

2 相对论的时空理论

2.1 相对论的时空结构

事件 1, 2 的时空坐标分为设为 $(t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2)$, 间隔:

$$S^2 = -(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

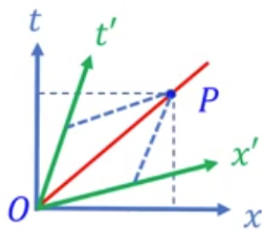
类时间隔 $S^2 < 0$, P_2 在 P_1 的光锥之内;

类光间隔 $S^2 = 0$, P_2 在 P_1 的光锥之上;

类空间隔 $S^2 > 0$, P_2 在 P_1 的光锥之外。

由间隔不变性, P_2 和 P_1 的光锥的几何关系是绝对的, 不依赖于惯性参考系。

类光间隔



仅考虑 1+1 维时空, 在 Σ 系

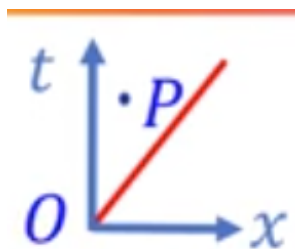
$$S^2 = -t^2 + x^2 = 0 \implies t = x$$

在 Σ' 系

$$S^2 = -t'^2 + x'^2 = 0 \implies t' = x'$$

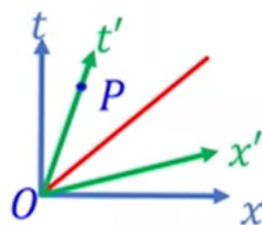
对任意惯性系, P 点都在 O 点的光锥上。

类时间隔



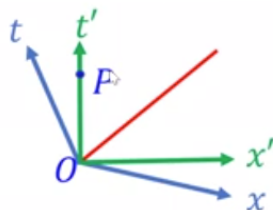
$$S^2 < 0$$

可以通过 Lorentz 变换使得 O, P 两点在某个惯性系中同地不同时。

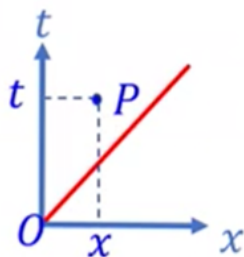


具体做法是以 OP 为 t' 轴构造坐标系 Σ' 。由于 t' 轴是 $x' = 0$ 线，即 t' 轴上任意一点在 Σ' 系的空间坐标 $x' = 0$ 。因此，在 Σ 系 O, P 是不同时不同地事件，但它们的时空坐标通过 Lorentz 变换变换到 Σ' 系的时空坐标后，在 Σ' 系它们成了同地不同时事件。

同理，一个惯性坐标系中的两个同地不同时事件，在其他惯性坐标系中不同地。



Lorentz 变换保持时间正向不变

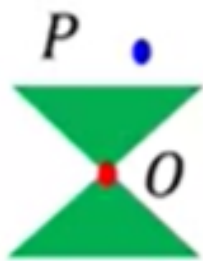


上半光锥 $t > 0$ ，类时间隔 $t > x, 1 > v$ ，因此：

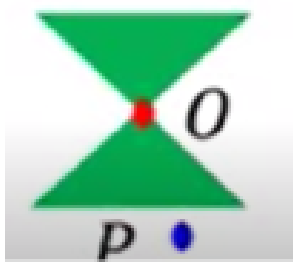
$$t' = \gamma(t - vx) > 0$$

类时区域包括 $t > 0$ 和 $t < 0$ 两部分，由于 Lorentz 变换保持时间正向不变，因此这两部分不能互换。

绝对未来： P 点在 O 点的上半光锥之内。



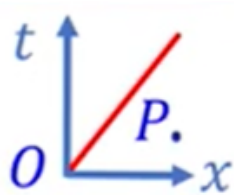
绝对过去： P 点在 O 点的下半光锥之内。



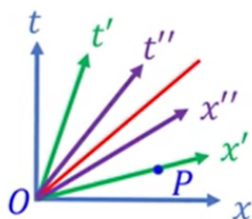
时间和空间的相对性

两类时事件在任何惯性系中都绝对不同时。从时空图上看，某一惯性系 Σ' 的等时线是一系列平行于 x' 轴的直线。而在时空图中， x' 轴的斜率允许的取值范围为 $[-1, 1]$ ，因此 Σ' 的等时线斜率在 $[-1, 1]$ 范围内。而由于 O, P 是类时事件， P 在 O 的光锥之内，直线 OP 的斜率不可能落在 $[-1, 1]$ 的范围内。因此两类时事件绝对不同时。

类空间隔



$$S^2 > 0$$



可以通过 Lorentz 变换使得 O, P 两点在某个惯性系中同时不同地。具体做法是以 OP 为 x' 轴构造坐标系 Σ' 。由于 x' 轴是 $t' = 0$ 线，即 x' 轴上任意一点在 Σ' 系的时间坐标 $t' = 0$ 。因此，在 Σ 系 O, P 是不同时不同地事件，但它们的时空坐标通过 Lorentz 变换变换到 Σ' 系的时空坐标后，在 Σ' 系它们成了同时不同地事件。

两类空事件，先后是相对的，但绝对异地。

2.2 时空关系的绝对分类

取 $P_1 = O = (0, 0, 0, 0), P_2 = P = (t, x, y, z)$

$$S^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

类光间隔 $S^2 = 0$, P 点在光锥上；

类时间隔 $S^2 < 0$, P 点在光锥内；可通过洛伦兹变换使得 O, P 两事件同地不同时。

类时区域包括 $t > 0, t < 0$ 两部分，洛伦兹变换保持时间正向不变。

$$t' = \gamma(t - vx)$$

由于 $t > x, v < 1$, 因此 $t' > 0$ 。

绝对未来： P 点在 O 点的上半光锥之内。

绝对过去： P 点在 O 点的下半光锥之内。

OP 在地面参考系为时空间隔，在飞船系为时间间隔。而间隔不变，因此两时间在不同参考系中的时间差不同。

类空间隔 $S^2 > 0$, P 点在光锥外；可通过洛伦兹变换使得 O, P 两事件同时不同地。

两类空事件，先后相对，异地绝对。

2.3 因果律

两关联事件可用光信号或速度低于光速的信号联系。

实验表明，物质运动的速度不超过光速。

SR保证因果律：两类时和类光事件的先后是绝对的。两类空事件无因果联系。

两类空事件无因果关系。

2.4 同时的相对性和绝对性

两同时同地事件 ($S^2 = 0$, 类光) 在任何惯性系中仍为同时同地事件。同时绝对, 同地也绝对。

$$\Delta t = 0, \quad \Delta x = 0 \implies \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = 0 \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0 \end{cases}$$

两同时不同地事件 $S^2 = \Delta x^2 > 0$, 类空。同时是相对的。

两类空事件的同时和先后都是相对的。

两事件类光, 有因果关系, 同时是绝对的, 先后是绝对的。

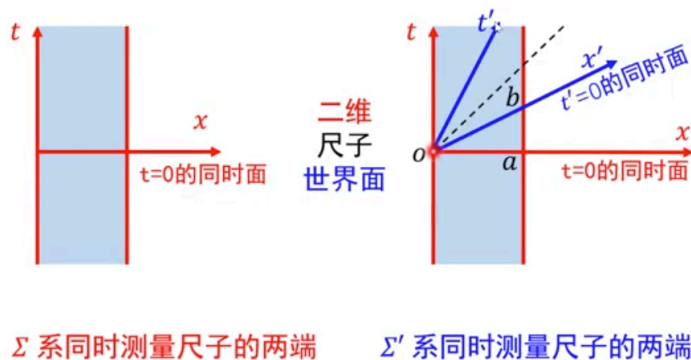
两事件类时, 有因果关系, 无同时, 先后是绝对的。

两事件类空, 因果关系, 同时是相对的, 先后是相对的, 两事件绝对异地。

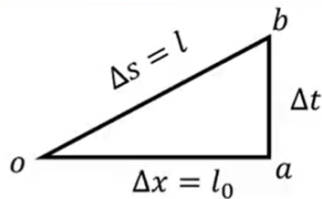
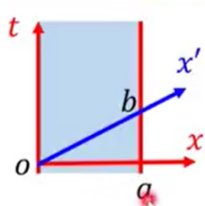
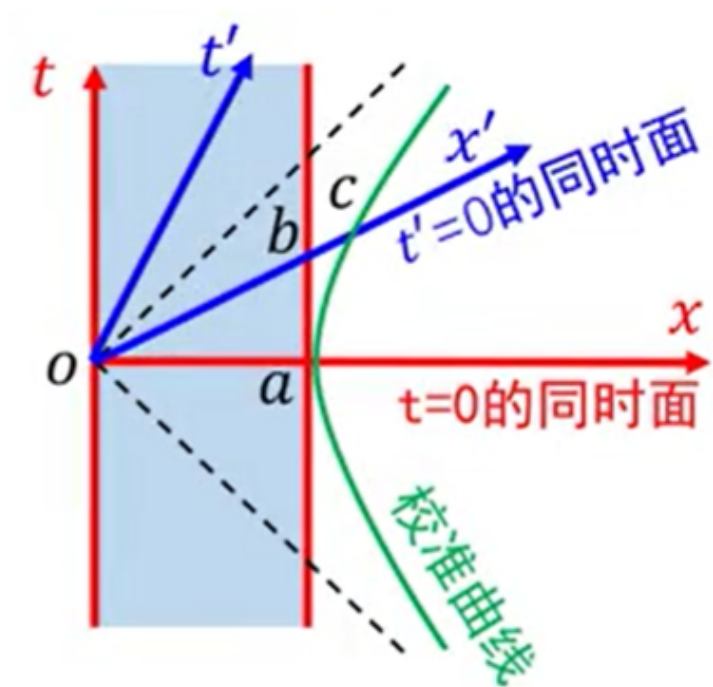
3 典型效应分析

3.1 尺缩效应

尺子在时空图中表现为一个二维世界面。



在某个惯性系中同时测量尺子两端的空间坐标, 则这两个空间坐标的欧氏长度就是该惯性系中尺子的长度。



$l_0 = |oa|$ 是 Σ 系 $t = 0$ 时测的尺长。

$l = |ob|$ 是 Σ' 系 $t' = 0$ 时测的尺长。

利用校准曲线：

$$|oa| = |oc| > |ob|$$

即：

$$l_0 > l$$

静长（固有长度）最长，动尺收缩。

尺子只有一把（其世界面只有一个），但不同惯性系有不同的同时面，导致不同的惯性系测得不同的一维尺子长度。

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$$

$$l^2 = -\Delta t^2 + l_0^2$$

$$x' \text{ 轴方程 } t = vx, \quad t_b = \Delta t = v\Delta x = vl_0$$

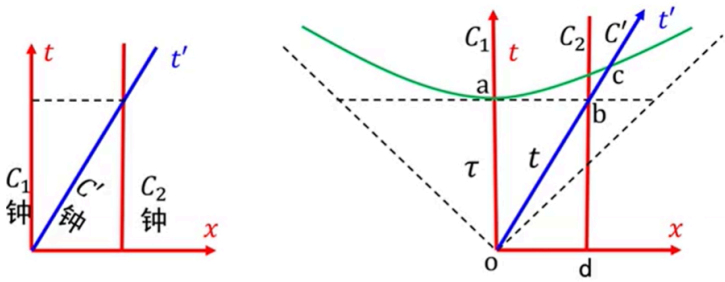
分别在 Σ 系和 Σ' 计算 b 到 o 点的线长，二者应相等：

$$l^2 = -v^2 l_0^2 + l_0^2 = (1 - v^2) l_0^2$$

得到：

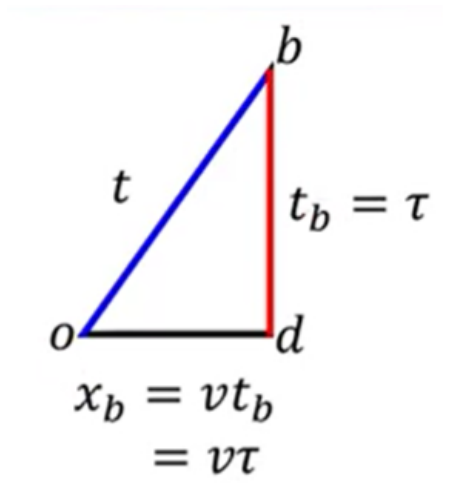
$$l = \sqrt{1 - v^2} l_0 = \frac{l_0}{\gamma}$$

3.2 钟慢效应



$$|db| = |oa| = |oc| > |ob|$$

$$\tau > t$$



t' 轴方程 $x = vt$,

$$x_b = vt_b = \tau$$

对类时间隔

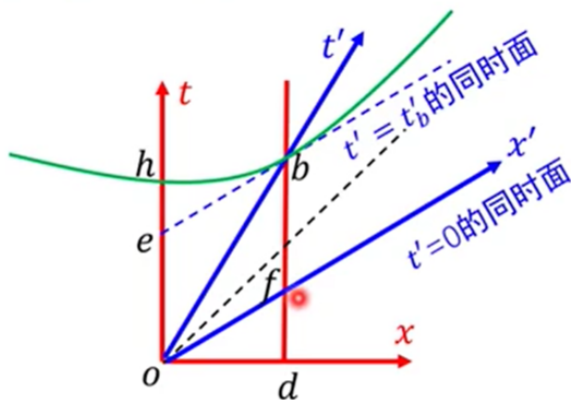
$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 < 0$$

$$-ds^2 = dt^2 - dx^2 > 0$$

即：

$$t^2 = \tau^2 - (v\tau)^2 \implies t^2 = (1 - v^2) \tau^2$$

运动时钟变慢，即 Σ 系认为动钟 C' 变慢。



从 Σ' 系来看, Σ' 系的观者根据同时面 $t' = 0$ 和 $t' = t'_h$, 认为动钟 C_2 较慢:

Σ' 系, 拿 $|ob|$ 比 $|fb|$;

Σ 系, 拿 $|ob|$ 比 $|db|$ 。

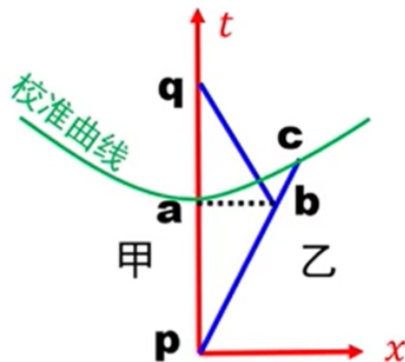
也就是说，在 Σ 系比钟，找 Σ 系的的同时面；在 Σ' 系比钟，找 Σ' 系的的同时面。

站的角度不同，导致结果不一样。

钟慢效应钟，无任何钟的走时率真正变小。

3.3 孪生子效应

时间的比较，就是类时曲线线长的比较。



校准曲线给出：

$$|pa| = |pc| > |pb|$$

$$|qa| > |qb|$$

$$|\overline{paq}| > |\overline{pbq}|$$

因此，重逢时乙比甲年轻。

推论：闵氏时空中两点（类时事件）间的类时测地线是该两点间类时曲线的最长者。

一人惯性运动，一人非惯性运动，二人地位不平等。

惯性运动世界线为测地线，4加速为零；

非惯性运动世界线为非测地线，有4加速。

3.4 车库佯谬

有一辆静长与车库相等的车，以一定速度 u 入库。在司机看来，车库变短，装不下整辆车；在车库看来，车变短，可以装下。那么车库能否装下整辆车？

3.5 悬崖佯谬

汽车以接近光速的速度由公路驶向悬崖。在悬崖看来，汽车缩短，受重力作用进行平抛运动，会坠入悬崖；在汽车司机看来，悬崖高速向自己飞来，悬崖长度缩短至非常短的距离，因此可以飞越悬崖。那么汽车能否飞越悬崖？

3.6 剑鞘装仙剑

一柄仙剑高速飞入剑鞘，最终停在剑鞘里。仙剑和剑鞘内部空间静长相等。在剑鞘看来，仙剑缩短了，装入剑鞘时剑柄上的护手先接触剑鞘；在仙剑看来，剑鞘缩短了，剑尖先接触剑鞘底部。那么哪个部位

受力使仙剑停止运动？