## 2-1

## 2-1-1

求广义 Lorentz 变换的逆变换。

## 分量形式

广义洛伦兹变换:

$$x_\mu' = A_{\mu
u} x_
u + b_\mu$$

两边同乘  $A_{\mu\rho}$ ,并利用正交关系  $A_{\mu\rho}A_{\mu\nu}=\delta_{\rho\nu}$ :

$$egin{aligned} A_{\mu
ho}x'_{\mu} &= A_{\mu
ho}A_{\mu
u}x_{
u} + A_{\mu
ho}b_{\mu} \ &= \delta_{
ho
u}x_{
u} + A_{\mu
ho}b_{\mu} \ &= x_{
ho} + A_{\mu
ho}b_{\mu} \end{aligned}$$

即有广义洛伦兹变换的逆变换:

$$x_
ho = A_{\mu
ho} x_\mu' - A_{\mu
ho} b_\mu$$

## 矩阵形式

广义洛伦兹变换矩阵形式:

$$X' = AX + b$$

设:

$$g(A,b)X = AX + b$$

则:

$$g\left(A^{-1},A^{-1}b\right)g(A,b)X=g\left(A^{-1},-A^{-1}b\right)\left(AX+b\right)=X+A^{-1}b-A^{-1}b=X$$

即:

$$g^{-1}(A,b) = g(A^{-1}, -A^{-1}b)$$

### 2-1-2

若  $A^{\mathrm{T}}A=I$ ,证明  $AA^{\mathrm{T}}=I$ ,从而  $A_{\mu\lambda}A_{
u\lambda}=\delta_{\mu
u}$ 

$$A^{\mathrm{T}}A = I \Longrightarrow A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$$

因此:

$$AA^{\mathrm{T}} = AA^{-1} = I$$

从而

$$I_{\mu
u} = \left(AA^{\mathrm{T}}
ight)_{\mu
u} = A_{\mu\lambda} \left(A^{\mathrm{T}}
ight)_{\lambda
u} = A_{\mu\lambda} A_{
u\lambda}$$

即:

$$A_{\mu\lambda}A_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu}$$

#### 2-1-3

说明在固有 Lorentz 变换下, $a_{\mu\nu}$  仅与两惯性系之间的相对速度有关。

狭义相对性原理给出,物理定律在所有惯性参考系中形式相同,惯性系之间的变换仅由它们的相对运动决定。而两个惯性系之间的相对运动由相对速度唯一确定,因此保持线元  $\mathrm{d}s^2$  不变的固有 Lorentz 变换下, $a_{\mu\nu}$  仅与两惯性系之间的相对速度有关。

# 2-1-4

什么是 Lorentz 张量?

若  $\phi_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$  在广义洛伦兹变换  $x'^{\mu}=A^{\mu}_{\nu}x^{\nu}+b^{\mu}$  下具有如下的变换规律:

$$\phi'_{\mu
u\cdots\lambda}(x')=A^\mu_lpha A^
u_eta\cdots A^\lambda_\gamma\phi_{lphaeta\cdot\gamma}(x)$$

则称  $\phi_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$  为 Lorentz 张量。

### 2-1-5

证明在广义坐标变换下, $V^{\mu}_{\mu}$  是标量, $V_{\mu\mu}$  不是。在广义 Lorentz 变换下, $V_{\mu\mu}$  是标量。

在广义坐标变换  $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$  下,

$$V_{
u}^{\prime\mu}=rac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^{lpha}}rac{\partial x^{eta}}{\partial x^{\prime
u}}V_{eta}^{lpha}$$

$$V_{\mu}^{\prime\mu}=rac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^{lpha}}rac{\partial x^{eta}}{\partial x^{\prime\mu}}V_{eta}^{lpha}=rac{\partial x^{eta}}{\partial x^{lpha}}V_{eta}^{lpha}=\delta_{lpha}^{eta}V_{eta}^{lpha}=V_{lpha}^{lpha}$$

即  $V^{\mu}_{\mu}$  是标量。

$$egin{align} V'_{\mu
u} &= rac{\partial x^{lpha}}{\partial x'^{\mu}} rac{\partial x^{eta}}{\partial x'^{
u}} V_{lphaeta} \ V'_{\mu\mu} &= rac{\partial x^{lpha}}{\partial x'^{\mu}} rac{\partial x^{eta}}{\partial x'^{\mu}} V_{lphaeta} 
eq V_{\mu\mu} 
onumber \end{aligned}$$

即  $V_{\mu\mu}$  不是标量。

在广义洛伦兹变换  $x^{\mu} 
ightarrow x'^{\mu} = A^{\mu}_{
u} x^{
u} + b^{\mu}$  下,

$$V'_{\mu\mu}=rac{\partial x^{lpha}}{\partial x'^{\mu}}rac{\partial x^{eta}}{\partial x'^{\mu}}V_{lphaeta}=A^{\mu}_{lpha}A^{\mu}_{eta}V_{lphaeta}=\delta_{lphaeta}V_{lphaeta}=V_{lphalpha}$$

即  $V_{\mu\mu}$  是标量。

### 2-1-6

证明在 au 变换下, $ilde{\phi}'(x') = - ilde{\phi}(x)$ .

赝标量:

$$ilde{\phi}=rac{1}{4!}arepsilon_{lphaeta\gamma\delta}\phi_{lphaeta\gamma\delta}$$

对于广义洛伦兹变换, 赝标量的变换规律为:

$$egin{aligned} ilde{\phi}'(x') &= rac{1}{4!} arepsilon_{lphaeta\gamma\delta} \phi'_{lphaeta\gamma\delta} \ &= rac{1}{4!} arepsilon_{lphaeta\gamma\delta} A_{lpha\mu} A_{eta
u} A_{\gamma\lambda} A_{\delta
ho} \phi_{\mu
u\lambda
ho} \ &= rac{1}{4!} arepsilon_{\mu
u\lambda
ho} \left| A \right| \phi_{\mu
u\lambda
ho} \ &= \left| A \right| ilde{\phi}(x) \end{aligned}$$

特别地,对于 $\tau$ 变换, $|\tau|=-1$ ,因此:

$$ilde{\phi}'(x') = | au|\, ilde{\phi}(x) = - ilde{\phi}(x)$$

# 2-1-7

证明方程  $A_{\mu}-\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\nu}=0$  是 Lorentz 协变的。

在 x' 系方程为:

$$A'_{\mu} - \partial'_{\mu} \partial'_{\nu} A'_{\nu} = 0$$

这里为了避免混乱,把广义洛伦兹变换矩阵记为  $\Lambda_{lphaeta}$ 

 $A_{\mu}$ ,  $\partial_{\mu}$  分别服从矢量变换规律:

$$A'_{\mu}=\Lambda_{\mulpha}A_{lpha},\quad \partial'_{\mu}=\Lambda_{\mueta}\partial_{eta}$$

x' 系中的方程可化为:

$$\Lambda_{\mulpha}A_lpha-\Lambda_{\mueta}\partial_eta\Lambda_{
u\gamma}\partial_\gamma\Lambda_{
u
ho}A_
ho=0$$

即:

$$egin{aligned} 0 &= \Lambda_{\mu lpha} A_{lpha} - \Lambda_{\mu eta} \partial_{eta} \Lambda_{
u \gamma} \partial_{\gamma} \Lambda_{
u 
ho} A_{
ho} \ &= \Lambda_{\mu lpha} A_{lpha} - \Lambda_{\mu eta} \delta_{\gamma 
ho} \partial_{eta} \partial_{\gamma} A_{
ho} \ &= \Lambda_{\mu lpha} A_{lpha} - \Lambda_{\mu eta} \partial_{eta} \partial_{
ho} A_{
ho} \end{aligned}$$

方程左右两边同乘  $\Lambda_{\mu\lambda}$  得:

$$egin{aligned} 0 &= \Lambda_{\mu\lambda} \Lambda_{\mu\alpha} A_{lpha} - \Lambda_{\mu\lambda} \Lambda_{\mueta} \partial_{eta} \partial_{
ho} A_{
ho} \ &= \delta_{\lambdalpha} A_{lpha} - \delta_{\lambdaeta} \partial_{eta} \partial_{
ho} A_{
ho} \ &= A_{\lambda} - \partial_{\lambda} \partial_{
ho} A_{
ho} \end{aligned}$$

可见,在 Lorentz 变换下,方程

$$A'_{\mu} - \partial'_{\mu} \partial'_{\nu} A'_{\nu} = 0$$

等价于方程

$$A_{\lambda} - \partial_{\lambda} \partial_{\rho} A_{\rho} = 0$$

即方程  $A_{\mu}-\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{
u}=0$  是 Lorentz 协变的。

# 2-1-8

讨论 K-G 方程中负几率困难。

自然单位制下 K-G 方程为:

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi(x) = 0$$

复共轭为:

$$\left(\Box - m_0^2\right)\phi^*(x) = 0$$

第一条方程乘  $\phi^*(x)$  减去第二条方程乘  $\phi(x)$  得:

$$\phi^*(x)\Box\phi(x) - \phi(x)\Box\phi^*(x) = 0$$

即:

$$\phi^*(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi^*(x) = 0$$

注意到:

$$\phi^*(x)\partial_\mu\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\left[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x)\right] - \left[\partial_\mu\phi^*(x)\right]\left[\partial_\mu\phi(x)\right]$$

$$\phi(x)\partial_{\mu}\partial_{\mu}\phi^{*}(x)=\partial_{\mu}\left[\phi(x)\partial_{\mu}\phi^{*}(x)
ight]-\left[\partial_{\mu}\phi(x)
ight]\left[\partial_{\mu}\phi^{*}(x)
ight]$$

则方程化为:

$$\partial_{\mu} \left[ \phi^*(x) \partial_{\mu} \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu} \phi^*(x) \right] = 0$$

定义四维流密度为:

$$j_{\mu}=\left(ec{j},\mathrm{i}
ho
ight)=-rac{\mathrm{i}}{2m}\left[\phi^{st}(x)\partial_{\mu}\phi(x)-\phi(x)\partial_{\mu}\phi^{st}(x)
ight]$$

则连续性方程为:

$$\partial_{\mu}j_{\mu}=0$$

 $ec{j}$  和 ho 分别为:

$$egin{aligned} ec{j} &= -rac{\mathrm{i}}{2m} \left[\phi^*(x) 
abla \phi(x) - \phi(x) 
abla \phi^*(x)
ight] \ 
ho &= rac{\mathrm{i}}{2m} \left[\phi^*(x) \partial_t \phi(x) - \phi(x) \partial_t \phi^*(x)
ight] \end{aligned}$$

连续性方程可用  $\vec{j}, \rho$  表达为:

$$rac{\partial 
ho}{\partial t} + 
abla \cdot ec{j} = 0$$

考虑 K-G 方程的平面波解,设

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et - ec{p} \cdot ec{x})}$$

代入 K-G 方程可得:

$$E=\pm\sqrt{ec p^2+m_0^2}$$

此时  $\rho$  为:

$$ho = rac{\mathrm{i}}{2m} \left[ \phi^*(x) \partial_t \phi(x) - \phi(x) \partial_t \phi^*(x) 
ight] = -rac{E}{m_0}$$

由于  $E=\pm\sqrt{ec p^2+m_0^2}$  可正可负,因此 ho 可取负值。

## 2-1-9

说明 K-G 方程中负几率密度  $ho = -\mathrm{i} j_4(x)$  为实数。

2-1-8 给出:

$$ho = rac{\mathrm{i}}{2m} \left[ \phi^*(x) \partial_t \phi(x) - \phi(x) \partial_t \phi^*(x) 
ight]$$

考虑 K-G 方程的平面波解,则

$$ho = rac{\mathrm{i}}{2m} \left[ \phi^*(x) \partial_t \phi(x) - \phi(x) \partial_t \phi^*(x) 
ight] = -rac{E}{m_0}$$

由于  $E, m_0$  都是实数,则  $\rho$  也是实数。