

第1次作业

1-1

谈谈你对 SR 中两个基本原理的理解；

光速不变原理：在任意惯性参考系中，真空中的光速具有相同的大小。

这一原理与经典力学中的速度叠加原理相矛盾，是狭义相对论的核心。由此导出的洛伦兹变换取代了经典力学中的伽利略变换。彻底改变了人们对时间、空间和运动的理解，为现代物理学奠定了基础。

相对性原理：惯性观者和非惯性观者有绝对区别；在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式。

相对性原理指出，没有任何惯性参考系是特殊的，物理规律不依赖于参考系的选择。这一原理否定了绝对空间和绝对时间的概念，强调了物理规律的普适性。

1-2

详细推导洛伦兹变换；

假设有两个惯性参考系 S 和 S' ，其中 S' 以速度 v 沿 x 轴相对于 S 运动。两个参考系的坐标轴平行，且在 $t = t' = 0$ 时原点重合。

设同一事件在 S 系的坐标为 (t, x, y, z) ；在 S' 系的坐标为 (t', x', y', z') ；

由于时空是均匀的，假设坐标变换是线性的，从 S 系到 S' 系的坐标变换形式上可写为：

$$\begin{cases} t' = At + Bx \\ x' = Ct + Dx \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中 A, B, C, D 是待定系数。

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

考虑 S' 的运动方程。在 S 系中 $x = vt$, 在 S' 系中 $x' = 0$, 于是:

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ vt \end{bmatrix}$$

由此可得:

$$\boxed{C + Dv = 0}$$

考虑 S 的运动方程。在 S 系中 $x = 0$, 在 S' 系中 $x' = -vt'$, 于是:

$$\begin{bmatrix} t' \\ -vt' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得:

$$\boxed{C + Av = 0}$$

因此 $A = D$, 引入 γ 使得 $A = D = \gamma$, 则 $C = -\gamma v$

洛伦兹变换矩阵目前可写为:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix}$$

假设在 $t = t' = 0$ 时, 从原点发出一束沿 x 轴正向传播的光。根据光速不变原理, 光在 S 和 S' 中的传播速度均为 c 。

在 S 系中, 光子的运动方程为:

$$x = ct$$

在 S' 系中, 光子的运动方程为:

$$x' = ct'$$

代入洛伦兹变换:

$$\begin{bmatrix} t' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ ct \end{bmatrix}$$

由此可得:

$$B = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

至此, 洛伦兹变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} = \gamma(v) \begin{bmatrix} 1 & \frac{-v}{c^2} \\ -v & 1 \end{bmatrix}$$

S' 相对 S 沿 x 轴正方向以速度 v 匀速运动。相对的, S 相对 S' 沿 x' 正方向以速度 $-v$ 运动, 因此有:

$$\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \gamma(-v) \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma(-v)\gamma(v) \begin{bmatrix} 1 - v^2/c^2 & 0 \\ 0 & 1 - v^2/c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

前后对比可得:

$$\gamma(-v)\gamma(v) \begin{bmatrix} 1 - v^2/c^2 & 0 \\ 0 & 1 - v^2/c^2 \end{bmatrix} = I$$

由时空的均匀性, $\gamma(-v) = \gamma(v)$, 因此:

$$\gamma^2 \begin{bmatrix} 1 - v^2/c^2 & 0 \\ 0 & 1 - v^2/c^2 \end{bmatrix} = I$$

从中解得:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

综上, 洛伦兹变换矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{bmatrix}$$

从 S 系到 S' 系的洛伦兹变换为:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

1-3

列出尽可能多的洛伦兹标量;

光速 c ;

时空间隔 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$;

固有时 $d\tau = ds/c$;

静止质量 m_0 ;

电荷 Q ;

电磁场的两个洛伦兹不变量:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c}$$

作用量 $S = \int \mathcal{L} d^4x$;

四维动量模方:

$$P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

四维电流密度模方:

$$J^\mu J_\mu = c^2 \rho^2 - \vec{J}^2$$

四维电磁势模方:

$$A^\mu A_\mu = \frac{\phi^2}{c^2} - \vec{A}^2$$

能-动张量的迹 T^μ_μ ;

1-4

推导速度的变换公式;

洛伦兹变换:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

取微分得:

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{v dx}{c^2} \right) \\ dx' = \gamma(dx - v dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

速度:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma \left(dt - \frac{v dx}{c^2} \right)} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v dx}{c^2}} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2} dx/dt} \\ &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{v dx}{c^2} \right)} = \frac{dy/dt}{\gamma \left(1 - \frac{v dx/dt}{c^2} \right)} \\ &= \frac{u_y}{\gamma (1 - vu_x/c^2)} \end{aligned}$$

同理有:

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma (1 - vu_x/c^2)}$$

1-5

谈谈你对参考系和坐标系的理解;

参考系: 参考系是描述物体运动时所选择的观察视角或背景框架。参考系是物理实体, 通常与某个物体或系统相关联。参考系的选择是相对的, 不同参考系中观察到的运动可能不同。

坐标系: 坐标系是用于量化物体位置的数学工具。它通过一组坐标, 比如 (x, y, z) , 来描述物体在空间中的位置。

参考系需要通过坐标系来量化物体的位置和运动; 坐标系是参考系的数学工具, 用于将参考系中的物理量(如位置、速度)转化为可计算的数值。

1-6

谈谈坐标时和固有时区别和联系；

坐标时：在某个特定的参考系中，由该参考系的坐标系定义的时间。

固有时：是指在一个物体自身的参考系中，由该物体携带的时钟所测量的时间。

固有时和坐标时之间的关系为：

$$d\tau = \frac{dt}{c}$$

坐标时是相对的，依赖于所选取的参考系。它不能直接被测量，仅在计算中具有意义。

固有时是绝对的，与参考系的选择无关。它反映了事件之间最本质的时间间隔，是可以被实际测量的。

1-7

详细谈谈对尺缩和钟慢这两个典型效应的理解；

尺缩效应

尺缩效应指的是，当一个物体以接近光速的速度运动时，在运动方向上，其长度会缩短。这种缩短只在运动方向上发生，垂直于运动方向的长度不受影响。

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

其中， L 是观察者测量到的运动物体的长度； L_0 是运动物体的固有长度； v 是运动物体相对观察者的速度。

尺缩效应强调了空间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一物体的长度测量结果不同。

钟慢效应

钟慢效应指的是，当一个时钟以接近光速的速度运动时，观察者会看到这个时钟的时间流逝变慢。

钟慢效应的公式为：

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

其中， Δt 是观察者测量到的运动时钟的时间间隔； Δt_0 是时钟在静止参考系中的固有时间间隔（即静止时间）； v 是运动时钟相对于观察者的速度。

钟慢效应强调了时间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一事件的时间间隔测量结果不同。

1-8

解释双生子效应（佯谬）；

假设有一对双胞胎， A 留在地球， B 乘坐高速飞船进行太空旅行后返回。

为了比较 A 的固有时 τ_1 和 B 的固有时 τ_2 ，不妨比较微元 $d\tau_1$ 和 $d\tau_2$ ，由于地球视为惯性参考系，于是

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - dx^2}$$

而对 A 来说， $dx = 0$ ，因此相同的 dt 下 $d\tau_1 > d\tau_2$ ，因此 $\tau_1 > \tau_2$ ，即 A 比 B 更老。

但 B 运动过程还包含了加速和减速过程，其不是惯性参考系，因此上述分析不能反着来得到 B 比 A 老的结论。

1-9

列举尽可能多的例子来理解 SR 中的“相对的”和“绝对的”。

相对的

时间间隔：不同参考系中的观察者会测量到不同的时间间隔。

长度：物体在运动方向上的长度会因参考系不同而发生变化（尺缩效应）。

同时性：两个事件是否同时发生取决于观察者的参考系。

速度：物体的速度在不同参考系中测量结果不同。

动能：物体的动能依赖于观察者的参考系。

动量：动量的大小和方向因参考系不同而变化。

电磁场：电场和磁场的测量结果取决于观察者的参考系。

多普勒效应：光的频率和波长在不同参考系中测量结果不同。

角动量：角动量的测量结果依赖于观察者的参考系。

绝对的

光速：真空中的光速在所有惯性参考系中保持不变。

时空间隔：两个事件之间的时空间隔在所有惯性参考系中相同。

因果关系：如果两个事件有因果关系，它们的顺序在所有参考系中一致。

物理定律：所有惯性参考系中的物理定律形式相同。

能量-动量关系：能量和动量的关系在所有参考系中一致。

电荷：物体的电荷量在所有参考系中相同。

静质量：物体的静质量在所有参考系中不变。

熵：系统的熵在所有参考系中相同。

第1节作业

1-1

写出三维欧氏空间的线元（直角、球坐标系）。

直角坐标系：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$$

球坐标系：

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\eta_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$$

1-2

写出二维球面的线元；写出二维环面的线元。

设球面半径为常数 R ，二维球面线元：

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

设环心到管中心的距离为常数 R ，环面的管半径为常数 r ，环面管的极角为 ϕ ，环面的方位角为 θ ，则二维环面上一点有两个自由度，其直角坐标 (x, y, z) 与 (ϕ, θ) 坐标的关系为：

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

微分：

$$\begin{cases} dx = -(R + r \cos \theta) \sin \phi d\phi - r \sin \theta \cos \phi d\theta \\ dy = (R + r \cos \theta) \cos \phi d\phi - r \sin \theta \sin \phi d\theta \\ dz = r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

二维环面线元：

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= [-(R + r \cos \theta) \sin \phi d\phi - r \sin \theta \cos \phi d\theta]^2 \\ &\quad + [(R + r \cos \theta) \cos \phi d\phi - r \sin \theta \sin \phi d\theta]^2 \\ &\quad + (r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

1-3

推导一般洛伦兹变换。

设有两个惯性系 S, S' ，同一事件 P 在其中的坐标分别用 $(x_0, x_1, x_2, x_3), (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ 表示，其中 $x_0 = ct, x'_0 = ct'$ 。

约定希腊字母代表 0, 1, 2, 3，英文字母代表 1, 2, 3。

考虑在 S 中以速度 u_i 做匀速直线运动的**光子**，由于一切惯性系都平权，因此在 S' 系中观测，此粒子仍做匀速直线运动，速度记为 u'_i ，因此有运动方程：

$$\begin{cases} x_i = x_{i0} + u_i(t - t_0) \\ x'_i = x'_{i0} + u'_i(t' - t'_0) \end{cases}$$

其中, $x_{i0}, x'_{i0}, t_0, t'_0$ 均为常数。

又光子以光速运动, 而真空中光速在不同惯性系中恒为 c , 因此有:

$$\begin{cases} u_i u_i = c^2 \\ u'_i u'_i = c^2 \end{cases}$$

引入中间变量

$$\begin{cases} \beta_\mu = \beta_0 \frac{u_\mu}{c}, & (u_0 \equiv c) \\ S = \frac{c}{\beta_0} (t - t_0) \\ \xi_\mu = (ct_0, x_{i0}), & \xi'_\mu = (ct'_0, x'_{i0}) \end{cases}$$

光子运动方程可写为:

$$\begin{cases} x_\mu = \xi_\mu + \beta_\mu S \\ x'_\mu = \xi'_\mu + \beta'_\mu S' \end{cases}$$

光速不变原理可写为:

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu} \beta_\mu \beta_\nu = 0 \\ \eta'_{\mu\nu} \beta'_\mu \beta'_\nu = 0 \end{cases}$$

设所求时空坐标变换为:

$$x'_\mu = f_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

下面分四步求解。

(1) 考虑惯性系条件对变换的限制

由各惯性系的等价性知, 洛伦兹变换的逆变换是唯一确定的, 其充要条件是变换的雅可比行列式非零:

$$\det \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} \right) \neq 0$$

于是:

$$\frac{df_\mu}{dS} = \frac{dx_\nu}{dS} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}$$

$$df_\mu = dx'_\mu = \beta'_\mu dS' = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} df_0$$

$$\frac{df_\mu}{df_0} = \frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{u'_\mu}{c} = \text{const}$$

$$\frac{\beta'_\mu}{\beta'_0} = \frac{df_\mu}{df_0} = \frac{df_\mu/dS}{df_0/dS} = \frac{\beta_\nu \partial f_\mu / \partial x_\nu}{\beta_\sigma \partial f_0 / \partial x_\sigma} = \text{const}$$

上式取对数后对 S 求导：

$$\frac{d}{dS} \left[\ln \left(\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \right) - \ln \left(\beta_\sigma \frac{\partial f_0}{\partial x_\sigma} \right) \right] = 0$$

即：

$$\frac{\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}}{\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}} = \frac{\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_\nu \partial x_\sigma}}{\beta_\nu \frac{\partial f_0}{\partial x_\nu}}$$

令上式左右恒等于 $2\beta_\sigma \psi_\sigma$, $\psi_\sigma = \psi_\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3)$, 则：

$$\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma$$

注意到：

$$\begin{aligned} 2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma &= \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma + \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma \\ &= \beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma + \beta_\sigma \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \beta_\nu \psi_\nu \\ &= \beta_\nu \beta_\sigma \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \psi_\nu \right) \end{aligned}$$

因此：

$$\beta_\nu \beta_\sigma \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = 2\beta_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \beta_\sigma \psi_\sigma = \beta_\nu \beta_\sigma \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \psi_\nu \right)$$

对某一对 (ν, σ) 有：

$$\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} \psi_\sigma + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \psi_\nu$$

(2) 考虑光速不变原理对变换的限制

—

$$\eta_{\mu\nu}\beta'_\mu\beta'_\nu = \eta_{\mu\nu}\beta_\sigma\beta_\lambda \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\sigma} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\lambda} = 0$$

$$\eta_{\sigma\lambda}\beta_\sigma\beta_\lambda = 0$$

对比知, 两式中 $\beta_\sigma\beta_\lambda$ 的二次式系数成正比, 比例系数令为 $\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\beta} = \lambda \eta_{\alpha\beta}$$

上式对 x_ρ 求导, 并令 $\partial\lambda/\partial x_\rho = 2\lambda\varphi_\rho$ 得:

$$\eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\rho \partial x_\alpha} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\rho \partial x_\beta} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\alpha} \right) = 2\lambda \eta_{\alpha\beta} \varphi_\rho$$

即:

$$2\eta_{\alpha\beta}\psi_\rho + \eta_{\rho\alpha}\psi_\beta + \eta_{\rho\beta}\psi_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta}\varphi_\rho$$

令 $\rho \neq \alpha, \rho \neq \beta$, 则 $\eta_{\rho\alpha} = \eta_{\rho\beta} = 0$, 则:

$$\psi_\rho = \varphi_\rho, \quad \rho = 0, 1, 2, 3$$

令 $\rho = \alpha = \beta$, 则:

$$2\psi_\rho = \varphi_\rho, \quad \rho = 0, 1, 2, 3$$

综合可得:

$$\psi_\rho = \varphi_\rho = 0, \quad \rho = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_\rho} = 2\lambda\varphi_\rho = 0, \quad \lambda = \text{const}$$

$$\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0$$

这就是变换函数所要满足的线性条件。

(3) 确定线性变换的形式

令线性变换为:

$$x'_\mu = f_\mu = \sqrt{\lambda}(a_\mu + \eta_{\rho\rho}a_{\mu\nu}x_\nu)$$

度规：

$$\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$$

$a_{\mu\nu}$ 满足正交条件：

$$\begin{cases} \eta_{\mu\nu} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} = \eta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\mu\nu} a_{\alpha\mu} a_{\beta\nu} = \eta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

可以解出：

$$x_\mu = \eta_{\rho\rho} a_{\nu\mu} \left(\frac{x'_\nu}{\sqrt{\lambda}} - a_\nu \right)$$

从 S 系看 S' 系固定点 dx'_i 以速度 v_i 运动，则：

$$dx_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{0i} dx'_0, \quad dx_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a_{00} dx'_0$$

$$\frac{v_i}{c} = \frac{dx_i}{dx_0} = \frac{a_{0i}}{a_{00}}$$

$$\eta_{\mu\nu} dx'_\mu dx'_\nu = \lambda \eta_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

令 $dx'_i = 0$ 则有：

$$dx_0'^2 = \lambda dx_0^2 (1 - v^2/c^2)$$

当 $v = 0$ 时有 $dx'_0 = dx_0$ ，因此 $\lambda = 1$ ，于是：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = -\eta_{\alpha\beta} dx'_\alpha dx'_\beta$$

$$x'_\mu = a_\mu + \eta_{\rho\rho} a_{\mu\nu} x_\nu$$

(4) 根据正交归一条件确定变换系数

为简便，取 $t = 0$ 时 $t' = 0$ ，且原点 O, O' 重合。则 $a_\mu = 0$ ，洛伦兹变换简化为：

$$x'_\mu = \eta_{\rho\rho} a_{\mu\nu} x_\nu$$

设 S' 系相对 S 系以速度 v_i 做匀速直线运动，则从 S 系观测 S' 系固定点 $dx'_i = 0$ 的速度为 v_i ；又在 S' 系观察 S 系固定的 $dx_i = 0$ 以速度 v'_i 运动，则：

$$\begin{cases} a_{00} v_i = a_{0i} c \\ a_{00} v'_i = a_{i0} c \end{cases}$$

引入单向顺时性条件，即要求洛伦兹变换不改变时间进程的方向：

$$a_{00} = \frac{\partial t'}{\partial t} > 0$$

在正交条件中令 $\alpha = \beta = 0$ 有：

$$\begin{cases} a_{00}^2 - (a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2) = 1 \\ a_{00}^2 - (a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2) = 1 \end{cases}$$

可以解出变换系数：

$$\begin{cases} a_{00} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma \\ a_{0i} = \gamma \frac{v_i}{c} \\ a_{i0} = \gamma \frac{v'_i}{c} \end{cases}$$

正交条件中取 α, β 中一个为 0 有：

$$\begin{cases} a_{00}v'_i = a_{ik}v_k \\ a_{00}v_i = a_{ki}v'_k \end{cases}$$

正交条件中取 α, β 均不为 0 有：

$$a_{ki}a_{kj} = -\eta_{ij} + a_{0i}a_{0j} = \delta_{ij} + \gamma^2 \frac{v_i v_j}{c^2}$$

定义：

$$d_{ik} = -a_{ik} + \frac{a_{i0}a_{0k}}{a_{00} + 1} = -a_{ik} + (\gamma - 1) \frac{v'_i v_k}{v^2}$$

则一般固有洛伦兹变换系数为：

$$\begin{cases} a_{00} = \gamma \\ a_{0i} = \gamma \frac{v_i}{c} \\ a_{i0} = -\gamma \frac{d_{ij}v_j}{c} \\ a_{ik} = -d_{ik} - (\gamma - 1) \frac{d_{ij}v_j v_k}{v^2} \end{cases}$$

1-4

在 $v \ll c$ 的条件下验证伽利略变换。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) \end{cases}$$

其中,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

当 $v \ll c$ 时, $\gamma \approx 1, vx/c^2 \approx 0$, 洛伦兹变换退化为伽利略变换:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

1-5

证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

取 $c = 1$, 洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

线元定义为:

$$ds^2 \equiv -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

要证明在 Lorentz 坐标变换下线元不变, 只需要证明:

$$-dt'^2 + dx'^2 = -dt^2 + dx^2$$

注意到:

$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$

$$dt' = \gamma(dt - vdx)$$

于是：

$$\begin{aligned} -dt'^2 + dx'^2 &= \gamma^2 \left[-(dt - vdx)^2 + (dx - vdt)^2 \right] \\ &= \gamma^2 \cdot [(v^2 - 1) dt^2 + (1 - v^2) dx^2] \\ &= \frac{1}{1 - v^2} \cdot (1 - v^2) (-dt^2 + dx^2) \\ &= -dt^2 + dx^2 \end{aligned}$$

因此在 Lorentz 坐标变换下线元不变。

1-6

在 $v \ll c$ 的条件下验证速度的伽利略变换。

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \end{cases}$$

当 $v \ll c$ 时, $vu_x/c^2 \approx 0, \gamma \approx 1$, 于是速度的洛伦兹变换退化为速度的伽利略变换：

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

1-7

谈谈你对广义相对性原理的理解，给出广义相对论中的光速不变原理的表述。

广义相对性原理：物理定律在所有参考系（包括非惯性系）中形式相同。这意味着自然规律不依赖于观察者的运动状态，惯性力和引力效应在局部不可区分。引力被视为时空弯曲的表现，物质和能量决定时空几何，时空几何又影响物质运动。

广义相对论中的光速不变原理的表述：在局部惯性参考系中，光速在真空中恒为 c ，且与光源和观察者的运动无关。

1-8

假设我们的宇宙是二维的，且物质分布是均匀各项同性的，写出我们宇宙的度规形式。

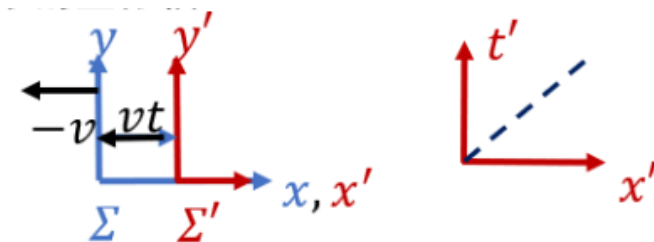
物质分布是均匀各项同性的，则度规与空间坐标无关。采用极坐标，线元为：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 d\theta^2)$$

度规为：

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t)r^2)$$

1-9

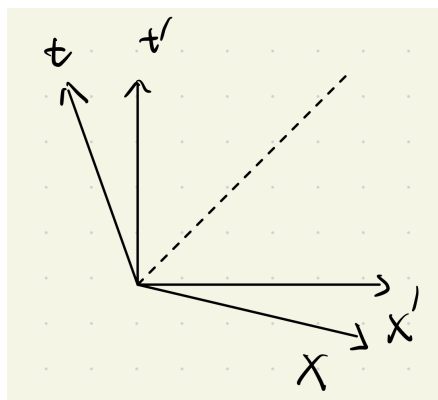


在惯性坐标系 Σ' 系中画惯性系 Σ 的坐标轴。

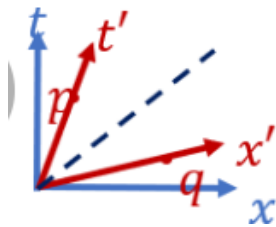
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + vx') \end{cases}$$

t 轴：令 $x = \gamma(x' + vt') = 0 \implies t' = -x'/v$

x 轴：令 $t = \gamma(t' + vx') = 0 \implies t' = -vx'$



1-10



在 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases}$$

t' 轴: $x' = \gamma(x - vt) = 0 \implies t = x/v$

x' 轴: $t' = \gamma(t - vx) = 0 \implies t = vx$

事件 $p = (t_p, vt_p)$, 事件 $q = (t_q, t_q/v)$, 内积:

$$p \cdot q = \eta_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -t_p t_q + (vt_p)(t_q/v) = 0$$

因此 Σ 系中证明 Σ' 系中的坐标轴正交。

1-11



P, Q 两事件是否有因果关系?

P 在 Q 的光锥之外, 两事件没有因果关系。

1-12

根据下面史瓦西时空的度规画出该时空中 (t, r) 这两维时空的光锥结构, 讨论该时空中的固有时和坐标时的关系, 以及固有距离和坐标距离的关系。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

光锥结构

只考虑径向, $d\theta = d\varphi = 0$, 则线元为:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \frac{r_h}{r}, \quad r_h = 2GM$$

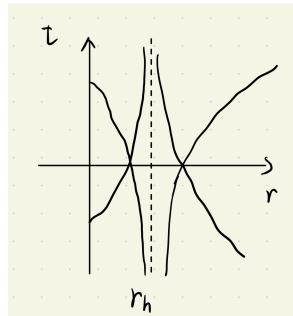
$$ds^2 = 0 \implies \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 = \frac{1}{f^2(r)} \implies dt = \pm \frac{1}{f(r)} dr = \pm \frac{1}{1 - r_h/r} dr$$

积分:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int dt = \pm \int \frac{1}{1 - r_h/r} dr \\ &= \pm \int \frac{1 - r_h/r + r_h/r}{1 - r_h/r} dr \\ &= \pm \int \left(1 + \frac{r_h}{r - r_h} \right) dr \\ &= \pm \left[r + r_h \int \frac{1}{r - r_h} d(r - r_h) \right] \\ &= \pm (r + r_h \ln |r - r_h|) \end{aligned}$$

即:

$$t = t_0 \pm (r + r_h \ln |r - r_h|)$$



当 $r > r_h$ 时, 光锥是正常的, 光可以向外或向内传播。

当 $r = r_h$ 时, 光锥坍缩为一条线, 光无法逃逸。

当 $r < r_h$ 时, 光锥反转, 所有光都朝向奇点 $r = 0$ 传播。

固有时和坐标时的关系

对于静止观察者 $dr^2 = 0$ ，其固有时

$$d\tau^2 = -ds^2 = f(r)dt^2 = \left(1 - \frac{r_h}{r}\right) dt^2$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时， $f(r) \rightarrow 1$ ，固有时和坐标时一致；

当 $r \rightarrow r_h$ 时， $f(r) \rightarrow 0$ ，固有时趋于无穷小。

固有距离和坐标距离的关系

对于径向距离 $dt^2 = 0$ ，固有距离为：

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - r_h/r}}$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时， $f(r) \rightarrow 1$ ，固有距离与坐标距离一致；

当 $r \rightarrow r_h$ 时， $f(r) \rightarrow 0$ ，固有距离趋于无穷大。

第一章 2,3 节练习题

1

为什么类时间隔小于零而不是大于零？

间隔定义为

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

由类时间隔描述的两事件存在因果关系，可以通过小于等于光速的信号联系。

因此有

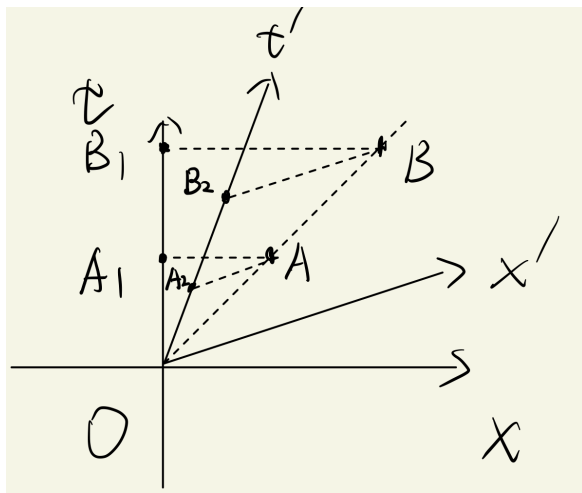
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 < dt^2$$

因此类时间隔

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$$

两事件类光，则有因果关系，同时是绝对的，先后是绝对的；两事件类时，则有因果关系，无同时，先后是绝对的；两事件类空，则无因果关系，同时是相对的，先后是相对的，两事件绝对异地。用时空图说明上面的结论。

两事件类光，则有因果关系，同时是绝对的，先后是绝对的



事件 A 与事件 O 类光。 A 在 O 的光锥上，二者可通过光信号联系，因此有因果关系；

若两类光事件同时，即在 x 系中有 $t_B = t_A$ ，则在 x' 系中也有 $t'_B = t'_A$ ，因此同时是绝对的。

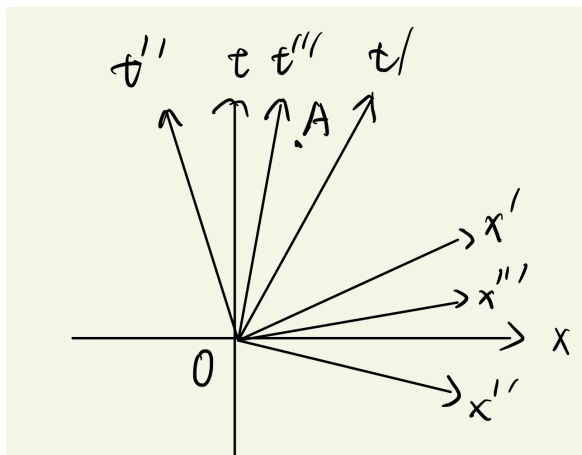
考虑位于 O 光锥上不同的两点 A, B ，二者类光。过 A, B 点分别作 x 轴平行线交 t 轴于 A_1, B_1 点；过 A, B 点分别作 x' 轴平行线交 t' 轴于 A_2, B_2 点。

由于 $|A_1O| < |B_1O|$ ，因此在 x 系中有 $t_A < t_B$

由于 $|A_2O| < |B_2O|$ ，因此在 x' 系中有 $t'_A < t'_B$

因此先后是绝对的。

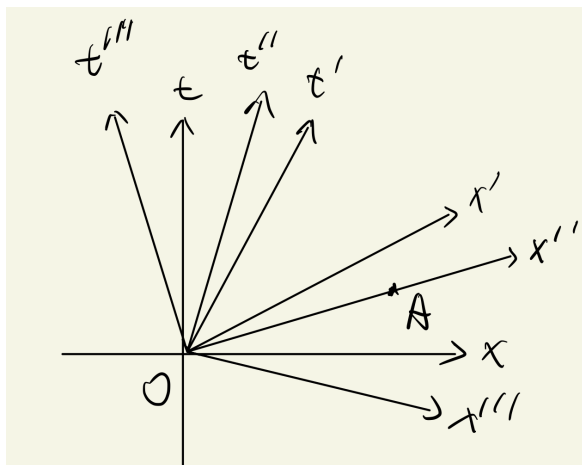
两事件类时，则有因果关系，无同时，先后是绝对的



事件 A 与事件 O 类时。二者可通过速度小于光速的信号联系，因此有因果关系。

在 x, x', x'', x''' 系中，都有 $t_O = 0, t_A > 0 = t_O$ ，因此无同时，先后是绝对的。

两事件类空，则无因果关系，同时是相对的，先后是相对的，两事件绝对异地



事件 A 与事件 O 类空。二者无法通过传播速度小于等于光速的信号联系，因此无因果关系。

在 x'' 系中二者同时，而在 x 系中二者不同时，因此同时是相对的。

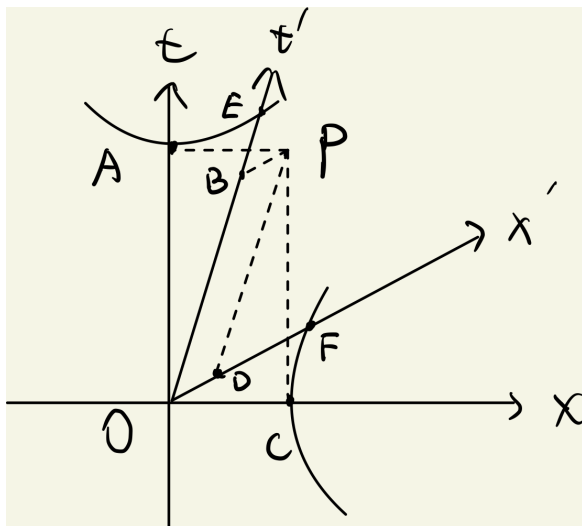
在 x' 系中 $t'_A < 0 = t_O$ ，而在 x 系中 $t_A > 0 = t_O$ ，因此先后是相对的。

在 x, x', x'', x''' 系中二者都是异地事件，因此二者绝对异地。

3

由于间隔不变，导致两不同事件（类时、类空、类光）在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。画图说明上述结论。

类时事件



如图，事件 P 与事件 O 类时。过 P 作 x 轴的平行线交 t 轴于 A ，过 P 作 x' 轴的平行线交 t' 轴于 B ，过 P 作 t 轴的平行线交 x 轴于 C ，过 P 作 t' 轴的平行线交 x' 轴于 D ；过 A 作校准曲线交 t' 轴于 E ，过 C 作校准曲线交 x' 轴于 F 。

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$ ，在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$ ，而由校准曲线，有

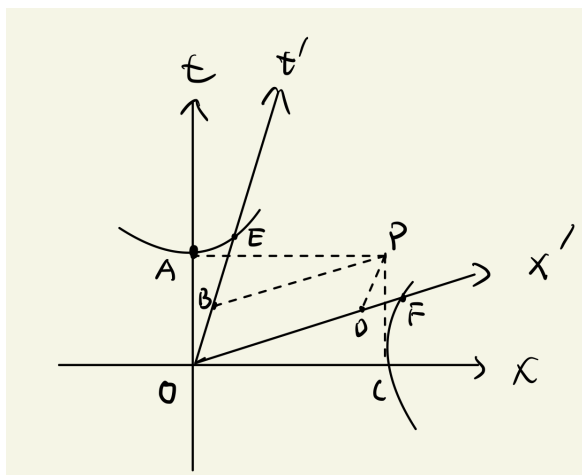
$$|OA| = |OE| > |OB|$$

同理， OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$ ，在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$ ，而由校准曲线，有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上，两类时事件在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。

类空事件



如图，事件 P 与事件 O 类空。

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$ ，在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$ ，而由校准曲线，有

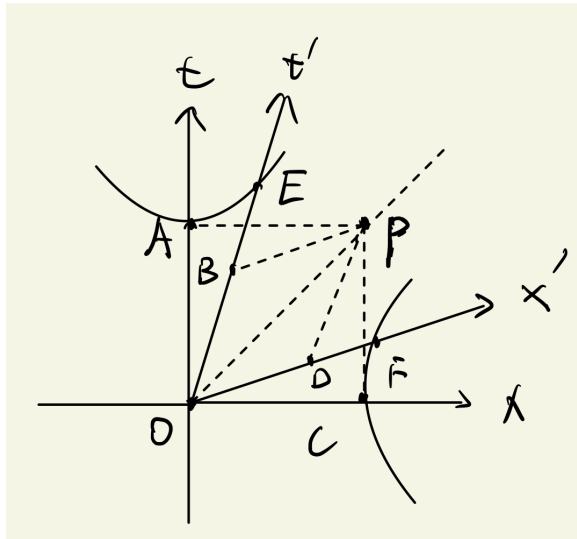
$$|OA| = |OE| > |OB|$$

同理, OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$, 在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$, 而由校准曲线, 有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上, 两类空事件在不同惯性系中的空间距离不同, 时间间隔也不同。

类光事件



如图, 事件 P 与事件 O 类光。

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$, 在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$, 而由校准曲线, 有

$$|OA| = |OE| > |OB|$$

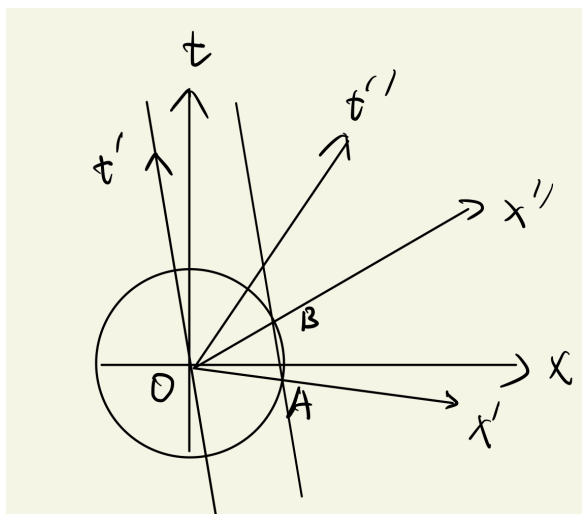
同理, OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$, 在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$, 而由校准曲线, 有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上, 两类光事件在不同惯性系中的空间距离不同, 时间间隔也不同。

4

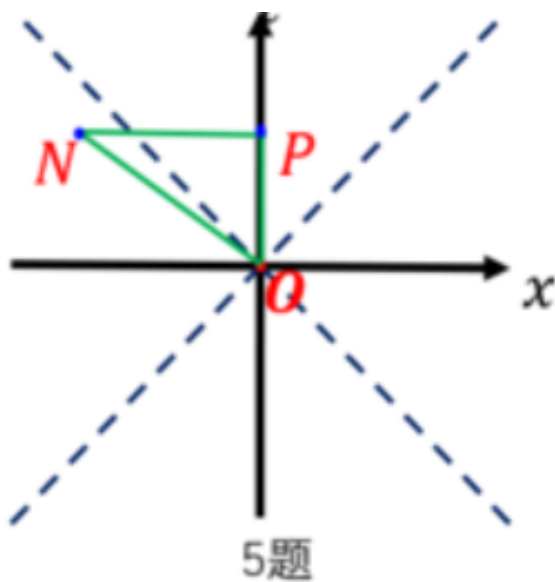
是否存在这样的两个参考系 (其中一个为尺子的静系), 通过调整这两个参考系的坐标轴, 使得在两系中尺子“看起来一样长”?



如图，对尺子测长度要在同一时刻进行测量。因此， x' 系中尺子长度取决于 $|OA|$ ， x'' 系中尺子长度取决于 $|OB|$ ，二者“看起来一样长”（在同一个圆上，欧氏长度相等）。

5

如图， NP 平行于 x 轴， N 在光锥之外，求 $|ON|$ ， $|OP|$ ， $|NP|$ 的线长关系。



设 N 的坐标为 (t, x) , $|t| < |x|$, P 的坐标为 $(t, 0)$

$$|ON| = \sqrt{|-t^2 + x^2|} = \sqrt{-|t|^2 + |x|^2}$$

$$|OP| = \sqrt{|-t^2 + 0^2|} = \sqrt{|t|^2}$$

$$|NP| = \sqrt{|-0^2 + |x|^2|} = \sqrt{|x|^2}$$

因此：

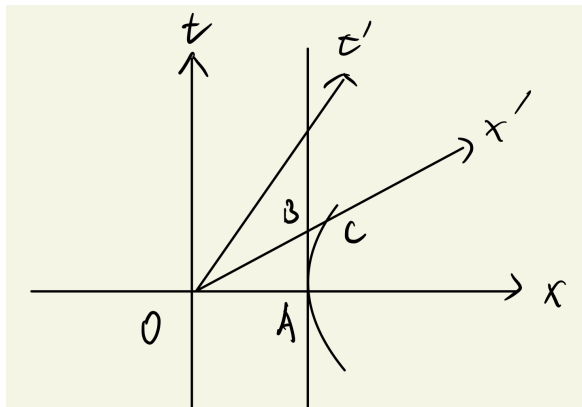
$$|NP| > |OP| > |ON|$$

作业

1

用时空图在动系和静系中分析尺缩效应。（分别在动系和静系中画校准曲线来分析）

静系中画校准曲线



如图，静系中尺子的长度

$$l_0 = |OA|$$

动系中尺子长度

$$l = |OB|$$

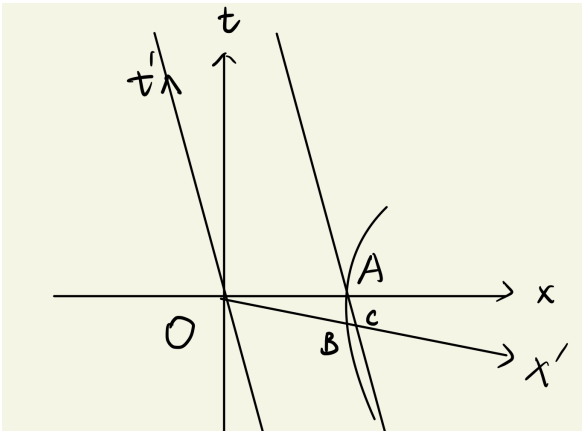
而由校准曲线知

$$|OA| = |OC| > |OB|$$

因此有

$$l_0 > l$$

动系中画校准曲线



首先证明示意图是合适的，即 B 点在 C 点左侧。

设 t' 轴方程为

$$t' : t = -\frac{1}{v}x$$

设 A 点图中坐标为

$$A(l, 0)$$

则尺子右端世界线方程为：

$$t = -\frac{1}{v}(x - l)$$

x' 轴方程为：

$$x' : t = -vx$$

校准曲线方程为：

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{t^2}{l^2} = 1$$

联立

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{v}(x - l) \\ t = -vx \end{cases}$$

解得：

$$x_C = \frac{l}{1 - v^2}$$

联立

$$\begin{cases} t = -vx \\ \frac{x^2}{l^2} - \frac{t^2}{l^2} = 1 \end{cases}$$

解得：

$$x_B = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}}$$

因此

$$x_B = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}} < x_C = \frac{l}{1-v^2}$$

即 B 在 C 左侧。

尺子在动系长度

$$l = |OA|$$

尺子在静系长度

$$l_0 = |OC|$$

而由校准曲线知

$$|OA| = |OB| < |OC|$$

因此：

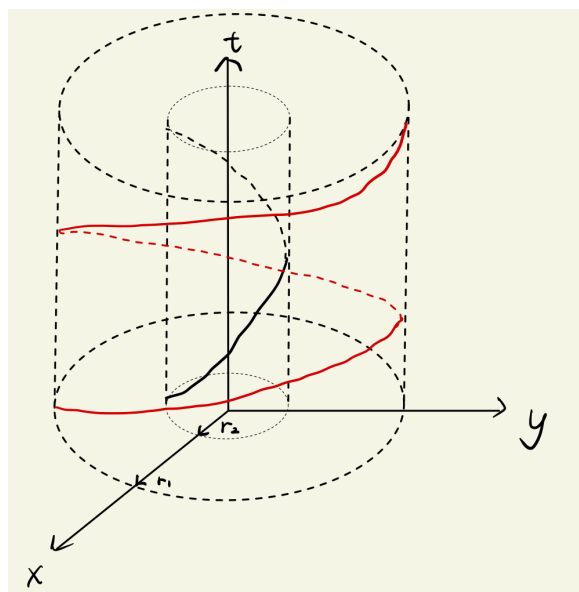
$$l < l_0$$

2

假设赤道**上空**两万公里处有一颗卫星，其上携带一个标准钟 A ；赤道处也有一个标准钟 B 。已知卫星公转线速度为每小时 14000 公里，赤道的线速度为每小时 1667 公里。（赤道半径为 6378 km）

2-1

画出两钟世界线的示意图。



如图，黑线是赤道处钟 B 的世界线，红线是卫星上标准钟 A 的世界线。

2-2

求一天内两钟的时间差。

考虑国际单位制，卫星绕地半径记为 $r_1 = (6378 + 20000) \text{ km} = 26378 \text{ km}$ ，赤道半径记为 $r_2 = 6378 \text{ km}$ ，卫星上钟 A 的角速度记为 ω_1 ，赤道处钟 B 的角速度记为 ω_2 ，卫星线速度记为 v_1 ，赤道线速度记为 v_2

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{14000 \text{ km/h}}{26378 \text{ km}} > \omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = \frac{1667 \text{ km/h}}{6378 \text{ km}}$$

即卫星的角速度更大。

采用极坐标，用 θ 描述时钟位置。设 $T = 24 \text{ h}$ 。

卫星钟 A 世界线方程：

$$l_1 : t = \frac{\theta}{\omega_1}$$

赤道钟 B 世界线方程：

$$l_2 : t = \frac{\theta}{\omega_2}$$

卫星钟 A 读数

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \int_{l_1} \sqrt{-ds^2/c^2} \\
&= \frac{1}{c} \int_{l_1} \sqrt{-(-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2)} \\
&= \frac{1}{c} \int_{l_1} \sqrt{c^2 dt^2 - r_1^2 d\theta^2} \\
&= \frac{1}{c} \int_{l_1} \sqrt{c^2 dt^2 - r_1^2 \omega_1^2 dt^2} \\
&= \frac{1}{c} \int_{l_1} \sqrt{c^2 - v_1^2} dt \\
&= \frac{\sqrt{c^2 - v_1^2}}{c} T \\
&= T \sqrt{1 - v_1^2/c^2}
\end{aligned}$$

同理，赤道钟 B 读数

$$\tau_2 = T \sqrt{1 - v_2^2/c^2}$$

读数差为：

$$\begin{aligned}
\Delta\tau &= \tau_2 - \tau_1 \\
&= T \left(\sqrt{1 - v_2^2/c^2} - \sqrt{1 - v_1^2/c^2} \right) \\
&\approx 7.16 \times 10^{-6} \text{ s}
\end{aligned}$$