

1-4

推导自然量纲下以下物理量具有相同的量纲。

1-4-1

能量 E , 动量 p , 质量 m , 温度 T , 频率 ν , 波数 k 量纲相同。

自然单位制取 $c = 1$, 质能关系:

$$E = mc^2 = m \implies [E] = [m]$$

相对论能量动量关系:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 = p^2 + m^2 \implies [E] = [p] = [m]$$

自然单位制取玻尔兹曼常数 $k_B = 1$, 能量均分定理:

$$E = \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} T \implies [E] = [T]$$

自然单位制取 $\hbar = 1$, 因此 $h = 2\pi\hbar = 2\pi$ 无量纲。德布罗意关系:

$$E = h\nu = 2\pi\nu \implies [E] = [\nu]$$

德布罗意关系:

$$p = \hbar k = k \implies [p] = [k]$$

综上,

$$[E] = [p] = [m] = [T] = [\nu] = [k]$$

1-4-2

长度 L , 寿命 (时间) t , 磁矩 M , 电矩 d 量纲相同, 是能量 E 量纲的倒数。

自然单位制取 $c = 1$, 光子运动方程:

$$L = ct = t \implies [L] = [t]$$

由 1-4-3, 电荷 q 和速度 v 无量纲。电流定义:

$$I = \frac{dq}{dt} \implies [I] = [t]^{-1} = [L]^{-1}$$

磁矩定义：

$$M = IS \implies [M] = [I][L]^2 = [L]^{-1}[L]^2 = [L]$$

电矩定义：

$$d = qL \implies [d] = [q][L] = [L]$$

由1-4-3, 电荷 q 和 速度 v 无量纲。电流密度定义：

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \implies [j] = [q][L]^{-3}[v] = [L]^{-3}$$

光速 c 与 ε_0, μ_0 的关系：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

自然单位制中取 $c = \varepsilon_0 = 1$, 于是 μ_0 无量纲。

真空麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies [B] = [L][\mu_0][j] = [L]^{-2}$$

磁矩 \vec{M} 在外磁场 \vec{B} 中的能量 E ：

$$E = -\vec{M} \cdot \vec{B} \implies [E] = [M][B] = [L][L]^{-2} = [L]^{-1}$$

综上,

$$[L] = [t] = [M] = [d] = [E]^{-1}$$

1-4-3

速度 v , 角动量 J , 电荷 q 都是无量纲量。

由于 $[L] = [t]$, 由匀速直线运动速度 $v = L/t$ 知 $[v] = [L]/[t]$ 无量纲。

由 $E = \hbar\omega$, 且 $[\hbar] = [J], [\omega] = [\nu]$, 而 $[E] = [\nu]$, 于是 $[J] = [E]/[\omega] = [E]/[\nu]$ 无量纲。

精细结构常数：

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

精细结构常数 α 在任何单位制下都是无量纲常数。自然单位制允许对四个物理学常数 $e, \varepsilon_0, \hbar, c$ 中的三个进行归一化。取 $\varepsilon_0 = \hbar = c = 1$, 则 ε_0, \hbar, c 都是无量纲的, 因此元电荷 e 是无量纲的, 电荷 q 也是无量纲的。