

## ▼ 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

### ▼ 向量分析基本知识

- 爱因斯坦求和约定
- Kronecher delta 符号  $\delta_{ij}$
- 三阶 Levi-Citita 符号  $\varepsilon_{ijk}$
- 一些简单算例

### ▼ 梯度、散度、旋度

- 梯度 (gradient) 的定义
- 散度 (divergence) 的定义
- 旋度 (curl) 的定义
- 直角坐标系下的梯度、散度、旋度
- $\nabla$  算子

### ▼ 梯度与方向导数的关系

- 方向导数
- 梯度和方向导数的关系

### ▪ 散度与高斯定理

### ▪ 旋度与斯托克斯定理

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

#### ▪ 分析工具

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

- 与  $\vec{x}$  有关的公式
- 从左往右证的公式
- 需要注意力的公式
- 从右往左证的公式

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

- 高斯定理
- 斯托克斯定理
- 格林第一恒等式
- 格林第二恒等式

## ▼ 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

### ▼ $\nabla$ 算子

- 直角坐标下的  $\nabla$
- 球坐标下的  $\nabla$
- 柱坐标下的  $\nabla$

### ▼ $\nabla^2$ 算子

- 直角坐标下的  $\nabla^2$
- 球坐标下的  $\nabla^2$
- 柱坐标下的  $\nabla^2$

## ▪ 第3章 线性空间

## ▼ 第4章 复变函数的概念

### ▪ 欧拉公式

### ▼ 复变函数

#### ▼ 常见复变函数

- 有理函数
- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数
- 双曲函数

## ▼ 第5章 解析函数

### ▼ 复变函数的导数

- 复变函数的连续性
- 复变函数的导数
- 柯西-黎曼条件
- 命题的证明
- ▼ 复变函数的解析性
  - 复变函数的解析性
  - ▼ 相关定理
    - 定理1
    - 定理2
    - 定理3
    - 定理4
  - ▼ 例题
    - ▼ 例1
      - 方法1 (积分法)
    - 例2
    - 例3
- ▼ 第6章 复变函数积分
  - ▼ 复变函数积分
    - 复变函数积分的定义
    - 复变函数积分的性质
  - ▼ 柯西积分定理
    - 单连通区域柯西积分定理
    - 多连通区域的柯西积分定理
  - 柯西积分公式
  - 解析函数高阶导数的积分表达式
- ▼ 第7章 复变函数的级数展开
  - 解析函数的泰勒展开
  - ▼ 解析函数的洛朗展开
    - 复变函数的零点
    - 复变函数的奇点
    - ▼ 奇点的分类
      - 孤立奇点
      - 非孤立奇点
      - 孤立奇点的分类
    - 解析函数的洛朗展开定理
    - ▼ 例题
      - 例1
      - 例2
- ▼ 第8章 留数定理及其在实积分中的应用
  - ▼ 留数定理
    - 留数的定义
    - ▼ 留数的求法
      - 定义法
      - 极限法
      - 特殊情况
    - ▼ 留数定理
      - 例1
  - ▼ 留数定理在实积分中的应用
    - 计算无穷限奇异积分的柯西主值
    - 利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题
    - ▼ 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分
      - 例1
      - 例2
- ▼ 第9章 傅里叶变换

- ▼ 傅里叶级数
  - 三角函数基的傅里叶级数
  - e 指数基的傅里叶级数
- ▼ 傅里叶变换(to be continued)
  - 傅里叶分解与傅里叶变换
  - ▼ 傅里叶变换的基本性质
    - 线性定理
    - 延迟定理
    - 位移定理
    - 标度变换定理
    - 微分定理
    - 卷积定理
- ▼ 第10章 拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的定义
  - ▼ 拉普拉斯变换的性质（两种记号）
    - 线性定理
    - 延迟定理
    - 位移定理
    - 标度变换定理
    - 卷积定理
    - 微分定理
    - 积分性质
    - 周期函数变换定理
  - 常用拉普拉斯变换及反演
  - ▼ 拉普拉斯变换的应用
    - ▼ 解常微分方程
      - 例1
- ▼ 第11章  $\delta$  函数
  - $\delta$  函数的定义
  - $\delta$  函数的性质
  - ▼ 三维  $\delta$  函数
    - 三维直角坐标系
    - 三维球坐标系
    - 三维柱坐标系
  - 不同形式的  $\delta$  函数
  - ▼  $\delta$  函数的傅里叶展式和傅里叶变换
    - 一维
    - 三维
  - ▼ 例题
    - 例1
- 第12章 小波变换初步
- ▼ 第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题
  - ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式
    - 波动方程（双曲方程）
    - 输运方程（抛物方程）
    - 泊松方程（椭圆方程）
    - 拉普拉斯方程
  - ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件
    - ▼ 初始条件
      - 波动方程初始条件
      - 输运方程初始条件
      - 泊松方程初始条件
    - ▼ 边界条件
      - 第一类边界条件

- 第二类边界条件
- 第三类边界条件
- 自然边界条件
- 周期性边界条件
- 衔接条件
- ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件
  - 波动方程定解条件
  - 输运方程定解条件
  - 泊松方程定解条件
- ▼ 第14章 分离变量法
  - 例1
  - 例2
  - 例3
- ▼ 第15章 曲线坐标系下的分离变量
  - ▼ 球坐标系下方程的分离变量
    - ▼ 拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量
      - 径向方程
      - 球函数方程
      - 方位角满足的方程
      - 连带勒让德方程
      - 勒让德方程
    - ▼ 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量
      - 球贝塞尔方程
      - 球函数方程
      - 方位角满足的方程
      - 连带勒让德方程
      - 勒让德方程
  - ▼ 柱坐标系下方程的分离变量
    - ▼ 柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量
      - $\Phi(\varphi)$  满足的方程
      - $Z(z)$  满足的方程
      - $R(\rho)$  满足的方程及贝塞尔方程
- ▼ 第16章 球函数
  - ▼ 勒让德多项式
    - 前几个勒让德多项式
  - ▼ 勒让德多项式的性质
    - 罗德里格斯公式（勒让德多项式的微分表达式）
    - 勒让德多项式的生成函数（母函数）
    - 勒让德多项式的递推公式
    - 勒让德函数的正交归一性
  - ▼ 具有轴对称的拉普拉斯方程的求解
    - 例1
    - 例2
    - 例3
    - 例4
- ▼ 第17章 柱函数
  - ▼ 贝塞尔函数
    - 贝塞尔函数（第一类贝塞尔函数）和诺伊曼函数（第二类贝塞尔函数）
  - ▼ 贝塞尔方程的通解
    - 非整数阶贝塞尔方程的通解
    - 整数阶贝塞尔方程的通解
  - 整数阶贝塞尔函数的简单性质
  - 贝塞尔函数的递推关系
  - 柱函数

## ▼ 例题

### ▪ 例1

- 第18章 格林函数法
- 第19章 其他方程求解
- 第20章 非线性数学物理方程初步
- 第21章 泛函的变分
- 第22章 变分原理

# 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

## 向量分析基本知识

### 爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标  $i$  就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标  $i$  为“哑标”。

比如， $\mathbb{R}^3$  空间中的向量  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \equiv \sum_i A_i \vec{e}_i$$

其中， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  分别是  $x, y, z$  轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  简写为：

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \rightarrow \vec{A} = A_i \vec{e}_i$$

这样就省去了写求和符号  $\sum_i$  的工作。

### Kronecher delta 符号 $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

### 三阶 Levi-Citita 符号 $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到123} \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到123} \\ 0 & , ijk \text{中有相同指标} \end{cases}$$

可以利用  $\varepsilon_{ijk}$  表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

### 一些简单算例

- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
- $A_i \delta_{ij} = A_j$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{e}_i) \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

- $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k$$

## 梯度、散度、旋度

### 梯度 (gradient) 的定义

设  $\psi(\vec{x})$  是标量场,  $\psi(\vec{x})$  的梯度, 记为  $\text{grad } \psi(\vec{x})$ , 由下式定义:

$$\text{grad } \psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\psi(\vec{x})$$

其中,  $d\vec{x}$  是位矢  $\vec{x}$  的微小变化,  $d\psi(\vec{x})$  是标量场  $\psi(\vec{x})$  因位矢  $\vec{x}$  变化  $d\vec{x}$  而引起的相应的变化。具体来说,  $d\psi(\vec{x})$  的定义为:

$$d\psi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x} + d\vec{x}) - \psi(\vec{x})$$

### 散度 (divergence) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的散度, 记为  $\text{div } \vec{A}$ , 定义为:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

### 旋度 (curl) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的旋度, 记为  $\text{curl } \vec{A}$ , 由下式定义:

$$(\text{curl } \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

其中,  $\sigma$  是与  $\vec{n}$  垂直的面元。  $\vec{n}$  与面元  $\sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

### 直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_i \partial_i \psi$$

$$\text{div } \vec{A} = \partial_i A_i$$

$$\text{curl } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k$$

### $\nabla$ 算子

$\nabla$  算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为:

$$\nabla \equiv \vec{e}_i \partial_i$$

其中,  $\partial_i$  的定义为:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用  $\nabla$  算子, 可将梯度、散度、旋度表示为:

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_i \partial_i \psi \equiv \nabla \psi$$

$$\text{div } \vec{A} = \partial_i A_i \equiv \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\text{curl } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \equiv \nabla \times \vec{A}$$

为了书写方便, 以后用  $\nabla \psi, \nabla \cdot \vec{A}, \nabla \times \vec{A}$  分别来指代标量场的梯度、矢量场的散度、矢量场的旋度。

# 梯度与方向导数的关系

## 方向导数

标量场  $\psi$  在  $\vec{x}$  点处沿  $\vec{v}$  方向的方向导数，记为  $\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$ ，定义为：

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}\equiv\lim_{v\rightarrow 0^+}\frac{\psi(\vec{x}+\vec{v})-\psi(\vec{x})}{v}$$

特别地，标量场  $\psi$  在曲面  $\Sigma$  上的  $\vec{x}$  点处沿曲面上  $\vec{x}$  点的外法向的方向导数简记为：

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}\right|_{\Sigma}$$

## 梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi$$

设  $\mathrm{d}\vec{x}=\vec{n}\mathrm{d}x$ ，其中  $\vec{n}$  是与  $\mathrm{d}\vec{x}$  同向的单位向量，则有：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\psi$$

即：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场  $\psi$  的梯度  $\nabla\psi$  在某一方向  $\vec{n}$  的投影恰等于标量场沿这一方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$ 。

# 散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla\cdot\vec{A}\equiv\lim_{V\rightarrow 0^+}\frac{1}{V}\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

# 旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\rightarrow 0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\Sigma}(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

# $\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

## 分析工具

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{A} = A_i \vec{e}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla \psi = \vec{e}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{e}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

### 与 $\vec{x}$ 有关的公式

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3$$

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = 3$$

$$\nabla \times \vec{x} = \vec{0}$$

$$\nabla \times \vec{x} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \delta_{jk} = \vec{0}$$

### 从左往右证的公式

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$$

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \vec{e}_i \partial_i (\varphi\psi) \\ &= \vec{e}_i \varphi \partial_i \psi + \vec{e}_i \psi \partial_i \varphi \\ &= \varphi \vec{e}_i \partial_i \psi + \psi \vec{e}_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i (\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i (\varphi A_i) \\ &= \varphi \partial_i A_i + A_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi \\ &= (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A} \end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}$$



$$\begin{aligned}
\nabla \times (\varphi \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (A_k \partial_j \varphi + \varphi \partial_j A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (\nabla \varphi)_j A_k + \varphi \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\
&= (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i \\
&= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\
&= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\
&= \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\
&= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\
&= B_k (\nabla \times \vec{A})_k - A_j (\nabla \times \vec{B})_j \\
&= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m) \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\
&= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m \\
&= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_m \partial_l A_m - \vec{e}_m \partial_l \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_l \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_m \vec{e}_m \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
\end{aligned}$$

## 需要注意力的公式

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \varphi) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \varphi)_k \\
&= \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi
\end{aligned}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是  $\partial_j \partial_k \varphi = \partial_k \partial_j \varphi$ ，再结合  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ ，有：

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi &= -\vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \varphi \\
&= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi
\end{aligned}$$

最后一步是因为  $j, k$  都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明：

$$\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}$$

于是：

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

这就是说：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

## 从右往左证的公式

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m \\ &= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m \\ &= B_m \vec{e}_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m \\ &= B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m \\ &= \nabla(A_m B_m) \\ &= \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

### 高斯定理

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

### 斯托克斯定理

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

### 格林第一恒等式

$$\oint_{\partial \Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV$$

注意到：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \partial_i (\psi \nabla \phi)_i \\
&= \partial_i (\psi \partial_i \phi) \\
&= (\partial_i \phi) (\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi \\
&= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi \\
&= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi
\end{aligned}$$

于是由高斯定理，有：

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV \\
&= \int_{\Omega} [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi] dV \\
&= \int_{\Omega} [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV
\end{aligned}$$

## 格林第二恒等式

$$\oint_{\partial \Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV$$

利用  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$  可得：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) - (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot (\nabla \psi)) \\
&= \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi
\end{aligned}$$

于是由高斯定理可得：

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) dV \\
&= \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV
\end{aligned}$$

# 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

## ▽ 算子

### 直角坐标下的 ▽

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

### 球坐标下的 ▽

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

### 柱坐标下的 ▽

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

# $\nabla^2$ 算子

## 直角坐标下的 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

## 球坐标下的 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

## 柱坐标下的 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# 第3章 线性空间

# 第4章 复变函数的概念

## 欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos \theta + \mathrm{i} \sin \theta, \ \theta \in \mathbb{C}$$

## 复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z) : \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$$

## 常见复变函数

### 有理函数

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n}, \ a_i, b_i \in \mathbb{C}, \ m, n \in \mathbb{Z}$$

### 指数函数

$$f(z) = \mathrm{e}^z$$

### 对数函数

$$f(z) = \ln z$$

### 幂函数

$$f(z) = z^a, \ a \in \mathbb{C}$$

### 三角函数

$$\cos z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

性质:

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$|\cos z|, |\sin z|$  可以大于 1, 这与实三角函数不同。

## 双曲函数

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系:

$$\sinh z = -i \sin(iz)$$

$$\cosh z = \cos(iz)$$

双曲函数的性质:

$$\sinh(z + i2\pi) = \sinh z$$

$$\cosh(z + i2\pi) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

# 第5章 解析函数

## 复变函数的导数

### 复变函数的连续性

复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内有定义。当自变量  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时, 都有:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称  $f(z)$  在  $z_0$  点连续。

若  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内的所有点都连续, 则称  $f(z)$  在  $\Omega$  内连续。

### 复变函数的导数

当  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时, 即  $\Delta z = z - z_0$  以任何方式趋于 0 时, 若极限:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称  $f(z)$  在  $z_0$  点可导， $f(z)$  在  $z_0$  点的导数记为  $f'(z_0)$

## 柯西-黎曼条件

设复变函数  $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ，若  $f(z)$  在  $z$  点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是柯西-黎曼条件(C-R条件)。

## 命题的证明

设  $z = x + \mathrm{i}y$ ,  $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ，则：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

由于  $f(z)$  在  $z$  点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与  $\Delta z$  趋于 0 的方式无关。

特别地，

(1) 令：

$$\mathrm{i}\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令：

$$\Delta x = 0, \mathrm{i}\Delta y \rightarrow 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于  $f(z)$  在  $z_0$  点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是  $f(z)$  在  $z$  点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

## 复变函数的解析性

### 复变函数的解析性

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域内每一点都可导，则称  $f(z)$  在  $z_0$  点是**解析的**。

若复变函数  $f(z)$  在  $\Omega$  内每一点都可导，则  $f(z)$  在  $\Omega$  内是**解析的**，或称为**全纯的**。

## 相关定理

### 定理1

复变函数  $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$  在区域  $\Omega$  为解析函数  $\iff$  在与复平面  $\Omega$  相应的实平面区域内  $u(x, y), v(x, y)$  可微, 且  $u(x, y), v(x, y)$  满足 C-R 条件。

特别地, 若  $f(z)$  为  $\Omega$  上的连续函数, 则  $f(z)$  是  $\Omega$  上的解析函数  $\iff f(z)$  满足 C-R 条件。

### 定理2

若  $f(z)$  为区域  $\Omega$  上的解析函数, 且  $f(z)$  为实函数, 即  $f(z) = f^*(z)$ , 则  $f(z)$  为常数。

### 定理3

若  $f(z)$  为区域  $\Omega$  上的解析函数, 则在  $\Omega$  上有  $\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z} = 0$ , 即  $f(z, z^*)$  不依赖于  $z^*$

### 定理4

在复平面区域  $\Omega$  内解析的函数  $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ , 其实部  $u(x, y)$  和虚部  $v(x, y)$  都是平面区域  $\Omega$  内的调和函数 (即满足二维拉普拉斯方程  $\nabla^2 u(x, y) = 0, \nabla^2 v(x, y) = 0$  的函数) 。

## 例题

### 例1

已知解析函数的实部  $u = x^3 - 3xy^2$ , 求该解析函数。

#### 方法1 (积分法)

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy \\ \mathrm{d}v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y} \mathrm{d}y = 6xy \mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y\end{aligned}\tag{1}$$

选择积分路径为:  $\underbrace{(0, 0) \rightarrow (x, 0)}_{C_1}, \underbrace{(x, 0) \rightarrow (x, y)}_{C_2}$ , 两边积分:

$$\begin{aligned}v(x, y) - v(0, 0) &= \int_{C_1} 6xy \mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y + \int_{C_2} 6xy \mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y \\ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y} (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y \\ &= 3x^2 y - y^3\end{aligned}$$

令  $v(0, 0) = C$ , 则:

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + v(0, 0) = 3x^2 y - y^3 + C$$

于是:

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2 y - y^3 + C)\end{aligned}$$

## 例2

请证明：柱坐标系下的解析函数  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$  满足的 C-R 方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right)
\end{aligned}$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = - \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \right] \quad (2)$$

(1)  $\times \cos \varphi$  + (2)  $\times \sin \varphi$  得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

(2)  $\times \cos \varphi$  - (1)  $\times \sin \varphi$  得到:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

### 例3

已知解析函数的虚部  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ , 求该解析函数。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

函数解析, 故满足 C-R 条件, 即满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

于是:

$$\begin{aligned}
du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\
&= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy
\end{aligned}$$

极坐标变换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

于是:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} u &= \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \mathrm{d} x+\frac{2 x y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \mathrm{d} y \\ &= \frac{\cos \varphi}{\rho^2} \mathrm{d} \rho+\frac{\sin \varphi}{\rho} \mathrm{d} \varphi \\ &= \mathrm{d}\left(\frac{-\cos \varphi}{\rho}\right) \end{aligned}$$

于是:

$$u=\frac{-\cos \varphi}{\rho}+C=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$$

综上,

$$\begin{aligned} f(z) &= u+\mathrm{i} v \\ &=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+C\right)+\mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

# 第6章 复变函数积分

## 复变函数积分

### 复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数  $f(z)$  在其有定义的区域  $\Omega$  中, 沿某一曲线  $C$  的**有向的线积分**, 记为  $\int_C f(z) \mathrm{d} z$ , 其定义为:

$$\int_C f(z) \mathrm{d} z=\lim _{\substack{n \rightarrow \infty \\ \left|z_j-z_{j-1}\right| \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n f\left(\xi_j\right)\left(z_j-z_{j-1}\right)$$

把  $C$  分成  $n$  段,  $\xi_j$  是  $C$  上  $z_{j-1}$  点到  $z_j$  点的中的某一点。

### 复变函数积分的性质

$$\left|\int_C f(z) \mathrm{d} z\right| \leqslant \int_C|f(z)||\mathrm{d} z|$$

## 柯西积分定理

### 单连通区域柯西积分定理

设  $f(z)$  在单连通区域  $\Omega$  上解析, 当积分路径为  $\Omega$  内的任一闭合曲线  $C$  时, 有:

$$\oint_{C^+} f(z) \mathrm{d} z=0$$

### 多连通区域的柯西积分定理

设  $f(z)$  在具有  $k$  个内边界  $C_1, C_2, \cdots, C_k$  的回路  $C$  内的复连通区域内解析, 规定  $C; C_1, C_2, \cdots, C_k$  的正方向为逆时针, 则:

$$\oint_{C^+} f(z) \mathrm{d} z=\oint_{C_1^+} f(z) \mathrm{d} z+\oint_{C_2^+} f(z) \mathrm{d} z+\cdots+\oint_{C_k^+} f(z) \mathrm{d} z$$

# 柯西积分公式

若  $f(z)$  在 闭合回路  $C$  所包围的区域上解析， $z_0$  是此区域中的一点，则：

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

## 解析函数高阶导数的积分表达式

设  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内解析， $C$  为  $\Omega$  内的任一闭合回路，对于  $C$  所包围的区域内的任一点  $z$ ，有：

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

# 第7章 复变函数的级数展开

## 解析函数的泰勒展开

设  $z_0$  为函数  $f(z)$  解析区域  $\Omega$  内的一点，以  $z_0$  为圆心的圆周  $C$  在  $\Omega$  内，则  $f(z)$  可以在  $C$  内展成泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中，展开系数为：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

## 解析函数的洛朗展开

### 复变函数的零点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点的函数值  $f(z_0) = 0$ ，则称  $z_0$  为 复变函数  $f(z)$  的零点。

### 复变函数的奇点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点**不解析**，即  $f(z)$  在  $z_0$  点的导数不存在或不唯一，则称  $z_0$  为复变函数  $f(z)$  的奇点。

### 奇点的分类

#### 孤立奇点

若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点，而在  $z_0$  点任意小的邻域内，函数  $f(z)$  解析，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点。

#### 非孤立奇点

若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点，而在  $z_0$  点任意小的邻域内，除  $z_0$  点外存在  $f(z)$  的其他奇点，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的非孤立奇点。

#### 孤立奇点的分类

**极点**：设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点，若存在一个正整数  $k$ ，使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的  $k$  阶极点。

**本性奇点**：设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点，若**不存在**一个正整数  $k$ ，使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的本性奇点。

**可去奇点:** 设  $z_0$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点,  $f(z)$  在  $z_0$  点没有定义, 但在  $z_0$  的去心邻域内解析, 此时可定义  $f(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  使  $f(z)$  在  $z_0$  点解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的可去奇点。

## 解析函数的洛朗展开定理

若函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心, 半径为  $R_1, R_2$  的两个圆周  $C_1, C_2$  所包围的环形区域  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  上解析, 则在此区域内  $f(z)$  可展成 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

其中,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$C$  是任一条在环形区域内把  $C_2$  包围在内的闭曲线。

## 例题

### 例1

求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在环形区域  $0 < |z| < 1$  和  $|z| > 1$  内, 在  $z_0 = 0$  处的展开式。

$0 < |z| < 1$  区域在  $z_0 = 0$  处展开  $f(z)$ :

由于  $|z| < 1$ , 于是有几何级数:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

$|z| > 1$  区域在  $z_0 = 0$  处展开  $f(z)$ :

注意到  $|z| > 1$ , 则  $|1/z| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}$$

## 例2

求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在  $z_1 = 0$  和  $z_2 = 1$  附近的展开式。

$f(z)$  在  $z_1 = 0$  附近的展开式:

由于  $0 < |z-0| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}$$

$f(z)$  在  $z_2 = 1$  附近的展开式:

由于  $0 < |z-1| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
\end{aligned}$$

# 第8章 留数定理及其在实积分中的应用

## 留数定理

### 留数的定义

设  $z_0$  是函数  $f(z)$  的孤立奇点, 设  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$  在  $z_0$  点的留数, 记为  $\text{Res}f(z_0)$ , 定义为:

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中,  $a_{-1}$  是  $f(z)$  在  $z_0$  点的洛朗展开式中  $(z-z_0)^{-1}$  项的系数

### 留数的求法

#### 定义法

直接把  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  点作洛朗展开, 找到  $(z-z_0)^{-1}$  前的系数  $a_{-1}$ , 由留数的定义可知:

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

#### 极限法

当  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点时,  $f(z)$  可在其孤立奇点  $z_0$  点作如下的洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

则:

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

#### 特殊情况

若  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ ,  $z_0$  为  $g(z)$  的一阶极点, 即  $g(z_0) = 0$ , 且  $h(z)$  和  $g(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内解析, 则:

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

### 留数定理

若  $f(z)$  在回路  $C$  所包围的区域内除有限个孤立奇点  $z_1, z_2, \dots, z_k$  外解析, 则  $f(z)$  沿  $C^+$  的回路积分值等于  $f(z)$  在  $z_1, z_2, \dots, z_k$  的留数之和乘  $2\pi i$ , 即:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}f(z_j)$$

#### 例1

计算回路积分  $I = \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$ , 其中回路  $l$  的方程为  $x^2+y^2-2x-2y=0$

令  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2}$

在回路  $l : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$  内的孤立奇点有:  $z_1 = i, z_2 = 1$ ,  $z_1$  为一阶极点,  $z_2$  为二阶极点。

计算  $f(z)$  在回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^0}{dz^0} (z - i) \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2i(i - 1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^1}{dz^1} (z - 1)^2 \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}I &= \oint_l \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} \\ &= 2\pi i [\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{2}\end{aligned}$$

## 留数定理在实积分中的应用

### 计算无穷限奇异积分的柯西主值

### 利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

### 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

其中,  $f(\cos \theta, \sin \theta)$  为不包含有孤立奇点  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数。

计算此类积分, 利用欧拉公式换元, 将实积分转换为复平面单位圆上的复积分, 最后利用留数定理计算积分。

令  $z = e^{i\theta}$ , 有:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

于是:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ dz &= ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta\end{aligned}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

于是：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= \oint_{C^+} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz \end{aligned}$$

其中， $C$  是以复平面原点为圆心的单位圆周，即  $C: |z| = 1$

## 例1

计算定积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ ，其中  $0 < \varepsilon < 1$

令：

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

于是：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \\ &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \end{aligned}$$

其中， $C$  是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令  $f(z) = \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$ ，被积函数的两个一阶极点为：

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数  $f(z)$  可写为：

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}$$

只有  $z_1$  在积分回路内。

计算  $f(z)$  在回路内孤立奇点  $z_1$  处的留数：

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\varepsilon(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

由留数定理，有：



$$\begin{aligned}
 \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) \\
 &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
 &= \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
 \end{aligned}$$

于是积分为：

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \\
 &= \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
 \end{aligned}$$

## 例2

计算定积分：  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} d\theta$

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

设  $C$  是复平面上的单位圆,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} d\theta \\
 &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}
 \end{aligned}$$

令  $f(z) = \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ ,  $f(z)$  有两个一阶极点  $z_1 = 2-i, z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ , 只有  $z_2$  在单位圆  $C$  内。

由于  $z_1, z_2$  是  $(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i = 0$  的两根, 于是  $f(z)$  可表达为:

$$f(z) = \frac{1}{(1-2i)(z-z_1)(z-z_2)}$$

$f(z)$  在  $z_2$  处的留数:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_2) f(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(1-2i)(z-z_1)} \\
 &= \frac{1}{(1-2i)(z_2-z_1)} \\
 &= \frac{1}{4i}
 \end{aligned}$$

于是由留数定理, 有:

$$\begin{aligned}
 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}
I &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

## 第9章 傅里叶变换

### 傅里叶级数

设  $\mathcal{H}$  是一个希尔伯特空间，其元素是周期为  $2l$  的单变量函数， $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ ， $\mathcal{H}$  上两个元素的内积，记为  $\langle f_1, f_2 \rangle$ ，定义为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

其中， $x$  是参数，而内积与参数无关。有时为了指明参数，也将内积写为：

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx$$

若  $f(x)$  是实函数，则内积可简化为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x) f_2(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

### 三角函数基的傅里叶级数

容易验证如下结论：

$$\left\{ \begin{aligned}
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx = 1 \\
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \\
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0 \\
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\
&\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \right.$$

函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x; \quad n, m = 1, 2, \dots \right\}$  是一个完备的正交归一函数族，它们可作为基矢张成  $\mathcal{H}$ 。

这个函数系具体写出来是：

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots \right\}$$

任意一个周期为  $2l$  的，满足狄利克雷条件的函数  $f(x)$  可写成这些基函数的线性组合，即  $f(x)$  可展成傅里叶级数：

$$f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

为求出线性组合的系数，只需要利用“这组基是正交归一完备的”这一性质，比如：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{k',k} \\
&= a_{k'}
\end{aligned}$$

总之：

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x) \right\rangle = \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^l f(x) dx \\
a_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \\
b_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx
\end{aligned}$$

## e 指数基的傅里叶级数

注意到：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{m,n}$$

函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, m \in \mathbb{Z} \right\}$  可作为以  $2\pi$  为周期的函数为元素的希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  中的一组正交完备归一基矢，以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  在这组基矢上的展开式为：

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$$

利用正交归一条件：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right)^* \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(m-n)x} dx \\
&= \delta_{m,n}
\end{aligned}$$

内积可得系数：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n} \\
&= C_n
\end{aligned}$$

即系数  $C_m$  可通过内积求得：

$$C_m = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right)^* \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

# 傅里叶变换(to be continued)

## 傅里叶分解与傅里叶变换

若  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛，则  $f(x)$  可进行**傅里叶分解**（将  $f(x)$  分解为无穷多不同频率  $k$  的基函数  $e^{ikx}$  的线性叠加）：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk$$

其中，系数  $C(k)$  称为  $f(x)$  的傅里叶变换（或频谱）。

为求出系数  $C(k)$  的表达式，令  $e^{ik'x}$  与上式两端内积，等式仍成立：

$$\left\langle e^{ik'x}, f(x) \right\rangle = \left\langle e^{ik'x}, \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk \right\rangle$$

根据内积的定义，分别计算内积：

$$\begin{aligned} \left\langle e^{ik'x}, f(x) \right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( e^{ik'x} \right)^* f(x) dx \\ &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) e^{-ik'x} dx \\ \left\langle e^{ik'x}, \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk \right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( e^{ik'x} \right)^* \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) e^{i(k-k')x} dk dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} C(k) e^{i(k-k')x} dx dk \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i(k-k')x} dx \right) dk \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \delta(k-k') dk \\ &= C(k') \\ C(k') &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) e^{-ik'x} dx \end{aligned}$$

将  $k'$  替换成  $k$ ，即：

$$C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

这就得到了  $f(x)$  的傅里叶分解  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk$  中系数  $C(k)$  的表达式。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)e^{ikx} dk, \quad C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

其中，系数  $C(k)$  称为  $f(x)$  的傅里叶变换（或频谱），也记为：

$$C(k) \equiv \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

也就是说，函数  $f(x)$  的傅里叶变换  $\mathcal{F}\{f(x)\}(k)$  是一个关于  $k$  的函数，其表达式为：

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

傅里叶变换的基本性质

线性定理

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{f_1\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{f_2\}$$

延迟定理

$$\mathcal{F}\{f(x - x_0)\}(k) = e^{-ikx_0} \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$$

位移定理

设  $\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = C(k)$ , 则:

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{ik_0x}\}(k) = C(k - k_0)$$

标度变换定理

设  $\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = C(k)$ , 则:

$$\mathcal{F}\{f(ax)\}(k) = \frac{1}{|a|}C\left(\frac{k}{a}\right)$$

微分定理

设当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ , 则有:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\}(k) &= ik\mathcal{F}\{f(x)\}(k) \\ \mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(k) &= (ik)^n \mathcal{F}\{f(x)\}(k)\end{aligned}$$

卷积定理

$$\begin{aligned}f_1(x) * f_2(x) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - \xi)f_2(\xi)d\xi \\ \mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\}(k) &= \mathcal{F}\{f_1(x)\}(k)\mathcal{F}\{f_2(x)\}(k)\end{aligned}$$

第10章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数  $t \in [0, +\infty)$  上的实函数或复函数  $f(t)$ , 定义  $f(t)$  的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) \equiv F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

其中,  $p = s + i\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$   
,  $e^{-pt}$  称为拉普拉斯变换核,  $F(p)$  称为像函数, 也记为:

$$F(p) \doteq f(t), \quad f(t) \doteq F(p)$$

拉普拉斯变换的性质（两种记号）

线性定理

若  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , 则:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}(p) = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设  $f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p)$ , 则:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

延迟定理

设  $\tau > 0$ , 则:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p) = \mathrm{e}^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设  $f(t) \doteq F(p), \tau > 0$ , 则:

$$f(t-\tau)H(t-\tau) \doteq \mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$$

其中, 定义了阶跃函数  $H$ :

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leqslant 0 \end{cases}$$

位移定理

设  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)\right\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\lambda)$$

设  $f(t) \doteq F(p), \lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t) \doteq F(p+\lambda)$$

标度变换定理

设  $a > 0$ , 则:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{a}\right)$$

设  $f(t) \doteq F(p)$ , 则:

$$f(at) \doteq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$$

卷积定理

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中, 卷积的定义为:

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

设  $f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p)$ , 则:

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p)F_2(p)$$

微分定理

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p)=p^n\mathcal{L}\{f(t)\}(p)-p^{n-1}f^{(0)}(0)-p^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-p^1f^{(n-2)}(0)-p^0\cdot f^{(n-1)}(0)$$

设  $f(t)\rightleftharpoons F(p)$ , 则:

$$f^{(n)}(t)\rightleftharpoons p^nF(p)-p^{n-1}f^{(0)}(0)-p^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-p^1f^{(n-2)}(0)-p^0f^{(n-1)}(0)$$

特别地:

$$\begin{aligned}f^{(1)}(t)\rightleftharpoons p^1F(p)-p^0f^{(0)}(0)\\f^{(2)}(t)\rightleftharpoons p^2F(p)-p^1f^{(0)}(0)-p^0f^{(1)}(0)\end{aligned}$$

积分性质

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t\mathrm{d}tf(t)}_{n\text{重积分}}\right\}(p)=\frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$$\underbrace{\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t\mathrm{d}tf(t)}_{n\text{重积分}}\rightleftharpoons\frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

周期函数变换定理

若  $f(t)=f(t+T)$ , 则:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)=\frac{\int_0^Tf(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

若  $f(t)=f(t+T)$ , 则:

$$f(t)\rightleftharpoons\frac{\int_0^Tf(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

常用拉普拉斯变换及反演

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\}(p)&=\frac{1}{p},\ \operatorname{Re}p>0\\ \mathcal{L}\{e^{at}\}(p)&=\frac{1}{p-a},\ \operatorname{Re}p>a\\ \mathcal{L}\{t^n\}(p)&=\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}\\ \mathcal{L}\{t^ne^{at}\}(p)&=\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}\\ \mathcal{L}\{\sin at\}(p)&=\frac{a}{p^2+a^2}\\ \mathcal{L}\{\cos at\}(p)&=\frac{p}{p^2+a^2}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p) = \frac{a}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p) = \frac{p}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\}(p) = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\}(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &\doteq 1, \quad \frac{1}{p^2} \doteq t, \quad \frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n \\ \frac{1}{p - \alpha} &\doteq e^{\alpha t}, \quad \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}} \doteq t^n e^{\alpha t} \\ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} &\doteq \sin \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \doteq \cos \alpha t \\ \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} &\doteq \sinh \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \doteq \cosh \alpha t \end{aligned}$$

## 拉普拉斯变换的应用

### 解常微分方程

#### 例1

用拉普拉斯变换解下列  $RL$  串联电路方程，其中  $L, R, E$  为常数：

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设  $i(t) \doteq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{di(t)}{dt} \doteq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \text{Re } p > 0, \quad \text{or } 1 \doteq \frac{1}{p}$$

对方程  $L \frac{di(t)}{dt} = +Ri(t) = E$  两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出  $F(p)$ ：

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L} \right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}$$



于是：

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \quad \frac{1}{p+R/L} \doteq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程  $F(p) = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p+R/L} \right)$  两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

# 第11章 $\delta$ 函数

## $\delta$ 函数的定义

$\delta$  函数是一个定义在  $\mathbb{R}$  上的广义函数， 其满足：

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ +\infty & , x = x_0 \end{cases}, \text{ 且 } \int_a^b \delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & , x_0 \in (a,b) \\ 0 & , x_0 \notin (a,b) \end{cases}$$

## $\delta$ 函数的性质

(1) 设  $f(x)$  为连续函数， 则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)$$

(2)  $\delta(x)$  是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

(3) :

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$$

(4) :

$$x\delta(x) = 0$$

(5) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x = \delta(x_1-x_2)$$

(6) : 设  $\{x_i\}$  为  $\varphi(x)$  的单根， 即  $\varphi(x_i) = 0$  且  $\varphi'(x_i) \neq 0$ ， 则：

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(x_i)|} \delta(x-x_i)$$

简单例子：

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

三维  $\delta$  函数

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}0&,\vec{r}\neq\vec{r}_0\\+\infty&,\vec{r}=\vec{r}_0\end{cases},\text{且}\int_V\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\mathrm{d}^3\vec{r}=1,\vec{r}_0\in V$$

三维直角坐标系

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3\vec{r}&=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)&\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\end{aligned}$$

三维球坐标系

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3\vec{r}&=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\end{aligned}$$

三维柱坐标系

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3\vec{r}&=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)&=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\end{aligned}$$

不同形式的  $\delta$  函数

$$\begin{aligned}\delta(x)&=\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}\\ \delta(\vec{r})&=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}\end{aligned}$$

$\delta$  函数的傅里叶展式和傅里叶变换

一维

设  $\delta(x-x_0)$  可展为：

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

其中，系数  $C(k)$  就是  $\delta(x-x_0)$  的傅里叶变换  $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)$ ，即：

$$\begin{aligned}C(k)&=\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)\\&=\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\end{aligned}$$

代回  $\delta(x-x_0)$  的傅里叶展式，可得：

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k\end{aligned}$$

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k}\mathrm{d}k$$

## 三维

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{d}k_x\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{d}k_y\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_z\right)\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}\end{aligned}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}$$

## 例题

### 例1

证明： $\delta(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$

当  $\vec{r}\neq\vec{0}$ , 有:

$$\begin{aligned}\nabla\frac{1}{r}&=-\frac{1}{r^2}\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}\\\nabla^2\frac{1}{r}&=\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\\&=\nabla\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\\&=-\left(\vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}\right)\\&=-\left(\vec{r}\cdot\left(-3r^{-4}\frac{\vec{r}}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\cdot3\right)\\&=0\end{aligned}$$

$\nabla^2\frac{1}{r}$  在  $\vec{r}=\vec{0}$  处无定义，但可人为定义其在  $\vec{0}$  处的函数值为  $+\infty$

取以坐标原点为球心，半径为  $R$  的一个球体  $V$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{r} \in V} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3\vec{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r} \in V} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d^3\vec{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \oint_{\partial V^+} dS \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

## 第12章 小波变换初步

## 第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题

### 波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

#### 波动方程（双曲方程）

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

#### 输运方程（抛物方程）

$$u_t - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

#### 泊松方程（椭圆方程）

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

#### 拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0$$

### 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

定解条件包括初始条件和边界条件。

#### 初始条件

##### 波动方程初始条件

场量  $u(\vec{r}, t)$  在  $t = 0$  时刻的空间分布和场量对时间的一阶导  $u_t(\vec{r}, t)$  在  $t = 0$  时刻的空间分布：

$$\begin{cases} u(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \end{cases}$$

输运方程初始条件

场量  $u(\vec{r}, t)$  在  $t = 0$  时刻的空间分布**或**场量对时间的一阶导  $u_t(\vec{r}, t)$  在  $t = 0$  时刻的空间分布：

$$u(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r})$$

或：

$$u_t(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r})$$

泊松方程初始条件

泊松方程没有初始条件（稳定场，场量不随时间改变）

边界条件

第一类边界条件

场量  $u(\vec{r}, t)$  在边界  $\partial\Omega$  处的取值所要满足的条件

$$u(\vec{r}, t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r}, t)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ ，则得到**第一类齐次边界条件**：

$$u(\vec{r}, t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = 0$$

第二类边界条件

场量沿边界的外法线的梯度对时间的依赖关系

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r}, t)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ ，则得到**第二类齐次边界条件**：

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = 0$$

第三类边界条件

$$\left(\alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega} = g(\vec{r}, t)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ ，则得到**第三类齐次边界条件**：

$$\left(\alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega} = 0$$

自然边界条件

所求解的场量  $u$  在考虑的区域  $\Omega$  及其边界  $\partial\Omega$  上，都是有界的，不发散的，即：

$$|u| < +\infty$$

周期性边界条件

场函数  $u(\vec{r}, t)$  具有空间周期性。

衔接条件

若研究的区域  $\Omega$  可分成几个性质不同的子区域，则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件。

# 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

## 波动方程定解条件

$$\begin{cases} u_{tt}(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial \Omega} = g(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in \partial \Omega} \end{cases}$$

## 输运方程定解条件

$$\begin{cases} u_t(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \text{ or } u_t(\vec{r}, t) \Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial \Omega} = g(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in \partial \Omega} \end{cases}$$

## 泊松方程定解条件

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}) + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial \Omega} = g(\vec{r}, t) \Big|_{\vec{r} \in \partial \Omega} \end{cases}$$

# 第14章 分离变量法

## 例1

求解四边固定， $x, y$  方向上边长分别为  $l, d$  的矩形薄膜的本征振动（即求本征振动频率和本征振动函数）

矩形薄膜的振动满足二维波动方程。这里采用直角坐标，结合“四周固定”这一边界条件，可得：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

设  $u(x, y, t)$  可分离变量：

$$u(x, y, t) = U(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$$

代入波动方程可得：

$$X(x)Y(y)T''(t) - a^2 [Y(y)T(t)X''(x) + X(x)T(t)Y''(y)] = 0$$

上式两边同时除以  $X(x)Y(y)T(t)$  得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - a^2 \left[ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0$$

观察可知，必定有：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2$$

将上式代入上上式，可知  $\omega, k_x, k_y$  满足：

$$\omega^2 = a^2 (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \implies X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)$$

结合边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  可得：

$$A = 0, \quad k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

因此， $X(x)$  的本征函数为：

$$X^{(n)} = B^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \implies Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)$$

结合边界条件  $u|_{y=0} = u|_{y=d} = 0$  可得：

$$C = 0, \quad k_y^{(m)} = \frac{m\pi}{d}, \quad m = 1, 2, \dots$$

因此， $Y(y)$  的本征函数为：

$$Y^{(m)} = D^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)$$

由  $U(x, y) = X(x)Y(y)$  可知，本征振动函数为：

$$\begin{aligned} U^{(nm)}(x, y) &= X^{(n)}(x)Y^{(m)}(y) \\ &= B^{(n)}D^{(m)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ &\equiv E^{(nm)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right), \quad E^{(nm)} \equiv B^{(n)}D^{(m)}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

由  $\omega^2 = a^2 (k_x^2 + k_y^2)$  可知，本征振动频率为：

$$\begin{aligned} \omega^{(nm)} &= a \sqrt{\left(k_x^{(n)}\right)^2 + \left(k_y^{(m)}\right)^2} \\ &= a \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## 例2

求定解问题：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

设：

$$u(x, t) = U(x)T(t)$$

代入一维波动方程  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  可得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \implies T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$T'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0 \implies T'(t) \Big|_{t=0} = 0 \implies B = 0$$

因此:

$$T(t) = A \cos \omega t$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \implies U(x) = C \cos kx + D \sin kx$$

$$U'(x) = -kC \sin kx + kD \cos kx$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=0} = 0 \implies D = 0$$

因此:

$$U(x) = C \cos kx, \quad U'(x) = -kC \sin kx$$

$$u_x \Big|_{x=l} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=l} = 0 \implies -kC \sin kl = 0$$

因此,  $k$  的本征值  $k_n$  为:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$n = 0$  是平庸解, 不考虑。

相应的本征函数  $U_n(x)$  为:

$$U_n(x) = \cos k_n x = \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

由  $k \equiv \omega/a$ , 得  $\omega$  的本征值  $\omega_n$  为:

$$\omega_n = ak_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数  $T_n(x)$  为:

$$T_n(t) = \cos \omega_n t = \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

本征解  $u_n(x, t)$  为:

$$u_n(x, t) = U_n(t)T_n(t) = \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

定解问题的通解  $u(x, t)$  为:



$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

最后结合初始条件

$$u \Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$

得到：

$$E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0.3, E_4 = E_5 = \cdots = 0$$

最终得到定解问题的解为：

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{3\pi a}{l}t\right)$$

### 例3

求定解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 \nabla^2 u = 0 \\ u \Big|_{x=0} = 0, u \Big|_{x=l_1} = 0 \\ u \Big|_{y=0} = 0, u \Big|_{y=l_2} = 0 \\ u \Big|_{z=0} = 0, u \Big|_{z=l_3} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = T_0 \end{cases}$$

设  $u(x, y, z, t)$  可分离变量：

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t)$$

代入输运方程可得：

$$U(x, y, z)T'(t) - a^2 T(t) \nabla^2 U(x, y, z) = 0$$

两边同时处以  $a^2 U(x, y, z)T(t)$  得：

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\nabla^2 U(x, y, z)}{U(x, y, z)}$$

显然，有：

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\nabla^2 U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -k^2, \quad k > 0$$

$T(t)$  满足方程：

$$T'(t) + a^2 k^2 T(t) = 0$$

$U(x, y, z)$  满足方程：

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0$$

设  $U(x, y, z)$  可分离变量：

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

代入  $U(x, y, z)$  满足的方程，得：

$$Y(y)Z(z)X''(x) + X(x)Z(z)Y''(y) + X(x)Y(y)Z''(z) + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

等号两边同时除以  $X(x)Y(y)Z(z)$  得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0$$

注意到,  $\frac{X''(x)}{X(x)}, \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \frac{Z''(z)}{Z(z)}$  分别只与  $x, y, z$  有关。上式成立, 则有:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad k_x > 0$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2, \quad k_y > 0$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2, \quad k_z > 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

即:

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$$

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0$$

$$Z''(z) + k_z^2 Z(z) = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

方程  $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$  的通解为:

$$X(x) = A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x)$$

边界条件:

$$u \Big|_{x=0} = 0, u \Big|_{x=l_1} = 0 \implies X(x) \Big|_{x=0} = 0, X(x) \Big|_{x=l_1} = 0$$

由  $X(x) \Big|_{x=0} = 0$  可知:

$$A_x = 0$$

因此:

$$X(x) = B_x \sin(k_x x)$$

再由  $X(x) \Big|_{x=l_1} = 0$  可得  $k_x$  的本征值  $k_x^{(n_x)}$  为:

$$k_x^{(n_x)} = \frac{n_x \pi}{l_1}, \quad n_x = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数  $X_{n_x}(x)$  为:

$$X_{n_x}(x) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right), \quad n_x = 1, 2, \dots$$

类似的,  $k_y$  的本征值  $k_y^{(n_y)}$  为:

$$k_y^{(n_y)} = \frac{n_y \pi}{l_2}, \quad n_y = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数  $Y_{n_y}(y)$  为:

$$Y_{n_y}(y) = \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right), \quad n_y = 1, 2, \dots$$

$k_z$  的本征值  $k_z^{(n_z)}$  为:

$$k_z^{(n_z)} = \frac{n_z \pi}{l_3}, \quad n_z = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数  $Z_{n_z}(z)$  为:

$$Z_{n_z}(z) = \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right), \quad n_z = 1, 2, \dots$$

由  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  可知,  $k$  的本征值  $k_{n_x n_y n_z}$  为:

$$\begin{aligned} k_{n_x n_y n_z} &= \sqrt{\left(k_x^{(n_x)}\right)^2 + \left(k_y^{(n_y)}\right)^2 + \left(k_z^{(n_z)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{l_3}\right)^2} \end{aligned}$$

由  $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  可知, 相应于本征值  $k_{n_x n_y n_z}$  的本征函数  $U_{n_x n_y n_z}$  为:

$$U_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = X_{n_x}(x)Y_{n_y}(y)Z_{n_z}(z) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right)$$

由  $T'(t) + a^2 k^2 T(t) = 0$  可知,  $T(t)$  的本征函数  $T_{n_x n_y n_z}(t)$  为:

$$T_{n_x n_y n_z}(t) = e^{-k_{n_x n_y n_z}^2 a^2 t}$$

由  $u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t)$  可知,  $u(x, y, z, t)$  的本征函数  $u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t)$  为:

$$\begin{aligned} u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) &= U_{n_x n_y n_z}(x, y, z)T_{n_x n_y n_z}(t) \\ &= e^{-k_{n_x n_y n_z}^2 a^2 t} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \end{aligned}$$

因此, 定解问题的形式解  $u(x, y, z, t)$  为:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} e^{-k_{n_x n_y n_z}^2 a^2 t} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \exp\left\{-a^2 \left[\left(\frac{n_x \pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{l_3}\right)^2\right] t\right\} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \end{aligned}$$

结合初始条件  $u(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = T_0$ , 得:

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) = T_0$$

等号两边同乘  $\sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right)$  并积分 ( $n'_x, n'_y, n'_z \in \{1, 2, \dots\}$ ):

$$\begin{aligned} &\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \\ &= T_0 \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{n'_x \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) d\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\cos\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \cdot \cos\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \cdot [\cos(n'_x \pi) - 1] \\
&= \frac{l_1}{n'_x \pi} [1 - (-1)^{n'_x}]
\end{aligned}$$

利用积化和差公式  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ , 有:

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{(n_x + n'_x) \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\sin\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{(n_x + n'_x) \pi} \cdot \sin\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

再注意到, 当  $n_x = n'_x$  时,

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx = l_1$$

当  $n_x \neq n'_x$  时,

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{(n_x - n'_x) \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\sin\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{(n_x - n'_x) \pi} \cdot \sin\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此:

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx = l_1 \delta_{n_x, n'_x}$$

终于, 我们可以计算:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} l_1 \delta_{n_x, n'_x} - \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{l_1}{2} \delta_{n_x, n'_x}
\end{aligned}$$

于是, 下面这个复杂的方程

$$\begin{aligned}
&\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \\
&= T_0 \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz
\end{aligned}$$

可简化为：

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \frac{l_1 l_2 l_3}{8} \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \delta_{n_z, n'_z} = T_0 \frac{l_1 l_2 l_3}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} \left[ 1 - (-1)^{n'_x} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_y} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_z} \right]$$

继续化简：

$$C_{n'_x n'_y n'_z} \cdot \frac{1}{8} = T_0 \frac{1}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} \left[ 1 - (-1)^{n'_x} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_y} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_z} \right]$$

解得系数：

$$C_{n'_x n'_y n'_z} = \frac{8}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} T_0 \left[ 1 - (-1)^{n'_x} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_y} \right] \left[ 1 - (-1)^{n'_z} \right]$$

把下标  $n'_x, n_y, n'_z$  替换为  $n_x, n_y, n_z$ ：

$$C_{n_x n_y n_z} = \frac{8}{n_x n_y n_z \pi^3} T_0 \left[ 1 - (-1)^{n_x} \right] \left[ 1 - (-1)^{n_y} \right] \left[ 1 - (-1)^{n_z} \right]$$

综上，定解问题的解  $u(x, y, z, t)$  为：

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \exp \left\{ -a^2 \left[ \left( \frac{n_x \pi}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_z \pi}{l_3} \right)^2 \right] t \right\} \sin \left( \frac{n_x \pi x}{l_1} \right) \sin \left( \frac{n_y \pi y}{l_2} \right) \sin \left( \frac{n_z \pi z}{l_3} \right) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \frac{8}{n_x n_y n_z \pi^3} T_0 \left[ 1 - (-1)^{n_x} \right] \left[ 1 - (-1)^{n_y} \right] \left[ 1 - (-1)^{n_z} \right] \exp \left\{ -a^2 \left[ \left( \frac{n_x \pi}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_y \pi}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_z \pi}{l_3} \right)^2 \right] t \right\} \times \\ &\quad \sin \left( \frac{n_x \pi x}{l_1} \right) \sin \left( \frac{n_y \pi y}{l_2} \right) \sin \left( \frac{n_z \pi z}{l_3} \right) \end{aligned}$$

# 第15章 曲线坐标系下的分离变量

## 球坐标系下方程的分离变量

### 拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量

在球坐标系下，拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量：

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到：

### 径向方程

径向部分  $R(r)$  满足**径向方程**：

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} - l(l+1)R(r) = 0$$

球函数方程

角度部分  $Y(\theta, \varphi)$  满足**球函数方程**：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0$$

方位角满足的方程

方位角部分  $\Phi(\varphi)$  满足：

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0$$

结合周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  可得：

$$\lambda = m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

连带勒让德方程

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \theta} \left( \sin \theta \frac{\mathrm{d} \Theta(\theta)}{\mathrm{d} \theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

令  $x = \cos \theta, \Theta(\theta) = y(x), \theta \in [0, \pi], |x| \leq 1, \sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$ ,

$$\frac{\mathrm{d} \Theta}{\mathrm{d} \theta} = \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} \theta} = -\sin \theta \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1 - x^2) \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} - 2x \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0$$

勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角  $\varphi$  无关：

$$u = u(r, \theta)$$

这对应  $m = 0$ ，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1 - x^2) \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} - 2x \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} + l(l+1)y = 0$$

亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) + k^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量：

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到：

## 球贝塞尔方程

径向部分  $R(r)$  满足球贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

## 球函数方程

角度部分  $Y(\theta, \varphi)$  满足**球函数方程**：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial\varphi^2} + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0$$

可见，亥姆霍兹方程解的角度部分满足的方程与拉普拉斯一致。

## 方位角满足的方程

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## 连带勒让德方程

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

令  $x = \cos\theta, \Theta(\theta) = y(x), \theta \in [0, \pi], |x| \leq 1, \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$ ,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

## 勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角  $\varphi$  无关：

$$u = u(r, \theta)$$

对应  $m = 0$ ，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0$$

# 柱坐标系下方程的分离变量

## 柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) + k^2 u(\rho, \varphi, z) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设  $u(\rho, \varphi, z)$  可分离变量：

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算，可以得到：

$\Phi(\varphi)$  满足的方程

$\Phi(\varphi)$  满足：

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \nu \geqslant 0$$

若不限制  $\varphi$  的取值范围，而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  可得：

$$\nu = m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

ps：这里为了让  $\nu$  和  $\nu^2$  一一对应，约定  $\nu$  取非负实数。

$Z(z)$  满足的方程

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

$R(\rho)$  满足的方程及贝塞尔方程

$R(\rho)$  满足：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left( \rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + \left( k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

令  $x = \sqrt{k^2 + \lambda} \rho, \rho = x / \sqrt{k^2 + \lambda}, (k^2 + \lambda \neq 0), R(\rho) \Big|_{\rho=x/\sqrt{k^2+\lambda}} \equiv y(x), \quad y(x) \Big|_{x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho} = R(\rho)$ ，则上面方程可化为贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0, \quad \nu \geqslant 0$$

或称为  $\nu$  阶贝塞尔方程。

# 第16章 球函数

## 勒让德多项式

在球坐标系下，拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量：

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入拉普拉斯方程，可得极角部分  $\Theta(\theta)$  满足：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left( \sin \theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

令  $x = \cos \theta, \Theta(\theta) = y(x), \theta \in [0, \pi], |x| \leqslant 1, \sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$ ,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin \theta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：



$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角  $\varphi$  无关：

$$u=u(r,\theta)\text{ or }\Phi(\varphi)=\text{const}$$

对应  $m=0$ ，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0,\text{ }l=0,1,2,\cdots$$

利用级数法可以求得，勒让德方程在自变量  $|x|\leqslant 1$  范围内，在自然边界条件  $|y(x)|<+\infty$  下，对应于本征值  $l(l+1)$ ， $l=0,1,2,\cdots$  的本征解为勒让德多项式  $P_l(x)$ ：

$$P_l(x)\equiv\sum_{n=0}^N\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^ln!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n},\text{ }N=\begin{cases}\frac{l}{2}, & l\text{为偶数} \\ \frac{l-1}{2}, & l\text{为奇数}\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}|x|\leqslant 1 \\ (1-x^2)\frac{d^2y_l(x)}{dx^2}-2x\frac{dy_l(x)}{dx}+l(l+1)y_l(x)=0,\text{ }l=0,1,2,\cdots \\ |y_l(x)|<1\end{cases}$$

$$\implies y_l(x)=P_l(x),\text{ }P_l(x)\equiv\sum_{n=0}^N\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^ln!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n},\text{ }N=\begin{cases}\frac{l}{2}, & l\text{为偶数} \\ \frac{l-1}{2}, & l\text{为奇数}\end{cases}$$

### 前几个勒让德多项式

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$$

### 勒让德多项式的性质

$$P_l(x)\equiv\sum_{n=0}^N\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^ln!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n},\text{ }N=\begin{cases}\frac{l}{2}, & l\text{为偶数} \\ \frac{l-1}{2}, & l\text{为奇数}\end{cases}$$

$$P_l(1)=1$$

$$P_l(-x)=(-1)^lP(x)$$

### 罗德里格斯公式（勒让德多项式的微分表达式）

$$P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$$

勒让德多项式的生成函数（母函数）

定义勒让德多项式的生成函数  $f(r)$  为：

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}$$

其中,  $x = \cos\theta, |x| \leqslant 1$

当  $r < 1$ , 可将  $f(r)$  在  $r = 0$  处进行泰勒展开, 可得:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l, \quad r < 1$$

或者:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)r^l, \quad r < 1$$

当  $r > 1, \frac{1}{r} < 1$ , 有:

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+(1/r)^2-2(1/r)x}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \left(\frac{1}{r}\right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^{-(l+1)}, \quad r > 1 \end{aligned}$$

或者:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)r^{-(l+1)}, \quad r > 1$$

勒让德多项式的递推公式

$$\begin{aligned} x(1+2l)P_l(x) - (l+1)P_{l+1}(x) - lP_{l-1}(x) &= 0 \\ P_l(x) &= P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2xP'_l(x) \\ (2l+1)P_l(x) &= P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) \\ (l+1)P_l(x) &= P'_{l+1}(x) - xP'_l(x) \\ lP_l(x) &= xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) \\ (x^2-1)P'_l(x) &= l x P_l(x) - l P_{l-1}(x) \end{aligned}$$

勒让德函数的正交归一性

$\left\{ \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x), \quad l = 0, 1, 2, \cdots \right\}$  构成  $[-1, 1]$  上的正交归一函数系, 基函数的正交归一性可表达为:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(x) \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, c \dots$$

# 具有轴对称的拉普拉斯方程的求解

拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

若求解的问题具有极轴对称性，即场分布与方位角  $\varphi$  无关：

$$u = u(r, \theta)$$

则拉普拉斯方程简化为：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0$$

可以证明，在自然边界条件的要求下，方程的通解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

## 例1

在单位球的北极点上放置一电荷量为  $4\pi\varepsilon_0$  的点电荷，求单位球内任一点  $\vec{r}$  的电势，并用勒让德多项式表示。

由余弦定理知，单位球内  $\vec{r}$  点离单位球上北极点的距离为：

$$r' = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}, \quad r < 1$$

单位球内  $\vec{r}$  点的电势为：

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}, \quad r < 1 \end{aligned}$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数，其可在  $r = 0$  点展开为：

$$u(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) r^l, \quad r < 1$$

## 例2

在半径  $r = r_0$  的球内求解  $\nabla^2 u = 0$ ，使满足边界条件  $u \Big|_{r=r_0} = \sin^2 \theta$

边界条件与方位角  $\varphi$  无关，因此所求应也与  $\varphi$  无关：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

由自然边界条件，球心  $r = 0$  处场量不应发散：

$$\left| u(r, \theta) \right| \Big|_{r=0} < +\infty$$

因此  $-r^{(l+1)}$  项必须舍弃，即：

$$B_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

于是：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

考虑边界条件  $u \Big|_{r=r_0} = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ，注意到：

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{cases} \implies 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3} [P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)]$$

因此：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = \frac{2}{3} [P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)]$$

把边界条件整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$\left(A_0 - \frac{2}{3}\right) P_0(\cos \theta) + A_1 r_0 P_1(\cos \theta) + \left(A_2 r_0^2 + \frac{2}{3}\right) P_2(\cos \theta) + \sum_{l=3}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$A_0 - \frac{2}{3} = 0, A_1 = 0, A_2 r_0^2 + \frac{2}{3} = 0, A_3 = A_4 = \dots = 0$$

即：

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = 0, A_2 = -\frac{2}{3r_0^2}, A_3 = A_4 = \dots = 0$$

于是：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3r_0^2} r^2 P_2(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{r^2}{3r_0^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

### 例3

在均匀电场  $\vec{E}_0$  中放一半径为  $a$  的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

以球心  $O$  为坐标原点，选取  $\vec{E}_0$  方向为  $z$  轴正方向，则电势  $u$  关于  $z$  轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布  $u(\vec{r})$  满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \quad r > a$$

特别地，这里电势  $u$  关于  $z$  轴对称， $u$  与  $\varphi$  无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0, \quad r > a$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$$

由电势的叠加原理，实际电势  $u(r, \theta)$  是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场  $\vec{E}_0$  导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当  $r \rightarrow +\infty$ ，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为  $u_0$ ，则：

$$u_0 - u(r, \theta) = E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0 \\ u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0 \\ u(r, \theta) = u_0 - E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

考虑边界条件  $u(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow +\infty} = u_0 - E_0 r \cos \theta$ ，当  $r \rightarrow +\infty$ ，有  $r^{-(l+1)} \rightarrow 0$ ，于是：

$$\begin{aligned} u_0 - E_0 r \cos \theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= A_0 + A_1 r \cos \theta + \cdots \end{aligned}$$

左右两边都看作关于  $r$  的多项式，对比系数得：

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = -E_0, \quad A_2 = A_3 = \cdots = 0$$

于是形式解可写为：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

再考虑边界条件  $u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$ ，将形式解代入边界条件，得：

$$u_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

即：

$$u_0 P_0(\cos \theta) - E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$(u_0 + B_0 a^{-1}) P_0(\cos \theta) + (-E_0 a + B_1 a^{-2}) P_1(\cos \theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$B_0 = -a u_0, \quad B_1 = a^3 E_0, \quad B_2 = B_3 = \cdots = 0$$

综上，导体球外电势分布为：

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\
 &= u_0 - E_0 r \cos \theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a
 \end{aligned}$$

其中,  $u_0$  为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取  $u_0 = 0$ , 则导体球外电势分布为:

$$u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a$$

球外电场与电势的关系为:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\
 &= -\left[ \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right] \\
 &= E_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r + E_0 \sin \theta \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \vec{e}_\theta, \quad r \geq a
 \end{aligned}$$

导体表面电场为:

$$\vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} = 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r$$

利用高斯定理, 导体球表面面电荷密度分布为:

$$\sigma(\vec{r}) \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} \cdot \vec{e}_r = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

## 例4

半径为  $a$  的导体球接地, 在距球心为  $b$  的地方放置一点电荷,  $b > a$ , 电荷量为  $q$ , 求导体球外的电势分布。

选取  $z$  轴使得点电荷的位矢为  $b\vec{e}_z$ , 则球外电势  $u$  具有  $z$  轴对称性, 即  $u = u(r, \theta)$

点电荷会在接地导体球表面激发出感应电荷。根据电势叠加原理, 导体球外的电势  $u$  是感应电荷单独存在时产生的电势  $u_r$  与点电荷单独存在时的电势  $u_q$  之和:

$$u = u_r + u_q$$

考虑点电荷单独存在时在球外产生的电势  $u_q$ , 由余弦定理, 场点  $\vec{r}$  到点电荷  $q$  的距离  $r'$  满足:

$$r' = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}$$

点电荷  $q$  在  $\vec{r}$  处产生的电势  $u_q$  满足:

$$\begin{aligned}
 u_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} \frac{q}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}}, \quad r > a
 \end{aligned}$$

根据勒让德多项式的母函数的相关知识,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l, & r/b < 1, \quad r < b \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)}, & r/b > 1, \quad r > b \end{cases}$$

因此点电荷产生的电势分布  $u_q$  可展为：

$$\begin{aligned} u_q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}} \\ &= \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l & , \quad a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & , \quad r > b \end{cases} \end{aligned}$$

再考虑感应电荷单独存在时在球外产生的电势  $u_r$ ，此时球外没有电荷，因此球外的电势分布  $u_r$  满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u_r(r, \theta) = 0, \quad r > a$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

在无穷远处，电势  $u_r$  应趋于零：

$$u_r \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0$$

可得：

$$A_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

因此：

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

考虑点电荷和感应电荷产生的总电势  $u(r, \theta)$ ，形式上可写为：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) \\ &= \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & , \quad a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & , \quad r > b \end{cases} \end{aligned}$$

导体球接地给出边界条件：

$$u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$$

即：

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{a}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

整理成以  $\cos \theta$  为自变量的各阶勒让德多项式  $P_l(\cos \theta)$  的线性叠加的形式：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{qa^l}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得：

$$\frac{qa^l}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

解得：

$$B_l = -\frac{qa^{2l+1}}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

因此：

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

注意到,  $r > a, b > a$ , 于是有：

$$\frac{br}{a^2} > 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)}, \quad \frac{br}{a^2} > 1$$

ps：注意不到也没事，只不过最终答案可能看起来复杂点。

因此，感应电荷在导体球外产生的电势  $u_r(r, \theta)$  实际上可写为：

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}}, \quad r > a \end{aligned}$$

最终得到导体球外的电势分布  $u(r, \theta)$ ：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-aq/b}{\sqrt{(a^2/b)^2 + r^2 - 2(a^2/b)r\cos\theta}} \end{aligned}$$

可以看到，感应电荷在导体球外产生的电势与一个处于  $z$  轴正半轴距球心  $b' = a^2/b$  处电荷量为  $Q' = -aq/b$  的点电荷相同。

## 第17章 柱函数

### 贝塞尔函数

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) + k^2 u(\rho, \varphi, z) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



设  $u(\rho, \varphi, z)$  可分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算, 可以得到:

$\Phi(\varphi)$  满足:

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \nu \geq 0$$

ps: 这里  $\nu \geq 0$  是约定好的。

若不限制  $\varphi$  的取值范围, 而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  可得:

$$\nu = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$Z(z)$  满足:

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

$R(\rho)$  满足:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left( k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

令  $x = \sqrt{k^2 + \lambda} \rho, (k^2 + \lambda \neq 0), R(\rho) = y(x)$ , 则上面方程化为贝塞尔方程:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

或称为  $\nu$  阶贝塞尔方程。

## 贝塞尔函数（第一类贝塞尔函数）和诺伊曼函数（第二类贝塞尔函数）

$\nu$  阶贝塞尔函数, 记为  $J_\nu(x)$ , 定义为:

$$J_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k + \nu}$$

ps: 这里的  $\nu \geq 0$

将  $\nu$  替换为  $-\nu$ , 就得到  $-\nu$  阶贝塞尔函数:

$$J_{-\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k - \nu}$$

对  $J_\nu(x)$  和  $J_{-\nu}(x)$  进行如下的线性组合就得到诺伊曼函数  $N_\nu(x)$ :

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

可以看到, 若  $\nu$  为整数  $m$ , 诺伊曼函数是  $0/0$  型的函数, 此时其定义由洛必达法则给出:

$$\begin{aligned} N_m(x) &\equiv \lim_{\nu \rightarrow m} N_\nu(x) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \cos(\nu\pi) - \pi \sin(\nu\pi) J_\nu(x) - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=m} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=m} \right] \\ &= \text{太复杂了不写了} \end{aligned}$$

其中  $m = 0, 1, 2, \dots$

$J_\nu(x)$  也称第一类贝塞尔函数,  $N_\nu(x)$  也称第二类贝塞尔函数。

# 贝塞尔方程的通解

## 非整数阶贝塞尔方程的通解

(非整数)  $\nu$  阶贝塞尔方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \nu > 0, \quad \nu \text{非整数}$$

的通解为：

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

其中,  $C_1, C_2$  是非零实数,  $J_\nu(x)$  和  $J_{-\nu}(x)$  分别是 (非整数)  $\nu$  阶贝塞尔函数：

$$J_{-\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$
$$J_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

## 整数阶贝塞尔方程的通解

若不限制  $\varphi$  的取值范围, 而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , 可得：

$$\nu = m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

此时贝塞尔方程是 (正整数)  $m$  阶贝塞尔方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

此时,  $m$  阶贝塞尔方程的通解为：

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x)$$

其中,  $C_1, C_2$  是任意非零常数,  $J_m(x)$  称为 (正整数)  $m$  阶贝塞尔函数, 其定义为：

$$J_m(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (m + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$N_m(x)$  是 (正整数)  $m$  阶诺伊曼函数, 其表达式就不写了。

## 整数阶贝塞尔函数的简单性质

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$$

$$J_0(0) = 1$$

$$J_m(0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x)$$

## 贝塞尔函数的递推关系

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

$$N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} N_\nu(x)$$

$$N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) = 2N'_{\nu}(x)$$

$$J'_0(x) = -J_1(x)$$

## 柱函数

若函数  $y_{\nu}(x)$  满足：

$$\begin{cases} y_{\nu-1}(x) + y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}y_{\nu}(x) \\ y_{\nu-1}(x) - y_{\nu+1}(x) = 2y'_{\nu}(x) \end{cases}$$

或满足与上两式等价的关系：

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [x^{\nu} y_{\nu}(x)] = x^{\nu} y_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu} y_{\nu+1}(x)] = x^{-\nu} y_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

则这类函数统称为柱函数。

- 柱函数必定满足贝塞尔方程。

## 例题

### 例1

求边缘固定半径为  $b$  的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设  $u(\rho, \varphi, t)$  是  $t$  时刻  $\rho, \varphi$  处质点偏离平衡位置的位移，则  $u(\rho, \varphi, t)$  满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho, \varphi, t) - a^2 \nabla_{(2)}^2 u(\rho, \varphi, t) = 0$$

其中， $\nabla_{(2)}^2$  是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla_{(2)}^2 \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设  $u(\rho, \varphi, t)$  可分离变量为：

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho, \varphi)T''(t) - a^2 T(t) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = 0$$

上式两边同时除以  $U(\rho, \varphi)T(t)$ ，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$$

注意到， $\frac{T''(t)}{T(t)}$  只与  $t$  有关，而  $\frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$  只与  $\rho, \varphi$  有关，二者相等，因此二者均等于同一常数  $-\omega^2$ ：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = -\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分  $U(\rho, \varphi)$  满足的方程和边界条件。

对上式空间部分  $U(\rho, \varphi)$  满足的方程等号两边同乘  $\frac{U(\rho, \varphi)}{a^2}$  并移项，得：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U(\rho, \varphi) = 0$$

令：

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

则  $U(\rho, \varphi)$  满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$$

再结合  $\varphi$  作为角度这一物理量应使得  $U(\rho, \varphi)$  满足周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi)$$

综上，空间部分  $U(\rho, \varphi)$  要满足的所有条件为：

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0 \\ U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \\ |U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \\ U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \end{cases}$$

设  $U(\rho, \varphi)$  可分离变量为：

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分  $U(\rho, \varphi)$  要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

上式等号两边同乘  $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$ ，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[ \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right]$$

上式等号左边只与  $\varphi$  有关，等号右边只与  $\rho$  有关，因此二者均等于一个常数  $-m^2$ ：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[ \frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \implies R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \implies \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

可得：

$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

径向部分  $R(\rho)$  满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

令  $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho)\Big|_{\rho=x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$ , 则上面可方程化为  $m$  阶贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$U(\rho, \varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho)\Big|_{\rho=b} = 0$$

$$|U(\rho, \varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)|\Big|_{\rho=0} < +\infty$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0 \\ y(x) \equiv R(\rho)\Big|_{\rho=x/k} = R(x/k), \quad R(\rho) = y(x)\Big|_{x=k\rho} = y(k\rho) \\ R(\rho)\Big|_{\rho=b} = 0 \\ |R(\rho)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \end{cases}$$

对于  $m$  阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

其通解为：

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x) + D_m N_m(x)$$

考虑自然边界条件  $|R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$ , 可得:

$$D_m = 0$$

因此:

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$y^{(m)}(x) \Big|_{x=k\rho} = C_m J_m(x) \Big|_{x=k\rho}$$

结合  $x = k\rho, R(\rho) = y(x) \Big|_{x=k\rho} = y(k\rho)$  可得:

$$R^{(m)}(\rho) = C_m J_m(k\rho)$$

设  $m$  阶贝塞尔函数  $J_m(x)$  的第  $n$  个正零点为  $x_n^{(m)}$ , 即:

$$J_m(x_n^{(m)}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

结合边界条件  $R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0$ , 即:

$$C_m J_m(kb) = 0$$

因此  $k$  的本征值  $k_n^{(m)}$  为:

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征振动模式  $R_n^{(m)}(\rho)$  为:

$$R_n^{(m)}(\rho) = J_m(k_n^{(m)}\rho) = J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

再根据  $k \equiv \omega/a$ , 得到  $\omega$  的本征值, 即圆形膜的本征频率  $\omega_n^{(m)}$  为:

$$\omega_n^{(m)} = ak_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

综上所述, 边缘固定半径为  $b$  的圆形膜的本征振动频率  $\omega_n^{(m)}$  及本征振动模式  $R_n^{(m)}(\rho)$  为:

$$\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$R_n^{(m)}(\rho) = J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

其中,  $x_n^{(m)}$  是  $m$  阶贝塞尔函数  $J_m(x)$  的第  $n$  个正零点。

**第18章 格林函数法**

**第19章 其他方程求解**

**第20章 非线性数学物理方程初步**

**第21章 泛函的变分**

**第22章 变分原理**