

1 四维表述基础

1.1 预备知识

事件：空间一点与时间一瞬的结合， $p = (t, \vec{x})$

粒子：质点（有静质量， $m_0 > 0$ ）和无静止质量粒子（光子、引力子等）。

世界线：粒子的全部历史。

观者：进行物理观测的人。

时空：全部事件的集合。

参考系：无数观者的集合 R 称为一个参考系，若它满足以下条件：时空（或其中一个开集）中的任一点有且仅有 R 内的一个观者的世界线经过。

1.2 SR的背景时空

SR的背景时空为闵氏时空。

(1)线元（取 $c = 1$ ）

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

闵氏度规：

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

线元是洛伦兹不变量：

$$ds^2 = ds'^2$$

(2)速度（惯性坐标系中）

$$u = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{d|\vec{x}|}{dt}$$

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 = -dt^2 + u^2 dt^2 = -(1 - u^2) dt^2$$

$u = 1$, 光速, $ds^2 = 0$, 类光;

$u < 1$, 亚光速, $ds^2 < 0$, 类时;

(3) 特殊洛伦兹变换

$$\begin{cases} t' = \gamma (t - vx/c^2) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^6\right)$$

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$a^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

速度洛伦兹变换:

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma^2 (1 - u_x v)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma^2 (1 - u_x v)} \end{cases}$$

(4)对应

惯性坐标--Lorentz坐标

间隔--闵氏线元

背景时空--闵氏时空

观者--类时曲线

惯性观者--类时测地线

(5)SR的基本假设

光速不变原理、狭义相对性原理。

狭义相对性原理：惯性观者和非惯性观者有绝对区别；各惯性观者平权。

1.3 惯性观者和惯性系

惯性坐标系：构成参考系的每个观者均为惯性观者；每个观者携带一个标准钟；有一个空间坐标值。

1.4 固有时和坐标时

观者的固有时就是ta的标准钟的读数。

标准钟：固有时=线长

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{c} \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{-ds^2}$$

事件 P 在坐标系中的 t 值称为坐标时。

二者的联系：

$$d\tau^2 = -ds^2 = (1 - u^2) dt^2 = dt^2 / \gamma_u^2$$

$$dt = \gamma_u d\tau$$

固有时为粒子所在的静系 (x', t') 中的时间 ($dx' = 0$) 。

$$ds^2 = -c^2 dt'^2 = -c^2 d\tau^2$$

1.5 时空图

(1)惯性系之间的关系

洛伦兹变换：

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

t' 轴的确定： t' 轴的表达式为 $x' = 0$ ，即 $t = x/v$

x' 轴的确定: x' 轴的表达式为 $t' = 0$, 即 $t = vx$

坐标轴的含义与时空坐标的读取

若在 Σ 系画时空图, 则横轴为 x 轴, 纵轴为 t 轴, 二者垂直。

为了读出时空图上一点 P 在 Σ 系的时空坐标, 只要:

过 P 作平行于 t 轴的直线交 x 轴于一点, 这点到坐标原点的欧氏距离就是事件 P 在 Σ 系的空间坐标 x ;

过 P 作平行于 x 轴的直线交 t 轴于一点, 这点到坐标原点的欧氏距离就是事件 P 在 Σ 系的时间坐标 t 。

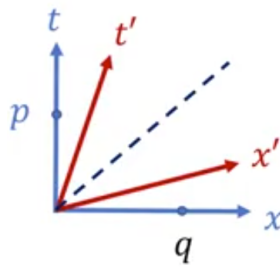
设 σ' 系相对 Σ 系以速度 v 运动, 则在 Σ 系的时空图中可画出 Σ' 系得两个坐标轴。 t' 轴即过原点且斜率为 $1/v$ 的直线, x' 轴即过原点且斜率为 v 的直线。

为了读出时空图上一点 P 在 Σ' 系的时空坐标, 只要:

过 P 作平行于 t' 轴的直线交 x' 轴于一点, 读出这点在 Σ 系的时空坐标 (t_1, x_1) , 则事件 P 在 Σ' 系的空间坐标 $x' = \sqrt{-t_1^2 + x_1^2}$;

过 P 作平行于 x' 轴的直线交 t' 轴于一点, 读出这点在 Σ 系的时空坐标 (t_2, x_2) , 则事件 P 在 Σ' 系的时间坐标 $t' = \sqrt{t_2^2 - x_2^2}$;

坐标轴正交性



在 Σ 系中, $p = (t, 0), q = (0, x)$, 内积:

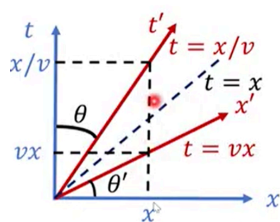
$$p \cdot q = p^\mu q^\nu \eta_{\mu\nu} = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -t \times 0 + 0 \times x = 0$$

在 Σ' 系中, $p = (\gamma t, -\gamma vt), q = (-\gamma vx, \gamma x), q = (-\gamma vx, \gamma x)$, 内积:

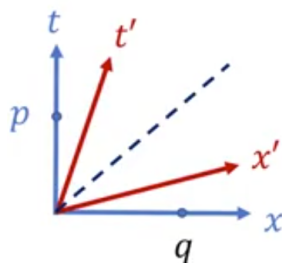
$$p \cdot q = -p^0 q^0 + p^1 q^1 = -\gamma t \times (-\gamma vx) + (-\gamma vt) \times \gamma x = 0$$

夹角相同 $\theta = \theta'$ (一条直线斜率为 v , 另一条直线斜率为 $1/v$) 。

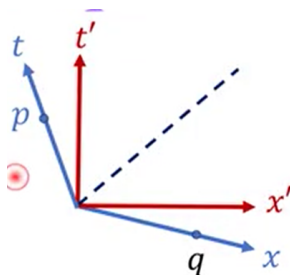
Σ 系的两个坐标轴也关于 Σ' 系的光锥对称。



Σ' 系的两个坐标轴关于 Σ 系的光锥对称。



Σ 系的两个坐标轴也关于 Σ' 系的光锥对称。



两系的光锥重合，都是角平分线。

t' 坐标线为 Σ 系中的一条类时曲线（测地线），代表一匀速直线运动的粒子的世界线。

x' 坐标线为 Σ 系中的一条类空曲线。

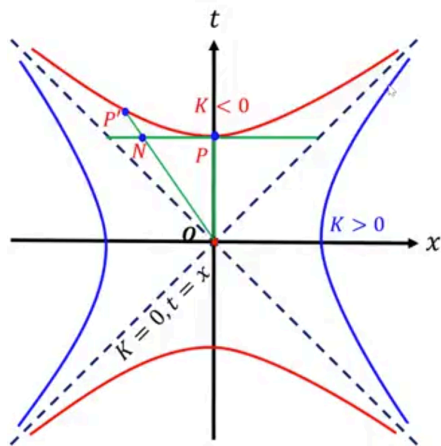
(2)等线长曲线（校准曲线）

考虑1+1维时空线元：

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

到原点 $O(0, 0)$ 的线长（间隔）为常数 K 的所有点 (t, x) 的集合称为**等线长曲线**，满足方程：

$$-t^2 + x^2 = K$$



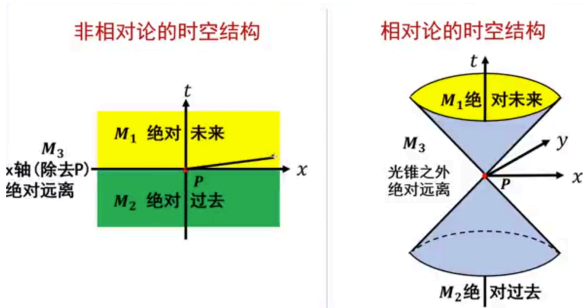
当 $K = 0$ 时, $-t^2 + x^2 = 0, t = \pm x$, 曲线上任一点 M 到原点 O 的线长均为零, 该曲线为光锥。

当 $K < 0$ 时, $\frac{t^2}{\sqrt{-K}^2} - \frac{x^2}{\sqrt{-K}^2} = 1, t = \pm\sqrt{x^2 - K}$, 曲线上任一点到原点 O 的线长相等。该曲线又称为校准曲线。 $|OP| = |OP'| > |ON|$, 斜边小于直角边。

当 $K > 0$ 时, $\frac{x^2}{\sqrt{K}^2} - \frac{t^2}{\sqrt{K}^2} = 1, x = \pm\sqrt{t^2 + K}$, 该曲线也是校准曲线。

1.6 SR与非SR的时空结构对比

理论	第一手概念	派生	
非SR	时间+空间	时空是绝对的（坐标系不依赖的）	一副扑克
SR	四维时空	3+1分解，时间、空间是相对的	无穷多副扑克



M_1 为时间 P 的绝对未来, 与 P 有因果联系;

M_2 为时间 P 的绝对过去, 与 P 有因果联系;

M_3 为时间 P 的绝对远离, 与 P 无因果联系;

2 相对论的时空理论

2.1 相对论的时空结构

事件 1, 2 的时空坐标分为设为 $(t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2)$, 间隔:

$$S^2 = -(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

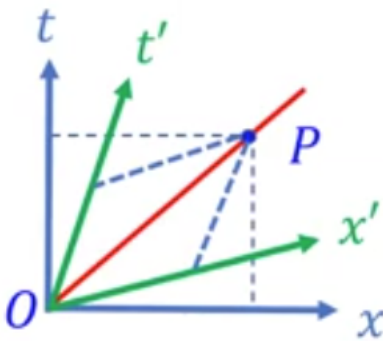
类时间隔 $S^2 < 0$, P_2 在 P_1 的光锥之内;

类光间隔 $S^2 = 0$, P_2 在 P_1 的光锥之上;

类空间隔 $S^2 > 0$, P_2 在 P_1 的光锥之外。

由间隔不变性, P_2 和 P_1 的光锥的几何关系是绝对的, 不依赖于惯性参考系。

类光间隔



仅考虑 1+1 维时空, 在 Σ 系

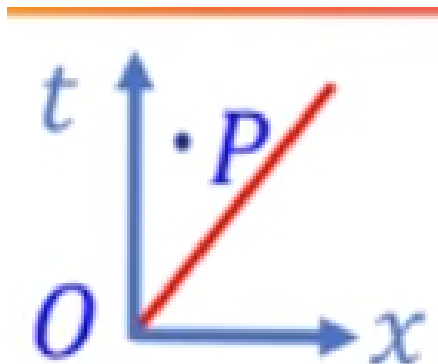
$$S^2 = -t^2 + x^2 = 0 \implies t = x$$

在 Σ' 系

$$S^2 = -t'^2 + x'^2 = 0 \implies t' = x'$$

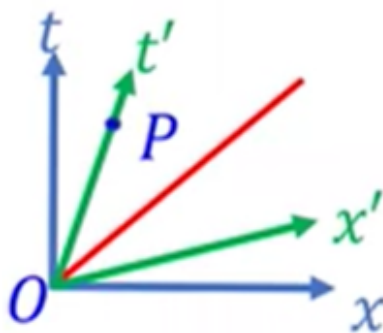
对任意惯性系, P 点都在 O 点的光锥上。

类时间隔



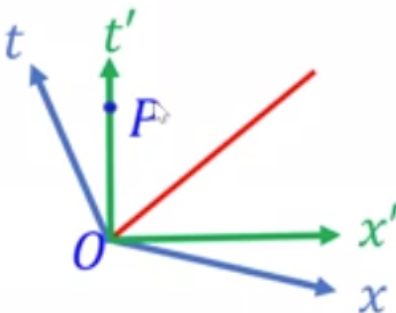
$$S^2 < 0$$

可以通过 Lorentz 变换使得 O, P 两点在某个惯性系中同地不同时。

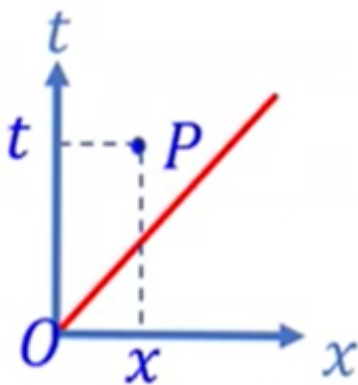


具体做法是以 OP 为 t' 轴构造坐标系 Σ' 。由于 t' 轴是 $x' = 0$ 线，即 t' 轴上任意一点在 Σ' 系的空间坐标 $x' = 0$ 。因此，在 Σ 系 O, P 是不同时不同地事件，但它们的时空坐标通过 Lorentz 变换变换到 Σ' 系的时空坐标后，在 Σ' 系它们成了同地不同时事件。

同理，一个惯性坐标系中的两个同地不同时事件，在其他惯性坐标系中不同地。



Lorentz 变换保持时间正向不变

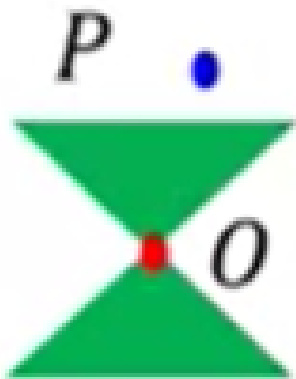


上半光锥 $t > 0$, 类时间隔 $t > x, 1 > v$, 因此:

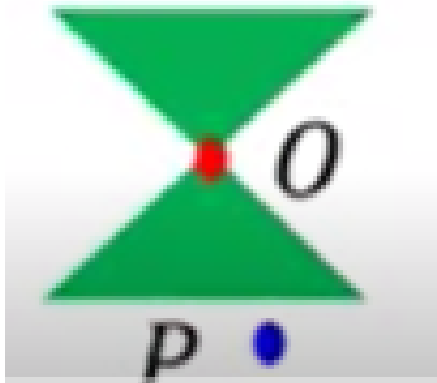
$$t' = \gamma(t - vx) > 0$$

类时区域包括 $t > 0$ 和 $t < 0$ 两部分, 由于 Lorentz 变换保持时间正向不变, 因此这两部分不能互换。

绝对未来: P 点在 O 点的上半光锥之内。



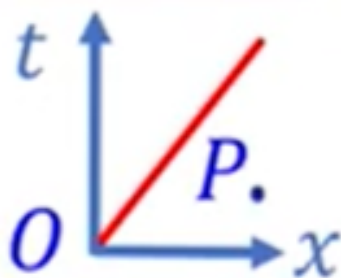
绝对过去: P 点在 O 点的下半光锥之内。



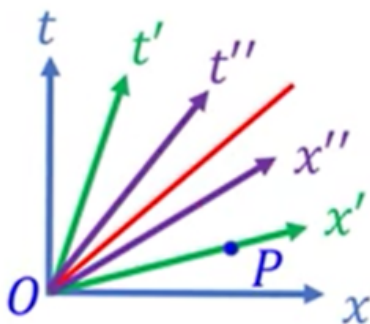
时间和空间的相对性

两类时事件在任何惯性系中都绝对不同时。从时空图上看，某一惯性系 Σ' 的等时线是一系列平行于 x' 轴的直线。而在时空图中， x' 轴的斜率允许的取值范围为 $[-1, 1]$ ，因此 Σ' 的等时线斜率在 $[-1, 1]$ 范围内。而由于 O, P 是类时事件， P 在 O 的光锥之内，直线 OP 的斜率不可能落在 $[-1, 1]$ 的范围内。因此两类时事件绝对不同时。

类空间隔



$$S^2 > 0$$



可以通过 Lorentz 变换使得 O, P 两点在某个惯性系中同时不同地。具体做法是以 OP 为 x' 轴构造坐标系 Σ' 。由于 x' 轴是 $t' = 0$ 线，即 x' 轴上任意一点在 Σ' 系的时间坐标 $t' = 0$ 。因此，在 Σ 系 O, P 是不同步不同地事件，但它们的时空坐标通过 Lorentz 变换变换到 Σ' 系的时空坐标后，在 Σ' 系它们成了同时不同地事件。

两类空事件，先后是相对的，但绝对异地。

2.2 时空关系的绝对分类

取 $P_1 = O = (0, 0, 0, 0), P_2 = P = (t, x, y, z)$

$$S^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

类光间隔 $S^2 = 0$, P 点在光锥上;

类时间隔 $S^2 < 0$, P 点在光锥内；可通过洛伦兹变换使得 O, P 两事件同地不同时。

类时区域包括 $t > 0, t < 0$ 两部分，洛伦兹变换保持时间正向不变。

$$t' = \gamma(t - vx)$$

由于 $t > x, v < 1$, 因此 $t' > 0$ 。

绝对未来： P 点在 O 点的上半光锥之内。

绝对过去： P 点在 O 点的下半光锥之内。

OP 在地面参考系为时空间隔，在飞船系为时间间隔。而间隔不变，因此两时间在不同参考系中的时间差不同。

类空间隔 $S^2 > 0$, P 点在光锥内；可通过洛伦兹变换使得 O, P 两事件同时不同地。

两类空事件，先后相对，异地绝对。

2.3 因果律

两关联事件可用光信号或速度低于光速的信号联系。

实验表明，物质运动的速度不超过光速。

SR保证因果律：两类时和类光事件的先后是绝对的。两类空事件无因果联系。

两类空事件无因果关系。

2.4 同时的相对性和绝对性

两同时同地事件 ($S^2 = 0$, 类光) 在任何惯性系中仍为同时同地事件。同时绝对，同地也绝对。

$$\Delta t = 0, \quad \Delta x = 0 \implies \begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x) = 0 \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0 \end{cases}$$

两同时不同地时间 $S^2 = \Delta x^2 > 0$, 类空。同时是相对的。

两类空事件的同时和先后都是相对的。

两事件类光，有因果关系，同时是绝对的，先后是绝对的。

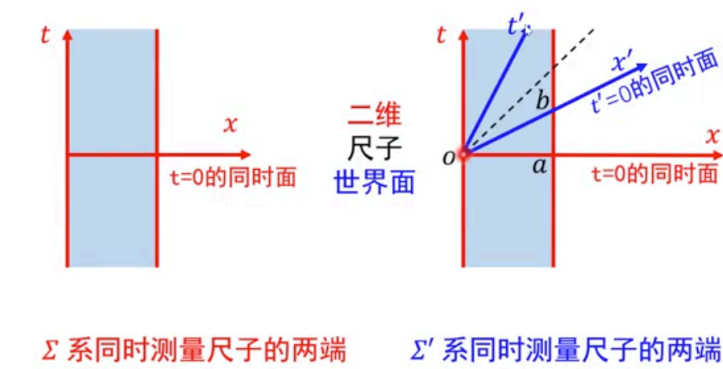
两事件类时，有因果关系，无同时，先后是绝对的。

两事件类空，因果关系，同时是相对的，先后是相对的，两事件绝对异地。

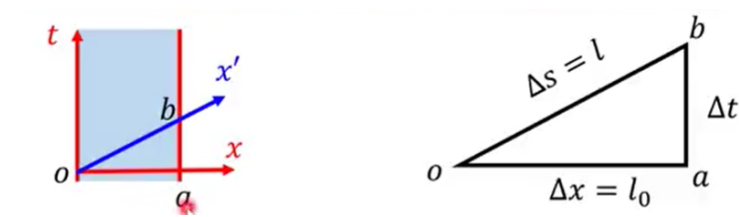
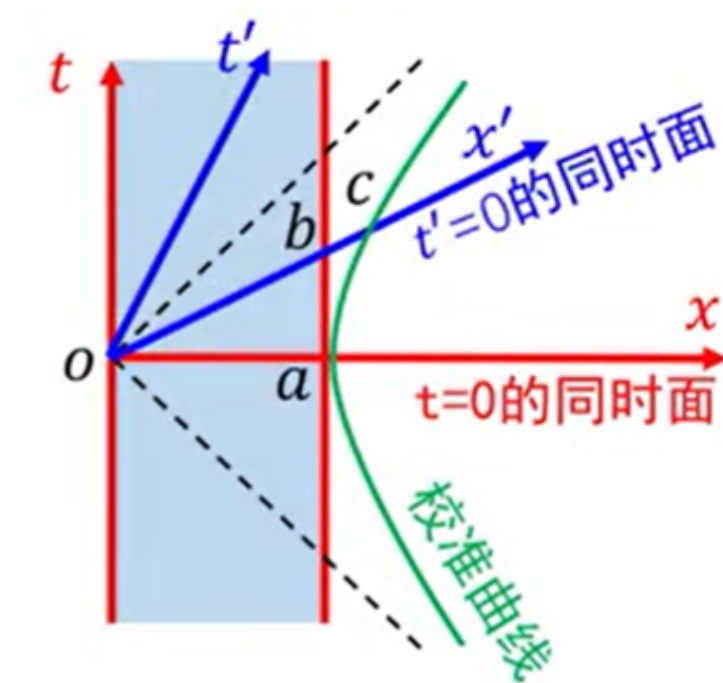
3 典型效应分析

3.1 尺缩效应

尺子在时空图中表现为一个二维世界面。



在某个惯性系中同时测量尺子两端的空间坐标，则这两个空间坐标的欧氏长度就是该惯性系中尺子的长度。



$l_0 = |oa|$ 是 Σ 系 $t = 0$ 时测的尺长。

$l = |ob|$ 是 Σ' 系 $t' = 0$ 时测的尺长。

利用校准曲线：

$$|oa| = |oc| > |ob|$$

即：

$$l_0 > l$$

静长（固有长度）最长，动尺收缩。

尺子只有一把（其世界面只有一个），但不同惯性系有不同的同时面，导致不同的惯性系测得不同的一维尺子长度。

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2$$

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2$$

$$l^2 = -\Delta t^2 + l_0^2$$

x' 轴方程 $t = vx$, $t_b = \Delta t = v\Delta x = vl_0$

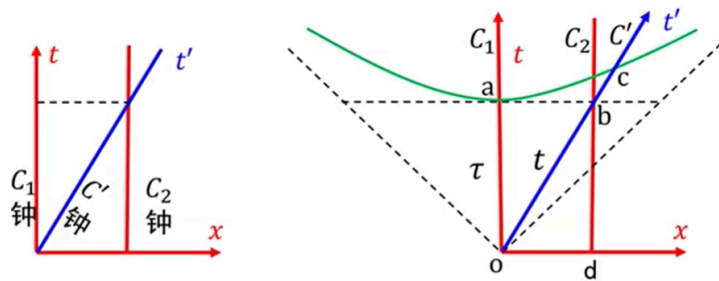
分别在 Σ 系和 Σ' 计算 b 到 o 点的线长，二者应相等：

$$l^2 = -v^2 l_0^2 + l_0^2 = (1 - v^2) l_0^2$$

得到：

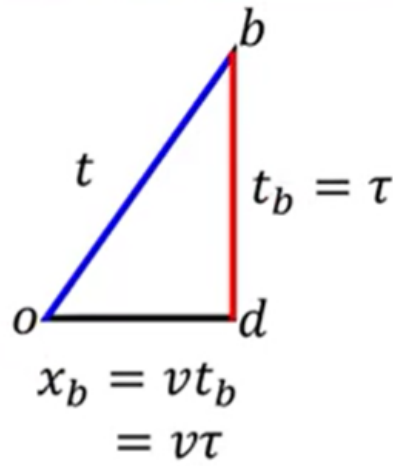
$$l = \sqrt{1 - v^2} l_0 = \frac{l_0}{\gamma}$$

3.2 钟慢效应



$$|db| = |oa| = |oc| > |ob|$$

$$\tau > t$$



t' 轴方程 $x = vt$,

$$x_b = vt_b = \tau$$

对类时间隔

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 < 0$$

$$-ds^2 = dt^2 - dx^2 > 0$$

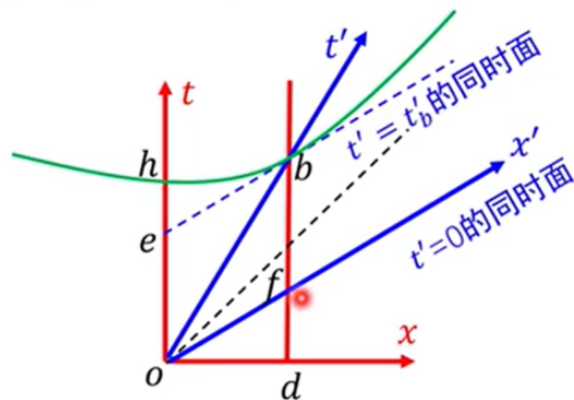
即：

$$|ob|^2 = |db|^2 - |od|^2$$

$$t^2 = \tau^2 - (v\tau)^2 \implies t^2 = (1 - v^2) \tau^2$$

$$t = \sqrt{1 - v^2} \tau = \frac{\tau}{\gamma} < \tau$$

运动时钟变慢，即 Σ 系认为动钟 C' 变慢。



从 Σ' 系来看， Σ' 系的观者根据同时面 $t' = 0$ 和 $t' = t'_b$ ，认为动钟 C_2 较慢：

$$|ob| = |oh| > |oe| = |fb|$$

Σ' 系, 拿 $|ob|$ 比 $|fb|$;

Σ 系, 拿 $|ob|$ 比 $|db|$ 。

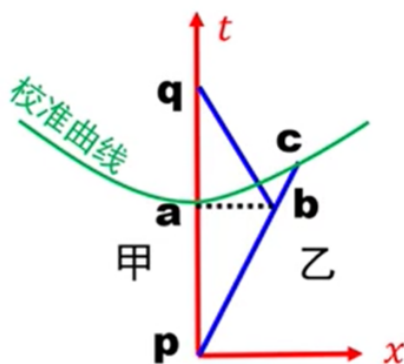
也就是说, 在 Σ 系比钟, 找 Σ 系的同时面; 在 Σ' 系比钟, 找 Σ' 系的同时面。

站的角度不同, 导致结果不一样。

钟慢效应钟, 无任何钟的走时率真正变小。

3.3 孪生子效应

时间的比较, 就是类时曲线线长的比较。



校准曲线给出:

$$|pa| = |pc| > |pb|$$

$$|qa| > |qb|$$

$$|\overline{paq}| > |\overline{pbq}|$$

因此, 重逢时乙比甲年轻。

推论: 闵氏时空中两点 (类时事件) 间的类时测地线是该两点间类时曲线的最长者。

一人惯性运动, 一人非惯性运动, 二人地位不平等。

惯性运动世界线为测地线, 4加速为零;

非惯性运动世界线为非测地线, 有4加速。

3.4 车库佯谬

有一辆静长与车库相等的车，以一定速度 u 入库。在司机看来，车库变短，装不下整辆车；在车库看来，车变短，可以装下。那么车库能否装下整辆车？

3.5 悬崖佯谬

汽车以接近光速的速度由公路驶向悬崖。在悬崖看来，汽车缩短，受重力作用进行平抛运动，会坠入悬崖；在汽车司机看来，悬崖高速向自己飞来，悬崖长度缩短至非常短的距离，因此可以飞越悬崖。那么汽车能否飞越悬崖？

3.6 剑鞘装仙剑

一柄仙剑高速飞入剑鞘，最终停在剑鞘里。仙剑和剑鞘内部空间静长相等。在剑鞘看来，仙剑缩短了，装入剑鞘时剑柄上的护手先接触剑鞘；在仙剑看来，剑鞘缩短了，剑尖先接触剑鞘底部。那么哪个部位受力使仙剑停止运动？

宇宙学

宇宙的组成

- Planets
- Stars and nebulae
- Milky Way and other galaxies
- Galaxy clusters (星系团)
- Large-scale structures

中心力场运动

若运动质点所受的力的作用线始终通过某个定点，则称该质点受中心力作用，定点为力心。

拉格朗日量

体系拉格朗日量：

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r) \\
 &= \frac{1}{2} m \left(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right)^2 - U(r) \\
 &= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U(r)
 \end{aligned}$$

运动方程

体系拉格朗日量：

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U(r)$$

代入 E-L 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

可得体系运动方程：

$$\begin{aligned}
 m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dU(r)}{dr} &= 0 \\
 \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) &= 0
 \end{aligned}$$

由于角动量为 $l = mr^2\dot{\theta}$ ，因此上面第二条方程就是说角动量守恒。

由于角动量 l 是个守恒量，利用这个守恒量把 $\dot{\theta} = l / (mr^2)$ 代入第一条运动方程可简化之：

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU(r)}{dr} = 0$$

守恒量

中心力场运动体系角动量守恒、能量守恒。

根据诺特定理由对称性分析守恒量

(1) 角动量守恒

体系拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U(r)$$

只取决于 \vec{r} 的大小 r ，故 L 具有空间旋转对称性，故角动量守恒。

由于角动量守恒，于是质点在做平面运动，采用极坐标系。

角动量定义为：

$$\vec{l} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

其大小为：

$$\begin{aligned} l &= m \left| \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right| \\ &= m \left| r\vec{e}_r \times \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \right) \right| \\ &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

(2) 能量守恒

体系拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U(r)$$

不显含时间，拉格朗日量具有时间平移对称性，因此体系能量守恒。

由运动方程分析守恒量

(1) 角动量守恒

θ 为循环坐标，其相应的广义动量是个守恒量，而 θ 对应的广义动量恰为角动量：

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = l$$

角动量守恒导致开普勒第二定律：质点径矢单位时间扫过的面积相等。

设位矢在 dt 时间内转过 $d\theta$ 角度，扫过的面积为：

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

于是单位时间内扫过的面积为：

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m} = \text{const}$$

(2) 能量守恒

体系能量：

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r) \end{aligned}$$

利用角动量这个守恒量 $l = mr^2\dot{\theta}$ 可把能量简化为：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m \left[\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{l}{mr^2} \right)^2 \right] + U(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \end{aligned}$$

利用运动方程

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU(r)}{dr} = 0$$

可计算能量对时间的全微商：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\dot{r}\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{dU(r)}{dr}\dot{r} \\ &= \dot{r} \left(m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU(r)}{dr} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

从上式可见，体系能量守恒。

中心力场轨道微分方程（比耐公式）

中心力场的微分轨道方程：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dU}{du} = 0$$

其中， $u = 1/r$ ，上面方程称为**比耐公式**。

证明：

第一条运动方程：

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU(r)}{dr} = 0 \quad (1)$$

(1) 中出现了 r 对时间的二阶微商。但我们想要轨道方程，即 r 与 θ 的关系，为此，利用角动量这个守恒量把对时间 t 的微商转化为对角度 θ 的微商。

$$l = mr^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \right)$$

于是 (1) 可以表示为：

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = 0 \quad (2)$$

令：

$$r = 1/u$$

$$dr = -\frac{1}{u^2} du$$

代入 (2) 整理得到用 $u = 1/r$ 表达的中心力场轨道微分方程（比耐公式）：

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dU}{du} = 0$$

中心力场轨道积分方程

注意到，角动量 l 和能量 E 是两个守恒量：

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \implies dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right]}}$$

$$l = mr^2\dot{\theta} \implies dt = \frac{mr^2}{l} d\theta$$

消去 dt ，积分得：

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{l dr / r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - (l/r)^2}}$$

这就是轨道方程，其中， E, l, r_0, θ_0 是常数。

开普勒运动问题：平方反比吸引力

圆锥曲线的焦点-准线定义

在平面上，所有到一个定点的距离与到一条定直线的距离的比值是一个固定常数的点的轨迹，称为圆锥曲线。其中，定点称为圆锥曲线的焦点（focus），定直线称为圆锥曲线的准线（directrix），二者互相对应，对应的焦点与准线的距离称作焦准距（focal parameter），通常记作 p ，比值称作圆锥曲线的离心率（eccentricity），通常记作 e 。

当 $e = 0$ 时，轨迹称为圆；

当 $e \in (0, 1)$ 时，轨迹称为椭圆；

当 $e = 1$ 时，轨迹称为抛物线；

当 $e > 1$ 时，轨迹称为双曲线。

极坐标下圆锥曲线的方程

选焦点作为原点，对称轴作为极轴，建立极坐标。考虑焦准距为 p ，离心率为 e 的圆锥曲线上一点 (r, θ) ，由定义有：

$$\frac{r}{p - r \cos(\pi - \theta)} = e$$

即：

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

开普勒第一定律（椭圆定律）

每一个行星都沿着各自的椭圆轨道环绕着太阳，而太阳则处在椭圆的一个焦点上。

万有引力：

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{k}{r^2} \iff U(r) = -\frac{k}{r}$$

此时轨道具有圆锥曲线方程的形式：

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad p = \frac{l^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

该圆锥曲线的焦点即为力心, p 为圆锥曲线的焦准距, e 为圆锥曲线的离心率。

标准积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{-(b + 2ax)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

椭圆轨迹的推导

$$\text{令 } r = \frac{1}{u}$$

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}$$

标准积分公式给出:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \frac{-(\beta + 2\gamma x)}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}$$

$$\text{令 } \alpha = \frac{2mE}{l^2}, \beta = \frac{2mk}{l^2}, \gamma = -1 \text{ 得到:}$$

$$\theta = \theta_0 - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$$

最后得到:

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

e 不同, 圆锥曲线可以分为椭圆、抛物线和双曲线, 而 e 又取决于体系的能量, 故:

(1) 当 $E = -\frac{mk^2}{2l^2}$ 时, $e = 0$, 轨迹为圆

(2) 当 $E < 0$ 时, $e < 1$, 轨迹为椭圆, 此时可证:

$$\text{椭圆的半长轴 } a \text{ 只与能量有关: } a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{k}{2E}$$

$$\text{给定能量 } E \text{ 后, 椭圆的离心率 } e \text{ 由角动量 } l \text{ 决定: } e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}$$

(3) 当 $E = 0$ 时, $e = 1$, 轨迹为抛物线

(4) 当 $E > 0$ 时, $e > 1$, 轨迹为双曲线

开普勒第二定律（面积定律）

质点径矢单位时间扫过的面积相等。

证明：

设位矢在 dt 时间内转过 $d\theta$ 角度，扫过的面积为：

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

于是单位时间内扫过的面积为：

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m} = \text{const}$$

开普勒第三定律（椭圆轨道（ $E < 0$ ）运动周期）

椭圆轨道半长轴 a 的三次方 a^3 与周期 T 的平方 T^2 成正比：

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}$$

在一般中心吸引力场的作用下，束缚运动的轨道不一定是闭合的。椭圆运动周期，记为 τ ，定义为质点从近日点出发到再次返回近日点所需的时间。可以求出：

$$\tau = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

证明：

将万有引力场 $U(r) = -\frac{k}{r}$ ，代入得：

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} + E}} = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{-(r-a)^2 + e^2 a^2}}$$

令 $r = a(1 - e \cos \psi)$ ，结合轨道方程可看出， θ 经历一周， ψ 将通过

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_{\psi_0}^{\psi} (1 - e \cos \psi) d\psi$$

Cosmic scales

1 AU \approx 150 million km：地-日平均距离

1 lightyear(ly): 光年

1 parsec(pc) \approx 3.26 ly

1 Kpc = 10^3 pc

1 Mpc = 10^6 pc

Red shift

Comoving coordinates（共动坐标）

共动坐标是一种随宇宙一起膨胀的坐标系。

宇宙中任意两个天体之间的实际物理距离 $D(t)$ 通常表示为：

$$D(t) = a(t) \cdot \chi$$

其中， $a(t)$ 是尺度因子，用于描述宇宙的膨胀； χ 就是共动距离，它在宇宙膨胀过程中保持不变。

红移

红移是光的波长被拉长的现象，通常用符号 z 表示：

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1$$

其中， λ_{emit} 是光发出时的波长， λ_{obs} 是光被我们观测到时的波长。

三种红移来源

类型	原因	示例
多普勒红移	天体在远离我们	星系运动、光谱偏红
引力红移	强引力场使光能量下降	黑洞附近
宇宙学红移	宇宙膨胀“拉伸”了光的波长	远处星系、宇宙微波背景辐射

宇宙学红移 z 和尺度因子 $a(t)$ 的关系

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})}$$

推导：

设光的周期为 Δt ，若不考虑宇宙膨胀，光的波长（共动距离）为：

$$\lambda_0 = c\Delta t$$

先考虑宇宙膨胀，在光发出的时刻 t_{emit} ，宇宙尺度因子为 $a(t_{\text{emit}})$ ，根据实际距离 $D(t)$ ，尺度因子 $a(t)$ 和共动距离 χ 的关系

$$D(t) = a(t) \cdot \chi$$

有：

$$\lambda_{\text{emit}} = a(t_{\text{emit}})\lambda_0$$

类似地，在光被接收的时刻 t_{obs} ，宇宙尺度因子为 $a(t_{\text{obs}})$ ，有：

$$\lambda_{\text{obs}} = a(t_{\text{obs}})\lambda_0$$

因此：

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1 = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})} - 1$$

即：

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})}$$

哈勃常数

哈勃常数 H_0 是描述宇宙当前膨胀速度的参数，定义为：

$$H_0(t_0) \equiv \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_0}$$

低红移时红移和哈勃常数的关系

红移 z 和尺度因子 $a(t)$ 的关系

$$1 + z = \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})}$$

若 $\Delta t \equiv t_{\text{obs}} - t_{\text{emit}}$ 很小，则 $a(t_{\text{obs}})$ 在 $t = t_{\text{emit}}$ 处展开，保留至一阶小量：

$$\begin{aligned}
1+z &= \frac{a(t_{\text{obs}})}{a(t_{\text{emit}})} \approx \frac{a(t_{\text{emit}}) + \dot{a}(t_{\text{emit}})\Delta t}{a(t_{\text{emit}})} \\
&= 1 + \frac{\dot{a}(t_{\text{emit}})}{a(t_{\text{emit}})}\Delta t \\
&= 1 + H(t_{\text{emit}})\Delta t \\
&\approx 1 + H(t_{\text{obs}})\Delta t \\
&= 1 + H(t_{\text{obs}})\frac{D}{c}
\end{aligned}$$

即：

$$z \approx H(t_{\text{obs}})\frac{D}{c}$$

Horizon

Event Horizon

$$d_{\text{event}}(t) = a(t) \int_t^{+\infty} \frac{cdt'}{a(t')}$$

存在于宇宙加速膨胀的情况。

Hubble Horizon

$$R_H = \frac{c}{H(t)}$$

现代宇宙学的假设

(isotropic) 宇宙是各向同性的；

(homogeneous) 宇宙是均匀的；

The expansion receding speed is greater the farther apart. 离我们越远的星系，它们因为宇宙膨胀而“退行”的速度越快。

The universe has grown from the tiny primitive universe to how it looks today. 宇宙从最初那个微小、原始的宇宙，演化成了今天这个样子。

The universe began about 14 billion years ago(Big Bang). 宇宙大约始于 140 亿年前（大爆炸）。

At the beginning, the universe was very dense, at extremely high temperature.

10-44 seconds after its birth, the universe expands rapidly, in 10⁻³⁴ seconds by a factor of 10¹⁰⁰, in a phase called "Inflation".

After inflation, the universe expands and cools until today.

宇宙微波背景辐射 (CMB)

CMB 是从宇宙中各个方向射来的微波辐射，其本质是宇宙在大爆炸后约 38 万年冷却到可以形成中性原子时释放出的光。

大爆炸早期（宇宙年龄 < 38 万年），宇宙高温高密，充满光子、电子、质子。光子被自由电子散射（康普顿散射），无法自由传播。

重组时期（宇宙年龄 ≈ 38 万年，温度约 3000K），宇宙膨胀冷却到可以形成中性氢原子。光子不再频繁散射，开始自由传播。这些光子就是现在的 CMB。

今天的观测（经过138亿年膨胀），由于宇宙膨胀，光波被拉长成微波波段。光子温度降为约 2.73 K，对应波长在毫米级。

观测特征

几乎各向同性：从任何方向看，CMB 的温度几乎一致。

温度微扰（ 10^{-5} ）：小尺度的温度涨落揭示了早期宇宙的密度扰动，是星系形成的“种子”。

黑体谱：CMB 的光谱极度接近理想黑体，峰值在 160 GHz 左右。

暗物质 Dark Matter

暗物质是一种只通过引力相互作用、极弱的可能的弱相互作用参与宇宙动力学的物质成分。

暗物质不参与电磁相互作用（即不吸光、不发光、不反射光）

暗物质存在的证据

(1) 星系旋转曲线异常：

按牛顿引力理论，星系外围的恒星应转得更慢，但实际观察显示它们的转速远超预期，说明有额外“看不见”的质量在拉扯它们。

(2) 星系团中引力不足：

星系团中星系运动太快，仅靠可见物质无法束缚它们。

弗里茨·兹威基（1930s）最早提出“暗物质”来解释这一现象。

(3) 引力透镜效应：

大质量天体弯曲背景光形成“透镜”。

观测到的光线弯曲比可见质量预测的更强。

(4) 宇宙微波背景辐射（CMB）涨落模式：

精细的涨落结构表明宇宙中有大量不参与辐射相互作用的冷物质。

(5) 宇宙大尺度结构形成：

如果只有普通物质，宇宙膨胀太快，无法形成今天这样密集的星系结构。

暗物质候选者

- WIMPs（弱相互作用大质量粒子）：最经典模型，例如超对称粒子（中微子的一种扩展）
- 轴子（Axions）：极轻的粒子，来自解决强CP问题的理论
- 类星体黑洞（MACHOs）：失败了，暗物质不是由正常但不可见的天体组成的
- 中微子：有质量，但太轻、太“热”了，不足以成为主导的暗物质
- SUSY：gravitino(引力子伴粒子), neutralino

暗能量 Dark Energy

在广义相对论框架中，暗能量可以看作是一种具有负压的流体或场，其压强 p 和能量密度 ρ 满足状态方程：

$$p = w\rho$$

当 $w < -1/3$ 会导致宇宙加速膨胀。

$$-4\pi G\rho = 3\left(H^2 + \dot{H}\right)$$

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

Friedmann Eqs

Friedmann 第一方程（能量约束方程）：

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$H \equiv \dot{a}/a$ 是哈勃参数, 描述宇宙膨胀速率; k 是空间曲率常数。平直宇宙 $k = 0$, 正曲率 (球面) $k = +1$, 负曲率 (双曲面) $k = -1$;

Friedmann 第二方程 (宇宙加速度方程) :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

a 是尺度因子, ρ 是宇宙中的能量密度, p 是压强, Λ 是宇宙常数。如果压力足够负, 使得 $\rho + 3p < 0$, 则宇宙加速膨胀。

定义临界密度 ρ_{crit} :

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

对于某一组分 (物质、辐射、暗能量等) X , 定义无量纲的密度参数 Ω_X :

$$\Omega_X \equiv \frac{\rho_X}{\rho_{\text{crit}}}$$

Friedmann 第一方程可改写为:

$$\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$$

其中 Ω_m 是总物质的密度参数; ω_k 是曲率的密度参数; Ω_Λ 是暗能量的密度参数。

Friedmann 第二方程可改写为:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -H^2 \left(\frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda \right)$$

Separation between galaxies 图

Roatations Curves

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi, \quad \dot{\phi} = \frac{J}{\mu r^2}, \quad \dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\vec{e}_r$$

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{\phi}\dot{r}}{r}$$

$$\dot{\vec{v}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \right) \vec{e}_r$$

circular velocity:

$$\dot{r} = 0 \implies \vec{v} = v_c \vec{e}_\phi, \quad v_c = r \dot{\phi}$$

$$\vec{a} = -r \dot{\phi}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_c^2}{r} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = -\frac{GmM(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr$$

$$M(r) = \text{const}, \quad \rho(r) \ll 1$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \implies v_c = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

$$r > r_{??}, \quad v_c \propto r^{1/2}$$

Rotation curve (图) :

If $\rho(r) = \rho_0 r^\alpha$, 考虑几种特殊情况 ($\alpha = 1$ 情况 Morgan 写错了) :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0 r^{2+\alpha} dr = \rho_0 \frac{r^{3+\alpha}}{3+\alpha} \implies v_c \propto r^{(2+\alpha)/2}$$

$$\alpha = 1, \quad M \propto r^4, \quad v_c \propto r^{3/2}$$

$$\alpha = 0, \quad M \propto r^3, \quad v_c \propto r$$

$$\alpha = -2, \quad M \propto r, \quad v_c \propto \text{const}$$

$$\alpha = -3, \quad M \propto \text{const}, \quad v_c \propto r^{-1/2}$$

Double power law:

$$\rho = \frac{\rho_0}{r^{-\alpha} (1 + r/r_0)^{3+\alpha}}$$

$$r \ll r_0, \quad \rho \rightarrow r^\alpha$$

$$r \gg r_0, \quad \rho \rightarrow r^{-3}$$

$v_c - r$ 图

Dark Energy

The discovery of dark energy lies back in the original observations of Einstein and Hubble.

Einstein : Gravitation is geometry. The geometry of space is fixed by the matter within it.

Hubble : Space-time at largest scales illustrates this.

The accelerated expansion is caused by a small and positive "cosmological constant" modifying Einstein's theory -- an energy density of empty space.

"Virtual" quantum particles would be expected to generate a cosmological term in our best theories.

Cosmic Formation and evolution

Time	era	event	Temp.K
1e-43s	Singularity	Big Bang	Infinity
1e-35s		Time, space, vacuum field	1e32
1e-6s	baryogenesis	hadronic, electroweak, interactions	1e13
1e-2s	Leptogenesis	Electron-positron annihilation	1e10
1min	nucleosynthesis	Helium formation	1e9
30min		Particles stop interacting	$4 \times 1e3$
300kyrs	recombination	Atom forms, transparent universe	1e3
150Myrs		First generation stars, galaxies	
1Byrs		Second generation	

Main observations that favor Big Bang

(1) Hubble law of redshift-distance

(2) 3K CMBR

(3) Light elements cosmic abundances

(4) Age of the Universe

Hubble law

light source observed moving away \implies shift to red from emitted light

Classification :

- Doppler redshift

Redshift from relative motion between object and observe

- Gravitational redshift

Redshift occurs to light escaping deeper gravitational fields

- Cosmological redshift

Universe expansion

Hubble law :

$$v = Hd$$

v -recession speed, d -distance, H -Hubble constant

In 1922, Hubble discovered galaxies' Doppler lines are redshifted.

Explanation : The entire universe is expanding isotropically (各向同性地) .

3K CMBR(宇宙微波背景辐射)

Black body absorbs all external electromagnetic radiation without reflection or transmission.

About 30000 years after big bang, the universe temperature dropped so electrons, nucleus and ions combined into neutral atoms. Photons decoupled from matter, in a state of high T thermal equilibrium, the Planck distribution, Which survived to this as T drops. This is CMB

Cosmic helium abundance

懒得敲了。

Determination of the age of the universe

懒得敲了。

The future of the universe

R-W 线元:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

r, θ, φ : comoving coordinates

$k = \text{const}$: 3D space curvature

$R = R(t)$: scale factor of the expanding universe. $R_0 \equiv R(0) = 1$ today.

图:

What kind of BB expansion?

- Space itself expands;
- Time, space and matter are simultaneously generated from the big bang;
- No center. Expansion from every point;
- Space have no boundaries. Density and pressure are homogeneous.

Depending on the curvature factor and matter density of the universe.

Is cosmological redshift Doppler?

- Cosmological redshift is **not a Doppler effect** but a spatial expansion effect;
- Doppler effect induces emitted light anisotropy while space expansion yields light isotropy;

Can expansion exceeds c ?

- Recession speed can exceed light speed;
- Galaxy recession (Morgan 这里打错了吧) increases with distance, and reaches c at the Hubble distance;
- Outside, recession speed exceeds c ;
- This does not violate SR. Recession speed is not speed in space, nor speed of signal propagation, but expansion of space.