

矢量分析

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \varepsilon_{ijk} a_i (\vec{b} \times \vec{c})_j \vec{e}_k \\&= \varepsilon_{ijk} a_i \varepsilon_{lmj} b_l c_m \vec{e}_k \\&= \varepsilon_{jik} \varepsilon_{jml} a_i b_l c_m \vec{e}_k \\&= (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) a_i b_l c_m \vec{e}_k \\&= a_m b_k c_m \vec{e}_k - a_l b_l c_k \vec{e}_k \\(\text{若 } \vec{b}, \vec{c} \neq \nabla) &= a_m c_m b_k \vec{e}_k - a_l b_l c_k \vec{e}_k \\&= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}\end{aligned}$$

特别地，若 $\vec{a} = \nabla$ ，有：

注意， $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ 只有在 $\vec{b}, \vec{c} \neq \nabla$ 时才成立。

例：求证： $\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A}$

证明：

$$\begin{aligned}\nabla &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \nabla &= \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \\&= \left(\frac{d(1/r^3)}{dr} \nabla r \right) \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \\&= -\frac{3}{r^4} \vec{e}_r \cdot \vec{r} + \frac{3}{r^3} \\&= 0, \quad (r \neq 0)\end{aligned}$$

电磁现象的普遍规律

电荷和磁场

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \vec{F} 为：

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

其中 \vec{r} 是 Q 到 Q' 的矢径， ϵ_0 是真空电容率（真空介电常量）

电场

电场，记为 \vec{E} ，定义为单位检验电荷在场中所受的力：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中， \vec{F} 是检验电荷 Q 在场中所受的力。

静止点电荷激发的电场

一个静止点电荷 Q 所激发的电场强度为：

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

电荷连续分布情况下的电场

设电荷连续分布于区域 V 内， \vec{x}' 处体积元 dV' 所含电荷：

$$dQ' = \rho(\vec{x}')dV'$$

用 \vec{r} 表示点源到场点的矢径，则场点 \vec{x} 处的电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV'$$

高斯定理

通过闭合曲面 S 的电场强度通量：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

其中， Q 是闭合曲面 S 内的总电荷（包括自由电荷和极化电荷）

证明1:

考虑闭合曲面内的一点电荷 q ，其产生的电场记为 \vec{E}

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_S E \cos \theta dS \\ &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos \theta dS}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

若电荷在空间中连续分布，则高斯定理的形式为：

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

证明2:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_{\partial V} \left[\int_{V_\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}') \vec{r}}{r^3} dV' \right] \cdot d\vec{S} \\ &= \end{aligned}$$

上面两种形式都是积分形式的高斯定理

数学上有散度定理：

$$\oint_{\partial \Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

于是：

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV$$

代入电荷连续分布的积分形式高斯定理，得：

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

当积分区域 V 的体积趋于无穷小时，

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = (\nabla \cdot \vec{E}) dV$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$$

于是得到微分形式的高斯定理：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

其中， ρ 是总电荷密度

静电场的旋度

考虑一个点电荷 q 激发的电场 \vec{E} 沿任一回路 L 的回路积分：

$$\begin{aligned} \oint_{L^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \oint_{L^+} E \cos \theta dl \\ &= \oint_{L^+} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos \theta dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos \theta dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} dr \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{L^+} d\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

斯托克斯公式：

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

其中， ∂S 的正方向和 S 的正方向满足右手法则

于是：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

而 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ，于是：

$$\oint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

当曲面 S 的面积趋于 0，此时的曲面 S 是一个面元 $d\vec{S}$ ，有：

$$\oint_{S^+} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

于是得到：

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$$

上式可以表述为：静电场是无旋的。

电流和磁场

电流密度

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

通过任意曲面 S 的总电流 I 为：

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ ，电荷守恒定律：

$$\Delta t \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\Delta \int_V \rho dV$$

两边同时除以 Δt ：

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} &= -\frac{\Delta \int_V \rho dV}{\Delta t} \\ &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \\ &= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \end{aligned}$$

即：

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

这就是电荷守恒定律的积分形式

散度定理给出：

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) dV$$

代入电荷守恒定律的积分形式，得：

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0$$

当区域 V 的体积趋于 0，得到电荷守恒定律的微分形式（也称为电流连续性方程）：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

特别地，在恒定电流的情况下，一切物理量不随时间改变，于是 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，结合电流连续性方程得到：

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

上式表示恒定电流的连续性。

毕奥-萨伐尔定律

实验指出，一个电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中所受的力可以表示为：

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

其中， \vec{B} 称为磁感应强度

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出：设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 \vec{x}' 处的电流密度， \vec{r} 为源点 \vec{x}' 到场点 \vec{x} 的矢径，则场点 \vec{x} 的磁感应强度为：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

其中， μ_0 是真空磁导率，积分遍及电流分布区域。

特别地，若电流集中于细导线上，用 $d\vec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{x}') dV' &= \vec{J}(\vec{x}') dS_n dl \\ &= J(\vec{x}') dS_n d\vec{l} \end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{J}(\vec{x}') dV'] \times \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{x}') dS_n (\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \int_S J(\vec{x}') S_n \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{I \vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}}$$

磁场的环量和旋度

安培环路定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

其中， ∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则

或者：

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

利用旋度定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

其中，面元 $d\vec{S}$ 的取向与环路 ∂S 的绕行方向满足右手法则

将上式代入安培环路定理，得：

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

当曲面的 S 面积趋于 0，得到：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

磁场的散度

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

\vec{B} 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

磁场旋度和散度公式的证明

由毕奥-萨伐尔定律，有：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right) dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}(\vec{x}') dV'\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A}\varphi) &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (\vec{A}\varphi)_j \vec{e}_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi \vec{e}_k \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \varphi \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} [\varphi \partial_i A_j + A_j \partial_i \varphi] \\ &= \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \varphi \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i \varphi \\ &= \varphi \cdot \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} A_j (\nabla \varphi)_i \\ &= \varphi \cdot \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} (\nabla \varphi)_i A_j \\ &= \varphi (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \varphi) \times \vec{A}\end{aligned}$$

令 $\vec{A} = \vec{J}(\vec{x}')$, $\varphi = \frac{1}{r}$, 得：

$$\nabla \times \left(\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} (\nabla \times \vec{J}(\vec{x}')) + \left(\nabla \left(\frac{1}{r}\right)\right) \times \vec{J}(\vec{x}')$$

注意到， ∇ 与 \vec{x} 有关，而与 \vec{x}' 无关，即 $\nabla \times \vec{J}(\vec{x}') = \vec{0}$ ，于是：

$$\nabla \times \left(\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r}\right) = \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}(\vec{x}')$$

将上式代入毕奥-萨伐尔定律，接着写：

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\nabla \frac{1}{r}) \times \vec{J}(\vec{x}') dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times (\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r}) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV' \\
&\equiv \nabla \times \vec{A}
\end{aligned}$$

其中，

$$\vec{A} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV'$$

于是：

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

其中用到了下面的结论：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_k (\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \partial_k \varepsilon_{ijk} \partial_i A_j \\
&= \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_i A_j \\
&= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_k A_j \\
&= -\varepsilon_{kji} \partial_i \partial_k A_j \\
&= -\varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_i A_j
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_i A_j = -\varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_i A_j \implies \varepsilon_{ijk} \partial_k \partial_i A_j = 0 \implies \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

再计算 \vec{B} 的旋度

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
\end{aligned}$$

先计算 $\nabla \cdot \vec{A}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV' \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} \right] dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla \frac{1}{r} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot (-\nabla' \frac{1}{r}) dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\nabla' \cdot \left(\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') \right] dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left[\vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{r} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') dV'
\end{aligned}$$

右边第一项可转化为面积分，积分区域 V 包含了所有电流，没有电流通过 V 的边界，因此这面积分为零；右边第二项，由恒定电流连续性有 $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{x}') = 0$ ，这项也为零，于是：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

再计算 $\nabla^2 \vec{A}$ ：

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{A} &= \nabla^2 \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV' \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla^2 \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{r} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{r}) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} dV'
\end{aligned}$$

最后

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

于是：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

麦克斯韦方程组

电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

感应电场是有旋场。

位移电流

之前给出了电流激发磁场的规律式：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

两边同时取散度，并注意到任意矢量场的旋度的散度为零，于是得到：

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

然而，电荷守恒定律给出：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

即：

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

电荷守恒定律告诉我们，在非恒定情况下，电流密度的散度不为零。可见，在非恒定情况下， $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 与电荷守恒定律矛盾。

电荷守恒定律是更基本的规律，出现矛盾只可能是公式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 不适用于非恒定情况，需要改进。

注意到，在非恒定情况下，一样有：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

结合电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

消去 ρ 得：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) &= 0 \\ \vec{J}_D &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

真空中麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

洛伦兹力公式

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

介质的电磁性质

有外场时，介质中的带电粒子受场的作用，正负电荷发生相对位移，有极分子的取向以及分子电流的取向也呈现一定的规则性，这就是介质的极化和磁化。由于介质的极化和磁化，介质的内部及表面就出现宏观的电荷分布，这些电荷、电流称为束缚电荷和磁化电流。

介质的极化

电极化强度，记为 \vec{P} ，用于描述宏观电偶极矩分布，定义为：

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0^+} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

其中， \vec{p}_i 表示 ΔV 内第 i 个分子的电偶极矩，求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

用简化模型描述介质中的分子。设每个分子由相距为 \vec{l} 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成，则分子电偶极矩为 $\vec{p} = q\vec{l}$ 。设单位体积分子数为 n ，则穿出 $d\vec{S}$ 的正电荷为：

$$qn\vec{l} \cdot d\vec{S} = n\vec{p} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

V 内通过截面 ∂V 穿出的正电荷为：

$$\oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

由电荷守恒， V 内净余的负电荷为：

$$- \oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

用 ρ_P 表示束缚电荷密度，有：

$$\int_V \rho_P dV = - \oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

利用高斯公式，得微分形式：

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

上式适用于**电介质内部**。

对于两电介质的分界面，可以认为束缚电荷分布在交界面上，可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷，用 σ_P 表示束缚电荷面密度，用 $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量，则：

$$\sigma_P dS = - \left[\vec{P}_1 \cdot (-\vec{n}_{1 \rightarrow 2}) dS + \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} dS \right]$$

得到：

$$\sigma_P = -\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

将电荷密度分为自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_P ，介质内部：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f + \rho_P$$

其中， $\rho = \rho_f + \rho_P$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ 消去 ρ_P ，得：

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

引入电位移矢量 \vec{D} ，定义为：

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

这就是介质中的高斯定理（微分形式），其积分形式为：

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_f dV$$

对于一般各向同性线性介质，极化强度 \vec{P} 和 \vec{E} 之间有简单的线性关系：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中， χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质：

$$\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E}\end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ ，介质的电容率 $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$ ，上式可写为：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

介质的磁化

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈，线圈面积矢量记为 \vec{a} ，分子电流的磁矩 \vec{m} 为：

$$\vec{m} = i \vec{a}$$

磁化强度，记为 \vec{M} ，定义为：

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$$

对于介质内部的一个曲面 S ，其边界线为 ∂S ，通过 S 的总磁化电流 I_M 等于边界线 ∂S 串着的分子数目乘每个分子电流 i

单位体积分子数记为 n ，则边界线 ∂S 串着的分子电流数目为：

$$\oint_L n \vec{a} \cdot d\vec{l}$$

总磁化电流为：

$$I_M = i \oint_L n \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_L n \vec{m} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

用 \vec{J}_M 表示磁化电流密度，有：

$$\int_S \vec{J}_M \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

微分形式为：

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

当电场变化，介质的极化强度 \vec{P} 发生变化，这就会产生极化电流。设 ΔV 内每个带电粒子的位矢为 \vec{x}_i ，电荷为 e_i ，则：

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0^+} \frac{\sum_i e_i \vec{x}_i}{\Delta V}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0^+} \frac{\sum_i e_i \vec{v}_i}{\Delta V} = \vec{J}_P$$

\vec{J}_P 称为极化电流密度

考虑自由电流密度 \vec{J}_f 和介质内的诱导电流密度 $\vec{J}_M + \vec{J}_P$ ，麦克斯韦方程应写为：

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{J}_f + \vec{J}_M + \vec{J}_P + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

磁场强度，记为 \vec{H} ，定义为：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

对于各向同性非铁磁物质，

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

χ_M 称为磁化率

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中， $\mu_r \equiv 1 + \chi_M$ 称为相对磁导率， $\mu \equiv \mu_r \mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f dV \\ \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \\ \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

电磁场的边值关系

法向分量的跃变

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_f + \sigma_p}{\epsilon_0}$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

切向分量的跃变

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \\ \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \\ \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

电磁场的能量和能流

场的**能量密度**，记为 w ，定义为单位体积内场的能量，是空间位置 \vec{x} 和时间 t 的函数。

场的**能流密度**，记为 \vec{S} ，其方向定义为能量传输方向，其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 \vec{f} 表示场对电荷作用力密度， \vec{v} 表示电荷运动速度

能量守恒定律要求：

$$-\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \frac{d}{dt} \int_V w dV$$

相应的微分形式为：

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{f} \cdot \vec{v}$$

取 V 为全空间，则：

$$\int_{\infty} \vec{f} \cdot \vec{v} dV = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} w dV$$

上式说明，场对电荷所做的总功率等于场的总能量的减小率，因此场和电荷的总能量守恒。

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{v} &= (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &= \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \\ &= \vec{J} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是：

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

代入能量守恒式，得：

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

对比可得：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

真空：

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

介质中：

$$\delta w = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} + \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$$

介质内（线性介质）电磁场能量密度：

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

电磁能量传输

静电场

静电场的标势及其微分方程

静止情况下，电场与磁场无关：

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

其中， \vec{E} 是静电场， ρ_f 是自由电荷体密度

静电场无旋，且自由电荷是电位移矢量的源

因为静电场无旋，于是可以引入一个标势来描述静电场。

无旋性的积分表达式为：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

设 C_1, C_2 是连结空间中两点 P_1, P_2 的不同路径，则 C_1, C_2 构成闭合回路。

这种情形下，静电场无旋性的积分表达式为：

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

这就是说，在静电场中，把电荷从 P_1 点移动到 P_2 点过程中，静电场对电荷所做的功与路径无关，只与两端点有关。

把**单位**正电荷从 P_1 移动到 P_2 ，静电场所做功为：

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

上式定义为 P_1 与 P_2 点的电势差

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

微分形式：

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由于：

$$d\varphi = (\nabla\varphi) \cdot d\vec{l}$$

比较可得：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

选取无穷远点作为参考点，规定参考点的电势为零，即 $\varphi(\infty) = 0$ ，则：

$$\varphi(P) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

点电荷电势：

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi(P) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

其中， r_i 是点电荷 Q_i 到场点 P 的距离

电荷连续分布：

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在**均匀各向同性线性介质**中， $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \implies \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \implies \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

其中， ρ 是自由电荷密度。

电场边值关系：

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

电场边值关系可化为电势边值关系：

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Big|_{\partial\Omega} &= \varphi_2 \Big|_{\partial\Omega} \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \Big|_{\partial\Omega} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \Big|_{\partial\Omega} &= \sigma_f \end{aligned}$$

其中， $\partial\Omega$ 是两电介质界面； $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \Big|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数， σ_f 是界面上自由电荷面密度。

证明下电势边值关系的第二条：

由

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

可得：

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \\ &= \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) \\ &= \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(\epsilon_1 \nabla \varphi_1 \Big|_{\partial\Omega} - \epsilon_2 \nabla \varphi_2 \Big|_{\partial\Omega} \right) \\ &= \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \Big|_{\partial\Omega} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \Big|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

其中，用到了如下结论：

$$\nabla \psi \cdot \vec{n}_l = \frac{\partial \psi}{\partial n_l}$$

其中， \vec{n}_l 是射线 l 方向上的单位向量， $\frac{\partial \psi}{\partial n_l}$ 是标量场 ψ 在射线 l 方向上的方向导数。

这个结论的证明如下：

由梯度的定义：

$$\nabla \psi \cdot d\vec{r} = d\psi$$

令 $d\vec{r} = \vec{n}_l dr$ ，得：

$$\nabla \psi \cdot \vec{n}_l dr = d\psi$$

两边同时除以 dr 得：

$$\nabla \psi \cdot \vec{n}_l = \frac{\partial \psi}{\partial n_l}$$

静电场的能量

第1章给出，在线性介质中静电场能量为：

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

其中， $w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下， W 可由电势和电荷分布给出：

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho_f \varphi dV$$

注意，不能把 $\frac{1}{2} \rho \varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质，电容率为 ϵ ，则：

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int dV \int dV' \frac{\rho_f(\vec{x}) \rho_f(\vec{x}')}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho_f(\vec{x})$ ，在 V 的边界 ∂V 给定：

$$(1) \text{ 电势 } \varphi \Big|_{\partial V}$$

或

$$(2) \text{ 电势的外法线法向 } \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial V}$$

则 V 内电场唯一确定。

证明：

无导体时的唯一性定理

设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，令：

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

由：

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \quad \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

于是在每个均与区域内有：

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

在两均匀区域界面上有：

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \varphi_j \\ \varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i &= \varepsilon_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j\end{aligned}$$

在整个区域 V 的边界 S 上有：

$$\varphi \Big|_S \equiv \varphi' \Big|_S - \varphi'' \Big|_S = 0$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S \equiv \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \Big|_S = 0$$

考虑第 i 个均匀区域 V_i 的界面 S_i 上的积分：

$$\begin{aligned}\oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} &= \int_{V_i} \nabla \cdot (\varepsilon_i \varphi \nabla \varphi) dV \\ &= \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV + \int_{V_i} \varphi \varepsilon_i \nabla^2 \varphi dV \\ &= \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV\end{aligned}$$

对所有分区域 V_i 求和：

$$\sum_i \oint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} = \sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV$$

上式左边应为零，于是右边也为零：

$$\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

于是：

$$\nabla \varphi = 0$$

于是：

$$\varphi = \text{const}$$

也就是说， φ' 和 φ'' 最多相差一个常数

有导体的时的唯一性定理

拉普拉斯方程 分离变量法

拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 在球坐标中的通解为：

$$\varphi(R, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(a_{nm} R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(c_{nm} R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（ z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ ，此情形下通解为：

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

其中， P_n 为勒让德函数， a_n, b_n 是待定系数，由边界条件确定。

例题

例2.6：电容率为 ε 的介质球置于均匀外电场 \vec{E}_0 中，求电势

例2.7：半径为 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 \vec{E}_0 中，求电势、导体上的电荷面密度

镜像法

若求解电场的区域内有自由电荷，则必须解泊松方程。

若区域内只有一个或几个点电荷，区域边界是导体或介质界面，则可用镜像法求解。

例 2.9：接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q ，求空间中的电场。

解：

设无限大接地平面导体板的位置为 $z = 0$ ，点电荷 Q 处在 $z > 0$ 的区域。

要求解 $z > 0$ 空间的电场，则镜像点电荷只能放在 $z < 0$ 空间，否则会改变泊松方程的源，唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 $(0, 0, a)$ ，其中 $a > 0$

此问题的边界条件为：

$$\varphi \Big|_{z=0} = 0$$

也就是说 $z = 0$ 平面是等相面， $z = 0$ 处电场强度垂直于 $z = 0$ 平面。

考虑在 $(0, 0, -a)$ 处再放置一个带电量 $Q' = -Q$ 的点电荷，则两个对称的点电荷在 $z = 0$ 处产生的场强处处处于 $z = 0$ 平面垂直。

于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是：

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right]$$

例2.10：真空中有一半径为 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求空间各点的电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}} - \frac{R_0 Q/a}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta}} \right)$$

例2.11：真空中有一半径为 R_0 的**不接地**而带电荷 Q_0 的导体球，距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求球外电势，并求电荷 Q 所受的力

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{R_0 Q}{ar'} + \frac{Q_0 + R_0 Q/a}{R} \right)$$

$$4\pi\epsilon_0 F = \frac{QQ_0}{a^2} - \frac{Q^2 R_0^3 (2a^2 - R_0^2)}{a^3 (a^2 - R_0^2)^2}$$

格林函数

格林函数

一个处于 \vec{x}' 点上的**单位**点电荷所激发的电势 $\psi(\vec{x})$ 满足泊松方程：

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

无界空间的格林函数

在 \vec{x}' 上一个单位点电荷在无界空间中激发的电势为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

无界空间的格林函数为：

$$G(\vec{x}', \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

上半空间的格林函数

上半空间的格林函数为：

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

球外空间的格林函数

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{(\frac{RR'}{R_0})^2 + R_0^2 - 2RR' \cos \alpha}} \right]$$

电多极矩

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l ，这种情况下，可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式，由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点，用 R 表示坐标原点到场点的距离，

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

将 $f(\vec{x} - \vec{x}')$ 看作 \vec{x}' 的函数（即可以看作 x'_1, x'_2, x'_3 的函数），在 $\vec{x}' = \vec{0}$ 处展开：

$$\begin{aligned} f(\vec{x} - \vec{x}') &= f(\vec{x} - \vec{x}') \Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \sum_i x'_i \frac{\partial f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial x'_i} \Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x'_i x'_j \frac{\partial^2 f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial x'_i \partial x'_j} \Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \dots \\ &= f(\vec{x}) + \sum_i x'_i \frac{\partial f(\vec{x} - \vec{x}')}{\partial (x_i - x'_i)} \cdot \frac{d(x_i - x'_i)}{dx'_i} \Big|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} \\ &= f(\vec{x}) - \sum_i x'_i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \\ &= f(\vec{x}) - \vec{x}' \cdot \nabla f(\vec{x}) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\vec{x} - \vec{x}') &= f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} f(\vec{x}) + \cdots \\
&= f(\vec{x}) + \vec{x}' \cdot \nabla' f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} (\vec{x}' \cdot \nabla')^2 f(\vec{x}) + \cdots \\
&= f(\vec{x}) - \vec{x}' \cdot \nabla f(\vec{x}) + \frac{1}{2!} (\vec{x}' \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}) + \cdots
\end{aligned}$$

$$\text{令 } f(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] dV'$$

令：

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

$$\vec{p} = \int_V \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\vec{x}') dV'$$

则电势可写为：

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \vec{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} + \cdots \right)
\end{aligned}$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

零级近似 $\varphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷，其激发的电势就是零级近似。

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \vec{p} = \int_V \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

一级近似是电偶极矩 \vec{p} 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \vec{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} \frac{1}{R}, \quad \vec{\mathcal{D}} = \int_V 3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

电四极矩张量 \mathcal{D}_{ij} 是对称张量，它有 6 个分量 $\mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{33}, \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{32}, \mathcal{D}_{31} = \mathcal{D}_{13}$ ，只有 5 个独立分量。

静磁场

矢势及其微分方程

恒定电流产生的磁场：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

由矢量分析，从 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入一个矢量 \vec{A}

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

\vec{A} 称为磁场的矢势。

注意到：

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

由矢势 \vec{A} 可以唯一确定 \vec{B} ，反过来则不行，这是因为：

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A}$$

若 \vec{A} 满足 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，则 $\vec{A} + \nabla\psi$ 也满足 $\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi)$ ，因此由磁场 \vec{B} 无法唯一确定 \vec{A}

\vec{A} 具有任意性，因此可以对它加上一定限制，如：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

称为库仑规范。

矢势微分方程

线性均匀介质：

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

$$\implies \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J}_f$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

结合库仑规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

得到库仑规范下矢势微分方程：

$$\implies \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f}$$

$$(\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为：

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_{fi}$$

库仑规范下的矢势 \vec{A} 是无源有旋场。

矢势的形式解

电势（均匀线性介质中）：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \implies \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{x}') dV'}{r}$$

上式可用格林函数推导。 ∇^2 算子的基本解为： $G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

类似应有：

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f \implies \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')}{r} dV'$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{x}') dV'}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}_f(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f \times \vec{r}}{r^3} dV' \end{aligned}$$

矢势边值关系

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}$$

对于非铁磁性均匀介质，

$$\vec{e}_n \cdot (\nabla \times \vec{A}_2 - \nabla \times \vec{A}_1) = 0$$

$$\vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 \right) = \vec{\alpha}$$

在两介质分界面上（采用库仑规范）

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量：

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

静磁场情况下，可以用矢势和电流表示总能量。

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{H} &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{H} \\ &= \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) + \vec{A} \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

静磁场中，

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV \end{aligned}$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义，且不能把 $\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$ 看作能量密度。

上式中，矢势 \vec{A} 是电流分布 \vec{J} 本身激发的。

若要计算某电流分布 \vec{J} 在给定外磁场中的相互作用能，以 \vec{A}_e 表示外磁场的矢势， \vec{J}_e 表示该外磁场的电流分布，则总电流分布为 $\vec{J} + \vec{J}_e$ ，总矢势为 $\vec{A} + \vec{A}_e$ ，磁场总能量为：

$$W = \frac{1}{2} \int (\vec{J} + \vec{J}_e) \cdot (\vec{A} + \vec{A}_e) dV$$

此式减去 \vec{J} 和 \vec{J}_e 单独存在时的能量后，就得到电流 \vec{J} 在外场中的相互作用能：

$$W_i = \frac{1}{2} \int (\vec{J} \cdot \vec{A}_e + \vec{J}_e \cdot \vec{A}) dV$$

由于

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{r}, \quad \vec{A}_e = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_e(\vec{x}') dV'}{r}$$

两式相等，因此电流 \vec{J} 在外场 \vec{A}_e 中的相互作用能为：

$$W_i = \int_V \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

注意，这时没有 $\frac{1}{2}$ 系数

磁标势

在恒定电流情况下，安培环路定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

在某一局部区域内，若闭合回路 L 没有链环着**自由电流**，则：

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

此时可以引入标势，因为此时：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

能够引入磁标势的条件：区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

因此 \vec{H} 可看作某一标量场的梯度

在 $\vec{J} = \vec{0}$ 的区域内：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ_m ，使得：

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

假想磁荷密度：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

真空中静电场和静磁场的对比

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{f}} + \rho_{\text{p}}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_{\text{p}} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{f}} + \rho_{\text{p}}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_{\text{m}}}{\mu_0}$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

边值关系

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$$

$$\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \frac{\sigma_m}{\mu_0}$$

$$\sigma_m = \mu_0 \vec{n} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)$$

磁多极矩

磁矢势：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\text{d}V'}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] \text{d}V'$$

$$\vec{A}^{(0)} = \vec{0}$$

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \text{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_L \vec{x}' \times d\vec{l}'$$

称为电流线圈的磁矩

对体电流分布，

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') dV'$$

磁偶极矩的场和标势

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

小区域内电流分布在外磁场中的能量

$$W = \int_V \vec{J} \cdot \vec{A}_e dV$$

$$\begin{aligned} W &= I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} \\ &= I \int_S d\vec{S} \\ &= I \Phi_e \end{aligned}$$

$$\vec{B}_e(\vec{x}) = \vec{B}_e(\vec{0}) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(\vec{0}) + \dots$$

$$\begin{aligned} W &\approx I \vec{B}_e(\vec{0}) \cdot \int_S d\vec{S} \\ &= \vec{m} \cdot \vec{B}_e(\vec{0}) \end{aligned}$$

磁矩在外磁场中受力和力矩

$$\vec{F} = -\nabla U = \vec{m} \cdot \nabla \vec{B}_e$$


```
$$
\begin{aligned}
&\vec{F}^{\wedge}
\end{aligned}
$$
```

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_e$$

第4章 电磁波的传播

平面电磁波

一般情况：

$$\left\{\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right.$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质 ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$):

$$\left\{\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right.$$

真空 ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$):

$$\left\{\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right.$$

可以得到：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

令：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

具有上面方程形式的方程称为**波动方程**。

介质情形

线性介质：

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega)$$

介质的色散：

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)$$

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡得波称为时谐电磁波。

时谐电磁波的复数表示：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

对线性均匀介质，有 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，代入无源麦克斯韦方程组，得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \end{cases}$$

用 \vec{E} 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$ ，将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$, $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 代入上面方程组，得场量**空间部分**满足的方程：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} = -i\omega \epsilon \mu \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

上面这组方程是**不独立**的，由第一式可以推出第四式，由第二式可以推出第三式（两边取散度，而任意矢量场旋度的散度为零）

对第一式两边取旋度，并利用公式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$ ，得：

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} = \vec{0}$$

令：

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

则得到时谐电场**空间部分**满足的方程（称为**亥姆霍兹方程**）：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

ps：亥姆霍兹方程的解并不一定满足 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，亥姆霍兹方程的解加上条件 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 才代表电磁波的解。

解出电场的空间部分后，磁场的空间部分可由方程组第一式给出：

$$\vec{B} = \frac{-i}{\omega} \nabla \times \vec{E} = \frac{-i}{k} \sqrt{\mu \epsilon} \nabla \times \vec{E}$$

在一定频率 ω 下，均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \epsilon} \nabla \times \vec{E}$$

或：

$$\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{E} = \frac{i}{k \sqrt{\mu \epsilon}} \nabla \times \vec{B}$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

设电磁波沿 x 轴方向传播，其场强在与 x 轴正交的平面上具有相同的值，即 \vec{E}, \vec{B} 只与 x, t 有关，而与 y, z 无关，这样的电磁波称为**平面电磁波**。

亥姆霍兹方程化为：

$$\frac{d^2}{dx^2}\vec{E}(\vec{x}) + k^2\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

一个解为：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 要求 $\vec{E} \perp \vec{k}$ ，即 \vec{E} 可以在垂直于 \vec{k} 的任意方向上振荡。 \vec{E} 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 \vec{k} 垂直的任意两个相互正交的方向作为 \vec{E} 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}$$

取 \vec{x} 与 \vec{k} 同向，

$$kx - \omega t = \text{const}$$

相速度为：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

介质中平面电磁波相速度：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

真空中电磁波传播速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

散度：

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} \implies \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

计算电场旋度：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}) \\ &= [\nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}] \times \vec{E}_0 \\ &= i\vec{k} \times \vec{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}}$$

于是可以得出磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= -\frac{i}{k} \sqrt{\mu\epsilon} \nabla \times \vec{E} \\ &= -\frac{i}{k} \sqrt{\mu\epsilon} (i\vec{k} \times \vec{E}) \\ &= \sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_k \times \vec{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_k \times \vec{E}}$$

由上式可得

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

\$\$

\$\$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v}$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c}$$

平面电磁波特性：

- (1) 电磁波为横波， \vec{E} 和 \vec{B} 都与传播方向垂直
- (2) \vec{E} 和 \vec{B} 互相垂直， $\vec{E} \times \vec{B}$ 沿 \vec{k} 方向
- (3) \vec{E} 和 \vec{B} 同相，振幅比为 v

电磁波的能量和能流

线性均匀介质中电磁场能量密度：

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

平面电磁波情形， $\epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$ ，于是得到**平面电磁波能量密度**：

$$w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

$$w = \epsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$$

由 $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\vec{e}_k \times \vec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \vec{e}_k$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} w \vec{e}_k = v w \vec{e}_k$$

设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 有复数表示：

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t}, \quad g(t) = g_0 e^{-i\omega t + i\phi}$$

则 fg 对一周期的平均值为：

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} f_0 \cos(\omega t) \times g_0 \cos(\omega t - \phi) dt \\ &= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \phi \\ &= \frac{1}{2} \Re\{f^* g\} \end{aligned}$$

能量密度平均值：

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu} B_0^2$$

能流密度平均值：

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{H}\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{e}_k$$

电磁波在介质界面上的反射和折射

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

讨论时谐电磁波时，只需要考虑：

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f$$

设介质 1 和介质 2 的分界面时无穷大平面，且平面电磁波从介质 1 入射到界面上。

设入射波、反射波和折射波的频率相同，入射波的电场强度为 \vec{E} ，波矢量为 \vec{k} ；反射波的电场强度为 \vec{E}' ，波矢量为 \vec{k}' ；折射波的电场强度为 \vec{E}'' ，波矢量为 \vec{k}''

它们的平面波表达式分别为：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

先求波矢量方向之间的关系。

介质 1 中的总场强是入射波与反射波场强的叠加，结合边界关系 $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$ 得：

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E} + \vec{E}') = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times \vec{E}''$$

代入平面波表达式：

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}) = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x} = \vec{k}'' \cdot \vec{x}$$

选界面为 $z = 0$ 平面，则：

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y$$

若取入射波矢平行于 xz 平面，则：

$$k_y = 0 = k'_y = k''_y$$

这就是说，反射波矢和折射波矢都在同一平面上。

用 θ 表示入射角， θ' 表示反射角， θ'' 表示折射角，则有：

$$k_x = k \sin \theta, \quad k'_x = k' \sin \theta', \quad k''_x = k'' \sin \theta''$$

设电磁波在两介质中得相速分别为 v_1, v_2 ，则：

$$k = k' = \frac{\omega}{v_1}, \quad k'' = \frac{\omega}{v_2}$$

可得：

$$\theta = \theta'$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{v_1}{v_2}$$

电磁波， $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = n_{21}$$

振幅关系 菲涅耳公式

\vec{E} 垂直入射面：

当界面上自由电流密度 $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ，则边值关系为：

$$E_{\perp} + E'_{\perp} = E''_{\perp}$$

$$H_{\perp} \cos \theta - H'_{\perp} \cos \theta = H''_{\perp} \cos \theta''$$

$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$ ，对于非铁磁性的一般介质，取 $\mu = \mu_0$ ，则第二式可写为：

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_{\perp} - E'_{\perp}) \cos \theta = \sqrt{\varepsilon_2} E''_{\perp} \cos \theta''$$

$$\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')}$$

$$\frac{E''_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta''} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}$$

\vec{E} 平行入射面：

$$E_{\parallel} \cos \theta - E'_{\parallel} \cos \theta = E''_{\parallel} \cos \theta''$$

$$H_{\parallel} + H'_{\parallel} = H''_{\parallel}$$

$$\frac{E'_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}$$

$$\frac{E''_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}$$

几种特殊情况

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$$

由折射定律， $\theta > \theta''$ ，则 $E'/E < 0$ ，即反射波电场与入射波电场反相，此现象称为反射过程中的**半波损失**。

$$\theta + \theta'' = \pi/2$$

此时 \vec{E} 平行于入射面的分量没有反射波，反射光为垂直于入射面偏振的线偏光，这就是**布儒斯特定律**，此情形下的入射角为**布儒斯特角**。

全反射

若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ，则 $n_{21} < 0$

假设在 $\sin \theta > n_{21}$ 情形下，下面式子仍然成立：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y$$

仍满足：

$$k''_x = k_x = k \sin \theta$$

$$k'' = k \frac{v_1}{v_2} = k n_{21}$$

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k_x'^2} = i k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

令

$$k''_z = i\kappa, \quad \kappa = k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

折射波电场为：

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k''_x x - \omega t)}$$

这是沿 x 轴方向传播的电磁波，它的场强沿 z 轴方向指数衰减。

这种电磁波是存在于界面附近一薄层内的表面波，该层厚度 $\sim \kappa^{-1}$ ，可以认为， κ^{-1} 就是穿透深度：

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} &= \frac{1}{k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \\ &= \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \end{aligned}$$

有导体存在时电磁波的传播

导体内的自由电荷分布

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

考虑固定场点，其解为：

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

衰减的特征时间为：

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

只要电磁波的频率 ω 满足

$$\omega \ll \tau^{-1} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

就可以认为 $\rho(t) = 0$

良导体条件：

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$$

导体内的电磁波

具有一定频率的电磁波：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

复电容率：

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

则第二式可写为：

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon'\vec{E}$$

一定频率下导体内部的亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon'}$$

形式上有平面波解：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

设

$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

波矢量 \vec{k} 的实部 $\vec{\beta}$ 描述波传播的相位关系，虚部 $\vec{\alpha}$ 描述波幅的衰减。 $\vec{\beta}$ 称为**相位常量**， $\vec{\alpha}$ 称为**衰减常量**。

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \omega^2 \mu \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

比较得：

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma$$

用 $\vec{k}^{(0)}$ 表示空间中的波矢， \vec{k} 表示导体中的波矢，设入射面为 xz 面， z 轴指向导体内部的法线，由边值关系，有：

$$k_x^{(0)} = k_x = \beta_x + i\alpha_x$$

空间中波矢 $\vec{k}^{(0)}$ 为实数，由上式可得

$$\alpha_x = 0, \quad \beta_x = k_x$$

趋肤效应和穿透深度

考虑垂直入射情形，导体表面为 xy 平面， z 轴指向导体内部

$$\alpha_x = \beta_x = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

良导体情形，

$$k^2 \approx i\omega\mu\sigma$$

$$k \approx \sqrt{i\omega\mu\sigma} \approx \beta + i\alpha$$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

波幅降至导体表面原值 $1/e$ 的传播距离称为穿透深度 δ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

磁场与电场的关系：

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega \mu} (\beta + i\alpha) \vec{e}_n \times \vec{E}$$

良导体情形，

$$\vec{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \vec{e}_n \times \vec{E}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left| \frac{\vec{H}}{\vec{E}} \right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} \gg 1$$

在金属导体中，磁场比电场重要

导体表面上的反射

真空垂直入射导体表面

设 $\mu \approx \mu_0$

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1 + i - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1 + i + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

反射系数：

$$R = \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

理想导体边界条件

在导体表面上，电场线与界面正交，磁感应线与界面相切。

谐振腔

矩形谐振腔内的电磁振荡

设 $u(x, y, z)$ 是 \vec{E} 或 \vec{H} 的任一直角分量

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

令

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \end{cases}$$

驻波解：

$$u(x, y, z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$$

考虑边界条件，得：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_3}$$

$$m, n, p = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0$$

对于每一组 (m, n, p) 值，有两个独立偏振波模

谐振频率

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$$

波导

当频率更高时，需要用波导代替同轴传输线。波导是一根空心金属管，截面通常为矩形或圆形。波导传输适用于微波范围。

矩形波导中的电磁波

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电场应有如下形式：

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{ik_z z}$$

代入亥姆霍兹方程，得：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vec{E}(x, y) + (k^2 - k_z^2) \vec{E}(x, y) = \vec{0}$$

设 $u(x, y)$ 为电磁场的任一直角坐标分量，

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

分离变量法可得：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

特解：

$$u(x, y) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$$

考虑边界条件 $x = 0, y = 0$ 面上的边界条件，可得：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

再考虑 $x = a, y = b$ 面上的边界条件，可得：

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

再考虑波导中电场应满足 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，得：

$$k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$$

也就是说， A_1, A_2, A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组 (m, n) 值，有两种独立波模，有两种独立波模。

解出 \vec{E} 后，磁场为：

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

对一组确定的 (m, n) ，若选一种波模具有 $E_z = 0$ ，则该波模的 $A_1/A_2 = -k_y/k_x$ 就完全确定，因而另一种波模必须有 $E_z \neq 0$

对 $E_z = 0$ 的波模, $H_z \neq 0$

在波导内传播的波的特点:

电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z = 0$ 的波, 称为横电波 (TE); 另一种波模为 $H_z = 0$ 的波, 称为横磁波 (TM)。

TE 波和 TM 波又按 (m, n) 的值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波, 一般情况下, 在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

若激发频率 $k < \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, 则 k_z 变为虚数, 此时传播因子 $e^{ik_z z}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的**最低频率** ω_c 称为该波模的**截止频率**。

由:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

得到 (m, n) 型的**截止角频率**为:

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

若 $a > b$, 则 TE_{10} 波有最低截止频率:

$$\frac{\omega_{c,10}}{2\pi} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

若管内为真空, 此时最低截止频率为 $\frac{c}{2a}$, 相应的截止波长为:

$$\lambda_{c,10} = 2a$$

因此, 在波导内能够通过的最大波长为 $2a$

最常用的是 TM_{10} 波, 它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

TE_{10} 波的电磁场和管壁电流

当 $m = 1, n = 0$ 时, $k_x = m\pi/a = \pi/a, k_y = n\pi/b = 0$, 且对 TE 波有 $E_z = 0$, 因此 $A_3 = 0$

由 $k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$ 得 $A_1 = 0$, 把 A_2 写为:

$$A_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0$$

由

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}, \quad \vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

得 TE₁₀ 波的电磁场：

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \\ E_y &= \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ H_x &= -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ E_x &= E_z = h_y = 0 \end{aligned}$$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times \vec{H} = \vec{\alpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_f \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

由一般情况下 \vec{B} 的无散性 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入矢势 \vec{A} ，使得：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

于是：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是：

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

这就是说， $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场，于是可引入标势 φ ，使得：

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

于是：

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

场量 \vec{B}, \vec{E} 可由矢势 \vec{A} 和 φ 表达为：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数，作变换（势的规范变换）：

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

有：

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) - \frac{\partial(\vec{A} + \nabla \psi)}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

即 (\vec{A}', φ') 与 (\vec{A}, φ) 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范**。

当势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为**规范不变性**。

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 \vec{E}, \vec{B} 的方程，可化为关于势 \vec{A}, φ 的方程。

真空中：

$$\begin{cases} \nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0}) = \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

其中， $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$

库仑规范下

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

洛伦兹规范

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

推迟势

求解达朗贝尔方程：

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

考虑某一体元内的变化电荷激发的势：

$$\rho(\vec{x}, t) = Q(t) \delta(\vec{x})$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t) \delta(\vec{x})$$

由球对称性， $\varphi = \varphi(r, t)$ ，球坐标下：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t) \delta(\vec{x})$$

除原点外 φ 的通解为：

$$\varphi(r, t) = \frac{f(t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{g(t + \frac{r}{c})}{r}$$

猜出：

$$\varphi(r, t) = \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由场的叠加性，

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

电偶极辐射

计算辐射场的一般公式

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流，即：

$$\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}') e^{-i\omega t}$$

其中， $\vec{J}(\vec{x}')$ 是 $t = 0$ 时的电流密度分布。

交变电流情况下：

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{i(kr - \omega t)}}{r} dV'$$

其中， $k = \omega/c$

令：

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

其中：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} dV'$$

其中， $\vec{A}(\vec{x})$ 是 $t = 0$ 时刻的矢势分布。

其中， e^{ikr} 是推迟作用因子，其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形，电荷守恒定律为：

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \vec{J}$$

若知道了矢势 \vec{A} ，则可求磁场 \vec{B} ：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

知道了 \vec{B} ，可根据麦克斯韦方程组求电场 \vec{E} ：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \\ \vec{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}\end{aligned}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l ，波长 λ ，电荷到场点的距离 r ，

小区域：

$$l \ll \lambda, \quad l \ll r$$

近区： $r \ll \lambda$

感应区： $r \sim \lambda$

远区（辐射区）： $r \gg \lambda$

$$r \approx R - \vec{e}_R \cdot \vec{x}'$$

矢势精确表达式：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} dV'$$

矢势近似表达式：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ik(R - \vec{e}_R \cdot \vec{x}')}}{R - \vec{e}_R \cdot \vec{x}'} dV' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{e^{ikR} \cdot \vec{J}(\vec{x}') e^{-ik\vec{e}_R \cdot \vec{x}'}}{R} dV' \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{J}(\vec{x}') (1 - ik\vec{e}_R \cdot \vec{x}' + \dots) dV'\end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{J}(\vec{x}') dV'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i ，速度为 v_i 的粒子，则：

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r})$$

$$\int_V \vec{J}(\vec{x}') dV' = \sum q \vec{v}$$

$$\begin{aligned}\sum q \vec{v} &= \frac{d}{dt} \sum q \vec{x} \\ &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &\equiv \dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

其中， \vec{p} 是电荷系统的电偶极矩

$$\int_V \vec{J}(\vec{x}') dV' = \dot{\vec{p}}$$

考虑一个简单电偶极子系统，它由两个相距为 $\Delta \vec{l}$ 的导体球组成，两导体之间由细导线相连。

此系统的电偶极矩：

$$\vec{p} = Q \Delta \vec{l}$$

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

电偶极矩变化率：

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} Q \Delta \vec{l} \\
&= I \Delta \vec{l} \\
&= \int_V \vec{J}(\vec{x}') dV'
\end{aligned}$$

与一般公式相符。

于是：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\vec{p}}$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果：

$$\begin{aligned}
\nabla &\longleftrightarrow ik\vec{e}_R \\
\frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow -i\omega
\end{aligned}$$

辐射场：

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\
&= \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \vec{e}_R \times \dot{\vec{p}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R \\
\vec{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} \\
&= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R
\end{aligned}$$

取球坐标原点在电荷分布区内，并以 \vec{p} 方向为极轴，

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{p} e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\phi \\
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \ddot{p} e^{ikR} \sin\theta \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

辐射能流 角分布 辐射功率

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E}^* \times \vec{H} \} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \vec{e}_R \\ P &= \oint |\vec{S}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint \sin^2 \theta d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

短天线辐射 辐射电阻

磁偶极辐射和电四极辐射

矢势展开式第二项：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int \vec{J}(\vec{x}') (\vec{e}_R \cdot \vec{x}') dV' \\ -\vec{e}_R \times \int \frac{1}{2} \vec{x}' \times \vec{J}' dV &= -\vec{e}_R \times \vec{m}\end{aligned}$$

此项导致的辐射是磁偶极辐射

$$\mathcal{D} \equiv \sum 3q\vec{x}'\vec{x}'$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \left(-\vec{e}_R \times \vec{m} + \frac{1}{6} \vec{e}_R \cdot \dot{\mathcal{D}} \right)$$

第一项是磁偶极辐射，第二项是电四极辐射

磁偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{e}_R \times \vec{m}$$

辐射区（很远，近似）电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= c\vec{B} \times \vec{e}_R \\ &= -\frac{\mu_0 \mathbf{e}^{ikR}}{4\pi cR} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R)\end{aligned}$$

磁偶极辐射的平均能流密度：

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \vec{e}_R$$

总辐射功率：

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

电四极辐射

$$\vec{A} = -\frac{\mathbf{i}k\mu_0 \mathbf{e}^{ikR}}{24\pi R} \vec{e}_R \cdot \mathcal{D}$$

定义矢量：

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{e}_R) \equiv \vec{e}_R \cdot \mathcal{D}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mathbf{e}^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{\mathcal{D}}}$$

辐射区电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mathbf{i}k\vec{e}_R \times \vec{A} \\ &= \frac{\mathbf{e}^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^4 R} \ddot{\vec{\mathcal{D}}} \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= c\vec{B} \times \vec{e}_R \\ &= \frac{\mathbf{e}^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{\vec{\mathcal{D}}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

平均能流密度：

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{H}\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} (\ddot{\vec{\mathcal{D}}} \times \vec{e}_R)^2 \vec{e}_R\end{aligned}$$

例 5.3

$$\mathcal{D} = 6Ql^2 \vec{e}_z \vec{e}_z$$

$$\vec{\mathcal{D}} \equiv \vec{e}_R \cdot \mathcal{D} = 6Ql^2 \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{\mathcal{D}} \times \vec{e}_R = 6Ql^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$|\ddot{\vec{\mathcal{D}}} \times \vec{e}_R|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

辐射功率：

$$P = \int \bar{S} R^2 d\Omega = \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi \varepsilon_0 c^5}$$

天线辐射（了解）

天线上的电流分布

细长直线天线上电流分布的形式

取天线沿 z 轴，天线表面上的电流 \vec{J} 沿 z ， \vec{A} 沿 z 轴

洛伦兹条件：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}\end{aligned}$$

得：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$$

天线是理想导体， $E_z = 0$ ， A_z 满足一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0$$

矢势 \vec{A} 与天线电流的关系：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} dV'$$

半波天线

天线总长度为 l ，电流分布为：

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \sin k(\frac{l}{2} - z), & 0 \leq z \leq \frac{l}{2} \\ I_0 \sin k(\frac{l}{2} + z), & -\frac{l}{2} \leq z \leq 0 \end{cases}$$

若 $l = \lambda/2$

$$I(z) = I_0 \cos(kz), \quad |z| \leq \frac{\lambda}{4}$$

$$A_z(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos(kz) e^{-ikz \cos \theta} dz$$

计算远场

天线阵

半波天线对极角有一定方向性，对方位角没有方向性。

要得到高度定向的辐射，可以用一系列天线排成天线阵，利用各条天线辐射的干涉效应来获得较强的方向性。

电磁波的衍射

电磁场的动量

力密度 \vec{f} :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

真空中:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}, \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}$$

结合

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{f} = \left[\epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

电磁场的动量密度:

$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

方括号部分表示电磁场内部的动量转移

令:

$$\mathcal{J} = -\epsilon_0 \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} \mathcal{J} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

其中, \mathcal{J} 是单位张量

动量守恒定律:

$$\int_V \vec{f} dV + \frac{d}{dt} \int_V \vec{g} dV = - \int_V \nabla \cdot \mathcal{T} dV = - \oint_S d\vec{S} \cdot \mathcal{T}$$

张量 \mathcal{T} 称为电磁场的动量流密度张量

第6章 狭义相对论

迈克尔逊-莫雷实验

调整迈克尔逊干涉仪，使得有效光程 $l_{MM_1} = l_{MM_2} = l$

设地球相对于“以太”的绝对运动速度 \vec{v} 沿 $M_1 \rightarrow M$ 方向，则按经典理论，将产生光程差于是观察到干涉效应

按经典理论，干涉条纹应移动 0.4 个左右，但实验观察到的上限仅为 0.01 个

迄今为止的所有实验都指出，光速与观察者所处的参考系无关，也与光源的运动速度无关。

相对论的基本原理 洛伦兹变换

(1) 相对性原理：所有惯性参考系是等价的。

(2) 光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c ，且与光源运动无关。

设惯性系 Σ' 相对于 Σ 以速率 v 运动，并选 x 和 x' 沿运动方向，则伽利略变换为：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

间隔不变性

用四个坐标 (x, y, z, t) 表示一个事件

从 (\vec{x}, t) 到 (\vec{x}', t') 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1), (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$

间隔 s^2, s'^2 定义为：

$$s^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$$s'^2 \equiv c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性，即：

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

$s^2 = 0$ ，类光间隔

$s^2 > 0$ ，类时间隔

$s^2 < 0$ ，类空间隔

洛伦兹变换

某一事件在两个不同的惯性参考系中的时空坐标关系为：

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

同时相对性

相对论不应破坏因果律

洛伦兹变换给出：

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

不破坏因果律就是说，若 $t_2 > t_1$ ，则 $t'_2 > t'_1$

运动时钟的延缓

运动尺度的缩短

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

其中， l_0 是静止长度

推导：

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

其中, $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1, 其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1, t_1) , 其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_1, t'_1) , 由 Σ' 相对 Σ 的运动, 有洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动, 则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v , 于是其在 Σ 系中的时空坐标满足:

$$x_1 = a + vt_1$$

右边的质点记为 2, 其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2, t_2) , 其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_2, t'_2) , 由 Σ' 相对 Σ 的运动, 有洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动, 则质点 2 在 Σ 中运动的速度也是 v , 于是其在 Σ 系中的时空坐标满足:

$$x_2 = b + vt_2$$

尺子在 Σ 系中的长度, 记为 l_Σ , 定义为:

$$\begin{aligned} l_\Sigma &\equiv (x_2 - x_1) \Big|_{t_1=t_2} \\ &= [(b + vt_2) - (a + vt_1)] \Big|_{t_1=t_2} \\ &= b - a \end{aligned}$$

尺子在 Σ' 系中的长度 (也就是静止长度), 记为 $l_{\Sigma'}$, 定义为:

$$\begin{aligned}
 l_{\Sigma'} &\equiv (x'_2 - x'_1) \Big|_{t'_1=t'_2} \\
 &= \left[\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) \right] \Big|_{t'_1=t'_2} \\
 &= \gamma \left[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1) \right] \Big|_{t'_1=t'_2} \\
 &= \gamma \left[(b + vt_2) - (a + vt_1) - v(t_2 - t_1) \right] \Big|_{t'_1=t'_2} \\
 &= \gamma(b - a)
 \end{aligned}$$

可以看到，

$$l_{\Sigma} = \frac{1}{\gamma} l_{\Sigma'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_{\Sigma'} < l_{\Sigma'}$$

速度变换公式

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}$$

相对论时空观

相对论理论的四维形式

设一个点在 Σ 系的直角坐标为 x_1, x_2, x_3 ，在 Σ' 系的直角坐标为 x'_1, x'_2, x'_3

其中，

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

由不变量：

$$x_i x_i = x'_i x'_i = (a_{il} x_l)(a_{im} x_m) = a_{il} a_{im} x_l x_m$$

可得：

$$a_{il} a_{im} = \delta_{lm}$$

即三维坐标转动是个正交变换

$x_4 \equiv \mathrm{i}ct$ ，间隔不变式可写为：

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

四维矢量：

$$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$$

四维张量：

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$$

间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

和固有时

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s$$

都是洛伦兹标量

四维速度矢量：

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

四维波矢量：

$$k_\mu = \left(\vec{k}, \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)$$

相对论的多普勒和光行差公式：

$$\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)}$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量：

$$x_\mu = (\vec{x}, \mathrm{i}ct)$$

电流密度第四分量：

$$J_4 = \mathrm{i}c\rho$$

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu$$

$$J_\mu = (\vec{J}, \mathrm{i}c\rho)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

四维势矢量

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

\square 是洛伦兹标量算符

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\square \varphi = -\mu_0 c^2 \rho$$

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{\mathrm{i}}{c} \varphi \right)$$

$$\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

洛伦兹条件的四维形式：

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

电磁场张量

反对称四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

电磁场构成一个四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c} E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c} E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c} E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c} E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

张量变换关系：

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$$

电磁场的不变量

洛伦兹不变量：

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2}E^2$$

四维全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$

$$\frac{\mathrm{i}}{8}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau} = \frac{1}{c}\vec{B} \cdot \vec{E}$$