第1次作业

1-1

> 谈谈你对 SR 中两个基本原理的理解；

光速不变原理：在任意惯性参考系中，真空中的光速具有相同的大小。

这一原理与经典力学中的速度叠加原理相矛盾，是狭义相对论的核心。由此导出的洛伦兹变换取代了经典力学中的伽利略变换。彻底改变了人们对时间、空间和运动的理解，为现代物理学奠定了基础。

相对性原理：惯性观者和非惯性观者有绝对区别；在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式。

相对性原理指出，没有任何惯性参考系是特殊的，物理规律不依赖于参考系的选择。这一原理否定了绝对空间和绝对时间的概念，强调了物理规律的普适性。

1-2

> 详细推导洛伦兹变换；

假设有两个惯性参考系 S 和 S'，其中 S' 以速度 v 沿 x 轴相对于 S 运动。两个参考系的坐标轴平行，且在 $t = t' = 0$ 时原点重合。

设同一事件在 S 系的坐标为 (t, x, y, z)；在 S' 系的坐标为 (t', x', y', z')；

由于时空是均匀的，假设坐标变换是线性的，从 S 系到 S' 系的坐标变换形式上可写为：

$$
\begin{cases}
t' = At + Bx \\
x' = Ct + Dx \\
y' = y \\
z' = z
\end{cases}
$$

其中 A, B, C, D 是待定系数。

写成矩阵形式为：

$$
\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}
$$

考虑 S' 的运动方程。在 S 系中 $x = vt$，在 S' 系中 $x' = 0$，于是：

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ vt \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\boxed{C + Dv = 0}$$

考虑 S 的运动方程。在 S 系中 $x = 0$，在 S' 系中 $x' = -vt'$，于是：

$$\begin{bmatrix} t' \\ -vt' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\boxed{C + Av = 0}$$

因此 $A = D$，引入 γ 使得 $A = D = \gamma$，则 $C = -\gamma v$

洛伦兹变换矩阵目前可写为：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix}$$

假设在 $t = t' = 0$ 时，从原点发出一束沿 x 轴正向传播的光。根据光速不变原理，光在 S 和 S' 中的传播速度均为 c。

在 S 系中，光子的运动方程为：

$$x = ct$$

在 S' 系中，光子的运动方程为：

$$x' = ct'$$

代入洛伦兹变换：

$$\begin{bmatrix} t' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ ct \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$B = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

至此，洛伦兹变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix}\gamma & -\frac{\gamma v}{c^2}\\ -\gamma v & \gamma\end{bmatrix}=\gamma(v)\begin{bmatrix}1 & \frac{-v}{c^2}\\ -v & 1\end{bmatrix}$$

S' 相对 S 沿 x 轴正方向以速度 v 匀速运动。相对的，S 相对 S' 沿 x' 正方向以速度 $-v$ 运动，因此有：

$$\begin{bmatrix}t\\ x\end{bmatrix}=\gamma(-v)\begin{bmatrix}1 & \frac{v}{c^2}\\ v & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t'\\ x'\end{bmatrix}=\gamma(-v)\gamma(v)\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ x\end{bmatrix}$$

前后对比可得：

$$\gamma(-v)\gamma(v)\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}=I$$

由时空的均匀性，$\gamma(-v)=\gamma(v)$，因此：

$$\gamma^2\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}=I$$

从中解得：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

综上，洛伦兹变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix}\gamma & -\frac{\gamma v}{c^2}\\ -\gamma v & \gamma\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}1 & -v/c^2\\ -v & 1\end{bmatrix}$$

从 S 系到 S' 系的洛伦兹变换为：

$$\begin{cases}t'=\gamma\left(t-\dfrac{vx}{c^2}\right)\\ x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y\\ z'=z\end{cases}$$

1-3

> 列出尽可能多的洛伦兹标量；

光速 c；

时空间隔 $\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$；

固有时 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}s/c$;

静止质量 m_0;

电荷 Q;

电磁场的两个洛伦兹不变量:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2\left(\vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}=\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$$

作用量 $S=\int\mathcal{L}\mathrm{d}^4x$;

四维动量模方:

$$P^\mu P_\mu=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2=m_0^2c^2$$

四维电流密度模方:

$$J^\mu J_\mu=c^2\rho^2-\vec{J}^2$$

四维电磁势模方:

$$A^\mu A_\mu=\frac{\phi^2}{c^2}-\vec{A}^2$$

能-动张量的迹 T_μ^μ;

1-4

> 推导速度的变换公式;

洛伦兹变换:

$$\begin{cases}t'=\gamma\left(t-\dfrac{vx}{c^2}\right)\\x'=\gamma(x-vt)\\y'=y\\z'=z\end{cases}$$

其中，$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

取微分得：

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \dfrac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right) \\ \mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{cases}$$

速度：

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t)}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right)} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t - v}{1 - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\ &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y' &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right)} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \frac{v\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{c^2}\right)} \\ &= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)} \end{aligned}$$

同理有：

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)}$$

1-5

> 谈谈你对参考系和坐标系的理解；

参考系：参考系是描述物体运动时所选择的观察视角或背景框架。参考系是物理实体，通常与某个物体或系统相关联。参考系的选择是相对的，不同参考系中观察到的运动可能不同。

坐标系：坐标系是用于量化物体位置的数学工具。它通过一组坐标，比如 (x, y, z)，来描述物体在空间中的位置。

参考系需要通过坐标系来量化物体的位置和运动；坐标系是参考系的数学工具，用于将参考系中的物理量（如位置、速度）转化为可计算的数值。

1-6

> 谈谈坐标时和固有时的区别和联系；

坐标时：在某个特定的参考系中，由该参考系的坐标系定义的时间。

固有时：是指在一个物体自身的参考系中，由该物体携带的时钟所测量的时间。

固有时和坐标时之间的关系为：

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{c}$$

坐标时是相对的，依赖于所选取的参考系。它不能直接被测量，仅在计算中具有意义。

固有时是绝对的，与参考系的选择无关。它反映了事件之间最本质的时间间隔，是可以被实际测量的。

1-7

> 详细谈谈对尺缩和钟慢这两个典型效应的理解；

尺缩效应

尺缩效应指的是，当一个物体以接近光速的速度运动时，在运动方向上，其长度会缩短。这种缩短只在运动方向上发生，垂直于运动方向的长度不受影响。

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

其中，L 是观察者测量到的运动物体的长度；L_0 是运动物体的固有长度；v 是运动物体相对观察者的速度。

尺缩效应强调了空间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一物体的长度测量结果不同。

钟慢效应

钟慢效应指的是，当一个时钟以接近光速的速度运动时，观察者会看到这个时钟的时间流逝变慢。

钟慢效应的公式为：

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

其中，Δt 是观察者测量到的运动时钟的时间间隔；Δt_0 是时钟在静止参考系中的固有时间间隔（即静止时间）；v 是运动时钟相对于观察者的速度。

钟慢效应强调了时间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一事件的时间间隔测量结果不同。

1-8

> 解释双生子效应（佯谬）；

假设有一对双胞胎，A 留在地球，B 乘坐高速飞船进行太空旅行后返回。

为了比较 A 的固有时 τ_1 和 B 的固有时 τ_2，不妨比较微元 $\mathrm{d}\tau_1$ 和 $\mathrm{d}\tau_2$，由于地球视为惯性参考系，于是

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2}$$

而对 A 来说，$\mathrm{d}x = 0$，因此相同的 $\mathrm{d}t$ 下 $\mathrm{d}\tau_1 > \mathrm{d}\tau_2$，因此 $\tau_1 > \tau_2$，即 A 比 B 更老。

但 B 运动过程还包含了加速和减速过程，其不是惯性参考系，因此上述分析不能反着来得到 B 比 A 老的结论。

1-9

> 列举尽可能多的例子来理解 SR 中的“相对的”和“绝对的”。

相对的

时间间隔：不同参考系中的观察者会测量到不同的时间间隔。

长度：物体在运动方向上的长度会因参考系不同而发生变化（尺缩效应）。

同时性：两个事件是否同时发生取决于观察者的参考系。

速度：物体的速度在不同参考系中测量结果不同。

动能：物体的动能依赖于观察者的参考系。

动量：动量的大小和方向因参考系不同而变化。

电磁场：电场和磁场的测量结果取决于观察者的参考系。

多普勒效应：光的频率和波长在不同参考系中测量结果不同。

角动量：角动量的测量结果依赖于观察者的参考系。

绝对的

光速：真空中的光速在所有惯性参考系中保持不变。

时空间隔：两个事件之间的时空间隔在所有惯性参考系中相同。

因果关系：如果两个事件有因果关系，它们的顺序在所有参考系中一致。

物理定律：所有惯性参考系中的物理定律形式相同。

能量-动量关系：能量和动量的关系在所有参考系中一致。

电荷：物体的电荷量在所有参考系中相同。

静质量：物体的静质量在所有参考系中不变。

熵：系统的熵在所有参考系中相同。

第1节作业

1-1

> 写出三维欧氏空间的线元（直角、球坐标系）。

直角坐标系：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, 1, 1\right)$$

球坐标系：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

$$\eta_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^2, r^2\sin^2\theta\right)$$

1-2

> 写出二维球面的线元；写出二维环面的线元。

设球面半径为常数 R，二维球面线元：

$$\mathrm{d}s^2=R^2\mathrm{d}\theta^2+R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

设环心到管中心的距离为常数 R，环面的管半径为常数 r，环面管的极角为 ϕ，环面的方位角为 θ，则二维环面上一点有两个自由度，其直角坐标 (x,y,z) 与 (ϕ,θ) 坐标的关系为：

$$\begin{cases}x=(R+r\cos\theta)\cos\phi\\ y=(R+r\cos\theta)\sin\phi\\ z=r\sin\theta\end{cases}$$

微分：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=-(R+r\cos\theta)\sin\phi\mathrm{d}\phi-r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}y=(R+r\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\phi-r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}z=r\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

二维环面线元：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\\ &=\left[-(R+r\cos\theta)\sin\phi\mathrm{d}\phi-r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta\right]^2\\ &+\left[(R+r\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\phi-r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta\right]^2\\ &+(r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2\\ &=(R+r\cos\theta)^2\mathrm{d}\phi^2+r^2\mathrm{d}\theta^2\end{aligned}$$

1-3

> 推导一般洛伦兹变换。

设有两个惯性系 S,S'，同一事件 P 在其中的坐标分别用 $(x_0,x_1,x_2,x_3),(x'_0,x'_1,x'_2,x'_3)$ 表示，其中 $x_0=ct,x'_0=ct'$。

约定希腊字母代表 $0,1,2,3$，英文字母代表 $1,2,3$。

考虑在 S 中以速度 u_i 做匀速直线运动的**光子**，由于一切惯性系都平权，因此在 S' 系中观测，此粒子仍做匀速直线运动，速度记为 u'_i，因此有运动方程：

$$\begin{cases}x_i=x_{i0}+u_i(t-t_0)\\ x'_i=x'_{i0}+u'_i(t'-t'_0)\end{cases}$$

其中，x_{i0},x'_{i0},t_0,t'_0 均为常数。

又光子以光速运动，而真空中光速在不同惯性系中恒为 c，因此有：

$$\begin{cases}u_iu_i=c^2\\u'_iu'_i=c^2\end{cases}$$

引入中间变量

$$\begin{cases}\beta_\mu=\beta_0\dfrac{u_\mu}{c},\quad (u_0\equiv c)\\S=\dfrac{c}{\beta_0}(t-t_0)\\\xi_\mu=(ct_0,x_{i0}),\quad \xi'_\mu=(ct'_0,x'_{i0})\end{cases}$$

光子运动方程可写为：

$$\begin{cases}x_\mu=\xi_\mu+\beta_\mu S\\x'_\mu=\xi'_\mu+\beta'_\mu S'\end{cases}$$

光速不变原理可写为：

$$\begin{cases}\eta_{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu=0\\\eta'_{\mu\nu}\beta'_\mu\beta'_\nu=0\end{cases}$$

设所求时空坐标变换为：

$$x'_\mu=f_\mu(x_0,x_1,x_2,x_3)$$

下面分四步求解。

（1）考虑惯性系条件对变换的限制

由各惯性系的等价性知，洛伦兹变换的逆变换是唯一确定的，其充要条件是变换的雅可比行列式非零：

$$\det\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)\neq 0$$

于是：

$$\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}S}=\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}S}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}=\beta_\nu\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$$

$$\mathrm{d}f_\mu = \mathrm{d}x'_\mu = \beta'_\mu \mathrm{d}S' = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0}\mathrm{d}f_0$$

$$\frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}f_0} = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{u'_\mu}{c} = \mathrm{const}$$

$$\frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{\mathrm{d}f_\mu}{\mathrm{d}f_0} = \frac{\mathrm{d}f_\mu/\mathrm{d}S}{\mathrm{d}f_0/\mathrm{d}S} = \frac{\beta_\nu \partial f_\mu/\partial x_\nu}{\beta_\sigma \partial f_0/\partial x_\sigma} = \mathrm{const}$$

上式取对数后对 S 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\left[\ln\left(\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\right) - \ln\left(\beta_\sigma \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma}\right)\right] = 0$$

即：

$$\frac{\beta_\nu \beta_\sigma \dfrac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}}{\beta_\nu \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}} = \frac{\beta_\nu \beta_\sigma \dfrac{\partial^2 f_0}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}}{\beta_\nu \dfrac{\partial f_0}{\partial x_\nu}}$$

令上式左右恒等于 $2\beta_\sigma \psi_\sigma, \psi_\sigma = \psi_\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3)$，则：

$$\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma$$

注意到：

$$\begin{aligned}
2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma &= \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma + \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma \\
&= \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma + \beta_\sigma \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\beta_\nu \psi_\nu \\
&= \beta_\nu \beta_\sigma \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu\right)
\end{aligned}$$

因此：

$$\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\beta_\sigma \psi_\sigma = \beta_\nu \beta_\sigma \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu\right)$$

对某一对 (ν, σ) 有：

$$\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma}\psi_\nu$$

（2）考虑光速不变原理对变换的限制

—

$$\eta_{\mu\nu}\beta'_{\mu}\beta'_{\nu}=\eta_{\mu\nu}\beta_{\sigma}\beta_{\lambda}\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\sigma}}\frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}=0$$

$$\eta_{\sigma\lambda}\beta_{\sigma}\beta_{\lambda}=0$$

对比知，两式中 $\beta_{\sigma}\beta_{\lambda}$ 的二次式系数成正比，比例系数令为 $\lambda(x_0,x_1,x_2,x_3)$

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\alpha}}\frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\beta}}=\lambda\eta_{\alpha\beta}$$

上式对 x_{ρ} 求导，并令 $\partial\lambda/\partial x_{\rho}=2\lambda\varphi_{\rho}$ 得：

$$\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 f_{\mu}}{\partial x_{\rho}\partial x_{\alpha}}\frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\beta}}+\frac{\partial^2 f_{\mu}}{\partial x_{\rho}\partial x_{\beta}}\frac{\partial f_{\nu}}{\partial x_{\alpha}}\right)=2\lambda\eta_{\alpha\beta}\varphi_{\rho}$$

即：

$$2\eta_{\alpha\beta}\psi_{\rho}+\eta_{\rho\alpha}\psi_{\beta}+\eta_{\rho\beta}\psi_{\alpha}=2\eta_{\alpha\beta}\varphi_{\rho}$$

令 $\rho\neq\alpha,\rho\neq\beta$，则 $\eta_{\rho\alpha}=\eta_{\rho\beta}=0$，则：

$$\psi_{\rho}=\varphi_{\rho},\quad \rho=0,1,2,3$$

令 $\rho=\alpha=\beta$，则：

$$2\psi_{\rho}=\varphi_{\rho},\quad \rho=0,1,2,3$$

综合可得：

$$\psi_{\rho}=\varphi_{\rho}=0,\quad \rho=0,1,2,3$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\rho}}=2\lambda\varphi_{\rho}=0,\quad \lambda=\text{const}$$

$$\frac{\partial^2 f_{\mu}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}=0$$

这就是变换函数所要满足的线性条件。

（3）确定线性变换的形式

令线性变换为：

$$x'_{\mu}=f_{\mu}=\sqrt{\lambda}\,(a_{\mu}+\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_{\nu})$$

度规：

$$\eta_{00}=1,\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-1$$

$a_{\mu\nu}$ 满足正交条件：

$$\begin{cases}\eta_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}=\eta_{\alpha\beta}\\ \eta_{\mu\nu}a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}=\eta_{\alpha\beta}\end{cases}$$

可以解出：

$$x_\mu=\eta_{\rho\rho}a_{\nu\mu}\left(\frac{x'_\nu}{\sqrt{\lambda}}-a_\nu\right)$$

从 S 系看 S' 系固定点 $\mathrm{d}x'_i$ 以速度 v_i 运动，则：

$$\mathrm{d}x_i=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{0i}\mathrm{d}x'_0,\quad \mathrm{d}x_0=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}a_{00}\mathrm{d}x'_0$$

$$\frac{v_i}{c}=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_0}=\frac{a_{0i}}{a_{00}}$$

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'_\mu\mathrm{d}x'_\nu=\lambda\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}x_\beta$$

令 $\mathrm{d}x'_i=0$ 则有：

$$\mathrm{d}x_0'^2=\lambda\mathrm{d}x_0^2\left(1-v^2/c^2\right)$$

当 $v=0$ 时有 $\mathrm{d}x'_0=\mathrm{d}x_0$，因此 $\lambda=1$，于是：

$$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu=-\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x'_\alpha\mathrm{d}x'_\beta$$

$$x'_\mu=a_\mu+\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu$$

（4）根据正交归一条件确定变换系数

为简便，取 $t=0$ 时 $t'=0$，且原点 O,O' 重合。则 $a_\mu=0$，洛伦兹变换简化为：

$$x'_\mu=\eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu$$

设 S' 系相对 S 系以速度 v_i 做匀速直线运动，则从 S 系观测 S' 系固定点 $\mathrm{d}x'_i=0$ 的速度为 v_i；又在 S' 系观察 S 系固定的 $\mathrm{d}x_i=0$ 以速度 v'_i 运动，则：

$$\begin{cases}a_{00}v_i=a_{0i}c\\ a_{00}v'_i=a_{i0}c\end{cases}$$

引入单向顺时性条件，即要求洛伦兹变换不改变时间进程的方向：

$$a_{00}=\frac{\partial t'}{\partial t}>0$$

在正交条件中令 $\alpha=\beta=0$ 有：

$$\begin{cases}a_{00}^2-\left(a_{10}^2+a_{20}^2+a_{30}^2\right)=1\\ a_{00}^2-\left(a_{01}^2+a_{02}^2+a_{03}^2\right)=1\end{cases}$$

可以解出变换系数：

$$\begin{cases}a_{00}=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\equiv\gamma\\ a_{0i}=\gamma\dfrac{v_i}{c}\\ a_{i0}=\gamma\dfrac{v_i'}{c}\end{cases}$$

正交条件中取 α,β 中一个为 0 有：

$$\begin{cases}a_{00}v_i'=a_{ik}v_k\\ a_{00}v_i=a_{ki}v_k'\end{cases}$$

正交条件中取 α,β 均不为 0 有：

$$a_{ki}a_{kj}=-\eta_{ij}+a_{0i}a_{0j}=\delta_{ij}+\gamma^2\frac{v_iv_j}{c^2}$$

定义：

$$d_{ik}=-a_{ik}+\frac{a_{i0}a_{0k}}{a_{00}+1}=-a_{ik}+(\gamma-1)\frac{v_i'v_k}{v^2}$$

则一般固有洛伦兹变换系数为：

$$\begin{cases}a_{00}=\gamma\\ a_{0i}=\gamma\dfrac{v_i}{c}\\ a_{i0}=-\gamma\dfrac{d_{ij}v_j}{c}\\ a_{ik}=-d_{ik}-(\gamma-1)\dfrac{d_{ij}v_jv_k}{v^2}\end{cases}$$

1-4

> 在 $v \ll c$ 的条件下验证伽利略变换。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right) \end{cases}$$

其中，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

当 $v \ll c$ 时，$\gamma \approx 1, vx/c^2 \approx 0$，洛伦兹变换退化为伽利略变换：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

1-5

> 证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

取 $c = 1$，洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - vx\right) \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

线元定义为：

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

要证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变，只需要证明：

$$-\mathrm{d}t'^2 + \mathrm{d}x'^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

注意到：

$$\mathrm{d}x' = \gamma\left(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t\right)$$

$$\mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x\right)$$

于是：

$$\begin{aligned}-\mathrm{d}t'^2+\mathrm{d}x'^2 &= \gamma^2\left[-\left(\mathrm{d}t-v\mathrm{d}x\right)^2+\left(\mathrm{d}x-v\mathrm{d}t\right)^2\right] \\ &= \gamma^2\cdot\left[\left(v^2-1\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-v^2\right)\mathrm{d}x^2\right] \\ &= \frac{1}{1-v^2}\cdot\left(1-v^2\right)\left(-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2\right) \\ &= -\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2\end{aligned}$$

因此在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

1-6

> 在 $v \ll c$ 的条件下验证速度的伽利略变换。

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)} \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)} \end{cases}$$

当 $v \ll c$ 时，$vu_x/c^2 \approx 0, \gamma \approx 1$，于是速度的洛伦兹变换退化为速度的伽利略变换：

$$\begin{cases} u_x' = u_x - v \\ u_y' = u_y \\ u_z' = u_z \end{cases}$$

1-7

> 谈谈你对广义相对性原理的理解，给出广义相对论中的光速不变原理的表述。

广义相对性原理：物理定律在所有参考系（包括非惯性系）中形式相同。这意味着自然规律不依赖于观察者的运动状态，惯性力和引力效应在局部不可区分。引力被视为时空弯曲的表现，物质和能量决定时空几何，时空几何又影响物质运动。

广义相对论中的光速不变原理的表述：在局部惯性参考系中，光速在真空中恒为 c，且与光源和观察者的运动无关。

1-8

> 假设我们的宇宙是二维的，且物质分布是均匀各项同性的，写出我们宇宙的度规形式。

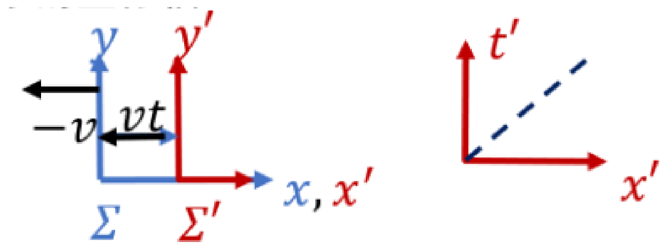
物质分布是均匀各项同性的，则度规与空间坐标无关。采用极坐标，线元为：

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2\right)$$

度规为：

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-1, a^2(t), a^2(t)r^2\right)$$

1-9

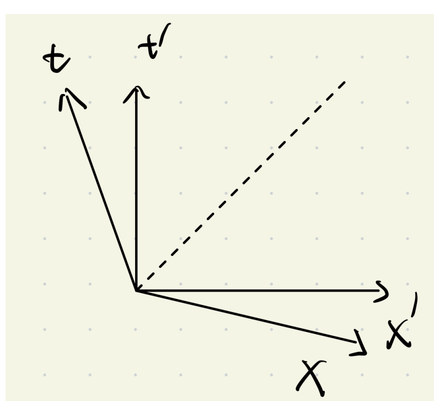


> 在惯性坐标系 Σ' 系中画惯性系 Σ 的坐标轴。

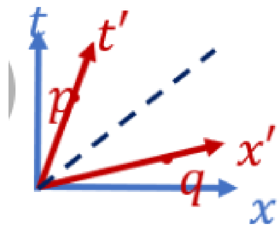
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + vx'\right) \end{cases}$$

t 轴：令 $x = \gamma(x' + vt') = 0 \implies t' = -x'/v$

x 轴：令 $t = \gamma\left(t' + vx'\right) = 0 \implies t' = -vx'$



1-10



> 在 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - vx\right) \end{cases}$$

t' 轴：$x' = \gamma(x - vt) = 0 \Longrightarrow t = x/v$

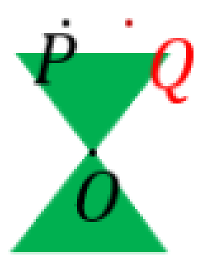
x' 轴：$t' = \gamma\left(t - vx\right) = 0 \Longrightarrow t = vx$

事件 $p = (t_p, vt_p)$，事件 $q = (t_q, t_q/v)$，内积：

$$p \cdot q = \eta_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -t_p t_q + (vt_p)\left(t_q/v\right) = 0$$

因此 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

1-11



> P, Q 两事件是否有因果关系?

P 在 Q 的光锥之外，两事件没有因果关系。

1-12

> 根据下面史瓦西时空的度规画出该时空中 (t, r) 这两维时空的光锥结构，讨论该时空中的固有时和坐标时的关系，以及固有距离和坐标距离的关系。

> $$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

光锥结构

只考虑径向，$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0$，则线元为：

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

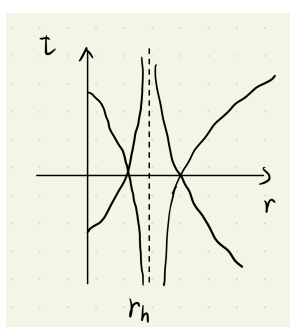
$$\mathrm{d}s^2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \frac{1}{f^2(r)} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \pm\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r = \pm\frac{1}{1 - r_h/r}\mathrm{d}r$$

积分：

$$\begin{aligned}
t - t_0 = \int \mathrm{d}t &= \pm\int \frac{1}{1 - r_h/r}\mathrm{d}r \\
&= \pm\int \frac{1 - r_h/r + r_h/r}{1 - r_h/r}\mathrm{d}r \\
&= \pm\int \left(1 + \frac{r_h}{r - r_h}\right)\mathrm{d}r \\
&= \pm\left[r + r_h\int \frac{1}{r - r_h}\mathrm{d}\left(r - r_h\right)\right] \\
&= \pm\left(r + r_h\ln|r - r_h|\right)
\end{aligned}$$

即：

$$t = t_0 \pm \left(r + r_h\ln|r - r_h|\right)$$



当 $r > r_h$ 时，光锥是正常的，光可以向外或向内传播。

当 $r = r_h$ 时，光锥坍缩为一条线，光无法逃逸。

当 $r < r_h$ 时，光锥反转，所有光都朝向奇点 $r = 0$ 传播。

固有时和坐标时的关系

对于静止观察者 $\mathrm{d}r^2=0$，其固有时

$$\mathrm{d}\tau^2=-\mathrm{d}s^2=f(r)\mathrm{d}t^2=\left(1-\frac{r_h}{r}\right)\mathrm{d}t^2$$

当 $r\to\infty$ 时，$f(r)\to 1$，固有时和坐标时一致；

当 $r\to r_h$ 时，$f(r)\to 0$，固有时趋于无穷小。

固有距离和坐标距离的关系

对于径向距离 $\mathrm{d}t^2=0$，固有距离为：

$$\mathrm{d}l=\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}}=\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r_h/r}}$$

当 $r\to\infty$ 时，$f(r)\to 1$，固有距离与坐标距离一致；

当 $r\to r_h$ 时，$f(r)\to 0$，固有距离趋于无穷大。