第1次作业

1-1

> 谈谈你对 SR 中两个基本原理的理解；

光速不变原理：在任意惯性参考系中，真空中的光速具有相同的大小。

这一原理与经典力学中的速度叠加原理相矛盾，是狭义相对论的核心。由此导出的洛伦兹变换取代了经典力学中的伽利略变换。彻底改变了人们对时间、空间和运动的理解，为现代物理学奠定了基础。

相对性原理：惯性观者和非惯性观者有绝对区别；在任意惯性参考系中，物理定律具有相同的形式。

相对性原理指出，没有任何惯性参考系是特殊的，物理规律不依赖于参考系的选择。这一原理否定了绝对空间和绝对时间的概念，强调了物理规律的普适性。

1-2

> 详细推导洛伦兹变换；

假设有两个惯性参考系 S 和 S'，其中 S' 以速度 v 沿 x 轴相对于 S 运动。两个参考系的坐标轴平行，且在 $t = t' = 0$ 时原点重合。

设同一事件在 S 系的坐标为 (t, x, y, z)；在 S' 系的坐标为 (t', x', y', z')；

由于时空是均匀的，假设坐标变换是线性的，从 S 系到 S' 系的坐标变换形式上可写为：

$$\begin{cases} t' = At + Bx \\ x' = Ct + Dx \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

其中 A, B, C, D 是待定系数。

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

考虑 S' 的运动方程。在 S 系中 $x = vt$，在 S' 系中 $x' = 0$，于是：

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ vt \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\boxed{C + Dv = 0}$$

考虑 S 的运动方程。在 S 系中 $x = 0$，在 S' 系中 $x' = -vt'$，于是：

$$\begin{bmatrix} t' \\ -vt' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\boxed{C + Av = 0}$$

因此 $A = D$，引入 γ 使得 $A = D = \gamma$，则 $C = -\gamma v$

洛伦兹变换矩阵目前可写为：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix}$$

假设在 $t = t' = 0$ 时，从原点发出一束沿 x 轴正向传播的光。根据光速不变原理，光在 S 和 S' 中的传播速度均为 c。

在 S 系中，光子的运动方程为：

$$x = ct$$

在 S' 系中，光子的运动方程为：

$$x' = ct'$$

代入洛伦兹变换：

$$\begin{bmatrix} t' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & B \\ -\gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ ct \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$B = -\frac{\gamma v}{c^2}$$

至此，洛伦兹变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix}\gamma & -\frac{\gamma v}{c^2}\\ -\gamma v & \gamma\end{bmatrix}=\gamma(v)\begin{bmatrix}1 & \frac{-v}{c^2}\\ -v & 1\end{bmatrix}$$

S' 相对 S 沿 x 轴正方向以速度 v 匀速运动。相对的，S 相对 S' 沿 x' 正方向以速度 $-v$ 运动，因此有：

$$\begin{bmatrix}t\\ x\end{bmatrix}=\gamma(-v)\begin{bmatrix}1 & \frac{v}{c^2}\\ v & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t'\\ x'\end{bmatrix}=\gamma(-v)\gamma(v)\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ x\end{bmatrix}$$

前后对比可得：

$$\gamma(-v)\gamma(v)\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}=I$$

由时空的均匀性，$\gamma(-v)=\gamma(v)$，因此：

$$\gamma^2\begin{bmatrix}1-v^2/c^2 & 0\\ 0 & 1-v^2/c^2\end{bmatrix}=I$$

从中解得：

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

综上，洛伦兹变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix}\gamma & -\frac{\gamma v}{c^2}\\ -\gamma v & \gamma\end{bmatrix}=\gamma\begin{bmatrix}1 & -v/c^2\\ -v & 1\end{bmatrix}$$

从 S 系到 S' 系的洛伦兹变换为：

$$\begin{cases}t'=\gamma\left(t-\dfrac{vx}{c^2}\right)\\ x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y\\ z'=z\end{cases}$$

1-3

> 列出尽可能多的洛伦兹标量；

光速 c；

时空间隔 $\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$；

固有时 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}s/c$;

静止质量 m_0;

电荷 Q;

电磁场的两个洛伦兹不变量:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2\left(\vec{B}^2-\frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}=\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}$$

作用量 $S=\int\mathcal{L}\mathrm{d}^4x$;

四维动量模方:

$$P^\mu P_\mu=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2=m_0^2c^2$$

四维电流密度模方:

$$J^\mu J_\mu=c^2\rho^2-\vec{J}^2$$

四维电磁势模方:

$$A^\mu A_\mu=\frac{\phi^2}{c^2}-\vec{A}^2$$

能-动张量的迹 T_μ^μ;

1-4

> 推导速度的变换公式;

洛伦兹变换:

$$\begin{cases}t'=\gamma\left(t-\dfrac{vx}{c^2}\right)\\x'=\gamma(x-vt)\\y'=y\\z'=z\end{cases}$$

其中，$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

取微分得：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \dfrac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right) \\
\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) \\
\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z
\end{cases}
$$

速度：

$$
\begin{aligned}
u_x' &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t)}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right)} = \frac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t - v}{1 - \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} \\
&= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_y' &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v\mathrm{d}x}{c^2}\right)} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \frac{v\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{c^2}\right)} \\
&= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)}
\end{aligned}
$$

同理有：

$$
u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - vu_x/c^2\right)}
$$

1-5

> 谈谈你对参考系和坐标系的理解；

参考系：参考系是描述物体运动时所选择的观察视角或背景框架。参考系是物理实体，通常与某个物体或系统相关联。参考系的选择是相对的，不同参考系中观察到的运动可能不同。

坐标系：坐标系是用于量化物体位置的数学工具。它通过一组坐标，比如 (x, y, z)，来描述物体在空间中的位置。

参考系需要通过坐标系来量化物体的位置和运动；坐标系是参考系的数学工具，用于将参考系中的物理量（如位置、速度）转化为可计算的数值。

1-6

> 谈谈坐标时和固有时的区别和联系；

坐标时：在某个特定的参考系中，由该参考系的坐标系定义的时间。

固有时：是指在一个物体自身的参考系中，由该物体携带的时钟所测量的时间。

固有时和坐标时之间的关系为：

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{c}$$

坐标时是相对的，依赖于所选取的参考系。它不能直接被测量，仅在计算中具有意义。

固有时是绝对的，与参考系的选择无关。它反映了事件之间最本质的时间间隔，是可以被实际测量的。

1-7

> 详细谈谈对尺缩和钟慢这两个典型效应的理解；

尺缩效应

尺缩效应指的是，当一个物体以接近光速的速度运动时，在运动方向上，其长度会缩短。这种缩短只在运动方向上发生，垂直于运动方向的长度不受影响。

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

其中，L 是观察者测量到的运动物体的长度；L_0 是运动物体的固有长度；v 是运动物体相对观察者的速度。

尺缩效应强调了空间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一物体的长度测量结果不同。

钟慢效应

钟慢效应指的是，当一个时钟以接近光速的速度运动时，观察者会看到这个时钟的时间流逝变慢。

钟慢效应的公式为：

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

其中，Δt 是观察者测量到的运动时钟的时间间隔；Δt_0 是时钟在静止参考系中的固有时间间隔（即静止时间）；v 是运动时钟相对于观察者的速度。

钟慢效应强调了时间测量的相对性，不同参考系中的观察者对同一事件的时间间隔测量结果不同。

1-8

> 解释双生子效应（佯谬）；

假设有一对双胞胎，A 留在地球，B 乘坐高速飞船进行太空旅行后返回。

为了比较 A 的固有时 τ_1 和 B 的固有时 τ_2，不妨比较微元 $\mathrm{d}\tau_1$ 和 $\mathrm{d}\tau_2$，由于地球视为惯性参考系，于是

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\mathrm{d}s^2} = \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2}$$

而对 A 来说，$\mathrm{d}x = 0$，因此相同的 $\mathrm{d}t$ 下 $\mathrm{d}\tau_1 > \mathrm{d}\tau_2$，因此 $\tau_1 > \tau_2$，即 A 比 B 更老。

但 B 运动过程还包含了加速和减速过程，其不是惯性参考系，因此上述分析不能反着来得到 B 比 A 老的结论。

1-9

> 列举尽可能多的例子来理解 SR 中的“相对的”和“绝对的”。

相对的

时间间隔：不同参考系中的观察者会测量到不同的时间间隔。

长度：物体在运动方向上的长度会因参考系不同而发生变化（尺缩效应）。

同时性：两个事件是否同时发生取决于观察者的参考系。

速度：物体的速度在不同参考系中测量结果不同。

动能：物体的动能依赖于观察者的参考系。

动量：动量的大小和方向因参考系不同而变化。

电磁场：电场和磁场的测量结果取决于观察者的参考系。

多普勒效应：光的频率和波长在不同参考系中测量结果不同。

角动量：角动量的测量结果依赖于观察者的参考系。

绝对的

光速：真空中的光速在所有惯性参考系中保持不变。

时空间隔：两个事件之间的时空间隔在所有惯性参考系中相同。

因果关系：如果两个事件有因果关系，它们的顺序在所有参考系中一致。

物理定律：所有惯性参考系中的物理定律形式相同。

能量-动量关系：能量和动量的关系在所有参考系中一致。

电荷：物体的电荷量在所有参考系中相同。

静质量：物体的静质量在所有参考系中不变。

熵：系统的熵在所有参考系中相同。