第一章 2,3 节练习题

1

> 为什么类时间隔小于零而不是大于零?

间隔定义为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

由类时间隔描述的两事件存在因果关系，可以通过小于等于光速的信号联系。

因此有

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 < \mathrm{d}t^2$$

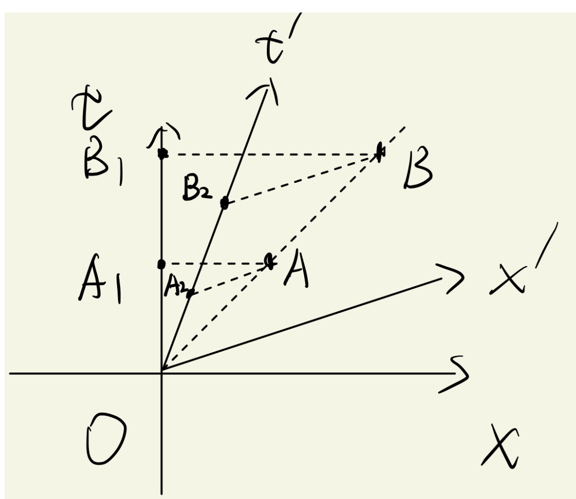
因此类时间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 < 0$$

2

> 两事件类光，则有因果关系，同时是绝对的，先后是绝对的；两事件类时，则有因果关系，无同时，先后是绝对的；两事件类空，则无因果关系，同时是相对的，先后是相对的，两事件绝对异地。用时空图说明上面的结论。

两事件类光，则有因果关系，同时是绝对的，先后是绝对的



事件 A 与事件 O 类光。A 在 O 的光锥上，二者可通过光信号联系，因此有因果关系；

若两类光事件同时，则这两个事件实际上是同一个事件，因此在任何惯性系中都有相同的时间坐标，因此同时是绝对的；

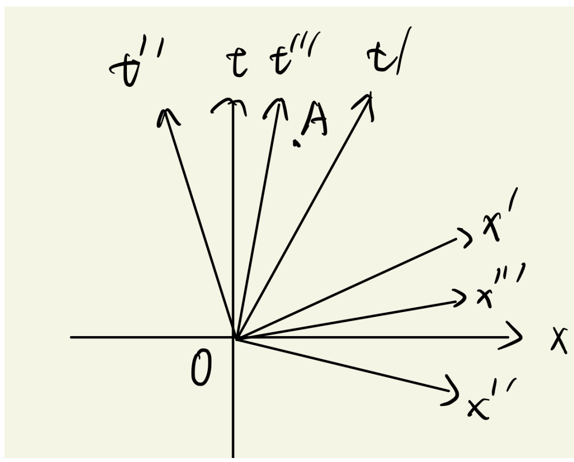
考虑位于 O 光锥上不同的两点 A, B，二者类光。过 A, B 点分别作 x 轴平行线交 t 轴于 A_1, B_1 点；过 A, B 点分别作 x' 轴平行线交 t' 轴于 A_2, B_2 点。

由于 $|A_1O| < |B_1O|$，因此在 x 系中有 $t_A < t_B$

由于 $|A_2O| < |B_2O|$，因此在 x' 系中有 $t'_A < t'_B$

因此先后是绝对的。

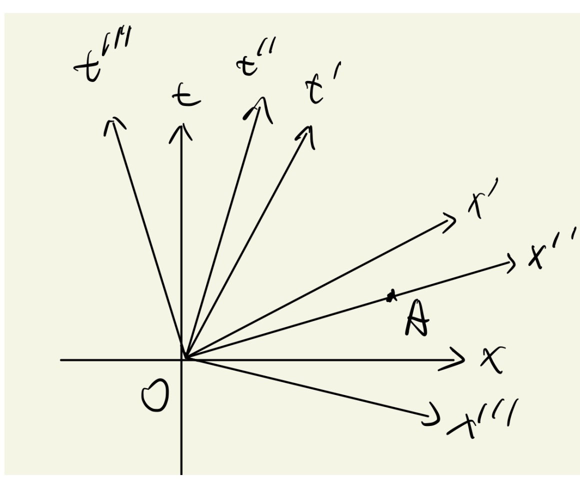
两事件类时，则有因果关系，无同时，先后是绝对的



事件 A 与事件 O 类时。二者可通过速度小于光速的信号联系，因此有因果关系。

在 x, x', x'', x''' 系中，都有 $t_O = 0, t_A > 0 = t_O$，因此无同时，先后是绝对的。

两事件类空，则无因果关系，同时是相对的，先后是相对的，两事件绝对异地



事件 A 与事件 O 类空。二者无法通过传播速度小于等于光速的信号联系，因此无因果关系。

在 x'' 系中二者同时，而在 x 系中二者不同时，因此同时是相对的。

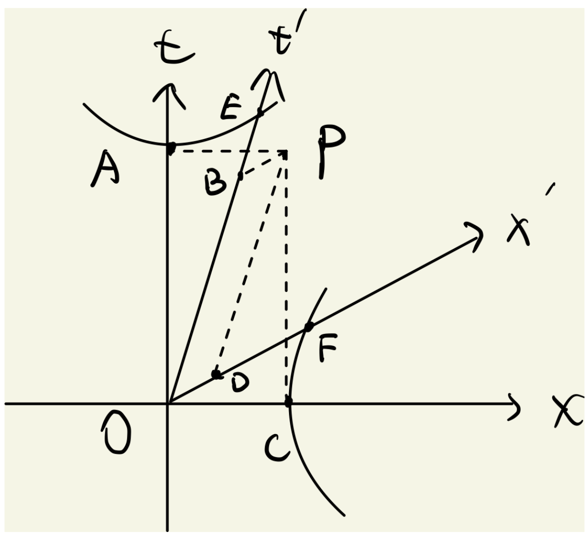
在 x' 系中 $t'_A < 0 = t_O$，而在 x 系中 $t_A > 0 = t_O$，因此先后是相对的。

在 x, x', x''，x''' 系中二者都是异地事件，因此二者绝对异地。

3

> 由于间隔不变，导致两不同事件（类时、类空、类光）在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。画图说明上述结论。

类时事件



如图，事件 P 与事件 O 类时。过 P 作 x 轴的平行线交 t 轴于 A，过 P 作 x' 轴的平行线交 t' 轴于 B，过 P 作 t 轴的平行线交 x 轴于 C，过 P 作 t' 轴的平行线交 x' 轴于 D；过 A 作校准曲线交 t' 轴于 E，过 C 作校准曲线交 x' 轴于 F.

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$，在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$，而由校准曲线，有

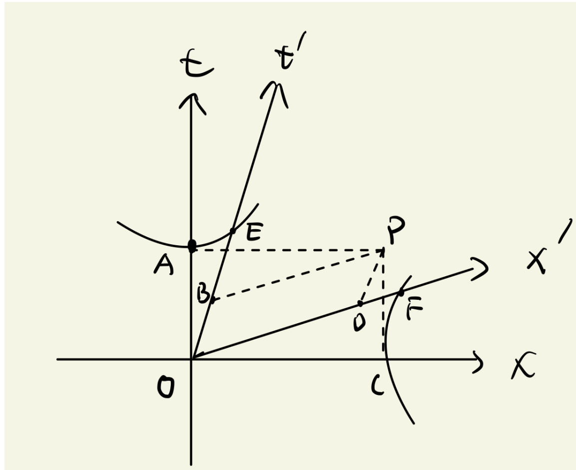
$$|OA| = |OE| > |OB|$$

同理，OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$，在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$，而由校准曲线，有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上，两类时事件在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。

类空事件



如图，事件 P 与事件 O 类空。

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$，在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$，而由校准曲线，有

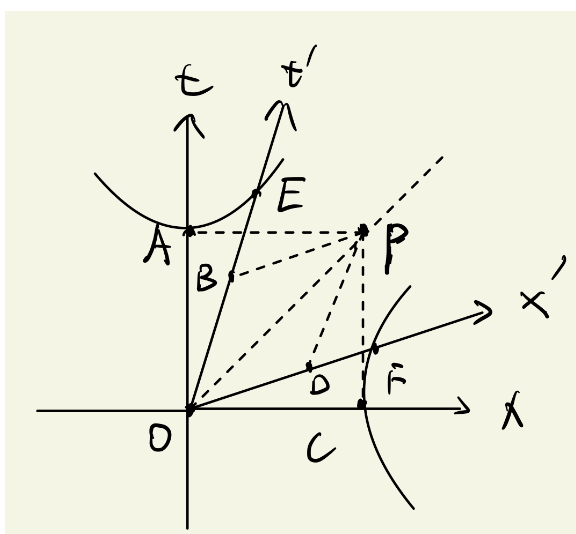
$$|OA| = |OE| > |OB|$$

同理，OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$，在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$，而由校准曲线，有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上，两类空事件在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。

类光事件



如图，事件 P 与事件 O 类光。

OP 在 x 系的时间间隔取决于 $|OA|$，在 x' 系的时间间隔取决于 $|OB|$，而由校准曲线，有

$$|OA| = |OE| > |OB|$$

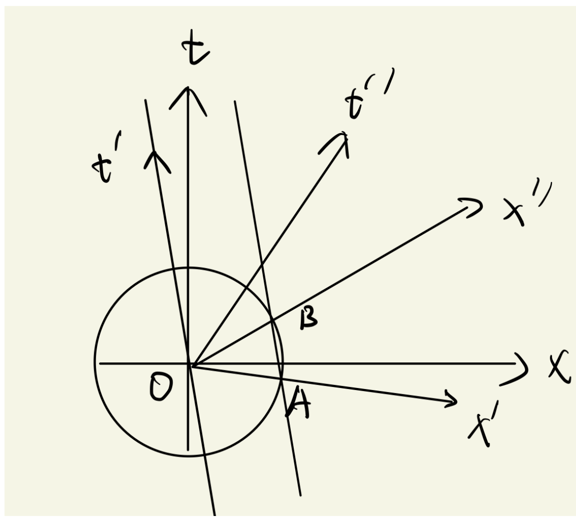
同理，OP 在 x 系的空间距离取决于 $|OC|$，在 x' 系的空间距离取决于 $|OD|$，而由校准曲线，有

$$|OC| = |OF| > |OD|$$

综上，两类光事件在不同惯性系中的空间距离不同，时间间隔也不同。

4

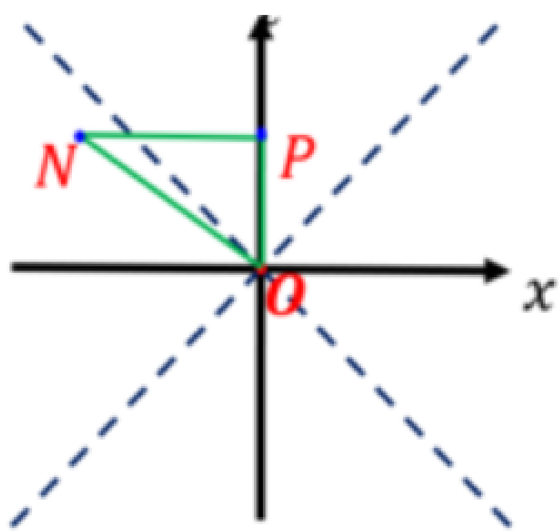
> 是否存在这样的两个参考系（其中一个为尺子的静系），通过调整这两个参考系的坐标轴，使得在两系中尺子“看起来一样长”？



如图，对尺子测长度要在同一时刻进行测量。因此，x' 系中尺子长度取决于 $|OA|$，x'' 系中尺子长度取决于 $|OB|$，二者“看起来一样长”（在同一个圆上，欧氏长度相等）。

5

> 如图，NP 平行于 x 轴，N 在光锥之外，求 $|ON|, |OP|, |NP|$ 的线长关系。



5题

设 N 的坐标为 $(t,x), |t|<|x|$，P 的坐标为 $(t,0)$

$$|ON|=\sqrt{|-t^2+x^2|}=\sqrt{-|t|^2+|x|^2}$$

$$|OP|=\sqrt{|-t^2+0^2|}=\sqrt{|t|^2}$$

$$|NP|=\sqrt{\left|-0^2+|x|^2\right|}=\sqrt{|x|^2}$$

因此：

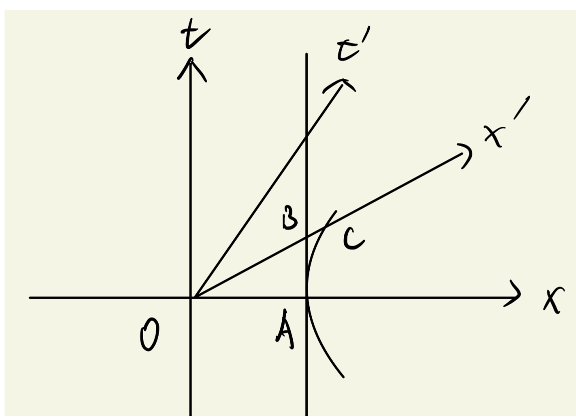
$$|NP|>|OP|>|ON|$$

作业

1

用时空图在动系和静系中分析尺缩效应。（分别在动系和静系中画校准曲线来分析）

静系中画校准曲线



如图，静系中尺子的长度

$$l_0=|OA|$$

动系中尺子长度

$$l=|OB|$$

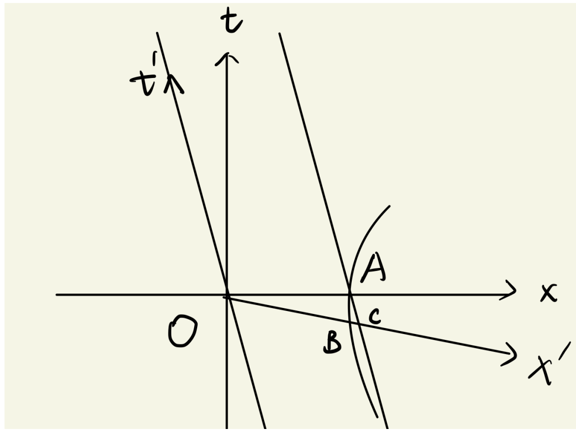
而由校准曲线知

$$|OA|=|OC|>|OB|$$

因此有

$$l_0 > l$$

动系中画校准曲线



首先证明示意图是合适的，即 B 点在 C 点左侧。

设 t' 轴方程为

$$t' : t = -\frac{1}{v}x$$

设 A 点图中坐标为

$$A(l, 0)$$

则尺子右端世界线方程为：

$$t = -\frac{1}{v}\left(x - l\right)$$

x' 轴方程为：

$$x' : t = -vx$$

校准曲线方程为：

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{t^2}{l^2} = 1$$

联立

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{v}\left(x - l\right) \\ t = -vx \end{cases}$$

解得:

$$x_C = \frac{l}{1-v^2}$$

联立

$$\begin{cases} t = -vx \\ \frac{x^2}{l^2} - \frac{t^2}{l^2} = 1 \end{cases}$$

解得:

$$x_B = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}}$$

因此

$$x_B = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}} < x_C = \frac{l}{1-v^2}$$

即 B 在 C 左侧。

尺子在动系长度

$$l = |OA|$$

尺子在静系长度

$$l_0 = |OC|$$

而由校准曲线知

$$|OA| = |OB| < |OC|$$

因此:

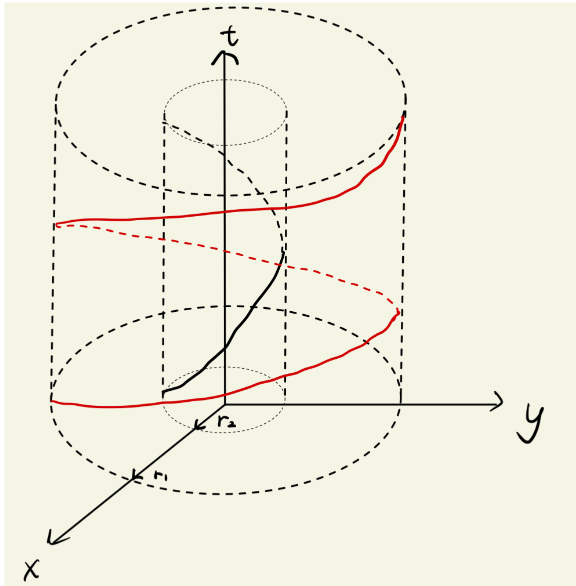
$$l < l_0$$

2

假设赤道上空两万公里处有一颗卫星，其上携带一个标准钟 A；赤道处也有一个标准钟 B。已知卫星公转线速度为每小时 14000 公里，赤道的线速度为每小时 1667 公里。

2-1

> 画出两钟世界线的示意图。



如图，黑线是赤道处钟 B 的世界线，红线是卫星上标准钟 A 的世界线。

2-2

> 求一天内两钟的时间差。

考虑国际单位制，卫星绕地半径记为 r_1，赤道半径记为 r_2，卫星上钟 A 的角速度记为 ω_1，赤道处钟 B 的角速度记为 ω_2，卫星线速度记为 v_1，赤道线速度记为 v_2

采用极坐标，用 θ 描述时钟位置。设 $T = 24\text{ h}.$

卫星钟 A 世界线方程：

$$l_1 : t = \frac{\theta}{\omega_1}$$

赤道钟 B 世界线方程：

$$l_2 : t = \frac{\theta}{\omega_2}$$

卫星钟 A 读数

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \int\limits_{l_1} \sqrt{-\mathrm{d}s^2/c^2} \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_{l_1} \sqrt{-\left(-c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)} \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_{l_1} \sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - r_1^2\mathrm{d}\theta^2} \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_{l_1} \sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - r_1^2\omega_1^2\mathrm{d}t^2} \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_{l_1} \sqrt{c^2 - v_1^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{c^2 - v_1^2}}{c} T \\
&= T\sqrt{1 - v_1^2/c^2}
\end{aligned}
$$

同理，赤道钟 B 读数

$$
\tau_2 = T\sqrt{1 - v_2^2/c^2}
$$

读数差为：

$$
\begin{aligned}
\Delta\tau &= \tau_2 - \tau_1 \\
&= T\left(\sqrt{1 - v_2^2/c^2} - \sqrt{1 - v_1^2/c^2}\right) \\
&\approx 7.16 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}
\end{aligned}
$$