第1节作业

1-1

> 写出三维欧氏空间的线元（直角、球坐标系）。

直角坐标系：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\,(1,1,1)$$

球坐标系：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^2, r^2\sin^2\theta\right)$$

1-2

> 写出二维球面的线元；写出二维环面的线元。

设球面半径为常数 R，二维球面线元：

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

设环心到管中心的距离为常数 R，环面的管半径为常数 r，环面管的极角为 ϕ，环面的方位角为 θ，则二维环面上一点有两个自由度，其直角坐标 (x,y,z) 与 (ϕ,θ) 坐标的关系为：

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

微分：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -(R + r\cos\theta)\sin\phi\mathrm{d}\phi - r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = (R + r\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\phi - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z = r\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

二维环面线元：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\
&= \left[-\left(R+r\cos\theta\right)\sin\phi\mathrm{d}\phi - r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta\right]^2\\
&+ \left[\left(R+r\cos\theta\right)\cos\theta\mathrm{d}\phi - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta\right]^2\\
&+ \left(r\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)^2\\
&= \left(R+r\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\phi^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2
\end{aligned}$$

1-3

> 推导一般洛伦兹变换。

设有两个惯性系 S, S'，同一事件 P 在其中的坐标分别用 $(x_0, x_1, x_2, x_3), (x_0', x_1', x_2', x_3')$ 表示，其中 $x_0 = ct, x_0' = ct'$。

约定希腊字母代表 $0, 1, 2, 3$，英文字母代表 $1, 2, 3$。

考虑在 S 中以速度 u_i 做匀速直线运动的**光子**，由于一切惯性系都平权，因此在 S' 系中观测，此粒子仍做匀速直线运动，速度记为 u_i'，因此有运动方程：

$$\begin{cases}
x_i = x_{i0} + u_i(t-t_0)\\
x_i' = x_{i0}' + u_i'(t'-t_0')
\end{cases}$$

其中，$x_{i0}, x_{i0}', t_0, t_0'$ 均为常数。

又光子以光速运动，而真空中光速在不同惯性系中恒为 c，因此有：

$$\begin{cases}
u_iu_i = c^2\\
u_i'u_i' = c^2
\end{cases}$$

引入中间变量

$$\begin{cases}
\beta_\mu = \beta_0\dfrac{u_\mu}{c}, \quad (u_0\equiv c)\\
S = \dfrac{c}{\beta_0}(t-t_0)\\
\xi_\mu = (ct_0, x_{i0}), \quad \xi_\mu' = (ct_0', x_{i0}')
\end{cases}$$

光子运动方程可写为：

$$
\begin{cases}
x_\mu = \xi_\mu + \beta_\mu S \\
x'_\mu = \xi'_\mu + \beta'_\mu S'
\end{cases}
$$

光速不变原理可写为：

$$
\begin{cases}
\eta_{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu = 0 \\
\eta'_{\mu\nu}\beta'_\mu\beta'_\nu = 0
\end{cases}
$$

设所求时空坐标变换为：

$$
x'_\mu = f_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)
$$

下面分四步求解。

（1）考虑惯性系条件对变换的限制

由各惯性系的等价性知，洛伦兹变换的逆变换是唯一确定的，其充要条件是变换的雅可比行列式非零：

$$
\det\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right) \neq 0
$$

于是：

$$
\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}S}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}
$$

$$
\mathrm{d}f_\mu = \mathrm{d}x'_\mu = \beta'_\mu\mathrm{d}S' = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0}\mathrm{d}f_0
$$

$$
\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}f_0} = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{u'_\mu}{c} = \mathrm{const}
$$

$$
\frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}f_0} = \frac{\mathrm{d}f_\mu/\mathrm{d}S}{\mathrm{d}f_0/\mathrm{d}S} = \frac{\beta_\nu\partial f_\mu/\partial x_\nu}{\beta_\sigma\partial f_0/\partial x_\sigma} = \mathrm{const}
$$

上式取对数后对 S 求导：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[\ln\left(\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\right) - \ln\left(\beta_\sigma\frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\right)\right] = 0
$$

即：

$$\frac{\beta_\nu\beta_\sigma\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}}{\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}}=\frac{\beta_\nu\beta_\sigma\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}}{\beta_\nu\frac{\partial f_0}{\partial x_\nu}}$$

令上式左右恒等于 $2\beta_\sigma\psi_\sigma,\psi_\sigma=\psi_\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3)$，则:

$$\beta_\nu\beta_\sigma\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}=2\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma$$

注意到:

$$\begin{aligned}2\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma&=\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma+\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma\\&=\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma+\beta_\sigma\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\beta_\nu\psi_\nu\\&=\beta_\nu\beta_\sigma\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu\right)\end{aligned}$$

因此:

$$\beta_\nu\beta_\sigma\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}=2\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma\psi_\sigma=\beta_\nu\beta_\sigma\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu\right)$$

对某一对 (ν,σ) 有:

$$\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}=\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma+\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu$$

（2）考虑光速不变原理对变换的限制

–

$$\eta_{\mu\nu}\beta'_\mu\beta'_\nu=\eta_{\mu\nu}\beta_\sigma\beta_\lambda\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\lambda}=0$$

$$\eta_{\sigma\lambda}\beta_\sigma\beta_\lambda=0$$

对比知，两式中 $\beta_\sigma\beta_\lambda$ 的二次式系数成正比，比例系数令为 $\lambda(x_0,x_1,x_2,x_3)$

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\beta}=\lambda\eta_{\alpha\beta}$$

上式对 x_ρ 求导，并令 $\partial\lambda/\partial x_\rho=2\lambda\varphi_\rho$ 得:

$$\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\rho \partial x_\alpha}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\beta}+\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\rho \partial x_\beta}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\alpha}\right)=2\lambda\eta_{\alpha\beta}\varphi_\rho$$

即：

$$2\eta_{\alpha\beta}\psi_\rho+\eta_{\rho\alpha}\psi_\beta+\eta_{\rho\beta}\psi_\alpha=2\eta_{\alpha\beta}\varphi_\rho$$

令 $\rho\neq\alpha,\rho\neq\beta$，则 $\eta_{\rho\alpha}=\eta_{\rho\beta}=0$，则：

$$\psi_\rho=\varphi_\rho,\quad \rho=0,1,2,3$$

令 $\rho=\alpha=\beta$，则：

$$2\psi_\rho=\varphi_\rho,\quad \rho=0,1,2,3$$

综合可得：

$$\psi_\rho=\varphi_\rho=0,\quad \rho=0,1,2,3$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_\rho}=2\lambda\varphi_\rho=0,\quad \lambda=\mathrm{const}$$

$$\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}=0$$

这就是变换函数所要满足的线性条件。

（3）确定线性变换的形式

令线性变换为：

$$x'_\mu=f_\mu=\sqrt{\lambda}\left(a_\mu+\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu\right)$$

度规：

$$\eta_{00}=1,\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-1$$

$a_{\mu\nu}$ 满足正交条件：

$$\begin{cases}\eta_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}=\eta_{\alpha\beta}\\ \eta_{\mu\nu}a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}=\eta_{\alpha\beta}\end{cases}$$

可以解出：

$$x_\mu=\eta_{\rho\rho}a_{\nu\mu}\left(\frac{x'_\nu}{\sqrt{\lambda}}-a_\nu\right)$$

从 S 系看 S' 系固定点 $\mathrm{d}x_i'$ 以速度 v_i 运动，则：

$$\mathrm{d}x_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{0i}\mathrm{d}x_0',\quad \mathrm{d}x_0=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{00}\mathrm{d}x_0'$$

$$\frac{v_i}{c}=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_0}=\frac{a_{0i}}{a_{00}}$$

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu'\mathrm{d}x_\nu'=\lambda\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}x_\beta$$

令 $\mathrm{d}x_i'=0$ 则有：

$$\mathrm{d}x_0'^2=\lambda\mathrm{d}x_0^2\left(1-v^2/c^2\right)$$

当 $v=0$ 时有 $\mathrm{d}x_0'=\mathrm{d}x_0$，因此 $\lambda=1$，于是：

$$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu=-\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_\alpha'\mathrm{d}x_\beta'$$

$$x_\mu'=a_\mu+\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu$$

（4）根据正交归一条件确定变换系数

为简便，取 $t=0$ 时 $t'=0$，且原点 O,O' 重合。则 $a_\mu=0$，洛伦兹变换简化为：

$$x_\mu'=\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu$$

设 S' 系相对 S 系以速度 v_i 做匀速直线运动，则从 S 系观测 S' 系固定点 $\mathrm{d}x_i'=0$ 的速度为 v_i；又在 S' 系观察 S 系固定的 $\mathrm{d}x_i=0$ 以速度 v_i' 运动，则：

$$\begin{cases}a_{00}v_i=a_{0i}c\\ a_{00}v_i'=a_{i0}c\end{cases}$$

引入单向顺时性条件，即要求洛伦兹变换不改变时间进程的方向：

$$a_{00}=\frac{\partial t'}{\partial t}>0$$

在正交条件中令 $\alpha=\beta=0$ 有：

$$\begin{cases}a_{00}^2-\left(a_{10}^2+a_{20}^2+a_{30}^2\right)=1\\ a_{00}^2-\left(a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2\right)=1\end{cases}$$

可以解出变换系数：

$$
\begin{cases}
a_{00} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \equiv \gamma \\
a_{0i} = \gamma \dfrac{v_i}{c} \\
a_{i0} = \gamma \dfrac{v_i'}{c}
\end{cases}
$$

正交条件中取 α, β 中一个为 0 有:

$$
\begin{cases}
a_{00} v_i' = a_{ik} v_k \\
a_{00} v_i = a_{ki} v_k'
\end{cases}
$$

正交条件中取 α, β 均不为 0 有:

$$
a_{ki} a_{kj} = -\eta_{ij} + a_{0i} a_{0j} = \delta_{ij} + \gamma^2 \frac{v_i v_j}{c^2}
$$

定义:

$$
d_{ik} = -a_{ik} + \frac{a_{i0} a_{0k}}{a_{00}+1} = -a_{ik} + (\gamma - 1) \frac{v_i' v_k}{v^2}
$$

则一般固有洛伦兹变换系数为:

$$
\begin{cases}
a_{00} = \gamma \\
a_{0i} = \gamma \dfrac{v_i}{c} \\
a_{i0} = -\gamma \dfrac{d_{ij} v_j}{c} \\
a_{ik} = -d_{ik} - (\gamma - 1) \dfrac{d_{ij} v_j v_k}{v^2}
\end{cases}
$$

1-4

> 在 $v \ll c$ 的条件下验证伽利略变换。

$$
\begin{cases}
x' = \gamma (x - vt) \\
t' = \gamma \left(t - vx/c^2 \right)
\end{cases}
$$

其中,

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}
$$

当 $v \ll c$ 时，$\gamma \approx 1, vx/c^2 \approx 0$，洛伦兹变换退化为伽利略变换：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

1-5

> 证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

取 $c = 1$，洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - vx\right) \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

线元定义为：

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

要证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变，只需要证明：

$$-\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

注意到：

$$\mathrm{d}x' = \gamma\left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right)$$

$$\mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x\right)$$

于是：

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 &= \gamma^2\left[-\left(\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right)^2\right] \\ &= \gamma^2 \cdot \left[\left(v^2 - 1\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - v^2\right)\mathrm{d}x^2\right] \\ &= \frac{1}{1 - v^2} \cdot \left(1 - v^2\right)\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2\right) \\ &= -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 \end{aligned}$$

因此在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

1-6

> 在 $v \ll c$ 的条件下验证速度的伽利略变换。

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)} \end{cases}$$

当 $v \ll c$ 时，$vu_x/c^2 \approx 0, \gamma \approx 1$，于是速度的洛伦兹变换退化为速度的伽利略变换：

$$\begin{cases} u_x' = u_x - v \\ u_y' = u_y \\ u_z' = u_z \end{cases}$$

1-7

> 谈谈你对广义相对性原理的理解，给出广义相对论中的光速不变原理的表述。

广义相对性原理：物理定律在所有参考系（包括非惯性系）中形式相同。这意味着自然规律不依赖于观察者的运动状态，惯性力和引力效应在局部不可区分。引力被视为时空弯曲的表现，物质和能量决定时空几何，时空几何又影响物质运动。

广义相对论中的光速不变原理的表述：在局部惯性参考系中，光速在真空中恒为 c，且与光源和观察者的运动无关。

1-8

> 假设我们的宇宙是二维的，且物质分布是均匀各项同性的，写出我们宇宙的度规形式。

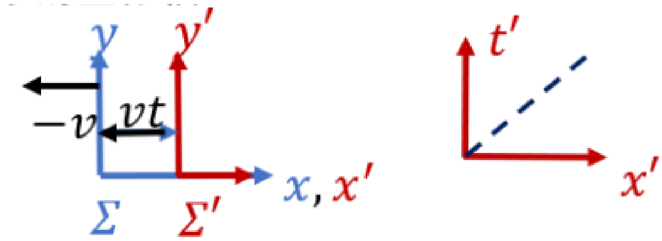
物质分布是均匀各项同性的，则度规与空间坐标无关。采用极坐标，线元为：

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2\right)$$

度规为：

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-1, a^2(t), a^2(t)r^2\right)$$

1-9

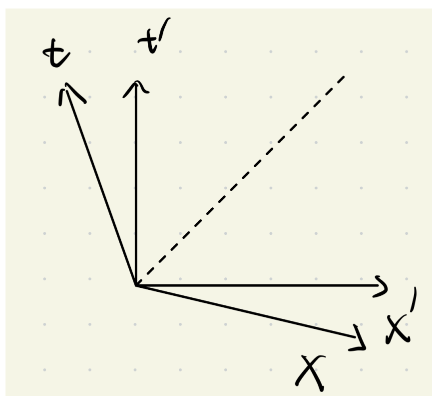


> 在惯性坐标系 Σ' 系中画惯性系 Σ 的坐标轴。

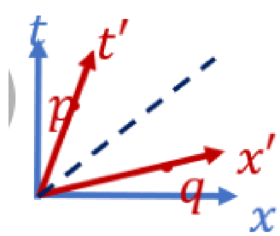
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + vx'\right) \end{cases}$$

t 轴：令 $x = \gamma(x' + vt') = 0 \Longrightarrow t' = -x'/v$

x 轴：令 $t = \gamma\left(t' + vx'\right) = 0 \Longrightarrow t' = -vx'$



1-10



> 在 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - vx\right) \end{cases}$$

t' 轴：$x' = \gamma(x - vt) = 0 \Longrightarrow t = x/v$

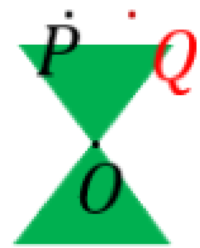
x' 轴：$t' = \gamma (t - vx) = 0 \Longrightarrow t = vx$

事件 $p = (t_p, vt_p)$，事件 $q = (t_q, t_q/v)$，内积：

$$p \cdot q = \eta_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -t_p t_q + (vt_p)(t_q/v) = 0$$

因此 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

1-11



> P, Q 两事件是否有因果关系？

P 在 Q 的光锥之外，两事件没有因果关系。

1-12

> 根据下面史瓦西时空的度规画出该时空中 (t, r) 这两维时空的光锥结构，讨论该时空中的固有时和坐标时的关系，以及固有距离和坐标距离的关系。
>
> $$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2\right), \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

光锥结构

只考虑径向，$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$，则线元为：

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

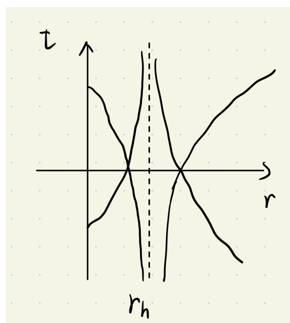
$$\mathrm{d}s^2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \frac{1}{f^2(r)} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \pm\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r = \pm\frac{1}{1 - r_h/r}\mathrm{d}r$$

积分：

$$
\begin{aligned}
t - t_0 = \int \mathrm{d}t &= \pm \int \frac{1}{1 - r_h/r} \mathrm{d}r \\
&= \pm \int \frac{1 - r_h/r + r_h/r}{1 - r_h/r} \mathrm{d}r \\
&= \pm \int \left(1 + \frac{r_h}{r - r_h}\right) \mathrm{d}r \\
&= \pm \left[r + r_h \int \frac{1}{r - r_h} \mathrm{d}\left(r - r_h\right)\right] \\
&= \pm \left(r + r_h \ln\left|r - r_h\right|\right)
\end{aligned}
$$

即：

$$
t = t_0 \pm \left(r + r_h \ln\left|r - r_h\right|\right)
$$



当 $r > r_h$ 时，光锥是正常的，光可以向外或向内传播。

当 $r = r_h$ 时，光锥坍缩为一条线，光无法逃逸。

当 $r < r_h$ 时，光锥反转，所有光都朝向奇点 $r = 0$ 传播。

固有时和坐标时的关系

对于静止观察者 $\mathrm{d}r^2 = 0$，其固有时

$$
\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2 = f(r)\mathrm{d}t^2 = \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) \mathrm{d}t^2
$$

当 $r \to \infty$ 时，$f(r) \to 1$，固有时和坐标时一致；

当 $r \to r_h$ 时，$f(r) \to 0$，固有时趋于无穷小。

固有距离和坐标距离的关系

对于径向距离 $\mathrm{d}t^2 = 0$，固有距离为：

$$\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r_h/r}}$$

当 $r \to \infty$ 时，$f(r) \to 1$，固有距离与坐标距离一致；

当 $r \to r_h$ 时，$f(r) \to 0$，固有距离趋于无穷大。