数学物理方法小班讲义

快雪时晴
兰州大学物理科学与技术学院

2025 年 10 月 21 日

前言

主要参考书是杨孔庆老师的《数学物理方法》[1]。请访问 这里 以获取本文档 Tex 源文件。

目录

第 1 章　$\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

1.1　向量分析基本知识

1.1.1　爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定就是说，在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为

$$\vec{A} = A_1\vec{\mathrm{e}}_1 + A_2\vec{\mathrm{e}}_2 + A_3\vec{\mathrm{e}}_3 \equiv \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i, \tag{1.1}$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为

$$\vec{A} = \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i \to \vec{A} = A_i\vec{\mathrm{e}}_i, \tag{1.2}$$

这样就省去了写求和符号 $\sum\limits_i$ 的工作。

1.1.2　Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}. \tag{1.3}$$

1.1.3　三阶 Levi-Citita 符号 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到123} \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到123} \\ 0 & , ijk\text{中有相同指标} \end{cases}. \tag{1.4}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \tag{1.5}$$

1.1.4 一些简单算例

例 1.1. 一些简单算例

- $\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$,
- $\vec{\mathrm{e}}_i \times \vec{\mathrm{e}}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_k$,
- $A_i \delta_{ij} = A_j$,
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$,

  证明.
  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j \vec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \tag{1.6}$$
  □

- $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$,

  证明.
  $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k \tag{1.7}$$
  □

1.1.5 ∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为

$$\nabla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i, \tag{1.8}$$

其中，∂_i 的定义为

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.9}$$

1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理

1.1.6.1 标量场梯度的定义

设 $\psi(\vec{x})$ 是标量场，$\psi(\vec{x})$ 的梯度，记为 grad $\psi(\vec{x})$，由下式定义

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi(\vec{x}),\tag{1.10}$$

其中，$\mathrm{d}\vec{x}$ 是位矢 $\vec{x}$ 的任意微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 是标量场 $\psi(\vec{x})$ 因位矢 $\vec{x}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{x}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 的定义为

$$\mathrm{d}\psi(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x}).\tag{1.11}$$

可以证明，标量场的梯度 grad $\psi(\vec{x})$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})=\nabla\psi(\vec{x}).\tag{1.12}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla\psi(\vec{x})$ 指代标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度。

1.1.6.2 方向导数的定义

标量场 ψ 在 $\vec{x}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}\equiv\lim_{t\to0^+}\frac{\psi(\vec{x}+t\vec{v})-\psi(\vec{x})}{tv}.\tag{1.13}$$

从方向导数的定义可以看出，方向导数描述的是标量场沿某一方向变化的快慢。

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{x}$ 点处沿曲面上 $\vec{x}$ 点的外法向的方向导数简记为 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial n}\right|_{\Sigma}$.

1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi(\vec{x}),\tag{1.14}$$

设 $\mathrm{d}\vec{x}=\vec{n}\mathrm{d}x$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{x}$ 同向的单位向量，则有

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\psi(\vec{x}),\tag{1.15}$$

即

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}.\tag{1.16}$$

这就是说，标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 在某一方向 $\vec{n}$ 上的投影 $[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n}$ 恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

1.1.6.4 标量场梯度的意义

考虑标量场梯度与方向导数的关系

$$[\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n} = \left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}, \tag{1.17}$$

有：

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}} = [\nabla\psi(\vec{x})]\cdot\vec{n} = |\nabla\psi(\vec{x})|\,|\vec{n}|\cos\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\rangle = |\nabla\psi(\vec{x})|\cos\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\rangle\,, \tag{1.18}$$

上式中，$\vec{n}$ 为方向任意的单位向量。

对于确定的场点 $\vec{x}$，$\psi(\vec{x})$ 和 $\nabla\psi(\vec{x})$ 也是确定的，则 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 是确定的。

现在我们想看看 $\psi(\vec{x})$ 沿哪个方向的变化速度最快，也就是看 $\psi(\vec{x})$ 在哪个方向上的方向导数最大。

显然，在固定场点 $\vec{x}$ 的情况下，当 $\vec{n}$ 与 $\nabla\psi(\vec{x})$ 同向时，也即 $\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/\left|\nabla\psi(\vec{x})\right|$ 时，$\psi(\vec{x})$ 在 $\vec{n}$ 方向上的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$ 最大，这个最大的方向导数为

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|} = |\nabla\psi(\vec{x})|\cos\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\rangle = |\nabla\psi(\vec{x})|\,.$$

也就是说，标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的方向就是标量场 $\psi(\vec{x})$ 方向导数最大的方向；标量场梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的大小 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 就是最大方向导数。

1.1.6.5 梯度定理

定理 1.1. 设 $\psi(\vec{x})$ 是标量场，C 是连结 $\vec{p},\vec{q}\in\mathbb{R}^3$ 的任一曲线，则有

$$\psi\left(\vec{p}\right)-\psi\left(\vec{q}\right) = \int\limits_{\vec{x}\in C[\vec{q}\to\vec{p}]} \nabla\psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}. \tag{1.19}$$

证明思路也很简单，把曲线 C 分成很多小的有向线元，对每一段有向线元都使用梯度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.1.7 矢量场的散度、高斯定理

1.1.7.1 矢量场散度的定义

矢量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\ \vec{A}$，定义为

$$\mathrm{div}\ \vec{A} \equiv \lim_{V\to 0^+} \frac{1}{V} \oint\limits_{\partial V^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.20}$$

可以证明，矢量场 $\vec{A}$ 的散度 div $\vec{A}$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} \tag{1.21}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla\cdot\vec{A}$ 指代矢量场 $\vec{A}$ 的散度。

1.1.7.2 高斯定理

定理 1.2. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭体，则有

$$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.22}$$

证明的思路也很简单，把区域 V 分成很多小体积元，对每个体积元都使用矢量场散度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理

1.1.8.1 矢量场的旋度

矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 curl $\vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\mathrm{curl}\ \vec{A}\right)\cdot\vec{n} = \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}, \tag{1.23}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与 $\partial\sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

可以证明，矢量场 $\vec{A}$ 的旋度 curl $\vec{A}$ 可以用 ∇ 算子表达为

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \nabla\times\vec{A}. \tag{1.24}$$

为了书写方便，以后就用 $\nabla\times\vec{A}$ 指代矢量场 $\vec{A}$ 的旋度。

1.1.8.2 斯托克斯定理

定理 1.3. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭曲面，则有

$$\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{\Sigma}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.25}$$

其中，曲面 Σ 的取向与 $\partial\Sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

证明的思路也很简单，把曲面 Σ 分成很多小面元，对每个面元都使用矢量场旋度的定义，最后把结果加起来就得证。

1.2 向量分析常用公式

1.2.1 分析工具

$$
\begin{cases}
\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\
\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k \\
\vec{A} = A_i\vec{e}_i \\
A_i\delta_{ij} = A_j \\
\vec{A} \cdot \vec{B} = A_iB_i \\
\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_iA_jB_k \\
\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_l = \varepsilon_{ljk}A_jB_k \\
\nabla = \vec{e}_i\partial_i \\
\nabla \cdot \vec{A} = \partial_iA_i \\
\nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_jA_k \\
\partial_i\psi = (\nabla\psi)_i \\
\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i\partial_i \\
\nabla^2\psi \equiv \nabla \cdot (\nabla\psi) = \partial_i\partial_i\psi \\
\nabla^2\vec{A} \equiv \left(\nabla^2A_i\right)\vec{e}_i \\
\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\
\partial_ix_j = \delta_{ij}
\end{cases}
\tag{1.26}
$$

1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明

1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式

例 1.2.

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3. \tag{1.27}$$

证明.

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_ix_i = \delta_{ii} = 3. \tag{1.28}$$

□

例 1.3.

$$\nabla\times\vec{x}=\vec{0}. \tag{1.29}$$

证明.

$$\nabla\times\vec{x}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j x_k=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\delta_{jk}=\varepsilon_{ikk}\vec{\mathrm{e}}_i=\vec{0}. \tag{1.30}$$

□

1.2.2.2 从左往右证的公式

例 1.4.

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi. \tag{1.31}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi)&=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i(\varphi\psi)\\&=\vec{\mathrm{e}}_i\varphi\partial_i\psi+\vec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_i\varphi\\&=\varphi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi+\psi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\varphi\\&=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi.\end{aligned} \tag{1.32}$$

□

例 1.5.

$$\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}. \tag{1.33}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)&=\partial_i\left(\varphi\vec{A}\right)_i\\&=\partial_i\left(\varphi A_i\right)\\&=A_i\partial_i\varphi+\varphi\partial_i A_i\\&=\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{A}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

□

例 1.6.

$$\nabla\times\left(\varphi\vec{A}\right)=(\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}. \tag{1.35}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\varphi\vec{A}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi+\varphi\partial_j A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_j A_k+\varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j A_k \\
&= (\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

□

例 1.7.

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right). \tag{1.37}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \partial_i\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_i \\
&= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k \\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k \\
&= B_k\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k-A_j\left(\nabla\times\vec{B}\right)_j \\
&= \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right).
\end{aligned} \tag{1.38}$$

□

例 1.8.

$$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right). \tag{1.39}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l+A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-\vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

□

例 1.9.

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}. \tag{1.41}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\\&=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_l A_m\\&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_l A_m\\&=\vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_l A_m-\vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_l A_m\\&=\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_m A_m-\partial_l\partial_l A_m\vec{\mathrm{e}}_m\\&=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

□

1.2.2.3 需要注意力的公式

例 1.10.

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}. \tag{1.43}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\varphi)&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k\\&=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi,\end{aligned} \tag{1.44}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$，有

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi&=-\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi\\&=-\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi.\end{aligned} \tag{1.45}$$

最后一步是因为 j,k 都是用于求和的哑标，因此可以作替换 $j\leftrightarrow k$ 。上式说明：

$$\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}. \tag{1.46}$$

于是

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}. \tag{1.47}$$

□

例 1.11.

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0. \tag{1.48}$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) &= \partial_i \left(\nabla \times \vec{A}\right)_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \tag{1.49}$$

注意到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \tag{1.50}$$

于是

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0, \tag{1.51}$$

这就是说：

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0. \tag{1.52}$$

□

1.2.2.4 从右往左证的公式

例 1.12.

$$\nabla \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \nabla\right) \vec{A} + \left(\vec{A} \cdot \nabla\right) \vec{B} + \vec{B} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) + \vec{A} \times \left(\nabla \times \vec{B}\right). \tag{1.53}$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iB_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iA_j\left(\nabla\times\vec{B}\right)_k\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iB_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_iA_j\varepsilon_{klm}\partial_lB_m\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{e}_iB_j\partial_lA_m+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{e}_iA_j\partial_lB_m\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{e}_iB_j\partial_lA_m+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{e}_iA_j\partial_lB_m\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+\vec{e}_lB_m\partial_lA_m-\vec{e}_mB_l\partial_lA_m+\vec{e}_lA_m\partial_lB_m-\vec{e}_mA_l\partial_lB_m\\
=&B_i\partial_iA_j\vec{e}_j+A_i\partial_iB_j\vec{e}_j+B_m\vec{e}_l\partial_lA_m-B_l\partial_lA_m\vec{e}_m+A_m\vec{e}_l\partial_lB_m-A_l\partial_lB_m\vec{e}_m\\
=&B_m\vec{e}_l\partial_lA_m+A_m\vec{e}_l\partial_lB_m\\
=&B_m\nabla A_m+A_m\nabla B_m\\
=&\nabla(A_mB_m)\\
=&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

□

1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明

1.2.3.1 高斯定理

定理 1.4. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭体，则有

$$\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_V\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.55}$$

1.2.3.2 斯托克斯定理

定理 1.5. 设 $\vec{A}(\vec{x})$ 是矢量场，Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的封闭曲面，则有

$$\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{\Sigma}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.56}$$

其中，曲面 Σ 的取向与 $\partial\Sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

1.2.3.3 格林第一恒等式

例 1.13.

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{\Omega}\left(\psi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}V. \tag{1.57}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\ &= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\ &= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi)+\psi\partial_i\partial_i\phi \\ &= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i+\psi\nabla^2\phi \\ &= (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)+\psi\nabla^2\phi,\end{aligned} \tag{1.58}$$

于是由高斯定理，有

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega}\left[(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)+\psi\nabla^2\phi\right]\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega}\left[\psi\nabla^2\phi+(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right]\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{1.59}$$

□

1.2.3.4 格林第二恒等式

例 1.14.

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega}\left(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V. \tag{1.60}$$

证明. 利用 $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$ 有

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi) &= \nabla\phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot(\nabla\phi)-(\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot(\nabla\psi)) \\ &= \psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi,\end{aligned} \tag{1.61}$$

于是由高斯定理可得

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\mathrm{d}V \\ &= \int\limits_{\Omega}\left(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{1.62}$$

□

1.2.3.5 高斯定理的一个推论

例 1.15.

$$\oint\limits_{\partial V^+} \psi \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V \nabla\psi \mathrm{d}V. \tag{1.63}$$

证明. 对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \tag{1.64}$$

这个特殊的矢量场 $\vec{A}$ 应当满足高斯定理：

$$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V (\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V. \tag{1.65}$$

等式左边

$$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\limits_{\partial V^+} (\psi\vec{a})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{a}\cdot \oint\limits_{\partial V^+} \psi \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.66}$$

等式右边

$$\begin{aligned}
\int\limits_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V &= \int\limits_V \left[\nabla\cdot(\psi\vec{a})\right]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_V \left[(\nabla\psi)\cdot\vec{a} + \psi\nabla\cdot\vec{a}\right]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_V (\nabla\psi)\cdot\vec{a}\mathrm{d}V \\
&= \vec{a}\cdot\int\limits_V \nabla\psi \mathrm{d}V,
\end{aligned} \tag{1.67}$$

于是

$$\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial V^+} \psi \mathrm{d}\vec{S} = \vec{a}\cdot\int\limits_V \nabla\psi \mathrm{d}V, \tag{1.68}$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial V^+} \psi \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V \nabla\psi \mathrm{d}V. \tag{1.69}$$

□

1.2.3.6 斯托克斯定理的一个推论

例 1.16.

$$\oint_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \nabla\psi \times \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.70}$$

证明. 对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \tag{1.71}$$

这个特殊的矢量场 $\vec{A}$ 应当满足斯托克斯定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.72}$$

等式左边

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \oint_{\partial S} (\psi\vec{a})\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\ &= \vec{a}\cdot \oint_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l},\end{aligned} \tag{1.73}$$

等式右边

$$\begin{aligned}\int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int_S [\nabla \times (\psi\vec{a})]\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \int_S [(\nabla\psi)\times\vec{a} + \psi\nabla\times\vec{a}]\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \int_S [(\nabla\psi)\times\vec{a}]\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \int_S \left[\mathrm{d}\vec{S}\times(\nabla\psi)\right]\cdot\vec{a} \\ &= -\vec{a}\cdot\int_S \nabla\psi\times \mathrm{d}\vec{S},\end{aligned} \tag{1.74}$$

于是

$$\vec{a}\cdot\oint_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l} = -\vec{a}\cdot\int_S \nabla\psi\times \mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.75}$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial S} \psi \mathrm{d}\vec{l} = -\int\limits_{S} \nabla\psi \times \mathrm{d}\vec{S}. \tag{1.76}$$

□

第 2 章　$\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

参考文献

[1] 杨孔庆. 数学物理方法. Gao deng jiao yu chu ban she, 2012.