

# 数学物理方法小班讲义

快雪时晴

兰州大学物理科学与技术学院

2025 年 10 月 23 日

# 前言

主要参考书是杨孔庆老师的《数学物理方法》[1]。请访问 [这里](#) 以获取本文档 Tex 源文件。

本文档遵循 CC0 1.0 公共领域贡献协议 (CC0 1.0 Universal, Public Domain Dedication)，读者可以自由复制、修改、分发、引用本文档内容而无需征得作者许可。详细协议内容请参见 <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>。

# 目录

第一章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析	1
1.1 向量分析基本知识	1
1.1.1 爱因斯坦求和约定	1
1.1.2 Kronecher delta 符号 $\delta_{ij}$	1
1.1.3 三阶 Levi-Citita 符号 $\varepsilon_{ijk}$	1
1.1.4 一些简单算例	2
1.1.5 $\nabla$ 算子	2
1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理	3
1.1.6.1 标量场梯度的定义	3
1.1.6.2 方向导数的定义	3
1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系	3
1.1.6.4 标量场梯度的意义	4
1.1.6.5 梯度定理	4
1.1.7 矢量场的散度、高斯定理	4
1.1.7.1 矢量场散度的定义	4
1.1.7.2 高斯定理	5
1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理	5
1.1.8.1 矢量场的旋度	5
1.1.8.2 斯托克斯定理	5
1.2 向量分析常用公式	6
1.2.1 分析工具	6
1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明	6
1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式	6
1.2.2.2 从左往右证的公式	7
1.2.2.3 需要注意力的公式	9
1.2.2.4 从右往左证的公式	10
1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明	11
1.2.3.1 高斯定理	11

1.2.3.2	斯托克斯定理 . . . . .	11
1.2.3.3	格林第一恒等式 . . . . .	11
1.2.3.4	格林第二恒等式 . . . . .	12
1.2.3.5	高斯定理的一个推论 . . . . .	13
1.2.3.6	斯托克斯定理的一个推论 . . . . .	14
<b>第二章</b>	<b><math>\mathbb{R}^3</math> 空间曲线坐标系中的向量分析</b>	<b>16</b>
2.1	总结 . . . . .	16
2.1.1	$\nabla$ 在三种坐标系下的表达式 . . . . .	16
2.1.1.1	直角坐标 . . . . .	16
2.1.1.2	球坐标 . . . . .	16
2.1.1.3	柱坐标 . . . . .	16
2.1.2	$\nabla^2$ 在三种坐标系下的表达式 . . . . .	16
2.1.2.1	直角坐标 . . . . .	16
2.1.2.2	球坐标 . . . . .	16
2.1.2.3	柱坐标 . . . . .	17
<b>第三章</b>	<b>线性空间</b>	<b>18</b>

# 第 1 章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

## 1.1 向量分析基本知识

### 1.1.1 爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定就是说，在同一代数项中见到两个重复指标  $i$  就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标  $i$  为“哑标”。

比如， $\mathbb{R}^3$  空间中的向量  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  在直角坐标下可表示为

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \equiv \sum_i A_i \vec{e}_i, \quad (1.1)$$

其中， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  分别是  $x, y, z$  轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  简写为

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \rightarrow \vec{A} = A_i \vec{e}_i, \quad (1.2)$$

这样就省去了写求和符号  $\sum_i$  的工作。

### 1.1.2 Kronecher delta 符号 $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}. \quad (1.3)$$

### 1.1.3 三阶 Levi-Citita 符号 $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到} 123 \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到} 123 \\ 0 & , ijk \text{中有相同指标} \end{cases}. \quad (1.4)$$

可以利用  $\varepsilon_{ijk}$  表示任何一个三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \quad (1.5)$$

### 1.1.4 一些简单算例

例 1.1. 一些简单算例

- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij},$
- $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k,$
- $A_i \delta_{ij} = A_j,$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i,$

证明.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{e}_i) \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \quad (1.6)$$

□

- $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k,$

证明.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \quad (1.7)$$

□

### 1.1.5 $\nabla$ 算子

$\nabla$  算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为

$$\nabla \equiv \vec{e}_i \partial_i, \quad (1.8)$$

其中,  $\partial_i$  的定义为

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.9)$$

### 1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理

#### 1.1.6.1 标量场梯度的定义

设  $\psi(\vec{x})$  是标量场,  $\psi(\vec{x})$  的梯度, 记为  $\text{grad } \psi(\vec{x})$ , 由下式定义

$$\text{grad } \psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\psi(\vec{x}), \quad (1.10)$$

其中,  $d\vec{x}$  是位矢  $\vec{x}$  的任意微小变化,  $d\psi(\vec{x})$  是标量场  $\psi(\vec{x})$  因位矢  $\vec{x}$  变化  $d\vec{x}$  而引起的相应的变化。具体来说,  $d\psi(\vec{x})$  的定义为

$$d\psi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x} + d\vec{x}) - \psi(\vec{x}). \quad (1.11)$$

可以证明, 标量场的梯度  $\text{grad } \psi(\vec{x})$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\text{grad } \psi(\vec{x}) = \nabla \psi(\vec{x}). \quad (1.12)$$

为了书写方便, 以后就用  $\nabla \psi(\vec{x})$  指代标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度。

#### 1.1.6.2 方向导数的定义

标量场  $\psi$  在  $\vec{x}$  点处沿  $\vec{v}$  方向的方向导数, 记为  $\left. \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{v}}$ , 定义为

$$\left. \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{v}} \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\vec{x} + t\vec{v}) - \psi(\vec{x})}{tv}. \quad (1.13)$$

从方向导数的定义可以看出, 方向导数描述的是标量场沿某一方向变化的快慢。

特别地, 标量场  $\psi$  在曲面  $\Sigma$  上的  $\vec{x}$  点处沿曲面上  $\vec{x}$  点的外法向的方向导数简记为  $\left. \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} \right|_{\Sigma}$ .

#### 1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系

标量场的梯度的定义:

$$\nabla \psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\psi(\vec{x}), \quad (1.14)$$

设  $d\vec{x} = \vec{n}dx$ , 其中  $\vec{n}$  是与  $d\vec{x}$  同向的单位向量, 则有

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n}dx = d\psi(\vec{x}), \quad (1.15)$$

即

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \frac{d\psi(\vec{x})}{dx} = \frac{\psi(\vec{x} + d\vec{x}) - \psi(\vec{x})}{dx} = \left. \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}. \quad (1.16)$$

这就是说, 标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  在某一方向  $\vec{n}$  上的投影  $[\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n}$  恰等于标量场沿这一方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\left. \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}$ .

#### 1.1.6.4 标量场梯度的意义

考虑标量场梯度与方向导数的关系

$$[\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \left. \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}, \quad (1.17)$$

有:

$$\left. \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}} = [\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = |\nabla\psi(\vec{x})| |\vec{n}| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle = |\nabla\psi(\vec{x})| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle, \quad (1.18)$$

上式中,  $\vec{n}$  为方向任意的单位向量。

对于确定的场点  $\vec{x}$ ,  $\psi(\vec{x})$  和  $\nabla\psi(\vec{x})$  也是确定的, 则  $|\nabla\psi(\vec{x})|$  是确定的。

现在我们想看看  $\psi(\vec{x})$  沿哪个方向的变化速度最快, 也就是看  $\psi(\vec{x})$  在哪个方向上的方向导数最大。

显然, 在固定场点  $\vec{x}$  的情况下, 当  $\vec{n}$  与  $\nabla\psi(\vec{x})$  同向时, 也即  $\vec{n} = \nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|$  时,  $\psi(\vec{x})$  在  $\vec{n}$  方向上的方向导数  $\left. \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}$  最大, 这个最大的方向导数为

$$\left. \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \right|_{\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|} = |\nabla\psi(\vec{x})| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle = |\nabla\psi(\vec{x})|.$$

也就是说, 标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  的方向就是标量场  $\psi(\vec{x})$  方向导数最大的方向; 标量场梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  的大小  $|\nabla\psi(\vec{x})|$  就是最大方向导数。

#### 1.1.6.5 梯度定理

**定理 1.1.** 设  $\psi(\vec{x})$  是标量场,  $C$  是连结  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$  的任一曲线, 则有

$$\psi(\vec{p}) - \psi(\vec{q}) = \int_{\vec{x} \in C[\vec{q} \rightarrow \vec{p}]} \nabla\psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (1.19)$$

证明思路也很简单, 把曲线  $C$  分成很多小的有向线元, 对每一段有向线元都使用梯度的定义, 最后把结果加起来就得证。

### 1.1.7 矢量场的散度、高斯定理

#### 1.1.7.1 矢量场散度的定义

矢量场  $\vec{A}$  的散度, 记为  $\text{div } \vec{A}$ , 定义为



$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (1.20)$$

可以证明, 矢量场  $\vec{A}$  的散度  $\operatorname{div} \vec{A}$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.21)$$

为了书写方便, 以后就用  $\nabla \cdot \vec{A}$  指代矢量场  $\vec{A}$  的散度。

### 1.1.7.2 高斯定理

**定理 1.2.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $V$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭体, 则有

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \quad (1.22)$$

证明的思路也很简单, 把区域  $V$  分成很多小体积元, 对每个体积元都使用矢量场散度的定义, 最后把结果加起来就得证。

## 1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理

### 1.1.8.1 矢量场的旋度

矢量场  $\vec{A}$  的旋度, 记为  $\operatorname{curl} \vec{A}$ , 由下式定义:

$$(\operatorname{curl} \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (1.23)$$

其中,  $\sigma$  是与  $\vec{n}$  垂直的面元。  $\vec{n}$  与  $\partial \sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

可以证明, 矢量场  $\vec{A}$  的旋度  $\operatorname{curl} \vec{A}$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\operatorname{curl} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.24)$$

为了书写方便, 以后就用  $\nabla \times \vec{A}$  指代矢量场  $\vec{A}$  的旋度。

### 1.1.8.2 斯托克斯定理

**定理 1.3.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭曲面, 则有

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \quad (1.25)$$

其中, 曲面  $\Sigma$  的取向与  $\partial \Sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

证明的思路也很简单, 把曲面  $\Sigma$  分成很多小面元, 对每个面元都使用矢量场旋度的定义, 最后把结果加起来就得证。

## 1.2 向量分析常用公式

### 1.2.1 分析工具

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \\ \vec{A} = A_i \vec{e}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla = \vec{e}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{e}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

### 1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明

#### 1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式

例 1.2.

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3. \quad (1.27)$$

证明.

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3. \quad (1.28)$$

□

**例 1.3.**

$$\nabla \times \vec{x} = \vec{0}. \quad (1.29)$$

证明.

$$\nabla \times \vec{x} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} \vec{e}_i = \vec{0}. \quad (1.30)$$

□

**1.2.2.2 从左往右证的公式****例 1.4.**

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla\psi + \psi \nabla\varphi. \quad (1.31)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \vec{e}_i \partial_i (\varphi\psi) \\ &= \vec{e}_i \varphi \partial_i \psi + \vec{e}_i \psi \partial_i \varphi \\ &= \varphi \vec{e}_i \partial_i \psi + \psi \vec{e}_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla\psi + \psi \nabla\varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

□

**例 1.5.**

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}. \quad (1.33)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i (\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i (\varphi A_i) \\ &= A_i \partial_i \varphi + \varphi \partial_i A_i \\ &= (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

□

**例 1.6.**

$$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = (\nabla\varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}. \quad (1.35)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\varphi \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi \vec{A})_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi A_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (A_k \partial_j \varphi + \varphi \partial_j A_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (\nabla \varphi)_j A_k + \varphi \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\
 &= (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

□

例 1.7.

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \tag{1.37}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i \\
 &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\
 &= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\
 &= B_k (\nabla \times \vec{A})_k - A_j (\nabla \times \vec{B})_j \\
 &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}).
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

□

例 1.8.

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}). \tag{1.39}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\
 &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m) \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\
 &= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m \\
 &= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}).
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

□

**例 1.9.**

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.41)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_m \partial_l A_m - \vec{e}_m \partial_l \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_l \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_m \vec{e}_m \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.
\end{aligned} \quad (1.42)$$

□

### 1.2.2.3 需要注意力的公式

**例 1.10.**

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}. \quad (1.43)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \varphi) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \varphi)_k \\
&= \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi,
\end{aligned} \quad (1.44)$$

由于我们只考虑性质比较好的函数, 于是  $\partial_j \partial_k \varphi = \partial_k \partial_j \varphi$ , 再结合  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ , 有

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi &= -\vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \varphi \\
&= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi.
\end{aligned} \quad (1.45)$$

最后一步是因为  $j, k$  都是用于求和的哑标, 因此可以作替换  $j \leftrightarrow k$ 。上式说明:

$$\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}. \quad (1.46)$$

于是

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}. \quad (1.47)$$

□

例 1.11.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (1.48)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (1.49)$$

注意到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (1.50)$$

于是

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0, \quad (1.51)$$

这就是说:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0. \quad (1.52)$$

□

#### 1.2.2.4 从右往左证的公式

例 1.12.

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}). \quad (1.53)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m \\
&= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m \\
&= B_m \vec{e}_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m \\
&= B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m \\
&= \nabla (A_m B_m) \\
&= \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B})
\end{aligned} \tag{1.54}$$

□

### 1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明

#### 1.2.3.1 高斯定理

定理 1.4. 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $V$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭体, 则有

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \tag{1.55}$$

#### 1.2.3.2 斯托克斯定理

定理 1.5. 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭曲面, 则有

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \tag{1.56}$$

其中, 曲面  $\Sigma$  的取向与  $\partial \Sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

#### 1.2.3.3 格林第一恒等式

例 1.13.

$$\oint_{\partial \Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV. \tag{1.57}$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \partial_i (\psi \nabla \phi)_i \\
 &= \partial_i (\psi \partial_i \phi) \\
 &= (\partial_i \phi) (\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi \\
 &= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi \\
 &= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi,
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

于是由高斯定理, 有

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV \\
 &= \int_{\Omega} [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi] dV \\
 &= \int_{\Omega} [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV.
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

□

#### 1.2.3.4 格林第二恒等式

例 1.14.

$$\oint_{\partial\Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV. \tag{1.60}$$

证明. 利用  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$  有

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) - (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot (\nabla \psi)) \\
 &= \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi,
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

于是由高斯定理可得

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) dV \\
 &= \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV.
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

□



## 1.2.3.5 高斯定理的一个推论

例 1.15.

$$\oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \int_V \nabla \psi dV. \quad (1.63)$$

证明. 对任意标量场  $\psi(\vec{x})$  和任意常矢量  $\vec{a}$ , 构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \quad (1.64)$$

这个特殊的矢量场  $\vec{A}$  应当满足高斯定理:

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \quad (1.65)$$

等式左边

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V^+} (\psi \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot \oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S}. \quad (1.66)$$

等式右边

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV &= \int_V [\nabla \cdot (\psi \vec{a})] dV \\ &= \int_V [(\nabla \psi) \cdot \vec{a} + \psi \nabla \cdot \vec{a}] dV \\ &= \int_V (\nabla \psi) \cdot \vec{a} dV \\ &= \vec{a} \cdot \int_V \nabla \psi dV, \end{aligned} \quad (1.67)$$

于是

$$\vec{a} \cdot \oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \vec{a} \cdot \int_V \nabla \psi dV, \quad (1.68)$$

由  $\vec{a}$  的任意性就得到

$$\oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \int_V \nabla \psi dV. \quad (1.69)$$

□

## 1.2.3.6 斯托克斯定理的一个推论

例 1.16.

$$\oint_{\partial S} \psi d\vec{l} = - \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}. \quad (1.70)$$

证明. 对任意标量场  $\psi(\vec{x})$  和任意常矢量  $\vec{a}$ , 构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \quad (1.71)$$

这个特殊的矢量场  $\vec{A}$  应当满足斯托克斯定理:

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.72)$$

等式左边

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\partial S} (\psi \vec{a}) \cdot d\vec{l} \\ &= \vec{a} \cdot \oint_{\partial S} \psi d\vec{l}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

等式右边

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \int_S [\nabla \times (\psi \vec{a})] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S [(\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S [(\nabla \psi) \times \vec{a}] \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S [d\vec{S} \times (\nabla \psi)] \cdot \vec{a} \\ &= -\vec{a} \cdot \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

于是

$$\vec{a} \cdot \oint_{\partial S} \psi d\vec{l} = -\vec{a} \cdot \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}, \quad (1.75)$$

由  $\vec{a}$  的任意性就得到

$$\oint_{\partial S} \psi d\vec{l} = - \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}. \quad (1.76)$$

□

## 第 2 章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

### 2.1 总结

#### 2.1.1 $\nabla$ 在三种坐标系下的表达式

##### 2.1.1.1 直角坐标

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1)$$

##### 2.1.1.2 球坐标

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.2)$$

##### 2.1.1.3 柱坐标

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2 $\nabla^2$ 在三种坐标系下的表达式

##### 2.1.2.1 直角坐标

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

##### 2.1.2.2 球坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.5)$$

### 2.1.2.3 柱坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.6)$$

## 第 3 章 线性空间

## 参考文献

- [1] 杨孔庆. 数学物理方法. Gao deng jiao yu chu ban she, 2012.