2-1

2-1-1

> 求广义 Lorentz 变换的逆变换。

分量形式

广义洛伦兹变换：

$$x'_\mu = A_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$$

两边同乘 $A_{\mu\rho}$，并利用正交关系 $A_{\mu\rho} A_{\mu\nu} = \delta_{\rho\nu}$：

$$\begin{aligned} A_{\mu\rho} x'_\mu &= A_{\mu\rho} A_{\mu\nu} x_\nu + A_{\mu\rho} b_\mu \\ &= \delta_{\rho\nu} x_\nu + A_{\mu\rho} b_\mu \\ &= x_\rho + A_{\mu\rho} b_\mu \end{aligned}$$

即有广义洛伦兹变换的逆变换：

$$x_\rho = A_{\mu\rho} x'_\mu - A_{\mu\rho} b_\mu$$

矩阵形式

广义洛伦兹变换矩阵形式：

$$X' = AX + b$$

设：

$$g(A, b) X = AX + b$$

则：

$$g\left(A^{-1}, A^{-1} b\right) g(A, b) X = g\left(A^{-1}, -A^{-1} b\right)(AX + b) = X + A^{-1} b - A^{-1} b = X$$

即：

$$g^{-1}(A, b) = g\left(A^{-1}, -A^{-1} b\right)$$

2-1-2

> 若 $A^{\mathrm{T}}A=I$，证明 $AA^{\mathrm{T}}=I$，从而 $A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu}$.

$$A^{\mathrm{T}}A=I\Longrightarrow A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$$

因此：

$$AA^{\mathrm{T}}=AA^{-1}=I$$

从而

$$I_{\mu\nu}=\left(AA^{\mathrm{T}}\right)_{\mu\nu}=A_{\mu\lambda}\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{\lambda\nu}=A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda}$$

即：

$$A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu}$$

2-1-3

> 说明在固有 Lorentz 变换下，$a_{\mu\nu}$ 仅与两惯性系之间的相对速度有关。

狭义相对性原理给出，物理定律在所有惯性参考系中形式相同，惯性系之间的变换仅由它们的相对运动决定。而两个惯性系之间的相对运动由相对速度唯一确定，因此保持线元 $\mathrm{d}s^2$ 不变的固有 Lorentz 变换下，$a_{\mu\nu}$ 仅与两惯性系之间的相对速度有关。

2-1-4

> 什么是 Lorentz 张量?

若 $\phi_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 在广义洛伦兹变换 $x'^{\mu}=A^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+b^{\mu}$ 下具有如下的变换规律：

$$\phi'_{\mu\nu\cdots\lambda}(x')=A^{\mu}_{\alpha}A^{\nu}_{\beta}\cdots A^{\lambda}_{\gamma}\phi_{\alpha\beta\cdot\gamma}(x)$$

则称 $\phi_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 为 Lorentz 张量。

2-1-5

> 证明在广义坐标变换下，V^{μ}_{μ} 是标量，$V_{\mu\mu}$ 不是。在广义 Lorentz 变换下，$V_{\mu\mu}$ 是标量。

在广义坐标变换 $x^{\mu}\rightarrow x'^{\mu}$ 下，

$$V'^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}V^{\alpha}_{\beta}$$

$$V'^{\mu}_{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}V^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}V^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\beta}_{\alpha}V^{\alpha}_{\beta}=V^{\alpha}_{\alpha}$$

即 V^{μ}_{μ} 是标量。

$$V'_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}V_{\alpha\beta}$$

$$V'_{\mu\mu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}V_{\alpha\beta}\neq V_{\mu\mu}$$

即 $V_{\mu\mu}$ 不是标量。

在广义洛伦兹变换 $x^{\mu}\to x'^{\mu}=A^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+b^{\mu}$ 下，

$$V'_{\mu\mu}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}V_{\alpha\beta}=A^{\mu}_{\alpha}A^{\mu}_{\beta}V_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}V_{\alpha\beta}=V_{\alpha\alpha}$$

即 $V_{\mu\mu}$ 是标量。

2-1-6

> 证明在 τ 变换下，$\tilde{\phi}'(x')=-\tilde{\phi}(x)$.

赝标量：

$$\tilde{\phi}=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

对于广义洛伦兹变换，赝标量的变换规律为：

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}'(x')&=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\phi'_{\alpha\beta\gamma\delta}\\&=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}A_{\gamma\lambda}A_{\delta\rho}\phi_{\mu\nu\lambda\rho}\\&=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left|A\right|\phi_{\mu\nu\lambda\rho}\\&=\left|A\right|\tilde{\phi}(x)\end{aligned}$$

特别地，对于 τ 变换，$|\tau|=-1$，因此：

$$\tilde{\phi}'(x')=\left|\tau\right|\tilde{\phi}(x)=-\tilde{\phi}(x)$$

2-1-7

> 证明方程 $A_{\mu}-\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\nu}=0$ 是 Lorentz 协变的。

在 x' 系方程为:

$$A'_\mu - \partial'_\mu \partial'_\nu A'_\nu = 0$$

这里为了避免混乱，把广义洛伦兹变换矩阵记为 $\Lambda_{\alpha\beta}$

A_μ, ∂_μ 分别服从矢量变换规律:

$$A'_\mu = \Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha, \quad \partial'_\mu = \Lambda_{\mu\beta} \partial_\beta$$

x' 系中的方程可化为:

$$\Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha - \Lambda_{\mu\beta} \partial_\beta \Lambda_{\nu\gamma} \partial_\gamma \Lambda_{\nu\rho} A_\rho = 0$$

即:

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha - \Lambda_{\mu\beta} \partial_\beta \Lambda_{\nu\gamma} \partial_\gamma \Lambda_{\nu\rho} A_\rho \\ &= \Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha - \Lambda_{\mu\beta} \delta_{\gamma\rho} \partial_\beta \partial_\gamma A_\rho \\ &= \Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha - \Lambda_{\mu\beta} \partial_\beta \partial_\rho A_\rho \end{aligned}$$

方程左右两边同乘 $\Lambda_{\mu\lambda}$ 得:

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_{\mu\lambda} \Lambda_{\mu\alpha} A_\alpha - \Lambda_{\mu\lambda} \Lambda_{\mu\beta} \partial_\beta \partial_\rho A_\rho \\ &= \delta_{\lambda\alpha} A_\alpha - \delta_{\lambda\beta} \partial_\beta \partial_\rho A_\rho \\ &= A_\lambda - \partial_\lambda \partial_\rho A_\rho \end{aligned}$$

可见，在 Lorentz 变换下，方程

$$A'_\mu - \partial'_\mu \partial'_\nu A'_\nu = 0$$

等价于方程

$$A_\lambda - \partial_\lambda \partial_\rho A_\rho = 0$$

即方程 $A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu = 0$ 是 Lorentz 协变的。

2-1-8

> 讨论 K-G 方程中负几率困难。

自然单位制下 K-G 方程为:

$$\left(\Box - m_0^2\right) \phi(x) = 0$$

复共轭为:

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi^*(x) = 0$$

第一条方程乘 $\phi^*(x)$ 减去第二条方程乘 $\phi(x)$ 得:

$$\phi^*(x)\Box\phi(x) - \phi(x)\Box\phi^*(x) = 0$$

即:

$$\phi^*(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi^*(x) = 0$$

注意到:

$$\phi^*(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\left[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x)\right] - \left[\partial_\mu\phi^*(x)\right]\left[\partial_\mu\phi(x)\right]$$

$$\phi(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi^*(x) = \partial_\mu\left[\phi(x)\partial_\mu\phi^*(x)\right] - \left[\partial_\mu\phi(x)\right]\left[\partial_\mu\phi^*(x)\right]$$

则方程化为:

$$\partial_\mu\left[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\phi^*(x)\right] = 0$$

定义四维流密度为:

$$j_\mu = \left(\vec{j}, \mathrm{i}\rho\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\phi^*(x)\right]$$

则连续性方程为:

$$\partial_\mu j_\mu = 0$$

$\vec{j}$ 和 ρ 分别为:

$$\vec{j} = -\frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\nabla\phi(x) - \phi(x)\nabla\phi^*(x)\right]$$

$$\rho = \frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\partial_t\phi(x) - \phi(x)\partial_t\phi^*(x)\right]$$

连续性方程可用 $\vec{j}, \rho$ 表达为:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

考虑 K-G 方程的平面波解，设

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

代入 K-G 方程可得：

$$E=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m_0^2}$$

此时 ρ 为：

$$\rho=\frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\partial_t\phi(x)-\phi(x)\partial_t\phi^*(x)\right]=-\frac{E}{m_0}$$

由于 $E=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m_0^2}$ 可正可负，因此 ρ 可取负值。

2-1-9

> 说明 K-G 方程中负几率密度 $\rho=-\mathrm{i}j_4(x)$ 为实数。

2-1-8 给出：

$$\rho=\frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\partial_t\phi(x)-\phi(x)\partial_t\phi^*(x)\right]$$

考虑 K-G 方程的平面波解，则

$$\rho=\frac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^*(x)\partial_t\phi(x)-\phi(x)\partial_t\phi^*(x)\right]=-\frac{E}{m_0}$$

由于 E,m_0 都是实数，则 ρ 也是实数。