1

(A) 柯西-黎曼条件:

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)**

(B) 留数定理:

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即:

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}f(z_j)$$

(C) 泰勒级数和洛朗级数的区别:

泰勒级数:

设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，展开系数为:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

洛朗级数:

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1,R_2 的两个圆周 C_1,C_2 所包围的环形区域，$R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线

区别:

泰勒级数要求 $f(z)$ 在整个圆周 C 内解析，而洛朗级数只要求在圆周 C_1, C_2 间的环形区域解析;

洛朗级数的幂项的次数从 $-\infty$ 到 ∞，而泰勒级数的幂项次数从 0 到 ∞;

泰勒级数的系数可以由求导数求得，也可以由回路积分求得，但洛朗级数的系数只能由回路积分求得。

(D) 傅里叶变换:

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，则:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \equiv C(k)$$

其中，$\mathscr{F}\{f(x)\}(k) \equiv C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换

(E) 拉普拉斯变换:

对于定义在实变数 $t \in [0, +\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) \equiv F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t$$

其中，$p = s + \mathrm{i}\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$

(F) 自然边界条件:

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即:

$$|u| < +\infty$$

2

> 已知解析函数的实部 $u = x^3 - 3xy^2$，求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y \tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$，则

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C$$

于是：

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+C)\end{aligned}$$

方法2（微分法，类似于热统里导出熵的统计表达式）

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v&=6xy\mathrm{d}x+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=3y\mathrm{d}\left(x^2\right)+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=3[\mathrm{d}\left(x^2y\right)-x^2\mathrm{d}y]+\left(3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}y\\&=3\mathrm{d}\left(x^2y\right)-3y^2\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\left(3x^2y\right)-\mathrm{d}(y^3)\\&=\mathrm{d}\left(3x^2y-y^3\right)\end{aligned}$$

于是：

$$v=3x^2y-y^3+C$$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u + \mathrm{i} v \\
&= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}\left(3x^2y - y^3 + C\right)
\end{aligned}
$$

3

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 分别在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

$f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z - 0| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}
$$

$f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z - 1| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
\end{aligned}
$$

4

> 计算回路积分 $I=\oint\limits_{l^+}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$ ，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i},z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2}\\
&=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)\\
&=\lim_{z\to1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2}\\
&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
I&=\oint\limits_{l}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}\\
&=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}f(z_1)+\mathrm{Res}f(z_2)\right]\\
&=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\\
&=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}$$

5

> 计算定积分：$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\Longrightarrow\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$，$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}\right)$

设 C 是复平面上的单位圆，

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

令 $f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$，$f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1=2-\mathrm{i},z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$，只有 z_2 在单位圆 C 内。

由于 z_1,z_2 是 $(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}=0$ 的两根，于是 $f(z)$ 可表达为：

$$
f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}
$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_2)f(z)\\
&=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z_2-z_1)}\\
&=\frac{1}{4\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

于是由留数定理：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_2)\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I &= 2 \oint\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i}} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

6

> 用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：
>
> $$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设 $i(t) \risingdotseq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \risingdotseq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0, \quad \text{or} \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

对方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = +Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$：

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\
&= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L}\right)
\end{aligned}
$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p-\alpha} \fallingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \fallingdotseq 1, \quad \frac{1}{p + R/L} \fallingdotseq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p)=\dfrac{E}{R}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+R/L}\right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

7

> 在半径 $r=r_0$ 的球内求解 $\nabla^2 u=0$，使满足边界条件 $u\Big|_{r=r_0}=\sin^2\theta$

边界条件与方位角 φ 无关，因此所求应也与 φ 无关：

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

由自然边界条件，球心 $r=0$ 处场量不应发散：

$$|u(r,\theta)|\Big|_{r=0}<+\infty$$

因此 $-r^{(l+1)}$ 项必须舍弃，即、：

$$B_l=0,\ \ l=0,1,2,\cdots$$

于是：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u\Big|_{r=r_0}=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$，注意到：

$$\begin{cases}\mathrm{P}_0(\cos\theta)=1\\ \mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta\\ \mathrm{P}_2(\cos\theta)=\dfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\end{cases}\Longrightarrow 1-\cos^2\theta=\frac{2}{3}\left[\mathrm{P}_0(\cos\theta)-\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right]$$

因此：

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r_0^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{2}{3}\left[\mathrm{P}_0(\cos\theta)-\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right]$$

把边界条件整理成以 $\cos\theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的线性叠加的形式：

$$\left(A_0-\frac{2}{3}\right)\mathrm{P}_0(\cos\theta)+A_1r_0\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\left(A_2r_0^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\sum_{l=3}^{\infty}A_lr_0^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$A_0-\frac{2}{3}=0,A_1=0,A_2r_0^2+\frac{2}{3}=0,A_3=A_4=\cdots=0$$

解得：

$$A_0=\frac{2}{3},A_1=0,A_2=-\frac{2}{3r_0^2},A_3=A_4=\cdots=0$$

于是：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=\frac{2}{3}-\frac{2}{3r_0^2}r^2\mathrm{P}_2(\cos\theta)\\&=\frac{2}{3}-\frac{r^2}{3r_0^2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\end{aligned}$$

8

> 求定解问题：
>
> $$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\u_x\Big|_{x=0}=0\\u_x\Big|_{x=l}=0\\u\Big|_{t=0}=\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)\\u_t\Big|_{t=0}=0\end{cases}$$

设：

$$u(x,t)=U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 可得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2\frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t)+\omega^2T(t)=0 \Longrightarrow T(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$T'(t)=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$$

$$u_t\bigg|_{t=0}=0 \Longrightarrow T'(t)\bigg|_{t=0}=0 \Longrightarrow B=0$$

因此:

$$T(t)=A\cos\omega t$$

令:

$$k\equiv\frac{\omega}{a},\ \ k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x)+k^2U(x)=0 \Longrightarrow U(x)=C\cos kx+D\sin kx$$

$$U'(x)=-kC\sin kx+kD\cos kx$$

$$u_x\bigg|_{x=0}=0 \Longrightarrow U'(x)\bigg|_{x=0}=0 \Longrightarrow D=0$$

因此:

$$U(x)=C\cos kx,\ \ U'(x)=-kC\sin kx$$

$$u_x\bigg|_{x=l}=0 \Longrightarrow U'(x)\bigg|_{x=l}=0 \Longrightarrow -kC\sin kl=0$$

因此，k 的本征值 k_n 为:

$$k_n=\frac{n\pi}{l},\ \ n=,1,2,\cdots$$

> $n=0$ 是平庸解，不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为:

$$U_n(x)=\cos k_nx=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \ n=1,2,\cdots$$

由 $k\equiv\omega/a$，得 ω 的本征值 ω_n 为:

$$\omega_n=ak_n=\frac{n\pi a}{l},\ \ n=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为:

$$T_n(t)=\cos\omega_n t=\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

本征解 $u_n(x,t)$ 为:

$$u_n(x,t)=U_n(t)T_n(t)=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

定解问题的通解 $u(x,t)$ 为:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

最后结合初始条件

$$u\Big|_{t=0}=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

得到:

$$E_1=1,E_2=E_3=\cdots=0$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x,t)=\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)$$

9

> 半径为 a 的导体球接地，在距球心为 b 的地方放置一点电荷，$b>a$，电荷量为 q，求导体球外的电势分布。

选取 z 轴使得点电荷的位矢为 $b\vec{\mathrm{e}}_z$，则球外电势 u 具有 z 轴对称性，即 $u=u(r,\theta)$

点电荷会在接地导体球表面激发出感应电荷。根据电势叠加原理，导体球外的电势 u 是感应电荷单独存在时产生的电势 u_r 与 点电荷单独存在时的电势 u_q 之和:

$$u=u_r+u_q$$

考虑点电荷单独存在时在球外产生的电势 u_q，由余弦定理，场点 $\vec{r}$ 到点电荷 q 的距离 r' 满足:

$$r'=\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}$$

点电荷 q 在 $\vec{r}$ 处产生的电势 u_q 满足:

$$
\begin{aligned}
u_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{q}{\sqrt{1+(r/b)^2-2(r/b)\cos\theta}},\quad r>a
\end{aligned}
$$

根据勒让德多项式的母函数的相关知识，

$$
\frac{1}{\sqrt{1+(r/b)^2-2(r/b)\cos\theta}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l & ,\quad r/b<1,\quad r<b \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & ,\quad r/b>1,\quad r>b \end{cases}
$$

因此点电荷产生的电势分布 u_q 可展为：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{1}{\sqrt{1+(r/b)^2-2(r/b)\cos\theta}} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l & ,\quad a<r<b \\ \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & ,\quad r>b \end{cases}
\end{aligned}
}
$$

再考虑感应电荷单独存在时在球外产生的电势 u_r，此时球外没有电荷，因此球外的电势分布 u_r 满足拉普拉斯方程：

$$
\nabla^2 u_r(r,\theta)=0,\quad r>a
$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$
u_r(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)
$$

在无穷远处，电势 u_r 应趋于零：

$$
u_r\Big|_{r\to+\infty}=0
$$

可得：

$$
A_l=0,\quad l=0,1,2,\cdots
$$

因此：

$$u_r(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑点电荷和感应电荷产生的总电势 $u(r,\theta)$，形式上可写为：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u_q(r,\theta)+u_r(r,\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l+\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & ,\quad a<r<b\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)}+\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & ,\quad r>b\end{cases}\end{aligned}$$

导体球接地给出边界条件：

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$$

即：

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{a}{b}\right)^l+\sum_{l=0}^{\infty}B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

整理成以 $\cos\theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的线性叠加的形式：

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}}+B_l a^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得：

$$\frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}}+B_l a^{-(l+1)}=0,\quad l=0,1,2,\cdots$$

解得：

$$B_l=-\frac{qa^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}},\quad l=0,1,2,\cdots$$

因此：

$$
\begin{aligned}
u_r(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

注意到，$r > a, b > a$，于是有：

$$
\frac{br}{a^2} > 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+(br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)}, \quad \frac{br}{a^2} > 1
$$

> ps：注意不到也没事，只不过最终答案可能看起来复杂点。

因此，感应电荷在导体球外产生的电势 $u_r(r,\theta)$ 实际上可写为：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u_r(r,\theta) &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1+(br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}}, \quad r > a
\end{aligned}
}
$$

最终得到导体球外的电势分布 $u(r,\theta)$：

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= u_q(r,\theta) + u_r(r,\theta) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1+(br/a^2)^2 - 2(br/a^2)\cos\theta}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-aq/b}{\sqrt{(a^2/b)^2 + r^2 - 2(a^2/b)r\cos\theta}}
\end{aligned}
$$

可以看到，感应电荷在导体球外产生的电势与一个处于 z 轴正半轴距球心 $b' = a^2/b$ 处电荷量为 $Q' = -aq/b$ 的点电荷相同。

10

> 求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho,\varphi,t)$ 是 t 时刻 ρ,φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho,\varphi,t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho,\varphi,t)-a^2\nabla^2_{(2)}u(\rho,\varphi,t)=0$$

其中，$\nabla^2_{(2)}$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla^2_{(2)}\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho,\varphi,t)=U(\rho,\varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho,\varphi)T''(t)-a^2T(t)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=0$$

上式两边同时除以 $U(\rho,\varphi)T(t)$，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$$

注意到，$\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关，而 $\dfrac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$ 只与 ρ,φ 有关，二者相等，因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$ ：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2,\quad\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=-\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\dfrac{U(\rho,\varphi)}{a^2}$ 并移项，得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\omega^2}{a^2}U(\rho,\varphi)=0$$

令：

$$k\equiv\frac{\omega}{a},\quad k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$\left|U(\rho,\varphi)\right|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho,\varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0\\ U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\\ \left|U(\rho,\varphi)\right|\Big|_{\rho=0}<+\infty\\ U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\end{cases}$$

设 $U(\rho,\varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2R(\rho)\Phi(\varphi)=0$$

上式等号两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]=-m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\Longrightarrow\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

$$
\begin{cases}
\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0\\
\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)
\end{cases}
$$

从

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

可以解得:

$$\Phi(\varphi)=A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

可得:

$$m=0,1,2,\cdots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足:

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]=-m^2$$

可以整理成:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

令 $x=k\rho,\rho=x/k,R(\rho)\Big|_{\rho=x/k}=R(x/k)\equiv y(x)$，则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$$

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \dfrac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \\ y(x) \equiv R(\rho)\Big|_{\rho = x/k} = R(x/k),\ \ R(\rho) = y(x)\Big|_{x = k\rho} = y(k\rho) \\ R(\rho)\Big|_{\rho = b} = 0 \\ |R(\rho)|\Big|_{\rho = 0} < +\infty \end{cases}$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

其通解为：

$$y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x) + D_m \mathrm{N}_m(x)$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)|\Big|_{\rho=0} < +\infty$，可得：

$$D_m = 0$$

因此：

$$y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件：

$$y^{(m)}(x)\Big|_{x=k\rho} = C_m \mathrm{J}_m(x)\Big|_{x=k\rho}$$

结合 $x = k\rho, R(\rho) = y(x)\Big|_{x=k\rho} = y(k\rho)$ 可得：

$$R^{(m)}(\rho) = C_m \mathrm{J}_m(k\rho)$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$，即：

$$\mathrm{J}_m\left(x_n^{(m)}\right) = 0,\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n =, 1, 2, \cdots$$

结合边界条件 $R(\rho)\Big|_{\rho=b} = 0$，即：

$$C_m \mathrm{J}_m\left(kb\right) = 0$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为：

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(k_n^{(m)}\rho\right) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

再根据 $k \equiv \omega/a$，得到 ω 的本征值，即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$\omega_n^{(m)} = ak_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

综上所述，边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$\boxed{\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中，$x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。