第1章 麦克斯韦方程组 边界条件

第2章 镜像法、分离变量法

第3章 镜像法、分离变量法

第4章 电磁波传播、平面电磁波、驻波、波导管

第5章 偶极辐射、计算

第6章 洛伦兹变换、运动学、四维形式

第1章 电磁现象的普遍规律

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 $\vec{F}$ 为:

$$\vec{F}=\frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

其中 $\vec{r}$ 是 Q 到 Q' 的矢径，ε_0 是真空电容率（真空介电常量）

电场

电场，记为 $\vec{E}$，定义为单位检验电荷在场中所受的力:

$$\vec{E}\equiv\frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中，$\vec{F}$ 是检验电荷 Q' 在电场中所受的力。

高斯定理

高斯定理积分形式

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

其中，Q 是闭合曲面 S 内的总电荷（包括自由电荷和极化电荷）

高斯定理微分形式

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

其中，ρ 是总电荷密度（包括自由电荷和束缚电荷）。

静电场的旋度

积分形式

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

微分形式

$$\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$$

上式可以表述为：静电场是无旋的。

电荷守恒定律

积分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V=-\oint_{\partial V^+}\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

特别地，在**恒定电流**的情况下，一切物理量不随时间改变，于是 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，结合电流连续性方程得到：

$$\nabla\cdot\vec{J}=0$$

上式表示**恒定电流的连续性**。

磁感应强度

实验指出，一个电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在磁场中所受的力 $\mathrm{d}\vec{F}$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

其中，$\vec{B}$ 称为磁感应强度。

毕奥-萨伐尔定律

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出：设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 $\vec{x}'$ 处的电流密度，$\vec{r}$ 为源点 $\vec{x}'$ 到 场点 $\vec{x}$ 的矢径，则场点 $\vec{x}$ 的磁感应强度为：

$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'$$

特别地，若电流集中于细导线上，用 $\mathrm{d}\vec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'&=\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}S_n\mathrm{d}l\\&=J(\vec{x}')\mathrm{d}S_n\mathrm{d}\vec{l}\end{aligned}$$

则：

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V']\times\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{J(\vec{x}')\mathrm{d}S_n(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r})}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\int\limits_S J(\vec{x}')S_n \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}
$$

安培环路定理

$$
\oint\limits_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I
$$

其中，∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则。

磁场的散度

$$
\oint\limits_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0
$$

$$
\nabla\cdot\vec{B} = 0
$$

$\vec{B}$ 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

电极化强度

电极化强度，记为 $\vec{P}$，用于描述宏观电偶极矩分布，定义为：

$$
\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V\to 0^+}\frac{\sum\limits_i \vec{p}_i}{\Delta V}
$$

其中，$\vec{p}_i$ 表示 ΔV 内 第 i 个分子的电偶极矩，求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

电介质内部束缚电荷体密度

积分形式

用 ρ_{P} 表示束缚电荷密度，有：

$$
\int\limits_V \rho_P\mathrm{d}V = -\oint\limits_{\partial V}\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

微分形式

$$
\rho_{\mathrm{P}} = -\nabla\cdot\vec{P}
$$

上式适用于**电介质内部**。

两电介质界面束缚电荷面密度

对于两电介质的分界面，可以认为束缚电荷分布在交界面上，可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷，用 σ_P 表示束缚电荷面密度，用 $\vec{n}_{1\to2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量。

$$\sigma_\mathrm{P} = \vec{n}_{1\to2} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

电位移矢量和介质中的高斯定理

将电荷密度分为自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_P，介质内部：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{P}$$

其中，$\rho = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{P}$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_\mathrm{P} = -\nabla \cdot \vec{P}$ 消去 ρ_P，得：

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_\mathrm{f}$$

引入电位移矢量 $\vec{D}$，定义为：

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\mathrm{f}$$

这就是介质中的高斯定理（微分形式），其积分形式为：

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho_\mathrm{f} \mathrm{d}V$$

各向同性线性介质中电位移矢量和电场的关系

对于一般各向同性线性介质，极化强度 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 之间有简单的线性关系：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中，χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质：

$$\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E}\end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$，介质的电容率 $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$，上式可写为：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

磁化强度

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈，线圈面积矢量记为 $\vec{a}$，分子电流的磁矩 $\vec{m}$ 为：

$$\vec{m} = i\vec{a}$$

磁化强度，记为 $\vec{M}$，定义为：

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

磁化电流密度

积分形式

用 $\vec{J}_{\mathrm{M}}$ 表示磁化电流密度，有：

$$\int_S \vec{J}_{\mathrm{M}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

微分形式

$$\vec{J}_{\mathrm{M}} = \nabla \times \vec{M}$$

磁场强度

磁场强度，记为 $\vec{H}$，定义为：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

磁感应强度和磁场强度的关系

对于各向同性非铁磁物质，

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{M}} \vec{H}$$

χ_{M} 称为磁化率

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{M}})\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中，$\mu_r \equiv 1 + \chi_{\mathrm{M}}$ 称为相对磁导率，$\mu \equiv \mu_r \mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

微分形式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

其中，$\vec{J}$ 是自由电流密度，ρ 是自由电荷密度。

积分形式

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{S} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{cases}$$

其中，$\vec{J}$ 是自由电流密度，ρ 是自由电荷密度。

麦克斯韦方程组积分形式也可写为：

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{f}} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{cases}$$

其中，I_{f} 为通过曲面 S 的总自由电流，Q_{f} 是闭合曲面 ∂V 内的总自由电荷。

电磁场边值关系

将麦克斯韦方程组积分形式

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{f}} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{cases}$$

用在两介质界面上，可以得到：

$$\begin{cases} \vec{n}_{1\to2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \\ \vec{n}_{1\to2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_{\mathrm{f}} \\ \vec{n}_{1\to2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{\mathrm{f}} \\ \vec{n}_{1\to2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

其中，$\vec{n}_{1\to2}$ 是从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量；$\vec{\alpha}_{\mathrm{f}}$ 是界面自由电流线密度； σ_{f} 是界面自由电荷面密度。

将

$$
\begin{cases}
Q_{\mathrm{P}} = -\oint\limits_{\partial V} \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
I_{\mathrm{M}} = \oint\limits_{\partial S} \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{cases}
$$

用在两介质界面上，可得：

$$
\begin{cases}
\sigma_{\mathrm{P}} = \vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \\
\vec{\alpha}_{\mathrm{M}} = \vec{n}_{1\to 2} \times (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)
\end{cases}
$$

场和电荷系统的能量守恒定律

能量密度和能流密度

场的**能量密度**，记为 w，定义为单位体积内场的能量，是空间位置 $\vec{x}$ 和时间 t 的函数。

场的**能流密度**，记为 $\vec{S}$，其方向定义为能量传输方向，其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 $\vec{f}$ 表示场对电荷作用力密度，$\vec{v}$ 表示电荷运动速度。

能量守恒定律积分形式

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V w \mathrm{d}V = -\oint\limits_{\partial V} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} - \int\limits_V \vec{f} \cdot \vec{v} \mathrm{d}V
$$

能量守恒定律微分形式

$$
\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S} - \vec{f} \cdot \vec{v}
$$

全空间能量守恒定律

V 包括整个空间

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_\infty w \mathrm{d}V = -\int\limits_\infty \vec{f} \cdot \vec{v} \mathrm{d}V
$$

电磁场能量密度和能流密度表达式

能流密度（坡印廷矢量）

$$
\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}
$$

能量密度变化率

$$
\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
$$

介质内（线性介质）电磁场能量密度

$$
\boxed{w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})}
$$

第1章例题

例1

一个半径为 R 的无限长圆柱内通有恒定电流，电流密度为 j_0，求空间内的磁感应强度与磁能量密度。

解:

安培环路定理:

$$\oint_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

当 $r>R$

$$2\pi rB=\mu_0\pi R^2 j_0\Longrightarrow B=\frac{\mu_0 R^2 j_0}{2r}$$

当 $r<R$

$$2\pi rB=\mu_0\pi r^2 j_0\Longrightarrow B=\frac{\mu_0 j_0 r}{2}$$

于是:

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 j_0 r}{2}\vec{e}_\varphi & , \ r<R\\ \dfrac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}\vec{e}_\varphi & , \ r>R\end{cases}$$

磁场能量密度:

$$w=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 k_0^2 r^2}{8} & ,r<R\\ \dfrac{\mu_0 j_0^2 R^4}{8r^2} & ,r>R\end{cases}$$

例2

无穷大平行板电容器内有两层介质，极板上电荷面密度为 $\pm\sigma_\mathrm{f}$，求电场和束缚电荷分布。

解:

设下板电荷面密度为 σ_f，下面的电介质记为 1，上面的电介质记为 2

$$D_1=\sigma_\mathrm{f},\ \ D_2=\sigma_\mathrm{f}$$

由线性介质中，电场和电位移矢量的关系 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，得:

$$E_1=\frac{\sigma_\mathrm{f}}{\varepsilon_1},\ \ E_2=\frac{\sigma_\mathrm{f}}{\varepsilon_2}$$

由电极化强度和电场的关系 $\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$，得:

$$P_1=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_1=(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{\sigma_\mathrm{f}}{\varepsilon_1}$$

$$P_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)E_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{\sigma_\mathrm{f}}{\varepsilon_2}$$

由界面处束缚电荷面密度公式 $\sigma_\mathrm{P}=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$,

两电介质分界处:

$$\sigma_\mathrm{P}=P_1-P_2=(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1})\sigma_\mathrm{f}$$

介质 1 与下板分界处：

$$\sigma_{\mathrm{P}}' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\varepsilon_1}$$

介质 2 与上板分界处：

$$\sigma_{\mathrm{P}}'' = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{\sigma_{\mathrm{f}}}{\varepsilon_2}$$

第2章 静电场

电势的引入

静止情况下，电场与磁场无关：

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{f}}$$

因为静电场无旋，于是可以引入一个标势 φ 来描述静电场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

选取无穷远点作为参考点，规定参考点的电势为零，即 $\varphi(\infty) = 0$，则：

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电荷连续分布：

$$\varphi(\vec{x}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电势满足的方程

在**均匀各向同性线性介质**中，$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{f}} \Longrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon} \Longrightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon}}$$

其中，ρ 是自由电荷密度，ε 是电介质的介电常数。

电势边值关系

电场边值关系：

$$\vec{n}_{1\to2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{1\to2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{\mathrm{f}}$$

电场边值关系可化为电势边值关系：

$$\boxed{\varphi_1\big|_{\partial\Omega} = \varphi_2\big|_{\partial\Omega}}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\bigg|_{\partial\Omega} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\bigg|_{\partial\Omega} = \sigma_{\mathrm{f}}}$$

其中，$\partial\Omega$ 是两电介质界面；$\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to 2}}\right|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数，σ_f 是界面上自由电荷面密度。

静电场的能量

第1章给出，在线性介质中静电场能量为：

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_\infty \vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

其中，$w=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下，W 可由电势和电荷分布给出：

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V \rho_\mathrm{f}\varphi\mathrm{d}V$$

注意，不能把 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质，电容率为 ε，则：

$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int\mathrm{d}V\int\mathrm{d}V'\frac{\rho_\mathrm{f}(\vec{x})\rho_\mathrm{f}(\vec{x'})}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho_\mathrm{f}(\vec{x})$，在 V 的边界 ∂V 给定：

（1）电势 $\left.\varphi\right|_{\partial V}$

或

（2）电势的外法线法向 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial V}$

则 V 内电场唯一确定。

分离变量法

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 在球坐标中的通解为：

$$\varphi(R,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_{nm}R^n+\frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\phi+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(c_{nm}R^n+\frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ，此情形下通解为：

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

其中，P_n 为勒让德函数，a_n,b_n 是待定系数，由边界条件确定。

镜像法

例 2.9：接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q，求空间中的电场。

解：

设无限大接地平面导体板的位置为 $z=0$，点电荷 Q 处在 $z>0$ 的区域。

要求解 $z>0$ 空间的电场，则镜像点电荷只能放在 $z<0$ 空间，否则会改变泊松方程的源，唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 $(0,0,a)$，其中 $a>0$

此问题的边界条件为：

$$\varphi\Big|_{z=0}=0$$

也就是说 $z=0$ 平面是等相面，$z=0$ 处电场强度垂直于 $z=0$ 平面。

考虑在 $(0,0,-a)$ 处再放置一个带电量 $Q'=-Q$ 的点电荷，则两个对称的点电荷在 $z=0$ 处产生的场强处处于 $z=0$ 平面垂直。

于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是：

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

电多极矩

$$\varphi(\vec{x})=\int\limits_V\frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l，这种情况下，可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式，由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点，用 R 表示坐标原点到场点的距离，

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r=|\vec{x}-\vec{x}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{R}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right]\mathrm{d}V'$$

令：

$$Q=\int\limits_V\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$\vec{p}=\int\limits_V\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$\vec{p}$ 称为体系的电偶极矩

$$\mathscr{D}_{ij}=\int\limits_V 3x_i'x_j'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

张量 $\mathscr{D}_{ij}$ 称为体系的电四极矩。

电四极矩可用并矢形式写为：

$$\vec{\vec{\mathscr{D}}}=\int\limits_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

则电势可写为：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\vec{\vec{\mathscr{D}}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$\varphi^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},\ \ Q=\int\limits_V \rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

零级近似 $\varphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷，其激发的电势就是零级近似。

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3},\ \ \vec{p}=\int\limits_V \vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

一级近似是电偶极矩 $\vec{p}$ 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\vec{\vec{\mathscr{D}}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial_i\partial x_j}\frac{1}{R},\ \ \vec{\vec{\mathscr{D}}}=\int\limits_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

电四极矩张量 $\mathscr{D}_{ij}$ 是对称张量，它有 6 个分量 $\mathscr{D}_{11},\mathscr{D}_{22},\mathscr{D}_{33},\mathscr{D}_{12}=\mathscr{D}_{21},\mathscr{D}_{23}=\mathscr{D}_{32},\mathscr{D}_{31}=\mathscr{D}_{13}$，只有 5 个独立分量。

第2章例题

几种类型的边界条件

（1）

$$\varphi_1\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_2\Big|_{\partial\Omega}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}=\sigma_{\mathrm{f}}$$

（2）

给出导体上的电势，导体面上的边界条件为:

$$\varphi=\varphi_0(\text{常量})$$

（3）

给出导体所带总电荷 Q，在导体面上的边界条件为（导体记为 1，导体外电介质记为 2 ）:

$$\varphi=\text{常量(待定)}$$

$$-\oint\limits_{\partial V}\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\mathrm{d}S=Q$$

可以用

$$\sigma_{\mathrm{f}}=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}$$

求出导体面上的自由电荷面密度 σ_{f}

例1

真空中有一个半径为 R_0 的导体球，在距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，已知导体球电势为 0，求: （1）空间内的电势（2）点电荷 Q 受到的静电力。

解:

（1）

由相似:

$$\frac{b}{R_0}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{R_0}{a}$$

可得:

$$b=\frac{R_0^2}{a},\ \ \frac{r_2}{r_1}=\frac{R_0}{a}$$

导体球边界电势为零，即:

$$\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=0$$
$$\frac{Q'}{r_2}+\frac{Q}{r_1}=0$$

得到:

$$Q'=-Q\frac{r_2}{r_1}=-\frac{R_0}{a}Q$$

余弦定理:

$$r_1=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$$

$$r_2=\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}=\sqrt{r^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2\frac{R_0^2}{a}r\cos\theta}$$

空间内电势分为球外和球内两个区域的电势。

球外电势:

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\frac{R_0}{a}Q}{\sqrt{r^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2\frac{R_0^2}{a}r\cos\theta}}+\frac{Q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\right]\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-R_0}{\sqrt{a^2r^2+R_0^4-2aR_0^2r\cos\theta}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\right],\ \ (r>R_0)\end{aligned}$$

其中，θ 是位矢 $\vec{r}$ 与 x 轴的连线。

由于是导体球，于是球内电势为零。

（2）

点电荷 Q 受到的力等于与像电荷 Q' 给的力:

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{(a-b)^2}\vec{e}_x=\frac{-Q^2R_0a}{4\pi\varepsilon_0(a^2-R^2)^2}\vec{e}_x$$

例2

真空中有一个半径为 R_0 的导体球，导体球**不接地**且带电荷 Q_0，在距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，求：（1）空间内的电势（2）点电荷 Q 受到的静电力。

由例 1 可知，若在球内放置第一个像电荷 Q'，其位置和大小如前，即

$$b=\frac{R_0^2}{a},\ \ Q'=-\frac{R_0}{a}Q$$

则能让球面电势为零。

本题中要满足的条件为:

（1）球面为等势面（电势待定）

（2）从球面出发的总电场强度通量为 Q_0/ε_0

若再往球心处放一个电荷为 Q_0-Q' 的像电荷，则能满足上面两个条件。

于是，球外电势为：

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_0-Q'}{r}+\frac{Q'}{r_2}+\frac{Q}{r_1}\right]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q_0+\frac{R_0}{a}Q}{r}+\frac{-R_0Q}{\sqrt{a^2r^2+R_0^4-2aR_0^2r\cos\theta}}+\frac{Q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\right]\end{aligned}$$

（2）

电荷 Q 受到力等于 Q' 和球心处 Q_0-Q' 处的电荷对它的作用力：

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q(Q_0-Q')}{a^2}+\frac{QQ'}{(a-b)^2}\right]\\&=\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}\end{aligned}$$

第3章 静磁场

磁矢势的引入

恒定电流产生的磁场：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

由矢量分析，从 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可引入一个矢量 $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$ 称为磁场的矢势。

库仑规范

由矢势 $\vec{A}$ 可以唯一确定 $\vec{B}$，反过来则不行，这是因为：

$$\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\vec{A}$$

若 $\vec{A}$ 满足 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，则 $\vec{A}+\nabla\psi$ 也满足 $\vec{B}=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)$，因此由磁场 $\vec{B}$ 无法唯一确定 $\vec{A}$

$\vec{A}$ 具有任意性，因此可以对它加上一定限制，如：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

称为库仑规范。

库仑规范下的矢势 $\vec{A}$ 是无源有旋场。

库仑规范下矢势微分方程

线性均匀介质：

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_\mathrm{f}$$

$$\Longrightarrow\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu\vec{J}_\mathrm{f}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

结合库仑规范：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

得到库仑规范下矢势微分方程：

$$\Longrightarrow\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}_\mathrm{f}}$$

$$(\nabla\cdot\vec{A}=0)$$

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为：

$$\nabla^2A_i=-\mu J_{\mathrm{f}i}$$

矢势的形式解

电势（均匀线性介质中）：

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_\mathrm{f}}{\varepsilon}\Longrightarrow\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\limits_V\frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r}$$

> 上式可用格林函数推导。∇^2 算子的基本解为：$G_0(\vec{x},\vec{x}')=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

类似应有：

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}_\mathrm{f}\Longrightarrow\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}_\mathrm{f}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\nabla\times\vec{A}\\&=\frac{\mu}{4\pi}\nabla\times\int\limits_V\frac{\vec{J}_\mathrm{f}(\vec{x}')\mathrm{d}V}{r}\\&=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\times\vec{J}_\mathrm{f}(\vec{x}')\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}_\mathrm{f}\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}_\mathrm{f}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'}$$

$$\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}_\mathrm{f}\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'}$$

矢势边值关系

$$\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}$$

对于非铁磁性均匀介质，

$$\vec{e}_n \cdot (\nabla \times \vec{A}_2 - \nabla \times \vec{A}_1) = 0$$

$$\vec{e}_n \times (\frac{1}{\mu_2}\nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1}\nabla \times \vec{A}_1) = \vec{\alpha}$$

在两介质分界面上（采用库仑规范）

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量：

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V$$

静磁场情况下，可以用矢势和电流表示总能量。

静磁场中，

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int_V \vec{A} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V \end{aligned}$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义，且不能把 $\frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{J}$ 看作能量密度。

磁标势

能够引入磁标势的条件

恒定电流，且目标区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

磁标势

在 $\vec{J} = \vec{0}$ 的区域内：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ_m，使得：

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

假想磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

静电场和静磁场的对比

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{p}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_\mathrm{p} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_\mathrm{f}+\rho_\mathrm{p}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{0}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=\frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu_0}$$

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}\text{，好介质}$$

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

磁标势解题SOP

(1)

$$\boxed{\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}}$$

> 通常这一步会发现全空间的 $\rho_m=0$

(2)

$$\boxed{\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}}$$

> 若所求解区域 $\rho_m=0$，则磁标势满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi_m=0$，若体系具有极轴（z 轴对称性），则形式解可写为：
> $\varphi_m=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$

(3)

边界条件：

$$\boxed{\varphi_{m1}\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_{m2}\Big|_{\partial\Omega}}$$

$$\boxed{\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\sigma_m}{\mu_0}=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)}$$

$$\boxed{\sigma_m=\mu_0\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)}$$

若是线性介质（注意，**铁球不是线性介质**，只能用上面的边值关系），则：

$$\boxed{\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\to2}}\Big|_{\partial\Omega}}$$

再加上**自然边界条件。**

根据边界条件，确定 φ_m

(4)

求出磁场

$$\boxed{\vec{H}=-\nabla\varphi_m}$$

拉普拉斯方程的解

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 在球坐标中的通解为:

$$\varphi(R,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_{nm}R^n+\frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\phi+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(c_{nm}R^n+\frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 φ，此情形下通解为:

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

其中，P_n 为勒让德函数，a_n,b_n 是待定系数，由边界条件确定。

磁标势边值关系

$$\boxed{\varphi_{m1}\big|_{\partial\Omega}=\varphi_{m2}\big|_{\partial\Omega}}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\to2}}\right|_{\partial\Omega}-\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\to2}}\right|_{\partial\Omega}=\frac{\sigma_m}{\mu_0}=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)}$$

若是线性介质（注意，**铁球不是线性介质**，只能用上面的边值关系），则:

$$\boxed{\mu_1\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\to2}}\right|_{\partial\Omega}=\mu_2\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\to2}}\right|_{\partial\Omega}}$$

$$\sigma_m=\mu_0\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)$$

第3章例题

例1

求磁化强度为 $\vec{M}_0$ 的均匀磁化**铁球**产生的磁场。

解:

> 注意，铁球不是线性介质

取 z 轴与 $\vec{M}_0$ 同向，则问题有 z 轴对称性。

界面为球面

在球内部，即 $R<R_0$ 区域（记为区域 1 ），磁化强度 $\vec{M}=\vec{M}_0$，则磁荷密度为:

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}_0=0,\ \ R<R_0$$

区域 1 内无自由电流，于是磁标势 φ_1 满足方程:

$$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即:

$$\nabla^2\varphi_1=0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_1 的形式解为:

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

由于球心处磁标势有限，即 $\varphi_1\big|_{R=0}<\infty$，则:

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

在球外部，即 $R>R_0$ 区域（记为区域 2 ），磁化强度 $\vec{M}=\vec{0}$，则磁荷密度为：

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=0,\ \ R>R_0$$

区域 2 内无自由电流，于是磁标势 φ_2 满足方程：

$$\nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2\varphi_2=0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_2 的形式解为：

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

由于无穷远处磁标势为零，即 $\varphi_2\big|_{R=\infty}=0$，则：

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$\begin{cases}\varphi_1=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)\\ \varphi_2=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\end{cases}$$

第一条边值关系：

$$\varphi_1\big|_{R=R_0}=\varphi_2\big|_{R=R_0}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nR_0^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

于是得到：

$$a_nR_0^n=\frac{b_n}{R_0^{n+1}}$$

即：

$$\boxed{b_n=a_nR_0^{2n+1}}$$

第二条边值关系：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\bigg|_{\partial\Omega}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\bigg|_{\partial\Omega}=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2),$$

计算方向导数在界面处的取值：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\bigg|_{R=R_0}&=\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\bigg|_{R=R_0}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}na_nR^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\bigg|_{R=R_0}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}na_nR_0^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1\to 2}}\right|_{R=R_0} &= \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\right|_{R=R_0} \\
&= \left.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)\right|_{R=R_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

代入边值关系第二条：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} \mathrm{P}_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = M_0 \cos\theta
$$

即：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_n R_0^{n-1} + \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} \right) \mathrm{P}(\cos\theta) = M_0 \cos\theta
$$

将第一条边值关系得到的结论 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 代入上式，得：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n R_0^{n-1} \mathrm{P}_n(\cos\theta) = M_0 \cos\theta
$$

对比等式两边 $\cos\theta$ 的各级系数，可得：

$$
a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{3} M_0, \quad a_2 = a_3 = \cdots = 0
$$

代回关系 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 得：

$$
b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3, \quad b_2 = b_3 = \cdots = 0
$$

于是得到磁标势：

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{3} M_0 R \cos\theta \\
&= \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} \mathrm{P}_n(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{3} M_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} \cos\theta \\
&= \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3}
\end{aligned}
$$

球内磁场：

$$
\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0, \quad R < R_0
$$

$$
\vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{H}_1 + \vec{M}_1) = \mu_0 (-\frac{1}{3} \vec{M}_0 + \vec{M}_0) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0
$$

球外磁场：

$$
\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{R_0^3}{3} \left(\frac{\vec{M}_0}{R^3} - \frac{3(\vec{M}_0 \cdot \vec{R})}{R^4} \vec{e}_R \right)
$$

例2

将一磁导率为 μ，半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 $\vec{H}_0$ 内，求总磁感应强度 $\vec{B}$ 和诱导磁矩 $\vec{m}$

解:

> 这里的球体是线性介质

将 z 轴取为与 $\vec{H}_0$ 同向，则体系具有 z 轴对称性。

由自然边界条件，球内：

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0 & ,\quad R<R_0\\ \mu_0\vec{H}_0+\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0R_0^3\left[\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})R}{R^5}-\dfrac{\vec{H}_0}{R^3}\right] & ,\quad R>R_0\end{cases}$$

球体的诱导磁矩：

$$\vec{m}=4\pi\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3\vec{H}_0$$

第4章 电磁波的传播

波动方程

一般情况：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质（$\rho=0,\vec{J}=\vec{0}$）：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

真空（$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\vec{B}=\mu_0\vec{H}$）：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

可以得到：

$$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

令：

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

具有上面方程形式的方程称为**波动方程**。

平面电磁波

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡的波称为**时谐电磁波**。

时谐电磁波的复数表示：

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

对线性均匀介质，有 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H}$，代入无源麦克斯韦方程组，得：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}(\vec{x},t)=-\dfrac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}(\vec{x},t)=\varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t)=0\\ \nabla\cdot\vec{B}(\vec{x,t})=0\end{cases}$$

用 $\vec{E}$ 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$，将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t},\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入上面方程组，得场量**空间部分**满足的方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

> 对于时谐电磁波，$\dfrac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow-\mathrm{i}\omega$

上面这组方程是**不独立**的，由第一式可以推出第四式，由第二式可以推出第三式（两边取散度，而任意矢量场旋度的散度为零）

对第一式两边取旋度，并利用公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$，得：

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}+\omega^2\varepsilon\mu\vec{E}=\vec{0}}$$

令：

$$\boxed{k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

则得到时谐电场**空间部分**满足的方程（称为**亥姆霍兹方程**）：

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

在一定频率 ω 下，均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为：

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{B}=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}$$

或：

$$\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{E}=\frac{\nabla\times\vec{B}}{-\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu}=\frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{\mu\varepsilon}}\nabla\times\vec{B}$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=\vec{0}$$

的平面波解为：

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$\nabla\cdot\vec{E}=0$ 要求 $\vec{E}\perp\vec{k}$，即 $\vec{E}$ 可以在垂直于 $\vec{k}$ 的任意方向上振荡。$\vec{E}$ 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 $\vec{k}$ 垂直的任意两个相互正交的方向作为 $\vec{E}$ 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足：

$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t=\mathrm{const}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度：

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

计算平面波电场旋度：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=\nabla\times(\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)})\\&=[\nabla\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{E}_0\\&=\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}\end{aligned}$$

> 对于平面波，$\nabla\longleftrightarrow\mathrm{i}\vec{k}$

> 对于时谐电磁波，$\dfrac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow-\mathrm{i}\omega$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}}$$

于是可以得出磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B}&=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}(\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E})\\&=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}}$$

由上式可得

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v}$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c}$$

（1）电磁波为横波，$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都与传播方向垂直

（2）$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 互相垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

（3）$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 同相，振幅比为 v

利用两个结论快速推导平面电磁波性质

对于时谐平面电磁波，有：

$$\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$$

$$\nabla\longleftrightarrow \mathrm{i}\vec{k}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

对于无源且线性介质情况，即 $\rho=0,\vec{J}=\vec{0},\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{H}=\vec{B}/\mu$，有：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu\varepsilon\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

利用两个结论 $\dfrac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$，$\nabla\longleftrightarrow \mathrm{i}\vec{k}$ 可以得到：

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\vec{B}$$

即：

$$\vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}$$

$$\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

平面电磁波能量密度：

线性均匀介质中电磁场能量密度：

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2\right)$$

平面电磁波情形，$\varepsilon E^2=\dfrac{1}{\mu}B^2$，于是：

$$\boxed{w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2}$$

$$w=\varepsilon E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2[1+\cos 2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)]$$

由 $\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**：

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\vec{e}_k}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\vec{e}_k=vw\vec{e}_k$$

平面电磁波能量密度平均值：

$$\boxed{\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2}$$

平面电磁波能流密度平均值：

$$\boxed{\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k}$$

波导管

矩形波导中的电磁波

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电磁波沿 z 轴传播，电场应有如下形式：

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_z z}}$$

代入亥姆霍兹方程，得：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)\vec{E}(x,y)=\vec{0}$$

设 $u(x,y)$ 为 $\vec{E}(x,y)$ 的任一直角坐标分量，

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

分离变量法可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

特解：

$$u(x,y)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)$$

考虑边界条件 $x=0,y=0$ 面上的边界条件，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ \ E_y\bigg|_{x=0}=0,\ \ E_z\bigg|_{x=0}=0,$$
$$E_x\bigg|_{y=0}=0,\ \ \frac{\partial E_y}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\ \ E_z\bigg|_{y=0}=0,$$

可得：

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\end{cases}$$

再考虑 $x=a,y=b$ 面上的边界条件，可得：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\ \ k_y=\frac{n\pi}{b},\ \ m,n=0,1,2,\cdots$$

再考虑波导中电场应满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$，得：

$$\boxed{k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0}$$

也就是说，A_1,A_2,A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组 (m,n) 值，有两种独立波模，有两种独立波模。

解出 $\vec{E}$ 后，磁场为：

$$\vec{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$$

对一组确定的 (m,n)，若选一种波模具有 $E_z=0$，则该波模的 $A_1/A_2=-k_y/k_x$ 就完全确定，因而另一种波模必须有 $E_z\neq 0$

对 $E_z=0$ 的波模，$H_z\neq 0$

在波导内传播的波的特点：

电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z=0$ 的波，称为横电波（TE）；另一种波模为 $H_z=0$ 的波，称为横磁波（TM）。

TE 波和 TM 波又按 (m,n) 的值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波，一般情况下，在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

若激发频率 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$，则 k_z 变为虚数，此时传播因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的**最低频率** ω_e 称为该波模的**截止频率**。

由：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\ \ k_y=\frac{n\pi}{b},\ \ k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

得到 (m,n) 型的**截止角频率**为：

$$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$$

若 $a>b$，则 TE_{10} 波有最低截止频率：

$$\frac{\omega_{c,10}}{2\pi}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若管内为真空，此时最低截止频率为 $\frac{c}{2a}$，相应的截止波长为：

$$\lambda_{c,10}=2a$$

因此，在波导内能够通过的最大波长为 $2a$

最常用的是 TE_{10} 波，它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

TE_{10} 波的电磁场和管壁电流

当 $m=1,n=0$ 时，$k_x=m\pi/a=\pi/a,k_y=n\pi/b=0$，且对 TE 波有 $E_z=0$，因此 $A_3=0$

由 $k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$ 得 $A_1=0$，把 A_2 写为：

$$A_2=\frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0$$

由

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\end{cases},\quad \vec{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$$

得 TE_{10} 波的电磁场：

$$H_z=H_0\cos\frac{\pi x}{a}$$
$$E_y=\frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$H_x=-\frac{\mathrm{i}k_za}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$E_x=E_z=h_y=0$$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $\vec{n}_{1\to2}\times\vec{H}=\vec{\alpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第4章例题

例1

已知在长宽分别为 a,b 的矩形波导内，磁场强度的 z 分量大小为：

$$H_z=H_0\cos\left[\frac{\pi}{a}y\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_zz-\omega t)}$$

（1）求波导内电场强度、磁感应强度大小（2）求平均能流密度功率

解：

（1）

时谐电磁波：

$$\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow-\mathrm{i}\omega$$

波导内:

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}}$$

$$\boxed{\vec{H}(x,y,z)=\vec{H}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}}$$

麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

考虑波导内真空且无源，有 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$， $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，再结合时谐电磁波 $\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow-\mathrm{i}\omega$ 可得:

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$$

对第一式两边同时取 x,y 分量:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\omega\mu_0H_x&=\partial_yE_z-\partial_zE_y\\&=\partial_yE_z-\mathrm{i}k_zE_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\omega\mu_0H_y&=\partial_zE_x-\partial_xE_z\\&=\mathrm{i}k_zE_x-\partial_xE_z\end{aligned}$$

对第二式两边同时取 x,y 分量:

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_x&=\partial_yH_z-\partial_zH_y\\&=\partial_yH_z-\mathrm{i}k_zH_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_y&=\partial_zH_x-\partial_xH_z\\&=\mathrm{i}k_zH_x-\partial_xH_z\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{cases}\mathrm{i}\omega\mu_0H_x=\partial_yE_z-\mathrm{i}k_zE_y\\-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_y=\mathrm{i}k_zH_x-\partial_xH_z\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\mathrm{i}\omega\mu_0H_x+\mathrm{i}k_zE_y=\partial_yE_z\\ \mathrm{i}k_zH_x+\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_y=\partial_xH_z\end{cases}$$

解得:

$$H_x=\frac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}\Big(-\omega\varepsilon_0\partial_yE_z+k_z\partial_xH_z\Big)$$

$$E_y=\frac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}\Big(-\omega\mu_0\partial_xH_z+k_z\partial_yE_z\Big)$$

其中，$k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$

$$\begin{cases}\mathrm{i}\omega\mu_0H_y=\mathrm{i}k_zE_x-\partial_xE_z\\-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_x=\partial_yH_z-\mathrm{i}k_zH_y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\mathrm{i}\omega\mu_0H_y-\mathrm{i}k_zE_x=-\partial_xE_z\\ \mathrm{i}k_zH_y-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_x=\partial_yH_z\end{cases}$$

解得:

$$H_y=\frac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}\Big(\omega\varepsilon_0\partial_xE_z+k_z\partial_yH_z\Big)$$

$$E_x = \frac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}\left(\omega\mu_0\partial_y H_z + k_z\partial_x E_z\right)$$

本题中，$H_z = H_0\cos\left[\frac{\pi}{a}y\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$，$E_z = 0$，于是:

$$E_x = \frac{-\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$E_y = 0$$

$$H_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}\pi k_z H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

$$B_y = \mu_0 H_y = \frac{-\mathrm{i}\pi\mu_0 k_z H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}$$

（2）求平均能流密度功率

解:

$$\begin{aligned}
\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\}\\
&= \frac{1}{2}\Re\{-E_x^* H_z\vec{e}_y + E_x^* H_y\vec{e}_z\}\\
&= \frac{1}{2}\Re\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\cdot H_0\cos\left[\frac{\pi}{a}y\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\cdot\frac{-\mathrm{i}\pi k_z H_0}{a(k^2-k_z^2)}\sin(\frac{\pi}{a}y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\vec{e}_z\right\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi^2\omega\mu_0 k_z H_0^2}{a^2(k^2-k_z^2)^2}\sin^2(\frac{\pi}{a}y)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$\begin{cases}
\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_\mathrm{f}\\
\nabla\cdot\vec{D} = \rho_\mathrm{f}\\
\nabla\cdot\vec{B} = 0
\end{cases}$$

由一般情况下 $\vec{B}$ 的无散性 $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ 可引入矢势 $\vec{A}$，使得:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

于是:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})\\
&= -\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}
\end{aligned}$$

于是:

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

这就是说，$\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场，于是可引入标势 φ，使得:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

于是:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

场量 $\vec{B}, \vec{E}$ 可由矢势 $\vec{A}$ 和 φ 表达为:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数，作变换（势的规范变换）：

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

有:

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) - \frac{\partial (\vec{A} + \nabla \psi)}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

即 $(\vec{A}', \varphi')$ 与 $(\vec{A}, \varphi)$ 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范。**

当势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为**规范不变性。**

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

> 注意是对时间的**一阶**偏导。

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 $\vec{E}, \vec{B}$ 的方程，可化为关于势 $\vec{A}, \varphi$ 的方程。

真空中:

$$\begin{cases} \nabla \times (\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}) = \dfrac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程（真空中）：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

其中，$\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$

库仑规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

推迟势

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程（真空中）

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

的解有推迟势的形式：

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

它反映了电磁作用具有一定的传播速度。源点 $\vec{x}'$ 对场点 $\vec{x}$ 的电磁作用需要的传播时间为 $\dfrac{r}{c} = \dfrac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$

当 ρ 和 $\vec{J}$ 给定后，就可以算出势 $\vec{A}, \varphi$，再由

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},\ \ \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

求电磁场。

计算辐射场的一般公式

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'}$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流，即：

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中，$\vec{J}(\vec{x}')$ 是 $t=0$ 时的电流密度分布。

交变电流情况下：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中，$k=\omega/c$

令：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中，$\vec{A}(\vec{x})$ 是 $t=0$ 时刻的矢势分布。

其中，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 是推迟作用因子，其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形，电荷守恒定律为：

$$\mathrm{i}\omega\rho=\nabla\cdot\vec{J}$$

若知道了矢势 $\vec{A}$，则可求磁场 $\vec{B}$：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

知道了 $\vec{B}$，可根据麦克斯韦方程组求电场 $\vec{E}$：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\vec{E}$$

$$\vec{E}=\frac{\mathrm{i}c}{k}\nabla\times\vec{B}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l，波长 λ，电荷到场点的距离 r

小区域：

$$l\ll\lambda,\ \ l\ll r$$

近区：$r\ll\lambda$

感应区：$r\sim\lambda$

远区（辐射区）：$r\gg\lambda$

$$r\approx R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'$$

矢势精确表达式：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势近似表达式：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x})&\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}k(R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}\mathrm{d}V'\\&\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\cdot\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}}{R}\mathrm{d}V'\\&\approx\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')(1-\mathrm{i}k\vec{e}_R\cdot\vec{x}'+\cdots)\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i，速度为 v_i 的粒子，则：

$$\vec{J}=\sum_i n_iq_i\vec{v}_i$$

> $\vec{J}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

$$\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=\sum q\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\sum q\vec{v}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum q\vec{x}\\&=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\\&\equiv\dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

其中，$\vec{p}$ 是电荷系统的电偶极矩

$$\boxed{\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=\dot{\vec{p}}}$$

于是：

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\dot{\vec{p}}}$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果：

$$\nabla\longleftrightarrow\mathrm{i}k\vec{e}_R$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow-\mathrm{i}\omega$$

辐射场：

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\
&= \frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi R}e^{\mathrm{i}kR}\vec{e}_R\times\dot{\vec{p}} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\mathrm{i}c}{k}\nabla\times\vec{B} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{B} = \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R}
$$

$$
\boxed{\vec{E} = \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R}
$$

取球坐标原点在电荷分布区内，并以 $\vec{p}$ 方向为极轴，

$$
\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{p}e^{\mathrm{i}kR}\sin\theta\vec{e}_\phi
$$

$$
\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\ddot{p}e^{\mathrm{i}kR}\sin\theta\vec{e}_\theta
$$

辐射能流 角分布 辐射功率

电偶极辐射平均能流密度：

$$
\begin{aligned}
\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\} \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

辐射功率：

$$
\begin{aligned}
P &= \oint|\bar{\vec{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}
\end{aligned}
$$

磁偶极辐射

$$
\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\vec{e}_R\times\vec{m}
$$

其中，$\vec{m}$ 是体系的磁矩。

辐射区电磁场为：

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\
&= \mathrm{i}k\vec{e}_R\times\vec{A} \\
&= \frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

$$
\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{e}_R = -\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{e}_R)
$$

对比电偶极辐射场和磁偶极辐射场可发现，由电偶极辐射场作以下代换：

$$\vec{p} \to \frac{\vec{m}}{c}$$

$$\vec{E} \to c\vec{B}$$

$$c\vec{B} \to -\vec{E}$$

就能得到磁偶极辐射场。

磁偶极辐射的平均能流密度：

$$\bar{\vec{S}} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \vec{e}_R$$

其中，$|\vec{m}|$ 是磁矩的**振幅**。

磁偶极辐射总辐射功率：

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

第5章例题

例1

一电流线圈半径为 a，激发电流振幅为 I_0，角频率为 ω，求辐射功率。

解：

电流线圈磁矩的**振幅**为：

$$m = I_0 \pi a^2$$

于是磁偶极辐射总辐射功率为：

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3} \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 (I_0 \pi a^2)^2}{12\pi c^3} \\ &= \frac{\pi^2 \mu_0 \omega^4 I_0^2 a^4}{12\pi c^3} \end{aligned}$$

例2

两个质量、电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

> 思路：要证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生，只要证明电偶极矩和磁偶极矩都为零即可。

解：

取两粒子的碰撞点为原点，则：

$$\vec{x}_1 = -\vec{x}_2$$

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

体系电偶极矩：

$$\vec{p} = q\vec{x}_1 + q\vec{x}_2 = q(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) = \vec{0}$$

于是不会发生电偶极辐射。

体系磁偶极矩：

$$
\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2}(\vec{x}_1 \times q\vec{v}_1 + \vec{x}_2 \times q\vec{v}_2) \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

于是不会发生磁偶极辐射。

例3

半径为 R_0 的均匀永磁体小球，磁化强度为 $\vec{M}_0$，球以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\vec{M}_0$ 的轴旋转，设 $R_0\omega \ll c$，求辐射场和能流。

> 主要是磁偶极辐射。

解:

磁矩振幅:

$$
\vec{m}_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}\vec{M}_0
$$

例4

带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω，求远处的辐射电磁场和能流。

解:

主要是电偶极辐射。

体系电偶极矩:

$$
\begin{aligned}
\vec{p} &= ea\vec{e}_r \\
&= ea(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)
\end{aligned}
$$

复数形式为:

$$
\vec{p} = ea(\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}
$$

第6章 狭义相对论

狭义相对论基本原理

（1）相对性原理：所有惯性参考系是等价的。物理规律对于所有惯性参考系都可以表示为相同的形式。

（2）光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c，且与光源运动无关。

间隔不变性

用四个坐标 (x,y,z,t) 表示一个事件

从 $(\vec{x},t)$ 到 $(\vec{x}',t)$ 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1,y_1,,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x_1',y_1',,z_1',t_1'),(x_2',y_2',z_2',t_2')$

间隔 s^2,s'^2 定义为:

$$
s^2 \equiv c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2
$$

$$
s'^2 \equiv c^2(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2-(y_2'-y_1')^2-(z_2'-z_1')^2
$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性，即：

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

$s^2 = 0$，类光间隔

$s^2 > 0$，类时间隔

$s^2 < 0$，类空间隔

洛伦兹变换

同一事件在两个不同参考系中观察的时空坐标关系为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

运动尺度的缩短

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

其中，l_0 是静止长度

推导：

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

其中，$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1, t_1)，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_1, t'_1)，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \dfrac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$x_1 = a + vt_1$$

右边的质点记为 2，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2, t_2)，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_2, t'_2)，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \dfrac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 2 在 Σ 中运动的速度也是 v，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$x_2 = b + vt_2$$

尺子在 Σ 系中的长度，记为 l_Σ，定义为：

$$\begin{aligned} l_\Sigma &\equiv (x_2 - x_1)\Big|_{t_1=t_2} \\ &= [(b+vt_2) - (a+vt_1)]\Big|_{t_1=t_2} \\ &= b - a \end{aligned}$$

尺子在 Σ' 系中的长度（也就是静止长度），记为 $l_{\Sigma'}$，定义为：

$$\begin{aligned} l_{\Sigma'} &\equiv (x_2' - x_1')\Big|_{t_1'=t_2'} \\ &= \Big[\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\ &= \gamma\Big[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\ &= \gamma\Big[[(b+vt_2) - (a+vt_1) - v(t_2 - t_1)]\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\ &= \gamma(b-a) \end{aligned}$$

可以看到，

$$l_\Sigma = \frac{1}{\gamma} l_{\Sigma'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_{\Sigma'} < l_{\Sigma'}$$

洛伦兹变换四维形式

$x_4 \equiv \mathrm{i}ct$，间隔不变式可写为：

$$x_\mu' x_\mu' = x_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

一般洛伦兹变换是满足间隔不变性的四维线性变换：

$$x_\mu' = a_{\mu\nu} x_\nu$$

沿 x 轴方向的特殊洛伦兹变换的变换矩阵：

$$a = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

其中，

$$\beta = \frac{v}{c},\ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

四维协变量

在洛伦兹变换下不变的物理量称为洛伦兹标量或不变量。

间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

和**固有时**

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s$$

都是洛伦兹标量。

四维速度矢量：

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

四维空间矢量：

$$x_\mu = (\vec{x}, \mathrm{i}ct)$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量：

$$x_\mu = (\vec{x}, \mathrm{i}ct)$$

电流密度第四分量：

$$J_4 = \mathrm{i}c\rho$$

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu$$

$$J_\mu = (\vec{J}, \mathrm{i}c\rho)$$

电荷守恒定律四维形式：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

四维势矢量

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$\square$ 是洛伦兹标量算符

洛伦兹规范下，势满足的方程：

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \Longrightarrow \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \square \varphi = -\mu_0 c^2 \rho$$

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$$

合写为：

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

洛伦兹条件的四维形式：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0}$$

电磁场张量

反对称四维张量：

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

电磁场构成一个四维张量：

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0$$

麦克斯韦方程组协变形式：

$$\boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\mu_0 J_\mu}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0}$$

由张量变换关系

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$$

以及沿 x 轴特殊洛伦兹变换

$$\begin{cases}x'=\gamma(x-vt)\\ y'=y\\ z'=z\\ t'=\gamma\left(t'-vx/c^2\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'_1=\gamma(x_1+\mathrm{i}vx_4/c)\\ x'_2=x_2\\ x'_3=x_3\\ x'_4=\gamma\left(x_4-\mathrm{i}vx_1/c\right)\end{cases}$$

变换矩阵

$$a=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\frac{v\gamma}{c}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\frac{v\gamma}{c} & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}$$

电磁场张量

$$
F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{bmatrix}
$$

可以导出电磁场的变换关系：

$$
F'_{14}=a_{1\alpha}a_{4\beta}F_{\alpha\beta}=a_{11}a_{44}F_{14}+a_{14}a_{41}F_{41}=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})\,F_{14}=\left(\gamma^2-v^2\gamma^2/c^2\right)F_{14}=F_{14}
$$

$$
F'_{23}=a_{2\alpha}a_{3\beta}F_{\alpha\beta}=a_{22}a_{33}F_{23}=F_{23}
$$

上面两式等价于：

$$
E'_1=E_1,\quad B'_1=B_1
$$

类似可得：

$$
E'_2=\gamma(E_2-vB_3),\quad B'_2=\gamma\left(B_2+\frac{v}{c^2}E_3\right)
$$

$$
E'_3=\gamma(E_3+vB_2),\quad B'_3=\gamma\left(B_3-\frac{v}{c^2}E_2\right)
$$

或写为：

$$
E'_{\parallel}=E_{\parallel},\quad B'_{\parallel}=B_{\parallel}
$$

$$
E'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)_{\perp},\quad B'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)_{\perp},
$$

若电场和磁场在 Σ 系都不为零，则可找到一个 Σ' 惯性系使得电场或磁场在 Σ' 为零。但不可能通过洛伦兹变换使得二者同时为零。

可以证明，$\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是洛伦兹不变量，即 $\vec{E}'\cdot\vec{B}'=\vec{E}\cdot\vec{B}$，因此不可能通过洛伦兹变换使电场和磁场的夹角从锐角变为钝角。