1 四维表述基础

1.1 预备知识

事件：空间一点与时间一瞬的结合，$p=(t,\vec{x})$

粒子：质点（有静质量，$m_0>0$）和无静止质量粒子（光子、引力子等）。

世界线：粒子的全部历史。

观者：进行物理观测的人。

时空：全部事件的集合。

参考系：无数观者的集合 R 称为一个参考系，若它满足以下条件：时空（或其中一个开集）中的任一点有且仅有 R 内的一个观者的世界线经过。

1.2 SR的背景时空

SR的背景时空为闵氏时空。

(1)线元（取 $c=1$）

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\vec{x}^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

闵氏度规：

$$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\left(-1,1,1,1\right)$$

线元是洛伦兹不变量：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s'^2$$

(2)速度（惯性坐标系中）

$$u=\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left|\vec{x}\right|}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\vec{x}^2=-\mathrm{d}t^2+u^2\mathrm{d}t^2=-\left(1-u^2\right)\mathrm{d}t^2$$

$u=1$，光速，$\mathrm{d}s^2=0$，类光；

$u<1$，亚光速，$\mathrm{d}s^2<0$， 类时；

（3）特殊洛伦兹变换

$$\begin{cases} t'=\gamma\left(t-vx/c^2\right) \\ x'=\gamma\left(x-vt\right) \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}, \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\gamma\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^6\right)$$

$$x'^{\mu}=a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$$

$$a^{\mu}{}_{\nu}=\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

速度洛伦兹变换：

$$\begin{cases} u'_x=\dfrac{u_x-v}{1-u_xv} \\ u'_y=\dfrac{u_y}{\gamma^2\left(1-u_xv\right)} \\ u'_z=\dfrac{u_z}{\gamma^2\left(1-u_xv\right)} \end{cases}$$

(4)对应

惯性坐标--Lorentz坐标

间隔--闵氏线元

背景时空--闵氏时空

观者--类时曲线

惯性观者--类时测地线

(5)SR的基本假设

光速不变原理、狭义相对性原理。

狭义相对性原理：惯性观者和非惯性观者有绝对区别；各惯性观者平权。

1.3 惯性观者和惯性系

惯性坐标系：构成参考系的每个观者均为惯性观者；每个观者携带一个标准钟；有一个空间坐标值。

1.4 固有时和坐标时

观者的固有时就是ta的标准钟的读数。

标准钟：固有时=线长

$$\Delta\tau=\tau_2-\tau_1=\frac{1}{c}\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{-\mathrm{d}s^2}$$

事件 P 在坐标系中的 t 值称为坐标时。

二者的联系：

$$\mathrm{d}\tau^2=-\mathrm{d}s^2=\left(1-u^2\right)\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}t^2/\gamma_u^2$$

$$\mathrm{d}t=\gamma_u\mathrm{d}\tau$$

固有时为粒子所在的静系 (x',t') 中的时间（$\mathrm{d}x'=0$）。

$$\mathrm{d}s^2=-c^2\mathrm{d}t'^2=-c^2\mathrm{d}\tau^2$$

1.5 时空图

(1)惯性系之间的关系

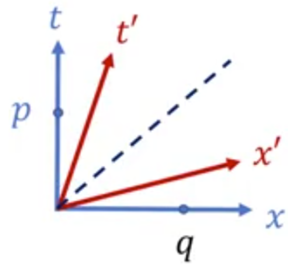
洛伦兹变换：

$$\begin{cases}t'=\gamma(t-vx)\\x'=\gamma(x-vt)\end{cases}$$

t' 轴的确定：t' 轴的表达式为 $x'=0$，即 $t=x/v$

x' 轴的确定：x' 轴的表达式为 $t' = 0$，即 $t = vx$

坐标轴正交性



在 Σ 系中，$p = (t, 0), q = (0, x)$，内积：

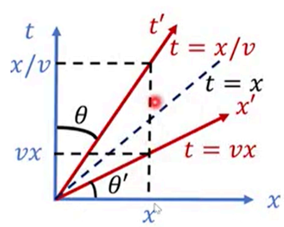
$$p \cdot q = p^\mu q^\nu \eta_{\mu\nu} = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -t \times 0 + 0 \times x = 0$$

在 Σ' 系中，$p = (\gamma t, -\gamma v t), q = (-\gamma v x, \gamma x), q = (-\gamma v x, \gamma x)$，内积：

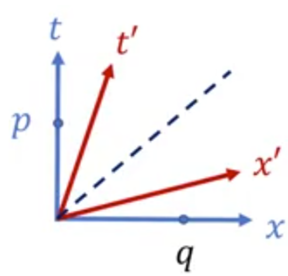
$$p \cdot q = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -\gamma t \times (-\gamma v x) + (-\gamma v t) \times \gamma x = 0$$

夹角相同 $\theta = \theta'$（一条直线斜率为 v，另一条直线斜率为 $1/v$）。

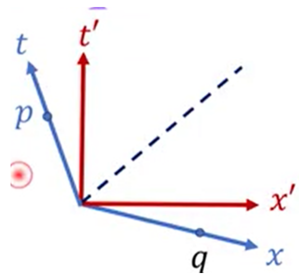
Σ 系的两个坐标轴也关于 Σ' 系的光锥对称。



Σ' 系的两个坐标轴关于 Σ 系的光锥对称。



Σ 系的两个坐标轴也关于 Σ' 系的光锥对称。



两系的光锥重合，都是角平分线。

t' 坐标线为 Σ 系中的一条类时曲线（测地线），代表一匀速直线运动的粒子的世界线。

x' 坐标线为 Σ 系中的一条类空曲线。

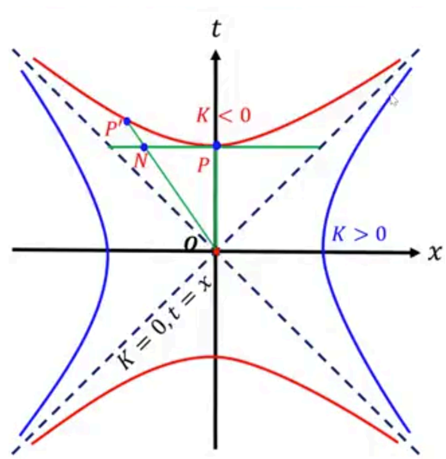
(2)等线长曲线（校准曲线）

考虑1+1维时空线元：

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

到原点 $O(0,0)$ 的线长（间隔）为常数 K 的所有点 (t,x) 的集合称为**等线长曲线**，满足方程：

$$-t^2 + x^2 = K^2$$



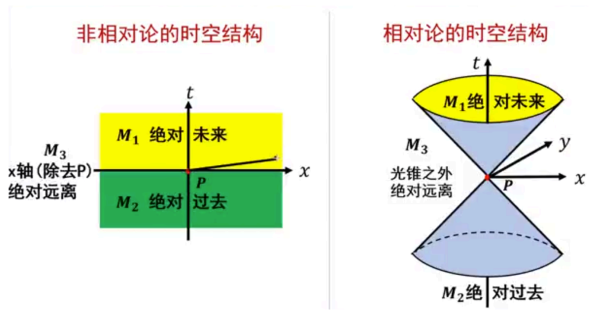
当 $K=0$ 时，$-t^2+x^2=0, t=\pm x$，曲线上任一点 M 到原点 O 的线长均为零，该曲线为光锥。

当 $K<0$ 时，$\dfrac{t^2}{\sqrt{-K}^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{-K}^2}=1, t=\pm\sqrt{x^2-K}$，曲线上任一点到原点 O 的线长相等。该曲线又称为校准曲线。$|OP|=|OP'|>|ON|$，斜边小于直角边。

当 $K>0$ 时，$\dfrac{x^2}{\sqrt{K}^2}-\dfrac{t^2}{\sqrt{K}^2}=1, x=\pm\sqrt{t^2+K}$，该曲线也是校准曲线。

1.6 SR与非SR的时空结构对比

理论	第一手概念	派生	
非SR	时间+空间	时空是绝对的（坐标系不依赖的）	一副扑克
SR	四维时空	3+1分解，时间、空间是相对的	无穷多副扑克



M_1 为时间 P 的绝对未来，与 P 有因果联系；

M_2 为时间 P 的绝对过去，与 P 有因果联系；

M_3 为时间 P 的绝对远离，与 P 无因果联系；