = e^{-\mu_۱ - \mu_۲} \frac{\mu_۱^x \mu_۲^y}{x! y!} & x, y \in \mathbb{N}. \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

(ب)

$$e^{-\mu_۱-\mu_۲}(۱+\mu_۱+\mu_۲)$$

(ج)

$$e^{-\mu_۱-\mu_۲}\times\frac{۱}{k!}\times(\mu_۱+\mu_۲)^k$$

سوال ۷) (آ) مقدار نشست بیشینه پل بیشتر از ۲ سانتی‌متر شود،تقریبا ۰/۱۵۹۴ است.

(ب) اگر مقدار نشست مجاز پایهٔ پل ۲/۹۴ باشد.آنگاه احتمال افزایش نشست این پایه از مقدار مجاز ۰/۰۰۲ خواهد بود