数学物理方法小班讲义

快雪时晴
兰州大学物理科学与技术学院

2025 年 11 月 8 日

前言

主要参考书是杨孔庆老师的《数学物理方法》[1]。请访问 这里 以获取本文档 Tex 源文件。

目录

第 1 章　$\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

1.1　向量分析基本知识

1.1.1　爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定就是说，在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为

$$\vec{A} = A_1\vec{\mathrm{e}}_1 + A_2\vec{\mathrm{e}}_2 + A_3\vec{\mathrm{e}}_3 \equiv \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i, \tag{1.1}$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为

$$\vec{A} = \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i \to \vec{A} = A_i\vec{\mathrm{e}}_i, \tag{1.2}$$

这样就省去了写求和符号 $\displaystyle\sum_i$ 的工作。

1.1.2　Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}. \tag{1.3}$$

1.1.3　三阶 Levi-Citita 符号 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & ,ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到}123 \\ -1 & ,ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到}123 \\ 0 & ,ijk\text{中有相同指标} \end{cases}. \tag{1.4}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \tag{1.5}$$

1.1.4 一些简单算例

例 1.1. 一些简单算例

- $\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$,
- $\vec{\mathrm{e}}_i \times \vec{\mathrm{e}}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_k$,
- $A_i \delta_{ij} = A_j$,
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$,

  证明.
  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j \vec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \tag{1.6}$$
  □

- $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$,

  证明.
  $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k \tag{1.7}$$
  □

1.1.5 ∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为

$$\nabla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i, \tag{1.8}$$

其中，∂_i 的定义为

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.9}$$

1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理

1.1.6.1 标量场梯度的定义

设 $\psi(\vec{x})$ 是标量场，$\psi(\vec{x})$ 的梯度，记为 grad $\psi(\vec{x})$，由下式定义

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi(\vec{x}), \tag{1.10}$$

其中，$\mathrm{d}\vec{x}$ 是位矢 $\vec{x}$ 的任意微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 是标量场 $\psi(\vec{x})$ 因位矢 $\vec{x}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{x}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 的定义为

$$\mathrm{d}\psi(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x}). \tag{1.11}$$

可以证明，标量场的梯度 grad $\psi(\vec{x})$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})=\nabla\psi(\vec{x}). \tag{1.12}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla\psi(\vec{x})$ 指代标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度。

1.1.6.2 方向导数的定义

标量场 ψ 在 $\vec{x}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}\equiv\lim_{t\to 0^+}\frac{\psi(\vec{x}+t\vec{v})-\psi(\vec{x})}{tv}. \tag{1.13}$$

从方向导数的定义可以看出，方向导数描述的是标量场沿某一方向变化的快慢。

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{x}$ 点处沿曲面上 $\vec{x}$ 点的外法向的方向导数简记为 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}\right|_{\Sigma}$.

1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi(\vec{x}), \tag{1.14}$$

设 $\mathrm{d}\vec{x}=\vec{n}\mathrm{d}x$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{x}$ 同向的单位向量，则有

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\psi(\vec{x}), \tag{1.15}$$

即

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}. \tag{1.16}$$

这就是说，标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 在某一方向 $\vec{n}$ 上的投影 $[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}$ 恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

1.1.6.4 标量场梯度的意义

考虑标量场梯度与方向导数的关系

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}, \tag{1.17}$$

有：

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}=[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}=|\nabla\psi(\vec{x})|\,|\vec{n}|\cos\left\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\right\rangle=|\nabla\psi(\vec{x})|\cos\left\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\right\rangle, \tag{1.18}$$

上式中，$\vec{n}$ 为方向任意的单位向量。

对于确定的场点 $\vec{x}$，$\psi(\vec{x})$ 和 $\nabla\psi(\vec{x})$ 也是确定的，则 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 是确定的。

现在我们想看看 $\psi(\vec{x})$ 沿哪个方向的变化速度最快，也就是看 $\psi(\vec{x})$ 在哪个方向上的方向导数最大。

显然，在固定场点 $\vec{x}$ 的情况下，当 $\vec{n}$ 与 $\nabla\psi(\vec{x})$ 同向时，也即 $\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/\left|\nabla\psi(\vec{x})\right|$ 时，$\psi(\vec{x})$ 在 $\vec{n}$ 方向上的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$ 最大，这个最大的方向导数为

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|}=|\nabla\psi(\vec{x})|\cos\left\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\right\rangle=|\nabla\psi(\vec{x})|\,.$$

也就是说，标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的方向就是标量场 $\psi(\vec{x})$ 方向导数最大的方向；标量场梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的大小 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 就是最大方向导数。

1.1.6.5 梯度定理

定理 1.1. 设 $\psi(\vec{x})$ 是标量场，C 是连结 $\vec{p},\vec{q}\in\mathbb{R}^3$ 的任一曲线，则有

$$\psi\left(\vec{p}\right)-\psi\left(\vec{q}\right)=\int\limits_{\vec{x}\in C[\vec{q}\to\vec{p}]}\nabla\psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}. \tag{1.19}$$

证明思路也很简单，把曲线 C 分成很多小的有向线元，对每一段有向线元都使用梯度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.1.7 矢量场的散度、高斯定理

1.1.7.1 矢量场散度的定义

矢量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\,\vec{A}$，定义为

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \lim_{V\to 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.20}$$

可以证明，矢量场 $\vec{A}$ 的散度 div $\vec{A}$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \tag{1.21}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla \cdot \vec{A}$ 指代矢量场 $\vec{A}$ 的散度。

1.1.7.2 高斯定理

定理 1.2. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭体，则有

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) \mathrm{d}V. \tag{1.22}$$

证明的思路也很简单，把区域 V 分成很多小体积元，对每个体积元都使用矢量场散度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理

1.1.8.1 矢量场的旋度

矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 curl $\vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\operatorname{curl} \vec{A}\right) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial\sigma^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}, \tag{1.23}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与 $\partial\sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

可以证明，矢量场 $\vec{A}$ 的旋度 curl $\vec{A}$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\operatorname{curl} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}. \tag{1.24}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla \times \vec{A}$ 指代矢量场 $\vec{A}$ 的旋度。

1.1.8.2 斯托克斯定理

定理 1.3. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭曲面，则有

$$\oint_{\partial\Sigma^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_\Sigma \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.25}$$

其中，曲面 Σ 的取向与 $\partial\Sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

证明的思路也很简单，把曲面 Σ 分成很多小面元，对每个面元都使用矢量场旋度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.2 向量分析常用公式

1.2.1 分析工具

$$\begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k \\ \vec{A} = A_i\vec{e}_i \\ A_i\delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_iB_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_iA_jB_k \\ \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_l = \varepsilon_{ljk}A_jB_k \\ \nabla = \vec{e}_i\partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_iA_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_jA_k \\ \partial_i\psi = (\nabla\psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i\partial_i \\ \nabla^2\psi \equiv \nabla \cdot (\nabla\psi) = \partial_i\partial_i\psi \\ \nabla^2\vec{A} \equiv \left(\nabla^2A_i\right)\vec{e}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ \partial_ix_j = \delta_{ij} \end{cases} \tag{1.26}$$

1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明

1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式

例 1.2.

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3. \tag{1.27}$$

证明.

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_ix_i = \delta_{ii} = 3. \tag{1.28}$$

□

例 1.3.

$$\nabla \times \vec{x} = \vec{0}. \tag{1.29}$$

证明.

$$\nabla \times \vec{x} = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j x_k = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\delta_{jk} = \varepsilon_{ikk}\vec{\mathrm{e}}_i = \vec{0}. \tag{1.30}$$

□

1.2.2.2 从左往右证的公式

例 1.4.

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi. \tag{1.31}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= \vec{\mathrm{e}}_i\partial_i(\varphi\psi)\\ &= \vec{\mathrm{e}}_i\varphi\partial_i\psi + \vec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_i\varphi\\ &= \varphi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi + \psi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\varphi\\ &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi.\end{aligned} \tag{1.32}$$

□

例 1.5.

$$\nabla \cdot \left(\varphi\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\cdot\vec{A}. \tag{1.33}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\varphi\vec{A}\right) &= \partial_i\left(\varphi\vec{A}\right)_i\\ &= \partial_i\left(\varphi A_i\right)\\ &= A_i\partial_i\varphi + \varphi\partial_i A_i\\ &= A_i\left(\nabla\varphi\right)_i + \varphi\partial_i A_i\\ &= \vec{A}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\cdot\vec{A}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

□

例 1.6.

$$\nabla \times \left(\varphi\vec{A}\right) = (\nabla\varphi)\times\vec{A} + \varphi\nabla\times\vec{A}. \tag{1.35}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\varphi\vec{A}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi+\varphi\partial_jA_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_jA_k+\varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k \\
&= (\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

□

例 1.7.

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right). \tag{1.37}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \partial_i\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i \\
&= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k \\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k \\
&= B_k\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k-A_j\left(\nabla\times\vec{B}\right)_j \\
&= \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

□

例 1.8.

$$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right). \tag{1.39}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l+A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-\vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

□

例 1.9.

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}. \tag{1.41}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\\&=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_l A_m\\&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_l A_m\\&=\vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_l A_m-\vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_l A_m\\&=\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_m A_m-\partial_l\partial_l A_m\vec{\mathrm{e}}_m\\&=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

□

1.2.2.3 需要注意力的公式

例 1.10.

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}. \tag{1.43}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\varphi)&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k\\&=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi,\end{aligned} \tag{1.44}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$，有

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi&=-\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi\\&=-\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi.\end{aligned} \tag{1.45}$$

最后一步是因为 j,k 都是用于求和的哑标，因此可以作替换 $j\leftrightarrow k$ 。上式说明：

$$\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}. \tag{1.46}$$

于是

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}. \tag{1.47}$$

□

例 1.11.

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0. \tag{1.48}$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) &= \partial_i \left(\nabla \times \vec{A}\right)_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \tag{1.49}$$

注意到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \tag{1.50}$$

于是

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0, \tag{1.51}$$

这就是说：

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0. \tag{1.52}$$

□

1.2.2.4 从右往左证的公式

例 1.12.

$$\nabla \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right) \vec{A} + \left(\vec{A} \cdot \nabla\right) \vec{B} + \vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) + \vec{A} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right). \tag{1.53}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\left(\nabla\times\vec{B}\right)_k\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\varepsilon_{klm}\partial_lB_m\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\partial_lA_m+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\partial_lB_m\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_iB_j\partial_lA_m+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_iA_j\partial_lB_m\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{\mathrm{e}}_lB_m\partial_lA_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_l\partial_lA_m+\vec{\mathrm{e}}_lA_m\partial_lB_m-\vec{\mathrm{e}}_mA_l\partial_lB_m\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lA_m-B_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m+A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lB_m-A_l\partial_lB_m\vec{\mathrm{e}}_m\\
=&\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lA_m-\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lB_m-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}\\
=&B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lA_m+A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lB_m\\
=&B_m\nabla A_m+A_m\nabla B_m\\
=&\nabla(A_mB_m)\\
=&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

□

1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明

1.2.3.1 高斯定理

定理 1.4. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭体，则有

$$\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_V\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.55}$$

1.2.3.2 斯托克斯定理

定理 1.5. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭曲面，则有

$$\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_\Sigma\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.56}$$

其中，曲面 Σ 的取向与 $\partial\Sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

1.2.3.3 格林第一恒等式

例 1.13.

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega} \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}V. \tag{1.57}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\ &= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\ &= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \psi\partial_i\partial_i\phi \\ &= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i + \psi\nabla^2\phi \\ &= (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi,\end{aligned} \tag{1.58}$$

于是由高斯定理，有

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega} \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi\right]\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega} \left[\psi\nabla^2\phi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right]\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{1.59}$$

□

1.2.3.4 格林第二恒等式

例 1.14.

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega} \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V. \tag{1.60}$$

证明. 利用 $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right) = \vec{A}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\cdot\vec{A}$ 有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) &= \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot(\nabla\phi) - (\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot(\nabla\psi)) \\ &= \psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi,\end{aligned} \tag{1.61}$$

于是由高斯定理可得

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right) \mathrm{d}V. \tag{1.62}$$

□

1.2.3.5 高斯定理的一个推论

例 1.15.

$$\oint\limits_{\partial V^+} \psi\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \nabla\psi\mathrm{d}V. \tag{1.63}$$

证明. 对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \tag{1.64}$$

这个特殊的矢量场 $\vec{A}$ 应当满足高斯定理：

$$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} (\nabla \cdot \vec{A})\mathrm{d}V. \tag{1.65}$$

等式左边

$$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial V^+} (\psi\vec{a}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{a} \cdot \oint\limits_{\partial V^+} \psi\mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.66}$$

等式右边

$$\begin{aligned}\int\limits_{V} \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) \mathrm{d}V &= \int\limits_{V} \left[\nabla \cdot (\psi\vec{a})\right] \mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{V} \left[(\nabla\psi) \cdot \vec{a} + \psi\nabla \cdot \vec{a}\right] \mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{V} (\nabla\psi) \cdot \vec{a}\mathrm{d}V \\ &= \vec{a} \cdot \int\limits_{V} \nabla\psi\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{1.67}$$

于是

$$\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial V^+}\psi\mathrm{d}\vec{S}=\vec{a}\cdot\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V, \tag{1.68}$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial V^+}\psi\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V. \tag{1.69}$$

□

1.2.3.6 斯托克斯定理的一个推论

例 1.16.

$$\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l}=-\int\limits_{S}\nabla\psi\times\mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.70}$$

证明. 对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x})\vec{a}, \tag{1.71}$$

这个特殊的矢量场 $\vec{A}$ 应当满足斯托克斯定理：

$$\oint\limits_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{S}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.72}$$

等式左边

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}&=\oint\limits_{\partial S}(\psi\vec{a})\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\&=\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l},\end{aligned} \tag{1.73}$$

等式右边

$$\begin{aligned}
\int\limits_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_S \left[\nabla \times (\psi \vec{a})\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int\limits_S \left[(\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int\limits_S \left[(\nabla \psi) \times \vec{a}\right] \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int\limits_S \left[\mathrm{d}\vec{S} \times (\nabla \psi)\right] \cdot \vec{a} \\
&= -\vec{a} \cdot \int\limits_S \nabla \psi \times \mathrm{d}\vec{S},
\end{aligned} \tag{1.74}$$

于是

$$\vec{a} \cdot \oint\limits_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l} = -\vec{a} \cdot \int\limits_S \nabla \psi \times \mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.75}$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l} = -\int\limits_S \nabla \psi \times \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.76}$$

$\square$

第 2 章　$\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

2.1　总结

2.1.1　∇ 在三种坐标系下的表达式

2.1.1.1　直角坐标

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.1}$$

2.1.1.2　球坐标

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.2}$$

2.1.1.3　柱坐标

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.3}$$

2.1.2　∇^2 在三种坐标系下的表达式

2.1.2.1　直角坐标

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.4}$$

2.1.2.2　球坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{2.5}$$

2.1.2.3 柱坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.6}$$

第 3 章　线性空间

3.1　Hilbert 空间

3.1.1　内积空间的定义

设 L 是一个域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。在 L 上定义一个映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L \times L \to \mathbb{F}, \tag{3.1}$$

若这个映射满足以下三个条件

(1) 共轭对称：

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle \psi, \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle^* , \tag{3.2}$$

(2) 对第二个元素是线性的，对第一个元素是反线性的：

$$\forall a \in \mathbb{F}, \quad \psi, \phi \in L, \quad \langle \psi, a\phi \rangle = a \langle \psi, \phi \rangle , \quad \langle a\psi, \phi \rangle = a^* \langle \psi, \phi \rangle , \tag{3.3}$$

(3) 非负性：

$$\forall \psi \in L, \quad \langle \psi \,|\, \psi \rangle \geqslant 0, \tag{3.4}$$

则称 L 是一个内积空间。映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为内积。

3.1.2　Hilbert 空间的定义

完备的内积空间称为 Hilbert 空间。一般用 $\mathcal{H}$ 表示希尔伯特空间。

在量子力学中，一般用 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间中的向量。

3.2　线性空间上的各种算符

3.2.1　算符的定义

线性空间 L 上的算符 O 是一个从 L 到 L 的映射

$$O : L \to L. \tag{3.5}$$

因此有

$$\forall \psi \in L, \quad O\psi \in L. \tag{3.6}$$

3.2.2 算符之间的运算

3.2.2.1 算符加法

$$(A + B)\psi = A\psi + B\psi. \tag{3.7}$$

3.2.2.2 算符乘法

$$(AB)\psi = A(B\psi). \tag{3.8}$$

3.2.2.3 算符的对易括号

$$[A, B] \equiv AB - BA. \tag{3.9}$$

3.2.3 对算符的运算

3.2.3.1 线性算符

若算符 O 满足

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}, \quad O(a\psi + b\phi) = aO\psi + bO\phi, \tag{3.10}$$

则称 O 为线性算符。

3.2.3.2 线性算符的转置

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的转置 O^{T} 由下式定义

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \left\langle \phi, O^{\mathrm{T}}\psi \right\rangle = \langle \psi, O\phi \rangle \,. \tag{3.11}$$

可以证明

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}. \tag{3.12}$$

3.2.3.3 线性算符的复共轭

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的复共轭算符，记为 O^*，由下式定义

$$\forall\psi,\phi\in L,\quad \langle\phi,O^*\psi\rangle=\langle\phi,O\psi\rangle^*. \tag{3.13}$$

3.2.3.4 线性算符的伴随算符

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的伴随算符，记为 $O^\dagger$，由下式定义

$$\forall\psi,\phi\in L,\quad \left\langle\phi,O^\dagger\psi\right\rangle=\langle O\phi,\psi\rangle. \tag{3.14}$$

注意到

$$\langle O\phi,\psi\rangle=\left(\langle O\phi,\psi\rangle^*\right)^*=\langle\psi,O\phi\rangle^*=\left\langle\phi,O^{\mathrm{T}}\psi\right\rangle^*=\left\langle\phi,\left(O^{\mathrm{T}}\right)^*\psi\right\rangle, \tag{3.15}$$

即

$$\left\langle\phi,O^\dagger\psi\right\rangle=\left\langle\phi,\left(O^{\mathrm{T}}\right)^*\psi\right\rangle, \tag{3.16}$$

对比得

$$O^\dagger=\left(O^{\mathrm{T}}\right)^*. \tag{3.17}$$

可以证明

$$(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger. \tag{3.18}$$

3.2.4 线性空间上的一些特殊算符

3.2.4.1 对称算符与反对称算符

对称算符：若线性算符 O 满足

$$O^{\mathrm{T}}=O, \tag{3.19}$$

则称 O 为对称算符。
反对称算符：若线性算符 O 满足

$$O^{\mathrm{T}}=-O, \tag{3.20}$$

则称 O 为反对称算符。

3.2.4.2 自伴算符（厄米算符）

若线性算符 O 满足

$$O^{\dagger}=O, \tag{3.21}$$

则称 O 为自伴算符或厄米算符。

3.2.4.3 幺正算符

对于线性算符 U，若其满足

$$U^{\dagger}U=UU^{\dagger}=I, \tag{3.22}$$

则称 U 为幺正算符。

3.3 线性算符的本征值和本征向量

形如

$$A\psi=\lambda\psi,\quad \lambda\in\mathbb{F},\psi\in L, \tag{3.23}$$

的方程称为线性算符 A 的本征方程。λ 称为 A 的本征值，ψ 称为 A 的本征向量。

若某个本征值 λ_i 对应着 n 个线性独立的 $\psi_{ij},j=1,2,\cdots,n$，则称本征值 λ_i 是 n 重简并的。

3.4 一些定理

定理 3.1. 厄米算符本征值为实数。

证明. 设 A 是厄米算符，本征方程

$$A\psi=\lambda\psi,\quad A^{\dagger}=A. \tag{3.24}$$

一方面

$$\langle\psi,A\psi\rangle=\langle\psi,\lambda\psi\rangle=\lambda\langle\psi,\psi\rangle, \tag{3.25}$$

另一方面

$$\langle\psi,A\psi\rangle=\left\langle\psi,A^{\dagger}\psi\right\rangle=\langle A\psi,\psi\rangle=\langle\lambda\psi,\psi\rangle=\lambda^{*}\langle\psi,\psi\rangle, \tag{3.26}$$

对比得

$$\lambda^* = \lambda. \tag{3.27}$$

□

定理 3.2. 属于厄米算符不同本征值的本征向量是正交的。

证明. 设厄米算符 A 的本征向量 ψ_1, ψ_2 分别对应本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$，则有

$$A\psi_1 = \lambda_1 \psi_1, \quad A\psi_2 = \lambda_2 \psi_2. \tag{3.28}$$

一方面

$$\langle \psi_2, A\psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \lambda_1 \psi_1 \rangle = \lambda_1 \langle \psi_2, \psi_1 \rangle, \tag{3.29}$$

另一方面

$$\langle \psi_2, A\psi_1 \rangle = \left\langle \psi_2, A^\dagger \psi_1 \right\rangle = \langle A\psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \lambda_2 \psi_2, \psi_1 \rangle = \lambda_2^* \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = \lambda_2 \langle \psi_2, \psi_1 \rangle, \tag{3.30}$$

作差得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0. \tag{3.31}$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，于是

$$\langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0. \tag{3.32}$$

□

定理 3.3. 若 U 为幺正算符，则有

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle U\psi, U\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle. \tag{3.33}$$

证明.

$$\langle U\psi, U\phi \rangle = \left\langle \psi, U^\dagger U \phi \right\rangle = \langle \psi, I\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle. \tag{3.34}$$

□

定理 3.4. 复内积空间 L 中的线性算符 A 为厄米算符的充要条件是 $\forall \phi \in L, \langle \phi, A\phi \rangle \in \mathbb{R}$.

证明. 若 A 为厄米算符，即 $A^\dagger = A$ 则

$$\langle \phi, A\phi \rangle = \left\langle \phi, A^\dagger \phi \right\rangle = \langle A\phi, \phi \rangle = \langle \phi, A\phi \rangle^*. \tag{3.35}$$

前后对比得

$$\langle \phi, A\phi \rangle \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

把上面过程反过来就能证明必要性。

□

3.5 例题

3.5.1 完备性关系

例 3.1. 设一组基矢 $\{|n\rangle\}$ 构成 *Hilbert* 空间中的完备基，推导完备性关系

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I. \tag{3.37}$$

证明. 完备基就是说，$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$，$|\psi\rangle$ 可写成 $\{|n\rangle\}$ 线性叠加的形式

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \tag{3.38}$$

上式两边左乘 $\langle n'|$，并利用正交性关系 $\langle n' \,|\, n\rangle = \delta_{n,n'}$ 有

$$\langle n' \,|\, \psi\rangle = \sum_n c_n \langle n' \,|\, n\rangle = \sum_n c_n \delta_{n,n'} = c_{n'}, \tag{3.39}$$

于是

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \langle n \,|\, \psi\rangle |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n \,|\, \psi\rangle = \left(\sum_n |n\rangle \langle n|\right) |\psi\rangle, \tag{3.40}$$

前后对比得

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I. \tag{3.41}$$

□

3.5.2 纯态下可观测量期望值

例 3.2. 假设体系处在纯态 $|\psi\rangle$，若对体系的可观测物理量 O 进行测量，证明测量期望值 $\langle O\rangle$ 可表达为

$$\langle O\rangle = \langle \psi \,|\, O \,|\, \psi\rangle. \tag{3.42}$$

证明. 考虑本征值离散情况，本征方程为

$$O|n\rangle = o_n|n\rangle. \tag{3.43}$$

利用正交性关系和完备性关系

$$\langle n \mid n' \rangle = \delta_{n,n'}, \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = I, \tag{3.44}$$

有

$$\begin{aligned} O &= IOI \\ &= \left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right) O \left(\sum_{n'} |n'\rangle\langle n'|\right) \\ &= \sum_{n,n'} \langle n \mid O \mid n' \rangle |n\rangle\langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} \langle n \mid o_{n'} \mid n' \rangle |n\rangle\langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} o_{n'} \langle n \mid n' \rangle |n\rangle\langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} o_{n'}\delta_{n,n'} |n\rangle\langle n'| \\ &= \sum_n o_n |n\rangle\langle n|. \end{aligned} \tag{3.45}$$

量子力学告诉我们，在 $|\psi\rangle$ 态下对可观测量 O 进行测量，测得 o_n 的概率为 $|\langle n \mid \psi\rangle|^2$，于是期望值

$$\begin{aligned} \langle O\rangle &\equiv \sum_n o_n |\langle n \mid \psi\rangle|^2 \\ &= \sum_n o_n \langle n \mid \psi\rangle^* \langle n \mid \psi\rangle \\ &= \sum_n o_n \langle \psi \mid n\rangle \langle n \mid \psi\rangle \\ &= \langle\psi| \left(\sum_n o_n |n\rangle\langle n|\right) |\psi\rangle \\ &= \langle \psi \mid O \mid \psi\rangle. \end{aligned} \tag{3.46}$$

□

3.5.3 混合态下可观测量期望值

例 3.3. 已知若体系以 p_i 的概率处于纯态 $|\psi_i\rangle$，则体系的状态可用密度矩阵

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \tag{3.47}$$

来描述。证明在上述状态下对可观测量 O 进行测量，测量期望值 $\langle O\rangle$ 可写为

$$\langle O\rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho O), \tag{3.48}$$

其中，求迹操作 $\mathrm{Tr}(\cdot)$ 的定义为：设 $\{|j\rangle\}$ 是任意一组正交完备基，则

$$\mathrm{Tr}\,(O) \equiv \sum_j \langle j\,|\,O\,|\,j\rangle\,. \tag{3.49}$$

证明. 考虑本征值离散情况，本征方程

$$O\,|n\rangle = o_n\,|n\rangle\,. \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\langle O\rangle &\equiv \sum_i p_i \sum_n o_n\,|\langle n\,|\,\psi_i\rangle|^2 \\
&= \sum_i p_i \sum_n o_n\,\langle n\,|\,\psi_i\rangle\,\langle n\,|\,\psi_i\rangle^* \\
&= \sum_i p_i \sum_n o_n\,\langle n\,|\,\psi_i\rangle\,\langle \psi_i\,|\,n\rangle \\
&= \sum_i \sum_n o_n p_i\,\langle n\,|\,\psi_i\rangle\,\langle \psi_i\,|\,n\rangle \\
&= \sum_n \sum_i o_n p_i\,\langle n\,|\,\psi_i\rangle\,\langle \psi_i\,|\,n\rangle \\
&= \sum_n o_n\,\langle n|\left(\sum_i p_i\,|\psi_i\rangle\,\langle\psi_i|\right)|n\rangle \\
&= \sum_n o_n\,\langle n|\,\rho\,|n\rangle \\
&= \sum_n \langle n|\,\rho o_n\,|n\rangle \\
&= \sum_n \langle n|\,\rho O\,|n\rangle \\
&= \mathrm{Tr}\,(\rho O)\,.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

□

3.5.4 不确定性关系

例 3.4. 利用 *Schwarz* 不等式

$$\forall \left|\alpha\right\rangle, \left|\beta\right\rangle \in \mathcal{H}, \quad \left\langle \alpha \,|\, \alpha\right\rangle \left\langle \beta \,|\, \beta\right\rangle \geqslant \left|\left\langle \alpha \,|\, \beta\right\rangle\right|^2, \tag{3.52}$$

以及不等式

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^2, \tag{3.53}$$

推导不确定性关系

$$\forall \left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}, \quad \Delta A \Delta B \geqslant \frac{1}{2}\left|\left\langle [A,B]\right\rangle\right|, \tag{3.54}$$

其中 A, B 是厄米算符，

$$\left\langle O\right\rangle = \left\langle \psi \,|\, O \,|\, \psi\right\rangle, \quad \Delta O \equiv \sqrt{\left\langle (O - \left\langle O\right\rangle)^2\right\rangle}. \tag{3.55}$$

证明. 注意到对于厄米算符 O，有

$$\begin{aligned}
\forall \left|\psi\right\rangle \in \mathcal{H}, \quad \Delta O &\equiv \sqrt{\left\langle (O - \left\langle O\right\rangle)^2\right\rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle (O - \left\langle O\right\rangle)(O - \left\langle O\right\rangle)\right\rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle O^2 - 2\left\langle O\right\rangle O + \left\langle O\right\rangle^2\right\rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle O^2\right\rangle - 2\left\langle O\right\rangle\left\langle O\right\rangle + \left\langle O\right\rangle^2} \\
&= \sqrt{\left\langle O^2\right\rangle - \left\langle O\right\rangle^2},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \,\middle|\, (O - \left\langle O\right\rangle)^\dagger (O - \left\langle O\right\rangle) \,\middle|\, \psi\right\rangle &= \left\langle \psi \,\middle|\, \left(O^\dagger - \left\langle O\right\rangle^*\right)(O - \left\langle O\right\rangle) \,\middle|\, \psi\right\rangle \\
&= \left\langle \psi \,|\, (O - \left\langle O\right\rangle)(O - \left\langle O\right\rangle) \,|\, \psi\right\rangle \\
&= \left\langle \psi \,\middle|\, (O - \left\langle O\right\rangle)^2 \,\middle|\, \psi\right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

令 $\left|\alpha\right\rangle = (A - \left\langle A\right\rangle)\left|\psi\right\rangle, \left|\beta\right\rangle = (B - \left\langle B\right\rangle)\left|\psi\right\rangle$，则

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha \,|\, \alpha\right\rangle = \left\langle \psi \,\middle|\, (A - \left\langle A\right\rangle)^2 \,\middle|\, \psi\right\rangle = \left\langle (A - \left\langle A\right\rangle)^2\right\rangle = (\Delta A)^2 \\
\left\langle \beta \,|\, \beta\right\rangle = \left\langle \psi \,\middle|\, (B - \left\langle B\right\rangle)^2 \,\middle|\, \psi\right\rangle = \left\langle (B - \left\langle B\right\rangle)^2\right\rangle = (\Delta B)^2,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha\,|\,\beta\rangle &= \left\langle\psi\,\middle|\,\left(A^{\dagger}-\langle A\rangle^{*}\right)(B-\langle B\rangle)\,\middle|\,\psi\right\rangle \\
&= \langle\psi\,|\,(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\,|\,\psi\rangle \\
&= \langle\psi\,|\,AB-\langle A\rangle B-\langle B\rangle A+\langle A\rangle\langle B\rangle\,|\,\psi\rangle \\
&= \langle AB\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle-\langle B\rangle\langle A\rangle+\langle A\rangle\langle B\rangle \\
&= \langle AB\rangle-\langle A\rangle\langle B\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

$$
\langle\beta\,|\,\alpha\rangle = \langle BA\rangle-\langle B\rangle\langle A\rangle\,, \tag{3.60}
$$

$$
\begin{aligned}
|\langle\alpha\,|\,\beta\rangle|^{2} &\geqslant |\mathrm{Im}\,\langle\alpha\,|\,\beta\rangle|^{2} \\
&= \left|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\langle\alpha\,|\,\beta\rangle-\langle\alpha\,|\,\beta\rangle^{*}\right)\right|^{2} \\
&= \left|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\langle\alpha\,|\,\beta\rangle-\langle\beta\,|\,\alpha\rangle\right)\right|^{2} \\
&= \frac{1}{4}\left|\langle AB\rangle-\langle BA\rangle\right|^{2} \\
&= \frac{1}{4}\left|\langle AB-BA\rangle\right|^{2} \\
&= \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^{2},
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

代入 Schwarz 不等式 $\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle\langle\beta\,|\,\beta\rangle \geqslant |\langle\alpha\,|\,\beta\rangle|^{2} \geqslant |\mathrm{Im}\,\langle\alpha\,|\,\beta\rangle|^{2}$，有

$$
(\Delta A)^{2}(\Delta B)^{2} \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^{2}, \tag{3.62}
$$

即

$$
\Delta A\Delta B \geqslant \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|. \tag{3.63}
$$

□

第 4 章　复变函数

4.1　复变函数的概念

4.1.1　复变函数的定义

复变函数 f 是黎曼面 $\mathbb{C}^{\mathrm{R}}$ 到复平面 $\mathbb{C}$ 的映射。

4.2　解析函数

4.2.1　复变函数的连续性

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时，都有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \tag{4.1}$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续。

4.2.2　复变函数的导数

设 z_0 是复变函数 $f(z)$ 定义域 Ω 内的一点。当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z = z - z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{4.2}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$.

4.2.3　柯西-黎曼条件

定理 4.1. *设复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有：*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.3}$$

上面两条等式称为柯西-黎曼条件 *(C-R 条件)*。

证明. 设 $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}. \tag{4.4}$$

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{4.5}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地，

(1) 令

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\quad \Delta x\to 0, \tag{4.6}$$

此时

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.7}$$

(2) 令

$$\Delta x=0,\quad \mathrm{i}\Delta y\to 0, \tag{4.8}$$

此时

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.9}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，对比实部和虚部就得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.10}$$

□

C-R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

4.2.4 解析函数的定义

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点是解析的。

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 Ω 内是解析的，或称为全纯的。

4.2.5 例题

例 4.1. 已知解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数。

解 4.1. 解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y. \tag{4.13}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x_0,0)}_{C_1},\underbrace{(x_0,0)\to(x_0,y_0)}_{C_2}$，在路径 C_1 上有 $y=0,\mathrm{d}y=0$，在路径 C_2 上有 $x=x_0,\mathrm{d}x=0$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x_0,y_0)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y_0}\left(3x_0^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=3x_0^2y_0-y_0^3.\end{aligned} \tag{4.14}$$

令 $v(0,0)=C$，则：

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C, \tag{4.15}$$

于是：

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}\left(3x^2y-y^3+C\right).\end{aligned} \tag{4.16}$$

例 4.2. 已知解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的虚部 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，求该解析函数。

解 4.2. 先计算偏微分：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \tag{4.17}$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \tag{4.19}$$

于是：

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}y, \tag{4.20}$$

看到 $(x^2 + y^2)$，很自然想到极坐标变换：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \end{cases}, \tag{4.21}$$

于是：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}x + \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\varphi \\ &= \mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}\right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

于是：

$$u = \frac{-\cos\varphi}{\rho} + C = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C, \tag{4.23}$$

综上，

$$\begin{aligned} f(z) &= u + \mathrm{i}v \\ &= \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} + C\right) + \mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

4.3 复变函数积分

4.3.1 复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域中，沿某一曲线 C 的有向的线积分。

复变函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z$，由下式定义：

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ |z_j-z_{j-1}|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}). \tag{4.25}$$

右边的东西就是说，C 分成 n 段，每段都很短，端点记为 $z_0, z_1, \cdots, z_n$，ξ_j 是 C 上 z_{j-1} 点到 z_j 点的中的某一点，最后再令 n 趋于无穷。

4.3.2 柯西积分定理

4.3.2.1 单连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 (内部没有洞的区域) Ω 上解析，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{4.26}$$

其中，$\oint\limits_{C^+}$ 代表积分沿闭合曲线 C 的逆时针方向进行。

4.3.2.2 多连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的回路 C 内的多连通区域内解析，规定 $C, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的正方向为逆时针，则：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_{C_1^+} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{C_2^+} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint\limits_{C_k^+} f(z)\mathrm{d}z. \tag{4.27}$$

4.3.3 柯西积分公式

若 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则：

$$\oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0). \tag{4.28}$$

4.3.4 解析函数高阶导数的积分表达式

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，有：

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \tag{4.29}$$

4.4 复变函数的级数展开

4.4.1 解析函数的泰勒展开

设 z_0 为函数 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.30}$$

其中，展开系数为：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z. \tag{4.31}$$

4.4.2 解析函数的洛朗展开

4.4.2.1 复变函数的零点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点的函数值 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为复变函数 $f(z)$ 的零点。

4.4.2.2 复变函数的奇点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，即 $f(z)$ 在 z_0 点的导数不存在或不唯一，则称 z_0 为复变函数 $f(z)$ 的奇点。

4.4.2.3 奇点的分类

- 孤立奇点：若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。
- 非孤立奇点：若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，除 z_0 点外存在 $f(z)$ 的其他奇点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

还可以进一步对孤立奇点分类。

- 极点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 k，使得 $(z - z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点。

- 本性奇点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若不存在一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

- 可去奇点：设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点没有定义，但在 z_0 的去心邻域内解析，此时可定义 $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

4.4.2.4 解析函数的洛朗展开

若函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{4.32}$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \tag{4.33}$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线。

4.4.3 例题

例 4.3. 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内，在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

解 4.3. 首先想到几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \tag{4.34}$$

把 $f(z)$ 拆分：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{z-(z-1)}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{z-1} - z^{-1}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

当 $|z| < 1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} - z^{-1} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1) z^n.
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

当 $|z| > 1$ 时，注意到 $|1/z| < 1$，于是：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}.
\end{aligned}
$$

例 4.4. 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

解 4.4. 先算 $f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式。

由于 $0 < |z - 0| < 1$，于是：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1) z^n.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

再算 $f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

由于 $0 < |z-1| < 1$，于是：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\ &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n \\ &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n \\ &= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} (z-1)^n \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1} (z-1)^n. \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.5 留数定理及其应用

4.5.1 留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，设 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中的洛朗展开式为：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{4.39}$$

$f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为 $\mathrm{Res}f(z_0)$，定义为：

$$\mathrm{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}, \tag{4.40}$$

其中，a_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数。

4.5.2 留数的求法

4.5.2.1 定义法

直接把 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 点作洛朗展开：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{4.41}$$

找到 $(z-z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1}，由留数的定义可知：

$$\mathrm{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}.$$

4.5.2.2 极限法

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，$f(z)$ 可在其孤立奇点 z_0 点作如下的洛朗展开：

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0, \tag{4.42}$$

则

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \tag{4.43}$$

4.5.2.3 特殊情况

若 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}, z_0$ 为 $g(z)$ 的一阶极点，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则：

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{4.44}$$

4.5.3 留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即：

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}f(z_j).$$

4.5.4 利用留数定理求无穷级数

4.5.4.1 所需函数

4.5.4.2 例题

例 4.5. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$，其中 $a>0, a\notin \mathbb{Z}$.

解 4.5. 为了计算目标无穷级数，考虑如下的无穷级数：$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2-a^2}$，其中 $a>0, a\notin \mathbb{Z}$.

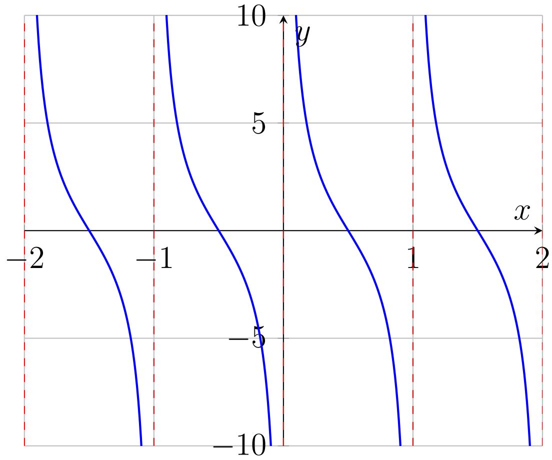

图 4.1: Plot of $y = \pi\cot(\pi x)$ with vertical asymptotes at integers.

构造函数 $f(z) = \pi\cot(\pi z)\cdot\dfrac{1}{z^2-a^2}$，由 $\pi\cot(\pi z)$ 的性质可知，$f(z)$ 的全部奇点 $z_{\pm} = \pm a, z_i = i\in\mathbb{Z}$ 都是一阶极点。

考虑如下的正方形围道：

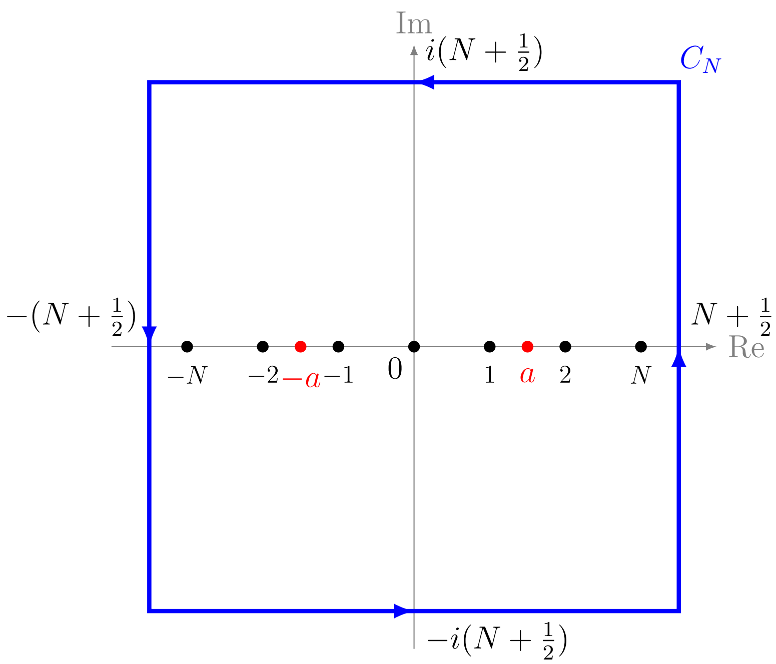

图 4.2: 正方形围道 C_N

由留数定理，有

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{N\to\infty} 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}f(z_+) + \mathrm{Res}f(z_-) + \sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Res}f(z_n)\right). \tag{4.45}$$

可以证明，

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N} f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{4.46}$$

因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}f(z_n) = -\left[\mathrm{Res}f(z_+) + \mathrm{Res}f(z_-)\right]. \tag{4.47}$$

注意到 $z_n = n$ 作为 $f(z) = \pi\cot(\pi z)/\left(z^2 - a^2\right) = \pi\cos(\pi z)/\left[\left(z^2 - a^2\right)\sin(\pi z)\right]$ 的一阶极点，若令

$$h(x) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\left(z^2 - a^2\right)}, \quad g(x) = \sin(\pi z), \quad f(z) = \frac{h(x)}{g(x)}, \tag{4.48}$$

那么 $z_n = n$ 也是是 $g(x)$ 的一阶极点，利用求留数方法中的第三种情况，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_n) &= \frac{h(z_n)}{g'(z_n)}\\ &= \frac{\pi\cos(\pi z_n)/\left(z_n^2 - a^2\right)}{\pi\cos(\pi z_n)}\\ &= \frac{\pi\cos(n\pi)/\left(n^2 - a^2\right)}{\pi\cos(n\pi)}\\ &= \frac{1}{(n^2 - a^2)}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

再计算

$$\mathrm{Res}f(z_+) = \frac{\pi\cos(\pi a)}{2a}, \tag{4.50}$$

$$\mathrm{Res}f(z_-) = \frac{\pi\cot(\pi a)}{2a}, \tag{4.51}$$

代入留数定理就得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - a^2)} = -\frac{\pi\cot(\pi a)}{a}, \tag{4.52}$$

于是

$$-\frac{1}{a^2} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2 - a^2)} = -\frac{\pi\cot(\pi a)}{a}, \tag{4.53}$$

最终得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a}\cot(\pi a), \quad a \notin \mathbb{Z}. \tag{4.54}$$

4.5.5 留数定理在实积分中的应用

参考文献

[1] 杨孔庆. 数学物理方法. Gao deng jiao yu chu ban she, 2012.