University of Tehran

آمار و احتمالات مهندسی

آرشیو تکلیف شماره ۳ همراه پاسخ کوتاه - سال ۱۳۹۹

گردآورنده: مهدی جهانی

آخرین تاریخ به‌روزرسانی January ۱۲، ۲۰۲۳

سؤال ۱.

مد یک متغیر تصادفی گسسته مانند X که تابع جرمی احتمال آن $p(x)$ باشد را مساوی α تعریف می‌کنیم به طوری که $p(\alpha)$ بیشینه باشد. مد متغیر تصادفی X را x^* می‌نامیم. با توجه به این تعریف به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر $X \sim Bin(n,p)$ باشد، با در نظر گرفتن نسبت $\frac{b(x+۱;n,p)}{b(x;n,p)}$ نشان دهید مقدار $b(x;n,p)$ تا زمانی که نابرابری

$$x < np - (۱ - p)$$

برقرار باشد با افزایش x افزایش پیدا می‌کند. پس از این نتیجه‌گیری کنید که x^* عدد صحیحی است که در نابرابری

$$(n+۱)p - ۱ \leq x^* \leq (n+۱)p$$

صدق می‌کند.

ب) نشان دهید که اگر X توزیع پواسون با پارامتر μ داشته باشد، مد بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از μ خواهد بود. هم‌چنین نشان دهید که اگر μ عددی صحیح باشد، هر دو مقدار $\mu, \mu - ۱$ نیز مد خواهند بود.

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (۱-p)^{n-x}, & x = ۰,۱,۲,..,n \\ ۰, & \text{در حالت‌های دیگر} \end{cases}$$

سؤال ۲.

یک پیشامد موفقیت یا شکست (Miss or Hit) با احتمال موفقیت p مرتباً تکرار می‌شود. پیشامدها در صورت مشاهده‌ی N موفقیت پیاپی به پایان می‌رسند. متغیر تصادفی X را برابر تعداد پیشامدها تا قبل از پایان یافتن آن‌ها در نظر بگیرید. تابع جرم احتمال را در حالتی که $N = ۲$ باشد را بر حسب p محاسبه کنید.

سؤال ۳.

یک هارد درایو از یک بازوی مکانیکی و ۱۰ نوار هم‌مرکز تشکیل شده است. نوارها از بیرون به داخل از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند. بازوی مکانیکی باید دائماً بر روی نوارها حرکت کرده تا بتواند اطلاعات موجود در نوارهای مختلف را بخواند. فرض کنید که به ازای $i \in \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ مقدار p_i برابر با احتمال استفاده از بازو روی نوار i -ام باشد. همچنین فرض کنید که متغیر تصادفی X تعداد نوارهایی باشد که بازوی مکانیکی برای رسیدن به نوار مورد نظر از روی آن‌ها عبور کرده باشد.
با فرض این که درخواست برای تغییر موقعیت بازو به نوار i -ام از موقعیت فعلی بازو مستقل باشد، تابع جرم احتمال را به صورت پارامتری بر حسب p_iها محاسبه کنید. (دقت داشته باشید که در محاسبه متغیر تصادفی X، نواری که بازوی مکانیکی روی آن وجود دارد، در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین $X = \{۰, ۱, ..., ۹\}$)

سؤال ۴.

پرویز به تازگی وارد صنعت خرازی شده و یک دستگاه برای رنگ زدن پارچه‌هایش خریداری کرده است. چون در اول کار پرویز پول زیادی نداشت، مجبور شد یک دستگاه رنگ‌زنی ارزان نیز بخرد و این دستگاه بعضاً چند قطره رنگ اضافی روی پارچه می‌ریزد. تعداد قطرات رنگ اضافی ریخته شده بر هر پارچه از توزیع پواسون با میانگین $\mu_۱$ به دست می‌آید. بعد از مدتی که کار پرویز پیشرفت می‌کند او تصمیم می‌گیرد ماشین جدیدی خریداری کند که تعداد قطرات رنگ اضافی آن از توزیع پواسون با میانگین $\mu_۲$ به دست می‌آید.
حال فرض کنید که ظرفیت انجام کار هر دو دستگاه یکی باشد (تعداد پارچه‌های رنگ شده در هر روز برای هر دو دستگاه برابر است). می‌دانیم که احتمال این که پارچه‌ای که از این کارخانه بیرون می‌آید X قطره رنگ داشته باشد، از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$p(x; \mu_۱, \mu_۲) = ۰/۵\frac{e^{-\mu_۱}\mu_۱^x}{x!} + ۰/۵\frac{e^{-\mu_۲}\mu_۲^x}{x!}, x = ۱, ۲, ۳, ...$$

الف) مطمئن شوید که تابع $p(x; \mu_۱, \mu_۲)$ یک pmf درست باشد (همیشه مثبت و جمع حالات یک).
ب) به‌طور میانگین روی هر پارچه چند قطره رنگ وجود دارد؟
پ) واریانس تعداد قطرات رنگ را بیابید.
ت) اگر دستگاه اول ۶۰ درصد کار و دستگاه دوم ۴۰ درصد کار را انجام دهد، pmf جدید را محاسبه کنید.

سؤال ۵.

تابع جرمی متغیر تصادفی شبه پواسون X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_X(x) = k\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \; :x = ۱, ۲, ۳, ...$$

الف) مقدار ثابت k را بر حسب پارامتر θ مشخص کنید.
ب) اگر میانگین X برابر با ۲/۳۱۳۰۳۵ باشد، احتمال این که مقدار X حداکثر برابر با ۵ باشد چقدر است؟
پ) انحراف معیار متغیر X برای میانگین داده شده در قسمت «ب» چقدر است؟

سؤال ۶.

در یک بازی شرط‌بندی شما می‌توانید بر روی یکی از کارت‌های سفید یا سیاه شرط‌بندی کنید. برای ورود به بازی باید یک ژتون پرداخت کنید. در صورت برنده شدن علاوه بر ژتونی که پرداخت کرده بودید، یک ژتون نیز جایزه می‌گیرید. در صورت باختن، ژتون پرداخت شده توسط شما می‌سوزد. از قبل می‌دانیم که احتمال برد کارت سفید $\frac{۹}{۱۹}$ و احتمال برد کارت سیاه $\frac{۱۰}{۱۹}$ است.
فرض کنید بخواهیم با الگوریتم زیر بازی کنیم:
در اولین دست بازی روی کارت سفید شرط می‌بندیم. اگر برنده شدیم، جایزه و ژتون اولیه خود را گرفته و بازی را ترک می‌کنیم. در صورتی

که باختیم، دو دست بعد را هم مستقل از نتیجه‌ی آن‌ها روی کارت سفید شرط می‌بندیم.
حال با فرض این که متغیر تصادفی X برابر با ژتون‌هایی باشد که در نهایت کسب کرده‌ایم به سوالات زیر پاسخ دهید (توجه داشته باشید که X می‌تواند منفی نیز باشد):
الف) مقدار $P(X > ۰)$ را محاسبه کنید.
ب) امید ریاضی و واریانس را برای متغیر تصادفی X پیدا کنید. آیا شرکت در این بازی طبق این الگوریتم منطقی است؟

سؤال ۷.

فرض کنید سکه‌ای داریم که آن را به صورت متوالی پرتاب می‌کنیم و می‌دانیم که هر دو پرتابی از هم مستقل هستند. این سکه به احتمال p شیر و به احتمال $۱ - p$ خط می‌آید. فرض کنید هر دفعه که سکه بعد از یک شیر، خط بیاید ما ۱ تومان برنده می‌شویم. با فرض این که R مجموع پولی باشد که ما در یک مسابقه با n بار پرتاب برنده شده‌ایم، امید ریاضی و واریانس R را پیدا کنید.

سؤال ۸.

اگر فرض کنیم $X \sim Poi(\lambda)$ در این صورت امید ریاضی دو متغیر $Y = ۲^X$ و $Z = \frac{۱}{X+۱}$ را محاسبه کنید.

پاسخ .

سوال ۱) (آ) کافی است که نسبت $\frac{b(x+۱;n,p)}{b(x;n,p)}$ را تا حد امکان ساده کرده و از طرف دیگر با فرض $x < np - (۱ - p)$ دو طرف فرض را اثبات کنید.

(ب) برای اثبات این قسمت نسبت $\frac{p(x+۱;\mu)}{p(x;\mu)}$ را تا حد امکان ساده کنید و از طرف دیگر سعی کنید نشان دهید $p(\mu;\mu) = p(\mu - ۱;\mu) \iff e^{-\mu}\frac{\mu^\mu}{\mu!} = e^{-\mu}\frac{\mu^{\mu-۱}}{(\mu-۱)!}$

سوال ۲) برای حل این سوال باید به صورت بازگشتی عمل کنید. الگوی زیر را برای مقادیر بیشتر ادامه دهید:

$$P(X = ۲) = P(HH) = p^۲$$

$$P(X = ۳) = P(MHH) = (۱ - p)p^۲$$

$$P(X = ۴) = P(HMHH) + P(MMHH) = (۱ - p)p^۲ = P(X = ۳)$$

$$\begin{gathered}P(X = ۵) = [P(MMMHH) + P(HMMHH)] + P(MHMHH) = \\ [P(MMMHH) + P(HMMHH)] + [P(MHMHH)+ \\ P(HHMHH)]-P(HHMHH) = P(MMHH)+P(HMHH)-P(HHMHH) = \\ P(MHH) + P(HHMHH) = \\ P(X = ۳) - P(X = ۲)P(X = ۳) = P(X = ۳)(۱ - P(X = ۲))\end{gathered}$$

سوال ۳) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$P(X=k)=\sum_{i=۱}^{۱۰}[p_{k+i}+p_{k-i}]\times p_i$$

سوال ۴) (آ) به این نکته توجه داشته باشید که $P(x)=\frac{e^{-\mu_۱}\mu_۱^x}{x!}$ خودش یک pmf کامل است. حال سعی کنید با جای‌گذاری $p(x;\mu_۱,\mu_۲)$ را محاسبه کنید.

(ب) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$E[X]=۰/۵\times\sum_{i=۰}^{\infty}i\frac{e^{-\mu_۱}\mu_۱^i}{i!}+۰/۵\times\sum_{i=۰}^{\infty}i\frac{e^{-\mu_۲}\mu_۲^i}{i!}=۰/۵\times(\mu_۱+\mu_۲)$$

(ج) به این نکته توجه کنید که $var(X)=E[X^۲]-E[X]^۲$ برقرار است. از تساوی دیگری که می‌دانیم $Y\sim Poi(\lambda)\longrightarrow var(Y)=E[Y^۲]-E[Y]^۲$ استفاده کنید. نهایتاً می‌توان نشان داد:

$$\longrightarrow var(X)=E[X^۲]-E[X]^۲=\frac{\mu_۱+\mu_۲+\mu_۱\mu_۲}{۲}+\frac{\mu_۱^۲+\mu_۲^۲}{۴}$$

(د) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$\longrightarrow p(x;\mu_۱,\mu_۲)=۰/۶\frac{e^{-\mu_۱}\mu_۱^x}{x!}+۰/۴\frac{e^{-\mu_۲}\mu_۲^x}{x!}$$

سوال ۵) (آ) ابتدا توجه داشته باشید که دو ویژگی باید برقرار باشد:

$$(I)\ \ p(x)\geq ۰,\quad (II)\ \ \sum_{x=۰}^{\infty}p(x)=۱$$

نهایتاً نشان دهید که $k=\frac{۱}{۱-e^{-\theta}}$

(ب) به عنوان نمونه احتمال این که مقدار برابر ۱ باشد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p(۱)=\frac{۱}{۱-e^{-۲/۳۱۳۰۳۵}}\times\frac{e^{-۲/۳۱۳۰۳۵}\times(-۲/۳۱۳۰۳۵)^۱}{۱!}\simeq ۰/۲۵۴$$

به این ترتیب می‌توان گفت:

$$P(X\leq ۵)=p(۱)+p(۲)+p(۳)+p(۴)+p(۵)\simeq ۰/۹۶۵۷$$

(ج) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۱-e^{-۲/۳۱۳۰۳۵}}(۱-۲/۳۱۳۰۳۵^۲e^{-۲/۳۱۳۰۳۵})\simeq ۰/۵۲۲۲\longrightarrow\sigma\simeq ۰/۷۲۲۹$$

سوال ۶) (آ) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$P(X>۰)=p+(۱-p)p^۲=\frac{۹}{۱۹}+\frac{۱۰}{۱۹}(\frac{۹}{۱۹})^۲=۰/۵۹۱$$

(ب) بازی طبق این الگوریتم به هیچ وجه منطقی نیست چرا که محاسبات زیر نشان می‌دهد امید ریاضی آن منفی است.

$$E[X] = p\times(۱)+p^۲(۱-p)\times(۱)+p(۱-p)^۲\times(-۱)+p(۱-p)^۲\times(-۱)+(۱-p)^۳\times(-۳) \simeq -۰/۱۰۸$$

$$E[X^۲] = p\times(۱)+p^۲(۱-p)\times(۱)+p(۱-p)^۲\times(۱)+p(۱-p)^۲\times(۱)+(۱-p)^۳\times(+۹) \simeq ۲/۱۶۶$$

$$var(X) = E[X^۲] - E[X]^۲ \simeq ۲/۱۵$$

سوال ۷) فرض کنید متغیر شاخص l_i را برابر با مقدار پولی که در پرتاب i ام برنده می‌شویم تعریف کنیم. هم‌چنین فرض کنید که:

$$R = \sum_{i=۱}^{n} l_i$$

سپس سعی کنید نشان دهید که

$$E[l_i] = p(۱-p), \quad E[R] = np(۱-p)$$

حال با توجه به این که می‌دانیم $var(R) = E[R^۲] - E[R]^۲$ سعی کنید ثابت کنید که

$$E[R^۲] = np(۱-p) + (n-۱)(n-۲)p^۲(۱-p)^۲$$

و به این ترتیب واریانس را نیز محاسبه کنید.

سوال ۸) (آ) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$E[Y] = e^{\lambda}$$

(ب) پاسخ نهایی به صورت زیر است:

$$E[Z] = \frac{۱}{\lambda}(۱-e^{-\lambda})$$