

# 数学物理方法小班讲义

快雪时晴

兰州大学物理科学与技术学院

2025 年 12 月 7 日

# 前言

主要参考书是杨孔庆老师的《数学物理方法》[1]。请访问 [这里](#) 以获取本文档 Tex 源文件。

本文档遵循 **CC0 1.0 公共领域贡献协议 (CC0 1.0 Universal, Public Domain Dedication)**，读者可以自由复制、修改、分发、引用本文档内容而无需征得作者许可。详细协议内容请参见 <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>。

# 目录

<b>第一章 <math>\mathbb{R}^3</math> 空间的向量分析</b>	<b>1</b>
1.1 向量分析基本知识 . . . . .	1
1.1.1 爱因斯坦求和约定 . . . . .	1
1.1.2 Kronecker delta 符号 $\delta_{ij}$ . . . . .	1
1.1.3 三阶 Levi-Civita 符号 $\varepsilon_{ijk}$ . . . . .	1
1.1.4 一些简单算例 . . . . .	2
1.1.5 $\nabla$ 算子 . . . . .	2
1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理 . . . . .	3
1.1.6.1 标量场梯度的定义 . . . . .	3
1.1.6.2 方向导数的定义 . . . . .	3
1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系 . . . . .	3
1.1.6.4 标量场梯度的意义 . . . . .	4
1.1.6.5 梯度定理 . . . . .	4
1.1.7 矢量场的散度、高斯定理 . . . . .	4
1.1.7.1 矢量场散度的定义 . . . . .	4
1.1.7.2 高斯定理 . . . . .	5
1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理 . . . . .	5
1.1.8.1 矢量场的旋度 . . . . .	5
1.1.8.2 斯托克斯定理 . . . . .	5
1.2 向量分析常用公式 . . . . .	6
1.2.1 分析工具 . . . . .	6
1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明 . . . . .	6
1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式 . . . . .	6
1.2.2.2 从左往右证的公式 . . . . .	7
1.2.2.3 需要注意的公式 . . . . .	9
1.2.2.4 从右往左证的公式 . . . . .	10
1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明 . . . . .	11
1.2.3.1 高斯定理 . . . . .	11

1.2.3.2 斯托克斯定理 . . . . .	11
1.2.3.3 格林第一恒等式 . . . . .	12
1.2.3.4 格林第二恒等式 . . . . .	12
1.2.3.5 高斯定理的一个推论 . . . . .	13
1.2.3.6 斯托克斯定理的一个推论 . . . . .	14
<b>第二章 <math>\mathbb{R}^3</math> 空间曲线坐标系中的向量分析</b>	<b>16</b>
2.1 总结 . . . . .	16
2.1.1 $\nabla$ 在三种坐标系下的表达式 . . . . .	16
2.1.1.1 直角坐标 . . . . .	16
2.1.1.2 球坐标 . . . . .	16
2.1.1.3 柱坐标 . . . . .	16
2.1.2 $\nabla^2$ 在三种坐标系下的表达式 . . . . .	16
2.1.2.1 直角坐标 . . . . .	16
2.1.2.2 球坐标 . . . . .	16
2.1.2.3 柱坐标 . . . . .	17
<b>第三章 线性空间</b>	<b>18</b>
3.1 Hilbert 空间 . . . . .	18
3.1.1 内积空间的定义 . . . . .	18
3.1.2 Hilbert 空间的定义 . . . . .	18
3.2 线性空间上的各种算符 . . . . .	18
3.2.1 算符的定义 . . . . .	18
3.2.2 算符之间的运算 . . . . .	19
3.2.2.1 算符加法 . . . . .	19
3.2.2.2 算符乘法 . . . . .	19
3.2.2.3 算符的对易括号 . . . . .	19
3.2.3 对算符的运算 . . . . .	19
3.2.3.1 线性算符 . . . . .	19
3.2.3.2 线性算符的转置 . . . . .	19
3.2.3.3 线性算符的复共轭 . . . . .	20
3.2.3.4 线性算符的伴随算符 . . . . .	20
3.2.4 线性空间上的一些特殊算符 . . . . .	20
3.2.4.1 对称算符与反对称算符 . . . . .	20
3.2.4.2 自伴算符（厄米算符） . . . . .	21
3.2.4.3 幺正算符 . . . . .	21
3.3 线性算符的本征值和本征向量 . . . . .	21
3.4 一些定理 . . . . .	21

3.5 例题 *	23
3.5.1 完备性关系	23
3.5.2 纯态下可观测量期望值	23
3.5.3 混合态下可观测量期望值	25
3.5.4 不确定性关系	26
<b>第四章 复变函数</b>	<b>28</b>
4.1 复变函数的概念	28
4.1.1 复变函数的定义	28
4.2 解析函数	28
4.2.1 复变函数的连续性	28
4.2.2 复变函数的导数	28
4.2.3 柯西-黎曼条件	28
4.2.4 解析函数的定义	29
4.2.5 例题	30
4.3 复变函数积分	31
4.3.1 复变函数积分的定义	31
4.3.2 柯西积分定理	32
4.3.2.1 单连通区域柯西积分定理	32
4.3.2.2 多连通区域柯西积分定理	32
4.3.3 柯西积分公式	32
4.3.4 解析函数高阶导数的积分表达式	32
4.4 复变函数的级数展开	33
4.4.1 解析函数的泰勒展开	33
4.4.2 解析函数的洛朗展开	33
4.4.2.1 复变函数的零点	33
4.4.2.2 复变函数的奇点	33
4.4.2.3 奇点的分类	33
4.4.2.4 解析函数的洛朗展开	34
4.4.3 例题	34
4.5 留数定理及其应用	36
4.5.1 留数的定义	36
4.5.2 留数的求法	36
4.5.2.1 定义法	36
4.5.2.2 极限法	37
4.5.2.3 特殊情况	37
4.5.3 留数定理	37
4.5.3.1 例题	37

---

4.5.4 利用留数定理求无穷级数 . . . . .	39
4.5.4.1 所需函数 . . . . .	39
4.5.4.2 例题 ** . . . . .	39
4.5.5 留数定理在实积分中的应用 . . . . .	41
4.5.5.1 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分 . . . . .	41
4.5.5.2 例题 . . . . .	42
4.5.5.3 多值函数的积分 . . . . .	44
4.5.5.4 例题 ** . . . . .	44
<b>第五章 傅里叶变换</b>	<b>47</b>
5.1 傅里叶级数 . . . . .	47
5.1.1 周期函数作为 Hilbert 空间的元素 . . . . .	47
5.1.2 周期函数的三角函数基傅里叶级数 . . . . .	47
5.1.3 周期函数的 e 指数基傅里叶级数展开 . . . . .	49
5.2 傅里叶变换 . . . . .	50
<b>第六章 拉普拉斯变换</b>	<b>52</b>
6.1 拉普拉斯变换的定义 . . . . .	52
6.2 拉普拉斯变换的基本性质 . . . . .	52
6.2.1 线性定理 . . . . .	52
6.2.2 延迟定理 . . . . .	52
6.2.3 位移定理 . . . . .	53
6.2.4 标度变换定理 . . . . .	53
6.2.5 卷积定理 . . . . .	53
6.2.6 微分定理 . . . . .	53
6.3 常用拉普拉斯变换及反演 . . . . .	54
6.4 拉普拉斯变换的应用 . . . . .	54
6.4.1 例题 . . . . .	54
<b>第七章 <math>\delta</math> 函数</b>	<b>56</b>
7.1 $\delta$ 函数的定义 . . . . .	56
7.2 $\delta$ 函数的性质 . . . . .	56
7.3 三维 $\delta$ 函数 . . . . .	57
7.4 三维 $\delta$ 函数的定义 . . . . .	57
7.4.1 三维直角坐标系 . . . . .	57
7.4.2 三维球坐标系 . . . . .	57
7.4.3 三维柱坐标系 . . . . .	57
7.5 $\delta$ 函数的傅里叶积分展开 . . . . .	57

7.5.1 一维情况 . . . . .	57
7.5.2 三维情况 . . . . .	58
7.6 例题 . . . . .	58
<b>第八章 数学物理方程与分离变量法</b>	<b>61</b>
8.1 波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式 . . . . .	61
8.1.1 波动方程的标准形式 . . . . .	61
8.1.2 输运方程（抛物方程）的标准形式 . . . . .	61
8.1.3 泊松方程（椭圆方程）的标准形式 . . . . .	61
8.1.4 拉普拉斯方程的标准形式 . . . . .	61
8.2 定解条件 . . . . .	61
8.2.1 初始条件 . . . . .	61
8.2.1.1 波动方程的初始条件 . . . . .	62
8.2.1.2 输运方程的初始条件 . . . . .	62
8.2.1.3 泊松方程的初始条件 . . . . .	62
8.2.2 边界条件 . . . . .	62
8.2.2.1 第一类边界条件 . . . . .	62
8.2.2.2 第二类边界条件 . . . . .	62
8.2.2.3 第三类边界条件 . . . . .	63
8.2.2.4 自然边界条件 . . . . .	63
8.2.2.5 周期性边界条件 . . . . .	63
8.2.2.6 衔接条件 . . . . .	63
8.2.3 定解条件 . . . . .	63
8.2.3.1 波动方程定解条件 . . . . .	63
8.2.3.2 输运方程定解条件 . . . . .	64
8.2.3.3 泊松方程定解条件 . . . . .	64
8.3 分离变量法 . . . . .	64
8.3.1 Sturm-Liouville 本征值问题 . . . . .	64
8.3.1.1 Sturm-Liouville 方程 . . . . .	64
8.3.1.2 S-L 方程本征函数的一般性质 . . . . .	64
8.3.1.3 S-L 方程本征解的带权正交性 . . . . .	65
8.3.1.4 S-L 方程本征值的性质 . . . . .	65
8.3.1.5 S-L 方程函数的完备性与广义 Fourier 展开 . . . . .	65
8.3.2 例题 . . . . .	66
8.3.2.1 例 1 . . . . .	66
8.3.2.2 例 2 . . . . .	67
8.3.2.3 例 3 . . . . .	70
8.4 曲线坐标系下的分离变量 . . . . .	76

8.4.1 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量 . . . . .	76
8.4.2 亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量 . . . . .	78
<b>第九章 球函数</b>	<b>80</b>
9.1 勒让德多项式 . . . . .	80
9.1.1 极轴对称性下连带勒让德方程退化为勒让德方程 . . . . .	80
9.1.2 勒让德多项式作为勒让德方程在自然边界条件下的本征函数 . . . . .	81
9.1.3 前几个勒让德多项式 . . . . .	82
9.2 勒让德多项式的性质 . . . . .	82
9.2.1 罗德里格斯公式 . . . . .	82
9.2.2 勒让德多项式的生成函数(母函数) . . . . .	82
9.2.3 勒让德多项式的递推公式 . . . . .	83
9.2.4 勒让德多项式的正交性 . . . . .	83
9.3 具有极轴对称的拉普拉斯方程的求解 . . . . .	84
9.3.1 例题 . . . . .	85
9.3.1.1 例 1 . . . . .	85
9.3.1.2 例 2 . . . . .	85
9.3.1.3 例 3 . . . . .	87
9.3.1.4 例 4 . . . . .	89
<b>第十章 柱函数</b>	<b>93</b>
10.1 贝塞尔函数 . . . . .	93
10.2 贝塞尔函数的性质 . . . . .	93
10.3 柱函数 . . . . .	93
10.4 贝塞尔方程的本征值问题 . . . . .	93

# 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

## 1.1 向量分析基本知识

### 1.1.1 爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定就是说，在同一代数项中见到两个重复指标  $i$  就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标  $i$  为“哑标”。

比如， $\mathbb{R}^3$  空间中的向量  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  在直角坐标下可表示为

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \equiv \sum_i A_i \vec{e}_i, \quad (1.1)$$

其中， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  分别是  $x, y, z$  轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  简写为

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \rightarrow \vec{A} = A_i \vec{e}_i, \quad (1.2)$$

这样就省去了写求和符号  $\sum_i$  的工作。

### 1.1.2 Kronecker delta 符号 $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}. \quad (1.3)$$

### 1.1.3 三阶 Levi-Civita 符号 $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到 } 123 \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到 } 123 \\ 0 & , ijk \text{ 中有相同指标} \end{cases}. \quad (1.4)$$

可以利用  $\varepsilon_{ijk}$  表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \quad (1.5)$$

### 1.1.4 一些简单算例

#### 例 1.1. 一些简单算例

- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij},$
- $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k,$
- $A_i \delta_{ij} = A_j,$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i,$

证明.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{e}_i) \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \quad (1.6)$$

□

- $\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k,$

证明.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \quad (1.7)$$

□

### 1.1.5 $\nabla$ 算子

$\nabla$  算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为

$$\nabla \equiv \vec{e}_i \partial_i, \quad (1.8)$$

其中,  $\partial_i$  的定义为

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.9)$$

### 1.1.6 标量场的梯度、方向导数、梯度定理

#### 1.1.6.1 标量场梯度的定义

设  $\psi(\vec{x})$  是标量场,  $\psi(\vec{x})$  的梯度, 记为  $\text{grad } \psi(\vec{x})$ , 由下式定义

$$\text{grad } \psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\psi(\vec{x}), \quad (1.10)$$

其中,  $d\vec{x}$  是位矢  $\vec{x}$  的任意微小变化,  $d\psi(\vec{x})$  是标量场  $\psi(\vec{x})$  因位矢  $\vec{x}$  变化  $d\vec{x}$  而引起的相应的变化。具体来说,  $d\psi(\vec{x})$  的定义为

$$d\psi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x} + d\vec{x}) - \psi(\vec{x}). \quad (1.11)$$

可以证明, 标量场的梯度  $\text{grad } \psi(\vec{x})$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\text{grad } \psi(\vec{x}) = \nabla \psi(\vec{x}). \quad (1.12)$$

为了书写方便, 以后就用  $\nabla \psi(\vec{x})$  指代标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度。

#### 1.1.6.2 方向导数的定义

标量场  $\psi$  在  $\vec{x}$  点处沿  $\vec{v}$  方向的方向导数, 记为  $\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{v}}$ , 定义为

$$\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{v}} \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\vec{x} + t\vec{v}) - \psi(\vec{x})}{tv}. \quad (1.13)$$

从方向导数的定义可以看出, 方向导数描述的是标量场沿某一方向变化的快慢。

特别地, 标量场  $\psi$  在曲面  $\Sigma$  上的  $\vec{x}$  点处沿曲面上  $\vec{x}$  点的外法向的方向导数简记为  $\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$ 。

#### 1.1.6.3 标量场梯度与方向导数的关系

标量场的梯度的定义:

$$\nabla \psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\psi(\vec{x}), \quad (1.14)$$

设  $d\vec{x} = \vec{n}dx$ , 其中  $\vec{n}$  是与  $d\vec{x}$  同向的单位向量, 则有

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n}dx = d\psi(\vec{x}), \quad (1.15)$$

即

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \frac{d\psi(\vec{x})}{dx} = \frac{\psi(\vec{x} + d\vec{x}) - \psi(\vec{x})}{dx} = \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}}. \quad (1.16)$$

这就是说，标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  在某一方向  $\vec{n}$  上的投影  $[\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n}$  恰等于标量场沿这一方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}}$ 。

#### 1.1.6.4 标量场梯度的意义

考虑标量场梯度与方向导数的关系

$$[\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}}, \quad (1.17)$$

有：

$$\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}} = [\nabla\psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = |\nabla\psi(\vec{x})| |\vec{n}| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle = |\nabla\psi(\vec{x})| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle, \quad (1.18)$$

上式中， $\vec{n}$  为方向任意的单位向量。

对于确定的场点  $\vec{x}$ ， $\psi(\vec{x})$  和  $\nabla\psi(\vec{x})$  也是确定的，则  $|\nabla\psi(\vec{x})|$  是确定的。

现在我们想看看  $\psi(\vec{x})$  沿哪个方向的变化速度最快，也就是看  $\psi(\vec{x})$  在哪个方向上的方向导数最大。

显然，在固定场点  $\vec{x}$  的情况下，当  $\vec{n}$  与  $\nabla\psi(\vec{x})$  同向时，也即  $\vec{n} = \nabla\psi(\vec{x}) / |\nabla\psi(\vec{x})|$  时， $\psi(\vec{x})$  在  $\vec{n}$  方向上的方向导数  $\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}}$  最大，这个最大的方向导数为

$$\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l} \Big|_{\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|} = |\nabla\psi(\vec{x})| \cos \langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n} \rangle = |\nabla\psi(\vec{x})|.$$

也就是说，标量场  $\psi(\vec{x})$  的梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  的方向就是标量场  $\psi(\vec{x})$  方向导数最大的方向；标量场梯度  $\nabla\psi(\vec{x})$  的大小  $|\nabla\psi(\vec{x})|$  就是最大方向导数。

#### 1.1.6.5 梯度定理

**定理 1.1.** 设  $\psi(\vec{x})$  是标量场， $C$  是连结  $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$  的任一曲线，则有

$$\psi(\vec{p}) - \psi(\vec{q}) = \int_{\vec{x} \in C[\vec{q} \rightarrow \vec{p}]} \nabla\psi(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (1.19)$$

证明思路也很简单，把曲线  $C$  分成很多小的有向线元，对每一段有向线元都使用梯度的定义，最后把结果加起来就得证。

### 1.1.7 矢量场的散度、高斯定理

#### 1.1.7.1 矢量场散度的定义

矢量场  $\vec{A}$  的散度，记为  $\text{div } \vec{A}$ ，定义为

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (1.20)$$

可以证明，矢量场  $\vec{A}$  的散度  $\operatorname{div} \vec{A}$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.21)$$

为了书写方便，以后就用  $\nabla \cdot \vec{A}$  指代矢量场  $\vec{A}$  的散度。

### 1.1.7.2 高斯定理

**定理 1.2.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场， $V$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭体，则有

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \quad (1.22)$$

证明的思路也很简单，把区域  $V$  分成很多小体积元，对每个体积元都使用矢量场散度的定义，最后把结果加起来就得证。

### 1.1.8 矢量场的旋度、斯托克斯定理

#### 1.1.8.1 矢量场的旋度

矢量场  $\vec{A}$  的旋度，记为  $\operatorname{curl} \vec{A}$ ，由下式定义：

$$(\operatorname{curl} \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (1.23)$$

其中， $\sigma$  是与  $\vec{n}$  垂直的面元。 $\vec{n}$  与  $\partial \sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

可以证明，矢量场  $\vec{A}$  的旋度  $\operatorname{curl} \vec{A}$  可以用  $\nabla$  算子表达为

$$\operatorname{curl} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}. \quad (1.24)$$

为了书写方便，以后就用  $\nabla \times \vec{A}$  指代矢量场  $\vec{A}$  的旋度。

#### 1.1.8.2 斯托克斯定理

**定理 1.3.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场， $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭曲面，则有

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \quad (1.25)$$

其中，曲面  $\Sigma$  的取向与  $\partial \Sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

证明的思路也很简单，把曲面  $\Sigma$  分成很多小面元，对每个面元都使用矢量场旋度的定义，最后把结果加起来就得证。

## 1.2 向量分析常用公式

### 1.2.1 分析工具

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \\ \vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{e}}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_k \\ \vec{A} = A_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla = \vec{\mathbf{e}}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{\mathbf{e}}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

### 1.2.2 $\mathbb{R}^3$ 空间重要微分恒等式及其证明

#### 1.2.2.1 与 $\vec{x}$ 有关的公式

例 1.2.

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3. \quad (1.27)$$

证明.

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = \delta_{ii} = 3. \quad (1.28)$$

□

**例 1.3.**

$$\nabla \times \vec{x} = \vec{0}. \quad (1.29)$$

证明.

$$\nabla \times \vec{x} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} \vec{e}_i = \vec{0}. \quad (1.30)$$

□

### 1.2.2.2 从左往右证的公式

**例 1.4.**

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi. \quad (1.31)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \vec{e}_i \partial_i (\varphi\psi) \\ &= \vec{e}_i \varphi \partial_i \psi + \vec{e}_i \psi \partial_i \varphi \\ &= \varphi \vec{e}_i \partial_i \psi + \psi \vec{e}_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

□

**例 1.5.**

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}. \quad (1.33)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i (\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i (\varphi A_i) \\ &= A_i \partial_i \varphi + \varphi \partial_i A_i \\ &= A_i (\nabla \varphi)_i + \varphi \partial_i A_i \\ &= \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

□

**例 1.6.**

$$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}. \quad (1.35)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\varphi \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi \vec{A})_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi A_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (A_k \partial_j \varphi + \varphi \partial_j A_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (\nabla \varphi)_j A_k + \varphi \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\
 &= (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

□

**例 1.7.**

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \tag{1.37}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i \\
 &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\
 &= \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\
 &= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\
 &= B_k (\nabla \times \vec{A})_k - A_j (\nabla \times \vec{B})_j \\
 &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}).
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

□

**例 1.8.**

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}). \tag{1.39}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\
 &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m) \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\
 &= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m \\
 &= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}).
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

□

**例 1.9.**

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}. \quad (1.41)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_m \partial_l A_m - \vec{e}_m \partial_l \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_l \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_m \vec{e}_m \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.
\end{aligned} \quad (1.42)$$

□

**1.2.2.3 需要注意力的公式****例 1.10.**

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}. \quad (1.43)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \varphi) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \varphi)_k \\
&= \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi,
\end{aligned} \quad (1.44)$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是  $\partial_j \partial_k \varphi = \partial_k \partial_j \varphi$ ，再结合  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ ，有

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi &= -\vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \varphi \\
&= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi.
\end{aligned} \quad (1.45)$$

最后一步是因为  $j, k$  都是用于求和的哑标，因此可以作替换  $j \leftrightarrow k$ 。上式说明：

$$\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}. \quad (1.46)$$

于是

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}. \quad (1.47)$$

□

**例 1.11.**

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (1.48)$$

证明.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (1.49)$$

注意到

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k, \end{aligned} \quad (1.50)$$

于是

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0, \quad (1.51)$$

这就是说:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0. \quad (1.52)$$

□

#### 1.2.2.4 从右往左证的公式

**例 1.12.**

$$\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}). \quad (1.53)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\
&= B_m \vec{e}_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m \\
&= B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m \\
&= \nabla(A_m B_m) \\
&= \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})
\end{aligned} \tag{1.54}$$

□

### 1.2.3 $\mathbb{R}^3$ 空间重要积分恒等式及其证明

#### 1.2.3.1 高斯定理

**定理 1.4.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $V$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭体, 则有

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \tag{1.55}$$

#### 1.2.3.2 斯托克斯定理

**定理 1.5.** 设  $\vec{A}(\vec{x})$  是矢量场,  $\Sigma$  是  $\mathbb{R}^3$  中的封闭曲面, 则有

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \tag{1.56}$$

其中, 曲面  $\Sigma$  的取向与  $\partial\Sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

### 1.2.3.3 格林第一恒等式

例 1.13.

$$\oint_{\partial\Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV. \quad (1.57)$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \partial_i(\psi \nabla \phi)_i \\ &= \partial_i(\psi \partial_i \phi) \\ &= (\partial_i \phi)(\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi \\ &= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi \\ &= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi, \end{aligned} \quad (1.58)$$

于是由高斯定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV \\ &= \int_{\Omega} [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi] dV \\ &= \int_{\Omega} [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV. \end{aligned} \quad (1.59)$$

□

### 1.2.3.4 格林第二恒等式

例 1.14.

$$\oint_{\partial\Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV. \quad (1.60)$$

证明. 利用  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$  有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) - (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot (\nabla \psi)) \\ &= \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (1.61)$$

于是由高斯定理可得

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) dV \\ &= \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV. \end{aligned} \quad (1.62)$$

□

### 1.2.3.5 高斯定理的一个推论

**例 1.15.**

$$\oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \int_V \nabla \psi dV. \quad (1.63)$$

证明. 对任意标量场  $\psi(\vec{x})$  和任意常矢量  $\vec{a}$ , 构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}) \vec{a}, \quad (1.64)$$

这个特殊的矢量场  $\vec{A}$  应当满足高斯定理:

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV. \quad (1.65)$$

等式左边

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V^+} (\psi \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot \oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S}. \quad (1.66)$$

等式右边

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV &= \int_V [\nabla \cdot (\psi \vec{a})] dV \\ &= \int_V [(\nabla \psi) \cdot \vec{a} + \psi \nabla \cdot \vec{a}] dV \\ &= \int_V (\nabla \psi) \cdot \vec{a} dV \\ &= \vec{a} \cdot \int_V \nabla \psi dV, \end{aligned} \quad (1.67)$$

于是

$$\vec{a} \cdot \oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \vec{a} \cdot \int_V \nabla \psi dV, \quad (1.68)$$

由  $\vec{a}$  的任意性就得到

$$\oint_{\partial V^+} \psi d\vec{S} = \int_V \nabla \psi dV. \quad (1.69)$$

□

### 1.2.3.6 斯托克斯定理的一个推论

**例 1.16.**

$$\oint_S \psi d\vec{l} = - \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}. \quad (1.70)$$

证明. 对任意标量场  $\psi(\vec{x})$  和任意常矢量  $\vec{a}$ , 构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x})\vec{a}, \quad (1.71)$$

这个特殊的矢量场  $\vec{A}$  应当满足斯托克斯定理:

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.72)$$

等式左边

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \oint_{\partial S} (\psi \vec{a}) \cdot d\vec{l} \\ &= \vec{a} \cdot \oint_{\partial S} \psi d\vec{l}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

等式右边

$$\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \int_S [\nabla \times (\psi \vec{a})] \cdot d\vec{S} \\
&= \int_S [(\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}] \cdot d\vec{S} \\
&= \int_S [(\nabla \psi) \times \vec{a}] \cdot d\vec{S} \\
&= \int_S [d\vec{S} \times (\nabla \psi)] \cdot \vec{a} \\
&= -\vec{a} \cdot \int_S \nabla \psi \times d\vec{S},
\end{aligned} \tag{1.74}$$

于是

$$\vec{a} \cdot \oint_{\partial S} \psi d\vec{l} = -\vec{a} \cdot \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}, \tag{1.75}$$

由  $\vec{a}$  的任意性就得到

$$\oint_{\partial S} \psi d\vec{l} = - \int_S \nabla \psi \times d\vec{S}. \tag{1.76}$$

□

# 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

## 2.1 总结

### 2.1.1 $\nabla$ 在三种坐标系下的表达式

#### 2.1.1.1 直角坐标

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1)$$

#### 2.1.1.2 球坐标

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.2)$$

#### 2.1.1.3 柱坐标

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

### 2.1.2 $\nabla^2$ 在三种坐标系下的表达式

#### 2.1.2.1 直角坐标

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

#### 2.1.2.2 球坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.5)$$

### 2.1.2.3 柱坐标

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.6)$$

# 第3章 线性空间

## 3.1 Hilbert 空间

### 3.1.1 内积空间的定义

设  $L$  是一个域  $\mathbb{F}$  上的线性空间。在  $L$  上定义一个映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{F}, \quad (3.1)$$

若这个映射满足以下三个条件

(1) 共轭对称:

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle \psi, \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle^*, \quad (3.2)$$

(2) 对第二个元素是线性的, 对第一个元素是反线性的:

$$\forall a \in \mathbb{F}, \quad \psi, \phi \in L, \quad \langle \psi, a\phi \rangle = a \langle \psi, \phi \rangle, \quad \langle a\psi, \phi \rangle = a^* \langle \psi, \phi \rangle, \quad (3.3)$$

(3) 非负性:

$$\forall \psi \in L, \quad \langle \psi | \psi \rangle \geq 0, \quad (3.4)$$

则称  $L$  是一个内积空间。映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  称为内积。

### 3.1.2 Hilbert 空间的定义

完备的内积空间称为 Hilbert 空间。一般用  $\mathcal{H}$  表示希尔伯特空间。

在量子力学中, 一般用  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  表示 Hilbert 空间中的向量。

## 3.2 线性空间上的各种算符

### 3.2.1 算符的定义

线性空间  $L$  上的算符  $O$  是一个从  $L$  到  $L$  的映射

$$O : L \rightarrow L. \quad (3.5)$$

因此有

$$\forall \psi \in L, \quad O\psi \in L. \quad (3.6)$$

### 3.2.2 算符之间的运算

#### 3.2.2.1 算符加法

$$(A + B)\psi = A\psi + B\psi. \quad (3.7)$$

#### 3.2.2.2 算符乘法

$$(AB)\psi = A(B\psi). \quad (3.8)$$

#### 3.2.2.3 算符的对易括号

$$[A, B] \equiv AB - BA. \quad (3.9)$$

### 3.2.3 对算符的运算

#### 3.2.3.1 线性算符

若算符  $O$  满足

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \forall a, b \in \mathbb{F}, \quad O(a\psi + b\phi) = aO\psi + bO\phi, \quad (3.10)$$

则称  $O$  为线性算符。

#### 3.2.3.2 线性算符的转置

设  $O$  是  $L$  上的线性算符，则  $O$  的转置  $O^T$  由下式定义

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle \phi, O^T \psi \rangle = \langle \psi, O\phi \rangle. \quad (3.11)$$

可以证明

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (3.12)$$

### 3.2.3.3 线性算符的复共轭

设  $O$  是  $L$  上的线性算符，则  $O$  的复共轭算符，记为  $O^*$ ，由下式定义

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle \phi, O^* \psi \rangle = \langle \phi, O \psi \rangle^*. \quad (3.13)$$

### 3.2.3.4 线性算符的伴随算符

设  $O$  是  $L$  上的线性算符，则  $O$  的伴随算符，记为  $O^\dagger$ ，由下式定义

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle \phi, O^\dagger \psi \rangle = \langle O\phi, \psi \rangle. \quad (3.14)$$

注意到

$$\langle O\phi, \psi \rangle = (\langle O\phi, \psi \rangle^*)^* = \langle \psi, O\phi \rangle^* = \langle \phi, O^T \psi \rangle^* = \langle \phi, (O^T)^* \psi \rangle, \quad (3.15)$$

即

$$\langle \phi, O^\dagger \psi \rangle = \langle \phi, (O^T)^* \psi \rangle, \quad (3.16)$$

对比得

$$O^\dagger = (O^T)^*. \quad (3.17)$$

可以证明

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \quad (3.18)$$

### 3.2.4 线性空间上的一些特殊算符

#### 3.2.4.1 对称算符与反对称算符

对称算符：若线性算符  $O$  满足

$$O^T = O, \quad (3.19)$$

则称  $O$  为对称算符。

反对称算符：若线性算符  $O$  满足

$$O^T = -O, \quad (3.20)$$

则称  $O$  为反对称算符。

### 3.2.4.2 自伴算符（厄米算符）

若线性算符  $O$  满足

$$O^\dagger = O, \quad (3.21)$$

则称  $O$  为自伴算符或厄米算符。

### 3.2.4.3 么正算符

对于线性算符  $U$ , 若其满足

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I, \quad (3.22)$$

则称  $U$  为么正算符。

## 3.3 线性算符的本征值和本征向量

形如

$$A\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \mathbb{F}, \psi \in L, \quad (3.23)$$

的方程称为线性算符  $A$  的本征方程。 $\lambda$  称为  $A$  的本征值,  $\psi$  称为  $A$  的本征向量。

若某个本征值  $\lambda_i$  对应着  $n$  个线性独立的  $\psi_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ , 则称本征值  $\lambda_i$  是  $n$  重简并的。

## 3.4 一些定理

**定理 3.1.** 厄米算符本征值为实数。

证明. 设  $A$  是厄米算符, 本征方程

$$A\psi = \lambda\psi, \quad A^\dagger = A. \quad (3.24)$$

一方面

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \langle \psi, \lambda\psi \rangle = \lambda \langle \psi, \psi \rangle, \quad (3.25)$$

另一方面

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \langle \psi, A^\dagger\psi \rangle = \langle A\psi, \psi \rangle = \langle \lambda\psi, \psi \rangle = \lambda^* \langle \psi, \psi \rangle, \quad (3.26)$$

对比得

$$\lambda^* = \lambda. \quad (3.27)$$

□

**定理 3.2.** 属于厄米算符不同本征值的本征向量是正交的。

证明. 设厄米算符  $A$  的本征向量  $\psi_1, \psi_2$  分别对应本征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$ , 则有

$$A\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \quad A\psi_2 = \lambda_2\psi_2. \quad (3.28)$$

一方面

$$\langle \psi_2, A\psi_1 \rangle = \langle \psi_2, \lambda_1\psi_1 \rangle = \lambda_1 \langle \psi_2, \psi_1 \rangle, \quad (3.29)$$

另一方面

$$\langle \psi_2, A\psi_1 \rangle = \langle \psi_2, A^\dagger\psi_1 \rangle = \langle A\psi_2, \psi_1 \rangle = \langle \lambda_2\psi_2, \psi_1 \rangle = \lambda_2^* \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = \lambda_2 \langle \psi_2, \psi_1 \rangle, \quad (3.30)$$

作差得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0. \quad (3.31)$$

由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 于是

$$\langle \psi_2, \psi_1 \rangle = 0. \quad (3.32)$$

□

**定理 3.3.** 若  $U$  为么正算符, 则有

$$\forall \psi, \phi \in L, \quad \langle U\psi, U\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle. \quad (3.33)$$

证明.

$$\langle U\psi, U\phi \rangle = \langle \psi, U^\dagger U\phi \rangle = \langle \psi, I\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle. \quad (3.34)$$

□

**定理 3.4.** 复内积空间  $L$  中的线性算符  $A$  为厄米算符的充要条件是  $\forall \phi \in L, \langle \phi, A\phi \rangle \in \mathbb{R}$ .

证明. 若  $A$  为厄米算符, 即  $A^\dagger = A$  则

$$\langle \phi, A\phi \rangle = \langle \phi, A^\dagger\phi \rangle = \langle A\phi, \phi \rangle = \langle \phi, A\phi \rangle^*. \quad (3.35)$$

前后对比得

$$\langle \phi, A\phi \rangle \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

把上面过程反过来就能证明必要性。

□

## 3.5 例题 \*

### 3.5.1 完备性关系

**例 3.1.** 设一组基矢  $\{|n\rangle\}$  构成 *Hilbert* 空间中的完备基，推导完备性关系

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I. \quad (3.37)$$

证明。完备基就是说， $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ， $|\psi\rangle$  可写成  $\{|n\rangle\}$  线性叠加的形式

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (3.38)$$

上式两边左乘  $\langle n'|$ ，并利用正交性关系  $\langle n' | n \rangle = \delta_{n,n'}$  有

$$\langle n' | \psi \rangle = \sum_n c_n \langle n' | n \rangle = \sum_n c_n \delta_{n,n'} = c_{n'}, \quad (3.39)$$

于是

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \langle n | \psi \rangle |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle = \left( \sum_n |n\rangle \langle n| \right) |\psi\rangle, \quad (3.40)$$

前后对比得

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I. \quad (3.41)$$

□

### 3.5.2 纯态下可观测量期望值

**例 3.2.** 假设体系处在纯态  $|\psi\rangle$ ，若对体系的可观测物理量  $O$  进行测量，证明测量期望值  $\langle O \rangle$  可表达为

$$\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle. \quad (3.42)$$

证明. 考虑本征值离散情况, 本征方程为

$$O |n\rangle = o_n |n\rangle . \quad (3.43)$$

利用正交性关系和完备性关系

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{n,n'}, \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = I, \quad (3.44)$$

有

$$\begin{aligned} O &= IOI \\ &= \left( \sum_n |n\rangle \langle n| \right) O \left( \sum_{n'} |n'\rangle \langle n'| \right) \\ &= \sum_{n,n'} \langle n | O | n' \rangle |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} \langle n | o_{n'} | n' \rangle |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} o_{n'} \langle n | n' \rangle |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_{n,n'} o_{n'} \delta_{n,n'} |n\rangle \langle n'| \\ &= \sum_n o_n |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (3.45)$$

量子力学告诉我们, 在  $|\psi\rangle$  态下对可观测量  $O$  进行测量, 测得  $o_n$  的概率为  $|\langle n | \psi \rangle|^2$ , 于是期望值

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &\equiv \sum_n o_n |\langle n | \psi \rangle|^2 \\ &= \sum_n o_n \langle n | \psi \rangle^* \langle n | \psi \rangle \\ &= \sum_n o_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left( \sum_n o_n |n\rangle \langle n| \right) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | O | \psi \rangle . \end{aligned} \quad (3.46)$$

□

### 3.5.3 混合态下可观测量期望值

**例 3.3.** 已知若体系以  $p_i$  的概率处于纯态  $|\psi_i\rangle$ , 则体系的状态可用密度矩阵

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.47)$$

来描述。证明在上述状态下对可观测量  $O$  进行测量, 测量期望值  $\langle O \rangle$  可写为

$$\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O), \quad (3.48)$$

其中, 求迹操作  $\text{Tr}(\cdot)$  的定义为: 设  $\{|j\rangle\}$  是任意一组正交完备基, 则

$$\text{Tr}(O) \equiv \sum_j \langle j | O | j \rangle. \quad (3.49)$$

证明. 考虑本征值离散情况, 本征方程

$$O |n\rangle = o_n |n\rangle. \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &\equiv \sum_i p_i \sum_n o_n |\langle n | \psi_i \rangle|^2 \\ &= \sum_i p_i \sum_n o_n \langle n | \psi_i \rangle \langle n | \psi_i \rangle^* \\ &= \sum_i p_i \sum_n o_n \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n o_n p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i o_n p_i \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | n \rangle \\ &= \sum_n o_n \langle n | \left( \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) |n\rangle \\ &= \sum_n o_n \langle n | \rho |n\rangle \\ &= \sum_n \langle n | \rho o_n |n\rangle \\ &= \sum_n \langle n | \rho O |n\rangle \\ &= \text{Tr}(\rho O). \end{aligned} \quad (3.51)$$

□

### 3.5.4 不确定性关系

例 3.4. 利用 Schwarz 不等式

$$\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2, \quad (3.52)$$

以及不等式

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 \geq |\operatorname{Im}(z)|^2, \quad (3.53)$$

推导不确定性关系

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (3.54)$$

其中  $A, B$  是厄米算符,

$$\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle, \quad \Delta O \equiv \sqrt{\langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle}. \quad (3.55)$$

证明. 注意到对于厄米算符  $O$ , 有

$$\begin{aligned} \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \Delta O &\equiv \sqrt{\langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (O - \langle O \rangle)(O - \langle O \rangle) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle O^2 - 2\langle O \rangle O + \langle O \rangle^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\langle O^2 \rangle - 2\langle O \rangle \langle O \rangle + \langle O \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | (O - \langle O \rangle)^\dagger (O - \langle O \rangle) | \psi \rangle &= \langle \psi | (O^\dagger - \langle O \rangle^*) (O - \langle O \rangle) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (O - \langle O \rangle)(O - \langle O \rangle) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (O - \langle O \rangle)^2 | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (3.57)$$

令  $|\alpha\rangle = (A - \langle A \rangle) |\psi\rangle, |\beta\rangle = (B - \langle B \rangle) |\psi\rangle$ , 则

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \alpha \rangle &= \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = (\Delta A)^2 \\ \langle \beta | \beta \rangle &= \langle \psi | (B - \langle B \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = (\Delta B)^2, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta \rangle &= \langle \psi | (A^\dagger - \langle A \rangle^*) (B - \langle B \rangle) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | (A - \langle A \rangle) (B - \langle B \rangle) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | AB - \langle A \rangle B - \langle B \rangle A + \langle A \rangle \langle B \rangle | \psi \rangle \\
&= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \\
&= \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle BA \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 &\geq |\text{Im } \langle \alpha | \beta \rangle|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2i} (\langle \alpha | \beta \rangle - \langle \alpha | \beta \rangle^*) \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2i} (\langle \alpha | \beta \rangle - \langle \beta | \alpha \rangle) \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} |\langle AB \rangle - \langle BA \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} |\langle AB - BA \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

代入 Schwarz 不等式  $\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \geq |\text{Im } \langle \alpha | \beta \rangle|^2$ , 有

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2, \tag{3.62}$$

即

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|. \tag{3.63}$$

□

# 第4章 复变函数

## 4.1 复变函数的概念

### 4.1.1 复变函数的定义

复变函数  $f$  是黎曼面  $\mathbb{C}^R$  到复平面  $\mathbb{C}$  的映射。

## 4.2 解析函数

### 4.2.1 复变函数的连续性

设复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内有定义。当自变量  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时，都有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad (4.1)$$

则称  $f(z)$  在  $z_0$  点连续。

若  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内的所有点都连续，则称  $f(z)$  在  $\Omega$  内连续。

### 4.2.2 复变函数的导数

设  $z_0$  是复变函数  $f(z)$  定义域  $\Omega$  内的一点。当  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时，即  $\Delta z = z - z_0$  以任何方式趋于 0 时，若极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (4.2)$$

存在且唯一，则称  $f(z)$  在  $z_0$  点可导， $f(z)$  在  $z_0$  点的导数记为  $f'(z_0)$ .

### 4.2.3 柯西-黎曼条件

**定理 4.1.** 设复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，若  $f(z)$  在  $z$  点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.3)$$

上面两条等式称为柯西-黎曼条件 (C-R 条件)。

证明. 设  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (4.4)$$

由于  $f(z)$  在  $z$  点可导, 故极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (4.5)$$

存在且与  $\Delta z$  趋于 0 的方式无关。

特别地,

(1) 令

$$i\Delta y = 0, \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

此时

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.7)$$

(2) 令

$$\Delta x = 0, \quad i\Delta y \rightarrow 0, \quad (4.8)$$

此时

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.9)$$

由于  $f(z)$  在  $z_0$  点可导, 则这两个导数值应该相等, 对比实部和虚部就得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.10)$$

□

C-R 条件是  $f(z)$  在  $z$  点可导的必要条件, 但不是充分条件。也就是说, 可导必定满足 C-R 条件, 但满足 C-R 条件不一定可导。

#### 4.2.4 解析函数的定义

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域内每一点都可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  点是解析的。

若复变函数  $f(z)$  在  $\Omega$  内每一点都可导, 则称  $f(z)$  在  $\Omega$  内是解析的, 或称为全纯的。

### 4.2.5 例题

**例 4.1.** 已知解析函数  $f(z) = u + iv$  的实部  $u = x^3 - 3xy^2$ , 求该解析函数。

**解 4.1.** 解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \quad (4.12)$$

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy. \quad (4.13)$$

选择积分路径为:  $\underbrace{(0, 0) \rightarrow (x_0, 0)}_{C_1}, \underbrace{(x_0, 0) \rightarrow (x_0, y_0)}_{C_2}$ , 在路径  $C_1$  上有  $y = 0, dy = 0$ ,

在路径  $C_2$  上有  $x = x_0, dx = 0$ , 两边积分:

$$\begin{aligned} v(x_0, y_0) - v(0, 0) &= \int_{C_1} 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy + \int_{C_2} 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy \\ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y_0} (3x_0^2 - 3y^2)dy \\ &= 3x_0^2y_0 - y_0^3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

令  $v(0, 0) = C$ , 则:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + v(0, 0) = 3x^2y - y^3 + C, \quad (4.15)$$

于是:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C). \end{aligned} \quad (4.16)$$

**例 4.2.** 已知解析函数  $f(z) = u + iv$  的虚部  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ , 求该解析函数。

**解 4.2.** 先计算偏微分:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.17)$$

函数解析, 故满足 C-R 条件, 即满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.19)$$

于是：

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad (4.20)$$

看到  $(x^2 + y^2)$ , 很自然想到极坐标变换：

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \end{cases}, \quad (4.21)$$

于是：

$$\begin{aligned} du &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= \frac{\cos \varphi}{\rho^2} d\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} d\varphi \\ &= d\left(\frac{-\cos \varphi}{\rho}\right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

于是：

$$u = \frac{-\cos \varphi}{\rho} + C = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C, \quad (4.23)$$

综上，

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} + C\right) + i\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

## 4.3 复变函数积分

### 4.3.1 复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数  $f(z)$  在其有定义的区域中，沿某一曲线  $C$  的有向的线积分。

复变函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  的积分，记为  $\int_C f(z) dz$ ，由下式定义：

$$\int_C f(z) dz \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}). \quad (4.25)$$

右边的东西就是说， $C$  分成  $n$  段，每段都很短，端点记为  $z_0, z_1, \dots, z_n$ ， $\xi_j$  是  $C$  上  $z_{j-1}$  点到  $z_j$  点的中的某一点，最后再令  $n$  趋于无穷。

### 4.3.2 柯西积分定理

#### 4.3.2.1 单连通区域柯西积分定理

设  $f(z)$  在单连通区域（内部没有洞的区域） $\Omega$  上解析，当积分路径为  $\Omega$  内的任一闭合曲线  $C$  时，有：

$$\oint_{C^+} f(z) dz = 0. \quad (4.26)$$

其中， $\oint_{C^+}$  代表积分沿闭合曲线  $C$  的逆时针方向进行。

#### 4.3.2.2 多连通区域柯西积分定理

设  $f(z)$  在具有  $k$  个内边界  $C_1, C_2, \dots, C_k$  的回路  $C$  内的多连通区域内解析，规定  $C, C_1, C_2, \dots, C_k$  的正方向为逆时针，则：

$$\oint_{C^+} f(z) dz = \oint_{C_1^+} f(z) dz + \oint_{C_2^+} f(z) dz + \dots + \oint_{C_k^+} f(z) dz. \quad (4.27)$$

### 4.3.3 柯西积分公式

若  $f(z)$  在闭合回路  $C$  所包围的区域上解析， $z_0$  是此区域中的一点，则：

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (4.28)$$

#### 4.3.4 解析函数高阶导数的积分表达式

设  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内解析， $C$  为  $\Omega$  内的任一闭合回路，对于  $C$  所包围的区域内的任一点  $z$ ，有：

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.29)$$

## 4.4 复变函数的级数展开

### 4.4.1 解析函数的泰勒展开

设  $z_0$  为函数  $f(z)$  解析区域  $\Omega$  内的一点, 以  $z_0$  为圆心的圆周  $C$  在  $\Omega$  内, 则  $f(z)$  可以在  $C$  内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.30)$$

其中, 展开系数为:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (4.31)$$

### 4.4.2 解析函数的洛朗展开

#### 4.4.2.1 复变函数的零点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点的函数值  $f(z_0) = 0$ , 则称  $z_0$  为复变函数  $f(z)$  的零点。

#### 4.4.2.2 复变函数的奇点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点不解析, 即  $f(z)$  在  $z_0$  点的导数不存在或不唯一, 则称  $z_0$  为复变函数  $f(z)$  的奇点。

#### 4.4.2.3 奇点的分类

- 孤立奇点: 若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点, 而在  $z_0$  点任意小的邻域内, 函数  $f(z)$  解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点。
- 非孤立奇点: 若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点, 而在  $z_0$  点任意小的邻域内, 除  $z_0$  点外存在  $f(z)$  的其他奇点, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的非孤立奇点。

还可以进一步对孤立奇点分类。

- 极点: 设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点, 若存在一个正整数  $k$ , 使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的  $k$  阶极点。

- **本性奇点:** 设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点, 若不存在一个正整数  $k$ , 使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的本性奇点。
- **可去奇点:** 设  $z_0$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点,  $f(z)$  在  $z_0$  点没有定义, 但在  $z_0$  的去心邻域内解析, 此时可定义  $f(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  使  $f(z)$  在  $z_0$  点解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的可去奇点。

#### 4.4.2.4 解析函数的洛朗展开

若函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心, 半径为  $R_1, R_2$  的两个圆周  $C_1, C_2$  所包围的环形区域  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  上解析, 则在此区域内  $f(z)$  可展成 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.32)$$

其中,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.33)$$

$C$  是任一条在环形区域内把  $C_2$  包围在内的闭曲线。

#### 4.4.3 例题

**例 4.3.** 求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在环形区域  $0 < |z| < 1$  和  $|z| > 1$  内, 在  $z_0 = 0$  处的展开式。

**解 4.3.** 首先想到几何级数:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (4.34)$$

把  $f(z)$  拆分:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\ &= \frac{z - (z-1)}{z(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{z-1} - z^{-1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

当  $|z| < 1$  时, 有

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} - z^{-1} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)z^n.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

当  $|z| > 1$  时, 注意到  $|1/z| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-1} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}.
\end{aligned}$$

**例 4.4.** 求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在  $z_1 = 0$  和  $z_2 = 1$  附近的展开式。

**解 4.4.** 先算  $f(z)$  在  $z_1 = 0$  附近的展开式。

由于  $0 < |z-0| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)z^n.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

再算  $f(z)$  在  $z_2 = 1$  附近的展开式。

由于  $0 < |z - 1| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
 &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
 &= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
 &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
 &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
 &= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

## 4.5 留数定理及其应用

### 4.5.1 留数的定义

设  $z_0$  是函数  $f(z)$  的孤立奇点, 设  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{4.39}$$

$f(z)$  在  $z_0$  点的留数, 记为  $\text{Res}f(z_0)$ , 定义为:

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}, \tag{4.40}$$

其中,  $a_{-1}$  是  $f(z)$  在  $z_0$  点的洛朗展开式中  $(z - z_0)^{-1}$  项的系数。

### 4.5.2 留数的求法

#### 4.5.2.1 定义法

直接把  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  点作洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{4.41}$$

找到  $(z - z_0)^{-1}$  前的系数  $a_{-1}$ , 由留数的定义可知:

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}. \quad (4.42)$$

### 4.5.2.2 极限法

当  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点时,  $f(z)$  可在其孤立奇点  $z_0$  点作如下的洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0, \quad (4.43)$$

则

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (4.44)$$

### 4.5.2.3 特殊情况

若  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ ,  $z_0$  为  $g(z)$  的一阶极点, 且  $h(z)$  和  $g(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内解析, 则:

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (4.45)$$

## 4.5.3 留数定理

若  $f(z)$  在回路  $C$  所包围的区域内除有限个孤立奇点  $z_1, z_2, \dots, z_k$  外解析, 则  $f(z)$  沿  $C^+$  的回路积分值等于  $f(z)$  在  $z_1, z_2, \dots, z_k$  的留数之和乘  $2\pi i$ , 即:

$$\oint_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}f(z_j). \quad (4.46)$$

### 4.5.3.1 例题

**例 4.5.** 计算回路积分  $I = \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$ , 其中回路  $l$  的方程为  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ .

**解 4.5.** 令  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2}$ ,

在回路  $l : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$  内的孤立奇点有:  $z_1 = i, z_2 = 1$ ,  $z_1$  为一阶极点,  $z_2$  为二阶极点。

下面利用极限法计算  $f(z)$  在回路  $l$  内孤立奇点处的留数。

$f(z)$  在一阶极点  $z_1 = i$  处的留数:

$$\begin{aligned}
\text{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^0}{dz^0} [(z - z_1) \cdot f(z)] \\
&= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 1)^2} \\
&= \frac{1}{2i(i - 1)^2} \\
&= \frac{1}{4},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$f(z)$  在二阶极点  $z_2 = 1$  处的留数:

$$\begin{aligned}
\text{Res}f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^1}{dz^1} [(z - z_2)^2 \cdot f(z)] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z - 1)^2 \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \right] \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} \\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

由留数定理, 有:

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} \\
&= 2\pi i [\text{Res}f(z_1) + \text{Res}f(z_2)] \\
&= 2\pi i \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{\pi}{2} i.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

### 4.5.4 利用留数定理求无穷级数

#### 4.5.4.1 所需函数

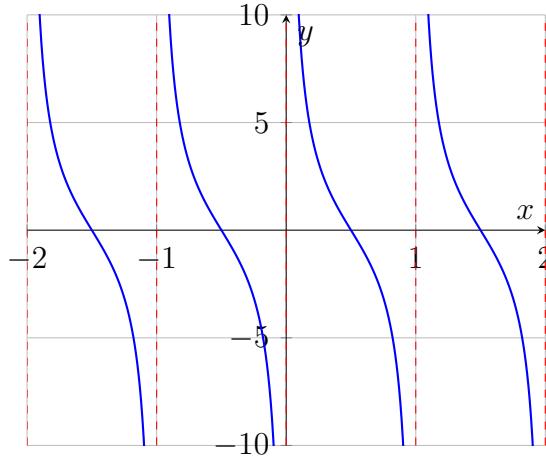


图 4.1: Plot of  $y = \pi \cot(\pi x)$  with vertical asymptotes at integers.

#### 4.5.4.2 例题 \*\*

**例 4.6.** 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ , 其中  $a > 0, a \notin \mathbb{Z}$ .

**解 4.6.** 为了计算目标无穷级数, 考虑如下的无穷级数:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ , 其中  $a > 0, a \notin \mathbb{Z}$ .

构造函数  $f(z) = \pi \cot(\pi z) \cdot \frac{1}{z^2 - a^2}$ , 由  $\pi \cot(\pi z)$  的性质可知,  $f(z)$  的全部奇点  $z_{\pm} = \pm a, z_i = i \in \mathbb{Z}$  都是一阶极点。

考虑如下的正方形围道:

由留数定理, 有

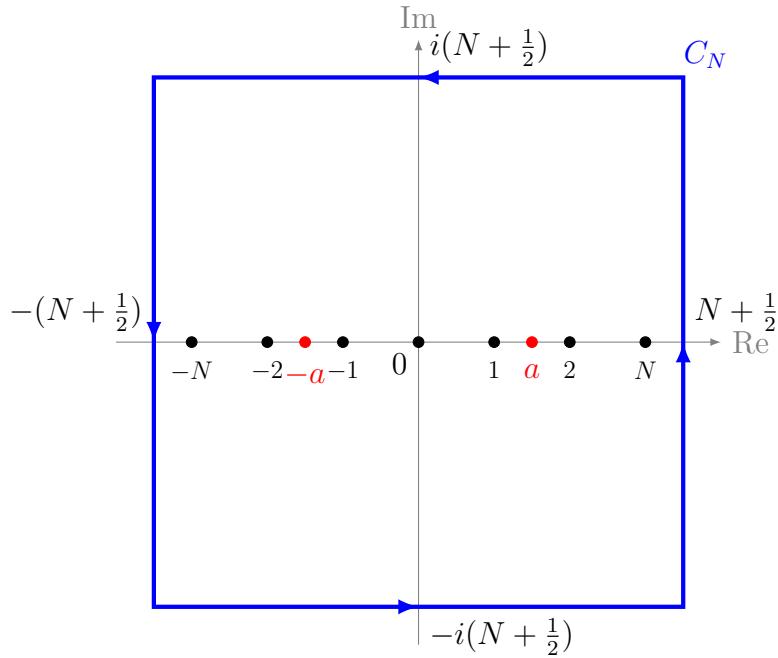
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi i \left( \operatorname{Res} f(z_+) + \operatorname{Res} f(z_-) + \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res} f(z_n) \right). \quad (4.50)$$

可以证明,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{C_N} f(z) dz = 0, \quad (4.51)$$

因此有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res} f(z_n) = - [\operatorname{Res} f(z_+) + \operatorname{Res} f(z_-)]. \quad (4.52)$$

图 4.2: 正方形围道  $C_N$ 

注意到  $z_n = n$  作为  $f(z) = \pi \cot(\pi z) / (z^2 - a^2) = \pi \cos(\pi z) / [(z^2 - a^2) \sin(\pi z)]$  的一阶极点, 若令

$$h(x) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2 - a^2)}, \quad g(x) = \sin(\pi z), \quad f(z) = \frac{h(x)}{g(x)}, \quad (4.53)$$

那么  $z_n = n$  也是  $g(x)$  的一阶极点, 利用求留数方法中的第三种情况, 有

$$\begin{aligned} \text{Res}_n f(z_n) &= \frac{h(z_n)}{g'(z_n)} \\ &= \frac{\pi \cos(\pi z_n) / (z_n^2 - a^2)}{\pi \cos(\pi z_n)} \\ &= \frac{\pi \cos(n\pi) / (n^2 - a^2)}{\pi \cos(n\pi)} \\ &= \frac{1}{(n^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

再计算

$$\text{Res}_+ f(z_+) = \frac{\pi \cos(\pi a)}{2a}, \quad (4.55)$$

$$\text{Res}_- f(z_-) = \frac{\pi \cot(\pi a)}{2a}, \quad (4.56)$$

代入留数定理就得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - a^2)} = -\frac{\pi \cot(\pi a)}{a}, \quad (4.57)$$

于是

$$-\frac{1}{a^2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - a^2)} = -\frac{\pi \cot(\pi a)}{a}, \quad (4.58)$$

最终得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cot(\pi a), \quad a \notin \mathbb{Z}. \quad (4.59)$$

### 4.5.5 留数定理在实积分中的应用

#### 4.5.5.1 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分：

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (4.60)$$

其中， $f(\cos \theta, \sin \theta)$  为不包含有孤立奇点  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数。

计算此类积分，利用欧拉公式换元，将实积分转换为复平面单位圆上的复积分，最后利用留数定理计算积分。

令  $z = e^{i\theta}$ ，有：

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (4.61)$$

于是：

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad (4.62)$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta, \quad (4.63)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad (4.64)$$

于是：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= \oint_{C^+} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz \end{aligned} \quad (4.65)$$

#### 4.5.5.2 例题

**例 4.7.** 计算定积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ , 其中  $0 < \varepsilon < 1$ .

解 4.7. 令:

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad (4.66)$$

于是待求积分  $I$  可表示为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \\ &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz, \end{aligned} \quad (4.67)$$

其中,  $C$  是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令  $f(z) = \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$ , 利用求根公式, 可得被积函数的两个一阶极点:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}. \quad (4.68)$$

利用因式分解, 被积函数  $f(z)$  可写为:

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}, \quad (4.69)$$

其中, 只有  $z_1$  在积分回路  $C$  内。

计算  $f(z)$  在回路内一阶极点  $z_1$  处的留数:

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\varepsilon(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

由留数定理, 有:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \end{aligned} \tag{4.71}$$

于是待求积分  $I$  为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

**例 4.8.** 计算定积分:  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$ .

解 4.8. 令:

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta, \tag{4.73}$$

$$d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \tag{4.74}$$

设  $C$  是复平面上的单位圆, 则待求积分  $I$  可表达为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}. \end{aligned} \tag{4.75}$$

令  $f(z) = \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ ,  $f(z)$  有两个一阶极点  $z_1 = 2 - i, z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ , 只有  $z_2$  在单位圆  $C$  内。

由于  $z_1, z_2$  是  $(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i = 0$  的两根, 于是  $f(z)$  可表达为:

$$f(z) = \frac{1}{(1-2i)(z-z_1)(z-z_2)}. \tag{4.76}$$

计算  $f(z)$  在  $z_2$  处的留数:

$$\begin{aligned}
\text{Res}f(z_2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^0}{dz^0}(z - z_2)f(z) \\
&= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(1 - 2i)(z - z_1)} \\
&= \frac{1}{(1 - 2i)(z_2 - z_1)} \\
&= \frac{1}{4i},
\end{aligned} \tag{4.77}$$

由留数定理，有：

$$\begin{aligned}
\oint_{C^+} f(z) dz &= \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \\
&= 2\pi i \text{Res}f(z_2) \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned} \tag{4.78}$$

于是：

$$\begin{aligned}
I &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

### 4.5.5.3 多值函数的积分

#### 4.5.5.4 例题 \*\*

例 4.9. 计算  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 4.9. 若把  $\ln z$  看成复平面到复平面的映射，则这个映射是多值的。为了消除多值性，我们把  $\ln z$  看成黎曼面到复平面的映射。

考虑如下的 keyhole 围道：

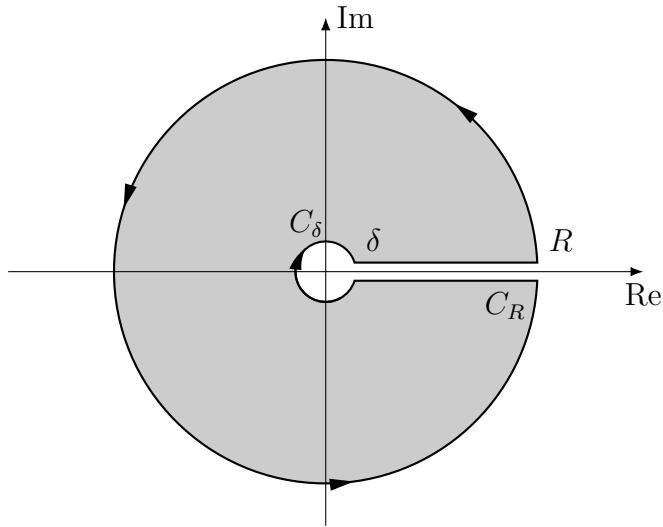


图 4.3: keyhole 围道

实轴上方的路径记为  $C_1$ , 下方的路径记为  $C_2$ 。

构造如下的函数:

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2} = \frac{\ln^2 z}{(z+i)^2(z-i)^2}, \quad \arg z \in (0, 2\pi), \text{ 而非 } f(z) = \frac{\ln z}{(1+z^2)^2}. \quad (4.80)$$

当  $\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty$  时,  $f(z)$  在围道内的奇点为  $z_1 = i, z_2 = -i$ , 其中  $z_1, z_2$  都是二阶极点。

计算  $f(z)$  在  $z_1 = i$  处的留数:

$$\begin{aligned} \text{Res}f(z_1) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^1}{dz^1} [(z - z_1)^2 f(z)] \\ &= \frac{-4\pi + \pi^2 i}{16}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

计算  $f(z)$  在  $z_2 = -i$  处的留数:

$$\begin{aligned} \text{Res}f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^1}{dz^1} [(z - z_2)^2 f(z)] \\ &= \frac{12\pi - 9\pi^2 i}{16}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

由留数定理, 有:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \left( \int_{C_R} + \int_{C_\delta} + \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}f(z_1) + \text{Res}f(z_2)), \quad (4.83)$$

可以证明, 当  $\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty$  时, 大圆弧和小圆弧上的积分为零。

并且, 沿  $C_1$  的积分与沿  $C_2$  的积分有关系, 具体如下:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \int_{z' \in C_2} f(z') dz' &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \int_{z \in C_1} f(ze^{i2\pi}) (-dz) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} - \int_{z \in C_1} \frac{\ln^2(ze^{i2\pi})}{(1+z^2)^2} dz \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} - \int_{z \in C_1} \frac{(\ln z + i2\pi)^2}{(1+z^2)^2} dz \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \int_{z \in C_1} \frac{-\ln^2 z - 4\pi i \ln z + 4\pi^2}{(1+z^2)^2} dz,
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \left( \int_{C_1} + \int_{C_2} \right) f(z) dz &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} -4\pi i \int_{C_1} \frac{\ln z}{(1+z^2)^2} dz + 4\pi^2 \int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \\
 &= -4\pi i I + 4\pi^2 A.
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

其中  $I, A$  都是实数。

把所有计算结果代入留数定理, 有:

$$-4\pi i I + 4\pi^2 A = \pi^3 + \pi^2 i. \tag{4.86}$$

对比实部和虚部, 就得到:

$$I = -\frac{\pi}{4}. \tag{4.87}$$

# 第5章 傅里叶变换

## 5.1 傅里叶级数

### 5.1.1 周期函数作为 Hilbert 空间的元素

设  $\mathcal{H}$  是一个希尔伯特空间，其元素是周期为  $2l$  的单变量函数， $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ ， $\mathcal{H}$  上两个元素的内积，记为  $\langle f_1, f_2 \rangle$ ，定义为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx, \quad (5.1)$$

其中， $x$  是参数，而内积与参数无关。为了指明参数，也可将内积写为：

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx. \quad (5.2)$$

若  $f(x)$  是实函数，则内积可简化为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x) f_2(x) dx. \quad (5.3)$$

### 5.1.2 周期函数的三角函数基傅里叶级数

可以验证以下结论：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx = 1 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (5.4)$$

可以证明，函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x; n, m = 1, 2, \dots \right\}$  是一个完备的正交归一函数族，任意一个周期为  $2l$  的，满足狄利克雷条件的函数  $f(x)$  可写成这些基函数的线性组合，即  $f(x)$  可展成三角函数基的傅里叶级数：

$$f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (5.5)$$

为求出线性组合的系数，只需要利用“这组基是正交归一完备的”这一性质，比如：

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{k',k} \\ &= a_{k'} \end{aligned} \quad (5.6)$$

总之：

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x) \right\rangle = \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (5.7)$$

$$a_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad (5.8)$$

$$b_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (5.9)$$

### 5.1.3 周期函数的 e 指数基傅里叶级数展开

注意到：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{m,n}, \quad (5.10)$$

可以证明，函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, m \in \mathbb{Z} \right\}$  可作为以  $2\pi$  为周期的函数为元素的希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  中的一组正交完备归一基矢，以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  在这组基矢上的展开式为：

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}. \quad (5.11)$$

利用正交归一条件

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right)^* \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \delta_{m,n}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

内积可得系数：

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n} \\ &= C_n, \end{aligned} \quad (5.13)$$

即系数  $C_m$  可通过内积求得：

$$C_m = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right)^* \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx. \quad (5.14)$$

一般地，周期为  $2l$  的周期函数  $f(x)$  可在非归一的 e 指数基  $\{e^{im\pi x/l}, m \in \mathbb{Z}\}$  上展开：

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\pi x/l}, \quad (5.15)$$

为了求出展开系数，上式两边同乘  $e^{-im'\pi x/l}$ ，并对  $x$  从  $-l$  到  $l$  积分：

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) e^{-im'\pi x/l} dx &= \int_{-l}^l \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\pi x/l} \right) e^{-im'\pi x/l} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \int_{-l}^l e^{i(m-m')\pi x/l} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot 2l \delta_{m,m'} \\ &= 2l C_{m'}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

于是得到系数  $C_m$  的表达式：

$$C_m = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-im\pi x/l} dx. \quad (5.17)$$

## 5.2 傅里叶变换

对于一个非周期函数  $f(x)$ ，我们可以认为其为周期无穷大的周期函数。

先考虑一个周期为  $2l$  的周期函数，其可在 e 指数基下展成如下的傅里叶级数：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\pi x/l} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2l} \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-im\pi x'/l} dx' \right) e^{im\pi x/l} \end{aligned} \quad (5.18)$$

令  $k = m\pi/l$ ，则  $m$  遍历  $\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  等价于  $k$  遍历  $\frac{\pi}{l}\mathbb{Z} \equiv \{0, \pm \frac{\pi}{l}, \pm \frac{2\pi}{l}, \dots\}$ ，且  $\Delta m = 1$  对应  $\Delta k = \frac{\pi}{l}$  于是上式对  $m$  的求和可改写为：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2l} \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-im\pi x'/l} dx' \right) e^{im\pi x/l} \\
&= \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2l} \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \\
&= \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2l \cdot \Delta k} \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \Delta k \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \left( \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \Delta k
\end{aligned} \tag{5.19}$$

现在令  $l \rightarrow +\infty$ , 相当于说  $f(x)$  不是周期函数。此时  $\Delta k \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \left( \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \tag{5.20}$$

定义函数  $f(x)$  的傅里叶变换  $\tilde{f}(k)$  为:

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{5.21}$$

进而有

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \left( \int_{x'=-l}^{x'=l} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \Delta k \right] \\
&= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \frac{\pi}{l}\mathbb{Z}} \tilde{f}(k) e^{ikx} \Delta k \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk
\end{aligned} \tag{5.22}$$

上面这种把  $f(x)$  展开成不同频率的平面波  $e^{ikx}$  的方法称为傅里叶积分展开。波矢为  $k$  的平面波前面的展开系数  $\tilde{f}(k)$  就称为  $f(x)$  的傅里叶变换。

# 第6章 拉普拉斯变换

## 6.1 拉普拉斯变换的定义

对于定义在实数  $t \in [0, +\infty)$  上的实函数或复函数  $f(t)$ ,  $f(t)$  的拉普拉斯变换, 记为  $F(p)$ , 由下式定义:

$$F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad (6.1)$$

其中,  $p = s + i\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, e^{-pt}$  称为拉普拉斯变换核,  $F(p)$  称为像函数, 也记为:

$$F(p) \doteq f(t), \quad f(t) \doteq F(p). \quad (6.2)$$

## 6.2 拉普拉斯变换的基本性质

### 6.2.1 线性定理

设  $f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , 则:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p). \quad (6.3)$$

### 6.2.2 延迟定理

定义阶跃函数  $H$ :

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}, \quad (6.4)$$

设  $f(t) \doteq F(p), \tau > 0$ , 则:

$$f(t - \tau)H(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}F(p). \quad (6.5)$$

### 6.2.3 位移定理

设  $f(t) \doteq F(p), \lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$e^{-\lambda t} f(t) \doteq F(p + \lambda). \quad (6.6)$$

### 6.2.4 标度变换定理

设  $f(t) \doteq F(p), a > 0$ , 则:

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0. \quad (6.7)$$

### 6.2.5 卷积定理

定义卷积:

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad (6.8)$$

设  $f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p)$ , 则:

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) F_2(p). \quad (6.9)$$

### 6.2.6 微分定理

设  $f(t) \doteq F(p)$ , 则:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 f^{(n-1)}(0). \quad (6.10)$$

特别地:

$$f^{(1)}(t) \doteq p^1 F(p) - p^0 f^{(0)}(0), \quad (6.11)$$

也即:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0). \quad (6.12)$$

$$f^{(2)}(t) \doteq p^2 F(p) - p^1 f^{(0)}(0) - p^0 f^{(1)}(0), \quad (6.13)$$

也即:

$$f''(t) \doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (6.14)$$

## 6.3 常用拉普拉斯变换及反演

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \doteq 1, & \frac{1}{p^2} \doteq t, & \frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n \\ \frac{1}{p-\alpha} \doteq e^{\alpha t}, & \frac{n!}{(p-n)^{n+1}} \doteq t^n e^{\alpha t} \\ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \doteq \sin \alpha t, & \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \doteq \cos \alpha t \\ \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \doteq \sinh \alpha t, & \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \doteq \cosh \alpha t. \end{cases} \quad (6.15)$$

## 6.4 拉普拉斯变换的应用

### 6.4.1 例题

**例 6.1.** 用拉普拉斯变换解下列  $RL$  串联电路方程，其中  $L, R, E$  为常数：

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E, \\ i(0) = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

**解 6.1.** 设  $i(t) \doteq F(p)$ , 微分定理给出：

$$\frac{di(t)}{dt} \doteq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p), \quad (6.17)$$

常用拉普拉斯变换：

$$1 \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \quad (6.18)$$

对方程  $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$  两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}. \quad (6.19)$$

可以解出  $F(p)$ ：

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\
&= \frac{E}{L} \frac{1}{p(p + R/L)} \\
&= \frac{E}{L} \frac{1}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right) \\
&= \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p - (-R/L)} \right).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}, \tag{6.21}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \quad \frac{1}{p - (-R/L)} \doteq e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{6.22}$$

对方程  $F(p) = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right)$  两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \tag{6.23}$$

# 第7章 $\delta$ 函数

## 7.1 $\delta$ 函数的定义

$\delta$  函数是一个定义在  $\mathbb{R}$  上的广义函数，其满足：

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ +\infty & , x = x_0 \end{cases}, \quad \text{且} \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & , x_0 \in (a, b) \\ 0 & , x_0 \notin (a, b) \end{cases} \quad (7.1)$$

## 7.2 $\delta$ 函数的性质

1. 设  $f(x)$  为连续函数，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (7.2)$$

2.  $\delta(x)$  是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (7.3)$$

3.

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0). \quad (7.4)$$

4.

$$x \delta(x) = 0. \quad (7.5)$$

5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_2) \delta(x - x_1) dx = \delta(x_1 - x_2). \quad (7.6)$$

6. 设  $\{x_i\}$  为  $\varphi(x)$  的单根，即  $\varphi(x_i) = 0$  且  $\varphi'(x_i) \neq 0$ ，则：

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(x_i)|} \delta(x - x_i). \quad (7.7)$$

### 7.3 三维 $\delta$ 函数

### 7.4 三维 $\delta$ 函数的定义

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & , \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ +\infty & , \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}, \quad \text{且} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r} = 1, \quad \vec{r}_0 \in V. \quad (7.8)$$

#### 7.4.1 三维直角坐标系

$$d^3\vec{r} = dx dy dz, \quad (7.9)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0). \quad (7.10)$$

#### 7.4.2 三维球坐标系

$$d^3\vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (7.11)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (7.12)$$

#### 7.4.3 三维柱坐标系

$$d^3\vec{r} = \rho d\rho d\varphi dz, \quad (7.13)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0). \quad (7.14)$$

## 7.5 $\delta$ 函数的傅里叶积分展开

### 7.5.1 一维情况

设  $\delta(x - x_0)$  的傅里叶积分展开为：

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) e^{ikx} dk, \quad (7.15)$$

其中  $C(k)$  就是  $\delta(x - x_0)$  的傅里叶变换。 $C(k)$  由下式给出：

$$C(k) = \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx = e^{-ikx_0}. \quad (7.16)$$

代回  $\delta(x - x_0)$  的傅里叶积分展式，得到：

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-ikx_0} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk. \end{aligned} \quad (7.17)$$

### 7.5.2 三维情况

$$\begin{aligned} &\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty} e^{ik_x(x-x_0)} dk_x \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty} e^{ik_y(y-y_0)} dk_y \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} e^{ik_z(z-z_0)} dk_z \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty} \int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} e^{ik_x(x-x_0)} e^{ik_y(y-y_0)} e^{ik_z(z-z_0)} dk_x dk_y dk_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} d^3 \vec{k}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

## 7.6 例题

**例 7.1.** 证明： $\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$ .

**解 7.1.** 对于标量函数  $f(r)$ ，有：

$$\begin{aligned}
\nabla f(r) &= \vec{e}_i \partial_i f(r) = \vec{e}_i \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \vec{e}_i \partial_i r = f'(r) \nabla r \\
&= f'(r) \vec{e}_i \partial_i \sqrt{x_j x_j} \\
&= f'(r) \vec{e}_i \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-1/2} \partial_i (x_j x_j) \\
&= f'(r) \vec{e}_i \frac{1}{2} (x_j x_j)^{-1/2} 2x_j \partial_i x_j \\
&= f'(r) \vec{e}_i (x_j x_j)^{-1/2} x_j \delta_{ij} \\
&= f'(r) \vec{e}_i (x_j x_j)^{-1/2} x_i \\
&= f'(r) \vec{e}_i x_i (x_j x_j)^{-1/2} \\
&= f'(r) \vec{r} / r.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

对于矢量场  $\vec{A}$  和标量场  $\phi$ , 有:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi \vec{A}) &= \partial_i (\phi A_i) = A_i \partial_i \phi + \phi \partial_i A_i = A_i (\nabla \phi)_i + \phi \partial_i A_i \\
&= \vec{A} \cdot (\nabla \phi) + \phi \nabla \cdot \vec{A}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

当  $\vec{r} \neq \vec{0}$ , 有:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \\
&= \nabla \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\
&= - \left( \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \right) \\
&= - \left( \vec{r} \cdot (-3r^{-4} \nabla r) + \frac{1}{r^3} \cdot 3 \right) \\
&= - \left( \vec{r} \cdot \left( -3r^{-4} \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{1}{r^3} \cdot 3 \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

$\nabla^2 \frac{1}{r}$  在  $\vec{r} = \vec{0}$  处无定义, 但可人为定义其在  $\vec{0}$  处的函数值为  $+\infty$ . 取以坐标原点为球心, 半径为  $R$  的一个球体  $V$ , 计算体积分:

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{r} \in V} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3 \vec{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r} \in V} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d^3 \vec{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \oint_{\partial V^+} dS \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

# 第8章 数学物理方程与分离变量法

## 8.1 波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

### 8.1.1 波动方程的标准形式

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t). \quad (8.1)$$

### 8.1.2 输运方程（抛物方程）的标准形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t). \quad (8.2)$$

### 8.1.3 泊松方程（椭圆方程）的标准形式

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r}). \quad (8.3)$$

### 8.1.4 拉普拉斯方程的标准形式

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0. \quad (8.4)$$

## 8.2 定解条件

定解条件是一个方程有确定解所要满足的条件。

定解条件包括初始条件和边界条件。

### 8.2.1 初始条件

初始条件指场量  $u(\vec{r}, t)$  和其关于时间的一阶导数  $u_t(\vec{r}, t)$  在初始时刻，也即  $t = 0$  时所要满足的条件。

### 8.2.1.1 波动方程的初始条件

由于波动方程  $u_{tt} - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$  中有场量对时间的二阶导  $u_{tt}$ , 因此要想让波动方程有确定解, 既需要场量  $u(\vec{r}, t)$  在初始时刻的空间分布, 也需要场量对时间的一阶导在初始时刻的空间分布。

因此, 波动方程的初始条件为:

$$\begin{cases} u(\vec{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t)|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \end{cases}. \quad (8.5)$$

### 8.2.1.2 输运方程的初始条件

由于输运方程  $u_t - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$  中有场量对时间的一阶导  $u_{tt}$ , 因此要想让输运方程有确定解, 只需要场量在初始时刻的空间分布, 或者场量对时间的一阶导在初始时刻的空间分布。

因此, 输运方程的初始条件为:

$$u(\vec{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r}), \quad \text{or} \quad u_t(\vec{r}, t)|_{t=0} = \nu(\vec{r}). \quad (8.6)$$

### 8.2.1.3 泊松方程的初始条件

由于泊松方程  $\nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r})$  不含时间, 因此泊松方程不需要初始条件。

## 8.2.2 边界条件

边界条件指场量在边界上所要满足的条件。

### 8.2.2.1 第一类边界条件

第一类边界条件是场量  $u(\vec{r}, t)$  在边界  $\partial\Omega$  处的取值所要满足的条件:

$$u(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = g(\vec{r}, t). \quad (8.7)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ , 则得到第一类齐次边界条件:

$$u(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = 0. \quad (8.8)$$

### 8.2.2.2 第二类边界条件

第二类边界条件是边界上场量沿边界的外法线的方向导数所要满足的关系:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = g(\vec{r}, t). \quad (8.9)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ , 则得到第二类齐次边界条件:

$$\frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = 0. \quad (8.10)$$

### 8.2.2.3 第三类边界条件

把第一类边界条件和第二类边界条件进行线性组合就得到第三类边界条件:

$$\left( \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = g(\vec{r}, t). \quad (8.11)$$

若  $g(\vec{r}, t) = 0$ , 则得到第三类齐次边界条件:

$$\left( \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\vec{r} \in \partial\Omega} = 0. \quad (8.12)$$

### 8.2.2.4 自然边界条件

所要求解的场量  $u$  在考虑的区域  $\Omega$  及其边界  $\partial\Omega$  上, 都是有界的, 不发散的, 即:

$$|u| < +\infty. \quad (8.13)$$

### 8.2.2.5 周期性边界条件

场量  $u(\vec{r}, t)$  具有空间周期性。

### 8.2.2.6 衔接条件

若研究的区域  $\Omega$  可分成几个性质不同的子区域, 则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件。

## 8.2.3 定解条件

### 8.2.3.1 波动方程定解条件

$$\begin{cases} u_{tt}(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t)|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial\Omega} = g(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (8.14)$$

### 8.2.3.2 输运方程定解条件

$$\begin{cases} u_t(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r}), \quad \text{or} \quad u_t(\vec{r}, t)|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial \Omega} = g(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \partial \Omega} \end{cases} \quad (8.15)$$

### 8.2.3.3 泊松方程定解条件

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \\ \left[ \alpha u(\vec{r}) + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right]_{\vec{r} \in \partial \Omega} = g(\vec{r})|_{\vec{r} \in \partial \Omega} \end{cases} \quad (8.16)$$

## 8.3 分离变量法

### 8.3.1 Sturm-Liouville 本征值问题

#### 8.3.1.1 Sturm-Liouville 方程

如下带有参数  $\lambda$  的二阶常微分方程称为 Sturm-Liouville 方程 (S-L) 方程:

$$\frac{d}{dx} [k(x)y'(x)] - q(x)y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0. \quad (8.17)$$

其中  $\lambda$  称为本征参数 (或本征值),  $\rho(x)$  称为权重函数。

若定义线性算子

$$L \equiv -\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x), \quad (8.18)$$

则 S-L 方程可写为

$$Ly(x) = \lambda \rho(x)y(x). \quad (8.19)$$

#### 8.3.1.2 S-L 方程本征函数的一般性质

可以证明, 在三类齐次边界条件或自然边界条件或周期性边界条件下, 且约定  $k(x) \geq 0, q(x) \geq 0, \rho(x) > 0$  的情况下, S-L 方程存在无穷多组本征解, 即存在一系列本征值  $\lambda_n$  和本征函数  $y_n(x)$  满足 S-L 方程:

$$\frac{d}{dx} [k(x)y'_n(x)] - q(x)y_n(x) + \lambda_n \rho(x)y_n(x) = 0, \quad , x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (8.20)$$

这些本征解有一些一般的性质。

### 8.3.1.3 S-L 方程本征解的带权正交性

设  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , 二者分别对应本征函数  $y_n(x), y_m(x)$ , 即:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [k(x)y'_n(x)] - q(x)y_n(x) + \lambda_n \rho(x)y_n(x) = 0, \\ \frac{d}{dx} [k(x)y'_m(x)] - q(x)y_m(x) + \lambda_m \rho(x)y_m(x) = 0, \\ y_n \neq y_m. \end{cases} \quad (8.21)$$

可以证明,  $y_n(x), y_m(x)$  以权重  $\rho(x)$  正交, 即:

$$\int_a^b \rho(x)y_n(x)y_m^*(x)dx = 0. \quad (8.22)$$

### 8.3.1.4 S-L 方程本征值的性质

可以证明, S-L 问题有无穷多非负本征值, 所有本征值组成一个单调递增以无穷远点为凝聚点的序列。

### 8.3.1.5 S-L 方程函数的完备性与广义 Fourier 展开

可以证明, 所有的本征函数  $\{y_n(x)\}$  构成一个完备的带权正交函数系, 任何定义在  $x \in [a, b]$  上的满足 Dirichlet 条件的函数  $f(x)$  可以其上进行广义 Fourier 展开:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x), \quad (8.23)$$

为了求出系数  $C_n$ , 上式两边同乘  $\rho(x)y_m^*(x)$  并积分, 利用本征函数带权正交性就有:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\rho(x)y_m^*(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b \rho(x)y_n(x)y_m^*(x)dx \\ &= C_m \int_a^b \rho(x)y_m(x)y_m^*(x)dx \\ &= C_m \int_a^b \rho(x) |y_m(x)|^2 dx \end{aligned} \quad (8.24)$$

于是有:

$$C_m = \frac{1}{\int_a^b \rho(x) |y_m(x)|^2 dx} \int_a^b f(x)\rho(x)y_m^*(x)dx. \quad (8.25)$$

### 8.3.2 例题

#### 8.3.2.1 例 1

**例 8.1.** 求解四边固定,  $x, y$  方向上边长分别为  $l, d$  的矩形薄膜的本征振动 (即求本征振动频率和本征振动函数)。

**解 8.1.** 矩形薄膜的振动满足二维波动方程。这里采用直角坐标, 结合“四周固定”这一边界条件, 可得定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} - a^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right] = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{y=0} = u|_{y=d} = 0. \end{cases} \quad (8.26)$$

设  $u(x, y, t)$  可分离变量:

$$u(x, y, t) = U(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (8.27)$$

代入波动方程可得:

$$X(x)Y(y)T''(t) - a^2 [Y(y)T(t)X''(x) + X(x)T(t)Y''(y)] = 0. \quad (8.28)$$

上式两边同时除以  $X(x)Y(y)T(t)$  得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - a^2 \left[ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0. \quad (8.29)$$

观察可知, 必定有:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2. \quad (8.30)$$

将上式代入(8.29), 可知  $\omega, k_x, k_y$  满足:

$$\omega^2 = a^2 (k_x^2 + k_y^2). \quad (8.31)$$

下面解  $X(x), Y(y), T(t)$  所要满足的方程。

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \implies X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x). \quad (8.32)$$

结合边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  可得:

$$A = 0, \quad k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (8.33)$$

因此,  $X(x)$  的本征函数为:

$$X^{(n)} = B^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (8.34)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \implies Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y). \quad (8.35)$$

结合边界条件  $u|_{y=0} = u|_{y=d} = 0$  可得：

$$C = 0, \quad k_y^{(m)} = \frac{m\pi}{d}, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (8.36)$$

因此， $Y(y)$  的本征函数为：

$$Y^{(m)} = D^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right). \quad (8.37)$$

由  $U(x, y) = X(x)Y(y)$  可知，本征振动函数为：

$$\begin{aligned} U^{(nm)}(x, y) &= X^{(n)}(x)Y^{(m)}(y) \\ &= B^{(n)}D^{(m)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\ &\equiv E^{(nm)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right), \quad E^{(nm)} \equiv B^{(n)}D^{(m)}, \quad n, m = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (8.38)$$

由  $\omega^2 = a^2 (k_x^2 + k_y^2)$  可知，本征振动频率为：

$$\begin{aligned} \omega^{(nm)} &= a \sqrt{\left(k_x^{(n)}\right)^2 + \left(k_y^{(m)}\right)^2} \\ &= a \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.39)$$

### 8.3.2.2 例 2

**例 8.2.** 求定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \\ u_x|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (8.40)$$

**解 8.2.** 设  $u(x, t)$  可分离变量:

$$u(x, t) = U(x)T(t), \quad (8.41)$$

代入一维波动方程  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  可得:

$$U(x)T''(t) - a^2 U''(x)T(t) = 0. \quad (8.42)$$

两边同时除以  $U(x)T(t)$  得到:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = 0. \quad (8.43)$$

观察可知:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{U''(x)}{U(x)} = -k^2, \quad \omega^2 = a^2 k^2. \quad (8.44)$$

先看场量  $u(x, t) = T(t)U(x)$  的时间部分  $T(t)$  满足的方程:

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \implies T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (8.45)$$

$$T'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t, \quad (8.46)$$

$$u_t|_{t=0} = 0 \implies T'(t)|_{t=0} = 0 \implies B = 0, \quad (8.47)$$

因此:

$$T(t) = A \cos \omega t \quad (8.48)$$

再看场量  $u(x, t) = T(t)U(x)$  空间部分  $U(x)$  满足的方程:

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \implies U(x) = C \cos kx + D \sin kx, \quad (8.49)$$

$$U'(x) = -kC \sin kx + kD \cos kx, \quad (8.50)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \implies U'(x)|_{x=0} = 0, \implies D = 0. \quad (8.51)$$

因此:

$$U(x) = C \cos kx, \quad U'(x) = -kC \sin kx, \quad (8.52)$$

$$u_x|_{x=l} = 0, \implies U'(x)|_{x=l} = 0, \implies -kC \sin kl = 0. \quad (8.53)$$

因此,  $k$  的本征值  $k_n$  为:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.54)$$

相应的本征函数  $U_n(x)$  为:

$$U_n(x) = \cos k_n x = \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.55)$$

由  $\omega = ak$ , 得  $\omega$  的本征值  $\omega_n$  为:

$$\omega_n = ak_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.56)$$

相应的本征函数  $T_n(x)$  为:

$$T_n(t) = \cos \omega_n t = \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.57)$$

本征解  $u_n(x, t)$  为:

$$u_n(x, t) = U_n(x)T_n(t) = \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.58)$$

定解问题的通解  $u(x, t)$  为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left( \frac{n\pi a}{l} t \right) \quad (8.59)$$

最后结合初始条件

$$u|_{t=0} = \cos \left( \frac{\pi x}{l} \right) + 0.3 \cos \left( \frac{3\pi x}{l} \right) \quad (8.60)$$

得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right) = \cos \left( \frac{\pi x}{l} \right) + 0.3 \cos \left( \frac{3\pi x}{l} \right) \quad (8.61)$$

两边对比得到系数:

$$E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0.3, E_4 = E_5 = \dots = 0, \quad (8.62)$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x, t) = \cos \left( \frac{\pi}{l} x \right) \cos \left( \frac{\pi a}{l} t \right) + 0.3 \cos \left( \frac{3\pi}{l} x \right) \cos \left( \frac{3\pi a}{l} t \right). \quad (8.63)$$

### 8.3.2.3 例 3

例 8.3. 求定解问题:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \nabla^2 u = 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l_1} = 0 \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=l_2} = 0 \\ u|_{z=0} = 0, u|_{z=l_3} = 0 \\ u|_{t=0} = T_0 \end{cases} \quad (8.64)$$

解 8.3. 设  $u(x, y, z, t)$  可分离变量:

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t), \quad (8.65)$$

代入输运方程可得:

$$U(x, y, z)T'(t) - a^2 T(t) \nabla^2 U(x, y, z) = 0. \quad (8.66)$$

上式两边同时除以  $U(x, y, z)T(t)$  得:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{\nabla^2 U(x, y, z)}{U(x, y, z)}, \quad (8.67)$$

观察可知:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad a^2 \frac{\nabla^2 U(x, y, z)}{U(x, y, z)} = -k^2, \quad \omega^2 = a^2 k^2, \quad (8.68)$$

时间部分  $T(t)$  满足方程:

$$T'(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (8.69)$$

空间部分  $U(x, y, z)$  满足方程:

$$\nabla^2 U(x, y, z) + k^2 U(x, y, z) = 0 \quad (8.70)$$

设  $U(x, y, z)$  可分离变量:

$$U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (8.71)$$

代入  $U(x, y, z)$  满足的方程, 得:

$$Y(y)Z(z)X''(x) + X(x)Z(z)Y''(y) + X(x)Y(y)Z''(z) + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0 \quad (8.72)$$

上式两边同时除以  $X(x)Y(y)Z(z)$  得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0 \quad (8.73)$$

注意到,  $\frac{X''(x)}{X(x)}, \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \frac{Z''(z)}{Z(z)}$  分别只与  $x, y, z$  有关。上式成立, 则有:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad k_x > 0 \quad (8.74)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2, \quad k_y > 0 \quad (8.75)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2, \quad k_z > 0 \quad (8.76)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (8.77)$$

即:

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \quad (8.78)$$

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0 \quad (8.79)$$

$$Z''(z) + k_z^2 Z(z) = 0 \quad (8.80)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (8.81)$$

方程  $X''(x) + k_x^2 X(x) = 0$  的通解为:

$$X(x) = A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x) \quad (8.82)$$

边界条件:

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l_1} = 0 \implies X(x)|_{x=0} = 0, X(x)|_{x=l_1} = 0 \quad (8.83)$$

由  $X(x)|_{x=0} = 0$  可知:

$$A_x = 0, \quad (8.84)$$

因此:

$$X(x) = B_x \sin(k_x x). \quad (8.85)$$

再由  $X(x) \Big|_{x=l_1} = 0$  可得  $k_x$  的本征值  $k_x^{(n_x)}$  为:

$$k_x^{(n_x)} = \frac{n_x \pi}{l_1}, \quad n_x = 1, 2, \dots \quad (8.86)$$

相应的本征函数  $X_{n_x}(x)$  为:

$$X_{n_x}(x) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right), \quad n_x = 1, 2, \dots \quad (8.87)$$

类似的,  $k_y$  的本征值  $k_y^{(n_y)}$  为:

$$k_y^{(n_y)} = \frac{n_y \pi}{l_2}, \quad n_y = 1, 2, \dots \quad (8.88)$$

相应的本征函数  $Y_{n_y}(y)$  为:

$$Y_{n_y}(y) = \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right), \quad n_y = 1, 2, \dots \quad (8.89)$$

$k_z$  的本征值  $k_z^{(n_z)}$  为:

$$k_z^{(n_z)} = \frac{n_z \pi}{l_3}, \quad n_z = 1, 2, \dots \quad (8.90)$$

相应的本征函数  $Z_{n_z}(z)$  为:

$$Z_{n_z}(z) = \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right), \quad n_z = 1, 2, \dots \quad (8.91)$$

由  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  可知,  $k$  的本征值  $k_{n_x n_y n_z}$  为:

$$\begin{aligned} k_{n_x n_y n_z} &= \sqrt{\left(k_x^{(n_x)}\right)^2 + \left(k_y^{(n_y)}\right)^2 + \left(k_z^{(n_z)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{l_3}\right)^2} \\ &= \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_3}\right)^2} \end{aligned} \quad (8.92)$$

由  $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  可知, 相应于本征值  $k_{n_x n_y n_z}$  的本征函数  $U_{n_x n_y n_z}$  为:

$$U_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = X_{n_x}(x)Y_{n_y}(y)Z_{n_z}(z) = \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right). \quad (8.93)$$

再看时间部分。

由  $\omega = ak$  可知,  $\omega$  的本征值  $\omega_{n_x n_y n_z}$  为:

$$\omega_{n_x n_y n_z} = ak_{n_x n_y n_z} = \pi a \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_3}\right)^2}. \quad (8.94)$$

方程  $T'(t) + \omega^2 T(t) = 0$  的特解为:

$$T(t) = \exp(-\omega^2 t), \quad (8.95)$$

$T(t)$  对应本征值  $\omega_{n_x n_y n_z}$  的本征函数  $T_{n_x n_y n_z}(t)$  为:

$$T_{n_x n_y n_z}(t) = e^{-\omega_{n_x n_y n_z}^2 t} \quad (8.96)$$

由  $u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t)$  可知,  $u(x, y, z, t)$  的本征函数  $u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t)$  为:

$$\begin{aligned} u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) &= U_{n_x n_y n_z}(x, y, z)T_{n_x n_y n_z}(t) \\ &= e^{-\omega_{n_x n_y n_z}^2 t} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \end{aligned} \quad (8.97)$$

因此, 定解问题的形式解  $u(x, y, z, t)$  为:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} u_{n_x n_y n_z}(x, y, z, t) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} e^{-\omega_{n_x n_y n_z}^2 t} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \exp\left\{-\pi^2 a^2 \left[\left(\frac{n_x}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_3}\right)^2\right] t\right\} \times \\ &\quad \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \end{aligned} \quad (8.98)$$

结合初始条件  $u(x, y, z, t)\Big|_{t=0} = T_0$ , 得:

$$\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) = T_0 \quad (8.99)$$

等号两边同乘  $\sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right)$  并积分 ( $n'_x, n'_y, n'_z \in \{1, 2, \dots\}$ ):

$$\begin{aligned} &\sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \times \\ &\int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \quad (8.100) \\ &= T_0 \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{n'_x \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) d\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\cos\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \cdot \cos\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= \frac{-l_1}{n'_x \pi} \cdot [\cos(n'_x \pi) - 1] \\
&= \frac{l_1}{n'_x \pi} [1 - (-1)^{n'_x}]
\end{aligned} \tag{8.101}$$

利用积化和差公式  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ , 有:

$$\begin{aligned}
&\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx
\end{aligned} \tag{8.102}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{(n_x + n'_x) \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\sin\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{(n_x + n'_x) \pi} \cdot \sin\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.103}$$

再注意到, 当  $n_x = n'_x$  时,

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx = l_1 \tag{8.104}$$

当  $n_x \neq n'_x$  时,

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx &= \frac{l_1}{(n_x - n'_x) \pi} \int_{x=0}^{x=l_1} d\left[\sin\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{(n_x - n'_x) \pi} \cdot \sin\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) \Big|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{8.105}$$

因此:

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx = l_1 \delta_{n_x, n'_x} \tag{8.106}$$

终于，我们可以计算：

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x - n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{(n_x + n'_x) \pi x}{l_1}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} l_1 \delta_{n_x, n'_x} - \frac{1}{2} \cdot 0 \\
 &= \frac{l_1}{2} \delta_{n_x, n'_x}
 \end{aligned} \tag{8.107}$$

于是，下面这个复杂的方程

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \times \\
 & \quad \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_3}\right) \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz \\
 &= T_0 \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n'_x \pi x}{l_1}\right) dx \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n'_y \pi y}{l_2}\right) dy \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n'_z \pi z}{l_3}\right) dz
 \end{aligned} \tag{8.108}$$

可简化为：

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \frac{l_1 l_2 l_3}{8} \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \delta_{n_z, n'_z} \\
 &= T_0 \frac{l_1 l_2 l_3}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} \left[1 - (-1)^{n'_x}\right] \left[1 - (-1)^{n'_y}\right] \left[1 - (-1)^{n'_z}\right]
 \end{aligned} \tag{8.109}$$

继续化简：

$$C_{n'_x n'_y n'_z} \cdot \frac{1}{8} = T_0 \frac{1}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} \left[1 - (-1)^{n'_x}\right] \left[1 - (-1)^{n'_y}\right] \left[1 - (-1)^{n'_z}\right] \tag{8.110}$$

解得系数：

$$C_{n'_x n'_y n'_z} = \frac{8}{n'_x n'_y n'_z \pi^3} T_0 \left[1 - (-1)^{n'_x}\right] \left[1 - (-1)^{n'_y}\right] \left[1 - (-1)^{n'_z}\right] \tag{8.111}$$

把下标  $n'_x, n'_y, n'_z$  替换为  $n_x, n_y, n_z$ ：

$$C_{n_x n_y n_z} = \frac{8}{n_x n_y n_z \pi^3} T_0 [1 - (-1)^{n_x}] [1 - (-1)^{n_y}] [1 - (-1)^{n_z}] \tag{8.112}$$

综上，定解问题的解  $u(x, y, z, t)$  为：

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \exp \left\{ -\pi^2 a^2 \left[ \left( \frac{n_x}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_z}{l_3} \right)^2 \right] t \right\} \times \\
&\quad \sin \left( \frac{n_x \pi x}{l_1} \right) \sin \left( \frac{n_y \pi y}{l_2} \right) \sin \left( \frac{n_z \pi z}{l_3} \right) \\
&= \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \frac{8}{n_x n_y n_z \pi^3} T_0 [1 - (-1)^{n_x}] [1 - (-1)^{n_y}] [1 - (-1)^{n_z}] \times \\
&\quad \exp \left\{ -\pi^2 a^2 \left[ \left( \frac{n_x}{l_1} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{l_2} \right)^2 + \left( \frac{n_z}{l_3} \right)^2 \right] t \right\} \times \\
&\quad \sin \left( \frac{n_x \pi x}{l_1} \right) \sin \left( \frac{n_y \pi y}{l_2} \right) \sin \left( \frac{n_z \pi z}{l_3} \right)
\end{aligned} \tag{8.113}$$

## 8.4 曲线坐标系下的分离变量

### 8.4.1 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) + k^2 u(r, \theta, \varphi) = 0, \tag{8.114}$$

其中，拉普拉斯算子  $\nabla^2$  在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{8.115}$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量：

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \tag{8.116}$$

代入亥姆霍兹方程可得：

$$\begin{aligned}
&k^2 R(r)Y(\theta, \varphi) + Y(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) \\
&+ R(r) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) + R(r) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{8.117}$$

上式两边同除  $R(r)Y(\theta, \varphi)/r^2$  得：

$$\begin{aligned}
&k^2 r^2 + \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) \\
&+ \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{8.118}$$

由上式可知，径向部分  $R(r)$  满足球贝塞尔方程：

$$k^2 r^2 + \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) = l(l+1), \quad (8.119)$$

也即

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (8.120)$$

角度部分  $Y(\theta, \varphi)$  满足

$$\frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \varphi) \right) + \frac{1}{Y(\theta, \varphi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y(\theta, \varphi) = -l(l+1), \quad (8.121)$$

也即

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y(\theta, \varphi) = 0. \quad (8.122)$$

设角度部分  $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ，代入上式可得：

$$\Phi(\varphi) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = 0. \quad (8.123)$$

两边同除  $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)/\sin^2 \theta$  得：

$$\frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0. \quad (8.124)$$

由上式可知，方位角部分  $\Phi(\varphi)$  满足

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (8.125)$$

也即

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0. \quad (8.126)$$

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (8.127)$$

令  $x = \cos \theta, \Theta(\theta) = y(x), \theta \in (0, \pi), |x| < 1, \sin \theta = \sqrt{1-x^2}$ ,

$$dx = -\sin \theta d\theta, \quad (8.128)$$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}, \quad (8.129)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( -\sin^2\theta \frac{dy(x)}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( -(1-\cos^2\theta) \frac{dy(x)}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( -(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \cdot (-\sin\theta) \frac{d}{dx} \left( -(1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) \\ &= (1-x^2) \frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (8.130)$$

则方程可化为连带勒让德方程:

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (8.131)$$

#### 8.4.2 亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量

在柱坐标系下, 亥姆霍兹方程为:

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi, z) + k^2 u(\rho, \varphi, z) = 0, \quad (8.132)$$

其中, 拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.133)$$

设  $u(\rho, \varphi, z)$  可分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z), \quad (8.134)$$

经过运算, 可以得到,  $\Phi(\varphi)$  满足

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \nu \geq 0, \quad (8.135)$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad (8.136)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left( k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0. \quad (8.137)$$

令  $x = \sqrt{k^2 + \lambda}\rho, \rho = x/\sqrt{k^2 + \lambda}, (k^2 + \lambda \neq 0), R(\rho) \equiv y(x), y(x) = R(\rho)$ , 则上面方程可化为贝塞尔方程:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0, \quad \nu \geq 0. \quad (8.138)$$

或称为  $\nu$  阶贝塞尔方程。

# 第9章 球函数

## 9.1 勒让德多项式

### 9.1.1 极轴对称性下连带勒让德方程退化为勒让德方程

我们已经知道，对球坐标下的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) + k^2 u(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (9.1)$$

进行分离变量，即设

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (9.2)$$

最后得到三条方程。

径向部分  $R(r)$  满足球贝塞尔方程：

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (9.3)$$

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (9.4)$$

在进行变量替换  $\cos \theta = x, \Theta(\theta) = y(x)$  后得到连带勒让德方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (9.5)$$

方位角部分  $\Phi(\varphi)$  满足

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0. \quad (9.6)$$

由上面方程，容易得到方位角部分的本征解为：

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (9.7)$$

由于  $\Phi(\varphi)$  要满足周期性边界条件 ( $\varphi$  转一圈不改变场值)

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad (9.8)$$

因此本征值  $m$  只能取整数, 即:

$$m \in \mathbb{Z}. \quad (9.9)$$

现在假设场量  $u(r, \theta, \varphi)$  具有极轴对称性, 也即其值与  $\varphi$  无关, 则本征值  $m$  只能取 0:

$$m = 0. \quad (9.10)$$

把  $m = 0$  代回连带勒让德方程就得到勒让德方程:

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0. \quad (9.11)$$

总结一下, 在极轴对称性下, 亥姆霍兹方程  $\nabla^2 u(r, \theta) + k^2 u(r, \theta) = 0$  经分离变量后, 径向部分  $R(r)$  满足仍满足球贝塞尔方程:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (9.12)$$

极角部分  $\Theta(\theta) = y(x), x = \cos \theta$  满足勒让德方程:

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0. \quad (9.13)$$

### 9.1.2 勒让德多项式作为勒让德方程在自然边界条件下的本征函数

物理上, 我们认为场值有限。勒让德方程与自然边界条件就构成 S-L 本征值问题:

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \quad |x| \leq 1 \\ (1 - x^2) \frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + l(l+1)y(x) = 0, \\ |y(x)| < +\infty \end{cases} \quad (9.14)$$

利用级数法, 可以得到这个 S-L 本征值问题的本征解:

本征值  $l$  取自然数  $0, 1, 2, \dots$ ;

相应于本征值  $l$  的本征函数  $y_l(x)$  是第一类勒让德多项式 (简称勒让德多项式或勒让德函数)  $P_l(x)$ :

$$y_l(x) = P_l(x) \equiv \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^n n! (l-n)! (l-2n)!} x^{l-2n}, \quad N = \begin{cases} \frac{l}{2} & , l \text{ 为偶数} \\ \frac{l-1}{2} & , l \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (9.15)$$

### 9.1.3 前几个勒让德多项式

$$P_0(x) = 1 \quad (9.16)$$

$$P_1(x) = x \quad (9.17)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \quad (9.18)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad (9.19)$$

## 9.2 勒让德多项式的性质

### 9.2.1 罗德里格斯公式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (9.20)$$

### 9.2.2 勒让德多项式的生成函数 (母函数)

定义勒让德多项式的生成函数  $f(r)$  为:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}} \quad (9.21)$$

其中,  $x = \cos \theta, |x| \leq 1$

当  $r < 1$ , 可将  $f(r)$  在  $r = 0$  处进行泰勒展开, 可得:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)r^l, \quad r < 1 \quad (9.22)$$

或者用  $\theta$  表达:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta)r^l, \quad r < 1 \quad (9.23)$$

当  $r > 1, \frac{1}{r} < 1$ , 有:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+(1/r)^2-2(1/r)x}} \\
&= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \left(\frac{1}{r}\right)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{-(l+1)}, \quad r > 1
\end{aligned} \tag{9.24}$$

或者用  $\theta$  表达:

$$\boxed{f(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) r^{-(l+1)}, \quad r > 1} \tag{9.25}$$

### 9.2.3 勒让德多项式的递推公式

$$x(1+2l)P_l(x) - (l+1)P_{l+1}(x) - lP_{l-1}(x) = 0 \tag{9.26}$$

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) + P'_{l-1}(x) - 2xP'_l(x) \tag{9.27}$$

$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) \tag{9.28}$$

$$(l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - xP'_l(x) \tag{9.29}$$

$$lP_l(x) = xP'_l(x) - P'_{l-1}(x) \tag{9.30}$$

$$(x^2-1)P'_l(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x) \tag{9.31}$$

### 9.2.4 勒让德多项式的正交性

$\left\{ \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots \right\}$  构成  $[-1, 1]$  上的正交归一函数系, 基函数的正交归一性可表达为:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(x) \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) dx = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \tag{9.32}$$

### 9.3 具有极轴对称的拉普拉斯方程的求解

拉普拉斯方程  $\nabla^2 u = 0$  可以由亥姆霍兹方程  $\nabla^2 u + k^2 u = 0$  令  $k = 0$  得到。

我们已经知道, 在极轴对称性下, 亥姆霍兹方程  $\nabla^2 u(r, \theta) + k^2 u(r, \theta) = 0$  经分离变量后, 径向部分  $R(r)$  满足满足球贝塞尔方程:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (9.33)$$

极角部分  $\Theta(\theta) = y(x)$ ,  $x = \cos \theta$  满足勒让德方程:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0. \quad (9.34)$$

令  $k = 0$ , 就得到具有极轴对称性的拉普拉斯方程  $\nabla^2 u(r, \theta) = 0$  在分离变量  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  后  $R(r), \Theta(\theta) = y(x)$  分别要满足的方程:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0, \quad (9.35)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0. \quad (9.36)$$

对于极角部分  $\Theta(\theta) = y(x)$ , 结合自然边界条件  $|y(x)| < +\infty$ , 就构成 S-L 本征值问题。我们知道, 这个 S-L 本征值问题的本征值  $l = 0, 1, 2, \dots$ , 相应于本征值  $l$  的本征函数  $y_l(x)$  为勒让德多项式:

$$y_l(x) = P_l(x), \quad (9.37)$$

$$\Theta_l(\theta) = y_l(x) = y_l(\cos \theta) = P_l(\cos \theta). \quad (9.38)$$

对于径向部分  $R(r)$ , 可以证明其相应于本征值  $l$  的本征函数  $R_l(r)$  为

$$R_l(r) = C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \quad (9.39)$$

因此, 具有极轴对称性的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0 \quad (9.40)$$

在自然边界条件下的形式解为

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta). \quad (9.41)$$

### 9.3.1 例题

#### 9.3.1.1 例 1

**例 9.1.** 在单位球的北极点上放置一电荷量为  $4\pi\varepsilon_0$  的点电荷，求单位球内任一点  $\vec{r}$  的电势，并用勒让德多项式表示。

**解 9.1.** 由余弦定理知，单位球内  $\vec{r}$  点到单位球上北极点的距离为：

$$r' = \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}, \quad r < 1 \quad (9.42)$$

单位球内  $\vec{r}$  点的电势为：

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \theta}}, \quad r < 1 \end{aligned} \quad (9.43)$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数，其可在  $r = 0$  点展开为：

$$u(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) r^l, \quad r < 1 \quad (9.44)$$

#### 9.3.1.2 例 2

**例 9.2.** 在半径  $r = r_0$  的球内求解  $\nabla^2 u = 0$ ，使其满足边界条件  $u|_{r=r_0} = \sin^2 \theta$ 。

**解 9.2.** 边界条件与方位角  $\varphi$  无关，因此所求应也与  $\varphi$  无关：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0. \quad (9.45)$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (9.46)$$

由自然边界条件，球心  $r = 0$  处场量不应发散：

$$|u(r, \theta)||_{r=0} < +\infty \quad (9.47)$$

因此  $-r^{(l+1)}$  项必须舍弃，即：

$$B_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (9.48)$$

于是：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (9.49)$$

考虑边界条件  $u|_{r=r_0} = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ , 注意到:

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \end{cases} \implies 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3}[P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)] \quad (9.50)$$

因此：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = \frac{2}{3}[P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)] \quad (9.51)$$

把边界条件整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$\left(A_0 - \frac{2}{3}\right)P_0(\cos \theta) + A_1 r_0 P_1(\cos \theta) + \left(A_2 r_0^2 + \frac{2}{3}\right)P_2(\cos \theta) + \sum_{l=3}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = 0 \quad (9.52)$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$A_0 - \frac{2}{3} = 0, A_1 = 0, A_2 r_0^2 + \frac{2}{3} = 0, A_3 = A_4 = \dots = 0 \quad (9.53)$$

即：

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = 0, A_2 = -\frac{2}{3r_0^2}, A_3 = A_4 = \dots = 0 \quad (9.54)$$

于是：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3r_0^2} r^2 P_2(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{r^2}{3r_0^2} (3\cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (9.55)$$

### 9.3.1.3 例 3

**例 9.3.** 在均匀电场  $\vec{E}_0$  中放一半径为  $a$  的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

**解 9.3.** 以球心  $O$  为坐标原点，选取  $\vec{E}_0$  方向为  $z$  轴正方向，则电势  $u$  关于  $z$  轴轴对称。球外无自由电荷，于是球外电势分布  $u(\vec{r})$  满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \quad r > a \quad (9.56)$$

特别地，这里电势  $u$  关于  $z$  轴对称， $u$  与  $\varphi$  无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0, \quad r > a \quad (9.57)$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad (9.58)$$

由电势的叠加原理，实际电势  $u(r, \theta)$  是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场  $\vec{E}_0$  导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当  $r \rightarrow +\infty$ ，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为  $u_0$ ，则：

$$u_0 - u(r, \theta) = E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty \quad (9.59)$$

定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0 \\ u(r, \theta)|_{r=a} = 0 \\ u(r, \theta) = u_0 - E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (9.60)$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (9.61)$$

考虑边界条件  $u(r, \theta)|_{r \rightarrow +\infty} = u_0 - E_0 r \cos \theta$ ，当  $r \rightarrow +\infty$ ，有  $r^{-(l+1)} \rightarrow 0$ ，于是：

$$\begin{aligned} u_0 - E_0 r \cos \theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= A_0 + A_1 r \cos \theta + \dots \end{aligned} \quad (9.62)$$

左右两边都看作关于  $r$  的多项式，对比系数得：

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = -E_0, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0 \quad (9.63)$$

于是形式解可写为:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\ &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (9.64)$$

再考虑边界条件  $u(r, \theta)|_{r=a} = 0$ , 将形式解代入边界条件, 得:

$$u_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0 \quad (9.65)$$

即:

$$u_0 P_0(\cos \theta) - E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0 \quad (9.66)$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式:

$$(u_0 + B_0 a^{-1}) P_0(\cos \theta) + (-E_0 a + B_1 a^{-2}) P_1(\cos \theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0 \quad (9.67)$$

由各阶勒让德多项式的正交性, 它们的线性叠加为零, 当且仅当所有线性叠加系数为零, 即:

$$B_0 = -a u_0, \quad B_1 = a^3 E_0, \quad B_2 = B_3 = \cdots = 0 \quad (9.68)$$

综上, 导体球外电势分布为:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ &= u_0 - E_0 r \cos \theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a \end{aligned} \quad (9.69)$$

其中,  $u_0$  为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取  $u_0 = 0$ , 则导体球外电势分布为:

$$u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a$$

(9.70)

球外电场与电势的关系为:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\ &= - \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} \right] \\ &= E_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r + E_0 \sin \theta \left( \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \vec{e}_{\theta}, \quad r \geq a \end{aligned} \quad (9.71)$$

导体表面电场为:

$$\vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} = 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r \quad (9.72)$$

利用电磁场中的高斯定理, 导体球表面面电荷密度分布为:

$$\sigma(\vec{r}) \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} \cdot \vec{e}_r = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (9.73)$$

#### 9.3.1.4 例 4

**例 9.4.** 半径为  $a$  的导体球接地, 在距球心为  $b$  的地方放置一点电荷,  $b > a$ , 电荷量为  $q$ , 求导体球外的电势分布。

**解 9.4.** 选取  $z$  轴使得点电荷的位矢为  $b\vec{e}_z$ , 则球外电势  $u$  具有  $z$  轴对称性, 即  $u = u(r, \theta)$ .

点电荷会在接地导体球表面激发出感应电荷。根据电势叠加原理, 导体球外的电势  $u$  是感应电荷单独存在时产生的电势  $u_r$  与点电荷单独存在时的电势  $u_q$  之和:

$$u = u_r + u_q. \quad (9.74)$$

考虑点电荷单独存在时在球外产生的电势  $u_q$ , 由余弦定理, 场点  $\vec{r}$  到点电荷  $q$  的距离  $r'$  满足:

$$r' = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}. \quad (9.75)$$

点电荷  $q$  在  $\vec{r}$  处产生的电势  $u_q$  满足:

$$\begin{aligned} u_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} \frac{q}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}}, \quad r > a \end{aligned} \quad (9.76)$$

根据勒让德多项式的母函数的相关知识,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l & , \quad r/b < 1, \quad r < b \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & , \quad r/b > 1, \quad r > b \end{cases} \quad (9.77)$$

因此点电荷产生的电势分布  $u_q$  可展为:

$$\begin{aligned}
 u_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos\theta}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos\theta}} \\
 &= \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l, & a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)}, & r > b \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.78}$$

再考虑感应电荷单独存在时在球外产生的电势  $u_r$ , 此时球外没有电荷, 因此球外的电势分布  $u_r$  满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u_r(r, \theta) = 0, \quad r > a. \tag{9.79}$$

套用结论, 轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为:

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \tag{9.80}$$

在无穷远处, 电势  $u_r$  应趋于零:

$$u_r|_{r \rightarrow +\infty} = 0, \tag{9.81}$$

可得:

$$A_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \tag{9.82}$$

因此:

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \tag{9.83}$$

考虑点电荷和感应电荷产生的总电势  $u(r, \theta)$ , 形式上可写为:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) \\
 &= \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), & a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), & r > b \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.84}$$

导体球接地给出边界条件:

$$u(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad (9.85)$$

即：

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{a}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = 0 \quad (9.86)$$

整理成以  $\cos\theta$  为自变量的各阶勒让德多项式  $P_l(\cos\theta)$  的线性叠加的形式：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta) = 0 \quad (9.87)$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得：

$$\frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (9.88)$$

解得：

$$B_l = -\frac{qa^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (9.89)$$

因此：

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \end{aligned} \quad (9.90)$$

注意到， $r > a, b > a$ ，于是有：

$$\frac{br}{a^2} > 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} \quad (9.91)$$

因此，感应电荷在导体球外产生的电势  $u_r(r, \theta)$  实际上可写为：

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}}, \quad r > a \end{aligned} \quad (9.92)$$

最终得到导体球外的电势分布  $u(r, \theta)$ ：

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos\theta}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-aq/b}{\sqrt{(a^2/b)^2 + r^2 - 2(a^2/b)r \cos\theta}}
 \end{aligned} \tag{9.93}$$

可以看到，感应电荷在导体球外产生的电势与一个处于  $z$  轴正半轴距球心  $b' = a^2/b$  处电荷量为  $Q' = -aq/b$  的点电荷相同。

# 第10章 柱函数

10.1 贝塞尔函数

10.2 贝塞尔函数的性质

10.3 柱函数

10.4 贝塞尔方程的本征值问题

# 参考文献

- [1] 杨孔庆. 数学物理方法. Gao deng jiao yu chu ban she, 2012.