ch1

Anderson的工作

Anderson是凝聚态物理学之父。

涉及无序效应的一系列现象：无序驱动的Anderson局域化，（gang of four的）局域化的标度理论，自旋玻璃理论；

涉及磁性杂质问题的Anderson杂质模型和Kondo杂质问题的Poor man's标度理论；

高温超导和量子自旋液体的共振价键理论；

局域磁性的超交换机制和反铁磁自旋波理论；

超导杂质问题的Anderson定理，超流He-3A相配对理论，Anderson-Higgs机制。

Kitaev的工作

Toric-code模型，还有honeycomb模型等等。

ch2

升降算符

δ函数傅里叶变换

$$\int \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int 1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{1}$$

无相互作用自由电子气基态能量

考虑 N 个电子，则基态是费米球内全填满的态。

$$E_{\mathrm{GS}} = \sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant k_F,\sigma}\frac{k^2}{2m} = \sum_{\sigma}\int_{|\boldsymbol{k}|\leqslant k_F}\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d/V}\frac{k^2}{2m} = 2\frac{V}{(2\pi)^d\,2m}\int_{|\boldsymbol{k}|\leqslant k_F}\mathrm{d}^d k k^2 \tag{2}$$

三维情况下 $d=3$，粒子数可由下式确定：

$$N = \sum_{\sigma}\int_{|\boldsymbol{k}\leqslant k_F|}\frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3/V} = \frac{V}{3\pi^2}k_F^3 \tag{3}$$

基态能量：

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{GS}} &= 2\frac{V}{(2\pi)^3\,2m}\int_{|\boldsymbol{k}|\leqslant k_F}\mathrm{d}^3 k k^2 = 2\frac{V}{(2\pi)^3\,2m}\int_{k=0}^{k=k_F}4\pi k^2\cdot k^2\mathrm{d}k \\ &= 2\frac{V}{(2\pi)^3\,2m}\cdot 4\pi\frac{k_F^5}{5} = \frac{V}{10\pi^2 m}k_F^5 = \frac{3}{5}N\varepsilon_F \end{aligned} \tag{4}$$

无相互作用自由电子气体基态能量：

$$
\begin{aligned}
E_g^0 &= \left\langle F \left| \sum_{k,\sigma} \frac{k^2}{2m} c_{k\sigma}^{\dagger} c_{k\sigma} \right| F \right\rangle = \sum_{k,\sigma} \frac{k^2}{2m} n_{k\sigma} = \sum_{k,\sigma} \frac{k^2}{2m} \theta(k_F - k) \\
&= \sum_{\sigma} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3/V} \frac{k^2}{2m} \theta(k_F - k) = \sum_{\sigma} \int_{k=0}^{k=k_F} \frac{4\pi k^2 \mathrm{d}k}{(2\pi)^3/V} \frac{k^2}{2m} \\
&= \frac{V}{2m\pi^2} \frac{k_F^5}{5}
\end{aligned} \tag{5}
$$

利用Wick定理算库仑电子气基态能量一阶修正

Wick定理说，对于无相互作用费米子系统 $H = \sum_{i,j} c_i^{\dagger} \varepsilon_{ij} c_j$ 的任何本征态 $|\Psi\rangle$，有

$$
\left\langle \Psi \left| c_i^{\dagger} c_j^{\dagger} c_l c_m \right| \Psi \right\rangle = -\left\langle \Psi \left| c_i^{\dagger} c_l \right| \Psi \right\rangle \left\langle \Psi \left| c_j^{\dagger} c_m \right| \Psi \right\rangle + \left\langle \Psi \left| c_i^{\dagger} c_m \right| \Psi \right\rangle \left\langle \Psi \left| c_j^{\dagger} c_l \right| \Psi \right\rangle \tag{6}
$$

库仑电子气哈密顿量：

$$
\boxed{H = \sum_{k,\sigma} \frac{k^2}{2m} c_{k\sigma}^{\dagger} c_{k\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q\neq 0,\sigma,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k'-q,\sigma'}^{\dagger} c_{k',\sigma'} c_{k,\sigma}} \tag{7}
$$

相互作用哈密顿量：

$$
H_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q\neq 0,\sigma,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k'-q,\sigma'}^{\dagger} c_{k',\sigma'} c_{k,\sigma} \tag{8}
$$

利用Wick定理，基态能量一阶修正为

$$
\begin{aligned}
\langle F \,|\, H_{\text{int}} \,|\, F \rangle &= \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q\neq 0,\sigma,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} \left\langle F \left| c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k'-q,\sigma'}^{\dagger} c_{k',\sigma'} c_{k,\sigma} \right| F \right\rangle \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q\neq 0,\sigma,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} \left[-\left\langle F \left| c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k',\sigma'} \right| F \right\rangle \left\langle F \left| c_{k'-q,\sigma'}^{\dagger} c_{k,\sigma} \right| F \right\rangle + \left\langle F \left| c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k,\sigma} \right| F \right\rangle \left\langle F \left| c_{k'-q,\sigma'}^{\dagger} c_{k',\sigma'} \right| F \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{k,k',q\neq 0,\sigma,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} \left[-\delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{k',k+q} \delta_{k,k'-q} \theta\left(k_F - \left|\vec{k}\right|\right) \theta\left(k_F - \left|\vec{k}+\vec{q}\right|\right) + \delta_{k,k+q} \delta_{k',k'-q} ??? \right] \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{k,q\neq 0,\sigma} \frac{4\pi e^2}{q^2} \left[-\theta\left(k_F - \left|\vec{k}\right|\right) \theta\left(k_F - \left|\vec{k}+\vec{q}\right|\right) \right] \\
&= -\frac{1}{2V} \sum_{k,q\neq 0,\sigma} \frac{4\pi e^2}{q^2} \theta\left(k_F - \left|\vec{k}\right|\right) \theta\left(k_F - \left|\vec{k}+\vec{q}\right|\right) \\
&= -\frac{3e^2}{4\pi} N k_F
\end{aligned} \tag{9}
$$

> 求和转积分参考讲义

HF近似算 H_{int}

Hartree-Fock近似（平均场近似）

$$
AB \approx \langle A \rangle B + A \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \tag{10}
$$

这里 $\langle \rangle$ 代表系综平均或基态期望。

对于Coulomb电子气，对相互作用项中的四费米子项用H-F近似：

$$H_{\text{int}}=\frac{1}{2V}\sum_{k,k',q\neq0,\sigma,\sigma'}\frac{4\pi e^2}{q^2}c^\dagger_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k',\sigma'}c_{k,\sigma} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&c^\dagger_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k',\sigma'}c_{k,\sigma}\\
=&-c^\dagger_{k+q,\sigma}c_{k',\sigma'}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k,\sigma}\\
\approx&-\left\langle c^\dagger_{k+q,\sigma}c_{k',\sigma'}\right\rangle c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k,\sigma}-c^\dagger_{k+q,\sigma}c_{k',\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k,\sigma}\right\rangle+\left\langle c^\dagger_{k+q,\sigma}c_{k',\sigma'}\right\rangle\left\langle c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k,\sigma}\right\rangle\\
=&-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right\rangle c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right\rangle c^\dagger_{k+q,\sigma}c_{k',\sigma'}+\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{k,k'-q}\left\langle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right\rangle\left\langle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right\rangle\\
=&-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right\rangle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right\rangle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}+\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{k,k'-q}\left\langle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right\rangle\left\langle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

忽略最后的常数项就有

$$\begin{aligned}
c^\dagger_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k',\sigma'}c_{k,\sigma}\approx&-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right\rangle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\left\langle c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right\rangle c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\\
=&-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}n_{k',\sigma'}c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}n_{k,\sigma}c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\\
=&-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\theta(k_F-k)c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}
\end{aligned} \tag{13}$$

则

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}}=&\frac{1}{2V}\sum_{k,k',q\neq0,\sigma,\sigma'}\frac{4\pi e^2}{q^2}c^\dagger_{k+q,\sigma}c^\dagger_{k'-q,\sigma'}c_{k',\sigma'}c_{k,\sigma}\\
\approx&\frac{1}{2V}\sum_{k,k',q\neq0,\sigma,\sigma'}\frac{4\pi e^2}{q^2}\left[-\delta_{k',k+q}\delta_{\sigma,\sigma'}\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}-\delta_{k,k'-q}\delta_{\sigma,\sigma'}\theta(k_F-k)c^\dagger_{k',\sigma'}c_{k',\sigma'}\right]\\
=&-\frac{1}{2V}\sum_{k,k',\sigma}\frac{4\pi e^2}{|k'-k|^2}\left[\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}+\theta(k_F-k)c^\dagger_{k',\sigma}c_{k',\sigma}\right]\\
=&-\frac{1}{2V}\sum_{k,k',\sigma}\frac{4\pi e^2}{|k'-k|^2}\left[\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}+\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}\right]\\
=&-\frac{1}{V}\sum_{k,k',\sigma}\frac{4\pi e^2}{|k'-k|^2}\theta(k_F-k')c^\dagger_{k,\sigma}c_{k,\sigma}
\end{aligned} \tag{14}$$

ch3

Hubbard模型长什么样

单带Hubbard模型：

$$H=-t\sum_{\langle j,m\rangle,\sigma}\left(c^\dagger_{j\sigma}c_{m\sigma}+\text{h.c.}\right)+U\sum_j n_{j\uparrow}n_{j\downarrow} \tag{15}$$

$\langle j,m\rangle$ 表示对最近邻pair求和。

两自旋模型本征解

两自旋-1/2Heisenberg耦合：

$$H=J\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 \tag{16}$$

定义总自旋和总自旋 z 分量：

$$\vec{S}\equiv\vec{S}_1+\vec{S}_2,\quad S^z\equiv S^z_1+S^z_2 \tag{17}$$

利用

$$\vec{S}^2=\vec{S}_1^2+\vec{S}_2^2+2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2,\quad \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=\frac{1}{2}\left(\vec{S}^2-\vec{S}_1^2-\vec{S}_2^2\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{S}^2-\frac{3}{2}\right) \tag{18}$$

其中 $\vec{S}_1^2,\vec{S}_2^2$ 是常数，可以证明

$$\left[H,\vec{S}^2\right]=0,\quad [H,S^z]=0,\quad \left[\vec{S}^2,S^z\right]=0 \tag{19}$$

因此 $\vec{S}^2,S^z$ 的共同本征态（自旋单态、自旋三重态）也是 H 本征态。

$$\begin{aligned} H\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)\right]&=J\frac{1}{2}\left(\vec{S}^2-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)=J\frac{1}{2}\left(0(0+1)-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)\\ &=-\frac{3}{4}J\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)\end{aligned} \tag{20}$$

$$H|\text{triplet}\rangle=J\frac{1}{2}\left(\vec{S}^2-\frac{3}{2}\right)|\text{triplet}\rangle=J\frac{1}{2}\left(1(1+1)-\frac{3}{2}\right)|\text{triplet}\rangle=\frac{J}{4}|\text{triplet}\rangle \tag{21}$$

（两格点Hubbard）

两格点Hubbard模型

$$H=-t\sum_\sigma\left(c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma}+c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma}\right)+U\left(n_{1\uparrow}n_{1\downarrow}+n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}\right) \tag{22}$$

自旋波的来历（HP bosons）

一维最近邻耦合铁磁量子Heisenberg模型模型：

$$H=-J\sum_j\vec{S}_j\cdot\vec{S}_{j+1}=-J\sum_j\left(S_j^xS_{j+1}^x+S_j^yS_{j+1}^y+S_j^zS_{j+1}^z\right) \tag{23}$$

引入升降算符

$$S_j^\pm\equiv S_j^x\pm \mathrm{i}S_j^y \tag{24}$$

改写哈密顿量

$$H_{FM}=-J\sum_j\left[\frac{1}{2}\left(S_j^+S_{j+1}^-+S_j^-S_{j+1}^+\right)+S_j^zS_{j+1}^z\right] \tag{25}$$

考虑周期边界条件，可以发现铁磁态（所有自旋都朝一个方向）是体系的本征态，并且是基态。

$$|\psi_{FM}\rangle\equiv|\uparrow\rangle_1\cdots|\uparrow\rangle_{N_s} \tag{26}$$

$$H_{FM}|\psi_{FM}\rangle=-\frac{J}{4}N_s|\psi_{FM}\rangle \tag{27}$$

考虑完全极化铁磁态基础上，某个自旋翻转得到的态：

$$|\psi_i\rangle\equiv|\downarrow\rangle_i\prod_{j\neq i}|\uparrow\rangle_j \tag{28}$$

这个态不是哈密顿量本征态。可以发现

$$H_{FM}|\psi_i\rangle=-\frac{J}{2}(|\psi_{i-1}\rangle+|\psi_{i+1}\rangle)+\left(-\frac{J}{4}(N_s-2)+\frac{J}{4}\cdot 2\right)|\psi_i\rangle \tag{29}$$

因此构造如下的态是体系哈密顿量本征态：

$$|\psi\rangle\equiv\sum_i c_i|\psi_i\rangle \tag{30}$$

若所有的系数 c_i 都不为零，则这个态描述的是在晶格自旋体系中传播的自旋翻转。

利用本征方程

$$H_{FM}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{31}$$

可以求得：

$$|\psi\rangle = \sum_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_i}|\psi_i\rangle \tag{32}$$

$$E = E_{FM} + J(1-\cos k) \tag{33}$$

其中 R_i 是格点 i 的位置，这就是铁磁自旋波与其激发谱。

反铁磁

$$S_{Aj}^{+} = \sqrt{2S - a_j^{\dagger}a_j}\,a_j, \quad S_{Aj}^{-} = a_j^{\dagger}\sqrt{2S - a_j^{\dagger}a_j}, \quad S_{Aj}^{z} = S - a_j^{\dagger}a_j \tag{34}$$

$$S_{Bj}^{+} = b_j^{\dagger}\sqrt{2S - b_j^{\dagger}b_j}, \quad S_{Bj}^{-} = \sqrt{2S - b_j^{\dagger}b_j}\,b_j, \quad S_{Bj}^{z} = -S + b_j^{\dagger}b_j \tag{35}$$

在大自旋近似下

$$H_{AF} \approx JS\sum_{i,\delta}\left(a_i^{\dagger}a_i + b_{i+\delta}^{\dagger}b_{i+\delta} + a_i^{\dagger}b_{i+\delta}^{\dagger} + a_i b_{i+\delta}\right) - JN_s\frac{Z}{2}S^2 \tag{36}$$

进行如下的分解

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{N_s/2}}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_i}a_k, \tag{37}$$

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{N_s/2}}\sum_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR_i}b_k \tag{38}$$

则

$$H_{AF} = JS\sum_k\left[Za_k^{\dagger}a_k + Zb_k^{\dagger}b_k + \left(\sum_{\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta}\right)a_k^{\dagger}b_k^{\dagger} + \left(\sum_{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\delta}\right)a_k b_k\right] - JN_s\frac{Z}{2}S^2 \tag{39}$$

定义 $\gamma_k \equiv \frac{1}{Z}\sum_{\delta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta}$，且在超立方晶格有 $\gamma_k^* = \gamma_k$ 则

$$H_{AF} = JSZ\sum_k\left(a_k^{\dagger}a_k + b_k^{\dagger}b_k + \gamma_k a_k^{\dagger}b_k^{\dagger} + \gamma_k a_k b_k\right) - JN_s\frac{Z}{2}S^2 \tag{40}$$

采用玻色子Bogoliubov变换

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta_k & -\sinh\theta_k \\ -\sinh\theta_k & \cosh\theta_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k^{\dagger} \end{pmatrix} \tag{41}$$

为了消去非对角项，取

$$\gamma_k = \tanh 2\theta_k \tag{42}$$

则哈密顿量化为

$$H_{AF} = JSZ\sum_k(\cosh 2\theta_k - \gamma_k\sinh 2\theta_k)\left(\alpha_k^{\dagger}\alpha_k + \beta^{\dagger}\beta_k\right) + JSZ\sum_k(\cosh 2\theta_k - \gamma_k\sinh 2\theta_k) \tag{43}$$

可进一步改写为

$$H_{AF}=\sum_k \omega_k\left(\alpha_k^{\dagger}\alpha_k+\beta^{\dagger}\beta_k\right)+\sum_k \omega_k-JN_s\frac{Z}{2}S(S+1) \tag{44}$$

$$\omega_k=JSZ\sqrt{1-\gamma_k^2} \tag{45}$$

这里 ω_k 是自旋波的色散关系。动量求和只对磁布里渊区进行。

对角化得自旋波激发谱 $\omega(q)$

Jordan-Wigner变换怎么代（以量子XXZ模型为例）

参考讲义一维量子XY模型和XXZ模型。

ch4

Landau-Fermi液体是什么

Landau费米液体的基本结果：电子-电子相互作用的唯一效果是改变电子的质量，对物理可观测量给出小的修正并导致无碰撞的零声波。

费米液体的两个基本假设：

绝热性：无相互作用费米气体在缓慢加入相互作用后变成费米液体；

一对一：费米子液体的准粒子/空穴激发与费米气体的粒子/空穴一一对应。

零声是什么

对于波动解 $n_{k\sigma}(x,t)=f_F\left(\varepsilon_{k\sigma}^0\right)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx-\omega t)}\eta\left(\hat{k}\right)\delta\left(\varepsilon_{k\sigma}^0\right)$，在 $q\to 0$ 的长波极限下，粒子数分布的变化 $\delta n_{k\sigma}(t)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\eta\left(\hat{k}\right)\delta(\varepsilon)$ ，在物理上可以理解为，若以平衡时的费米球为参考，$\delta n_{k\sigma}(t)$ 描述在费米子面 $\delta(\varepsilon)$ 附近，体系以频率 ω 放大或缩小费米球，这种振动就是零声。零声模式来自分布函数在时空上的振荡行为，可以看作是费米液体中的费米球的集体运动。零声模式是无能隙的低能激发。

ch5

Landau相变理论是什么

chat：用一个序参量来区分不同相，并在满足体系对称性的前提下，将自由能按序参量作低阶展开。随温度变化，自由能最低点从零序参量转移到非零值，从而描述自发对称性破缺和连续（二级）相变。该理论忽略涨落效应，在临界点附近或低维体系中需要修正。

序参量是什么

chat：序参量（order parameter）是一个在高对称相中为零、在低对称相中非零的物理量，用来区分不同相并刻画自发对称性破缺。在 Landau 相变理论中，自由能被写成序参量的函数，通过其最小值随温度变化来描述相变。

Anderson-Higgs机制是什么

chat：当一个体系中连续的全局对称性发生自发破缺时，本来应该出现的 Goldstone 无质量模，如果该对称性同时被局域化并与 gauge 场耦合，那么这个 Goldstone 模式就不再作为独立的低能激发存在，而是被 gauge 场吸收，使得原本无质量的 gauge 玻色子获得一个质量。

Goldstone是什么

chat：当体系的连续全局对称性在基态中被自发破缺时，序参量在破缺方向上的相位涨落不会增加能量，从而产生能隙为零（或低能）的集体激发，这种激发称为 Goldstone 模式。

破缺了什么对称性?

光子不破缺U(1)对称性，声子不破缺U(1)，声子破缺空间（连续）平移对称性。

体系	破缺的连续对称性	Goldstone 模式
晶体	空间**连续平移**	声子（phonon）
各向同性铁磁体	**自旋旋转** $SO(3) \rightarrow SO(2)$	自旋波（magnon）
反铁磁体	自旋旋转 $SO(3) \rightarrow SO(2)$	自旋波（两支）
中性超流（He-4）	全局 $U(1)$	相位声子
BEC	全局 $U(1)$	相位模
液晶（向列相）	空间旋转	director 波
手征对称破缺（QCD）	手征 $SU(N)_L \times SU(N)_R$	赝 Goldstone（π介子）

ch13

基本概念

超导：超导是一种在低于临界温度 T_c 时出现的宏观量子相，表现为零电阻和完全抗磁性。在超导态中，电子形成相干的库珀对并发生宏观凝聚，体系出现能隙 Δ 从而抑制散射，导致零电阻。

迈斯纳效应：迈斯纳效应是指超导体在进入超导态时，会将磁场排斥出体内的现象。当材料降温到 T_c 以下时，即使在外磁场中，也会出现磁场指数衰减。

BCS理论：BCS 理论指出，电子通过声子介导的有效吸引相互作用形成库珀对，凝聚成基态，并在费米面附近打开能隙 $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$

库伯对：库珀对是由两个动量和自旋相反的电子形成的束缚态。库珀对是由两个动量和自旋相反的电子形成的束缚态。

G-L方程：G-L 方程是用宏观序参量描述超导的唯象理论。

各种配对因子

什么是 $d_{x^2-y^2}, d_{xy}, p+ip, p-ip$ 波？（配对因子长什么样）

s 波：$\gamma_k = 1, \Delta_k = \Delta$

$d_{x^2-y^2}$ 波：$\gamma_k = \cos k_x - \cos k_y$

d_{xy} 波：$\gamma_k = \sin k_x \sin k_y$

$p + \mathrm{i}p$ 波：$\gamma_k = k_x + \mathrm{i}k_y$

$p - \mathrm{i}p$ 波：$\gamma_k = k_x - \mathrm{i}k_y$

给定哈密顿量，怎么用Bogoliubov变换求本征能量

如何从自由能出发推出 Δ 满足的方程

s,d波态密度差别

s波超导态密度：

$$N(\omega) = N(0)\frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}\theta\left(|\omega| - \Delta\right) \tag{46}$$

d波超导态密度：

$$N(\omega) = 2N(0)\int \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2\cos^2(2\phi)}}\theta\left(|\omega| - \Delta\left|\cos(2\phi)\right|\right) \tag{47}$$

$$N(\omega \ll \Delta) = N(0)\frac{\omega}{\Delta} \propto \omega \tag{48}$$

正则变换

电声相互作用 $\mathrm{e}^{-S}\cdots\mathrm{e}^{S}$

$$S = \sum_{k,q,\sigma} M_q \left(B_{k,q} b_q + A_{k,q} b_{-q}^{\dagger}\right) c_{k+q,\sigma}^{\dagger} c_{k,\sigma} \tag{49}$$

三重态 Δ_k 矩阵

幺正配对、非幺正配对

ch15

Z2规范理论是什么

规范自由度只取两个值（±1），规范群是 Z_2 的晶格规范理论。

规范会变的物理量的期望值

局域规范对称性不会自发破缺。非规范不变量平均值为零。只有规范不变量才会有非零的期望值。

Wilson loop

Wilson loop是以自旋构成的非局域序参量：

$$W(C) = \prod_{i,j\in C} \sigma_{i,j} \tag{50}$$

禁闭、退禁闭

高温下满足面积律的相叫做规范场的禁闭态，低温下满足周长律的相叫做退禁闭态。

当规范场处于禁闭态，往体系中放两个例子，则粒子与规范场耦合形成束缚态，不能单独运动。

而周长 $E^{-P_c} \sim \mathrm{e}^{-T} \sim \mathrm{e}^{-V(R)T}$，势能与 R 无关，电荷可以自由运动不受限制。

规范变换的面积律、周长律

面积律：在高温极限下，Wilson loop的平均值按具有指数型的按面积衰减形式

$$\langle W(C)\rangle \sim \mathrm{e}^{-A_c} \tag{51}$$

周长律：低温时， Z_2 规范理论的Wilson loop具有指数型的按回路周长衰减形式

$$\langle W(C)\rangle \sim \mathrm{e}^{-P_c} \tag{52}$$

toric-code模型

$$\begin{aligned} H &= -J\sum_i \sigma^z_{i,i+\hat{x}}\sigma^z_{i+\hat{x},i+\hat{x}+\hat{y}}\sigma^z_{i+\hat{x}+\hat{y},i+\hat{y}}\sigma^z_{i+\hat{y},i} - w\sum_i G(i) \\ &= -J_e\sum_i A_s(i) - J_m\sum_i B_p(i) \end{aligned} \tag{53}$$

$B_p(i)$ 代表格点 i 格点对应小正方形上 σ^z 的乘积，$A_s(i)$ 代表以 i 格点为中心所有最近邻 σ^x 的乘积（形成一个star）

如何在六角晶格上构造model

基态波函数

对于电荷激发可以定义

$$W_l^{(e)} \equiv \prod_{(i,j)\in l} \sigma_{i,j}^z \tag{54}$$

其物理意义是在几天上产生两个电荷激发。

也可定义产生涡旋的String算符

$$W_l^{(m)} \equiv \prod_{(i,j)\in l} \sigma_{i,j}^x \tag{55}$$

对于定义在轮胎面上的正方晶格，利用闭合的String算符可以构造四个拓扑不等价的基态

$$\left|\Psi_0\right\rangle, W_{C_x}^{(m)}\left|\Psi_0\right\rangle, W_{C_y}^{(e)}\left|\Psi_0\right\rangle, W_{C_x}^{(m)} W_{C_y}^{(e)}\left|\Psi_0\right\rangle \tag{56}$$

对于开边界情况，基态可以由投影算符得到

$$\left|\Psi_0\right\rangle=\prod_p \frac{1+B_p}{2}|0\rangle \tag{57}$$

其中 $|0\rangle \equiv|\rightarrow \rightarrow \cdots\rangle$ 是所有自旋 σ^x 本征态为 1 的乘积态。

2D规范存在相变吗

2d规范理论没有相变，体系始终处于禁闭态。