矢量分析

$$ec{a} imes(ec{b} imesec{c})=arepsilon_{ijk}a_i(ec{b} imesec{c})_jec{e}_k \ =arepsilon_{ijk}a_iarepsilon_{lmj}b_lc_mec{e}_k \ =arepsilon_{jik}arepsilon_{jml}a_ib_lc_mec{e}_k \ =(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})a_ib_lc_mec{e}_k \ =a_mb_kc_mec{e}_k-a_lb_lc_kec{e}_k \ (imesec{c}ec{b},ec{c}ec$$

特别地,若 $\vec{a} = \nabla$,有:

注意, $ec{a} imes(ec{b} imesec{c})=(ec{a}\cdotec{c})ec{b}-(ec{a}\cdotec{b})ec{c}$ 只有在 $ec{b},ec{c}
eq
abla$ 时才成立。

例: 求证: $\vec{A} imes (
abla imes \vec{A}) = rac{1}{2}
abla A^2 - (\vec{A} \cdot
abla) \vec{A}$

证明:

$$egin{align}
abla &= ec{e}_x rac{\partial}{\partial x} + ec{e}_y rac{\partial}{\partial y} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z} \
abla &= ec{e}_r rac{\partial}{\partial r} + ec{e}_r rac{1}{r} rac{\partial}{\partial heta} + ec{e}_arphi rac{1}{r \sin heta} rac{\partial}{\partial arphi} \
abla &= ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_arphi rac{1}{
ho} rac{\partial}{\partial arphi} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial ec{e}_arphi} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}
onumber \
onumber \
abla &= ec{e}_arphi rac{\partial}{\partial z}
onumber \

onumber \
onumber \
onumber \
onumber \
onumbe$$

$$\begin{split} \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}(1/r^3)}{\mathrm{d}r} \nabla r \right) \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \\ &= -\frac{3}{r^4} \vec{e}_r \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \\ &= 0, \ \ (r \neq 0) \end{split}$$

电磁现象的普遍规律

电荷和磁场

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \vec{F} 为:

$$ec{F}=rac{QQ'}{4\piarepsilon_0 r^3}ec{r}$$

其中 \vec{r} 是 Q 到 Q' 的矢径, ε_0 是真空电容率(真空介电常量)

电场

电场,记为 \vec{E} ,定义为单位检验电荷在场中所受的力:

$$ec{E}\equivrac{ec{F}}{Q'}$$

其中, \vec{F} 是检验电荷 Q 在场中所受的力。

静止点电荷激发的电场

一个静止点电荷 Q 所激发的电场强度为:

$$ec{E}=rac{Qec{r}}{4\piarepsilon_0 r^3}$$

电荷连续分布情况下的电场

设电荷连续分布于区域 V 内, $ec{x}'$ 处体积元 $\mathrm{d}V'$ 所含电荷:

$$\mathrm{d}Q' = \rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

用 \vec{r} 表示点源到场点的矢径,则场点 \vec{x} 处的电场强度为:

$$ec{E}(ec{x}) = \int\limits_{V} rac{
ho(ec{x}')ec{r}}{4\piarepsilon_0 r^3} \mathrm{d}V'$$

高斯定理

通过闭合曲面 S 的电场强度通量:

$$\oint\limits_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

高斯定理:

$$\oint\limits_{S}ec{E}\cdot\mathrm{d}ec{S}=rac{Q}{arepsilon_{0}}$$

其中,Q 是闭合曲面 S 内的总电荷(包括自由电荷和极化电荷)

证明1:

考虑闭合曲面内的一点电荷 q,其产生的电场记为 $ec{E}$

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S} E \cos \theta dS$$

$$= \oint_{S} \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}r^{2}} \cos \theta dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}} \oint_{S} \frac{\cos \theta dS}{r^{2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}} \oint_{S} d\Omega$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_{0}}$$

若电荷在空间中连续分布,则高斯定理的形式为:

$$\oint\limits_{\partial V} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{S} = rac{1}{arepsilon_0} \int\limits_V
ho \mathrm{d}V$$

证明2:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial V} \left[\int\limits_{V_{\infty}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \right] \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

上面两种形式都是积分形式的高斯定理

数学上有散度定理:

$$\oint\limits_{\partial\Omega}ec{A}\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_{\Omega}(
abla\cdotec{A})\mathrm{d}V$$

于是:

$$\oint\limits_{\partial V} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{S} = \int\limits_{V} (
abla \cdot ec{E}) \mathrm{d}V$$

代入电荷连续分布的积分形式高斯定理,得:

$$\int\limits_{V} (\nabla \cdot \vec{E}) \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V$$

当积分区域 V 的体积趋于无穷小时,

$$\int_{V} (\nabla \cdot \vec{E}) dV = (\nabla \cdot \vec{E}) dV$$
$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V} \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho dV$$

于是得到微分形式的高斯定理:

$$oxed{
abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0}}$$

其中, ρ 是总电荷密度

静电场的旋度

考虑一个点电荷 q 激发的电场 $ec{E}$ 沿任一回路 L 的回路积分:

$$\begin{split} \oint\limits_{L^+} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \oint\limits_{L^+} E \cos\theta \mathrm{d}l \\ &= \oint\limits_{L^+} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{L^+} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint\limits_{L^+} \mathrm{d}(\frac{1}{r}) \\ &= 0 \end{split}$$

斯托克斯公式:

$$\oint\limits_{\partial S} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \oint\limits_{S} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

其中, ∂S 的正方向和 S 的正方向满足右手法则

于是:

$$\oint\limits_{\partial S} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \oint\limits_{S} (
abla imes ec{E}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

而
$$\oint\limits_{t}ec{E}\cdot\mathrm{d}ec{l}=0$$
,于是:

$$\oint\limits_S (
abla imes ec E) \cdot \mathrm{d}ec S = 0$$

当曲面 S 的面积趋于 0,此时的曲面 S 是一个面元 $d\vec{S}$,有:

$$\oint\limits_{S^+} (
abla imes ec{E})\cdot \mathrm{d}ec{S} = (
abla imes ec{E})\cdot \mathrm{d}ec{S}$$

于是得到:

$$abla imes ec{E} = ec{0}$$

上式可以表述为:静电场是无旋的。

电流和磁场

电流密度

$$\mathrm{d}I = ec{J}\cdot\mathrm{d}ec{S}$$

通过任意曲面 S 的总电流 I 为:

$$I = \int\limits_{S} ec{J} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$,电荷守恒定律:

$$\Delta t \oint\limits_{\partial V} ec{J} \cdot \mathrm{d}ec{S} = -\Delta \int\limits_{V}
ho \mathrm{d}V$$

两边同时除以 Δt :

$$\begin{split} \oint\limits_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= -\frac{\Delta \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V}{\Delta t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V \\ &= -\int\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V \end{split}$$

即:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$$

这就是电荷守恒定律的积分形式

散度定理给出:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} (\nabla \cdot \vec{J}) \mathrm{d}V$$

代入电荷守恒定律的积分形式,得:

$$\int\limits_V (
abla \cdot ec{J} + rac{\partial
ho}{\partial t}) \mathrm{d}V = 0$$

当区域 V 的体积趋于 0,得到电荷守恒定律的微分形式(也称为电流连续性方程):

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

特别地,在恒定电流的情况下,一切物理量不随时间改变,于是 $rac{\partial
ho}{\partial t}=0$,结合电流连续性方程得到:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

上式表示恒定电流的连续性。

毕奥-萨伐尔定律

实验指出,一个电流元 $I\mathrm{d}^{ec{l}}$ 在磁场中所受的力可以表示为:

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

其中, $ec{B}$ 称为磁感应强度

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出:设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 \vec{x}' 处的电流密度, \vec{r} 为源点 \vec{x}' 到 场点 \vec{x} 的矢径,则场点 \vec{x} 的磁感应强度为:

$$ec{B}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}') imesec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

其中, μ_0 是真空磁导率,积分遍及电流分布区域。

特别地,若电流集中于细导线上,用 $\mathrm{d} ec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$\vec{J}(\vec{x}')dV' = \vec{J}(\vec{x}')dS_ndl$$

= $J(\vec{x}')dS_nd\vec{l}$

则:

$$egin{aligned} ec{B}(ec{x}) &= rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}') imes ec{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \ &= rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{[ec{J}(ec{x}') \mathrm{d}V'] imes ec{r}}{r^3} \ &= rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{J(ec{x}') \mathrm{d}S_n (\mathrm{d}ec{l} imes ec{r})}{r^3} \ &= rac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} rac{\mathrm{d}ec{l} imes ec{r}}{r^3} \int\limits_S J(ec{x}') S_n \ &= rac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} rac{I \mathrm{d}ec{l} imes ec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ec{B}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} rac{I \mathrm{d} ec{l} imes ec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

磁场的环量和旋度

安培环路定理:

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

其中, ∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则

或者:

$$\oint\limits_{\partial S}ec{B}\cdot\mathrm{d}ec{l}=\mu_0\int\limits_{S}ec{J}\cdot\mathrm{d}ec{S}$$

利用旋度定理:

$$\oint\limits_{\partial S} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{S} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

其中,面元 $\mathrm{d}ec{S}$ 的取向与环路 ∂S 的绕行方向满足右手法则

将上式代入安培环路定理,得::

$$\int\limits_{S} (
abla imes ec{B}) \cdot \mathrm{d}ec{S} = \mu_0 \int\limits_{S} ec{J} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

当曲面的 S 面积趋于 0,得到:

$$abla imes ec{B} = \mu_0 ec{J}$$

磁场的散度

$$\oint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

 \vec{B} 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

磁场旋度和散度公式的证明

由毕奥-萨伐尔定律,有:

$$ec{B} = rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}') imes ec{r}}{r^3} \mathrm{d}V'$$

$$= rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V ec{J}(ec{x}') imes (-\nabla rac{1}{r}) \mathrm{d}V'$$

$$= rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V (\nabla rac{1}{r}) imes ec{J}(ec{x}') \mathrm{d}V'$$

注意到:

$$\begin{split} \nabla \times (\vec{A}\varphi) &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (\vec{A}\varphi)_j \vec{e}_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi \vec{e}_k \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} [\varphi \partial_i A_j + A_j \partial_i \varphi] \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} [\varphi \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i \varphi \\ &= \varphi \cdot \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} A_j (\nabla \varphi)_i \\ &= \varphi \cdot \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} (\nabla \varphi)_i A_j \\ &= \varphi (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \varphi) \times \vec{A} \end{split}$$

令 $\vec{A}=\vec{J}(\vec{x}'), \varphi=rac{1}{r}$,得:

$$abla imes (ec{J}(ec{x}')rac{1}{r}) = rac{1}{r}(
abla imes ec{J}(ec{x}')) + (
abla (rac{1}{r})) imes ec{J}(ec{x}')$$

注意到,abla 与 $ec{x}$ 有关,而与 $ec{x}'$ 无关,即 $abla imes ec{J}(ec{x}') = ec{0}$,于是: :

$$abla imes (ec{J}(ec{x}')rac{1}{r}) = (
abla rac{1}{r}) imes ec{J}(ec{x}')$$

将上式代入毕奥-萨伐尔定律,接着写:

$$\begin{split} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V (\nabla \frac{1}{r}) \times \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \nabla \times (\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r}) \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} \mathrm{d}V' \\ &\equiv \nabla \times \vec{A} \end{split}$$

其中,

$$ec{A} \equiv rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')}{r} \mathrm{d}V'$$

于是:

$$abla \cdot \vec{B} =
abla \cdot (
abla imes \vec{A}) = 0$$

其中用到了下面的结论:

$$egin{aligned}
abla \cdot (
abla imes ec{A}) &= \partial_k (
abla imes ec{A})_k \ &= \partial_k arepsilon_{ijk} \partial_i A_j \ &= arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_k A_j \ &= -arepsilon_{kji} \partial_i \partial_k A_j \ &= -arepsilon_{kji} \partial_i \partial_k A_j \ &= -arepsilon_{iik} \partial_k \partial_i A_j \end{aligned}$$

$$arepsilon_{ijk}\partial_k\partial_iA_j=-arepsilon_{ijk}\partial_k\partial_iA_j\Longrightarrowarepsilon_{ijk}\partial_k\partial_iA_j=0\Longrightarrow
abla\cdot(
abla ide ec A)=0$$

再计算 $ec{B}$ 的旋度

$$egin{aligned}
abla imes ec{B} &=
abla imes (
abla imes ec{A}) \ &=
abla (
abla \cdot ec{A}) -
abla^2 ec{A} \end{aligned}$$

先计算 $abla \cdot \vec{A}$

$$\begin{split} \nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} \mathrm{d}V' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} \right] \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot (-\nabla' \frac{1}{r}) \mathrm{d}V' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} \mathrm{d}V' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla' \cdot (\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r}) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') \right] \mathrm{d}V' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r} \right] \mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V' \end{split}$$

右边第一项可转化为面积分,积分区域 V 包含了所有电流,没有电流通过 V 的边界,因此这面积分为零;右边第二项,由恒定电流连续性有 $abla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')=0$,这项也为零,于是:

$$abla \cdot \vec{A} = 0$$

再计算 $\nabla^2 \vec{A}$:

$$\nabla^{2}\vec{A} = \nabla^{2} \left[\frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV' \right]$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \nabla^{2} \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV'$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \vec{J}(\vec{x}') \nabla^{2} \frac{1}{r} dV'$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{r}) dV'$$

$$= \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot (-\frac{\vec{r}}{r^{3}}) dV'$$

$$= -\frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{V} \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^{3}} dV'$$

最后

$$abla^2 ec{A} = -\mu_0 ec{J}$$

于是:

$$abla imes ec{B} = \mu_0 ec{J}$$

麦克斯韦方程组

电磁感应定律

$$\oint\limits_{L} ec{E} \cdot \mathrm{d} ec{l} = - \int\limits_{S} rac{\partial ec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d} ec{S}$$
 $abla imes ec{E} = - rac{\partial ec{B}}{\partial t}$

感应电场是有旋场。

位移电流

之前给出了电流激发磁场的规律式:

$$abla imes ec{B} = \mu_0 ec{J}$$

两边同时取散度,并注意到任意矢量场的旋度的散度为零,于是得到:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

然而, 电荷守恒定律给出:

$$abla \cdot \vec{J} + \frac{\partial
ho}{\partial t} = 0$$

即:

$$abla \cdot ec{J} = -rac{\partial
ho}{\partial t}$$

电荷守恒定律告诉我们,在非恒定情况下,电流密度的散度不为零。可见,在非恒定情况下, $abla imes ec{B} = \mu_0 ec{J}$ 与电荷守恒定律矛盾。

电荷守恒定律是更基本的规律,出现矛盾只可能是公式 $abla imesec{B}=\mu_0ec{J}$ 不适用于非恒定情况,需要改进。

注意到,在非恒定情况下,一样有:

$$abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0}$$

结合电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

消去 ρ 得:

$$egin{aligned}
abla \cdot (ec{J} + arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t}) &= 0 \ \ ec{J}_D &= arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

真空中麦克斯韦方程组

$$egin{cases}
abla \cdot ec{E} &= rac{
ho}{arepsilon_0} \
abla \cdot ec{B} &= 0 \
abla imes ec{E} &= -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{B} &= \mu_0 ec{J} + \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

洛伦兹力公式

$$ec{F} = qec{E} + qec{v} imes ec{B}$$

介质的电磁性质

有外场时,介质中的带电粒子受场的作用,正负电荷发生相对位移,有极分子的取向以及分子电流的取向也呈现一定的规则性,这就是介质的极化和磁化。由于介质的极化和磁化,介质的内部及表面就出现宏观的电荷分布,这些电荷、电流称为束缚电荷和磁化电流。

介质的极化

电极化强度,记为 \vec{P} ,用于描述宏观电偶极矩分布,定义为:

$$ec{P} \equiv \lim_{\Delta V
ightarrow 0^+} rac{\sum\limits_i ec{p}_i}{\Delta V}$$

其中, $ec{p}_i$ 表示 ΔV 内 第 i 个分子的电偶极矩,求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

用简化模型描述介质中的分子。设每个分子由相距为 \vec{l} 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成,则分子电偶极矩为 $\vec{p}=q\vec{l}$ 。设单位体积分子数为 n,则穿出 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的正电荷为:

$$q n \vec{l} \cdot \mathrm{d} \vec{S} = n \vec{p} \cdot \mathrm{d} \vec{S} = \vec{P} \cdot \mathrm{d} \vec{S}$$

V 内通过截面 ∂V 穿出的正电荷为:

$$\oint\limits_{\partial V} \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由电荷守恒,V 内净余的负电荷为:

$$-\oint\limits_{\partial V}ec{P}\cdot\mathrm{d}ec{S}$$

用 $\rho_{\rm P}$ 表示束缚电荷密度,有:

$$\int\limits_V
ho_P \mathrm{d}V = - \oint\limits_{\partial V} ec{P} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

利用高斯公式,得微分形式:

$$ho_{
m P} = -
abla \cdot ec{P}$$

上式适用于**电介质内部**。

对于两电介质的分界面,可以认为束缚电荷分布在交界面上,可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷,用 σ_{P} 表示束缚电荷面密度,用 $\vec{n}_{1 \to 2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量,则:

$$\sigma_{
m P} {
m d}S = -igg[ec{P}_1 \cdot (-ec{n}_{1
ightarrow 2}) {
m d}S + ec{P}_2 \cdot ec{n}_{1
ightarrow 2} {
m d}Sigg]$$

得到:

$$\sigma_{
m P} = -ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{P}_2 - ec{P}_1)$$

将电荷密度分为自由电荷密度 $ho_{
m f}$ 和束缚电荷密度 $ho_{
m P}$,介质内部:

$$abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0} \Longrightarrow arepsilon_0
abla \cdot ec{E} =
ho_{
m f} +
ho_{
m P}$$

其中, $ho =
ho_{
m f} +
ho_{
m P}$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_{\rm P} = -\nabla \cdot \vec{P}$ 消去 $\rho_{\rm P}$,得:

$$abla \cdot (arepsilon_0 ec{E} + ec{P}) =
ho_{
m f}$$

引入电位移矢量 \vec{D} ,定义为:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则:

$$abla \cdot ec{D} =
ho_{ ext{f}}$$

这就是介质中的高斯定理(微分形式),其积分形式为:

$$\oint\limits_{\partial V} ec{D} \cdot \mathrm{d}ec{S} = \iiint\limits_{V}
ho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V$$

对于一般各向同性线性介质,极化强度 \vec{P} 和 \vec{E} 之间有简单的线性关系:

$$ec{P}=\chi_earepsilon_0ec{E}$$

其中, χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质:

$$egin{aligned} ec{D} &\equiv arepsilon_0 ec{E} + ec{P} \ &= arepsilon_0 ec{E} + \chi_e arepsilon_0 ec{E} \ &= (1 + \chi_e) arepsilon_0 ec{E} \end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$,介质的电容率 $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$,上式可写为:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

介质的磁化

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈,线圈面积矢量记为 \vec{a} ,分子电流的磁矩 \vec{m} 为:

$$\vec{m} = i\vec{a}$$

磁化强度,记为 \vec{M} ,定义为:

$$ec{M} \equiv \lim_{\Delta V
ightarrow 0} rac{\sum\limits_{i} ec{m}_{i}}{\Delta V}$$

对于介质内部的一个曲面 S,其边界线为 ∂S ,通过 S 的总磁化电流 I_{M} 等于边界线 ∂S 串着的分子数目乘每个分子电流 i

单位体积分子数记为 n,则边界线 ∂S 串着的分子电流数目为:

$$\oint_I n \vec{a} \cdot \mathrm{d} \vec{l}$$

总磁化电流为:

$$I_{ ext{M}} = i \oint\limits_{I} n ec{a} \cdot ext{d} ec{l} = \oint\limits_{I} n ec{m} \cdot ext{d} ec{l} = \oint\limits_{I} ec{M} \cdot ext{d} ec{l}$$

用 $ec{J}_{ ext{M}}$ 表示磁化电流密度,有:

$$\int\limits_{S}ec{J}_{
m M}\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_{\partial S}ec{M}\cdot\mathrm{d}ec{l}$$

微分形式为:

$$ec{J}_{
m M} =
abla imes ec{M}$$

当电场变化,介质的极化强度 \vec{P} 发生变化,这就会产生极化电流。设 ΔV 内每个带电粒子的位矢为 \vec{x}_i ,电荷为 e_i ,则:

$$ec{P} = \lim_{\Delta V o 0^+} rac{\sum\limits_i e_i ec{x}_i}{\Delta V} \ rac{\partial ec{P}}{\partial t} = \lim_{\Delta V o 0^+} rac{\sum\limits_i e_i ec{v}_i}{\Delta V} = ec{J}_{ ext{P}}$$

 $ec{J}_{
m P}$ 称为极化电流密度

考虑自由电流密度 $ec{J}_{
m f}$ 和介质内的诱导电流密度 $ec{J}_{
m M}+ec{J}_{
m P}$,麦克斯韦方程应写为:

$$rac{1}{\mu_0}
abla imes ec{B} = ec{J_{
m f}} + ec{J}_{
m M} + ec{J}_{
m P} + arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t}$$

磁场强度,记为 \vec{H} ,定义为:

$$ec{H}\equivrac{ec{B}}{\mu_0}-ec{M}$$

则:

$$abla imes ec{H} = ec{J_{
m f}} + rac{\partial ec{D}}{\partial t}$$

对于各向同性非铁磁物质,

$$ec{M}=\chi_{
m M}ec{H}$$

 $\chi_{
m M}$ 称为磁化率

$$ec{B} = \mu_0 (ec{H} + ec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_{
m M}) ec{H} = \mu_0 \mu_r ec{H} = \mu ec{H}$$

其中, $\mu_r \equiv 1 + \chi_{
m M}$ 称为相对磁导率, $\mu \equiv \mu_r \mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{H} = ec{J}_{
m f} + rac{\partial ec{D}}{\partial t} \
abla \cdot ec{D} =
ho_{
m f} \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{S} \vec{J}_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial S} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l} &= -rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} \ \oint\limits_{\partial S} ec{H} \cdot \mathrm{d}ec{l} &= I_{\mathrm{f}} + rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} ec{D} \cdot \mathrm{d}ec{S} \ \oint\limits_{\partial V} ec{D} \cdot \mathrm{d}ec{S} &= Q_{\mathrm{f}} \ \oint\limits_{\partial V} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} &= 0 \ rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} &= 0 \end{aligned}$$

电磁场的边值关系

法向分量的跃变

$$egin{split} ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{E}_2 - ec{E}_1) &= rac{\sigma_{
m f} + \sigma_{
m P}}{arepsilon_0} \ ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{D}_2 - ec{D}_1) &= \sigma_{
m f} \ ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{B}_2 - ec{B}_1) &= 0 \ D_{2n} - D_{1n} &= \sigma_{
m f} \ B_{2n} &= B_{1n} \end{split}$$

切向分量的跃变

$$egin{aligned} ec{n}_{1
ightarrow2} imes (ec{H}_2 - ec{H}_1) &= ec{lpha}_{\mathrm{f}} \ ec{n}_{1
ightarrow2} imes (ec{E}_2 - ec{E}_1) &= ec{0} \end{aligned}$$

$$egin{cases} ec{n}_{1 o 2} imes (ec{E}_2-ec{E}_1) = ec{0} \ ec{n}_{1 o 2} imes (ec{H}_2-ec{H}_1) = ec{lpha}_{
m f} \ ec{n}_{1 o 2}\cdot (ec{D}_2-ec{D}_1) = \sigma_{
m f} \ ec{n}_{1 o 2}\cdot (ec{B}_2-ec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

电磁场的能量和能流

场的**能量密度**,记为w,定义为单位体积内场的能量,是空间位置 \vec{x} 和时间t的函数。

场的**能流密度**,记为 \vec{S} ,其方向定义为能量传输方向,其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 \vec{f} 表示场对电荷作用力密度, \vec{v} 表示电荷运动速度

能量守恒定律要求:

$$-\oint\limits_{\partial V}ec{S}\cdot\mathrm{d}ec{\sigma}=\int\limits_{V}ec{f}\cdotec{v}\mathrm{d}V+rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V}w\mathrm{d}V$$

相应的微分形式为:

$$abla \cdot ec{S} + rac{\partial w}{\partial t} = -ec{f} \cdot ec{v}$$

取 V 为全空间,则:

$$\int\limits_{\infty} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{\infty} w dV$$

上式说明,场对电荷所做的总功率等于场的总能量的减小率,因此场和电荷的总能量守恒。

$$\begin{split} \vec{f} \cdot \vec{v} &= (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \\ &= \vec{J} \cdot \vec{E} \\ \\ \vec{J} &= \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \\ \vec{J} \cdot \vec{E} &= \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \\ \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{split}$$

于是:

$$ec{f} \cdot ec{v} = ec{J} \cdot ec{E} = -
abla \cdot (ec{E} imes ec{H}) - ec{E} \cdot rac{\partial ec{D}}{\partial t} - ec{H} \cdot rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$

代入能量守恒式,得:

$$abla \cdot ec{S} + rac{\partial w}{\partial t} =
abla \cdot (ec{E} imes ec{H}) + ec{E} \cdot rac{\partial ec{D}}{\partial t} + ec{H} \cdot rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$

对比可得:

$$ec{S} = ec{E} imes ec{H}$$

$$rac{\partial w}{\partial t} = ec{E} \cdot rac{\partial ec{D}}{\partial t} + ec{H} \cdot rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$

真空:

$$ec{H}=rac{1}{\mu_0}ec{B},\;\;ec{D}=arepsilon_0ec{E} \ ec{S}=ec{E} imesec{H}=rac{1}{\mu_0}ec{E} imesec{B} \ w=rac{1}{2}(arepsilon_0E^2+rac{1}{\mu_0}B^2)$$

介质中:

$$\delta w = ec{E} \cdot \delta ec{D} + ec{H} \cdot \delta ec{B}$$

介质内(线性介质)电磁场能量密度:

$$w=rac{1}{2}(ec{E}\cdotec{D}+ec{H}\cdotec{B})$$

电磁能量传输

静电场

静电场的标势及其微分方程

静止情况下,电场与磁场无关:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$abla \cdot ec{D} =
ho_{
m f}$$

其中, $ec{E}$ 是静电场, $ho_{
m f}$ 是自由电荷体密度

静电场无旋,且自由电荷是电位移矢量的源

因为静电场无旋,于是可以引入一个标势来描述静电场。

无旋性的积分表达式为:

$$\oint\limits_{\partial S}ec{E}\cdot\mathrm{d}ec{l}=0$$

设 C_1, C_2 是连结空间中两点 P_1, P_2 的不同路径,则 C_1, C_2 构成闭合回路。

这种情形下,静电场无旋性的积分表达式为:

$$\int\limits_{C_1} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{C_2} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l}$$

这就是说,在静电场中,把电荷从 P_1 点移动到 P_2 点过程中,静电场对电荷所做的功与路径无关,只与两端点有关。 把**单位**正电荷从 P_1 移动到 P_2 ,静电场所做功为:

$$\int_{P_1}^{P_2} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l}$$

上式定义为 P_1 与 P_2 点的电势差

$$arphi(P_2)-arphi(P_1)=-\int_{P_1}^{P_2}ec{E}\cdot\mathrm{d}ec{l}$$

微分形式:

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

由于:

$$\mathrm{d} \varphi = (\nabla \varphi) \cdot \mathrm{d} \vec{l}$$

比较可得:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

选取无穷远点作为参考点,规定参考点的电势为零,即 $\varphi(\infty)=0$,则:

$$\varphi(P) = \int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

点电荷电势:

$$arphi(P) = rac{Q}{4\piarepsilon_0 r}$$

$$arphi(P) = \sum_i rac{Q_i}{4\piarepsilon_0 r_i}$$

其中, r_i 是点电荷 Q_i 到场点 P 的距离

电荷连续分布:

$$arphi(ec{x}) = \int\limits_{V} rac{
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'}{4\pi arepsilon_0 r}$$

在**均匀各向同性线性介质**中, $ec{D}=arepsilonec{E}$,

$$abla \cdot ec{D} =
ho_{
m f} \Longrightarrow
abla \cdot ec{E} = rac{
ho_{
m f}}{arepsilon} \Longrightarrow
abla^2 arphi = -rac{
ho_{
m f}}{arepsilon}$$

其中, ρ 是自由电荷密度。

电场边值关系:

$$egin{aligned} ec{n}_{1
ightarrow2} imes (ec{E}_2 - ec{E}_1) &= ec{0} \ ec{n}_{1
ightarrow2} \cdot (ec{D}_2 - ec{D}_1) &= \sigma_{
m f} \end{aligned}$$

电场边值关系可化为电势边值关系:

$$egin{align*} arphi_1igg|_{\partial\Omega} &= arphi_2igg|_{\partial\Omega} \ &arepsilon_1rac{\partialarphi_1}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} - arepsilon_2rac{\partialarphi_2}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} &= \sigma_{
m f} \ \end{aligned}$$

其中, $\partial\Omega$ 是两电介质界面; $\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\right|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数, $\sigma_{\rm f}$ 是界面上自由电荷面密度。

证明下电势边值关系的第二条:

由

$$ec{n}_{1
ightarrow2}\cdot(ec{D}_2-ec{D}_1)=\sigma_{
m f}$$

可得:

$$egin{aligned} \sigma_{
m f} &= ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{D}_2 - ec{D}_1) \ &= ec{n}_{1 o 2} \cdot (arepsilon_2 ec{E}_2 - arepsilon_1 ec{E}_1) \ &= ec{n}_{1 o 2} \cdot (arepsilon_1
abla arphi_2 \left|_{\partial \Omega} - arepsilon_2
abla arphi_2
ight|_{\partial \Omega} \ &= arepsilon_1 rac{\partial arphi_1}{\partial n_{1 o 2}} \left|_{\partial \Omega} - arepsilon_2 rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1 o 2}}
ight|_{\partial \Omega} \end{aligned}$$

其中,用到了如下结论:

$$abla\psi\cdotec{n}_l=rac{\partial\psi}{\partial n_l}$$

其中, $ec{n}_l$ 是射线 l 方向上的单位向量, $\dfrac{\partial \psi}{\partial n_l}$ 是标量场 ψ 在射线 l 方向上的方向导数。

这个结论的证明如下:

由梯度的定义:

$$\nabla \psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi$$

令 $d\vec{r} = \vec{n}_l dr$, 得:

$$\nabla \psi \cdot \vec{n}_l \mathrm{d}r = \mathrm{d}\psi$$

两边同时除以 $\mathrm{d}r$ 得:

$$abla\psi\cdotec{n}_l=rac{\partial\psi}{\partial n_l}$$

静电场的能量

第1章给出,在线性介质中静电场能量为:

$$W = rac{1}{2}\int\limits_{\infty} ec{E} \cdot ec{D} \mathrm{d}V$$

其中, $w=rac{1}{2}ec{E}\cdotec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下,W 可由电势和电荷分布给出:

$$W=rac{1}{2}\int\limits_{V}
ho_{\mathrm{f}}arphi\mathrm{d}V$$

注意,不能把 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质,电容率为 ε ,则:

$$W = rac{1}{8\piarepsilon}\int\mathrm{d}V\int\mathrm{d}V'rac{
ho_\mathrm{f}(ec{x})
ho_\mathrm{f}(ec{x'})}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $ho_{\mathrm{f}}(ec{x})$,在 V 的边界 ∂V 给定:

(1)电势
$$arphi$$
 ∂V

或

(2) 电势的外法线法向 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_{\partial V}$

则 V 内电场唯一确定。

证明:

无导体时的唯一性定理

设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件,令:

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

由:

$$abla^2 arphi' = -rac{
ho}{arepsilon_i}, \ \
abla^2 arphi'' = -rac{
ho}{arepsilon_i}$$

于是在每个均与区域内有:

$$abla^2 arphi = 0$$

在两均匀区域界面上有:

$$arphi_i = arphi_j$$
 $arepsilon_i (rac{\partial arphi}{\partial n})_i = arepsilon_j (rac{\partial arphi}{\partial n})_j$

在整个区域 V 的边界 S 上有:

$$\left|arphi
ight|_{S}\equivarphi'
ight|_{S}-arphi''
ight|_{S}=0$$

或

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S} \equiv \left. \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right|_{S} - \left. \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \right|_{S} = 0$$

考虑第 i 个均匀区域 V_i 的界面 S_i 上的积分:

$$\oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} = \int_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i \varphi \nabla \varphi) dV$$

$$= \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV + \int_{V_i} \varphi \varepsilon_i \nabla^2 \varphi dV$$

$$= \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV$$

对所有分区域 V_i 求和:

$$\sum_i \oint\limits_{S_i} arepsilon_i arphi
abla arphi \cdot \mathrm{d}ec{S} = \sum_i \int\limits_{V_i} arepsilon_i (
abla arphi)^2 \mathrm{d}V$$

上式左边应为零,于是右边也为零:

$$\sum_i\int\limits_{V_i}arepsilon_i(
ablaarphi)^2\mathrm{d}V=0$$

于是:

$$\nabla \varphi = 0$$

于是:

$$\varphi = \mathrm{const}$$

也就是说, φ' 和 φ'' 最多相差一个常数

有导体的时的唯一性定理

拉普拉斯方程 分离变量法

拉普拉斯方程 $abla^2 \varphi = 0$ 在球坐标中的通解为:

$$arphi(R, heta,arphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} igg(a_{nm} R^n + rac{b_{nm}}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n^m(\cos heta) \cos m\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} igg(c_{nm} R^n + rac{d_{nm}}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n^m(\cos heta) \sin m\phi$$

若问题中具有对称轴,取此轴为极轴(z轴),则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ ,此情形下通解为:

$$arphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}}
ight) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

其中, P_n 为勒让德函数, a_n, b_n 是待定系数,由边界条件确定。

例题

例2.6:电容率为 arepsilon 的介质球置于均匀外电场 $ec{E}_0$ 中,求电势

例2.7:半径为 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 $ec{E}_0$ 中,求电势、导体上的电荷面密度

镜像法

若求解电场的区域内有自由电荷,则必须解泊松方程。

若区域内只有一个或几个点电荷,区域边界是导体或介质界面,则可用镜像法求解。

例 2.9:接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q,求空间中的电场。

解:

设无限大接地平面导体板的位置为 z=0,点电荷 Q 处在 z>0 的区域。

要求解 z>0 空间的电场,则镜像点电荷只能放在 z<0 空间,否则会改变泊松方程的源,唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 (0,0,a),其中 a>0

此问题的边界条件为:

$$\left. \varphi \right|_{z=0} = 0$$

也就是说 z=0 平面是等相面,z=0 处电场强度垂直于 z=0 平面。

考虑在 (0,0,-a) 处再放置一个带电量 Q'=-Q 的点电荷,则两个对称的点电荷在 z=0 处产生的场强处处于 z=0 平面垂直。

于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是:

$$arphi(x,y,z) = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg[rac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - rac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}igg]$$

例2.10:真空中有一半径为 R_0 的接地导体球,距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q,求空间各点的电势

$$arphi = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg(rac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos heta}} - rac{R_0Q/a}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos heta}}igg)$$

例2.11:真空中有一半径为 R_0 的**不接地**而带电荷 Q_0 的导体球,距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q,求球外电势,并求电荷 Q 所受的力

$$arphi = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg(rac{Q}{r} - rac{R_0Q}{ar'} + rac{Q_0 + R_0Q/a}{R}igg) \ 4\piarepsilon_0F = rac{QQ_0}{a^2} - rac{Q^2R_0^3(2a^2 - R_0^2)}{a^3(a^2 - R_0^2)^2}$$

格林函数

格林函数

一个处于 \vec{x}' 点上的**单位**点电荷所激发的电势 $\psi(\vec{x})$ 满足泊松方程:

$$abla^2 \psi(ec{x}) = -rac{1}{arepsilon_0} \delta(ec{x}-ec{x}')$$

无界空间的格林函数

在 \vec{x}' 上一个单位点电荷在无界空间中激发的电势为:

$$arphi(ec{x}) = rac{1}{4\piarepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

无界空间的格林函数为:

$$G(ec{x}',ec{x}') = rac{1}{4\piarepsilon_0} rac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

上半空间的格林函数

上半空间的格林函数为:

$$G(ec{x},ec{x}') = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg[rac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - rac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}igg]$$

球外空间的格林函数

$$G(ec{x},ec{x}') = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg[rac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\coslpha}} - rac{1}{\sqrt{(rac{RR'}{R_0})^2+R_0^2-2RR'\coslpha}}igg]$$

电多极矩

$$arphi(ec{x}) = \int\limits_{V} rac{
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'}{4\pi arepsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l,这种情况下,可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式,由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点,用 R 表示坐标原点到场点的距离,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
 $r = |ec{x} - ec{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$

将 $f(\vec{x}-\vec{x}')$ 看作 \vec{x}' 的函数(即可以看作 x_1',x_2',x_3' 的函数),在 $\vec{x}'=\vec{0}$ 处展开:

$$\begin{split} f(\vec{x} - \vec{x}') &= f(\vec{x} - \vec{x}') \bigg|_{\vec{x}' = \vec{0}} + \sum_{i} x'_{i} \frac{\partial f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial x'_{i}} \bigg|_{\vec{x}' = \vec{0}} + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j} x'_{i} x'_{j} \frac{\partial^{2} f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial x'_{i} \partial x'_{j}} \bigg|_{\vec{x}' = \vec{0}} + \cdots \\ &= f(\vec{x}) + \sum_{i} x'_{i} \frac{\partial f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial (x_{i} - x'_{i})} \cdot \frac{\mathrm{d}(x_{i} - x'_{i})}{\mathrm{d}x'_{i}} \bigg|_{\vec{x}' = \vec{0}} + \frac{1}{2} \\ &= f(\vec{x}) - \sum_{i} x'_{i} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_{i}} + \frac{1}{2} \\ &= f(\vec{x}) - \vec{x}' \cdot \nabla f(\vec{x}) + \frac{1}{2} \end{split}$$

$$egin{aligned} f(ec{x}-ec{x}') &= f(ec{x}) + \sum_{i=1}^3 x_i' rac{\partial}{\partial x_i'} f(ec{x}) + rac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' rac{\partial^2}{\partial x_i' \partial x_j'} + \cdots \ &= f(ec{x}) + ec{x}' \cdot
abla' f(ec{x}) + rac{1}{2!} (ec{x}' \cdot
abla')^2 f(ec{x}) + \cdots \ &= f(ec{x}) - ec{x}' \cdot
abla f(ec{x}) + rac{1}{2!} (ec{x}' \cdot
abla)^2 f(ec{x}) + \cdots \end{aligned}$$

 $\Rightarrow f(ec{x}-ec{x}')=rac{1}{|ec{x}-ec{x}'|}=rac{1}{r}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \cdots$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] dV'$$

令:

$$egin{aligned} Q &= \int\limits_V
ho(ec{x}') \mathrm{d}V' \ ec{p} &= \int\limits_V ec{x}'
ho(ec{x}') \mathrm{d}V' \ \\ \mathscr{D}_{ij} &= \int\limits_V 3x_i' x_j'
ho(ec{x}') \mathrm{d}V' \end{aligned}$$

则电势可写为:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \vec{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} + \cdots \right)$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

零级近似 $\varphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷,其激发的电势就是零级近似。

$$arphi^{(1)} = -rac{1}{4\piarepsilon_0}ec{p}\cdot
ablarac{1}{R} = rac{ec{p}\cdotec{R}}{4\piarepsilon_0R^3}, \ \ ec{p} = \int\limits_V ec{x}'
ho(ec{x}')\mathrm{d}V'$$

一级近似是电偶极矩 \vec{p} 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6} \vec{\hat{\mathscr{D}}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathscr{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial x_j} \frac{1}{R}, \quad \vec{\hat{\mathscr{D}}} = \int\limits_V 3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V'$$

电四极矩张量 \mathcal{D}_{ij} 是对称张量,它有 6 个分量 \mathcal{D}_{11} , \mathcal{D}_{22} , \mathcal{D}_{33} , $\mathcal{D}_{12}=\mathcal{D}_{21}$, $\mathcal{D}_{23}=\mathcal{D}_{32}$, $\mathcal{D}_{31}=\mathcal{D}_{13}$, 只有 5 个独立分量。

静磁场

矢势及其微分方程

恒定电流产生的磁场:

$$abla imes ec{H} = ec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

由矢量分析,从 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入一个矢量 \vec{A}

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$

 \vec{A} 称为磁场的矢势。

注意到:

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial S} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} &= \int\limits_{S} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S} \ &= \int\limits_{S} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} \end{aligned}$$

由矢势 \vec{A} 可以唯一确定 \vec{B} ,反过来则不行,这是因为:

$$abla imes (ec{A} +
abla \psi) =
abla imes ec{A}$$

若 \vec{A} 满足 $\vec{B}=
abla imes \vec{A}$,则 $\vec{A}+
abla\psi$ 也满足 $\vec{B}=
abla imes (\vec{A}+
abla\psi)$,因此由磁场 \vec{B} 无法唯一确定 \vec{A} 具有任意性,因此可以对它加上一定限制,如:

$$abla \cdot \vec{A} = 0$$

称为库仑规范。

矢势微分方程

线性均匀介质:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$
 $abla imes ec{H} = ec{J}_{
m f}$ $abla imes
abla imes (
abla imes ec{A}) = \mu ec{J}_{
m f}$ $abla imes (
abla imes ec{A}) =
abla (
abla imes ec{A}) -
abla^2 ec{A}$

结合库仑规范:

$$abla \cdot \vec{A} = 0$$

得到库仑规范下矢势微分方程:

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为:

$$abla^2 A_i = -\mu J_{\mathrm{f}i}$$

库仑规范下的矢势 \vec{A} 是无源有旋场。

矢势的形式解

电势(均匀线性介质中):

$$abla^2 arphi = -rac{
ho_{
m f}}{arepsilon} \Longrightarrow arphi = rac{1}{4\piarepsilon} \int\limits_V rac{
ho(ec{x}') {
m d} V'}{r}$$

上式可用格林函数推导。 $abla^2$ 算子的基本解为: $G_0(ec x, ec x') = -rac{1}{4\pi}rac{1}{|ec x - ec x'|}$

类似应有:

$$\nabla^{2}\vec{A} = -\mu \vec{J}_{f} \Longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V} \frac{\vec{J}_{f}(\vec{x}')}{r} dV'$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_{V} \frac{\vec{J}_{f}(\vec{x}') dV}{r}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V} \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}_{f}(\vec{x}') dV'$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V} \frac{\vec{J}_{f} \times \vec{r}}{r^{3}} dV'$$

矢势边值关系

$$egin{aligned} ec{n}_{1 o 2}\cdot(ec{B}_2-ec{B}_1) &= 0 \ ec{n}_{1 o 2} imes(ec{H}_2-ec{H}_1) &= ec{lpha} \end{aligned}$$

对于非铁磁性均匀介质,

$$egin{split} ec{e}_n\cdot(
abla imesec{A}_2-
abla imesec{A}_1)&=0 \ \ ec{e}_n imes(rac{1}{\mu_2}
abla imesec{A}_2-rac{1}{\mu_1}
abla imesec{A}_1)&=ec{lpha} \end{split}$$

在两介质分界面上(采用库仑规范)

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

静磁场情况下,可以用矢势和电流表示总能量。

$$egin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{H} &= (
abla imes ec{A}) \cdot ec{H} \ &=
abla \cdot (ec{A} imes ec{H}) + ec{A} \cdot (
abla imes ec{H}) \ &=
abla \cdot (ec{A} imes ec{H}) + ec{A} \cdot ec{J} \end{aligned}$$

静磁场中,

$$W = rac{1}{2} \int ec{B} \cdot ec{H} \mathrm{d}V \ = rac{1}{2} \int ec{A} \cdot ec{J} \mathrm{d}V$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义,且不能把 $rac{1}{2}ec{A}\cdotec{J}$ 看作能量密度。

上式中,矢势 \vec{A} 是电流分布 \vec{J} 本身激发的。

若要计算某电流分布 \vec{J} 在给定外磁场中的相互作用能,以 $\vec{A}_{\rm e}$ 表示外磁场的矢势, $\vec{J}_{\rm e}$ 表示该外磁场的电流分布,则总电流分布为 $\vec{J}+\vec{J}_{\rm e}$,总矢势为 $\vec{A}+\vec{A}_{\rm e}$,磁场总能量为:

$$W = rac{1}{2} \int (ec{J} + ec{J}_{
m e}) \cdot (ec{A} + ec{A}_{
m e}) {
m d}V$$

此式减去 $ec{J}$ 和 $ec{J_{\mathrm{e}}}$ 单独存在时的能量后,就得到电流 $ec{J}$ 在外场中的相互作用能:

$$W_{
m i} = rac{1}{2} \int (ec{J} \cdot ec{A}_{
m e} + ec{J}_{
m e} \cdot ec{A}) {
m d}V$$

由于

$$ec{A}=rac{\mu}{4\pi}\intrac{ec{J}(ec{x}')\mathrm{d}V'}{r},~~ec{A}_{\mathrm{e}}=rac{\mu}{4\pi}\intrac{ec{J}_{\mathrm{e}}(ec{x}')\mathrm{d}V'}{r}$$

两式相等,因此电流 $ec{J}$ 在外场 $ec{A}_{
m e}$ 中的相互作用能为:

$$W_{
m i} = \int\limits_V ec{J} \cdot ec{A}_{
m e} {
m d}V$$

注意,这时没有 $\frac{1}{2}$ 系数

磁标势

在恒定电流情况下,安培环路定理:

$$\oint\limits_{\partial S}ec{H}\cdot\mathrm{d}ec{l}=\int\limits_{S}ec{J}\cdot\mathrm{d}ec{S}$$

在某一局部区域内,若闭合回路 L 没有链环着**自由电流**,则:

$$\int\limits_{I}ec{H}\cdot\mathrm{d}ec{l}=0$$

此时可以引入标势,因为此时:

$$abla imes ec{H} = ec{0}$$

能够引入磁标势的条件:区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

因此 $ec{H}$ 可看作某一标量场的梯度

在 $ec{J}=ec{0}$ 的区域内:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ_m ,使得:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

假想磁荷密度:

$$ho_m = -\mu_0
abla \cdot ec{M}$$

真空中静电场和静磁场的对比

$$abla imes ec{E} = ec{0}$$

$$egin{aligned}
abla \cdot ec{E} &= rac{
ho_{
m f} +
ho_{
m p}}{arepsilon_0} \
ho_{
m p} &= -
abla \cdot ec{P} \ ec{D} &\equiv arepsilon_0 ec{E} + ec{P} \ ec{E} &= -
abla arphi \
abla^2 arphi &= -rac{
ho_{
m f} +
ho_{
m p}}{arepsilon_0} \end{aligned}$$

$$egin{aligned}
abla imes ec{H} &= ec{0} \
abla \cdot ec{H} &= rac{
ho_{
m m}}{\mu_0} \
onumber
ho_m &= -\mu_0
abla \cdot ec{M} \
onumber ec{B} &= \mu_0 (ec{H} + ec{M}) \
onumber ec{H} &= -
abla arphi_m \
onumber
abla^2 arphi_m &= -rac{
ho_m}{\mu_0}
onumber \end{aligned}$$

边值关系

磁多极矩

磁矢势:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] dV'$$

$$\vec{A}^{(0)} = \vec{0}$$

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$ec{m} = rac{I}{2} \oint\limits_{L} ec{x}' imes \mathrm{d} ec{l}'$$

称为电流线圈的磁矩

对体电流分布,

$$ec{m} = rac{1}{2}\int\limits_{V}ec{x}' imesec{J}(ec{x}')\mathrm{d}V'$$

磁偶极矩的场和标势

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$
 $ec{B}^{(1)} =
abla imes ec{A}^{(1)} = -rac{\mu_0}{4\pi} (ec{m} \cdot
abla) rac{ec{R}}{R^3}$ $arphi^{(1)}_{
m m} = rac{ec{m} \cdot ec{R}}{4\pi R^3}$

小区域内电流分布在外磁场中的能量

$$egin{aligned} W &= \int\limits_V ec{J} \cdot ec{A}_{
m e} {
m d}V \ W &= I \oint\limits_L ec{A}_{
m e} \cdot {
m d}ec{l} \ &= I \int\limits_S \cdot {
m d}ec{S} \ &= I \Phi_{
m e} \ &ec{B}_{
m e}(ec{v}) = ec{B}_{
m e}(ec{0}) + ec{x} \cdot
abla ec{B}_{
m e}(ec{0}) + ec{v} \ &= ec{m} \cdot ec{B}_{
m e}(ec{0}) \cdot \int\limits_S {
m d}ec{S} \ &= ec{m} \cdot ec{B}_{
m e}(ec{0}) \end{aligned}$$

磁矩在外磁场中受力和力矩

$$ec{F} = -
abla U = ec{m} \cdot
abla ec{B}_{
m e}$$

\$\$ \begin{aligned} \vec{F}^

\end{aligned} \$\$

$$ec{L}=ec{m} imesec{B}_{
m e}$$

第4章 电磁波的传播

平面电磁波

一般情况:

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{H} = rac{\partial ec{D}}{\partial t} + ec{J} \
abla \cdot ec{D} =
ho \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质($ho=0, ec{J}=ec{0}$):

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

真空($ec{D}=arepsilon_0ec{E},ec{B}=\mu_0ec{H}$):

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{B} = \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla \cdot ec{E} = 0 \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

可以得到:

$$egin{align}
abla^2ec E - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec E}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec B}{\partial t^2} &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0arepsilon_0 &= ec 0 \
abla^2ec B - \mu_0arepsilon_0 &= ec 0 \
abla^2ec 0 \
abla^2ec 0 &= ec 0 \
abla^2ec 0 \
abla^2ec 0 &= ec 0 \
abla^2ec 0 \
abla^2ec 0 &= ec 0 \
abla^2ec 0 \
abla^2ec 0 &= ec 0 \
abla^2ec 0 \
abla^2ec 0 &= ec 0$$

令:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

$$oxed{
abla^2ec{B}-rac{1}{c^2}rac{\partial^2ec{B}}{\partial t^2}=ec{0}}$$

具有上面方程形式的方程称为**波动方程**。

介质情形

线性介质:

$$ec{D}(\omega) = arepsilon(\omega) ec{E}(\omega)$$

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega)\vec{H}(\omega)$$

介质的色散:

$$arepsilon = arepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)$$

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡得波称为时谐电磁波。

时谐电磁波的复数表示:

$$ec{E}(ec{x},t)=ec{E}(ec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$ec{B}(ec{x},t)=ec{B}(ec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

对线性均匀介质,有 $ec{D}=arepsilonec{E}, ec{B}=\muec{H}$,代入无源麦克斯韦方程组,得:

$$egin{cases}
abla imes ec{E}(ec{x},t) &= -rac{\partial ec{B}(ec{x},t)}{\partial t} \
abla imes ec{B}(ec{x},t) &= arepsilon \mu rac{\partial ec{E}(ec{x},t)}{\partial t} \
abla \cdot ec{E}(ec{x},t) &= 0 \
abla \cdot ec{B}(ec{x},t) &= 0 \end{cases}$$

用 \vec{E} 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$,将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入上面方程组,得场量**空间部分**满足的方程:

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = \mathrm{i}\omegaec{B} \
abla imes ec{B} = -\mathrm{i}\omegaarepsilon\muec{E} \
abla \cdot ec{E} = 0 \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

上面这组方程是**不独立**的,由第一式可以推出第四式,由第二式可以推出第三式(两边取散度,而任意矢量场旋度的散度为零)

对第一式两边取旋度,并利用公式 $abla imes (
abla imes ec{E}) =
abla (
abla \cdot ec{E}) -
abla^2 ec{E} = abla^2 ec{E}$,得:

$$oxed{
abla^2ec E+\omega^2arepsilon\muec E=ec 0}$$

令:

$$k=\omega\sqrt{arepsilon\mu}$$

则得到时谐电场空间部分满足的方程(称为亥姆霍兹方程):

$$oxed{
abla^2ec E+k^2ec E=ec 0, \ \ k=\omega\sqrt{arepsilon\mu}}$$

ps:亥姆霍兹方程的解并不一定满足 $abla\cdotec{E}=0$,亥姆霍兹方程的解加上条件 $abla\cdotec{E}=0$ 才代表电磁波的解。

解出电场的空间部分后,磁场的空间部分可由方程组第一式给出:

$$oxed{ec{B} = rac{-\mathrm{i}}{\omega}
abla imes ec{E} = rac{-\mathrm{i}}{k} \sqrt{\mu arepsilon
abla imes ec{E}}}$$

在一定频率 ω 下,均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为:

$$egin{aligned}
abla^2 ec{E} + k^2 ec{E} &= ec{0}, \;\; k = \omega \sqrt{arepsilon \mu} \
abla \cdot ec{E} &= 0 \
onumber ec{B} &= -rac{\mathrm{i}}{k} \sqrt{\mu arepsilon} \, imes \, ec{E} \end{aligned}$$

或:

$$abla^2 ec{B} + k^2 ec{B} = ec{0}, \;\; k = \omega \sqrt{arepsilon \mu}
onumber \
abla \cdot ec{B} = 0
onumber \
onu$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

设电磁波沿 x 轴方向传播,其场强在与 x 轴正交的平面上具有相同的值,即 \vec{E}, \vec{B} 只与 x, t 有关,而与 y, z 无关,这样的电磁波称为**平面电磁波**。

亥姆霍兹方程化为:

$$rac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}ec{E}(ec{x}) + k^2ec{E}(ec{x}) = ec{0}$$

一个解为:

$$ec{E}(ec{x},t)=ec{E}_0e^{\mathrm{i}(ec{k}\cdotec{x}-\omega t)}$$

 $abla\cdot \vec{E}=0$ 要求 $\vec{E}\perp \vec{k}$,即 \vec{E} 可以在垂直于 \vec{k} 的任意方向上振荡。 \vec{E} 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 \vec{k} 垂直的任意两个相互正交的方向作为 \vec{E} 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}$$

取 \vec{x} 与 \vec{k} 同向,

$$kx - \omega t = \text{const}$$

相速度为:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

介质中平面电磁波相速度:

$$v = rac{1}{\sqrt{\mu arepsilon}}$$

真空中电磁波传播速度:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度:

$$v = rac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = rac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = rac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = rac{c}{n}$$
 $k = rac{2\pi}{\lambda}$

散度:

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \Longrightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

计算电场旋度:

$$egin{aligned}
abla imes ec{E} &=
abla imes (ec{E}_0 e^{\mathrm{i}(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)}) \ &= [
abla \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)}] imes ec{E}_0 \ &= \mathrm{i} ec{k} imes ec{E} \end{aligned}$$

$$abla imes ec{E} = \mathrm{i}ec{k} imes ec{E}$$

于是可以得出磁场:

$$egin{aligned} ec{B} &= -rac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\muarepsilon}
abla imes ec{E} \ &= -rac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\muarepsilon}(\mathrm{i}ec{k} imesec{E}) \ &= \sqrt{\muarepsilon}ec{e}_k imesec{E} \end{aligned}$$

$$ec{B} = \sqrt{\mu arepsilon} ec{e}_k imes ec{E}$$

由上式可得

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

\$\$

\$\$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比:

$$\left|\frac{E}{B}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比:

$$\left| \left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

平面电磁波特性:

- (1)电磁波为横波, $ec{E}$ 和 $ec{B}$ 都与传播方向垂直
- (2) $ec{E}$ 和 $ec{B}$ 互相垂直, $ec{E} imes ec{B}$ 沿 $ec{k}$ 方向
- (3) $ec{E}$ 和 $ec{B}$ 同相,振幅比为 v

电磁波的能量和能流

线性均匀介质中电磁场能量密度:

$$w=rac{1}{2}(ec{E}\cdotec{D}+ec{H}\cdotec{B})=rac{1}{2}(arepsilon E^2+rac{1}{\mu}B^2)$$

平面电磁波情形, $\varepsilon E^2=rac{1}{\mu}B^2$,于是得到**平面电磁波能量密度**:

$$w=arepsilon E^2=rac{1}{\mu}B^2$$

$$w = arepsilon E_0^2 \cos^2(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t) = rac{1}{2} arepsilon E_0^2 [1 + \cos 2(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)]$$

由 $ec{B}=\sqrt{\muarepsilon}ec{e}_{k} imesec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**:

$$egin{equation} ec{S} = ec{E} imes ec{H} = \sqrt{rac{arepsilon}{\mu}} E^2 ec{e}_k \end{aligned}$$

$$ec{S}=rac{1}{\sqrt{\muarepsilon}}wec{e}_k=vwec{e}_k$$

设 f(t) 和 g(t) 有复数表示:

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}, \ g(t) = g_0 e^{-i\omega t + i\phi}$$

则 fg 对一周期的平均值为:

$$egin{aligned} \overline{fg} &= rac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} f_0 \cos(\omega t) imes g_0 \cos(\omega t - \phi) \mathrm{d}t \ &= rac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi \ &= rac{1}{2} \Re\{f^*g\} \end{aligned}$$

能量密度平均值:

$$ar{w}=rac{1}{2}arepsilon E_0^2=rac{1}{2\mu}B_0^2$$

能流密度平均值:

$$ar{ec{S}} = rac{1}{2}\Re\{ec{E}^* imesec{H}\} = rac{1}{2}\sqrt{rac{arepsilon}{\mu}}E_0^2ec{e}_k$$

电磁波在介质界面上的反射和折射

$$ec{n}_{1
ightarrow2} imes(ec{E}_2-ec{E}_1)=ec{0}$$

$$ec{n}_{1 o 2} imes (ec{H}_2-ec{H}_1)=ec{lpha}_{
m f}$$

$$ec{n}_{1
ightarrow2}\cdot(ec{D}_2-ec{D}_1)=\sigma_{
m f}$$

$$ec{n}_{1
ightarrow2}\cdot(ec{B}_2-ec{B}_1)=0$$

讨论时谐电磁波时,只需要考虑:

$$ec{n}_{1
ightarrow2} imes(ec{E}_2-ec{E}_1)=ec{0}$$

$$ec{n}_{1 o 2} imes (ec{H}_2-ec{H}_1)=ec{lpha}_{
m f}$$

设介质 1 和介质 2 的分界面时无穷大平面,且平面电磁波从介质 1 入射到界面上。

设入射波、反射波和折射波的频率相同,入射波的电场强度为 \vec{E} ,波矢量为 \vec{k} ;反射波的电场强度为 \vec{E}' ,波矢量为 \vec{k}' ;折射波的电场强度为 \vec{E}'' ,波矢量为 \vec{k}''

它们的平面波表达式分别为:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}_0' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

先求波矢量方向之间的关系。

介质 1 中的总场强是入射波与反射波场强的叠加,结合边界关系 $ec{n}_{1 o 2} imes(ec{E}_2-ec{E}_1)=ec{0}$ 得:

$$ec{n}_{1 o 2} imes (ec{E}+ec{E}')=ec{n}_{1 o 2} imes ec{E}''$$

代入平面波表达式:

$$ec{n}_{1 o 2} imes (ec{E}_0 e^{\mathrm{i}(ec{k}\cdotec{x}-\omega t)} + ec{E}_0' e^{\mathrm{i}(ec{k}'\cdotec{x}-\omega t)}) = ec{n}_{1 o 2} imes ec{E}_0'' e^{\mathrm{i}(ec{k}''\cdotec{x}-\omega t)} \ ec{k}\cdotec{x} = ec{k}'\cdotec{x} = ec{k}''\cdotec{x}$$

选界面为 z=0 平面,则:

$$k_x = k'_x = k''_x, \ k_y = k'_y = k''_y$$

若取入射波矢平行于 xz 平面,则:

$$k_y = 0 = k_y' = k_y''$$

这就是说,反射波矢和折射波矢都在同一平面上。

用 θ 表示入射角, θ' 表示反射角, θ'' 表示折射角,则有:

$$k_x = k \sin \theta$$
, $k'_x = k' \sin \theta'$, $k''_x = k'' \sin \theta''$

设电磁波在两介质中得相速分别为 $v_1, v_2,$ 则:

$$k=k'=rac{\omega}{v_1},~~k''=rac{\omega}{v_2}$$

可得:

$$heta = heta'$$
 $rac{\sin heta}{\sin heta''} = rac{v_1}{v_2}$

电磁波,
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$rac{\sin heta}{\sin heta''} = rac{\sqrt{\mu_2arepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1arepsilon_1}} = n_{21}$$

振幅关系 菲涅耳公式

 \vec{E} 垂直入射面:

当界面上自由电流密度 $\vec{\alpha} = \vec{0}$,则边值关系为:

$$E_{\perp} + E_{\perp}' = E_{\perp}''$$
 $H_{\perp} \cos heta - H_{\perp}' \cos heta = H_{\perp}'' \cos heta''$

$$H=\sqrt{rac{arepsilon}{\mu}}E$$
,对于非铁磁性的一般介质,取 $\mu=\mu_0$,则第二式可写为:

$$\begin{split} \sqrt{\varepsilon_1}(E_{\perp} - E_{\perp}')\cos\theta &= \sqrt{\varepsilon_2}E_{\perp}''\cos\theta'' \\ \frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ \frac{E_{\perp}''}{E_{\perp}} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \end{split}$$

 $ec{E}$ 平行入射面:

$$egin{aligned} E_{\parallel}\cos heta-E_{\parallel}'\cos heta=E_{\parallel}''\cos heta'' \ H_{\parallel}+H_{\parallel}'=H_{\parallel}'' \ &rac{E_{\parallel}'}{E_{\parallel}}=rac{ an(heta- heta'')}{ an(heta+ heta'')} \ &rac{E_{\parallel}''}{E_{\parallel}}=rac{2\cos heta\sin heta''}{\sin(heta+ heta'')\cos(heta- heta'')} \end{aligned}$$

几种特殊情况

 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

由折射定律,heta> heta'',则 E'/E<0,即反射波电场与入射波电场反相,此现象称为反射过程中的**半波损失**。

$$\theta + \theta'' = \pi/2$$

此时 \vec{E} 平行于入射面的分量没有反射波,反射光为垂直于入射面偏振的线偏光,这就是**布儒斯特定律**,此情形下的入射角为**布儒斯特角**。

全反射

若 $arepsilon_1>arepsilon_2$,则 $n_{21}<0$

假设在 $\sin \theta > n_{21}$ 情形下,下面式子仍然成立:

$$ec{E} = ec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{k}\cdotec{x}-\omega t)}$$
 $ec{E}' = ec{E}'_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{k}'\cdotec{x}-\omega t)}$
 $ec{E}'' = ec{E}''_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{k}''\cdotec{x}-\omega t)}$
 $k_x = k'_x = k''_x, \;\; k_y = k'_y = k''_y$

仍满足:

$$k_x''=k_x=k\sin heta$$
 $k''=krac{v_1}{v_2}=kn_{21}$ $k_z''=\sqrt{k''^2-k_x''^2}=\mathrm{i}k\sqrt{\sin^2 heta-n_{21}^2}$

令

$$k_z''=\mathrm{i}\kappa,\ \ \kappa=k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$$

折射波电场为:

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' \mathrm{e}^{-\kappa z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x'' x - \omega t)}$$

这是沿 x 轴方向传播的电磁波,它的场强沿 z 轴方向指数衰减。

这种电磁波是存在于界面附近一薄层内的表面波,该层厚度 $\sim \kappa^{-1}$,可以认为, κ^{-1} 就是穿透深度:

$$\kappa^{-1} = rac{1}{k\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} = rac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}$$

有导体存在时电磁波的传播

导体内的自由电荷分布

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

考虑固定场点,其解为:

$$ho(t)=
ho_0 e^{-rac{\sigma}{arepsilon}t}$$

衰减的特征时间为:

$$au=rac{arepsilon}{\sigma}$$

只要电磁波的频率 ω 满足

$$\omega \ll au^{-1} = rac{\sigma}{arepsilon}$$

就可以认为 $\rho(t)=0$

良导体条件:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg 1$$

导体内的电磁波

具有一定频率的电磁波:

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = \mathrm{i} \omega \mu ec{H} \
abla imes ec{H} = -\mathrm{i} \omega arepsilon ec{E} + \sigma ec{E} \
abla \cdot ec{E} = 0 \
abla \cdot ec{H} = 0 \end{cases}$$

复电容率:

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

则第二式可写为:

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega \varepsilon' \vec{E}$$

一定频率下导体内部的亥姆霍兹方程:

$$abla^2 ec{E} + k^2 ec{E} = ec{0}, \;\; k = \omega \sqrt{\mu arepsilon'}$$

形式上有平面波解:

$$ec{E}(ec{x}) = ec{E}_0 e^{\mathrm{i}ec{k}\cdotec{x}}$$

设

$$ec{k}=ec{eta}+\mathrm{i}ec{lpha} \ ec{E}(ec{x},t)=ec{E}_0e^{-ec{lpha}\cdotec{x}}e^{\mathrm{i}(ec{eta}\cdotec{x}-\omega t)}$$

波矢量 \vec{k} 的实部 $\vec{\beta}$ 描述波传播的相位关系,虚部 $\vec{\alpha}$ 描述波幅的衰减。 $\vec{\beta}$ 称为**相位常量**, $\vec{\alpha}$ 称为**衰减常量**。

$$k^2=eta^2-lpha^2+2{
m i}ec{lpha}\cdotec{eta}=\omega^2\mu(arepsilon+{
m i}rac{\sigma}{\omega})$$

比较得:

$$eta^2 - lpha^2 = \omega^2 \mu arepsilon$$
 $ec{lpha} \cdot ec{eta} = rac{1}{2} \omega \mu \sigma$

用 $\vec{k}^{(0)}$ 表示空间中的波矢, \vec{k} 表示导体中的波矢,设入射面为 xz 面,z 轴指向导体内部的法线,由边值关系,有:

$$k_x^{(0)}=k_x=eta_x+\mathrm{i}lpha_x$$

空间中波矢 $ec{k}^{(0)}$ 为实数,由上式可得

$$\alpha_x = 0, \;\; \beta_x = k_x$$

趋肤效应和穿透深度

考虑垂直入射情形,导体表面为xy平面,z轴指向导体内部

$$\alpha_x = \beta_x = 0$$

$$\begin{split} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{\mathrm{i}(\beta z - \omega t)} \\ \beta &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{1/2} \\ \alpha &= \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{1/2} \end{split}$$

良导体情形,

$$k^2pprox \mathrm{i}\omega\mu\sigma$$
 $kpprox \sqrt{\mathrm{i}\omega\mu\sigma}pprox eta+\mathrm{i}lpha$

$$lphapproxetapprox\sqrt{rac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

波幅降至导体表面原值 1/e 的传播距离称为穿透深度 δ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

磁场与电场的关系:

$$ec{H} = rac{1}{\omega\mu}ec{k} imesec{E} = rac{1}{\omega\mu}(eta+\mathrm{i}lpha)ec{e}_n imesec{E}$$

良导体情形,

$$ec{H}pprox\sqrt{rac{\sigma}{\omega\mu}}e^{\mathrm{i}rac{\pi}{4}}ec{e}_{n} imesec{E}$$

$$\sqrt{rac{\mu}{arepsilon}} \left| rac{ec{H}}{ec{E}}
ight| = \sqrt{rac{\sigma}{\omega arepsilon}} \gg 1$$

在金属导体中, 磁场比电场重要

导体表面上的反射

真空垂直入射导体表面

设 $\mu \approx \mu_0$

$$rac{E'}{E} = -rac{1+\mathrm{i}-\sqrt{rac{2\omegaarepsilon_0}{\sigma}}}{1+\mathrm{i}+\sqrt{rac{2\omegaarepsilon_0}{\sigma}}}$$

反射系数:

$$R = \left| rac{E'}{E}
ight|^2 = pprox 1 - 2\sqrt{rac{2\omegaarepsilon_0}{\sigma}}$$

理想导体边界条件

在导体表面上,电场线与界面正交,磁感应线与界面相切。

谐振腔

矩形谐振腔内的电磁振荡

设 u(x,y,z) 是 \vec{E} 或 \vec{H} 的任一直角分量

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

令

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \ \begin{cases} rac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X = 0 \ rac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 Y = 0 \ rac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2 Z = 0 \ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \end{cases}$$

驻波解:

$$u(x,y,z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$$

考虑边界条件,得:

$$egin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{aligned} \ k_x &= rac{m\pi}{L_1}, \ k_y &= rac{n\pi}{L_2}, \ k_z &= rac{p\pi}{L_3} \ m, n, p &= 0, 1, 2, \cdots \ k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 &= 0 \end{aligned}$$

对于每一组 (m, n, p) 值,有两个独立偏振波模

谐振频率

$$\omega_{mnp}=rac{\pi}{\sqrt{\muarepsilon}}\sqrt{(rac{m}{L_1})^2+(rac{n}{L_2})^2+(rac{p}{L_3})^2}$$

波导

当频率更高时,需要用波导代替同轴传输线。波导是一根空心金属管,截面通常为矩形或圆形。波导传输适用于微波范围。

矩形波导中的电磁波

$$egin{aligned}
abla^2ec E + k^2ec E &= ec 0 \ k &= \omega\sqrt{\muarepsilon} \
abla \cdot ec E &= 0 \end{aligned}$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电场应有如下形式:

$$ec{E}(x,y,z)=ec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_zz}$$

代入亥姆霍兹方程,得:

$$\left(rac{\partial^2}{\partial x^2}+rac{\partial^2}{\partial y^2}
ight)\!ec{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)ec{E}(x,y)=ec{0}$$

设 u(x,y) 为电磁场的任一直角坐标分量,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

分离变量法可得:

$$rac{{
m d}^2 X}{{
m d}x^2} + k_x^2 X = 0$$
 $rac{{
m d}^2 Y}{{
m d}y^2} + k_y^2 Y = 0$ $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

特解:

$$u(x,y) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$$

考虑边界条件 x=0,y=0 面上的边界条件,可得:

$$egin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \end{cases}$$

再考虑 x = a, y = b 面上的边界条件,可得:

$$k_x=rac{m\pi}{a},~~k_y=rac{n\pi}{b},~~m,n=0,1,2,\cdots$$

再考虑波导中电场应满足 $abla \cdot ec{E} = 0$,得:

$$k_x A_1 + k_y A_2 - \mathrm{i} k_z A_3 = 0$$

也就是说, A_1, A_2, A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组(m,n)值,有两种独立波模,有两种独立波模。

解出 \vec{E} 后,磁场为:

$$ec{H} = -rac{\mathrm{i}}{\omega \mu}
abla imes ec{E}$$

对一组确定的 (m,n),若选一种波模具有 $E_z=0$,则该波模的 $A_1/A_2=-k_y/k_x$ 就完全确定,因而另一种波模必须有 $E_z\neq 0$

对 $E_z=0$ 的波模, $H_z\neq 0$

在波导内传播的波的特点:

电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z=0$ 的波,称为横电波(TE);另一种波模为 $H_z=0$ 的波,称为横磁波(TM)。

TE 波和 TM 波又按 (m,n) 的值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波,一般情况下,在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

若激发频率 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$,则 k_z 变为虚数,此时传播因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的**最低频率** ω_e 称为该波模的**截止频率**。

由:

$$k_x=rac{m\pi}{a},~~k_y=rac{n\pi}{b},~~k=\omega\sqrt{\muarepsilon}$$

得到 (m,n) 型的**截止角频率**为:

$$\omega_{c,mn} = rac{\pi}{\sqrt{\muarepsilon}}\sqrt{(rac{m}{a})^2 + (rac{n}{b})^2}$$

若 a>b,则 TE_{10} 波有最低截止频率:

$$rac{\omega_{c,10}}{2\pi}=rac{1}{2a\sqrt{\muarepsilon}}$$

若管内为真空,此时最低截止频率为 $\frac{c}{2a}$,相应的截止波长为:

$$\lambda_{c,10} = 2a$$

因此,在波导内能够通过的最大波长为 2a

最常用的是 TM_{10} 波,它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

${ m TE}_{10}$ 波的电磁场和管壁电流

当 m=1, n=0 时, $k_x=m\pi/a=\pi/a, k_y=n\pi/b=0$,且对 TE 波有 $E_z=0$,因此 $A_3=0$ 由 $k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$ 得 $A_1=0$,把 A_2 写为:

$$A_2=rac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0$$

$$egin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \end{cases}, \;\; ec{H} = -rac{\mathrm{i}}{\omega \mu}
abla imes ec{E}$$

得 TE_{10} 波的电磁场:

$$H_z=H_0\cosrac{\pi x}{a}$$
 $E_y=rac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0\sinrac{\pi x}{a}$ $H_x=-rac{\mathrm{i}k_za}{\pi}H_0\sinrac{\pi x}{a}$ $E_x=E_z=h_y=0$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $ec{n}_{1
ightarrow 2} imes ec{H} = ec{lpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{H} = rac{\partial ec{D}}{\partial t} + ec{J_{
m f}} \
abla \cdot ec{D} =
ho_{
m f} \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

由一般情况下 \vec{B} 的无散性 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入矢势 \vec{A} ,使得:

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$

于是:

$$egin{aligned}
abla imes ec{E} &= -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \ &= -rac{\partial}{\partial t} (
abla imes ec{A}) \ &= -
abla imes rac{\partial ec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是:

$$abla imes (ec{E} + rac{\partial ec{A}}{\partial t}) = ec{0}$$

这就是说, $ec{E}+rac{\partial ec{A}}{\partial t}$ 是无旋场,于是可引入标势 arphi,使得:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

于是:

$$ec{E} = -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t}$$

场量 \vec{B} , \vec{E} 可由矢势 \vec{A} 和 φ 表达为:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数,作变换(势的规范变换):

$$ec{A}
ightarrow ec{A}' = ec{A} +
abla \psi$$

$$arphi
ightarrow arphi' = arphi - rac{\partial \psi}{\partial t}$$

有:

$$ec{B}' =
abla imes ec{A}' =
abla imes ec{A} +
abla imes (
abla \psi) =
abla imes ec{A} = ec{B}$$

$$ec{E}' = -
abla arphi' - rac{\partial ec{A}'}{\partial t} = -
abla (arphi - rac{\partial \psi}{\partial t}) - rac{\partial (ec{A} +
abla \psi)}{\partial t} = -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t} = ec{E}$$

即 (\vec{A}', φ') 与 (\vec{A}, φ) 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范**。

当势作规范变换时,所有的物理量和物理规律都保持不变,这种不变性称为**规范不变性**。

库仑规范

$$abla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$abla \cdot \vec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} = 0$$

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 $ec{E},ec{B}$ 的方程,可化为关于势 $ec{A},arphi$ 的方程。

真空中:

$$egin{cases}
abla imes (rac{ec{B}}{\mu_0}) &= rac{\partial (arepsilon_0 ec{E})}{\partial t} + ec{J} \
abla \cdot (arepsilon_0 ec{E}) &=
ho \
otag &=
abla imes ec{A} \
otag &= -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程:

$$abla^2 ec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 ec{A}}{\partial t^2} -
abla igg(
abla \cdot ec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} igg) = -\mu_0 ec{J}$$
 $abla^2 arphi + rac{\partial}{\partial t}
abla \cdot ec{A} = -rac{
ho}{arepsilon_0}$

其中, $\mu_0 arepsilon_0 = 1/c^2$

库仑规范下

$$abla^2 \vec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - rac{1}{c^2} rac{\partial}{\partial t}
abla arphi = -\mu_0 \vec{J}$$

$$abla^2 arphi = -rac{
ho}{arepsilon_0}$$

洛伦兹规范

$$abla^2 \vec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$abla^2 \varphi - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -rac{
ho}{arepsilon_0}$$

推迟势

求解达朗贝尔方程:

$$abla^2 arphi - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 arphi}{\partial t^2} = -rac{
ho}{arepsilon_0}$$

考虑某一体元内的变化电荷激发的势:

$$ho(\vec{x},t) = Q(t)\delta(\vec{x})$$

$$abla^2arphi-rac{1}{c^2}rac{\partial^2arphi}{\partial t^2}=-rac{1}{arepsilon_0}Q(t)\delta(ec{x})$$

由球对称性, $\varphi = \varphi(r,t)$, 球坐标下:

$$rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}igg(r^2rac{\partialarphi}{\partial r}igg) -rac{1}{c^2}rac{\partial^2arphi}{\partial t^2} = -rac{1}{arepsilon_0}Q(t)\delta(ec{x})$$

除原点外 φ 的通解为:

$$arphi(r,t) = rac{f(t-rac{r}{c})}{r} + rac{g(t+rac{r}{c})}{r}$$

猜出:

$$arphi(r,t) = rac{Q(t-rac{r}{c})}{4\piarepsilon_0 r}$$

由场的叠加性,

$$arphi(ec{x},t) = rac{1}{4\piarepsilon_0}\int\limits_Vrac{
ho(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$ec{A}(ec{x},t) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

电偶极辐射

计算辐射场的一般公式

$$egin{aligned} ec{A}(ec{x},t) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V' \end{aligned}$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流,即:

$$ec{J}(ec{x}',t) = ec{J}(ec{x}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中, $ec{J}(ec{x}')$ 是 t=0 时的电流密度分布。

交变电流情况下:

$$ec{A}(ec{x},t) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中, $k=\omega/c$

令:

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中, $\vec{A}(\vec{x})$ 是 t=0 时刻的矢势分布。

其中, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 是推迟作用因子,其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形,电荷守恒定律为:

$$\mathrm{i}\omega
ho=
abla\cdotec{J}$$

若知道了矢势 \vec{A} ,则可求磁场 \vec{B} :

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$

知道了 $ec{B}$,可根据麦克斯韦方程组求电场 $ec{E}$:

$$egin{align}
abla imes ec{B} &= \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} = -rac{\mathrm{i} \omega}{c^2} ec{E} \ ec{E} &= rac{\mathrm{i} c}{k}
abla imes ec{B} \end{aligned}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l, 波长 λ , 电荷到场点的距离 r,

小区域:

$$l \ll \lambda, \ l \ll r$$

近区: $r \ll \lambda$

感应区: $r \sim \lambda$

远区 (辐射区): $r \gg \lambda$

$$rpprox R-ec{e}_{\scriptscriptstyle R}\cdotec{x}'$$

矢势精确表达式:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势近似表达式:

$$egin{aligned} ec{A}(ec{x}) &pprox rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}k(R-ec{e}_R\cdotec{x}')}}{R-ec{e}_R\cdotec{x}'} \mathrm{d}V' \ &pprox rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\cdotec{J}(ec{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kec{e}_R\cdotec{x}'}}{R} \mathrm{d}V' \ &pprox rac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \int\limits_V ec{J}(ec{x}')(1-\mathrm{i}kec{e}_R\cdotec{x}'+\cdots) \mathrm{d}V' \end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0 e^{\mathrm{i} k R}}{4\pi R} \int\limits_V ec{J}(ec{x}') \mathrm{d}V'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i , 速度为 v_i 的粒子,则:

$$oxed{ec{J} = \sum_i n_i q_i ec{v}_i}$$

$$ec{J}(ec{r}) =
ho(ec{r})ec{v}(ec{r})$$

$$\int\limits_V ec{J}(ec{x}') \mathrm{d}V' = \sum q ec{v}$$

$$\sum q\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum q\vec{x}$$
$$= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$
$$\equiv \dot{\vec{p}}$$

其中, \vec{p} 是电荷系统的电偶极矩

$$\int\limits_Vec{J}(ec{x}')\mathrm{d}V'=\dot{ec{p}}$$

考虑一个简单电偶极子系统,它由两个相距为 $\Delta \vec{l}$ 的导体球组成,两导体之间由细导线相连。 此系统的电偶极矩:

$$ec{p}=Q\Deltaec{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$$

电偶极矩变化率:

$$\begin{split} \dot{\vec{p}} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q \Delta \vec{l} \\ &= I \Delta \vec{l} \\ &= \int\limits_{V} \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V' \end{split}$$

与一般公式相符。

于是:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\dot{ec{p}}$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果:

$$abla \longleftrightarrow \mathrm{i} k \vec{e}_R$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i} \omega$$

辐射场:

$$egin{aligned} ec{B} &=
abla imes ec{A} \ &= rac{\mathrm{i} \mu_0 k}{4\pi R} e^{\mathrm{i} k R} ec{e}_R imes \dot{ec{p}} \ &= rac{1}{4\pi arepsilon_0 c^3 R} e^{\mathrm{i} k R} \ddot{ec{p}} imes ec{e}_R \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ec{E} &= rac{\mathrm{i}c}{k}
abla imes ec{B} \ &= rac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\piarepsilon_0 c^2 R} (\ddot{ec{p}} imes ec{e}_R) imes ec{e}_R \end{aligned}$$

取球坐标原点在电荷分布区内,并以 $ec{p}$ 方向为极轴,

$$ec{B} = rac{1}{4\piarepsilon_0 c^3 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin heta ec{e}_\phi \ ec{E} = rac{1}{4\piarepsilon_0 c^2 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin heta ec{e}_ heta$$

辐射能流 角分布 辐射功率

$$egin{aligned} ar{ec{S}} &= rac{1}{2}\Re\{ec{E}^* imesec{H}\} \ &= rac{|\ddot{ec{p}}|^2}{32\pi^2arepsilon_0c^3R^2}\sin^2 hetaec{e}_R \ P &= \oint |ar{ec{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega \ &= rac{|\ddot{ec{p}}|^2}{32\pi^2arepsilon_0c^3}\oint\sin^2 heta\mathrm{d}\Omega \ &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{|\ddot{ec{p}}|^2}{3c^3} \end{aligned}$$

短天线辐射 辐射电阻

磁偶极辐射和电四极辐射

矢势展开式第二项:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{-\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\intec{J}(ec{x}')(ec{e}_R\cdotec{x}')\mathrm{d}V' \ -ec{e}_R imes\intrac{1}{2}ec{x}' imesec{J}'\mathrm{d}V = -ec{e}_R imesec{m}$$

此项导致的辐射是磁偶极辐射

$$\mathscr{D} \equiv \sum 3q \vec{x}' \vec{x}'$$
 $c_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} \left(-\vec{e}_R \times \vec{m} + \frac{1}{2} \vec{e}_R \cdot \hat{m} \right)$

$$egin{aligned} ec{A}(ec{x}) &= rac{-\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}igg(-ec{e}_R imesec{m} + rac{1}{6}ec{e}_R\cdot\dot{\mathscr{D}}igg) \end{aligned}$$

第一项是磁偶极辐射,第二项是电四极辐射

磁偶极辐射

$$ec{A}(ec{x}) = ec{e}_R imes ec{m}$$

辐射区(很远,近似)电磁场:

$$egin{aligned} ec{B} &=
abla imes ec{A} \ &= rac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i} k R}}{4\pi c^2 R} (\ddot{ec{m}} imes ec{e}_R) imes ec{e}_R \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ec{E} &= cec{B} imesec{e}_R \ &= -rac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}(\ddot{ec{m}} imesec{e}_R) \end{aligned}$$

磁偶极辐射的平均能流密度:

$$ar{ec{S}} = rac{\mu_0 \omega^4 |ec{m}|^2}{32 \pi^2 c^3 R^2} \sin^2 heta ec{e}_R$$

总辐射功率:

$$P=rac{\mu_0\omega^4|ec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

电四极辐射

$$ec{A} = -rac{\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi R}ec{e}_R\cdot\mathscr{D}$$

定义矢量:

$$ec{\mathscr{D}}(ec{e}_R) \equiv ec{e}_R \cdot \mathscr{D} \ ec{A}(ec{x}) = rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\piarepsilon_0 c^3 R} \ddot{ec{\mathscr{D}}}$$

辐射区电磁场:

$$egin{align} ec{B} &= \mathrm{i} k ec{e}_R imes ec{A} \ &= rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} k R}}{24 \pi arepsilon_0 c^4 R} \dot{ec{\mathscr{D}}} imes ec{e}_R \end{split}$$

$$egin{aligned} ec{E} &= cec{B} imes ec{e}_R \ &= rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\piarepsilon_0 c^3 R} (\dot{ec{\mathscr{D}}} imes ec{e}_R) imes ec{e}_R \end{aligned}$$

平均能流密度:

$$egin{align} ar{ec{S}} &= rac{1}{2}\Re\{ec{E}^* imesec{H}\} \ &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{1}{288\pi c^5R^2}(\dot{ec{eta}} imesec{e}_R)^2ec{e}_R \ \end{split}$$

例 5.3

$$egin{align} \mathscr{D} &= 6Ql^2ec{e}_zec{e}_z \ \ ec{\mathscr{D}} &\equiv ec{e}_R\cdot\mathscr{D} = 6Ql^2\cos hetaec{e}_z \ \ ec{\mathscr{D}} & imes ec{e}_R = 6Ql^2\cos heta\sin hetaec{e}_\phi \ \ \end{matrix}$$

$$|\dot{ec{\mathscr{D}}} imesec{e}_R|^2=36Q^2l^4\omega^6\cos^2 heta\sin^2 heta$$

辐射功率:

$$P=\int ar{S}R^2\mathrm{d}\Omega=rac{Q^2l^4\omega^6}{60\piarepsilon_0c^5}$$

天线辐射(了解)

天线上的电流分布

细长直线天线上电流分布的形式

取天线沿 z 轴,天线表面上的电流 \vec{J} 沿 z, \vec{A} 沿 z 轴

洛伦兹条件:

$$egin{align}
abla \cdot ec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} &= 0 \ \ E_z &= -rac{\partial arphi}{\partial z} - rac{\partial A_z}{\partial t} \ \end{aligned}$$

得:

$$rac{1}{c^2}rac{\partial E_z}{\partial t}=rac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}-rac{1}{c^2}rac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$$

天线是理想导体, $E_z=0$, A_z 满足一维波动方程:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0$$

矢势 \vec{A} 与天线电流的关系:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

半波天线

天线总长度为l, 电流分布为:

$$I(z) = egin{cases} I_0 \sin \ k(rac{l}{2}-z), \ 0 \leqslant z \leqslant rac{l}{2} \ I_0 \sin \ k(rac{l}{2}+z), \ -rac{l}{2} \leqslant z \leqslant 0 \end{cases}$$

若 $l=\lambda/2$

$$I(z)=I_0\cos(kz), \;\; |z|\leqslant rac{\lambda}{4}$$

$$A_z(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(kz) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos heta} \mathrm{d}z$$

计算远场

天线阵

半波天线对极角有一定方向性,对方位角没有方向性。

要得到高度定向的辐射,可以用一系列天线排成天线阵,利用各条天线辐射的干涉效应来获得较强的方向性。

电磁波的衍射

电磁场的动量

力密度 \vec{f} :

$$ec{f} =
ho ec{E} + ec{J} imes ec{B}$$

真空中:

$$ho = arepsilon_0
abla \cdot ec{E}, \;\; ec{J} = rac{1}{\mu_0}
abla imes ec{B} - arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} \ ec{f} = arepsilon_0 (
abla \cdot ec{E}) ec{E} + rac{1}{\mu_0} (
abla imes ec{B}) imes ec{B} - arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} imes ec{B}$$

结合

$$abla \cdot ec{B} = 0, \ \
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$
 $ec{f} = \left[arepsilon_0 (
abla \cdot ec{E}) ec{E} + rac{1}{\mu_0} (
abla \cdot ec{B}) ec{B} + rac{1}{\mu_0} (
abla imes ec{B}) imes ec{B} + arepsilon_0 (
abla imes ec{E}) imes ec{E}
ight] - arepsilon_0 rac{\partial}{\partial t} (ec{E} imes ec{B})$

电磁场的动量密度:

$$ec{g} = arepsilon_0 ec{E} imes ec{B}$$

方括号部分表示电磁场内部的动量转移

令:

$$\mathscr{T} = -arepsilon_0 ec{E} ec{E} - rac{1}{\mu_0} ec{B} ec{B} + rac{1}{2} \mathscr{I} (arepsilon_0 E^2 + rac{1}{\mu_0} B^2)$$

其中, ダ 是单位张量

动量守恒定律:

$$\int\limits_V \vec{f} \mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V \vec{g} \mathrm{d}V = -\int\limits_V \nabla \cdot \mathscr{T} \mathrm{d}V = -\oint\limits_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \mathscr{T}$$

张量 罗 称为电磁场的动量流密度张量

第6章 狭义相对论

迈克尔逊-莫雷实验

调整迈克尔逊干涉仪,使得有效光程 $l_{MM_1} = l_{MM_2} = l$

设地球相对于"以太"的绝对运动速度 $ec{v}$ 沿 $M_1 \to M$ 方向,则按经典理论,将产生光程差于是观察到干涉效应按经典理论,干涉条纹应移动 0.4 个左右,但实验观察到的上限仅为 0.01 个

迄今为止的所有实验都指出,光速与观察者所处的参考系无关,也与光源的运动速度无关。

相对论的基本原理 洛伦兹变换

- (1) 相对性原理: 所有惯性参考系是等价的。
- (2) 光速不变原理: 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c,且与光源运动无关。

设惯性系 Σ' 相对于 Σ 以速率 v 运动,并选 x 和 x' 沿运动方向,则伽利略变换为:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

间隔不变性

用四个坐标 (x,y,z,t) 表示一个事件

从 (\vec{x},t) 到 (\vec{x}',t) 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1,y_1,,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x_1', y_1', z_1', t_1'), (x_2', y_2', z_2', t_2')$

间隔 s^2, s'^2 定义为:

$$s^2 \equiv c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2
onumber \ s'^2 \equiv c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性,即:

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

 $s^2=0$,类光间隔

 $s^2 > 0$,类时间隔

 $s^2 < 0$,类空间隔

洛伦兹变换

某一事件在两个不同的惯性参考系中的时空坐标关系为:

$$\left\{egin{aligned} x' &= rac{x-vt}{\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}} \ y' &= y \ z' &= z \ t' &= rac{t-rac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}
ight.$$

同时相对性

相对论不应破坏因果律

洛伦兹变换给出:

$$t_2' - t_1' = rac{t_2 - t_1 - rac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}}}$$

不破坏因果律就是说,若 $t_2 > t_1$,则 $t_2' > t_1'$

运动时钟的延缓

运动尺度的缩短

$$l=l_0\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}$$

其中, l_0 是静止长度

推导:

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动,则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

其中,
$$\gamma \equiv rac{1}{\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}}$$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1,其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1,t_1) ,其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_1',t_1') ,由 Σ' 相对 Σ 的运动,有 洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma(x_1 - vt) \\ t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动,则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v,于是其在 Σ 系中的时空坐标满足:

$$x_1 = a + vt_1$$

右边的质点记为 2,其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2,t_2) ,其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_2',t_2') ,由 Σ' 相对 Σ 的运动,有洛伦兹变换:

$$\left\{egin{aligned} x_2' &= \gamma(x_2 - vt) \ t_2' &= \gamma(t_2 - rac{v}{c^2}x_2) \end{aligned}
ight.$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动,则质点 z 在 z 中运动的速度也是 v,于是其在 z 系中的时空坐标满足:

$$x_2 = b + vt_2$$

尺子在 Σ 系中的长度,记为 l_{Σ} ,定义为:

$$egin{align} l_\Sigma &\equiv (x_2-x_1)igg|_{t_1=t_2} \ &= \left[(b+vt_2)-(a+vt_1)
ight]igg|_{t_1=t_2} \ &\equiv b-a \end{split}$$

尺子在 Σ' 系中的长度(也就是静止长度),记为 $l_{\Sigma'}$,定义为:

$$egin{aligned} l_{\Sigma'} &\equiv (x_2' - x_1')igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \left[\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)
ight]igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gammaigg[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)
ight]igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gammaigg[[(b + vt_2) - (a + vt_1) - v(t_2 - t_1)]
ight]igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gamma(b - a) \end{aligned}$$

可以看到,

$$l_{\Sigma} = rac{1}{\gamma} l_{\Sigma'} = \sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}} l_{\Sigma'} < l_{\Sigma'}$$

速度变换公式

$$\left\{ egin{aligned} u_x' &= rac{u_x - v}{1 - rac{vu_x}{c^2}} \ u_y' &= rac{u_y \sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}}}{1 - rac{vu_x}{c^2}} \ u_z' &= rac{u_z \sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}}}{1 - rac{vu_x}{c^2}} \end{aligned}
ight.$$

相对论时空观

相对论理论的四维形式

设一个点在 Σ 系的直角坐标为 x_1,x_2,x_3 ,在 Σ 系的直角坐标为 x_1',x_2',x_3' 其中,

$$x_i'=a_{ij}x_j$$

由不变量:

$$x_ix_i=x_i^\prime x_i^\prime=(a_{il}x_l)(a_{im}x_m)=a_{il}a_{im}x_lx_m$$

可得:

$$a_{il}a_{im}=\delta_{lm}$$

即三维坐标转动是个正交变换

 $x_4 \equiv ict$,间隔不变式可写为:

$$x'_{\mu}x'_{\mu}=x_{\mu}x_{\mu}=$$
不变量

四维矢量:

$$V_{\mu}' = a_{\mu\nu}V_{\nu}$$

四维张量:

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}T_{\lambda\tau}$$

间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

和固有时

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s$$

都是洛伦兹标量

四维速度矢量:

$$U_{\mu} = rac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d} au}$$

四维波矢量:

$$k_{\mu}=\left(ec{k},\mathrm{i}rac{\omega}{c}
ight)$$

相对论的多普勒和光行差公式:

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\cos \theta - \frac{v}{c}\right)}$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量:

$$x_{\mu}=(ec{x},\mathrm{i} ct)$$

电流密度第四分量:

$$egin{aligned} J_4 &= \mathrm{i} c
ho \ J_\mu &=
ho_0 U_\mu \ J_\mu &= (ec{J}, \mathrm{i} c
ho) \
abla \cdot ec{J} + rac{\partial
ho}{\partial t} &= 0 \Longrightarrow rac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} &= 0 \end{aligned}$$

四维势矢量

$$\Box \equiv
abla^2 - rac{1}{c^2}rac{\partial^2}{\partial t^2} = rac{\partial}{\partial x_\mu}rac{\partial}{\partial x_\mu}$$

□ 是洛伦兹标量算符

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} eta &= -\mu_0 ec{J} \ A_\mu &= \left(ec{A}, rac{\mathrm{i}}{c} arphi
ight) \ egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} A_\mu &= -\mu_0 J_\mu \end{aligned} \end{aligned}$$

洛伦兹条件的四维形式:

$$rac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

电磁场张量

反对称四维张量:

$$F_{\mu
u} = rac{\partial A_
u}{\partial x_\mu} - rac{\partial A_\mu}{\partial x_
u}$$

电磁场构成一个四维张量:

$$F_{\mu
u} = egin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_1 \ -B_3 & 0 & B_1 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_2 \ B_2 & -B_1 & 0 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_3 \ rac{\mathrm{i}}{c}E_1 & rac{\mathrm{i}}{c}E_2 & rac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \
abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0} \
abla imes ec{B} = \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} + \mu_0 ec{J} \ \end{pmatrix}$$

可以合写为:

$$rac{\partial F_{\mu
u}}{\partial x_{
u}} = \mu_0 J_{\mu}$$
 $abla \cdot ec{B} = 0$

$$abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$

可以合写为:

$$rac{\partial F_{\mu
u}}{\partial x_{\lambda}} + rac{\partial F_{
u\lambda}}{\partial x_{\mu}} + rac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{
u}} = 0$$

张量变换关系:

$$F'_{\mu
u} = a_{\mu\lambda}a_{
u au}F_{\lambda au}$$

电磁场的不变量

洛伦兹不变量:

$$rac{1}{2}F_{\mu
u}F_{\mu
u}=B^2-rac{1}{c^2}E^2$$

四维全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$

$$rac{\mathrm{i}}{8}arepsilon_{\mu
u\lambda au}F_{\mu
u}F_{\lambda au}=rac{1}{c}ec{B}\cdotec{E}$$