3-8

假设无质量费米子的波函数为 $\varphi=(1-\gamma_5)\psi$,证明:无质量费米子的自旋方向永远沿运动方向;无质量反费米子的自旋方向永远与运动方向相反。

m=0 时 Dirac 方程的哈密顿量为

$$H = \mathrm{i}\beta \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \right)$$

利用

$$\sigma_k = \mathrm{i}eta\gamma_5\gamma_k, \quad k=1,2,3 \Longrightarrow ec{\sigma} = \mathrm{i}eta\gamma_5ec{\gamma}$$

且m=0时

$$E^2=ec p^2+m^2=ec p^2\Longrightarrow |ec p|=E$$

有

$$egin{aligned} H &= \mathrm{i}eta \left(ec{\gamma} \cdot ec{p}
ight) \ &= \mathrm{i}eta \gamma_5 \gamma_5 \left(ec{\gamma} \cdot E ec{n}
ight) \ &= -\mathrm{i}eta \gamma_5 ec{\gamma} \cdot \left(E ec{n}
ight) \gamma_5 \ &= -E \left(ec{\sigma} \cdot ec{n}
ight) \gamma_5 \end{aligned}$$

哈密顿量作用于 φ 上:

$$egin{aligned} Harphi &= -E\left(ec{\sigma}\cdotec{n}
ight)\gamma_{5}\left(1-\gamma_{5}
ight)\psi \ &= -E\left(ec{\sigma}\cdotec{n}
ight)\left(\gamma_{5}-1
ight)\psi \ &= E\left(ec{\sigma}\cdotec{n}
ight)\left(1-\gamma_{5}
ight)\psi \ &= E\left(ec{\sigma}\cdotec{n}
ight)arphi \end{aligned}$$

由于

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \varphi = \pm \varphi$$

因此, 当 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \varphi = +\varphi$ 时,

$$H\varphi = +E\varphi$$

当 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \varphi = -\varphi$ 时,

$$H\varphi = -E\varphi$$

故 φ 仅有两个状态即两个分量。且对 +E 状态,其自旋永远沿 \vec{p} 方向;对 -E 状态,其自旋永远与 \vec{p} 方向相反。