▼ 0 记号约定

- 爱因斯坦求和约定
- ▼ 张量的广义定义与R场论指标位置约定
 - 协变张量
 - 逆变张量
 - 混合张量
 - 为什么R场论的指标统一写成下指标
- ▼ 1 粒子物理与量纲分析
 - ▼ 粒子物理
 - 61种基本粒子
 - 守恒定律
 - U(1) 规范理论
 - SU(2) × U(1) 规范理论
 - SU(3) 规范理论
 - 标准模型
 - 夸克禁闭
 - 渐进自由
 - 量纲分析与自然单位制
- ▼ 2 广义洛伦兹变换
 - R场论的四维时空坐标
 - 线元
 - ▼ 广义洛伦兹变换
 - 广义洛伦兹变换的定义
 - ▼ 广义洛伦兹变换的两条正交关系
 - 证明第一条正交关系
 - 证明第二条正交关系
 - ▼ 广义洛伦兹变换的矩阵形式
 - 广义洛伦兹变换矩阵 A 的性质
 - 几种特殊广义洛伦兹变换
 - 广义洛伦兹变换的分类
 - 给几种特殊广义洛伦兹变换命名
- ▼ 3 张量、赝张量及其变换规律
 - ▼ Levi-Civita 符号
 - Levi-Civita 符号的定义
 - ▼ 两个 Levi-Civita 符号指标缩并规律
 - 一般规律
 - 两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 4 个指标缩并
 - 两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 3 个指标缩并
 - 两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 2 个指标缩并
 - 两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 1 个指标缩并
 - ▼ 行列式
 - 行列式的定义
 - Levi-Civita 符号与行列式相乘
 - ▼ 场论中常用的张量和赝张量
 - SR中张量的定义
 - 对称张量
 - 反对称张量
 - 标量
 - 矢量

- 二阶张量
- 三阶张量
- ▼ 赝标量
 - 赝标量的两种定义
 - 赝标量的变换规律
- ▼ 赝矢量
 - 赝矢量的定义
 - 赝矢量的变换规律
- ▼ 二阶赝张量
 - 二阶赝张量的定义
 - 二阶赝张量的变换规律
- ▼ 4 场方程
 - 达朗贝尔算符
 - 实标量场方程
 - 复标量场方程
 - 矢量场方程
 - 旋量场方程
- ▼ 5 Clifford 代数、 γ 矩阵、旋量表示、旋量与 Dirac 方程
 - ▼ Clifford 代数与 γ 矩阵
 - R场论中的 Clifford 代数
 - 由 V 的正交归一基生成 $C_n(V)$ 的基
 - r-矢量
 - $C_n(V)$ 中元素的一般形式
 - ▼ Clifford 代数的代数表示
 - γ 矩阵作为 Clifford 代数矢量基的代数表示
 - γ 矩阵的性质
 - R 场论中的 γ 矩阵
 - \blacksquare R场论中 γ 矩阵的性质
 - γ₅ 矩阵
 - Lorentz 群的旋量表示
 - ▼ SO(n) 群的生成元
 - SO(n) 群的定义
 - 生成元的定义
 - SO(*n*) 群的生成元
 - SO(n) 群李代数
 - Lorentz 群旋量表示的生成元
 - Λ 与 γ₅ 的关系
 - ▼ 几种特殊的旋量表示 S, P, T
 - S 矩阵
 - P 矩阵
 - T矩阵
 - Λ[†] 的表达式
 - ▼ 旋量
 - 旋量的定义
 - 共轭旋量
 - lacktriangleright 由 $ar{\psi}$ 和 ψ 组成的张量或赝张量
 - $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 作为标量或赝标量
 - $\psi(x)\gamma_5\psi(x)$
 - $\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)$ 的变换规律

- $\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_{5}\psi(x)$ 的变换规律
- \bullet $\bar{\psi}(x)\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\cdots\gamma_{\alpha_n}\psi(x)$ 的变换规律
- n 阶赝张量 $\bar{\psi}(x)\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\cdots\gamma_{\alpha_n}\gamma_5\psi(x)$
- 标量 $\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)$
- ▼ Dirac 方程 (旋量场方程)
 - Dirac 方程 (旋量场方程) 的导出
 - Dirac 方程的共轭方程
 - Dirac 方程的协变性
 - Dirac 共轭方程的协变性
 - Dirac 方程描写粒子的自旋为 1/2
 - 用 σ_i^0 表达 α_i , β , γ_μ
 - 一些对易关系
 - ▼ 自由旋量粒子的波函数
 - 自旋旋量粒子
 - 四维动量算符及其本征方程
 - 具有确定四维动量自由旋量粒子动量表象 Dirac 方程
 - 具有确定三维动量的自由旋量粒子的哈密顿算符
 - 动量表象 $\hat{H}(\vec{p})$ 的本征方程
 - 具有确定四维动量自由旋量粒子自旋方向
 - 具有确定动量自由旋量粒子的四种独立态状态
 - 单位旋量 $u_a(\vec{p})$ 的空间反射态
 - ▼ 旋量场的电荷共轭变换 (正反粒子变换)
 - 有电磁场存在时的 Dirac 方程
 - 电磁场存在时 Dirac 方程的 Lorentz 协变性
 - 电荷共轭变换
 - \bullet ψ^C 和 $\bar{\psi}^C$ 满足的方程
 - 反粒子单位旋量 $v_b(\vec{p})$
 - 单位旋量 $u_a(\vec{p})$ 和 $v_a(\vec{p})$ 的一些性质
 - 正反粒子投影算符 $\Lambda_+(p)$
- ▼6拉格朗日方程、对称性与守恒律
 - ▼ 场论中的拉格朗日原理
 - 拉格朗日原理与场的运动方程
 - 拉格朗日密度满足的条件
 - ▼ 各种自由场的拉格朗日函数
 - 实标量场
 - 复标量场
 - 赝标量场
 - 旋量场
 - 矢量场
 - ▼ 对称性与守恒律
 - 广义守恒定理1
 - 广义守恒定理2
 - ▼ 诺特定理
 - 能量动量张量和能量动量守恒
 - 角动量张量和角动量守恒
 - 相因子变换、电流密度矢量和电荷守恒
- ▼ 7 规范场理论
 - 规范变换
 - 伴随协变张量 $F_{\mu\nu}$ 及其性质

- ▼8自由场二次量子化
 - 量子场论基本假设
 - 二次量子化 SOP
 - ▼ 实标量场量子化
 - 场算符 Fourier 积分分解
 - 哈密顿算符表达式
 - 动量算符表达式
 - 实标量场二次量子化算符的性质
 - 场论中的真空态
 - 归一化的态矢量
 - 粒子数算符
 - 粒子数表象
 - ₱, Ĥ 粒子数算符表达式
 - ▼ 矢量场量子化
 - 算符化
 - 算符对易关系
 - 光子极化坐标中物理量算符表达式
 - 场量子化后的 Lorenz 规范条件
 - 粒子数表象
 - 旋量场量子化
 - ▼ 3.7 旋量场量子化
 - 旋量场的二次量子化
 - 动量表象海森堡方程
 - 产生、消灭算符反对易关系
 - 粒子数表象
- ▼ Green 函数、Feynman 函数、N 乘积、P 乘积、T 乘积与耦合
 - ▼ 场方程的 Green 函数和 Feynman 函数
 - 线性偏微分方程的 Green 函数
 - ▼ 各种场的 Green 函数
 - 标量场
 - 矢量场
 - 旋量场
 - Feynman (Green函数) 与对易函数的关系
 - ▼ N 乘积, P 乘积和 T 乘积与耦合
 - N 乘积
 - P 乘积
 - T 乘积
 - 收缩 (耦合)
- ▼ 场的相互作用与 S 矩阵
 - 场的相互作用拉格朗日函数
 - ▼ 场的相互作用运动方程荷相互作用哈密顿量
 - 电子与电磁场作用的运动方程
 - ▼ 场相互作用的哈密顿量
 - 电子旋量场与电磁场相互作用哈密顿算符
 - ▼ 相互作用绘景
 - 薛定谔绘景
 - 海森堡绘景
 - 相互作用绘景
 - 积分方程

- ▼ $\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵及其性质
 - $\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵级数解
- ▼ S 矩阵及其在 QED 中的形式
 - 量子电动力学中的 S 矩阵
- ▼ T 乘积展开的 Wick 定理
 - T 乘积展开的 Wick 定理
 - ullet QED中的 \hat{S} 矩阵和耦合式
 - ▼ QED中 \hat{S} 矩阵的 Wick 展开式
 - 計算 Ŝ₀
 - 計算 Ŝ₁
 - 計算 Ŝ₂
- lacktriangleright S 矩阵的 Feynman 图解
 - QED Feynman 图形规则
 - ▼ QED 中的 Feynman 图
 - \hat{S}_1 的 Feynman 图解
 - \hat{S}_2 的 Feynman 图解
 - \hat{S}_3 的 Feynman 图解
- Furry 关于电子封闭内线的定理
- ▼ 粒子数表象下 Ŝ 矩阵的矩阵元
 - 产生、消灭粒子算符对状态幅度的作用
 - 场算符 N 乘积对本征态矢量的作用
 - ullet M_{i-f} 作为粒子数表象 \hat{S} 矩阵矩阵元
- ▼ 动量表象 S 矩阵元
 - 动量表象 Feynman 图解规则
 - Compton 效应
- ▼ 4.11 基本粒子反应几率和截面
 - $|\langle f | S | i \rangle|^2$ 的意义
 - 单位时间、单位空间基本粒子反应跃迁几率
 - 基本粒子的反应截面
 - 不稳定基本粒子衰变的平均寿命
 - 单位时间基本粒子反应的几率
 - 在外场作用下基本粒子反应的截面
- ▼ 光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式
 - 对电子和正电子终态的自旋求和
 - 对电子或正电子终态自旋求和并对初态自旋平均
 - 常用 γ_μ 矩阵求迹公式
 - 对光子的极化求和
 - 例子
- ▼ 光子和电子的散射 (Compton 效应)
 - $lacksymbol{\bullet}$ Compton 效应的 $M_{i-f}^{(2)}$ 矩阵元素
- 4.15 正负电子对湮灭为两个光子
- ▼ 4.16 高能电子对撞
 - 夸克禁闭
 - 渐进自由
- 4.17 µ 粒子衰变

0 记号约定

爱因斯坦求和约定

本文采用爱因斯坦求和约定,即两个重复的指标(不管指标在上面还是在下面)默认对指标所有可能的取值求和。不采用爱因斯坦求和约定的地方会明确指出。

张量的广义定义与R场论指标位置约定

协变张量

设有一个由 n 个下指标描述的量 $U_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, 当坐标有如下变换

$$x'^k=x'^k\left(x^1,x^2,\cdots,x^l
ight),\quad k=1,2,\cdots,l$$

时,若 $U_{i_1i_2\cdots i_n}$ 按照如下规律变化

$$U'_{i_1i_2\cdots i_n} = U_{j_1j_2\cdots j_n} rac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{i_1}} rac{\partial x^{j_2}}{\partial x'^{i_2}} \cdots rac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{i_n}}$$

则称 $U_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 为 l 维空间的 n 阶**协变张量**。

逆变张量

设有一个由n个上指标描述的量 $U^{i_1i_2\cdots i_n}$, 当坐标有如下变换

$$x'^{k} = x'^{k} (x^{1}, x^{2}, \cdots, x^{l}), \quad k = 1, 2, \cdots, l$$

时,若 $U^{i_1i_2\cdots i_n}$ 按照如下规律变化

$$U^{\prime i_1 i_2 \cdots i_n} = U^{j_1 j_2 \cdots j_n} rac{\partial x^{\prime i_1}}{\partial x^{j_1}} rac{\partial x^{\prime i_2}}{\partial x^{j_2}} \cdots rac{\partial x^{\prime i_n}}{\partial x^{j_n}}$$

则称 $U^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 为 l 维空间的 n 阶**协变张量**。

混合张量

设有一个由 n 个下指标和 m 个上指标描述的量 $U_{i_1i_2\cdots i_n}^{j_1j_2\cdots j_m}$, 当坐标有如下变换

$$x'^k=x'^k\left(x^1,x^2,\cdots,x^l
ight), \quad i=1,2,\cdots,l$$

时,按照规律

$$U_{i_1i_2\cdots i_n}^{\prime j_1j_2\cdots j_m}=U_{lpha_1lpha_2\cdotslpha_n}^{eta_1eta_2\cdotseta_m}\cdotrac{\partial x^{\prime j_1}}{\partial x^{eta_1}}rac{\partial x^{\prime j_2}}{\partial x^{eta_2}}\cdotsrac{\partial x^{\prime j_m}}{\partial x^{eta_m}}\cdotrac{\partial x^{lpha_1}}{\partial x^{\prime i_1}}rac{\partial x^{lpha_2}}{\partial x^{\prime i_2}}\cdotsrac{\partial x^{lpha_n}}{\partial x^{\prime i_n}}$$

变化的量称为混合张量。

简单记忆变换规则:一对上下指标才求和+求和的都是不带撇的坐标。

为什么R场论的指标统一写成下指标

狭义相对论中时空坐标共四维,时空坐标的变换规律具体为广义洛伦兹变换:

$$x'^{\mu} = A^{\mu}_{
u} x^{
u} + b^{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad X' = AX + b$$

注意,这里 $A^\mu_
u$ 并非张量。R场论中, $A^\mu_
u$ 代表矩阵 A 的 μ 行 u 列矩阵元; $A^\nu_
u$ 代表矩阵 A 的 u 行 μ 列矩阵元。

容易得到变换后的时空坐标对变换前的时空坐标的偏导:

$$rac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{
u}}=A^{\mu}_{
u}$$

为了求出变换前的时空坐标对变换后的时空坐标的偏导,考虑矩阵形式的广义洛伦兹变换:

$$X' = AX + b$$

$$A^{-1}X' = X + A^{-1}b$$

$$X = A^{-1}X' - A^{-1}b$$

回到分量形式:

$$x^{\mu} = \left(A^{-1}\right)^{\mu}_{
u} x'^{
u} - \left(A^{-1}\right)^{\mu}_{
u} b^{
u}$$

因此, **变换前**的时空坐标对**变换后**的时空坐标的偏导为:

$$rac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{
u}} = \left(A^{-1}
ight)_{
u}^{\mu}$$

考虑洛伦兹变换矩阵的正交性:

$$A^{\mathrm{T}}A = I \Longrightarrow A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$$

因此:

$$rac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\prime
u}} = \left(A^{-1}
ight)^{\mu}_{
u} = \left(A^{
m T}
ight)^{\mu}_{
u} = A^{
u}_{\mu}$$

总之,若 x^μ 的变换规律为广义洛伦兹变换 $x^\mu \to x'^\mu = A^\mu_
u x^
u + b^\mu$,则有:

$$rac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{
u}}=A^{\mu}_{
u}, \quad rac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{
u}}=A^{
u}_{\mu}$$

狭义相对论中,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x^\mu o x'^\mu = A^\mu_
u x^
u + b^\mu$ 时,协变张量的变换规律为:

$$egin{aligned} U'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} &= U_{
u_1
u_2\cdots
u_n} rac{\partial x^{
u_1}}{\partial x'^{\mu_1}} rac{\partial x^{
u_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \cdots rac{\partial x^{
u_n}}{\partial x'^{\mu_n}} \ &= A^{\mu_1}_{
u_1} A^{\mu_2}_{
u_2} \cdots A^{\mu_n}_{
u_n} U_{
u_1
u_2\cdots
u_n} \end{aligned}$$

当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x^\mu o x'^\mu = A^\mu_
u x^
u + b^\mu$ 时,逆变张量的变换规律:

$$U'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = U^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}}$$
$$= A^{\mu_1}_{\nu_1} A^{\mu_2}_{\nu_2} \cdots A^{\mu_n}_{\nu_n} U^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

因此,在这种约定下,协变张量、逆变张量和混合张量三者没有区别(张量指标在上还是在下都服从相同的变换规律),因此把它们统称为张量,并且**约定张量的指标全部写为下标**。

约定时空坐标的广义洛伦兹变换写为:

$$oxed{x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u} + b_{\mu}}$$

这种约定下, $A_{\mu\nu}$ 代表矩阵 A 的 μ 行 ν 列矩阵元。

当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u} + b_{\mu}$ 时,n 阶张量的变换规律统一写为:

$$U'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = A_{\mu_1
u_1}A_{\mu_2
u_2}\cdots A_{\mu_n
u_n}U_{
u_1
u_2\cdots
u_n}$$

1 粒子物理与量纲分析

粒子物理

61种基本粒子

自旋			数量	ė	反粒子	总计
##77	夸克	u, d, s, c, b, t	6	3	成对	36
费米子	轻子	$e,\mu,\tau,v_{\mu},v_{\mu},v_{\tau}$	6	无色	成对	12
玻色子	中间玻色子	W ^z , Z ₀	3	无色	自身	3
	光子	光子	1	无色	自身	1
	胶子	g	1	8	自身	8
	希格斯粒子	H_{\Diamond}		无色	自身	1
总计						61

只参与弱相互作用和电磁相互作用,不参与强相互作用的费米子称为轻子 (Lepton) 。

Lepton name	Symbol	M	Q	J	L_e	L_{μ}	$L_{ au}$
Electron	e^-	0.511	-1	1/2	+1	0	0
anti-Electron	e^+	0.511	+1	1/2	-1	0	0
Electron neutrino	$ u_e$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	+1	0	0
anti-Electron neutrino	$ ilde{ u}_e$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	-1	0	0
muon	μ^-	105.66	-1	1/2	0	+1	0
anti-muon	μ^+	105.66	+1	1/2	0	-1	0
muon neutrino	$ u_{\mu}$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	0	+1	0
anti muon neutrino	$ ilde{ u}_{\mu}$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	0	-1	0
tau	$ au^-$	1776.86	-1	1/2	0	0	+1
anti-tau	$ au^+$	1776.86	+1	1/2	0	0	-1
tau neutrino	$ u_{ au}$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	0	0	+1
anti tau neutrino	$ ilde{ u}_{ au}$	$<2 imes10^{-6}$	0	1/2	0	0	-1

在轻子参与的各类反应中, 各类轻子数守恒。

参与强相互作用的粒子称为强子。质子和中子都是强子。

自旋为零和整数的强子称为介子(Meson),自旋为半整数的强子称为重子(Baryon)。

具有奇异量子数的重子称为超子 (Hyperon) 。

重子由三个夸克组成,介子由夸克和反夸克组成。

每种夸克具有色量子数(红、绿、蓝),每种反夸克具有另外三种色量子数(青、洋红、黄)

Quark flavour	M (MeV)	Q	J	В	I_3	C	S	T	B'
u	2.2	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
d	4.7	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
c	1270	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	+1	0	0	0
s	96	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0
t	172760	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+1	0
b	4180	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1

Quark flavour	M (MeV)	Q	J	В	I_3	C	S	T	B'
\bar{u}	2.2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$ar{d}$	4.7	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$ar{c}$	1270	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0
\bar{s}	96	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	0	0
$ar{t}$	172760	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0
\bar{b}	4180	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	+1

守恒定律

存在 $\ell_e,\ell_\mu,\ell_ au$ 三种轻子数。在轻子参与的各种反应中,各类轻子数分别守恒。

在强子的粒子反应中,电荷 Q 和重子数 B 守恒。

在各种反应中,能量、动量、电荷、角动量守恒。

强相互作用中,能量、动量、电荷、角动量守恒、**同位旋、奇异数、字称、重子数**守恒。

电磁相互作用中,能量、动量、电荷、角动量守恒、**奇异数、宇称、重子数守恒**;同位旋不守恒。

弱相互作用中,电荷、轻子数、重子数、角动量守恒;同位旋不守恒、宇称不守恒、奇异数不守恒、CP不守恒。

U(1) 规范理论

QED 是关于带电粒子、光子 γ 及其相互作用的量子场论,是 $\mathrm{U}(1)$ 规范场理论,即阿贝尔规范场理论。光子是传递电磁相互作用的规范玻色子。

$SU(2) \times U(1)$ 规范理论

基本粒子衰变是一种弱相互作用。电弱统一理论是 $SU(2) \times U(1)$ 规范理论。

电弱统一理论包括:QED 中传递电磁相互作用的光子 γ ;传递弱相互作用的 W^\pm, Z^0 三类规范玻色子,称为中间玻色子。 电弱统一理论克服了费米理论(四个费米子直接相互作用)不能重整化的困难,预言了与 Z^0 对应的中性流,与实验符合得很好。

电弱统一理论中,规范玻色子 W^\pm, Z^0 的质量由 Higgs 场真空自发破缺导致。

SU(3) 规范理论

QCD 是 $SU(3)_{C}$ 非阿贝尔规范理论。

SU(3) 群的作用以夸克三种颜色为变换对象,并以 8 种 J=1 的规范玻色子传递相互作用。在色夸克间传递强相互作用的规范玻色子称为**胶子**。

标准模型

标准模型是以三代轻子和三代夸克作为基本粒子、以强子的夸克模型和电弱统一理论和 QCD 为基础建立起来的。

夸克禁闭

单个夸克和胶子无法被孤立观测,只能被束缚在强子的复合态。实验中迄今未发现独立夸克态的存在。

渐进自由

按照 QCD, 当强子中夸克能量很高时, 夸克之间的强作用很小, 可以认为是自由的, 这种现象称为渐进自由。

量纲分析与自然单位制

$$[\hbar] = rac{[M][L]^2}{[t]}, \quad [c] = rac{[L]}{[t]}, \quad [k_B] = rac{[M][L]^2}{[t]^2[T]}, \quad [G] = rac{[L]^3}{[t]^2[M]}$$

自然单位制取 $\hbar = c = k_B = 1$, 此时:

$$[L] = [t] = [M]^{-1} = [T]^{-1}$$

2 广义洛伦兹变换

R场论的四维时空坐标

R场论定义了两套常用的四维时空坐标。

三维空间坐标 x, y, z 与时间 t 构成第一套四维时空坐标 $x_{\mu}(\mu = 1, 2, 3, 4)$:

$$x_1 = x$$
, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$

第二套四维时空坐标 $x_{\mu}(\mu=0,1,2,3)$:

$$x_0=ct,\quad x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z$$

线元

线元 ds^2 定义为:

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2 \mathrm{d}t^2$$

广义洛伦兹变换

R场论采用第一套时空坐标

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=\mathrm{i} ct$$

描述广义洛伦兹变换。

广义洛伦兹变换的定义

使得线元

$$\mathrm{d} s^2 \equiv -\mathrm{d} x^2 - \mathrm{d} y^2 - \mathrm{d} z^2 + c^2 \mathrm{d} t^2 = -\left(\mathrm{d} x_1\right)^2 - \left(\mathrm{d} x_2\right)^2 - \left(\mathrm{d} x_3\right)^2 - \left(\mathrm{d} x_4\right)^2 = -\mathrm{d} x_\mu \mathrm{d} x_\mu$$

保持不变,即

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$$

的四维时空坐标变换

$$x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u} + b_{\mu}$$

称为**广义洛伦兹变换**。

广义洛伦兹变换的两条正交关系

$$A_{\mu
ho}A_{\mu\lambda}=\delta_{
ho\lambda}$$

$$A_{\mu\lambda}A_{
u\lambda}=\delta_{\mu
u}$$

证明第一条正交关系

广义洛伦兹变换最广形式解可设为:

$$x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu}$$

两边取微分:

$$\mathrm{d}x'_{\mu} = A_{\mu\nu}\mathrm{d}x_{\nu}$$

因此若广义洛伦兹变换下 x_μ 变换为 x'_μ ,则 x' 系中的线元 $\mathrm{d} s'^2$ 也可由 x 系的时空坐标 x_μ 表达:

$$\mathrm{d}s'^2 = -\mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'_\mu = -\left(A_{\mu
ho}\mathrm{d}x_
ho\right)\left(A_{\mu\lambda}\mathrm{d}x_\lambda
ight) = -A_{\mu
ho}A_{\mu\lambda}\mathrm{d}x_
ho \mathrm{d}x_\lambda$$

而 ds^2 定义为:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\lambda \mathrm{d}x_\lambda = -\delta_{\rho\lambda} \mathrm{d}x_\rho \mathrm{d}x_\lambda$$

由广义洛伦兹变换定义,线元 $\mathrm{d}s^2$ 在广义洛伦兹变换下保持不变,即:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s'^2$$

对比可得广义洛伦兹变换第一条正交关系:

$$A_{\mu
ho}A_{\mu\lambda}=\delta_{
ho\lambda}$$

证明第二条正交关系

广义洛伦兹变换

$$x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu}$$

是从 x 系到 x' 系的坐标变换规律。

为了推导广义洛伦兹变换第二条正交关系,需要先找到从 x^{\prime} 到 x 系的坐标变换规律(广义洛伦兹逆变换)。

广义洛伦兹变换:

$$x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu}$$

上式两边同乘 $A_{\mu\lambda}$, 并利用第一条正交关系 $A_{\mu\lambda}A_{\mu\nu}=\delta_{\lambda\nu}$, 有:

$$egin{aligned} A_{\mu\lambda}x'_{\mu} &= A_{\mu\lambda}A_{\mu
u}x_{
u} + A_{\mu\lambda}b_{\mu} &= \delta_{\lambda
u}x_{
u} + A_{\mu\lambda}b_{\mu} &= x_{\lambda} + A_{\mu\lambda}b_{\mu} \end{aligned}$$

两边微分:

$$A_{\mu\lambda}\mathrm{d}x'_{\mu}=\mathrm{d}x_{\lambda}$$

因此,线元 ds^2 :

$$\mathrm{d}s^2 \equiv -\mathrm{d}x_\lambda \mathrm{d}x_\lambda = -\left(A_{\mu\lambda}\mathrm{d}x'_\mu\right)\left(A_{\nu\lambda}\mathrm{d}x'_
u
ight) \ = -A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda}\mathrm{d}x'_\mu\mathrm{d}x'_
u$$

线元 ds'^2

$$\mathrm{d}s'^2 \equiv -\mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'_\mu = -\delta_{\mu
u} \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'_
u$$

由广义洛伦兹变换的定义 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s'^2$, 对比可得:

$$A_{\mu\lambda}A_{
u\lambda}=\delta_{\mu
u}$$

广义洛伦兹变换的矩阵形式

广义洛伦兹变换是保持线元不变 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s'^2$ 的变换 $x_\mu\to x'_\mu=A_{\mu\nu}x_\nu+b_\mu$,保持线元不变等价于两条正交关系 $A_{\mu\nu}A_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda},A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\nu}$ 。

令:

$$X=egin{bmatrix} x_1\x_2\x_3\x_4 \end{bmatrix},\quad X'=egin{bmatrix} x_1'\x_2'\x_3'\x_4' \end{bmatrix},\quad A=[A_{\mu
u}],\quad b=egin{bmatrix} b_1\b_2\b_3\b_4 \end{bmatrix}$$

则广义洛伦兹变换的矩阵形式为:

$$X' = AX + b$$

其中矩阵 A 满足 $A^{T}A = AA^{T} = I$, 或 $A^{-1} = A^{T}$.

广义洛伦兹变换矩阵 A 的性质

(1)
$$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I$$
, 或 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$ 。

(2)

由于 $\det(A^{T}) = \det(A)$, 因此矩阵 A 满足:

$$\det(A) = \pm 1$$

(3)

由于 $A_{\mu\nu}=\partial x'_{\mu}/\partial x_{\nu}$,而 $x_{\mu}=(x,y,z,\mathrm{i}ct)$,因此 $A_{i4}=\partial x'_{i}/\partial x_{4}=\frac{1}{\mathrm{i}c}\partial x'_{i}/\partial t (i=1,2,3)$ 是纯虚数, $A_{44}=\partial t'/\partial t$ 是实数。

利用正交关系 $A_{\mu\nu}A_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda}$, 可以计算

$$A_{\mu4}A_{\mu4}=\delta_{44}=1$$

即:

$$1 = A_{\mu 4} A_{\mu 4} = \sum_{i=1}^3 A_{i4}^2 + A_{44}^2 = -\sum_{i=1}^3 \left| A_{i4}
ight|^2 + A_{44}^2$$

即:

$$A_{44}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \left| A_{i4}
ight|^2 \geqslant 1$$

因此:

$$A_{44} \geqslant 1$$
 or $A_{44} \leqslant -1$

 $A_{44}\geqslant 1$ 称为正时条件, $A_{44}\leqslant -1$ 称为负时条件。

几种特殊广义洛伦兹变换

对于广义洛伦兹变换 $X'=AX+b, A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=I$,可依据 A 的性质对广义洛伦兹变换进行分类。

固有洛伦兹变换: $x'_\mu=A_{\mu\nu}x_
u$,其中 $\det{(A)}=1, A_{44}\geqslant 1$ 。特别的,把固有洛伦兹变换矩阵记为 $a_{\mu\nu}$ 。

$$\det(a) = 1, \quad a_{44} \geqslant 1$$

空间反射变换: $x'_{\mu}=A_{\mu\nu}x_{\nu}$,其中 $A_{\mu\nu}={
m diag}(-1,-1,-1,+1)$ 。特别地,把空间反射变换矩阵记为 $\sigma_{\mu\nu}$ 。

$$\sigma = \text{diag}(-1, -1, -1, +1)$$

$$\det(\sigma) = -1, \quad \sigma_{44} = 1 \geqslant 1$$

时间反演变换: $x'_\mu = A_{\mu\nu}x_
u$,其中 $A_{\mu
u} = {
m diag}(+1,+1,+1,-1)$ 。特别地,把时间反演变换矩阵记为 $au_{\mu
u}$ 。

$$\tau = diag(+1, +1, +1, -1)$$

$$\det(\tau) = -1, \quad \tau_{44} = -1 \leqslant -1$$

位移变换: $x'_{\mu}=x_{\mu}+b_{\mu}$

所有广义洛伦兹变换可看成以上四种变换的组合。

比如**四维时空坐标反射变换**:

$$\rho = \sigma \tau = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$$

$$\det(\rho) = 1, \quad \rho_{44} = -1 \leqslant -1$$

广义洛伦兹变换的分类

可以依据广义洛伦兹变换矩阵 A 的性质对广义洛伦兹变换进行分类。

$$egin{cases} \det(A) = +1 egin{cases} A_{44} \geqslant +1, & A=a \ A_{44} \leqslant -1, & A=
ho,
ho a \ \det(A) = -1 egin{cases} A_{44} \geqslant +1, & A=\sigma, \sigma a, a\sigma \ A_{44} \leqslant -1, & A= au, au a, a au \end{cases}$$

给几种特殊广义洛伦兹变换命名

齐次正交变换: X' = Ax

非齐次洛伦兹变换: X' = AX + b

固有洛伦兹变换: X'=aX

不连续分立变换: $X' = \sigma X, X' = \tau X, X' = \rho X$

3 张量、赝张量及其变换规律

Levi-Civita 符号

Levi-Civita 符号的定义

n 阶 Levi-Civita 符号 $arepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}(i_j\in\left\{1,\cdots,n
ight\},j=1,2,\cdots,n)$ 定义如下:

$$\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}\equiv \begin{cases} +1 &,\quad \exists i_1i_2\cdots i_n$$
进行偶数次相邻两数交换后能还原为 $12\cdots n$
$$-1 &,\quad \exists i_1i_2\cdots i_n$$
进行奇数次相邻两数交换后能还原为 $12\cdots n$
$$0 &,\quad \exists i_1,i_2,\cdots i_n$$
中有任意二指标相等

注意, i_1 与 i_n 不算"相邻"。

$$\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_n}=n!$$

两个 Levi-Civita 符号指标缩并规律

一般规律

两个 n 阶 Levi-Civita 符号中 $m(m \le n)$ 个指标缩并的一般规律:

$$\boxed{arepsilon_{oldsymbol{k_1}\cdotsoldsymbol{k_m}i_1,\ldots,i_{n-m}}arepsilon_{oldsymbol{k_1}\cdotsoldsymbol{k_m}j_1,\ldots,j_{n-m}}=m!\left(arepsilon_{l_1\ldots l_{n-m}}\delta_{i_1j_{l_1}}\cdots\delta_{i_{n-m}j_{l_{n-m}}}
ight)}$$

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 4 个指标缩并

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}=4!$$

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 3 个指标缩并

$$egin{aligned} arepsilon_{\mu
u\lambdalpha_1}arepsilon_{\mu
u\lambdaeta_1} &= 3!\left(arepsilon_{
ho_1}\delta_{lpha_1eta_{
ho_1}}
ight) \ &= 3!\delta_{lpha_1eta_1} \end{aligned}$$

注意, $\varepsilon_{
ho_1}$ 是 1 阶 Levi-Civita 符号, ho_1 的爱因斯坦求和只能取 $ho_1=1$.

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 2 个指标缩并

$$egin{aligned} arepsilon_{\mu
ulpha_1lpha_2}arepsilon_{\mu
ueta_1eta_2} &= 2! \left(arepsilon_{
ho_1
ho_2}\delta_{lpha_1eta_{
ho_1}}\delta_{lpha_2eta_{
ho_2}}
ight) \ &= 2! \left(\delta_{lpha_1eta_1}\delta_{lpha_2eta_2} - \delta_{lpha_1eta_2}\delta_{lpha_2eta_1}
ight) \end{aligned}$$

注意, $arepsilon_{
ho_1
ho_2}$ 是 2 阶 Levi-Civita 符号, $ho_1,
ho_2$ 的爱因斯坦求和只能取 $ho_1,
ho_2\in\{1,2\}$.

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 1 个指标缩并

$$\begin{split} \varepsilon_{\mu\alpha_{1}\alpha_{2}\alpha_{3}}\varepsilon_{\mu\beta_{1}\beta_{2}\beta_{3}} &= 1! \left(\varepsilon_{\rho_{1}\rho_{2}\rho_{3}}\delta_{\alpha_{1}\beta_{\rho_{1}}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{\rho_{2}}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{\rho_{3}}} \right) \\ &= \delta_{\alpha_{1}\beta_{1}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{2}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{3}} - \delta_{\alpha_{1}\beta_{1}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{3}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{2}} \\ &- \delta_{\alpha_{1}\beta_{2}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{1}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{3}} + \delta_{\alpha_{1}\beta_{2}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{3}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{1}} \\ &+ \delta_{\alpha_{1}\beta_{3}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{1}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{2}} - \delta_{\alpha_{1}\beta_{3}}\delta_{\alpha_{2}\beta_{2}}\delta_{\alpha_{3}\beta_{1}} \end{split}$$

注意, $arepsilon_{
ho_1
ho_2
ho_3}$ 是 3 阶 Levi-Civita 符号, $ho_1,
ho_2,
ho_3$ 的爱因斯坦求和只能取 $ho_1,
ho_2,
ho_3\in\{1,2,3\}$.

行列式

行列式的定义

$$egin{aligned} \det(A) &\equiv egin{aligned} A_{11} & \cdots & A_{1n} \ dots & \ddots & dots \ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{aligned} \ &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1j_1} A_{2j_2} \cdots A_{nj_n} \ &= rac{1}{n!} arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} \end{aligned}$$

Levi-Civita 符号与行列式相乘

$$egin{aligned} arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det(A) &= arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{n j_n} \ &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} \end{aligned}$$

场论中常用的张量和赝张量

SR中张量的定义

在四维闵氏时空中,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_\mu o x'_\mu = A_{\mu\nu} x_
u + b_\mu$ 时,若 $U_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 按照如下的规律

$$U'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}=A_{\mu_1
u_1}A_{\mu_2
u_2}\cdots A_{\mu_n
u_n}U_{
u_1
u_2\cdots
u_n}$$

进行变换,则 $U_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ 称为 (四维时空的) n 阶张量。

对称张量

设有一个张量,若将其任意两个指标交换后张量的值不变,则称其为对称张量。

反对称张量

设有一个张量,若将其任意两个指标交换后张量的值变为原值的相反数,则称其为反对称张量。

标量

零阶张量称为标量。由张量的定义,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_\mu o x'_\mu = A_{\mu\nu} x_
u + b_\mu$ 时,标量 $\phi(x)$ 服从以下变换规律:

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

即标量是广义洛伦兹变换的不变量。

矢量

一阶张量称为矢量。由张量的定义,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_\mu \to x'_\mu = A_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$ 时,矢量 $\phi_\mu(x)$ 服从以下变换规律:

$$\boxed{\phi_{\mu}'(x') = A_{\mulpha}\phi_{lpha}(x)}$$

二阶张量

由张量的定义,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_\mu o x_\mu' = A_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$ 时,二阶张量 $\phi_{\mu\nu}(x)$ 服从以下变换规律:

$$oxed{\phi'_{\mu
u}(x')=A_{\mulpha}A_{
ueta}\phi_{lphaeta}(x)}$$

三阶张量

由张量的定义,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_\mu o x'_\mu = A_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu$ 时,三阶张量 $\phi_{\mu\nu\lambda}(x)$ 服从以下变换规律:

$$\boxed{\phi'_{\mu
u\lambda}(x') = A_{\mulpha}A_{
ueta}A_{\lambda\gamma}\phi_{lphaeta\gamma}(x)}$$

赝标量

赝标量的两种定义

设 $\phi_{\mu\nu\lambda\rho}(x)$ 是一个四阶全反对称张量,则

$$\left| ilde{\phi} \equiv \phi_{1234}(x)
ight|$$

称为**赝标量**。

利用赝标量,四阶全反对称张量可表示为:

$$\phi_{\mu\nu\lambda\rho}(x) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{\phi}(x)$$

可见四阶全反对称张量 $\phi_{\mu\nu\lambda\rho}$ 的取值只有 $\tilde{\phi},0,-\tilde{\phi}$ 三种可能。上式两边同乘 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$,并利用

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}=4!$$

则赝标量也可定义为:

$$oxed{ ilde{\phi}(x) = rac{1}{4!}arepsilon_{\mu
u\lambda
ho}\phi_{\mu
u\lambda
ho}(x)}$$

赝标量的变换规律

利用公式

$$egin{aligned} arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mathrm{det}(A) &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} \ &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{j_1 j_1} A_{j_2 j_2} \cdots A_{j_n j_n} \end{aligned}$$

当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u} + b_{\mu}$ 时,赝标量变换规律为:

$$\begin{split} \tilde{\phi}'(x') &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \phi'_{\mu\nu\lambda\rho}(x') \\ &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\mu\alpha} A_{\nu\beta} A_{\lambda\gamma} A_{\rho\delta} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \\ &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \left| A \right| \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \\ &= \left| A \right| \left[\frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) \right] \\ &= \left| A \right| \tilde{\phi}(x) \end{split}$$

$$oxed{x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu},\quad ilde{\phi}'(x')=|A|\, ilde{\phi}(x)}$$

赝矢量

赝矢量的定义

在四维闵氏时空,设 $\phi_{\mu\nu\lambda}(x)$ 为一个三阶全反对称张量,则赝矢量定义为:

$$ilde{\phi}_{\mu}(x) \equiv rac{1}{3!} arepsilon_{\mu
u\lambda
ho} \phi_{
u\lambda
ho}(x)$$

赝矢量的变换规律

利用洛伦兹变换矩阵的正交关系

$$A_{\mu\tau}A_{\eta\tau} = \delta_{\mu\eta}$$

以及公式

$$egin{aligned} arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \mathrm{det}(A) &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} \ &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{j_1 i_1} A_{j_2 i_2} \cdots A_{j_n i_n} \end{aligned}$$

可知,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu \nu} x_{\nu} + b_{\mu}$ 时,赝矢量的变换规律为:

$$\begin{split} \tilde{\phi}'_{\mu}(x') &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \phi'_{\nu\lambda\rho}(x') \\ &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\nu\alpha} A_{\lambda\beta} A_{\rho\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= \frac{1}{3!} \delta_{\mu\eta} \varepsilon_{\eta\nu\lambda\rho} A_{\nu\alpha} A_{\lambda\beta} A_{\rho\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= \frac{1}{3!} A_{\mu\tau} A_{\eta\tau} \varepsilon_{\eta\nu\lambda\rho} A_{\nu\alpha} A_{\lambda\beta} A_{\rho\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= \frac{1}{3!} A_{\mu\tau} \left(\varepsilon_{\eta\nu\lambda\rho} A_{\eta\tau} A_{\nu\alpha} A_{\lambda\beta} A_{\rho\gamma} \right) \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= \frac{1}{3!} A_{\mu\tau} \left(\varepsilon_{\eta\nu\lambda\rho} A_{\eta\tau} A_{\nu\alpha} A_{\lambda\beta} A_{\rho\gamma} \right) \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= \frac{1}{3!} A_{\mu\tau} \varepsilon_{\tau\alpha\beta\gamma} |A| \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= |A| A_{\mu\tau} \frac{1}{3!} \varepsilon_{\tau\alpha\beta\gamma} \phi_{\alpha\beta\gamma}(x) \\ &= |A| A_{\mu\tau} \tilde{\phi}_{\tau}(x) \end{split}$$

$$oxed{x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu},\quad ilde{\phi}'_{\mu}(x')=|A|\,A_{\mu au} ilde{\phi}_{ au}(x)}$$

二阶赝张量

二阶赝张量的定义

设 $\phi_{\mu\nu}$ 为一个二阶全反对称张量,则赝张量 $\tilde{\phi}_{\mu\nu}$ 的的定义为:

$$ilde{\phi}_{\mu
u}(x) \equiv rac{1}{2!} arepsilon_{\mu
u\lambda
ho} \phi_{\lambda
ho}(x)$$

二阶赝张量的变换规律

利用洛伦兹变换矩阵正交关系

$$\delta_{\mu\eta} = A_{\mu\sigma}A_{\eta\sigma}, \quad \delta_{
u heta} = A_{
u au}A_{ heta au}$$

以及公式

$$egin{aligned} arepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det(A) &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} \ &= arepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{j_1 i_1} A_{j_2 i_2} \cdots A_{j_n i_n} \end{aligned}$$

可知,当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u} + b_{\mu}$ 时,二阶赝张量的变换规律为:

$$\begin{split} \tilde{\phi}'_{\mu\nu}(x') &= \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \phi'_{\lambda\rho}(x') \\ &= \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_{\lambda\alpha} A_{\rho\beta} \phi_{\alpha\beta}(x) \\ &= \frac{1}{2!} \delta_{\mu\eta} \delta_{\nu\theta} \varepsilon_{\eta\theta\lambda\rho} A_{\lambda\alpha} A_{\rho\beta} \phi_{\alpha\beta}(x) \\ &= \frac{1}{2!} A_{\mu\sigma} A_{\eta\sigma} A_{\nu\tau} A_{\theta\tau} \varepsilon_{\eta\theta\lambda\rho} A_{\lambda\alpha} A_{\rho\beta} \phi_{\alpha\beta}(x) \\ &= \frac{1}{2!} \left(A_{\eta\sigma} A_{\theta\tau} A_{\lambda\alpha} A_{\rho\beta} \varepsilon_{\eta\theta\lambda\rho} \right) A_{\mu\sigma} A_{\nu\tau} \phi_{\alpha\beta}(x) \\ &= \frac{1}{2!} \left| A \right| \varepsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} A_{\mu\sigma} A_{\nu\tau} \phi_{\alpha\beta}(x) \\ &= |A| A_{\mu\sigma} A_{\nu\tau} \left[\frac{1}{2!} \varepsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}(x) \right] \\ &= |A| A_{\mu\sigma} A_{\nu\tau} \tilde{\phi}_{\sigma\tau}(x) \end{split}$$

$$oxed{x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu},\quad ilde{\phi}'_{\mu
u}(x')=|A|\,A_{\mu\sigma}A_{
u au} ilde{\phi}_{\sigma au}(x)}$$

4 场方程

达朗贝尔算符

达朗贝尔算符 □ 定义为:

$$\Box \equiv \partial_{\mu}\partial_{\mu} = \partial_{x}^{2} + \partial_{y}^{2} + \partial_{z}^{2} - rac{1}{c^{2}}\partial_{t}^{2} =
abla^{2} - rac{1}{c^{2}}\partial_{t}^{2}$$

实标量场方程

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi(x) = 0$$

实标量场方程描述宇称为正、自旋为零的基本粒子。

赝标量函数 $ilde{\phi}(x)$ 也满足上述方程,但其描述宇称为负、自旋为零的基本粒子,如 π 介子。

复标量场方程

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi(x) = 0$$

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi^*(x) = 0$$

复标量场方程描述自旋为零的带电粒子。

矢量场方程

$$\Box A_{\mu} = -\mu_0 j_{\mu}$$

矢量场描述自旋为 1、质量为零的粒子(光子)。

旋量场方程

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m_{0}
ight)\psi(x)=0$$

$$\partial_{\mu}ar{\psi}\gamma_{\mu}-m_0ar{\psi}=0$$

旋量

5 Clifford 代数、 γ 矩阵、旋量表示、旋量与 Dirac 方程

Clifford 代数与 γ 矩阵

R场论中的 Clifford 代数

R场论中,Clifford 代数是 n 维复向量空间生成的结合代数。

设 V 是 n 维复向量空间,则由 V 生成的结合代数就是 Clifford 代数,记为 $C_n(V)$.

V 中向量的几何乘积具有以下性质:

$$a(bc)=(ab)c$$
 $a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)c=ac+bc$ $lpha(ab)=(lpha a)b=a(lpha b),\quad lpha\in\mathbb{F}$

定义内积:

$$a\cdot b\equiv rac{1}{2}(ab+ba)$$

定义外积:

$$a\wedge b\equiv rac{1}{2}(ab-ba)$$

由 V 的正交归一基生成 $C_n(V)$ 的基

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组正交归一基,即它们的内积满足正交归一性:

$$e_{\mu}\cdot e_{
u}=\delta_{\mu
u}\mathbf{1}$$

其中,1是乘法单位元。

根据内积的定义,上式等价于:

$$e_{\mu}e_{\nu}+e_{\nu}e_{\mu}=2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}$$

特别地, 当 $\mu \neq \nu$ 时, 有:

$$e_{\mu}e_{
u}=-e_{
u}e_{\mu},\quad \mu
eq
u$$

基于 n 维复向量空间 V 的一组基 $\{e_{\mu}\}$ 可构造 Clifford 代数 $C_n(V)$ 的一组基二阶反对称张量基 $\{e_{\mu}e_{\nu}, \mu \neq \nu\}$.

类似, $\{e_{\mu_1}e_{\mu_2}\cdots e_{\mu_m},\mu_1\neq\mu_2\neq\cdots\neq\mu_m\}$ 也是 $C_n(V)$ 的一组基,直到最高反对称基 $e_1e_2\cdots e_n$.

可以证明:

$$egin{aligned} e_{\mu_1}\wedge e_{\mu_2} &= e_{\mu_1}e_{\mu_2} \ & \ e_{\mu_1}\wedge e_{\mu_2}\wedge\cdots\wedge e_{\mu_r} &= e_{\mu_1}e_{\mu_2}\cdots e_{\mu_r} \end{aligned}$$

r-矢量

$$A_r \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r, \quad a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$$

若 $a \in V$,则

$$a\wedge A_r=rac{1}{2}\left[aA_r+(-1)^rA_ra
ight]$$

$$a\cdot A_r = \frac{1}{2}\left[aA_r - (-1)^rA_ra\right]$$

$C_n(V)$ 中元素的一般形式

 $C_n(V)$ 中的元素 $A \in C_n(V)$ 一般可写为:

$$A = a + a_{\mu}e_{\mu} + rac{1}{2!}a_{\mu_{1}\mu_{2}}e_{\mu_{1}}\wedge e_{\mu_{2}} + \cdots + rac{1}{n!}a_{\mu_{1}\mu_{2}\cdots\mu_{n}}e_{\mu_{1}}\wedge e_{\mu_{2}}\wedge \cdots \wedge e_{\mu_{n}}$$

Clifford 代数的代数表示

$$\Gamma: C_n(V) o \operatorname{End}(W), \quad \dim V = n, \quad \dim W = d$$

其中 W 为复向量空间, $\operatorname{End}(W)$ 为 W 上所有线性变换(可看作矩阵)的全体,满足:

$$\Gamma(a+b) = \Gamma(a) + \Gamma(b)$$
 $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$ $\Gamma(\alpha a) = lpha\Gamma(a)$ $\Gamma(\mathbf{1}) = I$

可见"代数表示"比"群线性表示"多了一个"保持加法"的性质。

可以证明,Clifford 代数 $C_n(V)$ 的矢量基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 可以有 d imes d 矩阵表示 $\left(d=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$.

γ 矩阵作为 Clifford 代数矢量基的代数表示

把 Clifford 代数 $C_n(V)$ 中的矢量基 $\{e_\mu, \mu=1,2,\cdots,n\}$ 的某个代数表示 $\Gamma(e_\mu)$ 定义为 γ_μ 矩阵,即:

$$\gamma_{\mu} \equiv \Gamma(e_{\mu}), \quad \mu = 1, 2, \cdots, n$$

由于

$$e_{\mu}e_{
u}+e_{
u}e_{\mu}=2\delta_{\mu
u}\mathbf{1}$$

则:

$$\Gamma(e_{\mu})\Gamma(e_{
u}) + \Gamma(e_{
u})\Gamma(e_{\mu}) = 2\delta_{\mu
u}\Gamma(\mathbf{1})$$

$$\boxed{\gamma_{\mu}\gamma_{
u} + \gamma_{
u}\gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu
u}I}$$

特别地, 当 $\mu = \nu$ 时, 有

$$\gamma_{\mu}^2=I$$

当 $\mu \neq \nu$ 时,有

$$\mu
eq
u, \quad \gamma_{\mu}\gamma_{
u}=-\gamma_{
u}\gamma_{\mu}$$

注意到

$$\gamma_{\mu}^{\dagger}\gamma_{
u}^{\dagger}+\gamma_{
u}^{\dagger}\gamma_{\mu}^{\dagger}=2\delta_{\mu
u}I$$

因此可人为约定 γ 矩阵还满足

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$

结合

$$\gamma_{\mu}^2 = I$$

可得

$$\gamma_\mu^\dagger=\gamma_\mu^{-1}=\gamma_\mu$$

γ 矩阵的性质

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}+\gamma_{
u}\gamma_{\mu}=2\delta_{\mu
u}$$

特别地

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}=-\gamma_{
u}\gamma_{\mu},\quad \mu
eq
u$$
 $\gamma_{\mu}^2=I$

R 场论中的 γ 矩阵

可以证明,Clifford 代数 $C_n(V)$ 的矢量基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 可以有 $d\times d$ 矩阵表示 $\left(d=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$. 这些表示矩阵称为 γ 矩阵,满足正交关系:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}+\gamma_{
u}\gamma_{\mu}=2\delta_{\mu
u}I$$

R场论中,时空坐标共 4 个,因此考虑 $C_4(V)$.

 $C_4(V)$ 的四个代数矢量基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 有 4×4 矩阵表示 $\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}$,满足:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}+\gamma_{
u}\gamma_{\mu}=2\delta_{\mu
u}I,\quad \mu,
u\in\{1,2,3,4\}$$

并且仍然人为约定

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$

R场论中 γ 矩阵的性质

 γ 矩阵的定义:

$$oxed{\gamma_{\mu}\gamma_{
u}+\gamma_{
u}\gamma_{\mu}=2\delta_{\mu
u}I}$$

上式的两个直接推论:

$$\gamma_{\mu}^2=I$$

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}=-\gamma_{
u}\gamma_{\mu},\quad \mu
eq
u$$

人为约定:

$$\gamma_{\mu}^{\dagger}=\gamma_{\mu}^{-1}=\gamma_{\mu}$$

γ_5 矩阵

 γ_5 矩阵定义如下:

 $\gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$

 γ_5 矩阵也可写为:

奇数个 γ_{μ} 矩阵的迹为零。

$${
m Tr}(\gamma_{\mu})=0, \quad {
m Tr}(\gamma_{5})=0$$

偶数个 γ_{μ} 矩阵的迹:

$$\operatorname{Tr}\left(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}
ight)=4\sum_p\delta_p\delta_{
u_1
u_2}\delta_{
u_3
u_4}\cdots\delta_{
u_{n-1}
u_n}$$

其中,求和对 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 所有可能的取值求和(并非取全排列,共有 (n-1)!! 项),具体解释如下:

用 (μ) 表示 $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 有序数对,用 $(\mu)\setminus\mu_i$ 表示有序数对中去掉 μ_i 变量,即 $(\mu)\setminus\mu_i=(\mu_1,\cdots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\cdots,\mu_n)$ 用 $\nu_i\in(\mu)$ 表示变量 ν_i 取有序数对 (μ) 中的某一个变量。

用 $\nu_i = (\mu)_{\text{first}}$ 表示变量 ν_i 取有序数对 (μ) 中的第一个变量。

$$\nu_1 = (\mu)_{\mathrm{first}} = \mu_1$$

$$\nu_2 \in (\mu) \backslash \nu_1 = (\mu) \backslash \mu_1$$

$$u_3 = ((\mu) \backslash \nu_1, \nu_2)_{\mathrm{first}}$$

$$\nu_4 \in (\mu) \backslash \nu_1, \nu_2, \nu_3$$

以此类推,最后 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 的一个排列,设 m 为把 $(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 还原为排列 $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 所需的置换次数,则 $\delta_p = (-1)^m$.

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu}\gamma_{
u}
ight)=4\delta_{\mu
u}$$

$$oxed{\operatorname{Tr}\left(\gamma_{\mu}\gamma_{
u}\gamma_{\lambda}\gamma_{
ho}
ight)=4\left(\delta_{\mu
u}\delta_{\lambda
ho}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{
ho
u}+\delta_{\mu
ho}\delta_{
u\lambda}
ight)}$$

Lorentz 群的旋量表示

设 γ_{μ} 矩阵可进行广义齐次 Lorentz 变换:

$$\gamma_{\mu}' = A_{\mu
u} \gamma_{
u}$$

可以计算得到:

$$\gamma_{\mu}^{\prime}\gamma_{
u}^{\prime}+\gamma_{
u}^{\prime}\gamma_{\mu}^{\prime}=2\delta_{\mu
u}I$$

即 γ'_{μ} 也可作为 γ 矩阵。

可以证明, γ'_{μ} 与 γ_{μ} 相似, 即存在相似变换矩阵 Λ 使得:

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

R场论中还进一步规定

$$|\Lambda| = 1$$

 Λ 决定于 A, 但多个 Λ 与 一个 A 对应。

- $\Lambda \supset A$ 都构成群,两个群准同构;
- A 为广义齐次 Lorentz 变换的变换矩阵;
- Λ 为广义齐次 Lorentz 变换群的线性不可约表示, $\Lambda(A)$ 称为 Lorentz 群的旋量表示。

SO(n) 群的生成元

SO(n) 群的定义

$$\mathrm{SO}(n) \equiv \left\{ A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | A^{\mathrm{T}}A = I, \det(A) = 1
ight\}$$

生成元的定义

设 Lie 群的群元 $D(\alpha)$ 由一组参数 $\{\alpha_i\}$ 描述,且参数取 $\alpha=0$ 对应群恒元。与参数 α_i 对应的生成元 I_i 定义为:

$$I_i \equiv \left. rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_i} \right|_{lpha=0}$$

SO(n) 群的生成元

设 $A \in SO(n)$ 非常接近单位矩阵,则其可写为:

$$A = I + \alpha$$

由

$$A^{\mathrm{T}}A = I$$

可知:

$$\alpha^{\mathrm{T}} = -\alpha$$

即 α 的矩阵元满足:

$$\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}$$

选取 α 的矩阵元 α_{ab} 作为 SO(n) 群的参数。

生成元:

$$I_{ab} \equiv rac{\partial A(lpha)}{\partial lpha_{ab}}igg|_{lpha=0} = rac{\partial lpha}{\partial lpha_{ab}}igg|_{lpha=0}$$

生成元的矩阵元:

$$\left. \left(I_{ab}
ight)_{cd} = rac{\partial lpha_{cd}}{\partial lpha_{ab}}
ight|_{lpha = 0} = \delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}$$

一方面,在恒元附近可将 A 展开:

$$A(lpha) = I + rac{1}{2} rac{\partial A(lpha)}{\partial lpha_{ab}}igg|_{lpha=0} lpha_{ab} \equiv I + rac{1}{2} I_{ab} lpha_{ab}$$

另一方面, 我们假设

$$A(\alpha) = I + \alpha$$

SO(n) 群李代数

$$(I_{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}$$
 $I_{\mu
u} = -I_{
u\mu}$

$$\begin{split} [I_{\mu\nu},I_{\alpha\beta}]_{ab} &= (I_{\mu\nu})_{ac} \, (I_{\alpha\beta})_{cb} - (I_{\alpha\beta})_{ac} \, (I_{\mu\nu})_{cb} \\ &= (\delta_{\mu a} \delta_{\nu c} - \delta_{\mu c} \delta_{\nu a}) \, (\delta_{\alpha c} \delta_{\beta b} - \delta_{\alpha b} \delta_{\beta c}) - (\delta_{\alpha a} \delta_{\beta c} - \delta_{\alpha c} \delta_{\beta a}) \, (\delta_{\mu c} \delta_{\nu b} - \delta_{\mu b} \delta_{\nu c}) \\ &= \delta_{\nu c} \delta_{\alpha c} \, (\delta_{\mu a} \delta_{\beta b} - \delta_{\beta a} \delta_{\mu b}) + \delta_{\nu c} \delta_{\beta c} \, (-\delta_{\mu a} \delta_{\alpha b} + \delta_{\alpha a} \delta_{\mu b}) + \delta_{\mu c} \delta_{\alpha c} \, (-\delta_{\nu a} \delta_{\beta b} + \delta_{\beta a} \delta_{\nu b}) + \delta_{\mu c} \delta_{\beta c} \, (\delta_{\nu a} \delta_{\alpha b} - \delta_{\alpha a} \delta_{\nu b}) \\ &= \delta_{\nu c} \delta_{\alpha c} \, (I_{\mu \beta})_{ab} + \delta_{\nu c} \delta_{\beta c} \, (I_{\alpha \mu})_{ab} + \delta_{\mu c} \delta_{\alpha c} \, (I_{\beta \nu})_{ab} + \delta_{\mu c} \delta_{\beta c} \, (I_{\nu \alpha})_{ab} \\ &= \delta_{\nu \alpha} \, (I_{\mu \beta})_{ab} + \delta_{\nu \beta} \, (I_{\alpha \mu})_{ab} + \delta_{\mu \alpha} \, (I_{\beta \nu})_{ab} + \delta_{\mu \beta} \, (I_{\nu \alpha})_{ab} \\ &= \delta_{\nu \alpha} \, (I_{\mu \beta})_{ab} + \delta_{\nu \beta} \, (-I_{\mu \alpha})_{ab} + \delta_{\mu \alpha} \, (-I_{\nu \beta})_{ab} + \delta_{\mu \beta} \, (I_{\nu \alpha})_{ab} \\ &= (\delta_{\nu \alpha} I_{\mu \beta} + \delta_{\mu \beta} I_{\nu \alpha} - \delta_{\mu \alpha} I_{\nu \beta} - \delta_{\nu \beta} I_{\mu \alpha})_{ab} \end{split}$$

$$[I_{\mu
u},I_{lphaeta}]=\left(\delta_{
ulpha}I_{\mueta}+\delta_{\mueta}I_{
ulpha}-\delta_{\mulpha}I_{
ueta}-\delta_{
ueta}I_{\mulpha}
ight)$$

Lorentz 群旋量表示的生成元

考虑固有 Lorentz 变换

$$x'_{\mu}=a_{\mu
u}x_{
u}$$

把 $a_{\mu\nu}$ 作如下分解:

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu},$$

则固有 Lorentz 变换可写为:

$$x_\mu' = a_{\mu
u} x_
u = \left(\delta_{\mu
u} + lpha_{\mu
u}
ight) x_
u = x_\mu + lpha_{\mu
u} x_
u$$

在R场论中, 固有 Lorentz 变换矩阵群 $\{a\}$ 的旋量表示 Λ 记为 S, 即:

$$S^{-1}\gamma_{\mu}S=a_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

现在把 $a_{\mu\nu}$ 分解了,此时的 S 依赖于参数 $\alpha_{\mu\nu}$,即:

$$S = S(\alpha)$$

$$S^{-1}(\alpha)\gamma_{\mu}S(\alpha) = (\delta_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu})\gamma_{\nu} = \gamma_{\mu} + \alpha_{\mu\nu}\gamma_{\nu}$$

考虑无穷小固有 Lorentz 变换,即 x'_μ 与 x_μ 差别很小的固有 Lorentz 变换,这对应于参数 $lpha_{\mu\nu} o 0$.

由正交关系

$$a_{\mu\tau}a_{
u au}=\delta_{\mu
u}$$

可得

$$(\delta_{\mu\tau} + \alpha_{\mu\tau})(\delta_{\nu\tau} + \alpha_{\nu\tau}) = \delta_{\mu\nu}$$

由于 $lpha_{\mu
u} o 0$,因此可忽略二阶小量 $lpha_{\mu au}lpha_{
u au}$,上式化为

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}, \quad \alpha_{\mu\nu} \to 0$$

当 $\alpha \to 0$ 时, $S(\alpha)$ 可展为

$$egin{split} S(lpha) &= S(0) + rac{1}{2}rac{\partial S(lpha)}{\partial lpha_{\mu
u}}igg|_{lpha=0} lpha_{\mu
u} \ &= I + rac{1}{2}I_{\mu
u}lpha_{\mu
u}, \quad lpha
ightarrow 0 \end{split}$$

群论告诉我们

$$S^{-1}(lpha) = I - rac{1}{2} I_{\mu
u} lpha_{\mu
u}, \quad lpha
ightarrow 0$$

把上面两式代入 $S^{-1}(\alpha)\gamma_{\mu}S(\alpha)=\gamma_{\mu}+\alpha_{\mu\nu}\gamma_{\nu}$, 忽略二阶小量可得:

\$\$

\$\$

实际上在无穷小变换情况下,只有 6 个独立的非零群参数 $\{\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{24},\alpha_{34}\}$,但由于采用爱因斯坦求和, μ,ν 都要取遍 1,2,3,4,而 $\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha_{12}}\bigg|_{\alpha=0} \alpha_{12} = \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha_{21}}\bigg|_{\alpha=0} \alpha_{21}$,因此即使是一阶项前面也要有 1/2 因子来去掉求和带来的重复。

$$[\gamma_{\mu},I_{lphaeta}]=\delta_{\mulpha}\gamma_{eta}-\delta_{\mueta}\gamma_{lpha}$$

设

$$I_{lphaeta}=k\left(\gamma_{lpha}\gamma_{eta}-\gamma_{eta}\gamma_{lpha}
ight)$$

可以解得

$$k=rac{1}{4}$$
 $I_{lphaeta}=rac{1}{4}\left(\gamma_lpha\gamma_eta-\gamma_eta\gamma_lpha
ight)$

利用公式

$$[\gamma_{\mu},I_{lphaeta}]=\delta_{\mulpha}\gamma_{eta}-\delta_{\mueta}\gamma_{lpha}$$

可以求得生成元对易关系:

$$\begin{split} [I_{\mu\nu},I_{\alpha\beta}] &= \frac{1}{4} \left[\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}, I_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\gamma_{\mu} \left[\gamma_{\nu}, I_{\alpha\beta} \right] + \left[\gamma_{\mu}, I_{\alpha\beta} \right] \gamma_{\nu} \right) - \frac{1}{4} \left(\gamma_{\nu} \left[\gamma_{\mu}, I_{\alpha\beta} \right] + \left[\gamma_{\nu}, I_{\alpha\beta} \right] \gamma_{\mu} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\gamma_{\mu} \left(\delta_{\nu\alpha} \gamma_{\beta} - \delta_{\nu\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \left(\delta_{\mu\alpha} \gamma_{\beta} - \delta_{\mu\beta} \gamma_{\alpha} \right) \gamma_{\nu} \right) - \frac{1}{4} \left(\gamma_{\nu} \left(\delta_{\mu\alpha} \gamma_{\beta} - \delta_{\mu\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \left(\delta_{\nu\alpha} \gamma_{\beta} - \delta_{\nu\beta} \gamma_{\alpha} \right) \gamma_{\mu} \right) \\ &= \frac{1}{4} \delta_{\nu\alpha} \left(\gamma_{\mu} \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta} \gamma_{\mu} \right) + \frac{1}{4} \delta_{\nu\beta} \left(\gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \right) + \frac{1}{4} \delta_{\mu\alpha} \left(\gamma_{\beta} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\beta} \right) + \frac{1}{4} \delta_{\mu\beta} \left(\gamma_{\nu} \gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu} \right) \\ &= \delta_{\nu\alpha} I_{\mu\beta} + \delta_{\nu\beta} I_{\alpha\mu} + \delta_{\mu\alpha} I_{\beta\nu} + \delta_{\mu\beta} I_{\nu\alpha} \\ &= -\delta_{\mu\alpha} I_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta} I_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\alpha} I_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta} I_{\mu\alpha} \end{split}$$

Λ 与 γ_5 的关系

已经知道

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

可作为 Λ 的定义。现在想知道 $\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda$.

$$\begin{split} \Lambda^{-1}\gamma_{5}\Lambda &= \Lambda^{-1}\left(\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\rho}\right)\Lambda \\ &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda\right)\left(\Lambda^{-1}\gamma_{\nu}\Lambda\right)\left(\Lambda^{-1}\gamma_{\lambda}\Lambda\right)\left(\Lambda^{-1}\gamma_{\rho}\Lambda\right) \\ &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\left(A_{\mu\alpha}\gamma_{\alpha}\right)\left(A_{\mu\beta}\gamma_{\beta}\right)\left(A_{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}\right)\left(A_{\mu\tau}\gamma_{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\left|A\right|\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\sigma}\gamma_{\tau} \\ &= |A|\gamma_{5} \end{split}$$

几种特殊的旋量表示 S, P, T

广义 Lorentz 变换矩阵 A 的旋量表示 $\Lambda(A)$ 依赖于广义 Lorentz 变换矩阵 A,而 A 可按行列式 $\det(A)$ 和 A_{44} 划分成四个分支。

S 矩阵

固有 Lorentz 变换矩阵的旋量表示记为 S, 即:

$$S \equiv \Lambda(a), \quad S = S(a)$$
 $S^{-1}\gamma_{\mu}S = a_{\mu
u}\gamma_{
u}$

P 矩阵

空间反射变换矩阵 σ 的旋量表示记为 P, 即:

$$P \equiv \Lambda(\sigma), \quad P = P(\sigma)$$
 $P^{-1}\gamma_{\mu}P = \sigma_{\mu\nu}\gamma_{
u}$

特别地

$$P^{-1}\gamma_i P = \sigma_{i
u}\gamma_
u = -\gamma_i$$
 $\gamma_i P = -P\gamma_i = 0$

以及

$$P^{-1}\gamma_4 P = \sigma_{4\nu}\gamma_{\nu} = \gamma_4$$

$$\boxed{\gamma_4 P = P\gamma_4}$$

可以猜到

$$P = \eta_P \gamma_4$$

若人为要求

$$|P| = 1$$

则

$$oxed{P=\eta_P\gamma_4,\quad |\eta_P|=1}$$

T 矩阵

拉卡型时间反演变换矩阵 τ 的旋量表示记为 T 即:

$$T \equiv \Lambda(au), \quad T = T(au)$$

由旋量表示地定义,有

$$T^{-1}\gamma_{\mu}T= au_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

特别地

$$T^{-1}\gamma_i T= au_{i
u}\gamma_
u=\gamma_i,\quad i=1,2,3$$
 $T^{-1}\gamma_4 T= au_{4
u}\gamma_
u=-\gamma_4$

即

$$\gamma_i T = T \gamma_i$$
 $\gamma_4 T = -\gamma_4 T$

可以猜到

$$T=\eta_T\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

若人为要求

$$|T| = 1$$

则

$$T = \eta_T \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad |\eta_T| = 1$$

Λ^\dagger 的表达式

 A_{ij} , A_{44} 为实数, A_{i4} , A_{4i} 为虚数。

$$A_{ij}^* = A_{ij}, \quad A_{44}^* = A_{44}$$
 $A_{i4}^* = -A_{i4}, \quad A_{4i}^* = -A_{4i}$

 γ_{μ} 矩阵满足

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu^{-1} = \gamma_\mu$$

 Λ 矩阵的定义:

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

取厄米共轭得

$$\Lambda^{\dagger}\gamma_{\mu}\left(\Lambda^{-1}
ight)^{\dagger}=A_{\mu
u}^{st}\gamma_{
u}$$

特别地,对于前三个 γ_i 矩阵和 γ_4 矩阵要分开讨论:

$$\left\{egin{aligned} \Lambda^{\dagger}\gamma_{i}\left(\Lambda^{-1}
ight)^{\dagger}=A_{i
u}^{st}\gamma_{
u}=A_{ij}^{st}\gamma_{j}+A_{i4}^{st}\gamma_{4}=A_{ij}\gamma_{j}-A_{i4}\gamma_{4}\ \Lambda^{\dagger}\gamma_{4}\left(\Lambda^{-1}
ight)^{\dagger}=A_{4
u}^{st}\gamma_{
u}=A_{4j}^{st}\gamma_{j}+A_{44}^{st}\gamma_{4}=-A_{4j}\gamma_{j}+A_{44}\gamma_{4} \end{aligned}
ight.$$

上面两式左、右各乘 γ_4 :

$$\begin{split} \gamma_4 \Lambda^\dagger \gamma_i \left(\Lambda^{-1} \right)^\dagger \gamma_4 &= \gamma_4 \left(A_{ij} \gamma_j - A_{i4} \gamma_4 \right) \gamma_4 \\ &= A_{ij} \gamma_4 \gamma_j \gamma_4 - A_{i4} \gamma_4 \gamma_4 \gamma_4 \\ &= -A_{ij} \gamma_j \gamma_4^2 - A_{i4} \gamma_4 \\ &= -A_{ij} \gamma_j - A_{i4} \gamma_4 \\ &= -A_{i\nu} \gamma_\nu \\ &= -\Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda \end{split}$$

$$egin{aligned} \gamma_4 \Lambda^\dagger \gamma_4 \left(\Lambda^{-1}
ight)^\dagger \gamma_4 &= \gamma_4 \left(-A_{4j} \gamma_j + A_{44} \gamma_4
ight) \gamma_4 \ &= A_{4j} \gamma_j + A_{44} \gamma_4 \ &= A_{4
u} \gamma_
u \ &= \Lambda^{-1} \gamma_4 \Lambda \end{aligned}$$

对上面两式左乘 Λ ,右乘 $\gamma_4\Lambda^{\dagger}$:

$$egin{aligned} \Lambda\left(\gamma_{4}\Lambda^{\dagger}\gamma_{i}\left(\Lambda^{-1}
ight)^{\dagger}\gamma_{4}
ight)\gamma_{4}\Lambda^{\dagger} &= \Lambda\left(-\Lambda^{-1}\gamma_{i}\Lambda
ight)\gamma_{4}\Lambda^{\dagger} \ & \Lambda\left(\gamma_{4}\Lambda^{\dagger}\gamma_{4}\left(\Lambda^{-1}
ight)^{\dagger}\gamma_{4}
ight)\gamma_{4}\Lambda^{\dagger} &= \Lambda\left(\Lambda^{-1}\gamma_{4}\Lambda
ight)\gamma_{4}\Lambda^{\dagger} \end{aligned}$$

即:

$$\Lambda \gamma_4 \Lambda^\dagger \gamma_i = -\gamma_i \Lambda \gamma_4 \Lambda^\dagger \ \Lambda \gamma_4 \Lambda^\dagger \gamma_4 = \gamma_4 \Lambda \gamma_4 \Lambda^\dagger$$

加上括号看得更清楚一点:

$$egin{aligned} \left(\Lambda\gamma_4\Lambda^\dagger
ight)\gamma_i &= -\gamma_i\left(\Lambda\gamma_4\Lambda^\dagger
ight) \ \left(\Lambda\gamma_4\Lambda^\dagger
ight)\gamma_4 &= \gamma_4\left(\Lambda\gamma_4\Lambda^\dagger
ight) \end{aligned}$$

 $\left(\Lambda\gamma_4\Lambda^\dagger\right)$ 是一个与 γ_i 反对易、与 γ_4 对易的矩阵,可以猜到

$$\Lambda \gamma_4 \Lambda^\dagger = k \gamma_4$$

上式左乘 $\gamma_4\Lambda^{-1}$ 就解出 Λ^{\dagger} :

$$\Lambda^\dagger = k \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4$$

由于 Λ 依赖于 Lorentz 变换矩阵 A,因此不同的 A 可能给出不同的 k.

• 考虑 A=a,即固有 Lorentz 群,此时 $\Lambda(A)=\Lambda(a)=S$ 为固有 Lorentz 群的旋量表示,其中包含了恒元。把恒元代入上式

$$I^\dagger = k \gamma_4 I^{-1} \gamma_4$$

解得

$$k = 1$$

• 考虑 $A=\sigma$,此时 $\Lambda(A)=\Lambda(\sigma)=P$,而 $P=\eta_P\gamma_4, |\eta_P|=1$,代入得

$$\eta_P^*\gamma_4^\dagger=k\gamma_4\eta_P^{-1}\gamma_4^{-1}\gamma_4$$

解得

$$k=\eta_P^*\eta_P=\left|\eta_P
ight|^2=1$$

• 考虑 A= au,此时 $\Lambda(A)=\Lambda(au)=T$,而 $T=\eta_T\gamma_1\gamma_2\gamma_3, |\eta_T|=1$,代入得

$$\eta_{T}^{st}\left(\gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}
ight)^{\dagger}=k\eta_{T}^{-1}\gamma_{4}\left(\gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}
ight)^{-1}\gamma_{4}$$

解得

$$k=-\left|\eta_{T}
ight|^{2}=-1$$

综上有

$$oxed{\Lambda^\dagger = egin{bmatrix} \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 &, \Lambda = S, P \ -\gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 &, \Lambda = T \end{bmatrix}}$$

旋量

旋量的定义

设 $\psi(x)$ 为四元单列矩阵函数

$$\psi(x) = egin{bmatrix} \psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \ \psi_4(x) \end{bmatrix}$$

当时空坐标进行广义洛伦兹变换 $x'_{\mu}=A_{\mu
u}x_{
u}+b_{\mu}$ 时,若 $\psi(x)$ 按照规律

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x)$$

变换,则称 $\psi(x)$ 为四元旋量,简称旋量。其中, $\Lambda=\Lambda(A)$ 是广义 Lorentz 变换矩阵 A 的旋量表示。

共轭旋量

定义旋量 $\psi(x)$ 的共轭旋量 $\bar{\psi}(x)$:

$$ar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma_4$$

由旋量的变换规律

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x)$$

以及 Λ^{\dagger} 的表达式

$$\Lambda^\dagger = k \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 \ \Lambda^\dagger = egin{cases} \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 &, \Lambda = S, P \ - \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 &, \Lambda = T \end{cases}$$

可知, $\bar{\psi}(x)$ 的变换规律为:

$$egin{aligned} ar{\psi}'(x') &= \psi'^\dagger(x') \gamma_4 \ &= \left[\Lambda \psi(x)
ight]^\dagger \gamma_4 \ &= \psi^\dagger(x) \Lambda^\dagger \gamma_4 \ &= \psi^\dagger(x) \left(k \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4
ight) \gamma_4 \ &= k \psi^\dagger(x) \gamma_4 \Lambda^{-1} \ &= k ar{\psi}(x) \Lambda^{-1} \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ar{\psi}'(x') = kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}, \quad k = egin{cases} +1 &, \Lambda = S, P \ -1 &, \Lambda = T \end{cases} \end{aligned}$$

由 $ar{\psi}$ 和 ψ 组成的张量或赝张量

先回顾一下 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^{\dagger}(x)\gamma_4$ 的变换规律:

$$\psi'(x') = \Lambda \psi(x)$$

$$egin{aligned} ar{\psi}'(x') = kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}, \quad k = egin{cases} +1 &, \Lambda = S, P \ -1 &, \Lambda = T \end{cases} \end{aligned}$$

 $ar{\psi}(x)\psi(x)$ 作为标量或赝标量

$$ar{\psi}'(x')\psi'(x') = \left(kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\right)\left(\Lambda\psi(x)\right) \\ = kar{\psi}(x)\psi(x)$$

对于 S,P 变换,k=+1, $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ 是标量;

对于 T 变换,k=-1, $ar{\psi}(x)\psi(x)$ 是赝标量。

$$ar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

利用 Λ 与 γ_5 的关系

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda=|A|\,\gamma_5$$

可得

$$ar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \left(kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\right)\gamma_5\left(\Lambda\psi(x)\right) \ = k\left|A\right|ar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

对于 S,P 变换,k=+1, $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ 是赝标量。

$ar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)$ 的变换规律

利用 Λ 的定义

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
u}\gamma_{
u}$$

可得

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_{\mu}\psi'(x') = (k\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1})\gamma_{\mu}(\Lambda\psi(x))$$
$$= kA_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_{\nu}\psi(x)$$

对于 S,P 变换,k=+1, $ar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)$ 是矢量。

$ar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_{5}\psi(x)$ 的变换规律

利用 Λ 的定义以及 Λ 与 γ_5 的关系

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
u}\gamma_{
u}, \quad \Lambda^{-1}\gamma_{5}\Lambda=\left|A\right|\gamma_{5}$$

可得

$$egin{aligned} ar{\psi}'(x')\gamma_{\mu}\gamma_{5}\psi'(x') &= \left(kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}
ight)\gamma_{\mu}\gamma_{5}\left(\Lambda\psi(x)
ight) \ &= kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda\Lambda^{-1}\gamma_{5}\Lambda\psi(x) \ &= k\left|A\right|A_{\mu
u}ar{\psi}(x)\gamma_{
u}\gamma_{5}\psi(x) \end{aligned}$$

对于 S,P 变换,k=+1, $ar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\gamma_{5}\psi(x)$ 是赝矢量。

$$ar{\psi}(x)\gamma_{lpha_1}\gamma_{lpha_2}\cdots\gamma_{lpha_n}\psi(x)$$
 的变换规律

当四维时空坐标进行广义洛伦兹变换时,

$$U_{lpha_1lpha_2\cdotslpha_n}=ar{\psi}\gamma_{lpha_1}\gamma_{lpha_2}\cdots\gamma_{lpha_n}\psi$$

的变换规律为:

$$egin{aligned} U'_{lpha_1lpha_2\cdotslpha_n}(x')&=ar{\psi}'(x')\gamma_{lpha_1}\gamma_{lpha_2}\cdots\gamma_{lpha_n}\psi'(x')\ &=kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_{lpha_1}\gamma_{lpha_2}\cdots\gamma_{lpha_n}\Lambda\psi(x)\ &=kar{\psi}(x)\left(\Lambda^{-1}\gamma_{lpha_1}\Lambda
ight)\left(\Lambda^{-1}\gamma_{lpha_2}\Lambda
ight)\cdots\left(\Lambda^{-1}\gamma_{lpha_n}\Lambda
ight)\psi(x)\ &=kA_{lpha_1eta_1}A_{lpha_2eta_2}\cdots A_{lpha_neta_n}ar{\psi}(x)\gamma_{eta_1}\gamma_{eta_2}\cdots\gamma_{eta_n}\psi(x)\ &=kA_{lpha_1eta_1}A_{lpha_2eta_2}\cdots A_{lpha_neta_n}U_{eta_1eta_2\cdotslpha_n}(x) \end{aligned}$$

n 阶赝张量 $\bar{\psi}(x)\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\cdots\gamma_{\alpha_n}\gamma_5\psi(x)$

标量 $\bar{\psi}(x)\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)$

Dirac 方程 (旋量场方程)

Dirac 方程 (旋量场方程) 的导出

一方面, 假设自由旋量粒子哈密顿量可写为:

$$H = ec{lpha} \cdot \hat{ec{p}} + eta m_0$$

旋量场 ψ 满足薛定谔方程:

$$\mathrm{i}\partial_t\psi=H\psi=\left(ec{lpha}\cdot\hat{ec{p}}+eta m_0
ight)\psi$$

 $i\partial_t$ 两次作用于 ψ :

$$egin{aligned} -\partial_t^2 \psi(x) &= H^2 \psi(x) \ &= \left(ec{lpha} \cdot \hat{ec{p}} + eta m_0
ight)^2 \psi(x) \ &= \left[rac{1}{2} \left(lpha_i lpha_j + lpha_j lpha_i
ight) \hat{p}_i \hat{p}_j + \left(lpha_i eta + eta lpha_i
ight) \hat{p}_i m_0 + eta^2 m_0^2
ight] \psi(x) \end{aligned}$$

另一方面,假设旋量场 $\psi(x)$ 要满足标量场方程(即旋量的四个分量都要满足标量场方程):

$$\left(\Box-m_0^2
ight)\psi(x)=0\Longrightarrow -\partial_t^2\psi(x)=\left(-
abla^2+m_0^2
ight)\psi(x)=\left(\hat{ec p}^2+m_0^2
ight)\psi(x)=\left(\hat{p}_i\hat{p}_i+m_0^2
ight)\psi(x)$$

对比

$$\left\{egin{aligned} &-\partial_t^2 \psi(x) = \left[rac{1}{2} \left(lpha_i lpha_j + lpha_j lpha_i
ight) \hat{p}_i \hat{p}_j + \left(lpha_i eta + eta lpha_i
ight) \hat{p}_i m_0 + eta^2 m_0^2
ight] \psi(x) \ &-\partial_t^2 \psi(x) = \left(\hat{p}_i \hat{p}_i + m_0^2
ight) \psi(x) \end{aligned}
ight.$$

可得:

$$\left\{egin{aligned} lpha_ilpha_j+lpha_jlpha_i=2\delta_{ij}I, & i,j=1,2,3\ lpha_ieta+etalpha_i=0\ eta^2=I \end{aligned}
ight.$$

定义:

$$egin{aligned} \gamma_i \equiv -\mathrm{i}etalpha_i, \quad i=1,2,3 \ & & \ \hline \gamma_4 \equiv eta \ & & \end{aligned}$$

或者反过来

$$oxed{lpha_i=\mathrm{i}\gamma_4\gamma_i} oxed{eta=\gamma_4}$$

则上面的定义结合 α_i , β 矩阵的性质可得:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{
u}+\gamma_{
u}\gamma_{\mu}=2\delta_{\mu
u}I$$
 $\gamma^{\dagger}_{\mu}=\gamma_{\mu}$

即这样用 α_i , β 矩阵定义的 γ 矩阵恰好符合 Clifford 代数中 γ 矩阵的定义。

定义 Clifford 代数中的梯度算符:

$$\hat{\partial} \equiv \gamma_{\mu} \partial_{\mu}$$

利用二阶偏微分可交换的性质,有:

$$\begin{split} \hat{\partial}^2 &= \gamma_\mu \partial_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \partial_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \partial_\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \partial_\nu + \gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\nu \partial_\mu \right) \\ \bar{\mathcal{D}} 换第二项\mu, \nu指标 &= \frac{1}{2} \left(\gamma_\mu \gamma_\nu \partial_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_\mu \partial_\nu \right) \\ &= \delta_{\mu\nu} I \partial_\mu \partial_\nu \\ &= I \partial_\mu \partial_\mu \\ &\equiv I \Box \end{split}$$

因此,旋量场满足的标量场方程

$$\left(\Box-m_0^2\right)\psi(x)=0\Longleftrightarrow \left(I\Box-m_0^2\right)\psi(x)=0$$

可以写为:

$$\left(\hat{\partial}^2-m_0^2
ight)\psi(x)=0$$

因式分解:

$$\left(\hat{\partial}-m_0
ight)\left(\hat{\partial}+m_0
ight)\psi(x)=0$$

Dirac 认为

$$\left(\hat{\partial}+m_0
ight)\psi(x)\equiv \left(\gamma_\mu\partial_\mu+m_0
ight)\psi(x)=0$$

是旋量场方程。

$$\left[\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m_{0}
ight) \psi(x)=0
ight]$$

Dirac 方程的共轭方程

考虑 Dirac 方程

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m_{0}
ight)\psi(x)=0$$

其可写为

$$\gamma_i \partial_i \psi(x) + \gamma_4 \partial_4 \psi(x) + m_0 \psi(x) = 0$$

两边取厄米共轭,考虑到 $x_4=\mathrm{i}t, \left(\partial_4\psi(x)\right)^\dagger=-\partial_4\psi^\dagger(x)$ 且 γ_μ 是厄米矩阵满足 $\gamma_\mu^\dagger=\gamma_\mu$,则有:

$$\partial_i \psi^\dagger(x) \gamma_i - \partial_4 \psi^\dagger(x) \gamma_4 + m_0 \psi^\dagger(x) = 0$$

上式右乘 γ_4 ,并利用 γ_4 与 γ_i 的反对易关系 $\gamma_4\gamma_i + \gamma_i\gamma_4 = 0$ 得:

$$-\partial_i \psi^\dagger(x) \gamma_4 \gamma_i - \partial_4 \psi^\dagger(x) \gamma_4 \gamma_4 + m_0 \psi^\dagger(x) \gamma_4 = 0$$

再利用 $\bar{\psi}(x) = \psi^{\dagger}(x)\gamma_4$ 得:

$$-\partial_i \bar{\psi}(x)\gamma_i - \partial_4 \bar{\psi}(x)\gamma_4 + m_0 \bar{\psi}(x) = 0$$

即 Dirac 方程的共轭方程:

$$oxed{\partial_{\mu}ar{\psi}\gamma_{\mu}-m_0ar{\psi}=0}$$

Dirac 方程的协变性

Dirac 方程的协变性就是说,当时空坐标进行广义 Lorentz 变换时,Dirac 方程在变换前后的参考系内具有相同的形式。

考虑时空坐标进行广义 Lorentz 变换,即 $x'_{\mu}=A_{\mu\nu}x_{\nu}+b_{\mu}.$

x' 系的 Dirac 方程为:

$$\gamma_{
ho}\partial_{
ho}'\psi'(x')+m\psi'(x')=0$$

把 x' 系的物理量用 x 系的物理量表达:

$$egin{align} \partial_
ho' &\equiv rac{\partial}{\partial x_
ho'} = rac{\partial x_
u}{\partial x_
ho'} rac{\partial}{\partial x_
u} = A_{
ho
u} \partial_
u \ \psi'(x') &= \Lambda \psi(x) \ \end{matrix}$$

因此 x' 系的 Dirac 方程可写为:

$$egin{aligned} 0 &= \gamma_
ho \partial_
ho' \psi'(x') + m \psi'(x') \ &= \gamma_
ho A_{
ho
u} \partial_
u \Lambda \psi(x) + m \Lambda \psi(x) \end{aligned}$$

上式左乘 Λ^{-1} (注意 Λ 依赖于 A,但不依赖于时空坐标),并利用 $\Lambda^{-1}\gamma_{
ho}\Lambda=A_{
holpha}\gamma_{lpha}$ 和正交关系 $A_{
holpha}A_{
ho
u}=\delta_{lpha
u}$:

$$egin{aligned} 0 &= \Lambda^{-1} \gamma_{
ho} A_{
ho
u} \partial_{
u} \Lambda \psi(x) + \Lambda^{-1} m \Lambda \psi(x) \ &= \Lambda^{-1} \gamma_{
ho} \Lambda A_{
ho
u} \partial_{
u} \psi(x) + m \psi(x) \ &= A_{
holpha} \gamma_{lpha} A_{
ho
u} \partial_{
u} \psi(x) + m \psi(x) \ &= \delta_{lpha
u} \gamma_{lpha} \partial_{
u} \psi(x) + m \psi(x) \ &= \gamma_{
u} \partial_{
u} \psi(x) + m \psi(x) \end{aligned}$$

可见当波函数 $\psi(x)$ 是一个旋量,服从旋量变换规律时,x 系和 x' 系的 Dirac 方程形式上一致。

Dirac 共轭方程的协变性

Dirac 共轭方程的协变性就是说,当时空坐标进行**固有 Lorentz 变换**或**空间反射变换**时,Dirac 共轭方程在变换前后的参考系内具有相同的形式。

首先回顾一下共轭旋量的变换规律:

$$ar{\psi}'(x') = kar{\psi}(x)\Lambda^{-1}, \quad k = egin{cases} +1 &, \Lambda = S, P \ -1 &, \Lambda = T \end{cases}$$

考虑时空坐标进行固有 Lorentz 变换或空间反射变换,即 $x'_\mu=A_{\mu\nu}x_
u, A=a,\sigma, \Lambda(a)=S, \Lambda(\sigma)=P$,则此时共轭旋量的变换规律为

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}$$

x' 系的共轭 Dirac 方程为:

$$\partial'_{\mu}ar{\psi}'(x')\gamma_{\mu}-mar{\psi}'(x')=0$$

把 x' 系的物理量用 x 系的物理量表达:

$$\partial_
ho' \equiv rac{\partial}{\partial x_
ho'} = rac{\partial x_
u}{\partial x_
ho'} rac{\partial}{\partial x_
u} = A_{
ho
u} \partial_
u$$

因此 x' 系的 Dirac 方程可写为:

$$0 = \partial'_{\mu}\bar{\psi}'(x')\gamma_{\mu} - m\bar{\psi}'(x')$$

= $A_{\mu\rho}\partial_{\rho}\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_{\mu} - m\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}$

上式右乘 Λ ,并利用 $\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu\nu}\gamma_{\nu}$ 和正交关系 $A_{\mu\rho}A_{\mu\nu}=\delta_{\rho\nu}$ 可得:

$$\begin{split} 0 &= A_{\mu\rho} \partial_{\rho} \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1} \gamma_{\mu} \Lambda - m \bar{\psi}(x) \Lambda^{-1} \Lambda \\ &= A_{\mu\rho} \partial_{\rho} \bar{\psi}(x) A_{\mu\nu} \gamma_{\nu} - m \bar{\psi}(x) \\ &= \delta_{\rho\nu} \partial_{\rho} \bar{\psi}(x) \gamma_{\nu} - m \bar{\psi}(x) \\ &= \partial_{\nu} \bar{\psi}(x) \gamma_{\nu} - m \bar{\psi}(x) \end{split}$$

可见当 $\bar{\psi}(x)$ 是一个共轭旋量,服从共轭旋量变换规律时,x 系和 x' 系的 Dirac 共轭方程形式上一致。

Dirac 方程描写粒子的自旋为 1/2

为了方便,下面算符都略去帽子。

轨道角动量算符:

$$L_i = \left(ec{x} imesec{p}
ight)_i = arepsilon_{ijk} x_j p_k$$

自由旋量粒子哈密顿量算符:

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

二者对易关系:

$$egin{aligned} [H,L_i] &= [lpha_l p_l + eta m, arepsilon_{ijk} x_j p_k] \ &= arepsilon_{ijk} lpha_l \left[p_l, x_j p_k
ight] \ &= arepsilon_{ijk} lpha_l \left(x_j \left[p_l, p_k
ight] + \left[p_l, x_j
ight] p_k
ight) \ &= arepsilon_{ijk} lpha_l p_k \ &= -\mathrm{i} \hbar arepsilon_{ijk} lpha_j p_k \ &= -\mathrm{i} \hbar \left(ec{lpha} imes ec{p}
ight)_i \ &= -\mathrm{i} \left(ec{lpha} imes ec{p}
ight)_i \end{aligned}$$

因此:

$$\left[H,ec{L}
ight]=-\mathrm{i}ec{lpha} imesec{p}$$

这表明, Dirac 方程描述的粒子的轨道角动量不守恒。

定义四阶 σ_i 矩阵:

利用

$$egin{aligned} \gamma_i &\equiv -\mathrm{i}etalpha_i, \quad i=1,2,3 \ egin{aligned} \gamma_4 &\equiv eta \ \\ \hline lpha_i &\equiv \mathrm{i}\gamma_4\gamma_i \ \\ \hline eta_i &= \mathrm{i}\gamma_4\gamma_i \ \\ \hline eta_i &= \gamma_4 \ \\ \gamma_i\gamma_j &= 2\delta_{ij}I - \gamma_j\gamma_i \ \\ \gamma_4\gamma_i &= -\gamma_i\gamma_4 \ \\ \hline [\gamma_4,\gamma_j\gamma_k] &= \gamma_4\gamma_j\gamma_k - \gamma_j\gamma_k\gamma_4 \ \\ &= \gamma_4\gamma_j\gamma_k - \gamma_4\gamma_j\gamma_k \ \\ &= 0 \end{aligned}$$

可计算:

$$\begin{split} \left[H,\frac{\sigma_{i}}{2}\right] &= \left[\alpha_{l}p_{l} + \beta m, \frac{1}{4i}\varepsilon_{ijk}\gamma_{j}\gamma_{k}\right] \\ &= \frac{1}{4i}\varepsilon_{ijk}\left[i\gamma_{4}\gamma_{l}p_{l} + \gamma_{4}m, \gamma_{j}\gamma_{k}\right] \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left[\gamma_{4}\gamma_{l}, \gamma_{j}\gamma_{k}\right]p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left(\gamma_{4}\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} - \gamma_{j}\gamma_{k}\gamma_{4}\gamma_{l}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left(\gamma_{4}\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} - \gamma_{4}\gamma_{j}\gamma_{k}\gamma_{l}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma_{4}\left(\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} - \gamma_{j}\gamma_{k}\gamma_{l}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma_{4}\left(\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} - \gamma_{j}\left(2\delta_{kl}I - \gamma_{l}\gamma_{k}\right)\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma_{4}\left(\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} + \gamma_{j}\gamma_{l}\gamma_{k} - 2\delta_{kl}\gamma_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma_{4}\left(\gamma_{l}\gamma_{j}\gamma_{k} + \left(2\delta_{jl}I - \gamma_{l}\gamma_{j}\right)\gamma_{k} - 2\delta_{kl}\gamma_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{2i}\varepsilon_{ijk}\left(\delta_{jl}i\gamma_{4}\gamma_{k} - \delta_{kl}i\gamma_{4}\gamma_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{2i}\varepsilon_{ijk}\left(\delta_{jl}i\gamma_{4}\gamma_{k} - \delta_{kl}i\gamma_{4}\gamma_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\varepsilon_{ilk}\alpha_{k} - \varepsilon_{ijl}\alpha_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\varepsilon_{ilk}\alpha_{k} + \varepsilon_{ilj}\alpha_{j}\right)p_{l} \\ &= \frac{1}{i}\varepsilon_{ilk}\alpha_{k}p_{l} \\ &= i\varepsilon_{ikl}\alpha_{k}p_{l} \\ &= i\left(\vec{\alpha} \times \vec{p}\right)_{i} \end{split}$$

则:

$$\left[H,L_i+rac{\sigma_i}{2}
ight]=-\mathrm{i}\left(ec{lpha} imesec{p}
ight)_i+\mathrm{i}\left(ec{lpha} imesec{p}
ight)_i=0$$

构造

$$ec{J}\equivec{L}+rac{ec{\sigma}}{2}$$

则:

$$\left[H,\vec{J}\right]=0$$

这表明,Dirac 方程描述的粒子的总角动量 $ec{J}$ 守恒。

其中的附加项 $\vec{\sigma}/2$ 解释为粒子的自旋角动量算符。因此旋量波函数描述的粒子自旋为 $\vec{\sigma}/2$ 。这种粒子称为旋量粒子。

用 σ_i^0 表达 $lpha_i,eta,\gamma_\mu$

一些对易关系

$$egin{aligned} \left[\left(ec{\sigma} \cdot ec{p}
ight), \left(ec{\gamma} \cdot ec{p}
ight)
ight] &= 0 \ \\ \left[\left(ec{\sigma} \cdot ec{p}
ight), eta &= 0
ight] \ \\ \left[\hat{H}, \left(ec{\sigma} \cdot ec{p}
ight)
ight] &= 0 \ \end{aligned}$$
 $\left[\hat{H}, \left(ec{\sigma} \cdot ec{p}
ight)
ight] = 0$

自由旋量粒子的波函数

自旋旋量粒子

若波函数 $\psi(x)$ 满足 Dirac 方程

$$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m_0)\,\psi(x)=0$$

则由 $\psi(x)$ 描述的粒子称为**自由旋量粒子**。

四维动量算符及其本征方程

四维动量算符 \hat{p}_{μ} 定义为:

$$\hat{p}_{\mu} \equiv -\mathrm{i}\partial_{\mu}$$

写成3+1形式即:

$$\hat{p}_{\mu} = \left(\hat{ec{p}}, -\partial_{t}
ight) = \left(-\mathrm{i}
abla, -\partial_{t}
ight), \quad \hat{p}_{4} = -\partial_{t}$$

考虑四维动量算符的本征方程:

$$\hat{p}_{\mu}\psi(x)\equiv-\mathrm{i}\partial_{\mu}\psi(x)=p_{\mu}\psi(x)$$

其中, p_μ 代表本征值, $\psi(x)$ 是本征波函数。容易猜到,上式中波函数 ψ 有平面波解:

$$\psi_p(x) = u(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p x}, \quad \forall p_u$$

$$px \equiv p_{\mu}x_{\mu} = \vec{p}\cdot\vec{x} + p_4x_4 = \vec{p}\cdot\vec{x} + (\mathrm{i}p_0)\,(\mathrm{i}t) = \vec{p}\cdot\vec{x} - p_0t,$$

很容易验证上面构造的平面波解 $\psi_p(x)=u(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}=u(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}\cdot\vec{x}-p_4x_4)}$ 是四维动量算符的本征波函数,对应本征值恰为构造平面波解用到的四个连续参数 (\vec{p},p_4) .

具有确定四维动量自由旋量粒子动量表象 Dirac 方程

具有确定四维动量自由旋量粒子,其波函数 $\psi(x)$ 应既是四维动量算符本征波函数,又要满足 Dirac 方程。

 $\psi(x)$ 首先要满足 \hat{p}_{μ} 的本征方程:

$$\hat{p}_{\mu}\psi(x)\equiv-\mathrm{i}\partial_{\mu}\psi(x)=p_{\mu}\psi(x)$$

上面已经讨论过了, $\psi(x)$ 有平面波解:

$$\psi_p(x) = u(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p x}$$

 $\psi(x)$ 还要满足 Dirac 方程。将 $\psi(x)$ 的平面波解代入自由旋量场 Dirac 方程 $(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\psi(x)=0$,可得:

$$\left(\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}+m
ight)u(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}=0$$

因此,对任意 p_{μ} ,相应 u(p) 要满足:

$$\left[\left(\mathrm{i}\hat{p}+m
ight)u(p)=0,\quad\hat{p}\equiv\gamma_{\mu}p_{\mu}
ight]$$

这是具有确定四维动量自由旋量粒子动量表象 Dirac 方程。

具有确定三维动量的自由旋量粒子的哈密顿算符

回顾一下,对于一个自由旋量粒子,其哈密顿算符为

$$\hat{H} = ec{lpha} \cdot \hat{ec{p}} + eta m = \mathrm{i} \gamma_4 ec{\gamma} \cdot \hat{ec{p}} + eta m = eta \left(\mathrm{i} ec{\gamma} \cdot \hat{ec{p}} + m
ight)$$

Somehow, R场论认为, 一个具有确定动量 (三维动量而非四维动量) 的自由旋量粒子的哈密顿算符为:

$$\hat{H}(\vec{p}) = \beta \left(i \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right)$$

动量表象 $\hat{H}(ec{p})$ 的本征方程

具有确定四维动量自由旋量粒子动量表象 Dirac 方程:

$$(\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu + m)\,u(p) = 0$$

即:

$$(\mathrm{i}\gamma_i p_i + \mathrm{i}\gamma_4 p_4 + m) \, u(p) = 0$$

左乘 $\beta = \gamma_4$:

$$(i\beta\vec{\gamma}\cdot\vec{p}+ip_4+m\beta)u(p)=0$$

即:

$$\beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) u(p) = -\mathrm{i} p_4 u(p)$$

再注意到

$$\hat{H}(ec{p}) = eta \left(\mathrm{i} ec{\gamma} \cdot ec{p} + m
ight), \quad p_0 = E, \quad p_4 = \mathrm{i} E = \mathrm{i} p_0$$

因此有动量表象 $\hat{H}(\vec{p})$ 本征方程:

$$\hat{H}(\vec{p})u(p) = p_0u(p)$$

由于 $\hat{H}(\vec{p})$ 是厄米的,因此

$$\begin{split} \hat{H}^2(\vec{p}) &= \hat{H}^\dagger(\vec{p}) \hat{H}(\vec{p}) \\ &= \left[\beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \right]^\dagger \left[\beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \right] \\ &= \left(-\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \\ &= \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \right)^2 + m^2 I \\ &= \left(\gamma_i p_i \right) \left(\gamma_j p_j \right) + m^2 I \\ &= \frac{1}{2} \left(\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i \right) p_i p_j + m^2 I \\ &= \delta_{ij} p_i p_j I + m^2 I \\ &= \left(\vec{p}^2 + m^2 \right) I \end{split}$$

因此由

$$\hat{H}^2(ec{p})u(p)=p_0^2u(p)$$

可得:

$$p_0=\pm\sqrt{ec p^2+m^2}\equiv\pm E,\quad E\equiv\sqrt{ec p^2+m^2}$$

即:

$$\hat{H}(\vec{p})u(p) = \pm Eu(p)$$

上式说明,具有确定三维动量自由旋量粒子哈密顿算符 $\hat{H}(\vec{p})$ 本征值为 $\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$,也就是说具有确定三维动量自由旋量粒子有 $+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ 和 $-\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ 两种能量状态。

具有确定四维动量自由旋量粒子自旋方向

由于

$$\left[\hat{H}(ec{p}),ec{\sigma}\cdotec{n}
ight]=0$$

因此 $\hat{H}(\vec{p})$ 的本征函数 u(p) 也是 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ 的本征函数,设对应的本征值为 λ ,其本征方程为:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,u(p)=\lambda u(p)$$

注意到

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$$
$$= \vec{n} \cdot \vec{n} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{n} \times \vec{n})$$
$$= 1$$

 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 两次作用于 u(p):

$$(\vec{\sigma}\cdot \vec{n})^2\,u(p)=\lambda^2 u(p)$$

结合 $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)^2=1$ 可得本征值的取值:

$$\lambda = \pm 1$$

即

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) u(p) = \pm u(p)$$

具有确定动量自由旋量粒子的四种独立态状态

由干

$$\left[\hat{H}(ec{p}),(ec{\sigma}\cdotec{n})
ight]=0$$

因此二者有共同本征态。上面讨论过, $\hat{H}(\vec{p})$ 的本征值有 $\pm E$ 两种, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$ 有 ± 1 两种。

根据本征值可将 $\psi(x) = u(p)e^{ipx}$ 划分为以下四种态:

$$p_0=+E, \lambda=+1$$
 记为 $u_1(ec p)$

$$p_0=+E, \lambda=-1$$
 记为 $u_2(\vec{p})$

$$p_0 = -E, \lambda = +1$$
 记为 $u_3(\vec{p})$

$$p_0 = -E, \lambda = -1$$
 记为 $u_4(\vec{p})$

即

\$\$

\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n} \right)u a(\vec{p})

=\left{

\begin{aligned}

- u_a(\vec{p}),a=1,3 \
- u_a(\vec{p}),a=2,4 \end{aligned} \right.\$\$

 $\hat{H}(\vec{p})u_a(\vec{p}) = egin{cases} +Eu_a(\vec{p}), a=1,2 \ -Eu_a(\vec{p}), a=3,4 \end{cases}$

注意, 本征态 $u_a(\vec{p})$ 的能量本征值 p_0 由下标 a 决定:

$$p_0 = egin{cases} +E, a = 1, 2 \ -E, a = 3, 4 \end{cases}$$

单位旋量 $u_a(\vec{p})$ 的空间反射态

当时空坐标进行空间反射变换 $\vec{x}' = -\vec{x}, t' = t$ 时,旋量场函数的变换规律为:

$$\psi'(x') = P\psi(x) = \eta_P \gamma_4 \psi(x), \quad \eta_P = \pm i, \pm 1$$

对于具有确定三维动量、能量和自旋状态的波函数

$$\psi_a(x) = u_a(ec p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec p \cdot ec x - p_0 t)}$$

在空间反射新坐标系中的波函数为

$$\begin{split} \psi_a'(x') &= \eta_P \gamma_4 \psi_a(x) \\ &= \eta_P \gamma_4 u_a(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p} \cdot \vec{x} - p_0 t)} \\ &= \eta_P \gamma_4 u_a(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \vec{p} \cdot \vec{x}' - p_0 t'} \\ &= \eta_P \gamma_4 u_a(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \vec{p} \cdot \vec{x}' - p_0 t'} \\ &= \eta_P \gamma_4 u_a(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i} \left[(-\vec{p}) \cdot \vec{x}' - p_0 t'\right]} \end{split}$$

在新坐标系中, $\psi_a'(x')$ 沿 $\vec{p}' \equiv -\vec{p}$ 方向传播。

 $\eta_P \gamma_4 u_a(\vec{p})$ 称为单位旋量 $u_a(\vec{p})$ 的空间反射态,记为 $u_a(-\vec{p})$

$$igg|u_a(-ec p)\equiv \eta_P\gamma_4 u_a(ec p)$$

可以证明, $u_a(-\vec{p})$ 能量状态与 $u_a(\vec{p})$ 相同; $u_a(\vec{p})$ 中自旋与 \vec{p} 的夹角等于 $u_a(-\vec{p})$ 中自旋与 \vec{p} 的夹角。

旋量场的电荷共轭变换 (正反粒子变换)

有电磁场存在时的 Dirac 方程

我们知道自由旋量场 Dirac 方程:

$$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\psi(x)=0$$

当有电磁场存在时,旋量粒子与光子会相互作用,旋量粒子不自由了。为了找到此时的场方程,作如下变换:

$$p_{\mu}
ightarrow p_{\mu}-eA_{\mu}$$
 $\partial_{\mu}
ightarrow\partial_{\mu}-\mathrm{i}eA_{\mu}\equiv D_{\mu}$

则 Dirac 方程及其共轭方程化为

$$\left(\gamma_{\mu}D_{\mu}+m
ight)\psi=0$$

$$D_{\mu}^{\dagger}ar{\psi}\gamma_{m}u-mar{\psi}=0$$

即得到矢量场合旋量场相互作用场方程:

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m
ight)\psi=\mathrm{i}eA_{\mu}\gamma_{\mu}\psi$$

$$\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}-m\bar{\psi}=-\mathrm{i}eA_{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}$$

电磁场存在时 Dirac 方程的 Lorentz 协变性

电磁场存在时 x' 系的 Dirac 方程为:

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}^{\prime}-\mathrm{i}eA_{\mu}^{\prime}\gamma_{\mu}+m
ight)\psi^{\prime}(x^{\prime})=0$$

时空坐标进行 Lorentz 变换:

$$x_{\mu}
ightarrow x_{\mu}' = A_{\mu
u} x_{
u}, \quad A_{\mu \lambda} x_{\mu}' = x_{\lambda}$$

x' 系的物理量用 x 系的物理量表达:

$$egin{align} \partial'_{\mu} &\equiv rac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = rac{\partial x_{
u}}{\partial x'_{\mu}} rac{\partial}{\partial x_{
u}} = A_{\mu
u}\partial_{
u} \ & \ \psi'(x') = \Lambda \psi(x) \ & \ A'_{\mu} = A_{\mu
u}A_{
u} \end{split}$$

则 Dirac 方程化为:

$$egin{aligned} 0 &= \left(\gamma_{\mu} \partial_{\mu}' - \mathrm{i} e A_{\mu}' \gamma_{\mu} + m
ight) \psi'(x') \ &= \left(\gamma_{\mu} A_{\mu
u} \partial_{
u} - \mathrm{i} e A_{\mu
u} A_{
u} \gamma_{\mu} + m
ight) \Lambda \psi(x) \end{aligned}$$

左乘 Λ^{-1} ,并利用

$$\Lambda^{-1}\gamma_{\mu}\Lambda=A_{\mu
ho}\gamma_{
ho}$$

可得:

$$\begin{split} 0 &= \Lambda^{-1} \left(\gamma_{\mu} A_{\mu\nu} \partial_{\nu} - \mathrm{i} e A_{\mu\nu} A_{\nu} \gamma_{\mu} + m \right) \Lambda \psi(x) \\ &= \left(A_{\mu\rho} \gamma_{\rho} A_{\mu\nu} \partial_{\nu} - \mathrm{i} e A_{\mu\nu} A_{\nu} A_{\mu\rho} \gamma_{\rho} + m \right) \psi(x) \\ &= \left(\delta_{\rho\nu} \gamma_{\rho} \partial_{\nu} - \mathrm{i} e \delta_{\nu\rho} A_{\nu} \gamma_{\rho} + m \right) \psi(x) \\ &= \left(\gamma_{\nu} \partial_{\nu} - \mathrm{i} e A_{\rho} \gamma_{\rho} + m \right) \psi(x) \end{split}$$

因此, x 系中的 Dirac 方程为:

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}-\mathrm{i}eA_{\mu}\gamma_{\mu}+m
ight)\psi(x)=0$$

与 x' 系中的 Dirac 方程

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}^{\prime}-\mathrm{i}eA_{\mu}^{\prime}\gamma_{\mu}+m
ight)\psi^{\prime}(x^{\prime})=0$$

对比可知,电磁场存在时 Dirac 方程具有 Lorentz 协变性。

电荷共轭变换

电荷共轭变换把粒子的场函数变为反粒子场函数,把粒子运动方程变为反粒子的运动方程。

经典旋量场的电荷共轭变换定义如下:

$$\psi^C(x) \equiv C ar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad ar{\psi}^C(x) = \left(\psi^C
ight)^\dagger \gamma_4 = \left\lceil C^{-1} \psi(x)
ight
ceil^{\mathrm{T}}$$

称为 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 的电荷共轭函数,其中

$$C \equiv \mathrm{i} \gamma_2 \gamma_4 = - egin{bmatrix} 0 & \sigma_2^0 \ \sigma_2^0 & 0 \end{bmatrix}$$

由

$$-\gamma_{\mu}^{
m T}=C^{-1}\gamma_{\mu}C,\quad |C|
eq 0$$

定义。

ψ^C 和 $ar{\psi}^C$ 满足的方程

$$egin{aligned} \gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi^{C}+m\psi^{C}&=-\mathrm{i}eA_{\mu}\gamma_{\mu}\psi^{C}\ \partial_{\mu}ar{\psi}^{C}\gamma_{\mu}-mar{\psi}^{C}&=\mathrm{i}eA_{\mu}ar{\psi}^{C}\gamma_{\mu} \end{aligned}$$

上两式称为 Dirac 方程的电荷共轭方程。与电磁场存在时的 Dirac 方程

$$egin{split} \left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m
ight)\psi&=\mathrm{i}eA_{\mu}\gamma_{\mu}\psi\ \ \partial_{\mu}ar{\psi}\gamma_{m}u-mar{\psi}&=-\mathrm{i}eA_{\mu}ar{\psi}\gamma_{\mu} \end{split}$$

比较,可知经过电荷共轭变换后,方程中电荷改变了正负号。

若 $\psi(x)$ 是描写电子的旋量函数,则 $\psi^{C}(x)$ 是描述正电子的旋量函数。

若 $ar{\psi}(x)$ 是描写正电子的旋量函数,则 $ar{\psi}^C(x)$ 是描述电子的旋量函数。

即若 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 是描写粒子的旋量函数,则 $\psi^C(x)$ 和 $\bar{\psi}^C$ 是描述反粒子的旋量函数。

反粒子单位旋量 $v_b(\vec{p})$

对于具有确定能量、动量和自旋态的自由电子, 其旋量波函数为

$$\psi_b(x) = u_b(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i} p x}$$

相应共轭旋量波函数为

$$ar{\psi}_b(x) \equiv \psi_b^\dagger(x) \gamma_4 = u_b^\dagger(ec{p}) \gamma_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x} \equiv ar{u}_b(ec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x}, \quad ar{u}_b(ec{p}) \equiv u_b^\dagger(ec{p}) \gamma_4, \quad b = 1, 2, 3, 4$$

 $\psi_b(x)$ 的电荷共轭函数为

$$egin{aligned} \psi_b^C(x) &\equiv Car{\psi}_b^{
m T}(x) = C\left(ar{u}_b(ec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}
ight)^{
m T} = Car{u}_b^{
m T}(ec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \equiv u_b^C(ec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \ u_b^C(ec{p}) &\equiv Car{u}_b^{
m T}(ec{p}) \equiv C\left(u_b^{\dagger}(ec{p})\gamma_4
ight)^{
m T} = C\gamma_4^{
m T}u_b^*(ec{p}) \end{aligned}$$

把

$$\psi_b^C(x) = u_b^C(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p \cdot x}$$

代入自由旋量粒子电荷共轭 Dirac 方程

$$\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi^{C}+m\psi^{C}=0$$

可得 $u_b^C(\vec{p})$ 满足的动量表象方程:

$$\left(\mathrm{i}\hat{p}-m
ight)u_{b}^{C}(ec{p})=0$$

 $u_b^C(ec{p}) \equiv Car{u}_b^{
m T}(ec{p})$ 称为**反粒子单位旋量**,通常记为 $v_b(ec{p})$,即:

$$v_b(ec{p}) \equiv u_b^C(ec{p}) \equiv C ar{u}_b^{
m T}(ec{p}) = C \gamma_4^{
m T} u_b^*(ec{p})$$

其满足方程:

$$\left[\left(\mathrm{i}\hat{p}-m
ight)v_{b}(ec{p}
ight)=0$$

利用 $u_b(\vec{p})$ 的正交完备性,可证明 $v_b(\vec{p})$ 也是正交完备的:

$$egin{aligned} v_a^\dagger v_b = \delta_{ab}, \quad a = 1, 2, 3, 4 \ \hline & v_a v_a^\dagger = I \ \end{bmatrix}$$

单位旋量 $u_a(\vec{p})$ 和 $v_a(\vec{p})$ 的一些性质

 $\{u_a(\vec{p}), a=1,2,3,4\}$ 和 $\{v_a(\vec{p}), a=1,2,3,4\}$ 构成旋量空间的两组基底。

可选取

$$u_1(\vec{p}), u_2(\vec{p}), v_1(\vec{p}), v_2(\vec{p})$$

作为旋量空间的基底。它们满足正反粒子单位旋量动量表象 Dirac 方程:

$$(\mathrm{i}\hat{p}+m)\,u_i(ec{p})=0,\quad (\mathrm{i}\hat{p}-m)\,v_i(ec{p})=0,\quad i=1,2$$

有如下正交关系:

$$egin{aligned} u_i^\dagger(ec{p})u_j(ec{p}) &= \delta_{ij} \ v_i^\dagger(ec{p})v_j(ec{p}) &= \delta_{ij} \ ar{u}_i(ec{p})u_j(ec{p}) &= rac{m}{E}\delta_{ij} \ ar{v}_i(ec{p})v_j(ec{p}) &= -rac{m}{E}\delta_{ij} \end{aligned}$$

正反粒子投影算符 $\Lambda_+(p)$

正反粒子投影算符 $\Lambda_{\pm}(p)$ 定义如下:

$$oxed{\Lambda_{\pm}(p)\equiv\pmrac{1}{2m}\left(\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}\pm m
ight)}$$

有如下的一些性质:

考虑到 $\left(\mathrm{i}\gamma_{\mu}\hat{p}_{\mu}+m\right)u_{i}(\vec{p})=0,\left(\mathrm{i}\gamma_{\mu}\hat{p}_{\mu}-m\right)v_{i}(\vec{p})=0$ 可得:

$$\Lambda_-(p)u_j(ec p)=u_j(ec p), \quad \Lambda_-(p)v_j(ec p)=0$$

$$oxed{\Lambda_+(p)u_j(ec p)=0,\quad \Lambda_+(p)v_j(ec p)=v_j(ec p)}$$

可见, $\Lambda_{+}(p)$ 反粒子单位旋量投影算符; $\Lambda_{-}(p)$ 正粒子单位旋量投影算符。

可以证明, 任何旋量 f(p) 可以用 $u_1(\vec{p}), u_2(\vec{p}), v_1(\vec{p}), v_2(\vec{p})$ 展开:

$$f(p) = a_i u_i(\vec{p}) + b_i v_i(\vec{p})$$

展开系数为:

$$a_i = rac{E}{m}ar{u}_i(ec{p})f(p), \quad b_i = -rac{E}{m}ar{v}_i(ec{p})f(p), \quad i=1,2$$

投影算符 (或动量算符) 与单位旋量之间的关系为:

$$oxed{u_i(ec{p})ar{u}_i(ec{p}) = rac{m}{E}\Lambda_-(p) = -rac{1}{2E}\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\hat{p}_\mu - m
ight), \quad v_i(ec{p})ar{v}_i(ec{p}) = -rac{m}{E}\Lambda_+(p) = -rac{1}{2E}\left(\mathrm{i}\gamma_\mu\hat{p}_\mu + m
ight)}{(i\gamma_\mu\hat{p}_\mu + m)}$$

6 拉格朗日方程、对称性与守恒律

场论中的拉格朗日原理

拉格朗日原理与场的运动方程

引入广义场函数 $\phi_A(x)$, 其可以是张量场函数, 也可以是旋量场函数, 也可以是标量场函数。

场的作用量定义如下:

$$I\left[\phi_A(x)
ight] = \int\limits_G \mathcal{L}\left(\phi_A,\partial_\mu\phi_A
ight) \mathrm{d}^4x, \quad \mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \quad x_4 = \mathrm{i}x_0$$

G 是场在四维时空中存在的范围; \mathcal{L} 是场的拉格朗日密度。

Lagrange 原理就是说,场的真实运动规律使作用量 I 取最小值,即:

$$\delta I = 0$$

利用变分法可得场的运动方程(E-L方程):

$$\overline{\left[rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi_A
ight)} = 0
ight]}$$

定义拉格朗日密度对广义场函数的欧拉式 $[\mathcal{L}]_{\phi_a}$:

$$\left[\mathcal{L}
ight]_{\phi_{A}}\equivrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{A}}-\partial_{\mu}rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}$$

则场的运动方程可写为:

$$[\mathcal{L}]_{\phi_A}=0$$

拉格朗日密度满足的条件

- (1) \mathcal{L} 是固有洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$ 及其旋量表示 Λ 的不变量。这样才能保证场方程对固有洛伦兹变换协变和角动量守恒。
- (2) \mathcal{L} 是四维位移变换的不变量,因此 \mathcal{L} 不应显含 x_u ,这样才能保证能量和动量守恒。
- (3) \mathcal{L} 必须是 ϕ_A 和 $\partial_\mu\phi_A$ 的二次齐式。这样才能保证场的微分方程是线性的,荷守恒定律及电荷数、重子数、轻子数守恒(整体相因子变换下的守恒性)。
- (4) \mathcal{L} 是时间反演变换的不变量。在强和电磁作用中还要求 \mathcal{L} 对空间反射变换合电荷共轭变换的不变性。
- (5) \mathcal{L} 是规范变换的不变量。整体规范变换的协变性保证荷守恒。局域规范变换的协变性引入相互作用。

各种自由场的拉格朗日函数

实标量场

实标量场描述自旋为零、偶字称、无反粒子的粒子,

$${\cal L}_0 = -rac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m^2\phi^2
ight)$$

$$rac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad rac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \left(\partial_\mu \phi
ight)} = -\partial_\mu \phi$$

代入E-L方程,得标量场方程:

$$(\Box - m^2) \phi = 0$$

复标量场

复标量场描述自旋为零,存在正、反粒子的粒子。

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

分别把 ϕ , ϕ^* 作为变分量代入 E-L 方程,可得复标量场方程:

$$\left(\Box - m^2\right)\phi = 0$$

$$\left(\Box-m^2\right)\phi^*=0$$

赝标量场

赝标量场描述自旋为零、奇宇称的粒子。

$${\cal L}_0 = -rac{1}{2} \left(\partial_{\mu} ilde{\phi} \partial_{\mu} ilde{\phi} + m^2 ilde{\phi}^2
ight)$$

赝标量场方程为:

$$\left(\Box-m^2
ight) ilde{\phi}=0$$

旋量场

旋量场描述自旋为 1/2 的粒子(自旋为 1/2 粒子总有反粒子存在)。

$$\mathcal{L}_0 = -rac{1}{2}\left(ar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\muar{\psi}\gamma_\mu\psi
ight) - mar{\psi}\psi = -rac{1}{2}ar{\psi}\left(\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\psi
ight) + rac{1}{2}\left(\partial_\muar{\psi}\gamma_\mu - mar{\psi}
ight)\psi$$

分别把 $\psi, \bar{\psi}$ 作为变分量,代入 E-L 方程可得 Dirac 方程以及共轭 Dirac 方程:

$$(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m)\,\psi=0$$

$$\partial_{\mu}ar{\psi}\gamma_{\mu}-mar{\psi}=0$$

矢量场

矢量场描述自旋为 1 的光子。

$${\cal L}_0 = -rac{1}{2}\partial_\mu A_
u \partial_\mu A_
u$$

把 A_{μ} 作为变分量代入 E-L 方程, 的达朗贝尔方程:

$$\Box A_{\mu} = 0$$

静止质量不为零的矢量粒子的拉格朗日密度为:

$$\mathcal{L}_0 = -rac{1}{2} \left(\partial_\mu A_
u
ight) \left(\partial_\mu A_
u
ight) - rac{1}{2} m^2 A_\mu A_\mu$$

运动方程:

$$\left(\Box-m^2
ight)A_\mu=0$$

这破坏规范协变性。

若令

$${\cal L}_0' = -rac{1}{4}F_{\mu
u}F_{\mu
u}, \quad F_{\mu
u} = \partial_\mu A_
u - \partial_
u A_\mu$$

则可得:

$$\partial_{\nu}F_{\mu\nu}=0$$

若 A_μ 满足 Lorenz 条件

$$\partial_{\mu}A_{\mu}=0$$

则

$${\cal L}_0' = -rac{1}{4}F_{\mu
u}F_{\mu
u}, \quad {\cal L}_0 = -rac{1}{2}\partial_\mu A_
u \partial_\mu A_
u$$

等价。

对称性与守恒律

广义守恒定理1

设 $\theta_{\mu\cdots\nu\lambda}(x)$ 是 n 阶张量函数, 且满足:

$$\left. heta_{\mu \cdots
u \lambda}(x)
ight|_{ec{x}
ightarrow \infty} = 0$$

若

$$\partial_{\lambda}\theta_{\mu\cdots
u\lambda}=0$$

则存在一个 (n-1) 阶守恒张量:

$$T_{\mu\cdots
u}(x_4)\equivrac{1}{\mathrm{i}}\int\limits_{ec{x}\in\mathbb{R}^3} heta_{\mu\cdots
u4}(ec{x},x_4)\mathrm{d}^3ec{x}=\mathrm{const}$$

即 $T_{\mu\cdots\nu}$ 不随时间改变。

广义守恒定理2

若场的作用量

$$I = \int\limits_C \mathcal{L}\left(\phi_A,\partial_\mu\phi_A
ight) \mathrm{d}^4x$$

对微量变换

$$x
ightarrow x'=x+\delta x, \quad \phi_A
ightarrow \phi_A'=\phi_A+\delta_0\phi_A$$

$$\phi_A(x) o \phi_A'(x') = \phi_A(x) + \delta \phi_A(x)$$

保持不变,则存在一个矢量

$$heta_{\mu} = \left(\mathcal{L}\delta_{\mu
u} - rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{
u}\phi_{A}
ight)\delta x_{
u} + rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\delta\phi_{A}$$

满足关系式:

$$\partial_{\mu} heta_{\mu}+\left[\mathcal{L}
ight]_{\phi_{A}}\delta_{0}\phi_{A}=0$$

诺特定理

设坐标和广义场函数的变换依赖于连续变化的参数 $\alpha = \{\alpha_{i\cdots k}\}$,即

$$x'=x'(x,lpha),\quad \phi_A'(x')=\phi_A'(x,lpha)\equiv \Phi_A(x,lpha),$$

且满足

$$x'(x,0)=x, \quad \Phi_A(x,0)=\phi_A(x)$$

若作用量 I 对这个依赖于连续参数 lpha 的变换不变,且广义场函数满足欧拉方程 $[\mathcal{L}]_{\phi_A}=0$,也即满足最小作用量原理时,则存在守恒定律(连续方程)

$$\left.\partial_{\mu} heta_{i\cdots k\mu}=0,\quad heta_{i\cdots k\mu}\equiv\left[\mathcal{L}rac{\partial x'_{\mu}}{\partiallpha_{i\cdots k}}-rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{
u}\phi_{A}rac{\partial x'_{
u}}{\partiallpha_{i\cdots k}}+rac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}rac{\partial\Phi_{A}}{\partiallpha_{i\cdots k}}
ight]
ight|_{lpha=0}$$

和守恒张量

$$T_{i\cdots k} = rac{1}{\mathrm{i}} \int heta_{i\cdots k4} \mathrm{d}V$$

且 $T_{i...k}$ 的指标与 $\alpha_{i...k}$ 的指标一致。

能量动量张量和能量动量守恒

考虑坐标进行四维时空平移变换:

$$x'_{\mu}(x,lpha)=x_{\mu}+lpha_{\mu},\quad \phi'_A(x,lpha)=\phi_A(x)$$

根据诺特定理,若场的作用量对四维时空平移变化保持不变,则存在连续方程和守恒张量。下面来找连续方程和守恒张量。

计算变换后坐标对参数的偏导、变换后广义场函数对参数的偏导在参数为零处的取值:

$$\left. rac{\partial x'_{\mu}(x,lpha)}{\partial lpha_{
u}}
ight|_{lpha=0} = \delta_{\mu
u}, \quad \left. rac{\partial \phi'_A(x,lpha)}{\partial lpha_{
u}}
ight|_{lpha=0} = 0$$

诺特定理中定义的量

$$heta_{i\cdots k\mu} \equiv \left[\mathcal{L}rac{\partial x'_{\mu}}{\partial lpha_{i\cdots k}} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{eta}\phi_{A}rac{\partial x'_{eta}}{\partial lpha_{i\cdots k}} + rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}rac{\partial \phi'_{A}}{\partial lpha_{i\cdots k}}
ight]
ight|_{lpha=0}$$

在这里 (四个参数 α_{ν}) 表现为:

$$egin{aligned} heta_{
u\mu} &= \left[\mathcal{L}rac{\partial x'_{\mu}}{\partial lpha_{
u}} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{eta}\phi_{A}rac{\partial x'_{eta}}{\partial lpha_{
u}} + rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}rac{\partial \phi'_{A}}{\partial lpha_{
u}}
ight]igg|_{lpha=0} \ &= \mathcal{L}\delta_{\mu
u} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{
u}\phi_{A} \end{aligned}$$

交换 μ, ν 指标得到:

$$heta_{\mu
u} = \mathcal{L}\delta_{\mu
u} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{
u}\phi_{A}
ight)}\partial_{\mu}\phi_{A}$$

定义场的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu
u} \equiv \mathcal{L}\delta_{\mu
u} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_
u \phi_A
ight)} \partial_\mu \phi_A$$

诺特定理中的连续方程

$$\partial_{\mu}\theta_{i\cdots k\mu}=0$$

在这里表现为:

$$\partial_{\nu}T_{\mu\nu}=0$$

诺特定理中的守恒张量

$$T_{i\cdots k}=rac{1}{\mathrm{i}}\int heta_{i\cdots k4}\mathrm{d}V$$

在这里表现为:

$$p_{\mu}\equivrac{1}{\mathrm{i}}\int T_{\mu4}\mathrm{d}V,\quadrac{\mathrm{d}p_{\mu}}{\mathrm{d}t}=0$$
 $p_{i}\equivrac{1}{\mathrm{i}}\int T_{i4}\mathrm{d}V,\quad p_{4}\equivrac{1}{\mathrm{i}}\int T_{44}\mathrm{d}V=\mathrm{i}rac{E}{c}$

 p_i 称为三维空间场的动量, E 称为场的能量。

$$E = -\int T_{44} \mathrm{d}V$$

角动量张量和角动量守恒

考虑坐标进行固有 Lorentz 变换,广义场函数(标量场、矢量场或旋量场)也进行相应变换:

$$x'_{\mu}(x,lpha)=a_{\mu
u}x_{
u}=(\delta_{\mu
u}+lpha_{\mu
u})x_{
u},\quad \phi'(x,lpha)=D(lpha)\phi(x)$$

其中,对于标量场, $\phi(x)$ 是标量, $D(\alpha)$ 是 1;对于矢量场, $\phi(x)$ 是矢量场列矢量, $D(\alpha)$ 是固有 Lorentz 变换矩阵;对于旋量场, $\phi(x)$ 是旋量列矢量, $D(\alpha)$ 是固有 Lorentz 变换的旋量表示 S.

根据诺特定理,若场的作用量对坐标的固有 Lorentz 变换和广义场函数相应变换保持不变,则存在连续方程和守恒张量。下面来找连续方程和守恒张量。

为简单,考虑坐标和广义场函数的无穷小变换,即:

$$egin{aligned} lpha_{\mu
u} &
ightarrow 0, \quad x'_{\mu}(x,lpha) = (\delta_{\mu
u} + lpha_{\mu
u})x_{
u} = x_{\mu} + lpha_{\mu
u}x_{
u} \ & \ \phi'(x,lpha) = \phi(x) + rac{1}{2}I_{\mu
u}lpha_{\mu
u}\phi(x), \quad I_{\mu
u} \equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_{\mu
u}}igg|_{lpha=0} \ & \ \phi'_A(x,lpha) = \phi_A(x) + rac{1}{2}\left(I_{\mu
u}
ight)_{AB}lpha_{\mu
u}\phi_B(x) \end{aligned}$$

容易证明,无穷小变换情况下, $lpha_{\mu
u} = -lpha_{
u \mu}, I_{\mu
u} = -I_{
u \mu}$,这就导致了 1/2 因子。

计算变换后坐标对参数的偏导、变换后广义场函数对参数的偏导在参数为零处的取值:

$$egin{aligned} rac{\partial x'_{\mu}(x,lpha)}{\partial lpha_{\lambda
ho}}igg|_{lpha=0} &= \left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{
u
ho} - \delta_{\mu
ho}\delta_{
u\lambda}
ight)x_{
u} = \delta_{\mu\lambda}x_{
ho} - \delta_{\mu
ho}x_{\lambda} \ & rac{\partial \phi'(x,lpha)}{\partial lpha_{\lambda
ho}}igg|_{lpha=0} &= I_{\lambda
ho}\phi(x) \equiv D_{\lambda
ho} \ & rac{\partial \phi'_A(x,lpha)}{\partial lpha_{\lambda
ho}}igg|_{lpha=0} &= \left(I_{\lambda
ho}
ight)_{AB}\phi_B(x) \equiv \left(D_{\lambda
ho}
ight)_A \end{aligned}$$

诺特定理中定义的量

$$heta_{i\cdots k\mu} \equiv \left[\mathcal{L}rac{\partial x'_{\mu}}{\partial lpha_{i\cdots k}} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{
u}\phi_{A}rac{\partial x'_{
u}}{\partial lpha_{i\cdots k}} + rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}rac{\partial \phi'_{A}}{\partial lpha_{i\cdots k}}
ight]
ight|_{lpha=0}$$

在这里 (参数 $\alpha_{\mu\nu}$) 表现为:

$$\begin{split} \theta_{\lambda\rho\mu} &= \left[\mathcal{L} \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial \alpha_{\lambda\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \partial_{\nu}\phi_{A} \frac{\partial x'_{\nu}}{\partial \alpha_{\lambda\rho}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \frac{\partial \phi'_{A}}{\partial \alpha_{\lambda\rho}} \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \mathcal{L}(\delta_{\mu\lambda}x_{\rho} - \delta_{\mu\rho}x_{\lambda}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \partial_{\nu}\phi_{A}(\delta_{\nu\lambda}x_{\rho} - \delta_{\nu\rho}x_{\lambda}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \left(D_{\lambda\rho}\right)_{A} \\ &= \mathcal{L}(\delta_{\mu\lambda}x_{\rho} - \delta_{\mu\rho}x_{\lambda}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \left(x_{\rho}\partial_{\lambda}\phi_{A} - x_{\lambda}\partial_{\rho}\phi_{A}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \left(D_{\lambda\rho}\right)_{A} \\ &= \left(\mathcal{L}\delta_{\mu\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \partial_{\lambda}\phi_{A}\right) x_{\rho} - \left(\mathcal{L}\delta_{\mu\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \partial_{\rho}\phi_{A}\right) x_{\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \left(D_{\lambda\rho}\right)_{A} \\ &\equiv T_{\lambda\mu}x_{\rho} - T_{\rho\mu}x_{\lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}\right)} \left(D_{\lambda\rho}\right)_{A} \end{split}$$

换个指标:

$$heta_{[\mu
u]lpha} = T_{\mulpha}x_
u - T_{
ulpha}x_\mu + rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_lpha\phi_A
ight)} \left(D_{\mu
u}
ight)_A$$

场的总动量矩张量 $J_{[\mu\nu]\alpha}$ 定义为:

$$J_{[\mu
u]lpha}\equiv T_{\mulpha}x_
u-T_{
ulpha}x_\mu+rac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_lpha\phi_A
ight)}\left(D_{\mu
u}
ight)_A$$

定义场的三阶轨道动量矩张量 $L_{[\mu\nu]\alpha}$:

$$L_{[\mu
u]lpha}\equiv T_{\mulpha}x_
u-T_{
ulpha}x_\mu$$

定义场的三阶自旋张量 $S_{[\mu\nu]\alpha}$:

$$S_{[\mu
u]lpha}\equivrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{lpha}\phi_{A}
ight)}\left(D_{\mu
u}
ight)_{A}$$

则:

$$J_{[\mu\nu]\alpha} = L_{[\mu\nu]\alpha} + S_{[\mu\nu]\alpha}$$

诺特定理中的连续方程

$$\partial_{\mu}\theta_{i\cdots k\mu}=0$$

在这里表现为:

$$\partial_{\alpha}J_{[\mu\nu]\alpha}=0$$

诺特定理中的守恒张量

$$T_{i\cdots k} = \frac{1}{\mathrm{i}} \int \theta_{i\cdots k4} \mathrm{d}V$$

在这里表现为:

$$J_{\mu
u} \equiv rac{1}{\mathrm{i}} \int J_{[\mu
u]4} \mathrm{d}V, \quad rac{\mathrm{d}J_{\mu
u}}{\mathrm{d}t} = 0$$

其中 $J_{\mu\nu}$ 称为二阶动量矩张量。

定义场的二阶轨道动量矩张量:

$$L_{\mu
u} \equiv rac{1}{\mathrm{i}} \int L_{[\mu
u]4} \mathrm{d}V$$

定义场的二阶自旋张量:

$$S_{\mu
u} \equiv rac{1}{\mathrm{i}} \int S_{[\mu
u]4} \mathrm{d}V$$

则守恒量 $J_{\mu\nu}$ 可写为:

$$J_{\mu
u} = L_{\mu
u} + S_{\mu
u}$$

相因子变换、电流密度矢量和电荷守恒

考虑广义场函数进行相因子变换:

$$x_\mu'(x,lpha)=x_\mu,\quad \phi_A'(x,lpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha}\phi_A(x),\quad \phi_A^{*'}(x,lpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lpha}\phi_A^*(x)$$

根据诺特定理,若场的作用量对相因子变化保持不变,则存在连续方程和守恒张量。下面来找连续方程和守恒张量。

计算变换后坐标对参数的偏导、变换后广义场函数对参数的偏导在参数为零处的取值:

$$\left. rac{\partial x'_{\mu}(x,lpha)}{\partial lpha}
ight|_{lpha=0} = 0, \quad \left. rac{\partial \phi'_A(x,lpha)}{\partial lpha}
ight|_{lpha=0} = \mathrm{i} \phi_A(x), \quad \left. rac{\partial \phi'^*_A(x,lpha)}{\partial lpha}
ight|_{lpha=0} = -\mathrm{i} \phi^*_A(x)$$

诺特定理中定义的量

$$heta_{i\cdots k\mu} \equiv \left[\mathcal{L}rac{\partial x'_{\mu}}{\partial lpha_{i\cdots k}} - rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\partial_{
u}\phi_{A}rac{\partial x'_{
u}}{\partial lpha_{i\cdots k}} + rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}rac{\partial \phi'_{A}}{\partial lpha_{i\cdots k}}
ight]
ight|_{lpha=0}$$

在这里 (一个参数 α) 表现为:

$$\begin{split} \theta_{\mu} &= \left[\mathcal{L} \frac{\partial x_{\mu}'}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A} \right)} \partial_{\nu} \phi_{A} \frac{\partial x_{\nu}'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A} \right)} \frac{\partial \phi_{A}'}{\partial \alpha} \right] \bigg|_{\alpha=0} \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A} \right)} \frac{\partial \phi_{A}'(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \phi_{A}^{*'}(x, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A}^{*} \right)} \right] \bigg|_{\alpha=0} \\ &= \mathrm{i}\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A} \right)} \phi_{A} - \phi_{A}^{*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu} \phi_{A}^{*} \right)} \right] \end{split}$$

诺特定理中的连续方程

$$\partial_{\mu}\theta_{i\cdots k\mu}=0$$

在这里表现为:

$$\partial_{\mu}\theta_{\mu}=0$$

定义四维电流密度 j_{μ} :

$$j_{\mu} \equiv -e heta_{\mu} = -\mathrm{i}e\left[rac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}
ight)}\phi_{A} - \phi_{A}^{st}rac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi_{A}^{st}
ight)}
ight], \quad j_{\mu} = \left(ec{j},\mathrm{i}
ho
ight)$$

则 j_{μ} 满足连续方程:

$$\partial_{\mu}j_{\mu}=0,\quad
abla\cdotec{j}+rac{\partial
ho}{\partial t}=0$$

诺特定理中的守恒张量

$$T_{i\cdots k} = rac{1}{\mathrm{i}}\int heta_{i\cdots k4}\mathrm{d}V$$

在这里表现为电荷 Q:

$$Q=rac{1}{\mathrm{i}}\int j_4\mathrm{d}V=\int
ho\mathrm{d}V,\quadrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$$

7规范场理论

规范变换

设 H 是一个以 α 为参数的 r 阶李群, $S(\alpha)$ 是 H 的不可约线性表示,某广义场函数 ϕ 为 $S(\alpha)$ 的变换对象。 若 α 是局域的,则变换

$$\phi'(x) \equiv S(\alpha(x))\phi(x)$$

称为广义场函数 ϕ 对于李群 H 的规范变换。

由于 $S(\alpha(x))$ 是局域的,因此

$$\partial_{\mu}\phi'(x) \neq S(\alpha(x))\partial_{\mu}\phi(x)$$

这就无法保证拉格朗日函数的规范不变性。

假设存在一种微商运算 ∇_{μ} ,使得 $\nabla_{\mu}\phi(x)$ 是规范协变量,即:

$$abla_{\mu}^{\prime}\phi^{\prime}(x)=S(x)
abla_{\mu}\phi(x) \ ig[
abla_{\mu}^{\prime}\phi^{\prime}(x)ig]^{\dagger}\left[
abla_{\mu}^{\prime}\phi^{\prime}(x)
ight]=\left[
abla_{\mu}\phi(x)
ight]^{\dagger}S^{\dagger}(x)S(x)\left[
abla_{\mu}\phi(x)
ight]=\left[
abla_{\mu}\phi(x)
ight]\left[
abla_{\mu}\phi(x)
ight]$$

上式说明,由这种协变量收缩而成的量是规范不变量,用它构造拉格朗日函数可以保证拉格朗日函数的规范不变性。设:

$$abla_{\mu}\phi=\partial_{\mu}\phi-\omega_{\mu}\phi$$

下面证明, ω_{μ} 的变换规律为:

$$\omega_{\mu}' = S \omega_{\mu} S^{-1} + \left(\partial_{\mu} S
ight) S^{-1}$$

证明:

$$egin{aligned}
abla_{\mu}'\phi'(x) &= \partial_{\mu}\phi' - \omega_{\mu}'\phi' \ &= \partial_{\mu}\left(S\phi
ight) - \omega_{\mu}'S\phi \ &= S\partial_{\mu}\phi + \left(\partial_{\mu}S
ight)\phi - \omega_{\mu}'S\phi \ &\equiv S
abla_{\mu}\phi \ &= S\partial_{\mu}\phi - S\omega_{\mu}\phi \end{aligned}$$

可得

$$\omega_{\mu}'S\phi=S\omega_{\mu}\phi+\left(\partial_{\mu}S\right)\phi=S\omega_{\mu}S^{-1}S\phi+\left(\partial_{\mu}S\right)S^{-1}S\phi$$

于是

$$\omega_{\mu}' = S \omega_{\mu} S^{-1} + \left(\partial_{\mu} S
ight) S^{-1}$$

矩阵函数 ω_{μ} 称为**联络矩阵**。

伴随协变张量 $F_{\mu\nu}$ 及其性质

设 $F_{\mu\nu}$ 满足

$$\left(
abla_{\mu}
abla_{
u}-
abla_{
u}
abla_{\mu}
ight)\phi(x)=-F_{\mu
u}\phi(x)$$

可证明

$$F_{\mu
u} = \partial_{\mu}\omega_{
u} - \partial_{
u}\omega_{\mu} - [\omega_{\mu}, \omega_{
u}]$$

证明:

$$\begin{split} \left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\right)\phi(x) &= \left[\left(\partial_{\mu} - \omega_{\mu}\right)\left(\partial_{\nu} - \omega_{\nu}\right) - \left(\partial_{\nu} - \omega_{\nu}\right)\left(\partial_{\mu} - \omega_{\mu}\right)\right]\phi(x) \\ &= \left[-\partial_{\mu}\omega_{\nu} - \omega_{\mu}\partial_{\nu} + \partial_{\nu}\omega_{\mu} + \omega_{\nu}\partial_{\mu} + \omega_{\mu}\omega_{\nu} - \omega_{\nu}\omega_{\mu}\right]\phi(x) \\ &= -\partial_{\mu}\left(\omega_{\nu}\phi(x)\right) - \omega_{\mu}\partial_{\nu}\phi(x) + \partial_{\nu}\left(\omega_{\mu}\phi(x)\right) + \omega_{\nu}\partial_{\mu}\left(\phi(x)\right) + \left[\omega_{\mu},\omega_{\nu}\right]\phi(x) \\ &= -\left\{\left(\partial_{\mu}\omega_{\nu}\right) - \left(\partial_{\nu}\omega_{\mu}\right) - \left[\omega_{\mu},\omega_{\nu}\right]\right\}\phi(x) \end{split}$$

$$= -\left\{\left(\partial_{\mu}\omega_{\nu}\right) - \left(\partial_{\nu}\omega_{\mu}\right) - \left[\omega_{\mu},\omega_{\nu}\right]\right\}\phi(x)$$

对比可得:

$$F_{\mu
u} = (\partial_{\mu}\omega_{
u}) - (\partial_{
u}\omega_{\mu}) - [\omega_{\mu},\omega_{
u}]$$

其变换规律为

$$F'_{\mu
u}=SF_{\mu
u}S^{-1}$$

证明:

$$\omega_{\mu}' = S \omega_{\mu} S^{-1} + \left(\partial_{\mu} S \right) S^{-1}$$

$$\begin{split} F'_{\mu\nu} &= (\partial_{\mu}\omega'_{\nu}) - \left(\partial_{\nu}\omega'_{\mu}\right) - \left[\omega'_{\mu},\omega'_{\nu}\right] \\ &= \partial_{\mu}\left(S\omega_{\nu}S^{-1} + (\partial_{\nu}S)\,S^{-1}\right) - \partial_{\nu}\left(S\omega_{\mu}S^{-1} + (\partial_{\mu}S)\,S^{-1}\right) - \left[S\omega_{\nu}S^{-1} + (\partial_{\nu}S)\,S^{-1}, S\omega_{\mu}S^{-1} + (\partial_{\mu}S)\,S^{-1}\right] \\ &= S\left\{\left(\partial_{\mu}\omega_{\nu}\right) - \left(\partial_{\nu}\omega_{\mu}\right) - \left[\omega_{\mu},\omega_{\nu}\right]\right\}S^{-1} \\ &= SF_{\mu\nu}S^{-1} \end{split}$$

这说明 $F_{\mu\nu}$ 是规范协变量, 且

$$\operatorname{Tr}\left(F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu}\right) = \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$$

是规范不变量,同时也是 Lorentz 不变量,可用于构造规范场的拉格朗日函数。

证明:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\left(F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu}\right) &= \operatorname{Tr}\left(SF_{\mu\nu}S^{-1}SF_{\mu\nu}S^{-1}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(SF_{\mu\nu}F_{\mu\nu}S^{-1}\right) \\ &= \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

8 自由场二次量子化

量子场论基本假设

(1) 二次量子化状态由态矢量 (状态幅度) Ψ 或 $|\Psi\rangle$ 完全描述

(2)

$$egin{aligned} raket{lpha_1\Phi_1+lpha_2\Phi_2\ket{\Psi}} &=lpha_1^*raket{\Phi_1\ket{\Psi}}+lpha_2^*raket{\Phi_2\ket{\Psi}} \ raket{\Phi\ket{\Psi}}^\dagger &=raket{\Psi\ket{\Phi}} \ raket{\Psi\ket{\Psi}}\geqslant 0 \end{aligned}$$

(3) 所有经典场的物理量都对应于 Hilbert 空间的一个线性厄米算符 $\hat{T}_{\mu\cdots\nu\lambda}$,其观测平均值为:

$$\left\langle \Psi \left| \, \hat{T}_{\mu \cdots
u \lambda} \, \left| \, \Psi
ight
angle
ight.$$

(4) 二次量子化中的态矢量 Ψ 满足薛定谔方程

$$\mathrm{i}\partial_{\scriptscriptstyle{t}}\Psi=\hat{H}\Psi$$

 \hat{H} 是经典场的能量算符。

二次量子化 SOP

- (1) 将场函数进行 Fourier 分解(三维积分分解、四维积分分解或级数分解),把场函数算符化为场算符。场算符可表达为无数产生、 消灭算符的线性叠加;
- (2) 把经典场的哈密顿量算符化为哈密顿算符,哈密顿算符可由产生、消灭算符表达。利用海森堡方程求解哈密顿算符与产生、消灭 算符对易关系;
- (3) 给出对易关系和粒子数表象;
- (4) 给出各种物理量算符的二次量子化结果。

实标量场量子化

场算符 Fourier 积分分解

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^{(+)}(x) + \hat{\phi}^{(-)}(x)$$

$$\hat{\phi}^{(+)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k}$$

$$\hat{\phi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k}$$

哈密顿算符表达式

实标量场的能量密度:

$$W = rac{1}{2} \left[\left(
abla \phi
ight) \cdot \left(
abla \phi
ight) + \left(\partial_t \phi
ight) \left(\partial_t \phi
ight) + m^2 \phi^2
ight]$$

哈密顿算符:

$$\hat{H} = rac{1}{2} \int \left[\left(
abla \hat{\phi}
ight)^2 + \left(rac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}
ight)^2 + m^2 \hat{\phi}^2
ight] \mathrm{d}V$$

最终可得连续形式哈密顿算符:

$$\hat{H}=rac{1}{2}\intarepsilon_{ec{k}}\left\{\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight),\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight)
ight\}\mathrm{d}^{3}ec{k}$$

利用连续形式和分立形式的关系

$$\int \mathrm{d}^3 ec{k} \cdots = rac{(2\pi)^3}{V} \sum_{ec{k}} \cdots \, , \quad \hat{a}^{(\pm)} \left(ec{k}
ight) = rac{\sqrt{V}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}^{(\pm)}_{ec{k}}$$

可得分立形式哈密顿算符:

$$\hat{H}=rac{1}{2}\sum_{ec{k}}arepsilon_{ec{k}}\left\{\hat{a}_{ec{k}}^{(+)},\hat{a}_{ec{k}}^{(-)}
ight\}$$

动量算符表达式

$$ec{p} = -\int
abla \phi rac{\partial \phi}{\partial t} \mathrm{d}^3 ec{x}$$
 $\hat{ec{p}} = -\int \left[
abla \hat{\phi}^{(+)} \left(ec{k}
ight) +
abla \hat{\phi}^{(-)} \left(ec{k}
ight)
ight] \left[\partial_t \hat{\phi}^{(+)} \left(ec{k}
ight) + \partial_t \hat{\phi}^{(-)} \left(ec{k}
ight)
ight] \mathrm{d}^3 ec{r}$

最终可得连续形式动量算符:

$$\boxed{\hat{\vec{p}} = \frac{1}{2} \int \vec{k} \left\{ \hat{a}^{(+)} \left(\vec{k} \right), \hat{a}^{(-)} \left(\vec{k} \right) \right\} \mathrm{d}^3 \vec{k}}$$

利用连续形式和分立形式的关系

$$\int {
m d}^3 ec k \cdots = rac{(2\pi)^3}{V} \sum_{ec k} \cdots, \quad \hat a^{(\pm)} \left(ec k
ight) = rac{\sqrt{V}}{(2\pi)^{3/2}} \hat a^{(\pm)}_{ec k}$$

可得分立形式动量算符:

$$oxed{\hat{ec{p}} = rac{1}{2} \sum_{ec{k}} ec{k} \left\{ \hat{a}^{(+)}_{ec{k}}, \hat{a}^{(-)}_{ec{k}}
ight\}}$$

实标量场二次量子化算符的性质

把场算符代入海森堡方程,可得哈密顿算符与产生、消灭算符对易关系:

$$\left[\hat{H},\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight)
ight]=-arepsilon_{k}\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight)$$

$$\left[\hat{H},\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight)
ight]=arepsilon_{k}\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight)$$

把哈密顿算符用产生、消灭算符表示,代入上面两方程,就得到连续形式产生、消灭算符对易关系:

$$egin{split} \left[\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}'
ight),\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight)
ight] &= \delta\left(ec{k}-ec{k}'
ight) \ \left[\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight),\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}'
ight)
ight] &= \left[\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight),\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}'
ight)
ight] &= 0 \end{split}$$

利用连续形式和分立形式的关系

$$\int \mathrm{d}^3 ec{k} \cdots = rac{(2\pi)^3}{V} \sum_{ec{k}} \cdots, \quad \hat{a}^{(\pm)} \left(ec{k}
ight) = rac{\sqrt{V}}{(2\pi)^{3/2}} \hat{a}^{(\pm)}_{ec{k}}$$

可得分立形式产生、消灭算符对易关系:

$$egin{align} \left[\hat{a}_{ec{k}}^{(-)},\hat{a}_{ec{k}'}^{(+)}
ight] &= \delta_{ec{k},ec{k}'} \ \left[\hat{a}_{ec{k}}^{(-)},\hat{a}_{ec{k}'}^{(-)}
ight] &= \left[\hat{a}_{ec{k}}^{(+)},\hat{a}_{ec{k}'}^{(+)}
ight] = 0 \ \end{aligned}$$

此外, 计算可得:

$$egin{align} \left[\hat{ec{p}},\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight)
ight] &= ec{k}\hat{a}^{(+)}\left(ec{k}
ight) \ \\ \left[\hat{ec{p}},\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight)
ight] &= -ec{k}\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
ight) \ \\ \left[\hat{H},\hat{ec{p}}
ight] &= 0 \ \end{gathered}$$

 $\hat{H},\hat{ec{p}}$ 二者有共同本征函数,设为 Ψ_p

$$egin{aligned} \hat{H}\left(\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)\Psi_{p}
ight) &= \left(E\pmarepsilon_{ec{k}}
ight)\left(\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)\Psi_{p}
ight) \ \hat{ec{p}}\left(\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)\Psi_{p}
ight) &= \left(ec{p}\pmec{k}
ight)\left(\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)\Psi_{p}
ight) \end{aligned}$$

- $\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
 ight)\Psi_{p}$ 仍是能量算符和动量算符的本征态。
- $\hat{a}^{(+)}\left(\vec{k}
 ight)\Psi_{p}$ 是产生了一个动量为 \vec{k} ,能量为 $arepsilon_{ec{k}}$ 的自由粒子的态。
- $\hat{a}^{(-)}\left(ec{k}
 ight)\Psi_{p}$ 是消灭了一个动量为 $ec{k}$,能量为 $arepsilon_{ec{k}}$ 的自由粒子的态。
- $\hat{a}^{(\pm)}\left(ec{k}
 ight)$ 是标量粒子的产生、消灭算符。

场论中的真空态

场论中的真空态,一般指每种场算符的量子化状态中能量最低的那个量子态,通常记为 $|0\rangle$.

归一化的态矢量

$$\ket{n_{ec{k}}} \equiv rac{1}{\sqrt{n_{ec{k}}!}} \left(\hat{a}^{(+)}_{ec{k}}
ight)^{n_{ec{k}}} \ket{0}$$

上式描述的状态是 $n_{ec k}$ 个动量为 ec k 的自由粒子。

$$\left(\prod_i rac{1}{\sqrt{n_{ec{k}_i}!}} \left(\hat{a}_{ec{k}_i}^{(+)}
ight)^{n_{ec{k}_i}}
ight) \ket{0}$$

上式描述的状态是动量为 $ec{k}_i$ 的粒子有 n_{k_i} 个的状态。

粒子数算符

用 $|n_{\vec{k}}\rangle$ 表示有 $n_{\vec{k}}$ 个动量为 \vec{k} 的粒子的态:

$$\ket{n_{ec{k}}} \equiv rac{1}{\sqrt{n_{ec{k}}!}} \left(\hat{a}_{ec{k}}^{(+)}
ight)^{n_{ec{k}}} \ket{0}$$

容易得到:

$$\begin{split} \hat{a}_{\vec{k}}^{(-)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(+)} \left| n_{\vec{k}} - 1 \right\rangle &= n_{\vec{k}} \left| n_{\vec{k}} - 1 \right\rangle \\ \hat{a}_{\vec{k}}^{(+)} \left| n_{\vec{k}} \right\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}} + 1} \left| n_{\vec{k}} + 1 \right\rangle \\ \hat{a}_{\vec{k}}^{(-)} \left| n_{\vec{k}} \right\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k}}} \left| n_{\vec{k}} - 1 \right\rangle \\ \hat{a}_{\vec{k}}^{(+)} \hat{a}_{\vec{k}}^{(-)} \left| n_{\vec{k}} \right\rangle &= n_{\vec{k}} \left| n_{\vec{k}} \right\rangle \end{split}$$

定义粒子数算符 $\hat{N}_{ec{k}}$:

$$\hat{N}_{ec{k}} \equiv \hat{a}^{(+)}_{ec{k}} \hat{a}^{(-)}_{ec{k}}$$

满足:

$$\hat{N}_{ec{k}}^{\dagger}=\hat{N}_{ec{k}}$$
 $\hat{N}_{ec{k}}\ket{n_{ec{k}}}=n_{ec{k}}\ket{n_{ec{k}}}$

 $|n_{ec{k}}
angle$ 是粒子数算符的本征态,也是 $\hat{ec{p}},\hat{H}$ 的共同本征态。

粒子数表象

 $\left\{\ket{n_{ec{k}}}, orall ec{k}, n_{ec{k}} = 0, 1, 2, \cdots
ight\}$ 组成一组正交完备基。自由标量场的任意量子态可由 $\ket{n_{k_i}}$ 展开,这种描述称为**粒子数表象**。

$\hat{ec{p}},\hat{H}$ 粒子数算符表达式

$$\left\{\hat{a}_{ec{k}}^{(+)},\hat{a}_{ec{k}}^{(+)}
ight\}=2\hat{N}_{ec{k}}+1$$

$$egin{aligned} \hat{H} &= rac{1}{2} \sum_{ec{k}} arepsilon_{ec{k}} \left\{ \hat{a}^{(+)}_{ec{k}}, \hat{a}^{(-)}_{ec{k}}
ight\} \ \hat{ec{p}} &= rac{1}{2} \sum_{ec{k}} ec{k} \left\{ \hat{a}^{(+)}_{ec{k}}, \hat{a}^{(-)}_{ec{k}}
ight\} \ \hat{H} &= \sum_{ec{k}} arepsilon_{ec{k}} \left(\hat{N}_k + rac{1}{2}
ight) \ \hat{ec{p}} &= \sum_{ec{k}} ec{k} \left(\hat{N}_k + rac{1}{2}
ight) \end{aligned}$$

矢量场量子化

$$\hat{A}_{\mu}(x) = \hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) + \hat{A}_{\mu}^{(-)}(x)$$

傅里叶积分展开

$$\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) = rac{1}{\left(2\pi
ight)^{3/2}}\int\limits_{k_0=arepsilon_{ec{k}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\mu}^{(+)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k} \ \hat{A}_{\mu}^{(-)}(x) = rac{1}{\left(2\pi
ight)^{3/2}}\int\limits_{k_0=arepsilon_{ec{k}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\mu}^{(-)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k} \$$

分立形式

$$egin{aligned} \hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) &= rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{k}} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\muec{k}}^{(+)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} igg|_{k_0 = arepsilon_{ec{k}}} \ \hat{A}_{\mu}^{(-)}(x) &= rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{k}} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\muec{k}}^{(-)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} igg|_{k_0 = arepsilon_{ec{k}}} \end{aligned}$$

其中

$$arepsilon_{ec{k}} \equiv \sqrt{ec{k}^2} = \left| ec{k}
ight|$$

算符化

$$\hat{H} = rac{1}{2} \int \left[\left(
abla \hat{A}_{\mu}
ight) \cdot \left(
abla \hat{A}_{\mu}
ight) + \left(\partial_{t} \hat{A}_{\mu}
ight) \left(\partial_{t} \hat{A}_{\mu}
ight) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{x}$$

$$\hat{\vec{p}} = - \int \left(
abla \hat{A}_{\mu}
ight) \left(\partial_{t} \hat{A}_{\mu}
ight) \mathrm{d}^{3} \vec{x}$$

$$\hat{\vec{S}} = \int \hat{\vec{A}} \times \partial_{t} \hat{\vec{A}} \mathrm{d}^{3} \vec{x}$$

最终可得

$$\begin{split} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int \varepsilon_{\vec{k}} \left[\hat{C}_{\mu}^{(+)} \left(\vec{k} \right) \hat{C}_{\mu}^{(-)} \left(\vec{k} \right) + \hat{C}_{\mu}^{(-)} \left(\vec{k} \right) \hat{C}_{\mu}^{(+)} \left(\vec{k} \right) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{k} \\ \hat{\vec{p}} &= \frac{1}{2} \int \vec{k} \left[\hat{C}_{\mu}^{(+)} \left(\vec{k} \right) \hat{C}_{\mu}^{(-)} \left(\vec{k} \right) + \hat{C}_{\mu}^{(-)} \left(\vec{k} \right) \hat{C}_{\mu}^{(+)} \left(\vec{k} \right) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{k} \end{split}$$

$$\hat{ec{S}} = rac{\mathrm{i}}{2} \int \left[\hat{ec{C}}^{(-)} \left(ec{k}
ight) imes \hat{ec{C}}^{(+)} \left(ec{k}
ight) - \hat{ec{C}}^{(+)} \left(ec{k}
ight) imes \hat{ec{C}}^{(-)} \left(ec{k}
ight)
ight] \mathrm{d}^3 ec{k}$$

其中

$$\hat{ec{C}}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)\equiv\left(\hat{C}_{1}^{(\pm)},\hat{C}_{2}^{(\pm)},\hat{C}_{3}^{(\pm)}
ight)$$

分立形式

$$\begin{split} \hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \left[\hat{C}^{(+)}_{\mu \vec{k}} \hat{C}^{(-)}_{\mu \vec{k}} + \hat{C}^{(-)}_{\mu \vec{k}} \hat{C}^{(+)}_{\mu \vec{k}} \right] \\ \hat{\vec{p}} &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \left[\hat{C}^{(+)}_{\mu \vec{k}} \hat{C}^{(-)}_{\mu \vec{k}} + \hat{C}^{(-)}_{\mu \vec{k}} \hat{C}^{(+)}_{\mu \vec{k}} \right] \\ \hat{\vec{\vec{S}}} &= \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \left[\hat{\vec{C}}^{(-)}_{\vec{k}} \times \hat{\vec{C}}^{(+)}_{\vec{k}} - \hat{\vec{C}}^{(+)}_{\vec{k}} \times \hat{\vec{C}}^{(-)}_{\vec{k}} \right] \end{split}$$

算符对易关系

由海森堡运动方程可得

$$egin{aligned} \left[\hat{H},\hat{C}_{\mu}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)
ight] &= \pmarepsilon_{ec{k}}\hat{C}_{\mu}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight) \ \left[\hat{C}_{\mu}^{(-)}\left(ec{k}
ight),\hat{C}_{
u}^{(+)}\left(ec{k}'
ight)
ight] &= \delta_{\mu
u}\delta\left(ec{k}-ec{k}'
ight) \ \left[\hat{C}_{\mu}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight),\hat{C}_{
u}^{(\pm)}\left(ec{k}'
ight)
ight] &= 0 \end{aligned}$$

分立情况

$$egin{aligned} \left[\hat{C}_{\muec{k}}^{(-)},\hat{C}_{
uec{k'}}^{(+)}
ight] &= \delta_{\mu
u}\delta_{ec{k},ec{k'}} \ \left[\hat{C}_{\muec{k}}^{(\pm)},\hat{C}_{
uec{k'}}^{(\pm)}
ight] &= 0 \end{aligned}$$

以及

$$egin{align} \left[\hat{ec{p}},\hat{C}_{
u}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)
ight] &=\pmec{k}\hat{C}_{
u}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight) \ \left[\hat{ec{p}},\hat{H}
ight] &=0 \ \end{aligned}$$

光子极化坐标中物理量算符表达式

设四维闵氏时空基矢为 \vec{e}_i, \vec{e}_4 , 基矢用下标标记。

设光子动量为 \vec{k} , 设光子极化坐标的空间基矢为

$$ec{e}^3 = ec{k}/\left|ec{k}
ight|, \quad ext{such} \quad ec{e}^1, ec{e}^2 \quad ext{that} \quad ec{e}^3 = ec{e}^1 imes ec{e}^2, \quad ec{e}^4 = ec{e}_4$$

在原来在坐标下,矢量场写为 \hat{A}_{μ} ;在极化坐标下,矢量场写为 \hat{A}^{μ} .

极化坐标下 \hat{A}^1,\hat{A}^2 称为横分量, \hat{A}^3 称为纵分量, \hat{A}^4 称为时间分量。

场量子化后的 Lorenz 规范条件

Lorenz 和 Lorentz 是两个人。。。

经典电动力学中,广义 Lorenz 规范条件为:

$$\partial_{\mu}A_{\mu}=0$$

把场算符化,并把 \hat{A}_{μ} 的 Fourier 展式代入上式,就得到场量子化后的 Lorenz 规范条件:

$$k_{\mu}\hat{C}_{\mu}^{(\pm)}\left(ec{k}
ight)=0$$

在光子极化坐标中写为:

$$k^{\mu}\hat{C}^{(\pm)\mu}\left(ec{k}
ight)=0$$

又在光子极化坐标中, 光子四维动量为

$$(k^{\mu})=\left(0,0,\left|ec{k}
ight|,\mathrm{i}\left|ec{k}
ight|
ight)$$

因此有:

$$\left|ec{k}
ight|\hat{C}^{(\pm)3}\left(ec{k}
ight)+\mathrm{i}\left|ec{k}
ight|\hat{C}^{(\pm)4}\left(ec{k}
ight)=0$$

即:

$$\left|\hat{C}^{(\pm)4}\left(ec{k}
ight)=\mathrm{i}\hat{C}^{(\pm)3}\left(ec{k}
ight)
ight|$$

把上式代入光子极化坐标下算符的 Fourier 展式

$$\begin{split} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int \varepsilon_{\vec{k}} \left[\hat{C}^{(+)\mu} \left(\vec{k} \right) \hat{C}^{(-)\mu} \left(\vec{k} \right) + \hat{C}^{(-)\mu} \left(\vec{k} \right) \hat{C}^{(+)\mu} \left(\vec{k} \right) \right] \mathrm{d}^3 \vec{k} \\ \hat{\vec{p}} &= \frac{1}{2} \int \vec{k} \left[\hat{C}^{(+)\mu} \left(\vec{k} \right) \hat{C}^{(-)\mu} \left(\vec{k} \right) + \hat{C}^{(-)\mu} \left(\vec{k} \right) \hat{C}^{(+)\mu} \left(\vec{k} \right) \right] \mathrm{d}^3 \vec{k} \\ \hat{\vec{S}} &= \frac{\mathrm{i}}{2} \int \left[\hat{\vec{C}}^{(-)} \left(\vec{k} \right) \times \hat{\vec{C}}^{(+)} \left(\vec{k} \right) - \hat{\vec{C}}^{(+)} \left(\vec{k} \right) \times \hat{\vec{C}}^{(-)} \left(\vec{k} \right) \right] \mathrm{d}^3 \vec{k} \end{split}$$

容易发现, $\mu=3$ 和 $\mu=4$ 项抵消。因此光子极化坐标下,只有横分量 1,2 有贡献。此时有

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \varepsilon_{\vec{k}} \sum_{i=1}^{2} \left\{ \hat{C}^{(+)i} \left(\vec{k} \right), \hat{C}^{(-)i} \left(\vec{k} \right) \right\} \mathrm{d}^{3} \vec{k}$$

$$\hat{ec{p}} = rac{1}{2} \int ec{k} \sum_{i=1}^2 \left\{ \hat{C}^{(+)i} \left(ec{k}
ight), \hat{C}^{(-)i} \left(ec{k}
ight)
ight\} \mathrm{d}^3 ec{k}$$

自旋的表达式为:

$$\hat{S}^3 = \mathrm{i} \left[\hat{C}^{(-)1} \left(ec{k}
ight) \hat{C}^{(-)2} \left(ec{k}
ight) - \hat{C}^{(+)1} \left(ec{k}
ight) \hat{C}^{(-)2} \left(ec{k}
ight)
ight]$$

粒子数表象

怎么写着写着记号还变了呢! 这必须坚持使用 R 语言啊!

横光子粒子数算符:

$$\hat{N}^1_{\vec{k}} \equiv \hat{C}^{(+)1}_{\vec{k}} \hat{C}^{(-)1}_{\vec{k}}, \quad \hat{N}^2_{\vec{k}} \equiv \hat{C}^{(+)2}_{\vec{k}} \hat{C}^{(-)2}_{\vec{k}}$$

利用

$$egin{aligned} \left[\hat{C}^{(-)\mu}\left(ec{k}
ight),\hat{C}^{(+)
u}\left(ec{k}'
ight)
ight] &= \delta^{\mu
u}\delta\left(ec{k}-ec{k}'
ight) \ \left[\hat{C}^{(-)\mu}_{ec{k}},\hat{C}^{(+)
u}_{ec{k}}
ight] &= \delta^{\mu
u}\delta_{ec{k},ec{k}'} \end{aligned}$$

可得

$$egin{align} \hat{H} &= \sum_{ec{k}} arepsilon_{ec{k}}^1 \left(\hat{N}_{ec{k}}^1 + \hat{N}_{ec{k}}^2 + 1
ight) \ \hat{ec{p}} &= \sum_{ec{k}} ec{k} \left(\hat{N}_{ec{k}}^1 + \hat{N}_{ec{k}}^2 + 1
ight) \ \hat{S}^3 &= \sum_{ec{k}} \left(\hat{N}_{ec{k}}^1 - \hat{N}_{ec{k}}^2
ight) \ \end{split}$$

 $\hat{N}^1_{ec{k}}$ 为自旋 $S^3=+1$,动量为 $ec{k}$ 的光子数算符。

 $\hat{N}_{ec{k}}^2$ 为自旋 $S^3=-1$,动量为 $ec{k}$ 的光子数算符。

光子极化坐标中 $\hat{C}^{
u}_{ec{k}}$ 的 u 表征自旋, u=3,4 无贡献。

旋量场量子化

3.7 旋量场量子化

$$\begin{split} \hat{\psi}(x) &= \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x) \\ \hat{\psi}^{(+)}(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{\vec{p}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x} \hat{b}_i^{(+)}(\vec{p}) v_i(\vec{p}) \mathrm{d}^3 \vec{p} \\ \hat{\psi}^{(-)}(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{\vec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i} p x} \hat{a}_i^{(-)}(\vec{p}) u_i(\vec{p}) \mathrm{d}^3 \vec{p} \\ \hat{\bar{\psi}}(x) &= \hat{\psi}^\dagger \gamma_4, \quad \hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x) + \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x) \\ \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{\vec{p}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x} \hat{a}_i^{(+)}(\vec{p}) \bar{u}_i(\vec{p}) \mathrm{d}^3 \vec{p} \\ \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{\vec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i} p x} \hat{b}_i^{(-)}(\vec{p}) \bar{v}_i(\vec{p}) \mathrm{d}^3 \vec{p} \end{split}$$

定义

$$\hat{a}_{ec{p}i}^{(-)} = rac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}}\hat{a}_i^{(-)}(ec{p}), \quad \hat{b}_{ec{p}i}^{(-)} = rac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}}\hat{b}_i^{(-)}(ec{p})$$

$$\hat{\psi}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i} p x} \hat{a}_{ec{p}i}^{(-)} u_i(ec{p}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x} \hat{b}_{ec{p}i}^{(+)} v_i(ec{p})
ight]$$

$$\hat{ar{\psi}}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i} p x} \hat{b}_{ec{p}i}^{(-)} ar{v}_i(ec{p}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i} p x} \hat{a}_{ec{p}i}^{(+)} ar{u}_i(ec{p})
ight]$$

旋量场的二次量子化

$$\begin{split} \hat{H} &= \int E_{\vec{p}} \left[\hat{a}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \hat{a}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) - \hat{b}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) \hat{b}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{p} \\ &\hat{\vec{p}} = \int \vec{p} \left[\hat{a}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \hat{a}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) - \hat{b}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) \hat{b}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{p} \\ &\hat{Q} = -e \int \left[\hat{a}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \hat{a}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) + \hat{b}_{i}^{(-)} \left(\vec{p} \right) \hat{b}_{i}^{(+)} \left(\vec{p} \right) \right] \mathrm{d}^{3} \vec{p} \\ &\hat{S}_{n} = \frac{1}{2} \int \left\{ \left[\hat{a}_{1}^{(+)} (\vec{p}) \hat{a}_{1}^{(-)} (\vec{p}) - \hat{a}_{2}^{(+)} (\vec{p}) \hat{a}_{2}^{(-)} (\vec{p}) \right] - \left[\hat{b}_{1}^{(-)} (\vec{p}) \hat{b}_{1}^{(+)} (\vec{p}) - \hat{b}_{2}^{(-)} (\vec{p}) \hat{b}_{2}^{(+)} (\vec{p}) \right] \right\} \mathrm{d}^{3} \vec{p} \end{split}$$

动量表象海森堡方程

$$egin{aligned} \left[\hat{H},\hat{b}_i^{(\pm)}(ec{p})
ight] &= \pm E_{ec{p}}\hat{b}_i^{(\pm)}(ec{p}) \ \\ \left[\hat{H},\hat{a}_i^{(\pm)}(ec{p})
ight] &= \pm E_{ec{p}}\hat{a}_i^{(\pm)}(ec{p}) \end{aligned}$$

产生、消灭算符反对易关系

$$egin{aligned} \left\{\hat{a}_{i}^{\left(-
ight)}\left(ec{p}
ight),\hat{a}_{j}^{\left(+
ight)}\left(ec{p}^{\prime}
ight)
ight\} &=\delta_{ij}\delta\left(ec{p}-ec{p}^{\prime}
ight) \ \left\{\hat{b}_{i}^{\left(-
ight)}\left(ec{p}
ight),\hat{b}_{j}^{\left(+
ight)}\left(ec{p}^{\prime}
ight)
ight\} &=\delta_{ij}\delta\left(ec{p}-ec{p}^{\prime}
ight) \end{aligned}$$

其余反对易关系为零。

分立形式

$$egin{align} \left\{ \hat{a}_{ec{p}i}^{(-)},\hat{a}_{ec{p}'j}^{(+)}
ight\} &= \delta_{ij}\delta_{ec{p},ec{p}'} \ \left\{ \hat{b}_{ec{p}i}^{(-)},\hat{b}_{ec{p}'j}^{(+)}
ight\} &= \delta_{ij}\delta_{ec{p},ec{p}'} \end{aligned}$$

对于自由旋量场 $\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}$,算符 $\hat{H},\hat{\bar{p}},\hat{Q},\hat{S}_n$ 具有共同本征态。

 $\hat{a}_{1}^{(+)}(ec{p})$ 代表产生一个 $ec{p},E_{ec{p}},-e$, 自旋 1/2 的粒子;

 $\hat{a}_{1}^{(-)}(\vec{p})$ 代表消灭一个 $\vec{p}, E_{\vec{p}}, -e$,自旋 1/2 的粒子;

 $\hat{a}_{2}^{(+)}(\vec{p})$ 代表产生一个 $\vec{p}, E_{\vec{p}}, -e$,自旋 -1/2 的粒子;

 $\hat{a}_2^{(-)}(ec{p})$ 代表消灭一个 $ec{p}, E_{ec{p}}, -e$,自旋 -1/2 的粒子;

 $\hat{b}_1^{(+)}(ec{p})$ 代表产生一个 $ec{p}, E_{ec{p}}, +e$, 自旋 1/2 的反粒子;

 $\hat{b}_1^{(-)}(ec{p})$ 代表消灭一个 $ec{p}, E_{ec{p}}, +e$, 自旋 1/2 的反粒子;

 $\hat{b}_2^{(+)}(ec{p})$ 代表产生一个 $ec{p}, E_{ec{p}}, +e$, 自旋 -1/2 的反粒子;

 $\hat{b}_2^{(-)}(ec{p})$ 代表消灭一个 $ec{p}, E_{ec{p}}, +e$,自旋 -1/2 的反粒子。

总之: a, b 区分正反粒子 (电荷) , 数字 1, 2 区别自旋 $1/2, -1/2, (\pm)$ 区分产生、消灭。

粒子数表象

$$\hat{N}^{(+)}_{ec{p}i} \equiv \hat{a}^{(+)}_{ec{p}i} \hat{a}^{(-)}_{ec{p}i}, \quad ext{IET}$$

$$\hat{N}_{ec{p}i}^{(-)} \equiv \hat{b}_{ec{p}i}^{(+)} \hat{b}_{ec{p}i}^{(-)}, \quad extstyle
abla$$

以上 i 不求和。

$$\left(\hat{N}_{ec{p}i}^{(\pm)}
ight)^2=\hat{N}_{ec{p}i}^{(\pm)}$$

因此 $\hat{N}_{ec{p}i}^{(\pm)}$ 的本征值取 0,1,这对应于费米子要遵循的 Pauli 不相容原理。

$$egin{aligned} \hat{H} &= \sum_{ec{p}} \sum_{i=1}^2 E_{ec{p}} \left(\hat{N}_{ec{p}i}^{(+)} + \hat{N}_{ec{p}i}^{(-)} - 1
ight) \ \hat{ec{p}} &= \sum_{ec{p}} \sum_{i=1}^2 ec{p} \left(\hat{N}_{ec{p}i}^{(+)} + \hat{N}_{ec{p}i}^{(-)} - 1
ight) \ Q &= \sum_{ec{p}} \sum_{i=1}^2 (-e) \left(\hat{N}_{ec{p}i}^{(+)} + \hat{N}_{ec{p}i}^{(-)} - 1
ight) \ \hat{S}_n &= rac{1}{2} \sum_{ec{r}} \left(\hat{N}_{ec{p}1}^{(+)} + \hat{N}_{ec{p}1}^{(-)} - \hat{N}_{ec{p}2}^{(+)} - \hat{N}_{ec{p}2}^{(-)}
ight) \end{aligned}$$

 $\hat{N}_{ec{\imath}1}^{(+)}$ 代表电荷 -e,自旋 1/2,动量 $ec{p}$ 的正粒子数算符;

 $\hat{N}_{\vec{v}^2}^{(+)}$ 代表电荷 -e, 自旋 -1/2, 动量 \vec{p} 的正粒子数算符;

 $\hat{N}_{ec{\imath}1}^{(-)}$ 代表电荷 +e,自旋 1/2,动量 $ec{p}$ 的反粒子数算符;

 $\hat{N}_{ec{ extit{z}}2}^{(-)}$ 代表电荷 +e,自旋 -1/2,动量 $ec{p}$ 的反粒子数算符。

Green 函数、Feynman 函数、N 乘积、P 乘积、T 乘积与 耦合

场方程的 Green 函数和 Feynman 函数

线性偏微分方程的 Green 函数

$$\hat{L}(x) = a_0 + a_\mu \partial_\mu + a_{\mu
u} \partial_\mu \partial_
u + \cdots$$

齐次线性微分方程:

$$\hat{L}(x)\phi(x) = 0$$

非齐次线性微分方程:

$$\hat{L}(x)\phi(x) = -\rho(x)$$

形式特解:

$$\phi(x) = -\hat{L}^{-1}(x)\rho(x)$$

 δ 函数筛选性质:

$$ho(x) = \int
ho(x') \delta(x-x') \mathrm{d}x'$$

特解

$$\phi(x) = -\int
ho(x')\hat{L}^{-1}(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x'$$

Green 函数:

$$G(x - x') \equiv -\hat{L}^{-1}(x)\delta(x - x')$$

 $\hat{L}(x)G(x - x') = -\delta(x - x')$
 $\phi(x) = \int \rho(x')G(x - x')dx'$

 $\hat{L}(x)$ 对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}$ 的作用:

$$\hat{L}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} = \left(a_0 + \mathrm{i}a_\mu k_\mu + \mathrm{i}^2 a_{\mu\nu} k_\mu k_
u + \cdots\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}$$

则

$$\hat{L}^{-1}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k(x-x')} = rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i} k(x-x')}}{a_0 + \mathrm{i} a_\mu k_\mu + \mathrm{i}^2 a_{\mu
u} k_\mu k_
u + \cdots}$$

于是:

$$G(x - x') \equiv -\hat{L}^{-1}(x)\delta(x - x')$$

$$= -\hat{L}^{-1}(x)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{\mathrm{i}k(x - x')} \mathrm{d}^n k$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{d}^n k \frac{e^{\mathrm{i}k(x - x')}}{a_0 + \mathrm{i}a_\mu k_\mu + \mathrm{i}^2 a_{\mu\nu} k_\mu k_\nu + \cdots}$$

即对于方程 $\hat{L}(x)\phi(x)=ho(x)$ 来说,算符 $\hat{L}(x)=a_0+a_\mu\partial_\mu+a_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+\cdots$ 对应的 Green 函数 G(x-x') 由下式计算:

$$G(x-x') \equiv -\hat{L}^{-1}(x)\delta(x-x') = rac{-1}{\left(2\pi
ight)^n}\int \mathrm{d}^n k rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{a_0+\mathrm{i}a_\mu k_\mu+\mathrm{i}^2 a_{\mu
u} k_\mu k_
u+\cdots}$$

各种场的 Green 函数

标量场

非齐次方程

$$egin{align} \left(\Box-m^2
ight)\phi(x)&=-
ho(x)\ \hat L&=-m^2+\partial_\mu\partial_\mu\ a_0&=-m^2,\quad a_\mu=0,\quad a_{\mu
u}=\delta_{\mu
u},\quad a_{\mu
u}=0. \end{gathered}$$

Green 函数:

$$\Delta^{G}(x - x') = \frac{-1}{(2\pi)^{n}} \int d^{n}k \frac{e^{ik(x - x')}}{a_{0} + ia_{\mu}k_{\mu} + i^{2}a_{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu} + \cdots}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^{4}} \int d^{4}k \frac{e^{ik(x - x')}}{-m^{2} + i^{2}\delta_{\mu\nu}k_{\mu}k_{\nu}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4}} \int d^{4}k \frac{e^{ik(x - x')}}{k^{2} + m^{2}}$$

$$\equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4} \int \Delta^{G}(k)e^{ik(x - x')}d^{4}k$$

其中,

$$\Delta^G(k) \equiv rac{1}{k^2+m^2}$$

矢量场

非齐次方程:

$$\Box A_\mu = -j_\mu(x)$$
 $\hat L = \partial_\mu \partial_\mu$ $a_0 = 0, \quad a_\mu = 0, \quad a_{\mu
u} = \delta_{\mu
u}, \quad a_{\mu
u \lambda} = \cdots = 0$

Green 函数:

$$\begin{split} D^G(x-x') &= \frac{-1}{(2\pi)^n} \int \mathrm{d}^n k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{a_0 + \mathrm{i}a_\mu k_\mu + \mathrm{i}^2 a_{\mu\nu} k_\mu k_\nu + \cdots} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{\mathrm{i}^2 \delta_{\mu\nu} k_\mu k_\nu} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}}{k^2} \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int D^G(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')} \mathrm{d}^4 k \end{split}$$

其中,

$$D^G(k)\equivrac{1}{k^2}$$

旋量场

非齐次方程

$$\left(\gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m
ight)\psi(x)=-
ho(x)$$
 $\hat{L}=m+\gamma_{\mu}\partial_{\mu}$ $a_{0}=m,\quad a_{\mu}=\gamma_{\mu},\quad a_{\mu
u}=\cdots=0$

Green 函数:

$$\begin{split} S^{G}(x-x') &= \frac{-1}{(2\pi)^{n}} \int \mathrm{d}^{n} p \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}}{a_{0} + \mathrm{i}a_{\mu}p_{\mu} + \mathrm{i}^{2}a_{\mu\nu}p_{\mu}p_{\nu} + \cdots} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^{4}} \int \mathrm{d}^{4} p \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}}{m + \mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^{4}} \int \mathrm{d}^{4} p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')} \frac{m - \mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu}}{m^{2} + (\gamma_{\mu}p_{\mu})^{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{4}} \int \frac{\mathrm{i}\gamma_{\mu}p_{\mu} - m}{(\gamma_{\mu}p_{\mu})^{2} + m^{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')} \mathrm{d}^{4} p \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{4} \int S^{G}(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')} \mathrm{d}^{4} p \end{split}$$

其中,

$$S^G(k) \equiv rac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{\hat{p}^2+m^2} = rac{\mathrm{i}\gamma_\mu p_\mu - m}{\left(\gamma_\mu p_\mu
ight)^2 + m^2}, \quad \hat{p} \equiv \gamma_\mu p_\mu$$

Feynman (Green函数) 与对易函数的关系

Green 函数 G(x-x') 乘 -2i 就得到 Feynman 函数 F(x-x'):

$$egin{aligned} F(x-x') &= -2\mathrm{i} G(x-x') \ \Delta^F(x) &= -2\mathrm{i} \Delta^G(x) \ D^F(x) &= -2\mathrm{i} D^G(x) \ S^F(x) &= -2\mathrm{i} S^G(x) \end{aligned}$$

Green 函数定义:

$$G(x-x')\equiv -\hat{L}(x)\delta(x-x')$$
 $\hat{L}(x)G(x)=-\delta(x)$ $\hat{L}(x)\left[-2\mathrm{i}G(x)
ight]=2\mathrm{i}\delta(x)$ $\hat{L}(x)F(x)=2\mathrm{i}\delta(x)$

标量场、矢量场和旋量场的 Feynman 函数分别满足:

$$egin{aligned} \left(\Box-m^2
ight)\Delta^F(x) &= 2\mathrm{i}\delta(x) \ &\Box D^F(x) &= 2\mathrm{i}\delta(x) \ &\left(\gamma_\mu\partial_\mu + m
ight)S^F(x) &= 2\mathrm{i}\delta(x) \ \end{aligned} \ \Delta^F(x) &= rac{2\mathrm{i}}{\left(2\pi
ight)^4}\int\mathrm{d}^3ec{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ec{k}\cdotec{x}}\int\mathrm{d}k_0rac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0t}}{k_0^2-arepsilon_{ec{k}}^2} \end{aligned}$$

定义反常积分:

$$I\left(ec{k}
ight) \equiv \int rac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0t}}{k_0^2 - arepsilon_{ec{k}}^2} \mathrm{d}k_0$$

$$\Delta^F(x) = rac{1}{\left(2\pi
ight)^2}\int \mathrm{d}^3ec{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ec{k}\cdotec{x}} rac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}arepsilon_{ec{k}}t}}{arepsilon_{ec{k}}}$$

当t<0,

$$\Delta^F(x) = rac{1}{\left(2\pi
ight)^2}\int \mathrm{d}^3ec{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ec{k}\cdotec{x}}rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}arepsilon_{ec{k}}t}}{arepsilon_{ec{k}}}$$

当t>0,

$$\Delta^F(x) = \Delta^{(1)}(x) + \mathrm{i}\Delta(x)$$

当t<0,

$$\Delta^F(x) = \Delta^{(1)}(x) - \mathrm{i}\Delta(x)$$

合写为

$$egin{aligned} \Delta^F(x) &= \Delta^{(1)}(x) + \mathrm{i}arepsilon(t)\Delta(x) \ \Delta^F(x) &= 2\mathrm{i}\left[\Delta^{(-)}(x) heta_+(t) - \Delta^{(+)}(x) heta_-(t)
ight] \ D^F(x) &= 2\mathrm{i}\left[D^{(-)}(x) heta_+(t) - D^{(+)}(x) heta_-(t)
ight] \ S^F(x) &= 2\mathrm{i}\left[S^{(-)}(x) heta_+(t) - S^{(-)}(x) heta_-(t)
ight] \end{aligned}$$

N 乘积, P 乘积和 T 乘积与耦合

用 $\hat{U}_{lpha}^{(\pm)}(x)$ 代表广义场算符

用 $\hat{ar{U}}_{lpha}^{(\pm)}(x)$ 代表广义场算符的共轭

用
$$Q_{lphaeta}^{(\pm)}(x)$$
 代表 $\Delta^{(\pm)}(x), D^{(\pm)}(x)\delta_{lphaeta}, -S_{lphaeta}^{(\pm)}(x)$

用 $Q_{\alpha\beta}(x)$ 代表 $\Delta(x), D(x)\delta_{\alpha\beta}(x), -S_{\alpha\beta}(x)$

用
$$Q^{(1)}_{lphaeta}(x)$$
 代表 $\Delta^{(1)}(x), D^{(1)}(x)\delta_{lphaeta}, -S^{(1)}_{lphaeta}(x)$

用
$$Q^F_{lphaeta}$$
 代表 $\Delta^F(x), D^F(x)\delta_{lphaeta}, -S^F_{lphaeta}(x)$

N 乘积

产生算符在左,消灭算符在右,再乘系数 $(-1)^p$,其中 p 为原序到 N 乘积顺序所需的费米算符置换次数。

$$N\left[\hat{U}^{(-)}(x)\hat{U}^{(+)}(x')
ight] = \mp \hat{U}^{(+)}(x')\hat{U}^{(-)}(x)$$

当 \hat{U} 为费米子场算符时取负号,当 \hat{U} 为玻色子场算符时取正号。

例如:

$$egin{align} N\left[\hat{\phi}^{(-)}(x)\hat{\phi}^{(+)}(x')
ight] &= \hat{\phi}^{(+)}(x')\hat{\phi}^{(-)}(x) \ N\left[\hat{\psi}^{(-)}(x)\hat{\psi}^{(+)}(x')
ight] &= -\hat{\psi}^{(+)}(x')\hat{\psi}^{(-)}(x) \ \end{aligned}$$

N 乘积又称为正规乘积,记为::

场算符 N 乘积的真空期望值为零,即:

$$\left\langle 0 \left| N \left[\hat{U}(x_1) \cdots \hat{U}(x_n)
ight] \right| 0
ight
angle = 0$$

若把量子场论中的算符定义为相应经典物理算符化后再取 N 乘积,则可消除所有真空发散项。

P 乘积

P 乘积又称为编时乘积,算符经其作用后时间 t 小的排在右边,t 大的排在左边。

$$P\left[\hat{U}\left(x^{1}
ight)\hat{U}\left(x^{2}
ight)\cdots\hat{U}\left(x^{n}
ight)
ight]=\hat{U}\left(x^{i_{1}}
ight)\hat{U}\left(x^{i_{2}}
ight)\cdots\hat{U}\left(x^{i_{n}}
ight)$$

其中 $t^{i_1} \geqslant t^{i_2} \geqslant \cdots t^{i_n}$.

T 乘积

T 乘积的定义为:

$$T\left[\hat{U}\left(x^{1}
ight)\cdots\hat{U}\left(x^{n}
ight)
ight]=(-1)^{p}P\left[\hat{U}\left(x^{1}
ight)\hat{U}\left(x^{2}
ight)\cdots\hat{U}\left(x^{n}
ight)
ight]$$

其中,p为费米置换次数 (玻色场函数的置换不计入p)。

收缩 (耦合)

定义 T 乘积与 N 乘积之差为收缩 (耦合):

$$\dot{\hat{U}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{ar{U}}}_{eta}\left(x^{2}
ight)\equiv\left(T-N
ight)\left[\hat{U}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\hat{ar{U}}\left(x^{2}
ight)
ight]$$

当 $t^1 > t^2$,

$$\dot{\hat{U}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{ar{U}}}_{eta}\left(x^{2}
ight)=\left(T-N
ight)\left[\hat{U}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\hat{ar{U}}_{eta}\left(x^{2}
ight)
ight]=+\mathrm{i}Q_{lphaeta}^{\left(-
ight)}\left(x^{1}-x^{2}
ight),\quad t^{1}>t^{2}$$

当 $t^1 < t^2$,

$$\dot{\hat{U}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{ar{U}}}_{eta}\left(x^{2}
ight) = \left(T-N
ight)\left[\hat{U}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\hat{ar{U}}_{eta}\left(x^{2}
ight)
ight] = -\mathrm{i}Q_{lphaeta}^{(+)}\left(x^{1}-x^{2}
ight), \quad t^{1} < t^{2}$$

统一写为:

$$\dot{\hat{U}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{ar{U}}}_{eta}\left(x^{2}
ight)=rac{1}{2}Q_{lphaeta}^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)$$

场的相互作用与 S 矩阵

场的相互作用拉格朗日函数

在场的相互作用情况下,总拉格朗日函数 \mathcal{L} 应是自由场拉格朗日函数 \mathcal{L}_0 与相互作用拉格朗日函数 \mathcal{L}_i 之和:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_i$$

场的相互作用拉格朗日函数 \mathcal{L}_i 也必须是 Lorentz 变换的不变量。因此有场的相互作用的拉格朗日函数广义形式:

$$\hat{\mathcal{L}}_i = g\hat{T}^1_{\mu
u\cdots\lambda}(x)\hat{T}^2_{\mu
u\cdots\lambda}(x)$$

常数 q 称为作用常数,代表两种场相互作用的大小。

 $\hat{T}^1_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 和 $\hat{T}^2_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 为两种不同的场函数组成的同级张量。

场的相互作用运动方程荷相互作用哈密顿量

场相互作用情况下总拉格朗日函数:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_i$$

把 $\hat{\mathcal{L}}$ 代入 E-L 方程就得到场的运动方程:

$$rac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{\phi}_A(x)} - \partial_{\mu} rac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \left(\partial_{\mu} \hat{\phi}_A(x)
ight)} = 0$$

电子与电磁场作用的运动方程

总拉格朗日函数:

$$\mathcal{L} = -rac{1}{4}F_{\mu
u}F_{\mu
u} \ -rac{1}{2}\left[\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\hat{\psi}(x) - \partial_{\mu}\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)
ight] - m\hat{ar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x) \ + \mathrm{i}e\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)\hat{A}_{\mu}(x)$$

对 $\hat{A}_{\mu}(x),\hat{ar{\psi}}(x),\hat{\psi}(x)$ 变分,得场方程:

$$egin{aligned} \partial_
u F_{\mu
u} &= \mathrm{i} e \hat{ar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \ & \left(\gamma_\mu \partial_\mu + m
ight) \hat{\psi}(x) = \mathrm{i} e \hat{A}_\mu(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \ & \partial_\mu(x) \hat{ar{\psi}} \gamma_\mu - m \hat{ar{\psi}}(x) = -\mathrm{i} e \hat{A}_\mu(x) \hat{ar{\psi}}(x) \gamma_\mu \end{aligned}$$

四维电流矢量:

$$j_{\mu}=\mathrm{i}e\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)$$

场相互作用的哈密顿量

场的相互作用情况下的能量-动量张量:

$$\hat{T}_{\mu
u} = \hat{\mathcal{L}}\delta_{\mu
u} - rac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial_
u\hat{\phi}_A(x)
ight)}\partial_\mu\hat{\phi}_A(x)$$

由于

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_i$$

于是能量-动量张量也可以分为自由部分 $\hat{T}_{\mu
u}^{(0)}$ 与相互作用部分 $\hat{T}_{\mu
u}^{(i)}$:

$$\hat{T}^{(0)}_{\mu
u} = \hat{\mathcal{L}}_0 \delta_{\mu
u} - rac{\partial \hat{\mathcal{L}}_0}{\partial \left(\partial_
u \hat{\phi}_A(x)
ight)} \partial_\mu \hat{\phi}_A(x)$$

$$egin{align} \hat{T}_{\mu
u}^{(i)} &= \hat{\mathcal{L}}_i \delta_{\mu
u} - rac{\partial \hat{\mathcal{L}}_i}{\partial \left(\partial_
u \hat{\phi}_A(x)
ight)} \partial_\mu \hat{\phi}_A(x) \ \hat{T}_{\mu
u} &= \hat{T}_{\mu
u}^{(0)} + \hat{T}_{\mu
u}^{(i)} \ \end{aligned}$$

能量密度也同样可分为自由部分 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 和相互作用部分 $\hat{\mathcal{H}}_i$:

$$\hat{\mathcal{H}}_{0} = -\hat{T}_{44}^{(0)} \ \hat{\mathcal{H}}_{i} = -\hat{T}_{44}^{(i)} = -\hat{\mathcal{L}}_{i} + rac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{i}}{\partial \partial_{t} \hat{\phi}_{A}(x)} \partial_{t} \hat{\phi}_{A}(x) \ \hat{\mathcal{H}} = -\hat{T}_{44} = -\hat{T}_{44}^{(0)} - \hat{T}_{44}^{(i)} = \hat{\mathcal{H}}_{0} + \hat{\mathcal{H}}_{i}$$

哈密顿算符 \hat{H} 也可分为自由场哈密顿算符 \hat{H}_0 和场相互作用哈密顿算符 \hat{H}_i :

$$\hat{H}_0 = \int \hat{\mathcal{H}}_0 \mathrm{d}V$$
 $\hat{H}_i = \int \hat{\mathcal{H}}_i \mathrm{d}V$ $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_i = \int \hat{\mathcal{H}}_0 \mathrm{d}V + \int \hat{\mathcal{H}}_i \mathrm{d}V$

电子旋量场与电磁场相互作用哈密顿算符

总拉格朗日函数:

$$egin{aligned} \mathcal{L} &= -rac{1}{4}F_{\mu
u}F_{\mu
u} \ &-rac{1}{2}\left[\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\hat{\psi}(x) - \partial_{\mu}\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)
ight] - m\hat{ar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x) \ &+ \mathrm{i}e\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)\hat{A}_{\mu}(x) \end{aligned}$$

相互作用拉格朗日函数:

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \mathrm{i} e \hat{ar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \hat{A}_\mu(x)$$

相互作用能量-动量张量:

$$egin{aligned} \hat{T}_{\mu
u}^{(i)} &= \hat{\mathcal{L}}_i \delta_{\mu
u} - rac{\partial \hat{\mathcal{L}}_i}{\partial \left(\partial_
u \hat{\phi}_A(x)
ight)} \partial_\mu \hat{\phi}_A(x) \ &= \delta_{\mu
u} \mathrm{i} e \hat{ar{\psi}}(x) \gamma_lpha \hat{\psi}(x) \hat{A}_lpha(x) \end{aligned}$$

电子旋量场与电磁场相互作用哈密顿算符:

$$egin{aligned} \hat{H}_i &= -\int \hat{T}_{44}^{(i)} \mathrm{d}V \ &= -\mathrm{i}e \int \hat{ar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \hat{A}_\mu(x) \mathrm{d}V \end{aligned}$$

$$\hat{H}_i = -\mathrm{i}e\int\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)\mathrm{d}V$$

相互作用绘景

薛定谔绘景

薛定谔绘景中,场相互作用情况下,状态幅度 Ψ_S 随时间的变化规律:

$$\mathrm{i}rac{\partial}{\partial t}\Psi_S=\hat{H}_S\Psi_S$$

$$\hat{H}_S = \hat{H}_{S0} + \hat{H}_{Si}$$

其中, \hat{H}_{S0} 为薛定谔绘景中自由场哈密顿算符, \hat{H}_{Si} 为场相互作用哈密顿算符。 \hat{H}_{S0} 和 \hat{H}_{Si} 都不随时间改变。

海森堡绘景

$$egin{align} \Psi_H &= \Psi_S(0), \quad \hat{F}_H \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_S t} \hat{F}_S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_S t} \ & \hat{H}_H &= \hat{H}_S \equiv \hat{H} \ & rac{\partial \Psi_H}{\partial t} = 0 \ & rac{\partial \hat{F}_H}{\partial t} = \mathrm{i} \left[\hat{H}, \hat{F}_H
ight] \ \end{split}$$

相互作用绘景

$$\Phi_I(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\Psi_S$$

相互作用绘景中的算符 \hat{F}_I 定义为:

$$\hat{F}_I(t) \equiv {
m e}^{{
m i}\hat{H}_{S0}t}\hat{F}_S{
m e}^{-{
m i}\hat{H}_{S0}t} \ \hat{H}_I = {
m e}^{{
m i}\hat{H}_{S0}t}\left(\hat{H}_{S0}+\hat{H}_{Si}
ight){
m e}^{-{
m i}\hat{H}_{S0}t} = {
m e}^{{
m i}\hat{H}_{S0}t}\hat{H}_{Si}{
m e}^{-{
m i}\hat{H}_{S0}t} \equiv \hat{H}_{Ii}$$

 $\Phi_I(t)$ 随时间变化规律为:

$$\begin{split} \mathrm{i} \frac{\partial \Phi_I(t)}{\partial t} &= \mathrm{i} \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} \Psi_S(t) + \mathrm{i} \hat{V}(t) \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t} \\ &= -\hat{V}(t) \hat{H}_{S0} \Psi_S(t) + \hat{V}(t) \hat{H}_{S0} \Psi_S(t) + \hat{V}(t) \hat{H}_{Si} \Psi_S(t) \\ &= \hat{V}(t) \hat{H}_{Si} \Psi_S(t) \\ &= \hat{V}(t) \hat{H}_{Si} \hat{V}^\dagger(t) \hat{V}(t) \Psi_S(t) \\ &= \hat{H}_{Ii}(t) \Phi_I(t) \\ \\ \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_I(t) &= \hat{H}_{Ii}(t) \Phi_I(t) \end{split}$$

 $\hat{F}_I(t)$ 随时间的变化规律为:

$$rac{\partial \hat{F}_I}{\partial t} = \mathrm{i} \left[\hat{H}_{I0}(t), \hat{F}_I(t)
ight]$$

积分方程

$$\Phi_I(t) = \Phi_I(t_0) - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \hat{H}_{Ii}(t_1) \Phi_I(t_1) \mathrm{d}t_1$$

$\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵及其性质

 $\hat{U}(t,t_0)$ 把相互作用绘景中 t_0 时刻的状态幅度 $\Phi_I(t_0)$ 变为 t 时刻的状态幅度 $\Phi_I(t)$:

$$\Phi_I(t) = \hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)$$

把上式代入状态幅度满足的积分方程

$$\Phi_I(t) = \Phi_I(t_0) - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \hat{H}_{Ii}(t_1) \Phi_I(t_1) \mathrm{d}t_1$$

可得:

$$\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0) = \Phi_I(t_0) - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\Phi_I(t_0)\mathrm{d}t_1$$

即:

$$\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)=\left(I-\mathrm{i}\int_{t_0}^t\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1
ight)\Phi_I(t_0)$$

对比得 $\hat{U}(t,t_0)$ 满足的积分方程:

$$\hat{U}(t,t_0) = I - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \hat{H}_{Ii}(t_1) \hat{U}(t_1,t_0) \mathrm{d}t_1$$

把

$$\Phi_I(t) = \hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)$$

代入

$$\mathrm{i}rac{\partial\Phi_I(t)}{\partial t}=\hat{H}_{Ii}(t)\Phi_I(t)$$

得到 $\hat{U}(t,t_0)$ 满足的微分方程:

$$\mathrm{i}rac{\partial \hat{U}(t,t_0)}{\partial t}=\hat{H}_{Ii}(t)\hat{U}(t,t_0)$$

 $\hat{U}(t,t_0)$ 的性质

$$\hat{U}(t,t) = \hat{U}(t_0,t_0) = I$$
 $\hat{U}^{-1}(t_1,t_2) = \hat{U}(t_2,t_1)$ $\hat{U}^{\dagger}(t_1,t_2)\hat{U}(t_1,t_2) = \hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}^{\dagger}(t_1,t_2) = I$ $\hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}(t_2,t_3)$

$\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵级数解

$$egin{aligned} \hat{U}(t,t_0) &= I \ &+ rac{(-\mathrm{i})}{1!} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)
ight] \ &+ rac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{H}_{Ii}(t_2)
ight] \ &+ \cdots \end{aligned}$$

或简写为:

$$\hat{U}(t,t_0) = P\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' \hat{H}_{Ii}(t')}
ight]$$

S 矩阵及其在 QED 中的形式

假设相互作用发生在 t=0 附近的一段时间。用 Φ_i 表示初态状态幅度,用 Φ_f 表示终态状态幅度,则:

$$\Phi_i = \Phi_I(-\infty)$$

$$\Phi_f = \Phi_I(+\infty)$$

另一方面,

$$\Phi_I(t_2) = \hat{U}(t_2,t_1)\Phi_I(t_1)$$

所以:

$$\Phi_f = \hat{U}(+\infty, -\infty)\Phi_i$$

S 矩阵就定义为使基本粒子系统的状态幅度由初态到终态的演化算符,即:

$$\hat{S} \equiv \hat{U}(+\infty,-\infty)$$

$$oxed{\Phi_f = \hat{S}\Phi_i}$$

由于 \hat{U} 是幺正的,因此 \hat{S} 也是幺正的:

$$\hat{S}^{\dagger}\hat{S} = \hat{S}\hat{S}^{\dagger} = I$$

把 $\hat{U}(t,t_0)$ 的级数表达式

$$egin{aligned} \hat{U}(t,t_0) &= I \ &+ rac{(-\mathrm{i})}{1!} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)
ight] \ &+ rac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^t \mathrm{d}t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{H}_{Ii}(t_2)
ight] \ &+ \dots \end{aligned}$$

中的 t_0 替换为 $-\infty$, t 替换为 $+\infty$, 则得到 S 矩阵的级数表达式:

$$\hat{S} = I$$

$$+ \frac{(-\mathrm{i})}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\right]$$

$$+ \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{H}_{Ii}(t_2)\right]$$

$$+ \cdots$$

或简写为:

$$\hat{S} = P \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \hat{H}_{Ii}(t')}
ight]$$

为了计算方便, 定义各级 S 矩阵:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n \ \hat{S}_0 \equiv I$$

$$\left| \hat{S}_n \equiv rac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n P \left[\hat{H}_{Ii}(t_1) \hat{H}_{Ii}(t_2) \cdots \hat{H}_{Ii}(t_n)
ight].$$

 \hat{S}_n 称为第 n 级 \hat{S} 矩阵。

各阶 S 矩阵都是 Lorentz 协变的,也都满足规范变换的协变性。

量子电动力学中的 S 矩阵

电子或正电子与光子相互作用哈密顿算符:

$$\hat{H}_{Ii}(t) = -\mathrm{i}e\int\hat{ar{\psi}}(x)\gamma_{\mu}\hat{\psi}(x)\hat{A}_{\mu}(x)\mathrm{d}V$$

设

$$\hat{A}(x) \equiv \gamma_{\mu} \hat{A}_{\mu}(x)$$

则可证明:

$$\hat{H}_{Ii}(t) = -\mathrm{i}e\int\hat{ar{\psi}}(x)\hat{A}(x)\hat{\psi}(x)\mathrm{d}V$$

量子电动力学中的 S 矩阵:

$$egin{aligned} \hat{S}_n &= rac{\left(-\mathrm{i}
ight)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_n P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1) \cdots \hat{H}_{Ii}(t_n)
ight] \ &= rac{\left(-e
ight)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^n P\left[\hat{ar{\psi}}\left(x^1
ight) \hat{A}\left(x^1
ight) \hat{\psi}\left(x^1
ight) \cdots \hat{ar{\psi}}\left(x^n
ight) \hat{A}\left(x^n
ight) \hat{\psi}\left(x^n
ight)
ight] \end{aligned}$$

由于积分中 P 乘积中同一个时间坐标的费米场函数是成对的,因此积分中 P 乘积与 T 乘积是等价的。

$$\hat{S}_{n} = \frac{\left(-e\right)^{n}}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^{1} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^{n} T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right) \hat{A}\left(x^{1}\right) \hat{\psi}\left(x^{1}\right) \cdots \hat{\bar{\psi}}\left(x^{n}\right) \hat{A}\left(x^{n}\right) \hat{\psi}\left(x^{n}\right)\right]$$

T 乘积展开的 Wick 定理

量子申动力学中 \hat{S} 矩阵的具体形式为:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n, \quad \hat{S}_0 = I$$
 $\hat{S}_n = rac{\left(-e
ight)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x^n T \left[\hat{ar{\psi}}\left(x^1
ight) \hat{A}\left(x^1
ight) \hat{\psi}\left(x^1
ight) \cdots \hat{ar{\psi}}\left(x^n
ight) \hat{A}\left(x^n
ight) \hat{\psi}\left(x^n
ight)
ight]$

要计算 n 阶 S 矩阵 \hat{S}_n ,则必须要算出积分中的 T 乘积。

T 乘积展开的 Wick 定理

n 个场算符的 T 乘积,等于这 n 个场算符的 N 乘积与包括了所有可能的各种耦合的 N 乘积之和。

$$T \left[\hat{U}_{1} \hat{U}_{2} \cdots \hat{U}_{n} \right] = N \left[\hat{U}_{1} \hat{U}_{2} \cdots \hat{U}_{n} \right]$$

$$+ \sum_{i \neq j} N \left[\hat{U}_{1} \cdots \dot{\hat{U}}_{i} \cdots \dot{\hat{U}}_{j} \cdots \hat{U}_{n} \right]$$

$$+ \sum_{i,j,l,m \neq} N \left[\hat{U}_{1} \cdots \dot{\hat{U}}_{i} \cdots \dot{\hat{U}}_{j} \cdots \ddot{\hat{U}}_{l} \cdots \ddot{\hat{U}}_{m} \cdots \hat{U}_{n} \right]$$

$$+ \cdots$$

其中, \hat{U} 代表任何一种场函数的产生或消灭算符。

$$N\left[\hat{U}_1\cdots \hat{\dot{U}}_i\cdots \hat{\dot{U}}_j\cdots \hat{\dot{U}}_n
ight] \equiv (-1)^{arepsilon_{ij}}\, \dot{\hat{U}}_i\dot{\hat{U}}_j N\left[\hat{U}_1\cdots \hat{U}_{i-1}\hat{U}_{i+1}\cdots \hat{U}_{j-1}\hat{U}_{j+1}\cdots \hat{U}_n
ight]$$

 $arepsilon_{ij}$ 表示将算符 \hat{U}_i,\hat{U}_j 依次置换到所有算符最左边时,所需的费米置换次数。

QED中的 \hat{S} 矩阵和耦合式

$$egin{align} \dot{\hat{A}}_{\mu}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{A}}_{
u}\left(x^{2}
ight) &= rac{1}{2}D^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)\delta_{\mu
u} \ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight) &= -rac{1}{2}S_{lphaeta}^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight) \ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight) &= rac{1}{2}S_{etalpha}^{F}\left(x^{2}-x^{1}
ight) \ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight) &= \hat{\psi}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight) &= 0 \ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{A}_{\mu}\left(x^{2}
ight) &= \hat{\psi}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{A}_{\mu}\left(x^{2}
ight) &= 0 \ \end{pmatrix}$$

在 QED 中 \hat{S} 矩阵耦合式只需计算以下三种**非零耦合**情况:

$$egin{aligned} \dot{\hat{A}}_{\mu}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{A}}_{
u}\left(x^{2}
ight)&=rac{1}{2}D^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)\delta_{\mu
u}\ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\dot{ar{\psi}}}_{eta}\left(x^{2}
ight)&=-rac{1}{2}S_{lphaeta}^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)\ \dot{ar{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight)&=rac{1}{2}S_{etalpha}^{F}\left(x^{2}-x^{1}
ight) \end{aligned}$$

另外, 在计算 \hat{S} 矩阵时, 没必要计算

$$\dot{\hat{ar{\psi}}}_lpha(x)\dot{\hat{\psi}}_eta(x)=\infty$$

这样同一时空点的旋量场的耦合式。

也就是说, \hat{S} 矩阵中四维时空坐标相同的 $\hat{ar{\psi}}_{lpha}(x)$ 和 $\hat{\psi}_{eta}(x)$ 可以不考虑。

QED中 \hat{S} 矩阵的 Wick 展开式

$$egin{aligned} \dot{\hat{A}}_{\mu}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{A}}_{
u}\left(x^{2}
ight)&=rac{1}{2}D^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)\delta_{\mu
u}\ \dot{\hat{\psi}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{ar{\psi}}}_{eta}\left(x^{2}
ight)&=-rac{1}{2}S_{lphaeta}^{F}\left(x^{1}-x^{2}
ight)\ \dot{\hat{ar{\psi}}}_{lpha}\left(x^{1}
ight)\dot{\hat{\psi}}_{eta}\left(x^{2}
ight)&=rac{1}{2}S_{etalpha}^{F}\left(x^{2}-x^{1}
ight) \end{aligned}$$

除上面之外的耦合式全为零。

$$\hat{S}_{n}=rac{\left(-e
ight)^{n}}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{1}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{n}T\left[\hat{ar{\psi}}\left(x^{1}
ight)\hat{A}\left(x^{1}
ight)\hat{\psi}\left(x^{1}
ight)\cdots\hat{ar{\psi}}\left(x^{n}
ight)\hat{A}\left(x^{n}
ight)\hat{\psi}\left(x^{n}
ight)
ight]$$

计算 \hat{S}_0

$$\hat{S}_0 = I$$

计算 \hat{S}_1

$$\begin{split} T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\hat{\psi}\left(x^{1}\right)\right] &= N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\hat{\psi}\left(x^{1}\right)\right] \\ &+ (-1)^{\varepsilon_{12}}\,\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{A}}\left(x^{1}\right)N\left[\hat{\psi}\left(x^{1}\right)\right] \\ &+ (-1)^{\varepsilon_{13}}\,\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)N\left[\hat{A}\left(x^{1}\right)\right] \\ &+ (-1)^{\varepsilon_{13}}\,\dot{\hat{A}}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\right] \\ &= N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\right] \\ &= N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)\right] \\ &= -e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{1}N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)\right] \\ &= -e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{1}N\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^{1}\right)\right] \end{split}$$

计算 \hat{S}_2

$$\hat{S}_{2}=rac{e^{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^{2}T\left[\hat{ar{\psi}}\left(x^{1}
ight)\hat{A}\left(x^{1}
ight)\hat{\psi}\left(x^{1}
ight)\hat{ar{\psi}}\left(x^{2}
ight)\hat{A}\left(x^{2}
ight)\hat{\psi}\left(x^{2}
ight)
ight]$$

QED Wick 定理不考虑同一时空点的耦合 and 旋量旋量耦合、共轭旋量共轭旋量耦合为零。下面用 Wick 定理计算 T 乘积时就不写耦合为零的项了。

$$\begin{split} &T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\hat{\psi}\left(x^{1}\right)\hat{\bar{\psi}}\left(x^{2}\right)\hat{A}\left(x^{2}\right)\hat{\psi}\left(x^{2}\right)\right]\\ &=T\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &=N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\psi}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\psi}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\psi}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\psi}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\psi}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\psi}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\psi}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ &+N\left[\hat{\psi}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{$$

接下来利用

$$egin{aligned} N \left[\hat{U}_1 \cdots \hat{U}_i \cdots \hat{U}_j \cdots \hat{U}_n
ight] &\equiv (-1)^{arepsilon_{ij}} \, \dot{\hat{U}}_i \dot{\hat{U}}_j N \left[\hat{U}_1 \cdots \hat{U}_{i-1} \hat{U}_{i+1} \cdots \hat{U}_{j-1} \hat{U}_{j+1} \cdots \hat{U}_n
ight] \ &\dot{\hat{A}}_{\mu} \left(x^1
ight) \, \dot{\hat{A}}_{
u} \left(x^2
ight) &= rac{1}{2} D^F \left(x^1 - x^2
ight) \delta_{\mu
u} \ &\dot{\hat{\psi}}_{lpha} \left(x^1
ight) \, \dot{\hat{\psi}}_{eta} \left(x^2
ight) &= -rac{1}{2} S^F_{lphaeta} \left(x^1 - x^2
ight) \ &\dot{\hat{\psi}}_{lpha} \left(x^1
ight) \, \dot{\hat{\psi}}_{eta} \left(x^2
ight) &= rac{1}{2} S^F_{etalpha} \left(x^2 - x^1
ight) \end{aligned}$$

可进一步计算 T 乘积:

$$\begin{split} &T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^{1}\right)\hat{A}\left(x^{1}\right)\hat{\psi}\left(x^{1}\right)\hat{\bar{\psi}}\left(x^{2}\right)\hat{A}\left(x^{2}\right)\hat{\psi}\left(x^{2}\right)\right]\\ =&N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ +&\frac{1}{2}D^{F}\left(x^{1}-x^{2}\right)\delta_{\mu\nu}N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_{\beta}\left(x^{1}\right)\hat{\bar{\psi}}_{\rho}\left(x^{2}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\right]\\ -&\frac{1}{2}S_{\beta\rho}^{F}\left(x^{1}-x^{2}\right)N\left[\hat{\bar{\psi}}_{\alpha}\left(x^{1}\right)\left(\gamma_{\mu}\right)_{\alpha\beta}\hat{A}_{\mu}\left(x_{1}\right)\left(\gamma_{\nu}\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_{\lambda}\left(x^{2}\right)\hat{A}_{\nu}\left(x_{2}\right)\right]\\ +&\cdots\end{split}$$

S 矩阵的 Feynman 图解

 \hat{S} 矩阵是各级 \hat{S}_n 矩阵之和,而由 Wick 定理,每个 \hat{S}_n 可展开成场算符各种可能的耦合叠加,其中每一项应当有一定的物理意义。 具体来说,某种特定耦合方式代表基本粒子相互作用的某种反应。在 QED 中,某种特定耦合方式代表正负电子和光子相互作用的某种 反应。

QED Feynman 图形规则

$$\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) = rac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{k_0 = arepsilon_{ec{k}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\mu}^{(+)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k} \ \hat{A}_{\mu}^{(-)}(x) = rac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{k_0 = arepsilon_{ec{k}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \hat{C}_{\mu}^{(-)}\left(ec{k}
ight) \mathrm{d}^3ec{k} \ \hat{\psi}^{(+)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(+)}(ec{p}) v_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{a}_i^{(-)}(ec{p}) u_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{a}_i^{(+)}(ec{p}) ar{u}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) ar{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) ar{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) ar{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) ar{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) \dot{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i^{(-)}(ec{p}) \dot{v}_i(ec{p}) \mathrm{d}^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^{3/2} \int\limits_{p_0 = E_{ec{p}}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px} \hat{b}_i(ec{p}) \dot{v}_i(ec{p}) d^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{ec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{b}_i(ec{p}) d^3ec{p} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int\limits_{ec{p}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \hat{b}_$$

注意到:

 $\hat{\psi}^{(+)}(x)$ 对应 $\hat{b}_i^{(+)}(ec{p})$, 即对应产生正电子算符;

 $\hat{\psi}^{(-)}(x)$ 对应 $\hat{a}_i^{(-)}(\vec{p})$, 即对应消灭负电子算符;

 $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)$ 对应 $\hat{a}_i^{(+)}(\vec{p})$,即对应产生负电子算符;

 $\hat{ar{\psi}}^{(-)}(x)$ 对应 $\hat{b}_i^{(-)}(ec{p})$,即对应消灭正电子算符。

用实线代表电子或正电子的运动;

用虚线代表光子的运动;

 $\hat{\psi}(x_1)$ 即 $\hat{\psi}^{(+)}(x)$ 或 $\hat{\psi}^{(-)}(x)$ 代表产生正电子或消灭负电子,用入向电子外线表示

 $\hat{\psi}(x_1)$ 即 $\hat{\psi}^{(+)}(x)$ 或 $\hat{\psi}^{(-)}(x)$ 代表产生负电子或消灭正电子,用出向电子外线表示;

 $A_{\mu}(x_1)$ 代表光子的放出或吸收,用光子外线表示;

親合式 $\hat{\psi}_{lpha}(x_1)$ $\dot{\hat{\psi}}_{eta}(x_2)=-rac{1}{2}\hat{S}^F_{lphaeta}(x_1-x_2)$ 代表中间态的正负电子,用电子内线表示;

耦合式 $\hat{A}_{\alpha}(x_1)\hat{A}_{\beta}(x_2)=\frac{1}{2}D^(x_1-x_2)\delta_{\alpha\beta}$ 代表中间态的光子或虚光子,用光子内线表示;

 γ_i 矩阵代表正负电子和光子有一次作用,用顶点图形表示。

QED 中的 Feynman 图

一般在 Wick 定理展开式中,有两种或两种以上展开项对应同一种 Feynman 图解。

用 r 代表同一 Feynman 图解所对应的不同形式的 \hat{S}_n 矩阵的展开式的数目。r 称为 Feynman 图解的等值数。

\hat{S}_1 的 Feynman 图解

\$\$ \hat{S}_1

\$\$

 \hat{S}_2 的 Feynman 图解

 \hat{S}_2

 \hat{S}_3 的 Feynman 图解

Furry 关于电子封闭内线的定理

奇数个电子封闭内线的 Feynman 图对 \hat{S} 矩阵没有任何贡献。

粒子数表象下 \hat{S} 矩阵的矩阵元

为了研究基本粒子反应,采用相互作用绘景的粒子数表象。

QED 中, α 个动量为 $\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_\alpha$,自旋为 i_1,\cdots,i_α 的正负电子和 r 个动量为 $\vec{k}_1,\cdots\vec{k}_r$,极化为 μ_1,\cdots,μ_r 的光子系统,在相互作用绘景粒子数表象中的状态幅度可记为:

$$\Phi_{ec{p}_1 i_1, \cdots, ec{p}_{lpha} i_lpha; ec{k}_1 \mu_1 \cdots ec{k}_r \mu_r} = \hat{a}_{ec{p}_1 i_1}^{(+)} \cdots \hat{b}_{ec{p}_{lpha} i_lpha}^{(+)} \hat{C}_{ec{k}_1}^{\mu_1 (+)} \cdots \hat{C}_{ec{k}_r}^{\mu_r (+)} \Phi_0$$

其中, $\hat{a}^{(+)}_{ec{p}i}$ 是产生动量为 $ec{p}$,自旋为 i 的电子的算符; $\hat{b}^{(+)}_{ec{p}i}$ 是产生动量为 $ec{p}$,自旋为 i 的正电子的算符; $\hat{C}^{\mu(+)}_{ec{k}}$ 是产生动量为 $ec{k}$,极化为 μ 的光子的算符。

为简便,记:

$$\Phi_{ec{p}_1 i_1, \cdots, ec{p}_lpha i_lpha; ec{k}_1 \mu_1 \cdots ec{k}_r \mu_r} \equiv \Phi_eta$$

对于基本粒子反应,初态 Φ_i 应是粒子数表象的某个本征态 Φ_{α} , 即

$$\Phi_i = \Phi_{\alpha}$$

 \hat{S} 矩阵给出了末态 Φ_f :

$$\Phi_f = \hat{S}\Phi_i = \hat{S}\Phi_lpha$$

一般来说,末态 Φ_f 不是粒子数表象的本征态,而是粒子数表象本征态的某种混合。假设 Φ_f 可按粒子数表象本征态 $\{\Phi_{eta}\}$ 展开:

$$\Phi_f = \hat{S}\Phi_i = \hat{S}\Phi_lpha = \sum_eta C_{lphaeta}\Phi_eta$$

根据量子力学基本原理,展开系数模方 $|C_{\alpha\beta}|^2$ 就代表了初态为粒子数表象本征态 Φ_α 时,系统随时间演化直至末态,对末态进行测量,测得末态为粒子数表象本征态 Φ_β 的概率。

为了计算展开系数,上式左乘 $\Phi_{\beta'}^{\dagger}$,并利用正交关系 $\Phi_{\beta'}^{\dagger}\Phi_{\beta}=\delta_{\beta\beta'}$ 可得:

$$C_{lphaeta'}=\Phi_{eta'}^{\dagger}\hat{S}\Phi_{lpha}$$

用 Dirac 符号来说,假设 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ 都是粒子数表象的本征态,那么矩阵元 $\left\langle \beta \mid \hat{S} \mid \alpha \right\rangle$ 就是初态 α 到末态 β 的跃迁振幅, $\left| \left\langle \beta \mid \hat{S} \mid \alpha \right\rangle \right|^2$ 就是初态为粒子数表象本征态 $|\alpha\rangle$ 时,系统随时间演化直至末态,对末态进行测量,测得末态为粒子数表象本征态 $|\beta\rangle$ 的概率。

产生、消灭粒子算符对状态幅度的作用

$$egin{align} \hat{a}_{ec{p}i}^{(-)}\Phi_{ec{p}'i'} &= \delta_{ec{p}ec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0 \ \hat{b}_{ec{p}i}^{(-)}\Phi_{ec{p}'i'} &= \delta_{ec{p}ec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0 \ \hat{C}_{ec{k}}^{\mu(-)}\Phi_{ec{k}'\mu'} &= \delta_{ec{k}ec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\Phi_0 \ \end{align}$$

取厄米共轭有:

$$egin{aligned} \Phi^{\dagger}_{ec{p}'i'}\hat{a}^{(+)}_{ec{p}i'} &= \delta_{ec{p}ec{p}'}\delta_{ii'}\Phi^{\dagger}_0 \ \ \Phi^{\dagger}_{ec{p}'i'}\hat{b}^{(+)}_{ec{p}i} &= \delta_{ec{p}ec{p}'}\delta_{ii'}\Phi^{\dagger}_0 \ \ \Phi^{\dagger}_{ec{k}'\mu'}\hat{C}^{\mu(+)}_{ec{k}} &= \delta_{ec{k}ec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\Phi^{\dagger}_0 \end{aligned}$$

可以推广到 α 个正负电子和 r 个光子系统的情况也类似。

场算符 N 乘积对本征态矢量的作用

要研究 \hat{S} 在粒子数表象中的矩阵元,就必须讨论场算符的 N 乘积对本征态矢量的作用。

已知

$$\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{k},
u} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} e^{
u}_{\mu} \hat{C}^{
u(+)}_{ec{k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \ \hat{A}^{(-)}_{\mu}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{k},
u} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} e^{
u}_{\mu} \hat{C}^{
u(-)}_{ec{k}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \ \hat{\psi}^{(+)}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(+)}_{ec{p}i} v_i(ec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{a}^{(-)}_{ec{p}i} u_i(ec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \ \hat{\psi}^{(+)}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{a}^{(+)}_{ec{p}i} ar{u}_i(ec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = rac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(-)}_{ec{p}i} v_i(ec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \ \hat{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(-)}_{ec{p}i} v_i(ec{p}) + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(-)}_{ec{p}i} v_i(ec{p}) + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(-)}_{ec{p}i} v_i(ec{p}) + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{ec{p},i} \hat{b}^{(-)}_{ec{p}i}$$

我们需要的是 $\hat{A}_{\mu}^{(-)}(x),\hat{\psi}^{(-)}(x),\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)$ 从左边作用于粒子数表象单粒子本征态的结果。 注意到:

$$\begin{split} \hat{A}_{\mu}^{(+)}(x) \Phi_{\vec{k}\nu} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k'},\nu'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k'}}}} e^{\nu'}_{\mu} \hat{C}_{\vec{k'}}^{\nu'(-)} e^{+ik'x}\right) \Phi_{\vec{k}\nu} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k'},\nu'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k'}}}} e^{\nu'}_{\mu} \delta_{\vec{k},\vec{k'}} \delta_{\nu,\nu'} e^{+ik'x}\right) \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} e^{\nu}_{\mu} e^{+ikx} \Phi_0 \\ \hat{\psi}^{(-)}(x) \Phi_{\vec{p}i} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p'},i'} \hat{a}^{(-)}_{\vec{p'}i'} u_{i'}(\vec{p'}) e^{ip'x}\right) \Phi_{\vec{p}i} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p'},i'} \delta_{\vec{p},\vec{p'}} \delta_{i,i'} u_{i'}(\vec{p'}) e^{ip'x}\right) \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} u_i(\vec{p}) e^{ipx} \Phi_0 \\ \hat{\psi}^{(-)}(x) \Phi_{\vec{p}i} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p'},i'} \hat{b}^{(-)}_{\vec{p'}i'} \bar{v}_{i'}(\vec{p}) e^{ip'x}\right) \Phi_{\vec{p}i} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p'},i'} \delta_{\vec{p},\vec{p'}} \delta_{i,i'} \bar{v}_{i'}(\vec{p}) e^{ip'x}\right) \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{v}_i(\vec{p}) e^{ipx} \end{split}$$

总之:

$$egin{aligned} \hat{A}_{\mu}^{(-)}(x)\Phi_{ec{k}
u} &= rac{1}{\sqrt{V}}rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}}e_{\mu}^{
u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Phi_{0} \ & \ \hat{\psi}^{(-)}(x)\Phi_{ec{p}i} &= rac{1}{\sqrt{V}}u_{i}\left(ec{p}
ight)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\Phi_{0} \ & \ \hat{ar{\psi}}^{(-)}(x)\Phi_{ec{p}i} &= rac{1}{\sqrt{V}}ar{v}_{i}\left(ec{p}
ight)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\Phi_{0} \end{aligned}$$

取厄米共轭得:

$$egin{aligned} \Phi^\dagger_{ec k
u}\hat A^{(+)}_\mu(x) &= rac{1}{\sqrt{V}}rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec k}}}e^
u_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Phi^\dagger_0\ \Phi^\dagger_{ec pi}\hat\psi^{(+)}(x) &= rac{1}{\sqrt{V}}v_i(ec p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\Phi^\dagger_0\ \Phi^\dagger_{ec pi}\hat\psi^{(+)}(x) &= rac{1}{\sqrt{V}}ar u_i(ec p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\Phi^\dagger_0 \end{aligned}$$

令 \hat{O} 为产生和消灭算符的 N 乘积,粒子数表象下 \hat{O} 算符由确定初态向确定终态跃迁的矩阵元定义为:

$$\Phi_f^\dagger \hat{O} \Phi_i = \left\langle f \left| \hat{O} \left| i
ight
angle
ight.$$

其中 $|i\rangle$, $|f\rangle$ 都是粒子数算符本征态。

M_{i-f} 作为粒子数表象 \hat{S} 矩阵矩阵元

S 矩阵可分解为 \hat{S}_n 矩阵之和,而 \hat{S}_n 矩阵又可用 Wick 定理展开成数项场算符的 N 乘积对时空坐标的积分。

这些项中,有r项可以用同一Feynman 图解表示。

 \hat{S}_n 中可以用同一 Feynman 图解表达的项记为 \hat{M}^n ,则:

$$\hat{S}_n = \sum_{\hat{M}^n} \hat{M}^n$$

其中,求和对不同的 Feynman 图进行。

$$egin{aligned} \hat{M}^n &= rac{r\left(-e
ight)^n}{n!} \int \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n N\left[F\left(\hat{A}_{\mu}(x),\hat{ar{\psi}}(x),\hat{\psi}(x),D^F,S^F
ight)
ight] \ &= rac{r\left(-e
ight)^n}{n!} \int \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \hat{F}_f\left(\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x),\hat{ar{\psi}}^{(+)},\hat{\psi}^{(+)}
ight) \hat{F}_m\left(D^F_{\mu
u},S^F_{lphaeta}
ight) \hat{F}_i\left(\hat{A}_{\mu}^{(-)}(x),\hat{ar{\psi}}^{(-)},\hat{\psi}^{(-)}
ight) \end{aligned}$$

设 \hat{F}_i 中消灭正负电子的算符数为 α_i' ,消灭光子的算符数为 r_i' ; \hat{F}_f 中产生正负电子的算符数为 α_f' ,产生光子的算符数为 r_f' ,则 \hat{M}^n 可写为:

$$\hat{M}^n = \hat{M}^n \left(lpha_f', r_f'; lpha_i', r_i'
ight)$$

为了计算粒子数表象 \hat{S} 矩阵元,假设要研究的基本粒子反应的初态为 α_i 个正负电子和 r_i 个光子,终态为 α_f 个正负电子和 r_f 个光子。

可以知道,只有当 $lpha_f'=lpha_f,r_f'=r_f,lpha_i'=lpha_i,r_i'=r_i$ 时 $\Phi_{lpha_fr_f}^\dagger\hat{M}^n\left(lpha_f',r_f';lpha_i',r_i'\right)\Phi_{lpha_ir_i}$ 才可能不为零。

设 $\hat{M}(\alpha_f,r_f;\alpha_i,r_i)$ 为所有不同级的 \hat{S}_n 矩阵的展开式中具有初态为 (α_i,r_i) 且终态为 (α_f,r_f) 的各项 $\hat{M}^n(\alpha_f,r_f;\alpha_i,r_i)$ 之和,即:

$$\hat{M}(lpha_f,r_f;lpha_i,r_i) = \sum_{n=l}^{\infty} \hat{M}^n(lpha_f,r_f;lpha_i,r_i)$$

其中,l 代表可能发生上述基本粒子反应的最低阶 \hat{S}_n 矩阵的阶数。

则 \hat{S} 矩阵元可写为:

$$\Phi_f^\dagger \hat{S} \Phi_i = \Phi_{lpha_f r_f}^\dagger \hat{M}(lpha_f, r_f; lpha_i, r_i) \Phi_{lpha_i r_i} \equiv M_{i-f}$$

总而言之, M_{i-f} 就是粒子数表象矩阵元。

动量表象 S 矩阵元

假设所研究的正负电子和光子反应的 Feynman 图中有:n 个顶点(即 n 阶 S 矩阵)、 E_e 个正负电子外线、 E_γ 个光子外线、 I_e 个正负电子内线、 I_γ 个光子外线、 I_ϕ 个电磁场外线,则:

外线总数 $E=E_e+E_\gamma$

内线总数 $I=I_e+I_\gamma$

动量表象 Feynman 图解规则

$$n$$
 个顶点对应 $\left(2\pi\right)^4\prod_{i=1}^n\delta\left(\sum p\right)_i$

$$E_e$$
 个正负电子外线对应 E_e 个 $u_i(ec{p}), ar{u}_i(ec{p}), v_i(ec{p}), ar{v}_i(ec{p})$,系数为 $\left(rac{1}{\sqrt{V}}
ight)^{E_e}$

$$E_{\gamma}$$
 个光子外线对应着 E_{γ} 个 $\dfrac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}}\hat{e}^{
u}=\dfrac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}}e^{
u}_{\mu}\gamma_{\mu}$,系数为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{V}}
ight)^{E_{\gamma}}$

$$I_e$$
 个正负电子内线对应着 I_e 个 $\dfrac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}$,系数为 $\left[\dfrac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_e}$,对 $\prod_L\mathrm{d} p$ 积分

$$I_\gamma$$
 个光子内线对应着 I_γ 个 $\gamma_\mu rac{1}{k^2} \gamma_\mu$,系数为 $\left[rac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}
ight]^{I_\gamma}$,对 $\prod_{I_\gamma} \mathrm{d} k$ 积分

l 个电子封闭内线贡献一个因子 $(-1)^l$

$$S$$
 个外场线对应着 S 个 $\hat{a}=a_{\mu}(q)\gamma_{\mu}$,系数为 $\left[rac{1}{(2\pi)^4}
ight]^S$,对 $\prod_S \mathrm{d} q$ 积分

Feynman图解中的要素	Feynman图	M^n_{i-f} 矩阵元中的因子
自旋为 i 的电子初态外线		$u_i(ec p)$
自旋为 i 的电子终态外线		$ar{u}_i(ec{p})$
自旋为 i 的正电子初态外线		$ar{v}_i(ec{p})$
自旋为 i 的正电子终态外线		$v_i(ec p)$
积化为 $\hat{e}^{ u}$ 的光子初态终态外线		$\hat{e}^{ u}/\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}=e^{ u}_{\mu}\gamma_{\mu}/\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}$
电子或正电子内线		$rac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}$
光子内线		$\gamma_{\mu}\cdotsrac{1}{k^2}\cdots\gamma_{\mu}$
每个顶点有两根正负电子线和一根光子线		$\delta(p_2\pm k-p_1)$ 出向粒子动量为正,入向粒子动量为负
电子或正电子封闭内线		$rac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}$ 与 $\hat{e}^ u$ 间隔乘积之迹
外场线		$\hat{a}(q)=a_{\mu}(q)\gamma_{\mu}$

规定 Feynman 图解中时间坐标方向为从左到右。

Compton 效应

Compton 效应: 电子先吸收一个光子, 变为中间态, 然后又放出一个光子; 或电子先放出一个光子, 变为中间态, 又吸收一个光子。

$$e^- + \gamma
ightarrow e^- + \gamma$$

用 $(k_1,\sigma),(k_2,\lambda)$ 表征光子动量和极化,用 $(\vec{p}_1,i),(\vec{p}_2,j)$ 表征电子的动量和自旋。

最低阶 Feynman 图 (n=2) 有两张。

$$\begin{split} n = 2, r = 2, I_e = 1, I_{\gamma} = 0, I = I_e + I_{\gamma} = 1, S = 0, l = 0, E = E_e + E_{\gamma} = 4 \\ M_{i-f}^n = B_{i-f}^n \underbrace{\int \cdots \int}_{I_e + I_{\gamma} + S} \prod_{I_e} \mathrm{d}p \prod_{I_{\gamma}} \mathrm{d}k \prod_{S} \mathrm{d}q \left\{ \cdots \right\} \\ B_{i-f}^n = \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \right)^E \frac{r}{n!} (-e)^n (-1)^l (\mathrm{i})^{I_e - I_{\gamma}} (2\pi)^{4(n - I - S)} \\ = \mathrm{i} \frac{e^2}{V^2} (2\pi)^4 \end{split}$$

可以写出图一的贡献:

$$\begin{split} \hat{M}_{i-f}^2 &= \mathrm{i} \frac{e^2}{V^2} (2\pi)^4 \int \left(\mathrm{d} p \right) \delta \left(p - p_1 - k_1 \right) \delta \left(p_2 + k_2 - p \right) \bar{u}_j(\vec{p}_2) \frac{\hat{e}^\lambda}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}} \frac{\mathrm{i} \hat{p} - m}{\hat{p}^2 + m^2} \frac{\hat{e}^\sigma}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}} u_i(\vec{p}_1) \\ &= \mathrm{i} \frac{e^2}{V^2} (2\pi)^4 \delta \left(p_2 + k_2 - p_1 - k_1 \right) \bar{u}_j(\vec{p}_2) \frac{\hat{e}^\lambda}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}} \frac{\mathrm{i} \left(\hat{p}_1 + \hat{k}_1 \right) - m}{\left(p_1 + k_1 \right)^2 + m^2} \frac{\hat{e}^\sigma}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}} u_i(\vec{p}_1) \end{split}$$

可以写出图二的贡献:

$$\begin{split} \hat{M}_{i-f}^{'2} &= \mathrm{i} \frac{e^2}{V^2} (2\pi)^4 \int \left(\mathrm{d} p \right) \delta \left(p + k_2 - p_1 \right) \delta \left(p_2 - p - k_1 \right) \bar{u}_j(\vec{p}_2) \frac{\hat{e}^\sigma}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}} \frac{\mathrm{i} \hat{p} - m}{\hat{p}^2 + m^2} \frac{\hat{e}^\lambda}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}} u_i(\vec{p}_1) \\ &= \mathrm{i} \frac{e^2}{V^2} (2\pi)^4 \delta \left(p_2 - k_1 + k_2 - p_1 \right) \bar{u}_j(\vec{p}_2) \frac{\hat{e}^\sigma}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}} \frac{\mathrm{i} \left(\hat{p}_1 - \hat{k}_2 \right) - m}{(p_1 - k_2)^2 + m^2} \frac{\hat{e}^\lambda}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}} u_i(\vec{p}_1) \end{split}$$

总的 M_{i-f}^2 矩阵元是二者之和。

4.11 基本粒子反应几率和截面

$\left|\left\langle f\left|S\left|i\right ight angle ight|^{2}$ 的意义

 $\left|\left\langle f\left|S\right|i
ight
angle
ight|^{2}\equiv M_{i-f}$ 表示初终态之间的跃迁几率,即基本粒子衰变或反应几率。不同的 $\left\langle f\right|$ 代表不同的反应道。

单位时间、单位空间基本粒子反应跃迁几率

 M_{i-f} 矩阵一般可写成如下形式:

$$M_{i-f} = \left(rac{1}{\sqrt{V}}
ight)^E \delta\left(p^f - p^i
ight) M\left(p^f, p^i
ight)$$

其中 p^f 是末态总动量, p^i 是初态总动量, $E=E_e+E_\gamma=E_i+E_f$

用 Γ 表示单位时间单位空间反应的几率,设 $\Omega=TV$ 为基本粒子进行反应的四维空间体积,则

$$\Gamma \equiv \lim_{\Omega o \infty} rac{\left|M_{i-f}
ight|_{\Omega}^2}{\Omega} = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \left(rac{1}{V}
ight)^{E_i + E_f} \left|M\left(p^f, p^i
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f - p^i
ight)$$

单位时空体积初终态跃迁几率为:

$$\mathrm{d}\omega = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \left(\prod_i n_i
ight) \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

其中, n_i 为某一种初态粒子单位体积的粒子数 $n_i \equiv N_i/V$

基本粒子的反应截面

基本粒子的反应**微分**截面 $d\sigma$ 定义为单位时间单位体积基本粒子(群)反应的几率除以初态粒子流的强度。

$$\mathrm{d}\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{J}$$

在一半的基本粒子反应中, 初态只有两种粒子

$$J = n_1 n_2 v_{12}$$

 v_{12} 是两种基本粒子相对运动速度。

$$\mathrm{d}\sigma = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4rac{1}{v_{12}}\left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2\delta\left(p^f-p^i
ight)\prod_frac{\mathrm{d}^3ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

两个初态粒子相对运动公式:

$$v_{12} = rac{1}{arepsilon_1 arepsilon_2} \sqrt{\left(p_{\mu}^1 p_{\mu}^2
ight)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

初态有两种基本粒子反应的微分截面公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 rac{arepsilon_1 arepsilon_2}{F} \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}, \quad F \equiv \sqrt{\left(p_\mu^1 p_\mu^2
ight)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

总反应截面公式:

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \int \cdots \int rac{arepsilon_1 arepsilon_2}{F} \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

反应的微分截面 $d\sigma$ 的两个特点:

- $d\sigma$ 和 σ 的量纲为面积;
- $d\sigma$ 表达式与初态粒子数密度无关。
- 总截面 σ 代表反应几率。

不稳定基本粒子衰变的平均寿命

单位时间 1 个基本粒子衰变几率为:

$$\lambda = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

 λ 又称为基本粒子的衰变宽度, 其倒数称为衰变寿命 τ , 即:

$$au \equiv rac{1}{\lambda}$$

单位时间基本粒子反应的几率

在外场作用下基本粒子反应的截面

$$\mathrm{d}\sigma = rac{1}{2\pi}rac{1}{s}V^{E_f}\left|M_{i-f}^{(e)}\left(p^f,p^i
ight)
ight|^2\delta\left(arepsilon^f-arepsilon^i
ight)\prod_frac{\mathrm{d}^3ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式

一般的基本粒子反应中,初态或终态同类的基本粒子的自旋是平均分布的,称为非极化的。

若终态基本粒子非极化,则反应几率或截面要对终态基本粒子自旋求和;

若初态基本粒子非极化,则反应几率或截面要对初态基本粒子自旋求平均。

对电子和正电子终态的自旋求和

初态有两种基本粒子反应的微分截面公式:

$$\mathrm{d}\sigma = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4rac{arepsilon_1arepsilon_2}{F}\left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2\delta\left(p^f-p^i
ight)\prod_frac{\mathrm{d}^3ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3},\quad F\equiv\sqrt{\left(p_\mu^1p_\mu^2
ight)^2-m_1^2m_2^2}$$

总反应截面公式:

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \int \cdots \int rac{arepsilon_1 arepsilon_2}{F} \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

通常反应中,首先以初、终态各为一电子的情形为例,此时

$$M\left(p^{i},p^{f}
ight)=ar{u}_{f}\left(ec{p}_{1}
ight)\hat{O}u_{i}\left(ec{p}_{2}
ight)$$

其中 \hat{O} 是矩阵函数。

$$M^{\dagger}\left(p^{i},p^{f}
ight)=M^{st}\left(p^{i},p^{f}
ight)$$

设

$$\hat{ar{O}} = \gamma_4 \hat{O}^\dagger \gamma_4$$

则

$$|M(p^{i}, p^{f})|^{2} = \bar{u}_{i}(\vec{p}_{2}) \hat{\bar{O}} u_{f}(\vec{p}_{1}) \bar{u}_{f}(\vec{p}_{1}) \hat{O} u_{i}(\vec{p}_{2}), \quad i, f \land \mathring{\pi}$$

对终态自旋求和

$$\sum_{f=1}^{2}\left|M\left(p^{i},p^{f}
ight)
ight|^{2}=\sum_{f=1}^{2}ar{u}_{i}\left(ec{p}_{2}
ight)\hat{ar{O}}u_{f}\left(ec{p}_{1}
ight)ar{u}_{f}\left(ec{p}_{1}
ight)\hat{O}u_{i}\left(ec{p}_{2}
ight)$$

又由

$$\sum_{f=1}^{2}u_{f}\left(ec{p}_{1}
ight) ar{u}_{f}\left(ec{p}_{1}
ight) =rac{m}{E_{1}}\Lambda_{-}\left(p_{1}
ight) =-rac{1}{2E_{1}}\left(\mathrm{i}\hat{p}_{1}-m
ight) .$$

$$\left[\sum_{f=1}^{2} \left| M\left(p^{i},p^{f}
ight)
ight|^{2} = rac{m}{E_{1}} ar{u}_{i}\left(ec{p}_{2}
ight) \hat{ar{O}} \Lambda_{-}\left(p_{1}
ight) \hat{O} u_{i}\left(ec{p}_{2}
ight)
ight.$$

对电子或正电子终态自旋求和并对初态自旋平均

接着对初态自旋求平均。

$$egin{aligned} rac{1}{2}\sum_{i=1}^2\left(\sum_{f=1}^2\left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2
ight) &=rac{1}{2}\sum_{i=1}^2rac{m}{E_1}ar{u}_i\left(ec{p}_2
ight)\hat{ar{O}}\Lambda_-\left(p_1
ight)\hat{O}u_i\left(ec{p}_2
ight) \ &=rac{1}{2}rac{m^2}{E_1E_2}\mathrm{Tr}\left[\Lambda_-(p_2)\hat{ar{O}}\Lambda-(p_1)\hat{O}
ight] \end{aligned}$$

总之, 要利用

$$egin{aligned} \sum_i u_i(ec{p}) ar{u}_i(ec{p}) &= rac{m}{E} \Lambda_-(p) = -rac{1}{2E} \left(\mathrm{i} \hat{p} - m
ight) \ &\sum_i v_i(ec{p}) ar{v}_i(ec{p}) &= -rac{m}{E} \Lambda_+(p) = -rac{1}{2E} \left(\mathrm{i} \hat{p} + m
ight) \end{aligned}$$

最后把旋量场粒子非极化态问题转化为 γ_{μ} 矩阵求迹问题。

常用 γ_{μ} 矩阵求迹公式

对光子的极化求和

例子

求 $B \to f + \tilde{f}$ 寿命。已知:B 是自旋为零、质量为 M 的玻色子; f, \tilde{f} 是自旋为 1/2、质量为 m 的正反费米子。相互作用哈密顿量为

$$\hat{\mathcal{H}}_i = \mathrm{i} g \hat{\phi}(x) \hat{ar{\psi}}(x) \hat{\psi}(x)$$

求 B 粒子衰变为正反费米子 f, \tilde{f} 的寿命。

(1) 根据反应式画出相应费曼图(仅考虑一阶图),写出 λ 表达式。

$$\hat{S}_1 = -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x N \left[\hat{\mathcal{H}}_I(x)
ight] = g \int \mathrm{d}^4 x N \left[\hat{ar{\psi}}(x) \hat{\psi}(x) \phi(x)
ight]$$

衰变初、终态

$$\ket{B} = \ket{ec{k}}, \quad \ket{f, ilde{f}} = \ket{ec{p}_1,i;ec{p}_2,j}$$

相应 $\hat{M}_{i-f}^{(1)}$ 为

$$\hat{M}_{i-f}^{(1)} = g \int \mathrm{d}^4x \left\langle f, ilde{f} \left| \hat{ar{\psi}}^{(+)}(x) \hat{\psi}^{(+)}(x) \hat{\phi}^{(-)}(x) \right| B
ight
angle \ \hat{\phi}^{(-)}(x)
ightarrow rac{1}{\sqrt{V}} rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad \hat{ar{\psi}}^{(+)}(x)
ightarrow rac{1}{\sqrt{V}} ar{u}_i \left(ec{p}_1
ight) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x}, \quad \hat{\psi}^{(+)}(x)
ightarrow rac{1}{\sqrt{V}} v_j \left(ec{p}_2
ight) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x}$$

代入得

$$egin{align} \hat{M}_{i-f}^{(1)} &= g\left(2\pi
ight)^4 \delta\left(p_1+p_2-k
ight) \left(rac{1}{\sqrt{V}}
ight)^3 rac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}}ar{u}_i(ec{p}_1)v_j(ec{p}_2) \ &M\left(p^i,p^f
ight) = (2\pi)^4 \, grac{1}{\sqrt{2arepsilon_{ec{k}}}}ar{u}_i(ec{p}_1)v_j(ec{p}_2) \ \end{split}$$

代入

$$\lambda = \left(rac{1}{2\pi}
ight)^4 \left|M\left(p^i,p^f
ight)
ight|^2 \delta\left(p^f-p^i
ight) \prod_f rac{\mathrm{d}^3 ec{p}_f}{\left(2\pi
ight)^3}$$

得到极化态衰变宽度

$$\lambda = \left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{1}{2arepsilon_{ec{i}}} \left|ar{u}_i(ec{p}_1)v_j(ec{p}_2)
ight|^2 \delta(p_1+p_2-k) \mathrm{d}^3ec{p}_1 \mathrm{d}^3ec{p}_2$$

(2) 终态自旋求和

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left| ar{u}_i(ec{p}_1) v_j(ec{p}_2)
ight|^2 = \sum_{i,j} \operatorname{Tr} \left[u_i(ec{p}_1) ar{u}_i(ec{p}_1) v_j(ec{p}_2) ar{v}_j(ec{p}_2)
ight]
onumber \ = -rac{1}{E_1 E_2} \left[(p_1 p_2) + m^2
ight]$$

$$\lambda = -\left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{m^2 + (p_1p_2)}{2arepsilon_{ec k} E_1 E_2} \delta(p_1 + p_2 - k) \mathrm{d}^3ec p_1 \mathrm{d}^3ec p_2$$

(3) 对终态动量积分

取初态为质心系

$$ec{k}=0, \quad arepsilon_{ec{k}}=M \ \delta(p_1+p_2-k)=\delta(ec{p}_1+ec{p}_2)\delta(E_1+E_2-M)$$

对 \vec{p}_1 积分,考虑到 $\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$ 函数,只需要把被积函数中除 $\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$ 函数外的项中 \vec{p}_1 全替换成 $-\vec{p}_2$ 即可:

$$egin{aligned} ec{p}_1
ightarrow -ec{p}_2, \quad E_1 &= \sqrt{ec{p}_1^2 + m^2}
ightarrow \sqrt{ec{p}_2^2 + m^2} = E_2 \equiv E, \quad (p_1p_2) = ec{p}_1 \cdot ec{p}_2 - E_1 E_2
ightarrow -ec{p}_2^2 - E^2 = m^2 - 2E^2 \ \lambda &= -\left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{m^2 + (p_1p_2)}{2arepsilon_{ec{k}} E_1 E_2} \delta(p_1 + p_2 - k) \mathrm{d}^3 ec{p}_1 \mathrm{d}^3 ec{p}_2 \ &= -\left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{m^2 - E^2}{M E^2} \delta(2E - M) \mathrm{d}^3 ec{p}_2 \end{aligned}$$

再考虑对 \vec{p}_2 的积分,利用球坐标

$$E^2 = |ec{p}_2|^2 + m^2 \quad 2E \mathrm{d}E = 2 \, |ec{p}_2| \, \mathrm{d} \, |ec{p}_2| \, , \quad |ec{p}_2|^2 \, \mathrm{d} \, |ec{p}_2| = |ec{p}_2| \, E \mathrm{d}E = \sqrt{E^2 - m^2} E \mathrm{d}E$$
 $\mathrm{d}^3 ec{p}_2 = |ec{p}_2|^2 \, \mathrm{d} \, |ec{p}_2| \, \mathrm{d}\Omega = \sqrt{E^2 - m^2} E \mathrm{d}E \mathrm{d}\Omega$ $\lambda = -\left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{m^2 - E^2}{ME^2} \delta(2E - M) \mathrm{d}^3 ec{p}_2$ $= -\left(rac{g}{2\pi}
ight)^2 \int rac{m^2 - E^2}{ME^2} \cdot rac{1}{2} \delta(E - M/2) \sqrt{E^2 - m^2} E \mathrm{d}E$ $= rac{g^2}{8\pi M^2} \left(M^2 - 4m^2
ight)^{3/2}$

$$au = rac{8\pi M^2}{g^2} \left(M^2 - 4m^2
ight)^{-3/2}$$

光子和电子的散射 (Compton 效应)

设动量为 $h\nu_0/c$ 的光子与质量为 m 的静止于 O 点质量为 m 的电子相撞,其结果:电子以速度 v 向 φ 角方向运动,光子以动量 $h\nu/c$ 向 θ 方向偏转。

Compton 效应的 $M_{i-f}^{(2)}$ 矩阵元素

反应式:

$$e^- + \gamma
ightarrow e^- + \gamma$$

最低阶费曼图有两张。

4.15 正负电子对湮灭为两个光子

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma'$$

4.16 高能电子对撞

$$e^- + e^+
ightarrow f + ilde{f}$$

其中 f, \tilde{f} 是正反费米子对。

夸克禁闭

单个夸克和胶子无法被孤立观测,只能被束缚在强子的复合态。实验中迄今未发现独立夸克态的存在。

渐进自由

按照 QCD, 当强子中夸克能量很高时, 夸克之间的强作用很小, 可以认为是自由的, 这种现象称为**渐进自由**。

4.17 μ 粒子衰变

$$\mu^-
ightarrow e^- +
u_\mu + \bar{
u}_e, \quad \mu^+
ightarrow e^+ +
u_e + \bar{
u}_\mu$$

按 Weinberg-Salam 理论,对 μ 粒子衰变有贡献的相互作用项是轻子-W 耦合项。

在低能近似下,四费米子直接相互作用,即 V-A 型相互作用与 W-S 理论在计算 μ 粒子衰变上没差别。