第1节作业

1-1

写出三维欧氏空间的线元(直角、球坐标系)。

直角坐标系:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$
 $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, 1, 1
ight)$

球坐标系:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d} heta^2 + r^2\sin^2 heta\mathrm{d}\phi^2
onumber$$
 $\eta_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^2, r^2\sin^2 heta
ight)$

1-2

写出二维球面的线元;写出二维环面的线元。

设球面半径为常数 R,二维球面线元:

$$\mathrm{d}s^2 = R^2 \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$$

设环心到管中心的距离为常数 R,环面的管半径为常数 r,环面管的极角为 ϕ ,环面的方位角为 θ ,则二维环面上一点有两个自由度,其直角坐标 (x,y,z) 与 (ϕ,θ) 坐标的关系为:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

微分:

$$\begin{cases} dx = -(R + r\cos\theta)\sin\phi d\phi - r\sin\theta\cos\phi d\theta \\ dy = (R + r\cos\theta)\cos\theta d\phi - r\sin\theta\sin\phi d\theta \\ dz = r\cos\theta d\theta \end{cases}$$

二维环面线元:

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}$$

$$= [-(R + r\cos\theta)\sin\phi d\phi - r\sin\theta\cos\phi d\theta]^{2}$$

$$+ [(R + r\cos\theta)\cos\theta d\phi - r\sin\theta\sin\phi d\theta]^{2}$$

$$+ (r\cos\theta d\theta)^{2}$$

$$= (R + r\cos\theta)^{2} d\phi^{2} + r^{2}d\theta^{2}$$

1-3

推导一般洛伦兹变换。

设有两个惯性系 S,S',同一事件 P 在其中的坐标分别用 $(x_0,x_1,x_2,x_3),(x_0',x_1',x_2',x_3')$ 表示,其中 $x_0=ct,x_0'=ct'$ 。

约定希腊字母代表 0, 1, 2, 3, 英文字母代表 1, 2, 3。

考虑在 S 中以速度 u_i 做匀速直线运动的**光子**,由于一切惯性系都平权,因此在 S' 系中观测,此粒子仍做匀速直线运动,速度记为 u_i' ,因此有运动方程:

$$egin{cases} x_i = x_{i0} + u_i(t-t_0) \ x_i' = x_{i0}' + u_i'(t'-t_0') \end{cases}$$

其中, $x_{i0}, x'_{i0}, t_0, t'_0$ 均为常数。

又光子以光速运动,而真空中光速在不同惯性系中恒为c,因此有:

$$\left\{egin{aligned} u_i u_i &= c^2 \ u_i' u_i' &= c^2 \end{aligned}
ight.$$

引入中间变量

$$egin{cases} eta_{\mu} = eta_0 rac{u_{\mu}}{c}, & (u_0 \equiv c) \ S = rac{c}{eta_0} (t - t_0) \ \xi_{\mu} = (ct_0, x_{i0}), & \xi_{\mu}' = (ct_0', x_{i0}') \end{cases}$$

光子运动方程可写为:

$$\begin{cases} x_{\mu} = \xi_{\mu} + \beta_{\mu} S \\ x'_{\mu} = \xi'_{\mu} + \beta'_{\mu} S' \end{cases}$$

光速不变原理可写为:

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu}\beta_{\mu}\beta_{\nu} = 0\\ \eta'_{\mu\nu}\beta'_{\mu}\beta'_{\nu} = 0 \end{cases}$$

设所求时空坐标变换为:

$$x'_{\mu} = f_{\mu}(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

下面分四步求解。

(1) 考虑惯性系条件对变换的限制

由各惯性系的等价性知, 洛伦兹变换的逆变换是唯一确定的, 其充要条件是变换的雅可比行列式非零:

$$\det\left(rac{\partial f_
u}{\partial x_\mu}
ight)
eq 0$$

于是:

$$rac{\mathrm{d}f_{\mu}}{\mathrm{d}S} = rac{\mathrm{d}x_{
u}}{\mathrm{d}S} rac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{
u}} = eta_{
u} rac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{
u}}$$
 $\mathrm{d}f_{\mu} = \mathrm{d}x'_{\mu} = eta'_{\mu} \mathrm{d}S' = rac{eta'_{\mu}}{eta'_{0}} \mathrm{d}f_{0}$
 $rac{\mathrm{d}f_{\mu}}{\mathrm{d}f_{0}} = rac{eta'_{\mu}}{eta'_{0}} = rac{u'_{\mu}}{c} = \mathrm{const}$
 $rac{eta'_{\mu}}{eta'_{0}} = rac{\mathrm{d}f_{\mu}}{\mathrm{d}f_{0}} = rac{\mathrm{d}f_{\mu}/\mathrm{d}S}{\mathrm{d}f_{0}/\mathrm{d}S} = rac{eta_{
u}\partial f_{\mu}/\partial x_{
u}}{eta_{\sigma}\partial f_{0}/\partial x_{\sigma}} = \mathrm{const}$

上式取对数后对 S 求导:

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[\ln\left(eta_
urac{\partial f_\mu}{\partial x_
u}
ight) - \ln\left(eta_\sigmarac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}
ight)
ight] = 0$$

即:

$$rac{eta_
ueta_\sigmarac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
u\partial x_\sigma}}{eta_
urac{\partial f_\mu}{\partial x_
u}} = rac{eta_
ueta_\sigmarac{\partial^2 f_0}{\partial x_
u\partial x_\sigma}}{eta_
urac{\partial f_0}{\partial x_
u}}$$

令上式左右恒等于 $2eta_\sigma\psi_\sigma,\psi_\sigma=\psi_\sigma(x_0,x_1,x_2,x_3)$,则:

$$eta_
ueta_\sigmarac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
u\partial x_\sigma}=2eta_
urac{\partial f_\mu}{\partial x_
u}eta_\sigma\psi_\sigma$$

注意到:

$$egin{aligned} 2eta_
u rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} eta_\sigma \psi_\sigma &= eta_
u rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} eta_\sigma \psi_\sigma + eta_
u rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} eta_\sigma \psi_\sigma \ &= eta_
u rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} eta_\sigma \psi_\sigma + eta_\sigma rac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} eta_
u \psi_
u \ &= eta_
u eta_\sigma \left(rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} \psi_\sigma + rac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \psi_
u
ight) \end{aligned}$$

因此:

$$eta_
ueta_\sigmarac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
u\partial x_\sigma}=2eta_
urac{\partial f_\mu}{\partial x_
u}eta_\sigma\psi_\sigma=eta_
ueta_\sigma\left(rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u}\psi_\sigma+rac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_
u
ight)$$

对某一对 (ν, σ) 有:

$$rac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
u \partial x_\sigma} = rac{\partial f_\mu}{\partial x_
u} \psi_\sigma + rac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \psi_
u$$

(2) 考虑光速不变原理对变换的限制

对比知,两式中 eta_\sigmaeta_λ 的二次式系数成正比,比例系数令为 $\lambda(x_0,x_1,x_2,x_3)$

$$\eta_{\mu
u}rac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{lpha}}rac{\partial f_{
u}}{\partial x_{eta}}=\lambda\eta_{lphaeta}$$

上式对 x_{ρ} 求导,并令 $\partial \lambda/\partial x_{\rho}=2\lambda \varphi_{\rho}$ 得:

$$\eta_{\mu
u}\left(rac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
ho\partial x_lpha}rac{\partial f_
u}{\partial x_eta}+rac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_
ho\partial x_eta}rac{\partial f_
u}{\partial x_lpha}
ight)=2\lambda\eta_{lphaeta}arphi_
ho$$

即:

$$2\eta_{lphaeta}\psi_{
ho}+\eta_{
holpha}\psi_{eta}+\eta_{
hoeta}\psi_{lpha}=2\eta_{lphaeta}arphi_{
ho}$$

令 $\rho \neq \alpha, \rho \neq \beta$,则 $\eta_{\rho\alpha} = \eta_{\rho\beta} = 0$,则:

$$\psi_{
ho}=arphi_{
ho},\quad
ho=0,1,2,3$$

$$2\psi_{
ho}=arphi_{
ho},\quad
ho=0,1,2,3$$

综合可得:

$$\psi_
ho=arphi_
ho=0, \quad
ho=0,1,2,3$$

$$rac{\partial \lambda}{\partial x_{
ho}} = 2\lambda arphi_{
ho} = 0, \quad \lambda = {
m const}$$

$$rac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_lpha \partial x_eta} = 0$$

这就是变换函数所要满足的线性条件。

(3) 确定线性变换的形式

令线性变换为:

$$x_{\mu}'=f_{\mu}=\sqrt{\lambda}\left(a_{\mu}+\eta_{
ho
ho}a_{\mu
u}x_{
u}
ight)$$

度规:

$$\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$$

 $a_{\mu\nu}$ 满足正交条件:

$$\left\{egin{aligned} \eta_{\mu
u}a_{\mulpha}a_{
ueta} &= \eta_{lphaeta}\ \eta_{\mu
u}a_{lpha\mu}a_{eta
u} &= \eta_{lphaeta} \end{aligned}
ight.$$

可以解出:

$$x_{\mu} = \eta_{
ho
ho} a_{
u\mu} \left(rac{x_{
u}'}{\sqrt{\lambda}} - a_{
u}
ight)$$

从 S 系看 S' 系固定点 $\mathrm{d} x_i'$ 以速度 v_i 运动,则:

$$\mathrm{d}x_i = rac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{0i}\mathrm{d}x_0', \quad \mathrm{d}x_0 = rac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{00}\mathrm{d}x_0'$$
 $rac{v_i}{c} = rac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_0} = rac{a_{0i}}{a_{00}}$ $\eta_{\mu
u}\mathrm{d}x_\mu'\mathrm{d}x_
u' = \lambda\eta_{lphaeta}\mathrm{d}x_lpha\mathrm{d}x_eta$

令 $\mathrm{d}x_i' = 0$ 则有:

$$\mathrm{d}x_0'^2 = \lambda \mathrm{d}x_0^2 \left(1 - v^2/c^2\right)$$

当 v=0 时有 $\mathrm{d}x_0'=\mathrm{d}x_0$,因此 $\lambda=1$,于是:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu
u} \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_
u = -\eta_{lphaeta} \mathrm{d}x_lpha' \mathrm{d}x_eta'$$
 $x_\mu' = a_\mu + \eta_{
ho
ho}a_{\mu
u}x_
u$

(4) 根据正交归一条件确定变换系数

为简便,取 t=0 时 t'=0,且原点 O,O' 重合。则 $a_{\mu}=0$,洛伦兹变换简化为:

$$x'_{\mu}=\eta_{
ho
ho}a_{\mu
u}x_{
u}$$

设 S' 系相对 S 系以速度 v_i 做匀速直线运动,则从 S 系观测 S' 系固定点 $\mathrm{d}x_i'=0$ 的速度为 v_i ; 又在 S' 系观察 S 系固定的 $\mathrm{d}x_i=0$ 以速度 v_i' 运动,则:

$$\begin{cases} a_{00}v_i = a_{0i}c \ a_{00}v_i' = a_{i0}c \end{cases}$$

引入单向顺时性条件,即要求洛伦兹变换不改变时间进程的方向:

$$a_{00} = \frac{\partial t'}{\partial t} > 0$$

在正交条件中令 $\alpha = \beta = 0$ 有:

$$\left\{ egin{aligned} a_{00}^2 - \left(a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2
ight) = 1 \ a_{00}^2 - \left(a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2
ight) = 1 \end{aligned}
ight.$$

可以解出变换系数:

$$egin{cases} a_{00} = rac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \equiv \gamma \ a_{0i} = \gamma rac{v_i}{c} \ a_{i0} = \gamma rac{v_i'}{c} \end{cases}$$

正交条件中取 α , β 中一个为 0 有:

$$\left\{egin{aligned} a_{00}v_i' = a_{ik}v_k \ a_{00}v_i = a_{ki}v_k' \end{aligned}
ight.$$

正交条件中取 α , β 均不为 0 有:

$$a_{ki}a_{kj} = -\eta_{ij} + a_{0i}a_{0j} = \delta_{ij} + \gamma^2 rac{v_i v_j}{c^2}$$

定义:

$$d_{ik} = -a_{ik} + rac{a_{i0}a_{0k}}{a_{00}+1} = -a_{ik} + (\gamma-1)rac{v_i'v_k}{v^2}$$

则一般固有洛伦兹变换系数为:

$$egin{cases} a_{00} = \gamma \ a_{0i} = \gamma rac{v_i}{c} \ a_{i0} = -\gamma rac{d_{ij}v_j}{c} \ a_{ik} = -d_{ik} - (\gamma - 1)rac{d_{ij}v_jv_k}{v^2} \end{cases}$$

1-4

在 $v \ll c$ 的条件下验证伽利略变换。

$$egin{cases} x' = \gamma(x-vt) \ t' = \gamma\left(t-vx/c^2
ight) \end{cases}$$

其中,

$$\gamma = rac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

当 $v\ll c$ 时, $\gamma\approx 1, vx/c^2\approx 0$,洛伦兹变换退化为伽利略变换:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

1-5

证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

取 c=1, 洛伦兹变换:

$$egin{cases} x' = \gamma(x-vt) \ y' = y \ z' = z \ t' = \gamma\left(t-vx
ight) \end{cases}, \quad \gamma = rac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

线元定义为:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

要证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变,只需要证明:

$$-dt'^{2} + dx'^{2} = -dt^{2} + dx^{2}$$

注意到:

$$dx' = \gamma (dx - vdt)$$
$$dt' = \gamma (dt - vdx)$$

于是:

$$-dt'^{2} + dx'^{2} = \gamma^{2} \left[-(dt - vdx)^{2} + (dx - vdt)^{2} \right]$$

$$= \gamma^{2} \cdot \left[(v^{2} - 1) dt^{2} + (1 - v^{2}) dx^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{1 - v^{2}} \cdot (1 - v^{2}) \left(-dt^{2} + dx^{2} \right)$$

$$= -dt^{2} + dx^{2}$$

因此在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

1-6

在 $v \ll c$ 的条件下验证速度的伽利略变换。

$$\left\{ egin{aligned} u_x' &= rac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2} \ u_y' &= rac{u_y}{\gamma \left(1 - v u_x/c^2
ight)} \ u_z' &= rac{u_z}{\gamma \left(1 - v u_x/c^2
ight)} \end{aligned}
ight.$$

当 $v \ll c$ 时, $vu_x/c^2 pprox 0, \gamma pprox 1$,于是速度的洛伦兹变换退化为速度的伽利略变换:

$$\left\{egin{aligned} u_x' &= u_x - v \ u_y' &= u_y \ u_z' &= u_z \end{aligned}
ight.$$

1-7

谈谈你对广义相对性原理的理解,给出广义相对论中的光速不变原理的表述。

广义相对性原理:物理定律在所有参考系(包括非惯性系)中形式相同。这意味着自然规律不依赖于观察者的运动状态,惯性力和引力效应在局部不可区分。引力被视为时空弯曲的表现,物质和能量决定时空几何,时空几何又影响物质运动。

广义相对论中的光速不变原理的表述:在局部惯性参考系中,光速在真空中恒为c,且与光源和观察者的运动无关。

1-8

假设我们的宇宙是二维的,且物质分布是均匀各项同性的,写出我们宇宙的度规形式。

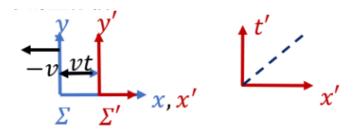
物质分布是均匀各项同性的,则度规与空间坐标无关。采用极坐标,线元为:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2
ight)$$

度规为:

$$\eta_{\mu
u}=\mathrm{diag}\left(-1,a^2(t),a^2(t)r^2
ight)$$

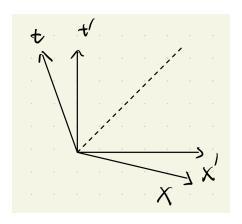
1-9



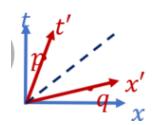
在惯性坐标系 Σ' 系中画惯性系 Σ 的坐标轴。

$$\left\{egin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \ t &= \gamma\left(t' + vx'
ight) \end{aligned}
ight.$$

$$x \Leftrightarrow t = \gamma (t' + vx') = 0 \Longrightarrow t' = -vx'$$



1-10



在 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases}$$

$$t'$$
 $ext{ in: } x' = \gamma(x - vt) = 0 \Longrightarrow t = x/v$

x' $ext{ in: } t' = \gamma (t - vx) = 0 \Longrightarrow t = vx$

事件 $p=(t_p,vt_p)$, 事件 $q=(t_q,t_q/v)$, 内积:

$$p \cdot q = \eta_{\mu
u} p^{\mu} q^{
u} = - p^0 q^0 + p^1 q^1 = - t_p t_q + (v t_p) \left(t_q / v
ight) = 0$$

因此 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

1-11



P,Q 两事件是否有因果关系?

P 在 Q 的光锥之外,两事件没有因果关系。

1-12

根据下面史瓦西时空的度规画出该时空中 (t,r) 这两维时空的光锥结构,讨论该时空中的固有时和 坐标时的关系,以及固有距离和坐标距离的关系。

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + rac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\left(\mathrm{d} heta^2 + \sin^2 heta\mathrm{d}arphi^2
ight), \quad f(r) = 1 - rac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

光锥结构

只考虑径向, $\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$,则线元为:

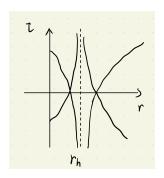
$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + rac{\mathrm{d}r^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - rac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$
 $\mathrm{d}s^2 = 0 \Longrightarrow \left(rac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}
ight)^2 = rac{1}{f^2(r)} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \pm rac{1}{f(r)}\mathrm{d}r = \pm rac{1}{1 - r_h/r}\mathrm{d}r$

积分:

$$egin{aligned} t-t_0 &= \int \mathrm{d}t = \pm \int rac{1}{1-r_h/r} \mathrm{d}r \ &= \pm \int rac{1-r_h/r+r_h/r}{1-r_h/r} \mathrm{d}r \ &= \pm \int \left(1+rac{r_h}{r-r_h}
ight) \mathrm{d}r \ &= \pm \left[r+r_h \int rac{1}{r-r_h} \mathrm{d}\left(r-r_h
ight)
ight] \ &= \pm \left(r+r_h \ln |r-r_h|
ight) \end{aligned}$$

即:

$$t=t_0\pm (r+r_h\ln |r-r_h|)$$



当 $r>r_h$ 时,光锥是正常的,光可以向外或向内传播。

当 $r=r_h$ 时,光锥坍缩为一条线,光无法逃逸。

当 $r < r_h$ 时,光锥反转,所有光都朝向奇点 r = 0 传播。

固有时和坐标时的关系

对于静止观察者 $\mathrm{d} r^2=0$,其固有时

$$\mathrm{d} au^2 = -\mathrm{d}s^2 = f(r)\mathrm{d}t^2 = \left(1 - rac{r_h}{r}
ight)\mathrm{d}t^2$$

当 $r o \infty$ 时,f(r) o 1,固有时和坐标时一致;

当 $r o r_h$ 时,f(r) o 0,固有时趋于无穷小。

固有距离和坐标距离的关系

对于径向距离 $\mathrm{d}t^2=0$,固有距离为:

$$\mathrm{d}l = rac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = rac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r_h/r}}$$

当 $r o \infty$ 时,f(r) o 1,固有距离与坐标距离一致;

当 $r
ightarrow r_h$ 时,f(r)
ightarrow 0,固有距离趋于无穷大。