University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۴ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

سؤال ۱.

نشان دهید تابع $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ برای پارامتر مثبت λ یک تابع چگالی احتمال است. سپس میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی با این تابع چگالی را بر حسب λ محاسبه کنید.

سؤال ۲.

فرض کنید امید به زندگی انسان توسط تابع pdf زیر مدل می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{80}e^{-\frac{x}{80}}, 0 < x < \infty$$

الف) احتمال $P(X > 10)$ و همچنین احتمال $P(X > 90|X > 80)$ را محاسبه کنید.

ب) یکی دیگر از مدل‌هایی که می‌تواند برای امید به زندگی استفاده شود، تابع توزیع زیر است:

$$F(x) = 1 - exp(-(\frac{a}{b})(e^{bx} - 1)),\ 0 < x < \infty,\ a > 0,\ b > 0$$

برای این تابع، $f(x) = F'(x)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۳.

فرض کنید قطر تنه‌ی گونه‌ی خاصی از درختان توزیع نرمالی با $\mu = 8/8$ و $\sigma = 2/8$ است. (اعداد بر حسب اینچ هستند. برای محاسبه‌ی مقادیر از جدول توزیع نرمال استاندارد استفاده کنید.)

الف) احتمال اینکه قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، حداقل ۱۰ اینچ باشد، چقدر است؟ احتمال اینکه بیش از ۱۰ اینچ باشد(شامل خود ۱۰ اینچ نیست) چقدر است؟

ب) احتمال این که قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، بیش از ۲۰ اینچ باشد، چقدر است؟

پ) احتمال این که قطر یک درخت از این دسته که به طور رندوم انتخاب شده است، بین ۵ تا ۱۰ اینچ باشد؟

ت) به ازای چه مقداری برای c ، ۹۸ درصد از تمام مقادیر قطرها در بازه‌ی $(8/8 - c, 8/8 + c)$ قرار می‌گیرند؟

ث) اگر ۴ درخت مستقل از هم انتخاب شوند، احتمال این که حداقل یکی از درختان قطری بزرگتر از ۱۰ اینچ داشته باشد، چقدر است؟

سؤال ۴.

فرض کنید که در یک کارخانه تولید گوشی از یک ربات برای سر هم کردن قطعات موبایل استفاده می‌شود. برای این ربات یک نرم افزار نوشته شده است که متاسفانه باگ دارد و به علت همین باگ هم گاها به مشکل می‌خورد. اگر این نرم افزار ۴۰۰ ساعت اجرا شود، ۲ بار خطا رخ می‌دهد.

الف) فرض کنید این ربات برای سرهم کردن قطعات یک گوشی خاص می‌خواهد استفاده شود که این عملیات ۳ ساعت به طول می‌انجامد. اگر باگ مذکور خودش را نشان دهد عملکرد ربات را بلافاصله متوقف می‌کنند. احتمال رخ دادن این خطا برای انجام این کار چقدر است؟

ب) فرض کنید این ربات برای سر هم کردن ۱۰ هزار گوشی به کار برود. از توزیع نرمال برای تخمین احتمال آنکه در سر هم کردن بیش از ۱۸۰ گوشی خطا بروز کند، استفاده کنید. از جواب بخش الف برای این بخش استفاده کنید.

سؤال ۵.

set (مجموعه) ، یک گروه از اشیا بدون ترتیب می‌بشد. یک روش پیاده‌سازی set ، به صورت زیر می‌باشد:
۳ تابع Hash مستقل از یکدیگر با نام‌های $H_۱$ ، $H_۲$ و $H_۳$ را در نظر بگیرید. هرکدام از این توابع، یک رشته (String) به عنوان ورودی دریافت می‌کنند و یک اندیس بین ۰ تا n (به جز خود n) به آرایه‌ی n تایی را بازمی‌گرداند. برای اضافه کردن یک رشته به set ، رشته ورودی را به هر ۳ تابع $H_۱$ ، $H_۲$ و $H_۳$ می‌دهیم. هر کدام از این توابع یک اندیس بازمی‌گردانند و آن اندیس‌ها را در آرایه n تایی ، یک می‌کنیم. دقت کنید که در ابتدا، تمام خانه‌های آرایه ۰ می‌باشند. مثال زیر را برای $n = ۱۰$ در نظر بگیرید؛ در شکل زیر، حالت ابتدایی را نمایش می‌دهد که تمام خانه‌های آرایه، ۰ می‌باشند.

Index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

برای اضافه کردن کلمه‌ی ali به مجموعه، ابتدا آن را به سه تابع Hash می‌دهیم و خروجی آن‌ها بدست می‌آیند.
$H_۱("ali") = ۴, H_۲("ali") = ۷, H_۳("ali") = ۸$ حال این اندیس‌ها در آرایه n تایی را ۱ می‌کنیم و خواهیم داشت:

Index:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Value:	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0

n را در نظر بگیرید و فرض کنید تاکنون، ۱۰۰۰ رشته را ذخیره کرده‌اید. همچنین به نکات زیر دقت داشته باشید:

* رشته‌های ورودی از یکدیگر مستقل می‌باشند.
* مقدار هر خانه از آرایه، مستقل از خانه‌ی دیگر می‌باشد.
* اگر بیتی ۱ شود، دیگر هرگز ۰ نمی‌شود.
* هر سه تابع Hash گفته‌شده، خروجی را با یک توزیع uniform تولید می‌کنند.

الف) احتمال اینکه اندیس ۰ ، مقدار ۰ داشته‌باشد را محاسبه کنید.

ب) برای چک کردن اینکه رشته ورودی از قبل در set وجود دارد یا نه ، رشته را به هر سه تابع Hash می‌دهیم و ۳ خروجی از آن‌ها بدست می‌آوریم (همانطور که گفته شد این ۳ خروجی الزاما با یکدیگر متفاوت نمی‌باشند) در غیر اینصورت، ممکن است آن رشته در set باشد (ممکن است آن ۳ خانه نه به‌خاطر این رشته و به‌خاطر وجود رشته‌های دیگر، یک شده باشند.)

به چه احتمالی، رشته‌ای که از قبل به آرایه اضافه نشده باشد، به اشتباه، موجود در آرایه در نظر گرفته می‌شود؟ در واقع به چه احتمالی، هر ۳ اندیس بدست آمده از توابع Hash برای آن رشته، در آرایه مقدار ۱ خواهند داشت؟

پ) در این مساله، ما از ۳ تابع Hash استفاده کردیم. آیا استفاده بیشتر از یک تابع Hash ، الزامی می‌باشد؟ قسمت ب را یکبار دیگر با فرض صرفا یک تابع Hash انجام بدهید و نتایج را مقایسه کنید.

سؤال ۶.

فرض کنید توزیع احتمال X دارای pdf زیر است. با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$f(x;a) = \begin{cases} \frac{k}{x^a}, & x \geq ۵ \\ ۰, & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) مقدار k را بیابید. α باید در چه محدوده‌ای باشد؟

ب) تابع CDF این توزیع را بیابید.

ج) $E\{X\}$ این توزیع را بیابید.

د) نشان دهید $Ln(\frac{X}{۵})$ توزیع نمایی با پارامتر $\alpha - ۱$ است.

سؤال ۷.

X و Y دو متغیر تصادفی گسسته می‌باشند. تابع احتمال مشترک X و Y در جدول زیر داده شده است. با توجه به آن، به سوالات پاسخ دهید.

الف) تابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را محاسبه کنید.

ب) احتمال آنکه X و Y حداکثر ۱۵ باشند را محاسبه کنید.

ج) آیا X و Y مستقل از هم هستند؟

د) $E\{X+Y\}$ را محاسبه کنید.

ه) $E\{|X-Y|\}$ را محاسبه کنید.

y \ x	12	15	20
12	0.05	0.05	0.1
15	0.05	0.1	0.35
20	0	0.2	0.1

سؤال ۸.

در برخی از سیستم‌ها به هر کاربر یکی از دو تسهیلات خدماتی تخصیص داده می‌شود. اگر مدت زمان تخصیص تسهیلات i ام به یک کاربر، یک توزیع نمایی با پارامتر λ_i (که i برابر ۱ یا ۲ است) و p هم نمایانگر درصد مشتریانی که تسهیلات ۱را دریافت می کنند باشد، آنگاه تابع pdf متغیر X که نمایانگر زمان استفاده از سرویس توسط یک مشتری رندم است به صورت زیر است:

$$f(x;\lambda_۱,\lambda_۲,p)=\begin{cases}p\lambda_۱e^{-\lambda_۱x}+(۱-p)\lambda_۲e^{-\lambda_۲x}, & x\geq ۰\\ ۰, & \text{otherwise}\end{cases}$$

به این توزیع اغلب توزیع Hyperexponential گفته می‌شود.

الف) نشان دهید تابع f یک تابع چگالی احتمال است.

ب) تابع CDF را بدست آورید.

ج) همانطور که بیان شد تابع f تابع pdf برای متغیر X است؛ باتوجه به این موضوع $E\{X\}$ را محاسبه کنید.

د) با توجه از اینکه اگر X یک توزیع نمایی با پارامتر λ داشته باشد، داریم: $E\{X^۲\}=\frac{۲}{\lambda^۲}$ مقدار $E\{X^۲\}$ را در صورتیکه f تابع pdf متغیر X باشد، محاسبه کنید. سپس $Var(X)$ را محاسبه کنید.

ه) اگر ضریب تغییرات برای یک متغیر تصادفی برابر $\frac{\sigma}{\mu}$ باشد، ضریب تغییرات یک متغیر تصادفی نمایی برابر چه مقداری است؟ حال اگر X یک توزیع Hyperexponential داشته باشد، مقدار ضریب تغییرات X چیست؟

سؤال ۹.

دو سد بوکان و شهرچای، در استان آذربایجان غربی قرار دارند و قرار است آب از آنها به سمت دریاچه ارومیه انتقال پیدا کند. X ، حجم مخزن سد بوکان و Y ، حجم مخزن سد شهرچای(هر دو بر حسب میلیون .متر مکعب) می‌باشد تابع چگالی احتمال X و Y برابر است با:

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy, & x\geq ۰,\ y\geq ۰,\ ۲۰\leq x+y\leq ۳۰\\ ۰, & \text{otherwise}\end{cases}$$

با توجه به تابع چگالی گفته‌شده، به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) ناحیه‌ی چگالی مثبت را رسم کنید.

ب) مقدار k را مشخص کنید. (محاسبات لازم را نیز بنویسید.)

ج) آیا X و Y مستقل از یکدیگر می‌باشند؟ (از محاسبه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y استفاده کنید.)

د) $P(X+Y\leq ۲۵)$ را محاسبه کنید.

ه) مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) برای مجموع آب دو سد بوکان و شهرچای چقدر می‌باشد؟

پاسخ.

سوال ۱) توجه داشته باشید که برای اینکه $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد، باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

1. $f(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$

$$E\{X\}=۰,\ Var(X)=\frac{۲}{\lambda^۲}$$

سوال ۲) الف)

$$P(X > ۱۰) = e^{-\frac{۱}{۸}}$$
$$P(X > ۹۰ | X > ۸۰) = e^{-\frac{۱}{۸}}$$

ب)

$$f(x) = ae^{bx-(\frac{a}{b})(e^{bx}-۱)}$$

سوال ۳) الف)

$$P(X \geq ۱۰) = ۰/۳۳$$
$$P(X > ۱۰) = ۰/۳۳$$

ب)

$$P(X > ۲۰) \approx ۰$$

پ)

$$P(۵ < X < ۱۰) = ۰/۵۷۹۵$$

ت) در صورت سوال خواسته شده ۹۸ درصد مقادیر در این بازه قرار بگیرند. با توجه به این که بازه‌ی مربوطه بازه‌ای متقارن حول میانگین است و با توجه به تقارن توزیع نرمال حول میانگین، نتیجه میگیریم که ۱ درصد مقادیر باید بیشتر از حد بالای بازه و ۱ درصد هم کمتر از حد پایین بازه باشند. با توجه به این مورد با در نظر گرفتن توزیع نرمال استاندارد باید به دنبال مقداری باشیم که احتمال معادل آن ۱ درصد یا در واقع ۰/۰۱ باشد. با بررسی مقادیر در جدول میبینیم که $z = ۲/۳۳$. در نتیجه:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}\ ,\ c = x - \mu \Rightarrow c = z\sigma = ۲/۳۳ \times ۲/۸ = ۶/۵۲۴$$

ث) با توجه به این که درختان به طور مستقل از هم انتخاب شده‌اند، احتمال این که حداقل یک درخت قطری بیشتر از ۱۰ اینچ را داشته باشد، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(\text{at least one of four trees} \geq ۱۰) = ۱ - P(\text{ all four trees} < ۱۰) =$$
$$۱ - P(X < ۱۰) \times P(X < ۱۰) \times P(X < ۱۰) \times P(X < ۱۰)$$

از طرفی با توجه به مورد الف:

$$P(X < ۱۰) = ۰/۶۶ \rightarrow$$
$$P(\text{at least one of four trees} \geq ۱۰) = ۱ - (P(X < ۱۰))^۴ = ۱ - ۰/۶۶^۴ = ۱ - ۱/۱۹۷۲ \approx ۰/۸۰$$

سوال ۴) الف) در ۴۰۰ ساعت ۲ بار به مشکل خورده‌ایم و لذا با استفاده از تناسب در می یابیم که در ۳ ساعت ۰/۰۱۵ بار به مشکل میخوریم.از توزیع پوآسون استفاده می کنیم:

$$X \backsim Poisson(\lambda = ۰/۰۱۵)$$

فرض می‌کنیم X متغیر تصادفی نمایانگر تعداد دفعات بروز مشکل است. احتمالی که می‌خواهیم محاسبه کنیم برابر است با:

$$۱ - P(X = ۰) = ۱ - \frac{\lambda^۰ e^{-۰/۰۱۵}}{۰!} = ۱ - e^{-۰/۰۱۵}$$

ب) توزیع نرمال ما با مشخصات زیر خواهد بود:

$$N(۱۰^۴p, ۱۰^۴p(۱-p)),\ P(X > ۱۸۰) = ۱ - P(X \leq ۱۸۰)$$

چون توزیع گسسته را با توزیع پیوسته تخمین می‌زنیم از تصحیح پیوستگی استفاده می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$۱ - P(X \leq ۱۸۰/۵) = ۱ - \phi(\frac{۱۸۰/۵ - ۱۰^۴p}{\sqrt{۱۰^۴p(۱-p)}})$$

سوال ۵) الف) احتمال اینکه به ازای ۱۰۰۰ ورودی قبلی، مقدار اندیس ۰ آرایه همچنان ۰ باقی مانده باشد برابر است با :

$$((\frac{۸۹۹۹}{۹۰۰۰})^{۳})^{۱۰۰۰} = (\frac{۸۹۹۹}{۹۰۰۰})^{۳۰۰۰}$$

ب) احتمال اینکه مقدار هر ۳ اندیس‌های بدست آمده از توابع Hash در آرایه ۱ باشند، برابر است با:

$$p(i_. = ۱ \wedge i_۱ = ۱ \wedge i_۲ = ۱) = ۱ - p(i_. = ۰ \vee i_۱ = ۰ \vee i_۲ = ۰) \Rightarrow$$

$$p(i_. = ۰ \vee i_۱ = ۰ \vee i_۲ = ۰) = p(i_. = ۰) + p(i_۱ = ۰) + p(i_۲ = ۰)$$

$$- p(i_. = ۰ \wedge i_۱ = ۰) - p(i_. = ۰ \wedge i_۲ = ۰) - p(i_۱ = ۰ \wedge i_۲ = ۰) + p(i_. = ۰ \wedge i_۱ = ۰ \wedge i_۲ = ۰)$$

دقت شود که $i_., i_۱, i_۲$ سه اندیس بدست آمده از توابع Hash می‌باشند و می‌توانند هر مقداری بین ۰ تا ۸۹۹۹ داشته باشند.
در قسمت الف $p(i_. = ۰), p(i_۱ = ۰), p(i_۲ = ۰)$ محاسبه شدند.
$p(i_. = ۰ \wedge i_۱ = ۰), p(i_. = ۰ \wedge i_۲ = ۰), p(i_۱ = ۰ \wedge i_۲ = ۰)$ نیز مشابه قسمت الف می‌باشند و ۲ بیت باید ۰ باشند. در نتیجه در صورت کسر، به جای ۸۹۹۹، ۸۹۹۸ قرار می‌دهیم.
$p(i_. = ۰ \wedge i_۱ = ۰ \wedge i_۲ = ۰)$ نیز همانند قسمت الف می‌باشد و صرفا ۳ بیت آن باید ۰ باشند. در نتیجه صورت کسر، به جای ۸۹۹۹ برابر با ۸۹۹۷ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$p(i_. = ۰ \vee i_۱ = ۰ \vee i_۲ = ۰) = ۳(\frac{۸۹۹۹}{۹۰۰۰})^{۳۰۰۰} - ۳(\frac{۸۹۹۸}{۹۰۰۰})^{۳۰۰۰} + (\frac{۸۹۹۷}{۹۰۰۰})^{۳۰۰۰} \Rightarrow$$

$$p(i_. = ۱ \wedge i_۱ = ۱ \wedge i_۲ = ۱) = ۱ - p(i_. = ۰ \vee i_۱ = ۰ \vee i_۲ = ۰) = ۰/۰۲۲۷۶۵$$

پ) احتمال اینکه اندیس بدست آمده از تابع Hash ، ۱ باشد برابر است با:

$$p(i_. = ۱) = ۱ - p(i_. = ۰) = ۱ - (\frac{۸۹۹۹}{۹۰۰۰})^{۱۰۰۰} = ۰/۱۰۵$$

همانطور که مشاهده می‌شود، با کم کردن تعداد توابع Hash میزان خطا به مقدار زیادی افزایش یافت. پس استفاده از تعداد بیشتری تابع Hash الزامیست.

سوال ۶) الف)

$$k = (\alpha - ۱)۵^{\alpha - ۱}$$

محدوده‌ی α برابر خواهد بود با: $\alpha > ۱$

ب)

$$F(x) = \begin{cases} ۱ - (\frac{x}{۵})^{۱-\alpha} & x \geq ۵ \\ ۰ & otherwise \end{cases}$$

ج)

$$E\{X\} = \frac{۵(\alpha - ۱)}{\alpha - ۲}$$

محدوده‌ی α برابر $\alpha > ۲$ خواهد بود.

د)

$$U = Ln(\frac{X}{۵}) \Rightarrow$$

$$f_U(u) = \frac{d}{du}F_U(u) = \frac{d}{du}(۱ - e^{-u(\alpha-۱)}) = (\alpha - ۱)e^{-u(\alpha-۱)}$$

در نتیجه با توجه به این که فرم pdf توزیع نمایی نیز به صورت $\lambda e^{-\lambda x}$ است، می‌توان گفت که U توزیع نمایی با پارامتر $\alpha - ۱$ دارد.

سوال ۷) الف)

Marginal PMF of X:

$$pX(۱۲) = ۰٫۰۵ + ۰٫۰۵ + ۰٫۱ = ۰٫۲$$
$$pX(۱۵) = ۰٫۰۵ + ۰٫۱ + ۰٫۳۵ = ۰٫۵$$
$$pX(۲۰) = ۰ + ۰٫۲ + ۰٫۱ = ۰٫۳$$

Marginal PMF of Y:

$$pY(۱۲) = ۰٫۰۵ + ۰٫۰۵ + ۰ = ۰٫۱$$
$$pY(۱۵) = ۰٫۰۵ + ۰٫۱ + ۰٫۲ = ۰٫۳۵$$
$$pY(۲۰) = ۰٫۱ + ۰٫۳۵ + ۰٫۱ = ۰٫۵۵$$

ب)

$$P(X \leq ۱۵, Y \leq ۱۵) = p(۱۲,۱۲)+p(۱۲,۱۵)+p(۱۵,۱۲)+p(۱۵,۱۵) = ۰٫۰۵+۰٫۰۵+۰٫۰۵+۰٫۱ = ۰٫۲۵$$

ج) خیر. مستقل از یکدیگر نمی‌باشند. چرا که برای مستقل بودن، باید داشته باشیم:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

که این شرط برقرار نمی‌باشد.

د)

$$\begin{aligned} E\{X+Y\} = \sum (x+y)p(x,y) &= (۱۲+۱۲) \times ۰٫۰۵ + (۱۲+۱۵) \times ۰٫۰۵ + (۱۲+۲۰) \times ۰٫۱ \\ &+ (۱۵+۱۲) \times ۰٫۰۵ + (۱۵+۱۵) \times ۰٫۱ + (۱۵+۲۰) \times ۰٫۳۵ \\ &+ (۲۰+۱۲) \times ۰ + (۲۰+۱۵) \times ۰٫۲ + (۲۰+۲۰) \times ۰٫۱ = ۳۳٫۳۵ \end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned} E\{|X-Y|\} = \sum (|x-y|)p(x,y) &= (۱۲-۱۲) \times ۰٫۰۵ + (۱۲-۱۵) \times ۰٫۰۵ + (۱۲-۲۰) \times ۰٫۱ \\ &+ (۱۵-۱۲) \times ۰٫۰۵ + (۱۵-۱۵) \times ۰٫۱ + (۱۵-۲۰) \times ۰٫۳۵ \\ &+ (۲۰-۱۲) \times ۰ + (۲۰-۱۵) \times ۰٫۲ + (۲۰-۲۰) \times ۰٫۱ = ۳٫۸۵ \end{aligned}$$

سوال ۸) الف) برای اینکه $f(x)$ یک تابع چگالی احتمال باشد، باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

1. $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

ب)

$$F(x; \lambda_۱, \lambda_۲, p) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ - (pe^{-\lambda_۱ x} + (۱-p)e^{-\lambda_۲ x}) & x \geq ۰ \end{cases}$$

ج) برای محاسبه‌ی امید ریاضی داریم:

$$\begin{aligned} E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; \lambda_۱, \lambda_۲, p)\,dx &= \int_{-\infty}^{۰} x \times ۰\,dx + \int_{۰}^{\infty} x \times (p\lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x} + (۱-p)\lambda_۲ e^{-\lambda_۲ x})\,dx \\ &= p\int_{۰}^{\infty} x\lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x}\,dx + (۱-p)\int_{۰}^{\infty} x\lambda_۲ e^{-\lambda_۲ x}\,dx = p \times E\{X_۱\} + (۱-p) \times E\{X_۲\} \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $X_۱$ و $X_۲$ هر دو دارای توزیع نمایی هستند، داریم:

$$E\{X_۱\} = \frac{۱}{\lambda_۱},\ E\{X_۲\} = \frac{۱}{\lambda_۲} \Rightarrow E\{X\} = \frac{p}{\lambda_۱} + \frac{۱-p}{\lambda_۲}$$

د)

$$E\{X^۲\} = p \times E\{X_۱^۲\} + (۱-p) \times E\{X_۲^۲\}$$

با توجه به اینکه X_1 و X_2 هر دو دارای توزیع نمایی هستند، داریم:

$$E\{X_1^2\} = \frac{2}{\lambda_1^2},\ E\{X_2^2\} = \frac{2}{\lambda_2^2} \Rightarrow E\{X^2\} = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}$$

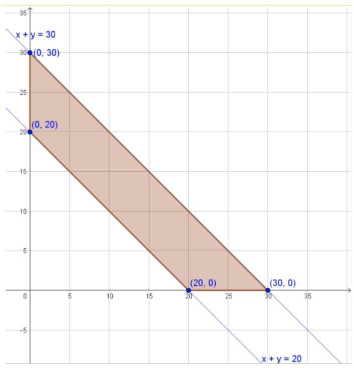
$$\Longrightarrow Var(X) = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} - (\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2})^2$$

ه) برای محاسبه‌ی ضریب تغییرات X داریم:

$$CV = \frac{\sqrt{\frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} - (\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2})^2}}{\frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2}}$$

با توجه به اینکه مقدار λ_1 و λ_2 برابر نیستند، ضریب تغییرات برابر ۱ نمی‌شود؛ درحالیکه اگر X متغیری با توزیع نمایی بود، ضریب تغییرات آن برابر ۱ می‌بود.

سوال ۹) الف) ناحیه‌ی چگالی مثبت به صورت زیر خواهد بود:



ب)

$$k = \frac{3}{81250}$$

ج)

$$f_X(x) = \begin{cases} 250kx - 10kx^2 & 0 \le x \le 20 \\ 450kx - 30kx^2 + \frac{1}{2}kx^3 & 20 < x \le 30 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 250ky - 10ky^2 & 0 \le y \le 20 \\ 450ky - 30ky^2 + \frac{1}{2}ky^3 & 20 < y \le 30 \end{cases}$$

مشخص است که X و Y مستقل نیستند، چراکه رابطه‌ی $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ برقرار نیست.

د) برای بازه‌ی $0 \le x \le 20$ و سپس برای $20 \le x \le 30$ انتگرال‌گیری کنید. بنابراین:

$$P(X+Y \le 25) = \frac{27500}{3}k + \frac{10625}{24}k \overset{k=\frac{3}{81250}}{=\!=} 0/3548 = 35/48\%$$

ه) مشابه بخش قبل، ابتدا برای $0 \le x \le 20$ و سپس برای بازه‌ی $20 < x \le 30$ محاسبه می‌کنیم:

$$E\{X+Y\} = 600000k + \frac{310000}{3}k = 25/97\%$$