▼ 第1章 电磁现象的普遍规律

- 库仑定律
- 电场
- ▼ 高斯定理
 - 高斯定理积分形式
 - 高斯定理微分形式
- ▼ 静电场的旋度
 - 积分形式
 - 微分形式
- ▼ 电荷守恒定律
 - 积分形式
 - 微分形式
- 磁感应强度
- 毕奥-萨伐尔定律
- 安培环路定理
- 磁场的散度
- 电极化强度
- ▼ 电介质内部束缚电荷体密度
 - 积分形式
 - 微分形式
- 两电介质界面束缚电荷面密度
- 电位移矢量和介质中的高斯定理
- 各向同性线性介质中电位移矢量和电场的关系
- 磁化强度
- ▼ 磁化电流密度
 - 积分形式
 - 微分形式
- 磁场强度
- 磁感应强度和磁场强度的关系
- ▼ 介质中的麦克斯韦方程组
 - 微分形式
 - 积分形式
- 电磁场边值关系
- ▼ 场和电荷系统的能量守恒定律
 - 能量密度和能流密度
 - 能量守恒定律积分形式
 - 能量守恒定律微分形式
 - 全空间能量守恒定律
- ▼ 电磁场能量密度和能流密度表达式
 - 能流密度 (坡印廷矢量)
 - 能量密度变化率
 - 介质内 (线性介质) 电磁场能量密度

▼ 第1章例题

- 例1
- 例2
- ▼ 第2章 静电场
 - 电势的引入
 - 电势满足的方程
 - 电势边值关系
 - 静电场的能量
 - 唯一性定理
 - 分离变量法
 - 镜像法
 - 电多极矩
- ▼ 第2章例题

- 几种类型的边界条件
- 例1
- 例2

▼ 第3章 静磁场

- 磁矢势的引入
- 库仑规范
- 库仑规范下矢势微分方程
- 矢势的形式解
- 矢势边值关系
- 静磁场的能量
- ▼ 磁标势
 - 能够引入磁标势的条件
 - 磁标势
 - 假想磁荷密度
 - 静电场和静磁场的对比
 - 磁标势解题SOP
 - 拉普拉斯方程的解
 - 磁标势边值关系

▼ 第3章例题

- 例1
- 例2

▼ 第4章 电磁波的传播

- 波动方程
- ▼ 平面电磁波
 - 时谐电磁波
 - ▼ 平面电磁波
 - 利用两个结论快速推导平面电磁波性质

▼ 波导管

- ▼ 矩形波导中的电磁波
 - 截止频率
 - TE₁₀ 波的电磁场和管壁电流
- 第4章例题
- 例1
- ▼ 第5章 电磁波的辐射
 - 电磁场的矢势和标势
 - ▼ 规范变换和规范不变性
 - 库仑规范
 - 洛伦兹规范
 - 达朗贝尔方程
 - 推迟势
 - 计算辐射场的一般公式
 - 矢势的展开式
 - ▼ 电偶极辐射
 - 辐射能流 角分布 辐射功率
 - 磁偶极辐射

▼ 第5章例题

- 例1
- 例2
- 例3
- 例4
- ▼ 第6章 狭义相对论
 - 狭义相对论基本原理
 - 间隔不变性
 - ▼ 洛伦兹变换
 - 运动尺度的缩短
 - 洛伦兹变换四维形式

- 四维协变量
- ▼ 电动力学的相对论不变性
 - ▼ 四维电流密度矢量
 - 四维势矢量
 - 电磁场张量

第1章 麦克斯韦方程组 边界条件

第2章 镜像法、分离变量法

第3章 镜像法、分离变量法

第4章 电磁波传播、平面电磁波、驻波、波导管

第5章 偶极辐射、计算

第6章 洛伦兹变换、运动学、四维形式

第1章 电磁现象的普遍规律

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \vec{F} 为:

$$ec{F}=rac{QQ'}{4\piarepsilon_0 r^3}ec{r}$$

其中 \vec{r} 是 Q 到 Q' 的矢径, ε_0 是真空电容率 (真空介电常量)

电场

电场,记为 \vec{E} ,定义为单位检验电荷在场中所受的力:

$$ec{E}\equivrac{ec{F}}{Q'}$$

其中, \vec{F} 是检验电荷 Q' 在电场中所受的力。

高斯定理

高斯定理积分形式

$$\oint\limits_{S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

其中,Q 是闭合曲面 S 内的总电荷(包括自由电荷和极化电荷)

高斯定理微分形式

$$abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0}$$

其中, ρ 是总电荷密度 (包括自由电荷和束缚电荷)。

静电场的旋度

积分形式

$$\oint\limits_{L}ec{E}\cdot\mathrm{d}ec{l}=0$$

微分形式

$$abla imes ec{E} = ec{0}$$

上式可以表述为:静电场是无旋的。

电荷守恒定律

积分形式

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V}
ho\mathrm{d}V=-\oint\limits_{\partial V^{+}}ec{J}\cdot\mathrm{d}ec{S}$$

微分形式

$$abla \cdot \vec{J} + rac{\partial
ho}{\partial t} = 0$$

特别地,在**恒定电流**的情况下,一切物理量不随时间改变,于是 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$,结合电流连续性方程得到:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

上式表示**恒定电流的连续性**。

磁感应强度

实验指出,一个电流元 $Id\vec{l}$ 在磁场中所受的力 $d\vec{F}$ 可以表示为:

$$\mathrm{d} ec{F} = I \mathrm{d} ec{l} imes ec{B}$$

其中, \vec{B} 称为磁感应强度。

毕奥-萨伐尔定律

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出:设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 \vec{x}' 处的电流密度, \vec{r} 为源点 \vec{x}' 到 场点 \vec{x} 的矢径,则场点 \vec{x} 的磁感应强度为:

$$ec{B}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}') imes ec{r}}{r^3} \mathrm{d}V'$$

特别地,若电流集中于细导线上,用 $\mathrm{d}\vec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$ec{J}(ec{x}')dV' = ec{J}(ec{x}')dS_ndl$$

= $J(ec{x}')dS_ndec{l}$

则:

$$\begin{split} \vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V'] \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{J(\vec{x}') \mathrm{d}S_n (\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r})}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \int\limits_S J(\vec{x}') S_n \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} \frac{I \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \end{split}$$

$$egin{aligned} ec{B}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L^+} rac{I \mathrm{d} ec{l} imes ec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

安培环路定理

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

其中, ∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则。

磁场的散度

$$\oint\limits_{S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

 \vec{B} 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

电极化强度

电极化强度,记为 \vec{P} ,用于描述宏观电偶极矩分布,定义为:

$$ec{P} \equiv \lim_{\Delta V
ightarrow 0^+} rac{\sum\limits_i ec{p}_i}{\Delta V}$$

其中, \vec{p}_i 表示 ΔV 内 第 i 个分子的电偶极矩,求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

电介质内部束缚电荷体密度

积分形式

用 $\rho_{\rm P}$ 表示束缚电荷密度,有:

$$\int\limits_V
ho_P \mathrm{d}V = -\int\limits_{\partial V} ec{P} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

微分形式

$$ho_{
m P} = -
abla \cdot ec{P}$$

两电介质界面束缚电荷面密度

对于两电介质的分界面,可以认为束缚电荷分布在交界面上,可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷,用 $\sigma_{\rm P}$ 表示束缚电荷面密度,用 $\vec{n}_{1 o 2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量。

$$\sigma_{
m P} = ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{P}_1 - ec{P}_2)$$

电位移矢量和介质中的高斯定理

将电荷密度分为自由电荷密度 $ho_{
m P}$,和束缚电荷密度 $ho_{
m P}$,介质内部:

$$abla \cdot \vec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0} \Longrightarrow arepsilon_0
abla \cdot \vec{E} =
ho_{
m f} +
ho_{
m P}$$

其中, $ho=
ho_{
m f}+
ho_{
m P}$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_{\rm P} = -\nabla \cdot \vec{P}$ 消去 $\rho_{\rm P}$, 得:

$$abla \cdot (arepsilon_0 ec{E} + ec{P}) =
ho_{
m f}$$

引入电位移矢量 \vec{D} ,定义为:

$$ec{D} \equiv arepsilon_0 ec{E} + ec{P}$$

则:

$$abla \cdot \vec{D} =
ho_{
m f}$$

这就是介质中的高斯定理(微分形式), 其积分形式为:

$$\oint \int _{\partial V} ec{D} \cdot \mathrm{d} ec{S} = \iiint _{V}
ho_{\mathrm{f}} \mathrm{d} V$$

各向同性线性介质中电位移矢量和电场的关系

对于一般各向同性线性介质,极化强度 \vec{P} 和 \vec{E} 之间有简单的线性关系:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中, χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质:

$$egin{aligned} ec{D} &\equiv arepsilon_0 ec{E} + ec{P} \ &= arepsilon_0 ec{E} + \chi_e arepsilon_0 ec{E} \ &= (1 + \chi_e) arepsilon_0 ec{E} \end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$, 介质的电容率 $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$, 上式可写为:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

磁化强度

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈,线圈面积矢量记为 \vec{a} ,分子电流的磁矩 \vec{m} 为:

$$\vec{m} = i\vec{a}$$

磁化强度,记为 \vec{M} , 定义为:

$$ec{M} \equiv \lim_{\Delta V o 0} rac{\sum\limits_{i} ec{m}_{i}}{\Delta V}$$

磁化电流密度

积分形式

用 $ec{J}_{
m M}$ 表示磁化电流密度,有:

$$\int\limits_{S}ec{J}_{
m M}\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_{\partial S}ec{M}\cdot\mathrm{d}ec{l}$$

微分形式

$$ec{J}_{ ext{M}} =
abla imes ec{M}$$

磁场强度

磁场强度,记为 \vec{H} , 定义为:

$$ec{H}\equivrac{ec{B}}{\mu_0}-ec{M}$$

磁感应强度和磁场强度的关系

对于各向同性非铁磁物质,

$$ec{M}=\chi_{
m M}ec{H}$$

 $\chi_{\rm M}$ 称为磁化率

$$ec{B} = \mu_0 (ec{H} + ec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_{
m M}) ec{H} = \mu_0 \mu_r ec{H} = \mu ec{H}$$

其中, $\mu_r \equiv 1 + \chi_{\mathrm{M}}$ 称为相对磁导率, $\mu \equiv \mu_r \mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

微分形式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

其中, \vec{J} 是自由电流密度, ho 是自由电荷密度。

积分形式

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{S} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{cases}$$

其中, \vec{J} 是自由电流密度, ρ 是自由电荷密度。

麦克斯韦方程组积分形式也可写为:

$$egin{cases} \oint\limits_{\partial S} ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l} &= -rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} \ \oint\limits_{\partial S} ec{H} \cdot \mathrm{d}ec{l} &= I_{\mathrm{f}} + rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} ec{D} \cdot \mathrm{d}ec{S} \ \oint\limits_{\partial V} ec{D} \cdot \mathrm{d}ec{S} &= Q_{\mathrm{f}} \ \oint\limits_{\partial V} ec{B} \cdot \mathrm{d}ec{S} &= 0 \ \end{pmatrix}$$

其中, I_{f} 为通过曲面 S 的总自由电流, Q_{f} 是闭合曲面 ∂V 内的总自由电荷。

电磁场边值关系

将麦克斯韦方程组积分形式

$$\begin{cases} \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{f}} \\ \oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \end{cases}$$

用在两介质界面上,可以得到:

$$\left\{ egin{aligned} ec{n}_{1
ightarrow 2} imes (ec{E}_2 - ec{E}_1) &= ec{0} \ ec{n}_{1
ightarrow 2} imes (ec{H}_2 - ec{H}_1) &= ec{lpha}_{
m f} \ ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{D}_2 - ec{D}_1) &= \sigma_{
m f} \ ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{B}_2 - ec{B}_1) &= 0 \end{aligned}
ight.$$

其中, $ec{n}_{1 o 2}$ 是从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量; $ec{\alpha}_{
m f}$ 是界面自由电流线密度; $\sigma_{
m f}$ 是界面自由电荷面密度。

$$\left\{ egin{aligned} Q_{
m P} &= - \oint\limits_{\partial V} ec{P} \cdot \mathrm{d}ec{S} \ & \ I_{
m M} &= \oint\limits_{\partial S} ec{M} \cdot \mathrm{d}ec{l} \end{aligned}
ight.$$

用在两介质界面上,可得:

$$egin{cases} \sigma_{ ext{P}} = ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{P}_1 - ec{P}_2) \ ec{lpha}_{ ext{M}} = ec{n}_{1
ightarrow 2} imes (ec{M}_1 - ec{M}_2) \end{cases}$$

场和电荷系统的能量守恒定律

能量密度和能流密度

场的**能量密度**,记为w,定义为单位体积内场的能量,是空间位置 \vec{x} 和时间t的函数。

场的**能流密度**,记为 \vec{S} ,其方向定义为能量传输方向,其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 \vec{f} 表示场对电荷作用力密度, \vec{v} 表示电荷运动速度。

能量守恒定律积分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V w \mathrm{d}V = - \int\limits_{\partial V} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} - \int\limits_V \vec{f} \cdot \vec{v} \mathrm{d}V$$

能量守恒定律微分形式

$$rac{\partial w}{\partial t} = -
abla \cdot ec{S} - ec{f} \cdot ec{v}$$

全空间能量守恒定律

V包括整个空间

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{\infty} w \, \mathrm{d}V = -\int_{-\infty}^{\infty} \vec{f} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}V$$

电磁场能量密度和能流密度表达式

能流密度 (坡印廷矢量)

$$ec{S} = ec{E} imes ec{H}$$

能量密度变化率

$$rac{\partial w}{\partial t} = ec{E} \cdot rac{\partial ec{D}}{\partial t} + ec{H} \cdot rac{\partial ec{B}}{\partial t}$$

介质内 (线性介质) 电磁场能量密度

$$w = rac{1}{2}(ec{E}\cdotec{D} + ec{H}\cdotec{B})$$

第1章例题

例1

一个半径为 R 的无限长圆柱内通有恒定电流,电流密度为 j_0 ,求空间内的磁感应强度与磁能量密度。

解

安培环路定理:

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

当r > R

$$2\pi rB=\mu_0\pi R^2j_0\Longrightarrow B=rac{\mu_0R^2j_0}{2r}$$

当r < R

$$2\pi rB=\mu_0\pi r^2j_0\Longrightarrow B=rac{\mu_0j_0r}{2}$$

于是:

$$ec{B} = egin{cases} rac{\mu_0 j_0 r}{2} ec{e}_{arphi} &, \; r < R \ rac{\mu_0 j_0 R^2}{2 r} ec{e}_{arphi} &, \; r > R \end{cases}$$

磁场能量密度:

$$w = rac{1}{2} ec{B} \cdot ec{H} = rac{1}{2} ec{B} \cdot rac{ec{B}}{\mu_0} = rac{B^2}{2\mu_0} = egin{dcases} rac{\mu_0 k_0^2 r^2}{8} &, r < R \ rac{\mu_0 j_0^2 R^4}{8 r^2} &, r > R \end{cases}$$

例2

无穷大平行板电容器内有两层介质,极板上电荷面密度为 $\pm \sigma_f$,求电场和束缚电荷分布。

解:

设下板电荷面密度为 σ_{f} , 下面的电介质记为 1 , 上面的电介质记为 2

$$D_1=\sigma_{
m f},~~D_2=\sigma_{
m f}$$

由线性介质中,电场和电位移矢量的关系 $ec{D}=arepsilonec{E}$,得:

$$E_1 = \frac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_1}, \ E_2 = \frac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_2}$$

由电极化强度和电场的关系 $ec{P}=(arepsilon-arepsilon_0)ec{E}$, 得:

$$P_1 = (arepsilon_1 - arepsilon_0) E_1 = (arepsilon_1 - arepsilon_0) rac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_1}$$

$$P_2 = (arepsilon_2 - arepsilon_0) E_2 = (arepsilon_2 - arepsilon_0) rac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_2}$$

由界面处束缚电荷面密度公式 $\sigma_{
m P} = ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{P}_1 - ec{P}_2)$,

两电介质分界处:

$$\sigma_{
m P} = P_1 - P_2 = (rac{arepsilon_0}{arepsilon_2} - rac{arepsilon_0}{arepsilon_1}) \sigma_{
m f}$$

介质 1 与下板分界处:

$$\sigma_{
m P}' = -(arepsilon_1 - arepsilon_0) rac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_1}$$

介质 2 与上板分界处:

$$\sigma_{
m P}'' = (arepsilon_2 - arepsilon_0) rac{\sigma_{
m f}}{arepsilon_2}$$

第2章 静电场

电势的引入

静止情况下, 电场与磁场无关:

$$abla imes ec{E} = ec{0}$$

$$abla \cdot ec{D} =
ho_{
m f}$$

因为静电场无旋,于是可以引入一个标势 φ 来描述静电场:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

选取无穷远点作为参考点,规定参考点的电势为零,即 $\varphi(\infty)=0$,则:

$$arphi(P) = \int_P^\infty ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{l}$$

电荷连续分布:

$$arphi(ec{x}) = \int\limits_{V} rac{
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'}{4\pi arepsilon_0 r}$$

电势满足的方程

在均匀各向同性线性介质中, $ec{D}=arepsilonec{E}$,

其中, ρ 是自由电荷密度, ε 是电介质的介电常数。

电势边值关系

电场边值关系:

$$ec{n}_{1
ightarrow2} imes(ec{E}_2-ec{E}_1)=ec{0}$$

$$ec{n}_{1 o 2}\cdot(ec{D}_2-ec{D}_1)=\sigma_{
m f}$$

电场边值关系可化为电势边值关系:

$$oxed{\left. arphi_1
ight|_{\partial\Omega} = \left. arphi_2
ight|_{\partial\Omega}}$$

$$oxed{arepsilon_1 rac{\partial arphi_1}{\partial n_{1
ightarrow 2}}_{\partial \Omega} - arepsilon_2 rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1
ightarrow 2}}_{oxed}}_{oxedsymbol{\partial} \Omega} = \sigma_{
m f}}$$

其中, $\partial\Omega$ 是两电介质界面; $\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \to 2}} \right|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数, $\sigma_{\rm f}$ 是界面上自由电荷面密度。

静电场的能量

第1章给出,在线性介质中静电场能量为:

$$W = rac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ec{E}\cdotec{D}\mathrm{d}V$$

其中, $w=rac{1}{2}ec{E}\cdotec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下, W 可由电势和电荷分布给出:

$$W=rac{1}{2}\int\limits_{V}
ho_{\mathrm{f}}arphi\mathrm{d}V$$

注意,不能把 $\frac{1}{2}
ho \varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质, 电容率为 ε , 则:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon} \int dV \int dV' \frac{\rho_{\rm f}(\vec{x})\rho_{\rm f}(\vec{x'})}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $ho_{\mathrm{f}}(\vec{x})$,在 V 的边界 ∂V 给定:

(1) 电势
$$\varphi$$
 $_{\partial V}$

或

(2) 电势的外法线法向
$$\left. rac{\partial arphi}{\partial n} \right|_{\partial V}$$

则 V 内电场唯一确定。

分离变量法

拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 在球坐标中的通解为:

$$\varphi(R,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}} \right) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta) \cos m\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(c_{nm} R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}} \right) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta) \sin m\phi$$

若问题中具有对称轴,取此轴为极轴(z轴),则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ ,此情形下通解为:

$$arphi = \sum_{n=0}^{\infty} igg(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

其中, P_n 为勒让德函数, a_n,b_n 是待定系数,由边界条件确定。

镜像法

例 2.9:接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q,求空间中的电场。

解:

设无限大接地平面导体板的位置为 z=0,点电荷 Q 处在 z>0 的区域。

要求解 z>0 空间的电场,则镜像点电荷只能放在 z<0 空间,否则会改变泊松方程的源,唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 (0,0,a), 其中 a>0

此问题的边界条件为:

$$\left. \varphi \right|_{z=0} = 0$$

也就是说 z=0 平面是等相面,z=0 处电场强度垂直于 z=0 平面。

考虑在 (0,0,-a) 处再放置一个带电量 Q'=-Q 的点电荷,则两个对称的点电荷在 z=0 处产生的场强处处于 z=0 平面垂直。于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是:

$$arphi(x,y,z) = rac{1}{4\piarepsilon_0}igg[rac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - rac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}igg]$$

电多极矩

$$arphi(ec{x}) = \int\limits_{V} rac{
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'}{4\pi arepsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l ,这种情况下,可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式,由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点,用 R 表示坐标原点到场点的距离,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
 $r = |ec{x} - ec{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ $arphi(ec{x}) = rac{1}{4\piarepsilon_0} \int\limits_V
ho(ec{x}') igg[rac{1}{R} - ec{x}' \cdot
abla rac{1}{R} + rac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' rac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} rac{1}{R} + \cdots igg] \mathrm{d}V'$

令:

$$Q = \int_{V} \rho(\vec{x}') dV'$$
$$\vec{p} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

p 称为体系的电偶极矩

$$\mathscr{D}_{ij} = \int\limits_{V} 3x_i' x_j'
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'$$

张量 \mathcal{D}_{ij} 称为体系的电四极矩。

电四极矩可用并矢形式写为:

$$ec{\hat{\mathscr{D}}} = \int\limits_{V} 3ec{x}'ec{x}'
ho(ec{x}')\mathrm{d}V'$$

则电势可写为:

$$egin{aligned} arphi(ec{x}) &= rac{1}{4\piarepsilon_0}igg(rac{Q}{R} - ec{p}\cdot
ablarac{1}{R} + rac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}rac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}rac{1}{R} + \cdotsigg) \ &= rac{1}{4\piarepsilon_0}igg(rac{Q}{R} - ec{p}\cdot
ablarac{1}{R} + rac{1}{6}ec{ec{eta}}:
abla
ablarac{1}{R} + \cdotsigg) \end{aligned}$$

_

$$arphi^{(0)} = rac{Q}{4\piarepsilon_0 R}, \;\; Q = \int\limits_V
ho(ec{x}') \mathrm{d}V'$$

零级近似 $arphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷,其激发的电势就是零级近似。

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, \ \vec{p} = \int\limits_V \vec{x}' \rho(\vec{x}') \mathrm{d}V'$$

一级近似是电偶极矩 \vec{p} 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6} \vec{\hat{\mathcal{D}}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathscr{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial x_j} \frac{1}{R}, \quad \vec{\hat{\mathcal{D}}} = \int_V 3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

电四极矩张量 \mathscr{D}_{ij} 是对称张量,它有 6 个分量 $\mathscr{D}_{11}, \mathscr{D}_{22}, \mathscr{D}_{33}, \mathscr{D}_{12} = \mathscr{D}_{21}, \mathscr{D}_{23} = \mathscr{D}_{32}, \mathscr{D}_{31} = \mathscr{D}_{13}$,只有 5 个独立分量。

第2章例题

几种类型的边界条件

(1)

$$egin{align*} arphi_1igg|_{\partial\Omega} &= arphi_2igg|_{\partial\Omega} \ &arepsilon_1rac{\partial arphi_1}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} - arepsilon_2rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} &= \sigma_{
m f} \ \end{aligned}$$

(2)

给出导体上的电势,导体面上的边界条件为:

$$\varphi = \varphi_0$$
(常量)

(3)

给出导体所带总电荷 Q,在导体面上的边界条件为(导体记为 1,导体外电介质记为 2):

$$arphi=$$
常量(待定) $-\oint\limits_{\partial V}arepsilon_2rac{\partialarphi_2}{\partial n_{1 o 2}}\mathrm{d}S=Q$

可以用

$$\sigma_{
m f} = -arepsilon_2 rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1
ightarrow 2}}$$

求出导体面上的自由电荷面密度 $\sigma_{\rm f}$

例1

真空中有一个半径为 R_0 的导体球,在距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q,已知导体球电势为 0,求: (1) 空间内的电势 (2) 点电荷 Q 受到的静电力。

解:

(1)

由相似:

$$\frac{b}{R_0} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

可得:

$$b = \frac{R_0^2}{a}, \ \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

导体球边界电势为零,即:

$$\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = 0$$
$$\frac{Q'}{r_2} + \frac{Q}{r_1} = 0$$

得到:

$$Q' = -Q\frac{r_2}{r_1} = -\frac{R_0}{a}Q$$

余弦定理:

$$egin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2+a^2-2ar\cos heta} \ \\ r_2 &= \sqrt{r^2+b^2-2br\cos heta} = \sqrt{r^2+rac{R_0^4}{a^2}-2rac{R_0^2}{a}r\cos heta} \end{aligned}$$

空间内电势分为球外和球内两个区域的电势。

球外电势:

$$\begin{split} \varphi &= \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bigg[\frac{-\frac{R_0}{a}Q}{\sqrt{r^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2\frac{R_0^2}{a}r\cos\theta}} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \bigg] \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \bigg[\frac{-R_0}{\sqrt{a^2r^2 + R_0^4 - 2aR_0^2r\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \bigg], \ \ (r > R_0) \end{split}$$

其中, θ 是位矢 \vec{r} 与 x 轴的连线。

由于是导体球,于是球内电势为零。

(2)

点电荷 Q 受到的力等于与像电荷 Q' 给的力:

$$ec{F}=rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{QQ'}{(a-b)^2}ec{e}_x=rac{-Q^2R_0a}{4\piarepsilon_0(a^2-R^2)^2}ec{e}_x$$

例2

真空中有一个半径为 R_0 的导体球,导体球**不接地**且带电荷 Q_0 ,在距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q_0 ,求: (1) 空间内的电势 (2) 点电荷 Q 受到的静电力。

由例 1 可知,若在球内放置第一个像电荷 Q',其位置和大小如前,即

$$b = rac{R_0^2}{a}, \;\; Q' = -rac{R_0}{a}Q$$

则能让球面电势为零。

本题中要满足的条件为:

(1) 球面为等势面 (电势待定)

(2) 从球面出发的总电场强度通量为 Q_0/ε_0

若再往球心处放一个电荷为 Q_0-Q' 的像电荷,则能满足上面两个条件。

于是, 球外电势为:

$$\begin{split} \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bigg[\frac{Q_0 - Q'}{r} + \frac{Q'}{r_2} + \frac{Q}{r_1} \bigg] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bigg[\frac{Q_0 + \frac{R_0}{a}Q}{r} + \frac{-R_0Q}{\sqrt{a^2r^2 + R_0^4 - 2aR_0^2r\cos\theta}} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \bigg] \end{split}$$

(2)

电荷 Q 受到力等于 Q' 和球心处 Q_0-Q' 处的电荷对它的作用力:

$$\begin{split} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \bigg[\frac{Q(Q_0 - Q')}{a^2} + \frac{QQ'}{(a - b)^2} \bigg] \\ &= \frac{QQ_0}{a^2} - \frac{Q^2 R_0^3 (2a^2 - R_0^2)}{a^3 (a^2 - R_0^2)^2} \end{split}$$

第3章 静磁场

磁矢势的引入

恒定电流产生的磁场:

$$abla imes ec{H} = ec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

由矢量分析,从 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入一个矢量 \vec{A}

$$ec{B} =
abla imes ec{A}$$

 \vec{A} 称为磁场的矢势。

库仑规范

由矢势 \vec{A} 可以唯一确定 \vec{B} , 反过来则不行 , 这是因为 :

$$abla imes (ec{A} +
abla \psi) =
abla imes ec{A}$$

若 \vec{A} 满足 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$,则 $\vec{A}+\nabla\psi$ 也满足 $\vec{B}=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)$,因此由磁场 \vec{B} 无法唯一确定 \vec{A} 具有任意性,因此可以对它加上一定限制,如:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

称为库仑规范。

库仑规范下的矢势 \vec{A} 是无源有旋场。

库仑规范下矢势微分方程

线性均匀介质:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$egin{aligned}
abla imes ec{H} &= ec{J}_{\mathrm{f}} \ \\ &\Longrightarrow
abla imes (
abla imes ec{A}) = \mu ec{J}_{\mathrm{f}} \ \\
abla imes (
abla imes ec{A}) &=
abla (
abla imes ec{A}) -
abla^2 ec{A} \end{aligned}$$

结合库仑规范:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

得到库仑规范下矢势微分方程:

$$\Longrightarrow egin{aligned}
abla^2 ec{A} = -\mu ec{J}_{
m f} \ \\
abla \cdot ec{A} = 0) \end{aligned}$$

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为:

$$abla^2 A_i = -\mu J_{\mathrm{f}i}$$

矢势的形式解

电势(均匀线性介质中):

$$abla^2 arphi = -rac{
ho_{
m f}}{arepsilon} \Longrightarrow arphi = rac{1}{4\piarepsilon} \int\limits_V rac{
ho(ec{x}'){
m d}V'}{r}$$

上式可用格林函数推导。 $abla^2$ 算子的基本解为: $G_0(ec x, ec x') = -rac{1}{4\pi}rac{1}{|ec x - ec x'|}$

类似应有:

$$\begin{split} \nabla^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J}_{\rm f} \Longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\rm f}(\vec{x}')}{r} \mathrm{d}V' \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}_{\rm f}(\vec{x}') \mathrm{d}V}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}_{\rm f}(\vec{x}') \mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\rm f} \times \vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\rm f}(\vec{x}')}{r} \mathrm{d}V' \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_{\rm f} \times \vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V' \end{split}$$

$$ec{n}_{1
ightarrow2}\cdot\left(ec{B}_2-ec{B}_1
ight)=0 \ ec{n}_{1
ightarrow2} imes\left(ec{H}_2-ec{H}_1
ight)=ec{lpha}$$

对于非铁磁性均匀介质,

$$egin{aligned} ec{e}_n \cdot ig(
abla imes ec{A}_2 -
abla imes ec{A}_1 ig) &= 0 \ ec{e}_n imes ig(rac{1}{\mu_2}
abla imes ec{A}_2 - rac{1}{\mu_1}
abla imes ec{A}_1 ig) &= ec{lpha} \end{aligned}$$

在两介质分界面上(采用库仑规范)

$$ec{A}_2 = ec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

静磁场情况下,可以用矢势和电流表示总能量。

静磁场中,

$$W = rac{1}{2} \int ec{B} \cdot ec{H} \mathrm{d}V \ = rac{1}{2} \int_{V} ec{A} \cdot ec{J} \mathrm{d}V$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义,且不能把 $\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$ 看作能量密度。

磁标势

能够引入磁标势的条件

恒定电流, 且目标区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

磁标势

在 $\vec{J}=\vec{0}$ 的区域内:

$$abla imes \vec{H} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ_m , 使得:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

假想磁荷密度

$$ho_m = -\mu_0
abla \cdot ec{M}$$

静电场和静磁场的对比

$$egin{aligned}
abla imes ec{E} &= ec{0} \
abla \cdot ec{E} &= rac{
ho_{
m f} +
ho_{
m p}}{arepsilon_0} \
onumber
ho_{
m p} &= -
abla \cdot ec{P} \ ec{D} &\equiv arepsilon_0 ec{E} + ec{P} \ ec{E} &= -
abla arphi \end{aligned}$$

$$abla^2arphi=-rac{
ho_{
m f}+
ho_{
m p}}{arepsilon_0}$$

$$abla imes ec{H} = ec{0}$$

$$abla \cdot ec{H} = rac{
ho_{
m m}}{\mu_0}$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

$$ec{B} = \mu_0 (ec{H} + ec{M})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
,好介质

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$abla^2 arphi_m = -rac{
ho_m}{\mu_0}$$

磁标势解题SOP

(1)

$$ho_m = -\mu_0
abla \cdot ec{M}$$

通常这一步会发现全空间的 $ho_m=0$

(2)

$$oxed{
abla^2arphi_m=-rac{
ho_m}{\mu_0}}$$

若所求解区域 $\rho_m=0$,则磁标势满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi_m=0$,若体系具有极轴(z 轴对称性),则形式解可写为:

$$arphi_m = \sum_{n=0}^{\infty} igg(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

(3)

边界条件:

$$\left| arphi_{m1} \right|_{\partial\Omega} = arphi_{m2} \left|_{\partial\Omega} \right|_{\partial\Omega}$$

$$\left| rac{\partial arphi_{m1}}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega} - rac{\partial arphi_{m2}}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega} = rac{\sigma_m}{\mu_0} = ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{M}_1 - ec{M}_2)$$

$$\sigma_m = \mu_0 ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{M}_1 - ec{M}_2)$$

若是线性介质(注意,铁球不是线性介质,只能用上面的边值关系),则:

$$\left|\mu_1rac{\partialarphi_{m1}}{\partial n_{1
ightarrow2}}
ight|_{\partial\Omega}=\mu_2rac{\partialarphi_{m2}}{\partial n_{1
ightarrow2}}
ight|_{\partial\Omega}$$

再加上**自然边界条件**。

根据边界条件,确定 φ_m

(4)

求出磁场

$$ec{H} = -
abla arphi_m$$

拉普拉斯方程的解

拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 在球坐标中的通解为:

$$\varphi(R,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}} \right) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta) \cos m\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(c_{nm} R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}} \right) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta) \sin m\phi$$

若问题中具有对称轴,取此轴为极轴(z轴),则电势 φ 不依赖于方位角 φ ,此情形下通解为:

$$arphi = \sum_{n=0}^{\infty} igg(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

其中, P_n 为勒让德函数, a_n, b_n 是待定系数, 由边界条件确定。

磁标势边值关系

$$\leftert arphi_{m1}
ightert_{\partial\Omega}=\leftarphi_{m2}
ightert_{\partial\Omega}
ightert$$

$$oxed{rac{\partial arphi_{m1}}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} - rac{\partial arphi_{m2}}{\partial n_{1 o 2}}igg|_{\partial\Omega} = rac{\sigma_m}{\mu_0} = ec{n}_{1 o 2}\cdot (ec{M}_1 - ec{M}_2)}$$

若是线性介质(注意,铁球不是线性介质,只能用上面的边值关系),则:

$$\left\|\mu_1 rac{\partial arphi_{m1}}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega} = \mu_2 rac{\partial arphi_{m2}}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega}$$

$$\sigma_m = \mu_0 ec{n}_{1 o 2} \cdot (ec{M}_1 - ec{M}_2)$$

第3章例题

例1

求磁化强度为 \vec{M}_0 的均匀磁化**铁球**产生的磁场。

解:

注意,铁球不是线性介质

取 z 轴与 \vec{M}_0 同向,则问题有 z 轴对称性。

界面为球面

在球内部,即 $R < R_0$ 区域(记为区域 1),磁化强度 $\vec{M} = \vec{M}_0$,则磁荷密度为:

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0, \ R < R_0$$

区域 1 内无自由电流,于是磁标势 φ_1 满足方程:

$$abla^2arphi_1=-rac{
ho_m}{\mu_0}$$

即:

$$\nabla^2\varphi_1=0$$

由于问题有 z 轴对称性,则 φ_1 的形式解为:

$$arphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} igg(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

由于球心处磁标势有限,即 $\varphi_1|_{B=0}<\infty$,则:

$$arphi_1 = \sum_{n=0}^\infty a_n R^n \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

在球外部,即 $R>R_0$ 区域(记为区域 2),磁化强度 $\vec{M}=\vec{0}$,则磁荷密度为:

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0, \quad R > R_0$$

区域 2 内无自由电流,于是磁标势 φ_2 满足方程:

$$abla^2arphi_2=-rac{
ho_m}{\mu_0}$$

即:

$$abla^2 \varphi_2 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性,则 φ_2 的形式解为:

$$arphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} igg(a_n R^n + rac{b_n}{R^{n+1}} igg) \mathrm{P}_n(\cos heta)$$

由于无穷远处磁标势为零,即 $\varphi_2 \big|_{R=\infty} = 0$,则:

$$arphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} rac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos heta)$$

$$\left\{egin{aligned} arphi_1 &= \sum_{n=0}^\infty a_n R^n \mathrm{P}_n(\cos heta) \ arphi_2 &= \sum_{n=0}^\infty rac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos heta) \end{aligned}
ight.$$

第一条边值关系:

$$\left.arphi_1
ight|_{R=R_0}=arphi_2
ight|_{R=R_0}\Longrightarrow\sum_{n=0}^\infty a_nR_0^n\mathrm{P}_n(\cos heta)=\sum_{n=0}^\inftyrac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos heta)$$

于是得到:

$$a_n R_0^n = \frac{b_n}{R_0^{n+1}}$$

即:

$$oxed{b_n=a_nR_0^{2n+1}}$$

第二条边值关系:

$$\left. rac{\partial arphi_1}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega} - \left. rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{\partial \Omega} = ec{n}_{1
ightarrow 2} \cdot (ec{M}_1 - ec{M}_2),$$

计算方向导数在界面处的取值:

$$egin{aligned} \left. rac{\partial arphi_1}{\partial n_{1
ightarrow 2}}
ight|_{R=R_0} &= \left. rac{\partial arphi_1}{\partial R}
ight|_{R=R_0} \ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R^{n-1} \mathrm{P}_n(\cos heta)
ight|_{R=R_0} \ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} \mathrm{P}_n(\cos heta) \end{aligned}$$

$$egin{aligned} rac{\partial arphi_2}{\partial n_{1
ightarrow 2}}igg|_{R=R_0} &= rac{\partial arphi_2}{\partial R}igg|_{R=R_0} \ &= \sum_{n=0}^{\infty} rac{-(n+1)b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos heta)igg|_{R=R_0} \ &= \sum_{n=0}^{\infty} rac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos heta) \end{aligned}$$

代入边值关系第二条:

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nR_0^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}}P_n(\cos\theta)=M_0\cos\theta$$

即:

$$\sum_{n=0}^{\infty}igg(na_nR_0^{n-1}+rac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}}igg)\mathrm{P}(\cos heta)=M_0\cos heta$$

将第一条边值关系得到的结论 $b_n=a_nR_0^{2n+1}$ 代入上式,得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)a_n R_0^{n-1} \mathrm{P}_n(\cos heta) = M_0 \cos heta$$

对比等式两边 $\cos \theta$ 的各级系数,可得:

$$a_0 = 0$$
, $a_1 = \frac{1}{3}M_0$, $a_2 = a_3 = \dots = 0$

代回关系 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 得:

$$b_0 = 0, \ b_1 = \frac{1}{3}M_0R_0^3, \ b_2 = b_3 = \dots = 0$$

于是得到磁标势:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{3} M_0 R \cos \theta$$

$$= \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{3} M_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} \cos \theta$$

$$= \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3}$$

球内磁场:

$$ec{H}_1 = -
abla arphi_1 = -rac{1}{3}ec{M}_0, \;\; R < R_0$$
 $ec{B}_1 = \mu_0(ec{H}_1 + ec{M}_1) = \mu_0(-rac{1}{3}ec{M}_0 + ec{M}_0) = rac{2}{3}\mu_0ec{M}_0$

球外磁场:

$$ec{H}_{2} = -
abla arphi_{2} = -rac{R_{0}^{3}}{3}igg(rac{ec{M}_{0}}{R^{3}} - rac{3(ec{M}_{0}\cdotec{R})}{R^{4}}ec{e}_{R}igg)$$

例2

将一磁导率为 μ ,半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 \vec{H}_0 内,求总磁感应强度 \vec{B} 和诱导磁矩 \vec{m}

解:

这里的球体是线性介质

将 z 轴取为与 \vec{H}_0 同向,则体系具有 z 轴对称性。

由自然边界条件, 球内:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0 &, \quad R < R_0 \\ \mu_0 \vec{H}_0 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 R_0^3 \left[\frac{3(\vec{H}_0 \cdot \vec{R})R}{R^5} - \frac{\vec{H}_0}{R^3} \right] &, \quad R > R_0 \end{cases}$$

球体的诱导磁矩:

$$ec{m} = 4\pi rac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R_0^3 ec{H}_0$$

第4章 电磁波的传播

波动方程

一般情况:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质 $(
ho=0,ec{J}=ec{0})$:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

真空 ($ec{D}=arepsilon_0ec{E},ec{B}=\mu_0ec{H}$) :

$$egin{cases}
abla imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \
abla imes ec{B} = \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} \
abla \cdot ec{E} = 0 \
abla \cdot ec{B} = 0 \end{cases}$$

可以得到:

$$abla^2ec{E}-\mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec{E}}{\partial t^2}=ec{0}$$

$$abla^2ec{B}-\mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec{B}}{\partial t^2}=ec{0}$$

令:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$oxed{
abla^2ec{E}-rac{1}{c^2}rac{\partial^2ec{E}}{\partial t^2}=ec{0}}$$

$$\left|
abla^2 ec{B} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 ec{B}}{\partial t^2} = ec{0}
ight|$$

具有上面方程形式的方程称为波动方程。

平面电磁波

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡的波称为时谐电磁波。

时谐电磁波的复数表示:

$$ec{E}(ec{x},t) = ec{E}(ec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t} \ ec{B}(ec{x},t) = ec{B}(ec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

对线性均匀介质,有 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}, \vec{B}=\mu\vec{H}$,代入无源麦克斯韦方程组,得:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{x},t) = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

用 \vec{E} 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$,将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入上面方程组,得场量**空间部分**满足的方程:

$$\left\{egin{aligned}
abla imes ec{E} &= \mathrm{i}\omegaec{B} \
abla imes ec{B} &= -\mathrm{i}\omegaarepsilon\muec{E} \
abla \cdot ec{E} &= 0 \
abla \cdot ec{B} &= 0 \end{aligned}
ight.$$

对于时谐电磁波, $\dfrac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$

上面这组方程是**不独立**的,由第一式可以推出第四式,由第二式可以推出第三式(两边取散度,而任意矢量场旋度的散度为零)

对第一式两边取旋度,并利用公式 $abla imes (
abla imes \vec{E}) =
abla (
abla \cdot \vec{E}) -
abla^2 \vec{E} = abla^2 \vec{E}$,得:

$$oxed{
abla^2ec E+\omega^2arepsilon\muec E=ec 0}$$

令:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

则得到时谐电场空间部分满足的方程(称为亥姆霍兹方程):

$$oxed{
abla^2ec E+k^2ec E=ec 0,\ k=\omega\sqrt{arepsilon\mu}}$$

在一定频率 ω 下,均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为:

$$\begin{split} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= \vec{0}, \;\; k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{B} &= \frac{1}{\mathrm{i} \omega} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\mathrm{i}}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} \nabla \times \vec{E} \end{split}$$

或:

$$egin{aligned}
abla^2 ec{B} + k^2 ec{B} &= ec{0}, \;\; k = \omega \sqrt{arepsilon \mu} \
abla \cdot ec{B} &= 0 \
onumber \ ec{E} &= rac{
abla imes ec{B}}{-\mathrm{i}\omega arepsilon \mu} &= rac{\mathrm{i}}{k\sqrt{\mu arepsilon}}
abla imes ec{B} \end{aligned}$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

亥姆霍兹方程

$$abla^2 ec{E}(ec{x}) + k^2 ec{E}(ec{x}) = ec{0}$$

的平面波解为:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

 $abla \cdot \vec{E} = 0$ 要求 $\vec{E} \perp \vec{k}$,即 \vec{E} 可以在垂直于 \vec{k} 的任意方向上振荡。 \vec{E} 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 \vec{k} 垂直的任意两个相互正交的方向作为 \vec{E} 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

计算平面波电场旋度:

$$egin{aligned}
abla imes ec{E} &=
abla imes (ec{E}_0 e^{\mathrm{i}(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)}) \ &= [
abla \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)}] imes ec{E}_0 \ &= \mathrm{i} ec{k} imes ec{E} \end{aligned}$$

对于平面波, $abla\longleftrightarrow \mathrm{i}ec{k}$

对于时谐电磁波, $\dfrac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i} \omega$

$$oldsymbol{
abla} imes ec{E} = \mathrm{i}ec{k} imes ec{E}$$

于是可以得出磁场:

$$egin{aligned} ec{B} &= -rac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\muarepsilon}
abla imes ec{E} \ &= -rac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\muarepsilon}(\mathrm{i}ec{k} imesec{E}) \ &= \sqrt{\muarepsilon}ec{e}_k imesec{E} \end{aligned}$$

$$ec{B}=\sqrt{\muarepsilon}ec{e}_{k} imesec{E}$$

由上式可得

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比:

$$\left|\frac{E}{B}\right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比:

$$\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

- (1) 电磁波为横波, \vec{E} 和 \vec{B} 都与传播方向垂直
- (2) \vec{E} 和 \vec{B} 互相垂直, $\vec{E} imes \vec{B}$ 沿 \vec{k} 方向
- (3) \vec{E} 和 \vec{B} 同相,振幅比为 v

利用两个结论快速推导平面电磁波性质

对于时谐平面电磁波,有:

$$egin{aligned} rac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega \ &
abla &\longleftrightarrow \mathrm{i}ec{k} \end{aligned} \ \begin{cases}
abla & imes ec{E} = -rac{\partial ec{B}}{\partial t} \ &
abla & imes ec{H} = ec{J} + rac{\partial ec{D}}{\partial t} \ &
abla & imes ec{D} =
ho \ &
abla & imes ec{B} = 0 \end{aligned}$$

对于无源且线性介质情况,即 $ho=0, \vec{J}=\vec{0}, \vec{D}=arepsilon \vec{E}, \vec{H}=\vec{B}/\mu$,有:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

利用两个结论 $\dfrac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega, \ \ \nabla \longleftrightarrow \mathrm{i}\vec{k}$ 可以得到:

$$\mathrm{i}ec{k} imesec{E}=\mathrm{i}\omegaec{B}$$

即:

$$ec{B} = rac{ec{k}}{\omega} imes ec{E} = \sqrt{\mu arepsilon} ec{e}_k imes ec{E}$$
 $\left| rac{E}{B}
ight| = rac{1}{\sqrt{\mu arepsilon}}$

平面电磁波能量密度:

线性均匀介质中电磁场能量密度:

$$w=rac{1}{2}(ec{E}\cdotec{D}+ec{H}\cdotec{B})=rac{1}{2}igg(arepsilon E^2+rac{1}{\mu}B^2igg)$$

平面电磁波情形, $\varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$, 于是:

$$w=rac{1}{2}(ec{E}\cdotec{D}+ec{H}\cdotec{B})=arepsilon E^2=rac{1}{\mu}B^2$$

$$w = arepsilon E_0^2 \cos^2(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t) = rac{1}{2} arepsilon E_0^2 [1 + \cos 2(ec{k} \cdot ec{x} - \omega t)]$$

由 $\vec{B} = \sqrt{\mu \varepsilon} \vec{e}_k \times \vec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**:

$$oxed{ec{S} = ec{E} imes ec{H} = \sqrt{rac{arepsilon}{\mu}} E^2 ec{e}_k}$$

$$ec{S}=rac{1}{\sqrt{\muarepsilon}}wec{e}_k=vwec{e}_k$$

平面电磁波能量密度平均值:

$$oxed{ar{w}=rac{1}{2}arepsilon E_0^2=rac{1}{2\mu}B_0^2}$$

平面电磁波能流密度平均值:

$$oxed{ar{ec{S}} = rac{1}{2}\Re\{ec{E}^* imesec{H}\} = rac{1}{2}\sqrt{rac{arepsilon}{\mu}}E_0^2ec{e}_k}$$

波导管

矩形波导中的电磁波

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电磁波沿z轴传播,电场应有如下形式:

$$ec{E}(x,y,z) = ec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_zz}$$

代入亥姆霍兹方程,得:

$$igg(rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial y^2}igg)ec{E}(x,y) + (k^2 - k_z^2)ec{E}(x,y) = ec{0}$$

设 u(x,y) 为 $\vec{E}(x,y)$ 的任一直角坐标分量,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

分离变量法可得:

$$rac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 Y = 0$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

特解:

$$u(x,y) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$$

考虑边界条件 x=0,y=0 面上的边界条件,

$$egin{aligned} \left. rac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0, \;\; E_y \right|_{x=0} &= 0, \;\; E_z \Big|_{x=0} &= 0, \ E_x \Big|_{y=0} &= 0, \;\; rac{\partial E_y}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \;\; E_z \Big|_{y=0} &= 0, \end{aligned}$$

可得:

$$\left\{egin{aligned} E_x &= A_1\cos k_x x\sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_y &= A_2\sin k_x x\cos k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \ E_z &= A_3\sin k_x x\sin k_y y e^{\mathrm{i}k_z z} \end{aligned}
ight.$$

再考虑 x = a, y = b 面上的边界条件,可得:

$$k_x=rac{m\pi}{a},~~k_y=rac{n\pi}{b},~~m,n=0,1,2,\cdots$$

再考虑波导中电场应满足 $abla \cdot \vec{E} = 0$,得:

$$k_x A_1 + k_y A_2 - \mathrm{i} k_z A_3 = 0$$

也就是说, A_1, A_2, A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组 (m,n) 值,有两种独立波模,有两种独立波模。

解出 \vec{E} 后,磁场为:

$$ec{H} = -rac{\mathrm{i}}{\omega\mu}
abla imesec{E}$$

对一组确定的 (m,n),若选一种波模具有 $E_z=0$,则该波模的 $A_1/A_2=-k_y/k_x$ 就完全确定,因而另一种波模必须有 $E_z\neq 0$ 对 $E_z=0$ 的波模, $H_z\neq 0$

在波导内传播的波的特点:

电场 $ec{E}$ 和磁场 $ec{H}$ 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z=0$ 的波,称为横电波(TE);另一种波模为 $H_z=0$ 的波,称为横磁波(TM)。

 ${
m TE}$ 波和 ${
m TM}$ 波又按 (m,n) 的值不同分为 ${
m TE}_{mn}$ 和 ${
m TM}_{mn}$ 波,一般情况下,在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

若激发频率 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$,则 k_z 变为虚数,此时传播因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的最低频率 ω_e 称为该波模的截止频率。

由:

$$k_x=rac{m\pi}{a},~~k_y=rac{n\pi}{b},~~k=\omega\sqrt{\muarepsilon}$$

得到 (m,n) 型的**截止角频率**为:

$$\omega_{c,mn}=rac{\pi}{\sqrt{\muarepsilon}}\sqrt{(rac{m}{a})^2+(rac{n}{b})^2}$$

若 a>b,则 TE_{10} 波有最低截止频率:

$$\frac{\omega_{c,10}}{2\pi} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若管内为真空,此时最低截止频率为 $\frac{c}{2a}$, 相应的截止波长为:

$$\lambda_{c,10} = 2a$$

因此,在波导内能够通过的最大波长为 2a

最常用的是 TE_{10} 波,它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

TE₁₀ 波的电磁场和管壁电流

当 m=1, n=0 时, $k_x=m\pi/a=\pi/a, k_y=n\pi/b=0$,且对 TE 波有 $E_z=0$,因此 $A_3=0$ 由 $k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$ 得 $A_1=0$,把 A_2 写为:

$$A_2=rac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0$$

由

$$egin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i} k_z z} \ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{\mathrm{i} k_z z} \ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i} k_z z} \end{cases}, \;\; ec{H} = -rac{\mathrm{i}}{\omega \mu}
abla imes ec{E}$$

得 TE₁₀ 波的电磁场:

$$H_z = H_0 \cos rac{\pi x}{a}$$
 $E_y = rac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin rac{\pi x}{a}$ $H_x = -rac{\mathrm{i}k_z a}{\pi} H_0 \sin rac{\pi x}{a}$ $E_x = E_z = h_y = 0$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $\vec{n}_{1\rightarrow2} \times \vec{H} = \vec{\alpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第4章例题

例1

已知在长宽分别为 a, b 的矩形波导内,磁场强度的 z 分量大小为:

$$H_z = H_0 \cos \left[rac{\pi}{a} y
ight] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

(1) 求波导内电场强度、磁感应强度大小(2) 求平均能流密度功率

解:

(1)

时谐电磁波:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$$

波导内:

$$ec{E}(x,y,z) = ec{E}_0(x,y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$ec{H}(x,y,z) = ec{H}_0(x,y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

考虑波导内真空且无源,有 $\vec{D}=arepsilon_0 \vec{E}, \ \vec{B}=\mu_0 \vec{H}$,再结合时谐电磁波 $\frac{\partial}{\partial t}\longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$ 可得:

$$\left\{egin{aligned}
abla imes ec{E} &= \mathrm{i}\omega\mu_0ec{H} \
abla imes ec{H} &= -\mathrm{i}\omegaarepsilon_0ec{E} \
abla \cdot ec{E} &= 0 \
abla \cdot ec{H} &= 0 \end{aligned}
ight.$$

对第一式两边同时取 x, y 分量:

$$\begin{split} \mathrm{i}\omega\mu_0H_x &= \partial_yE_z - \partial_zE_y \\ &= \partial_yE_z - \mathrm{i}k_zE_y \\ \mathrm{i}\omega\mu_0H_y &= \partial_zE_x - \partial_xE_z \\ &= \mathrm{i}k_zE_x - \partial_xE_z \end{split}$$

对第二式两边同时取 x, y 分量:

$$\begin{split} -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x &= \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ &= \partial_y H_z - \mathrm{i}k_z H_y \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y &= \partial_z H_x - \partial_x H_z \\ &= \mathrm{i}k_z H_x - \partial_x H_z \end{split}$$

于是:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0H_x=\partial_yE_z-\mathrm{i}k_zE_y\\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_y=\mathrm{i}k_zH_x-\partial_xH_z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0H_x+\mathrm{i}k_zE_y=\partial_yE_z\\ \mathrm{i}k_zH_x+\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_y=\partial_xH_z \end{cases}$$

解得:

$$egin{align} H_x &= rac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} igg(-\omega arepsilon_0 \partial_y E_z + k_z \partial_x H_z igg) \ E_y &= rac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} igg(-\omega \mu_0 \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z igg) \ \end{split}$$

其中, $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0H_y=\mathrm{i}k_zE_x-\partial_xE_z\\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_x=\partial_yH_z-\mathrm{i}k_zH_y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0H_y-\mathrm{i}k_zE_x=-\partial_xE_z\\ \mathrm{i}k_zH_y-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0E_x=\partial_yH_z \end{cases}$$

解得:

$$H_y = rac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}igg(\omegaarepsilon_0\partial_x E_z + k_z\partial_y H_zigg)$$

$$E_x = rac{\mathrm{i}}{k^2-k_z^2}igg(\omega\mu_0\partial_y H_z + k_z\partial_x E_zigg)$$

本题中, $H_z=H_0\cos\left[rac{\pi}{a}y
ight]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_zz-\omega t)},\;\;E_z=0$, 于是:

$$E_{x} = \frac{-i\pi\omega\mu_{0}H_{0}}{a(k^{2} - k_{z}^{2})}\sin(\frac{\pi}{a}y)e^{i(k_{z}z - \omega t)}$$

$$E_{y} = 0$$

$$H_{x} = 0$$

$$B_{x} = 0$$

$$H_{y} = \frac{-i\pi k_{z}H_{0}}{a(k^{2} - k_{z}^{2})}\sin(\frac{\pi}{a}y)e^{i(k_{z}z - \omega t)}$$

$$B_{y} = \mu_{0}H_{y} = \frac{-i\pi\mu_{0}k_{z}H_{0}}{a(k^{2} - k_{z}^{2})}\sin(\frac{\pi}{a}y)e^{i(k_{z}z - \omega t)}$$

(2) 求平均能流密度功率

解:

$$\begin{split} & \bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E}^* \times \vec{H} \} \\ & = \frac{1}{2} \Re \{ -E_x^* H_z \vec{e}_y + E_x^* H_y \vec{e}_z \} \\ & = \frac{1}{2} \Re \{ -\frac{\mathrm{i} \pi \omega \mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a} y\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_y + \frac{\mathrm{i} \pi \omega \mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot \frac{-\mathrm{i} \pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_z \Big\} \\ & = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \omega \mu_0 k_z H_0^2}{a^2 (k^2 - k_z^2)^2} \sin^2(\frac{\pi}{a} y) \vec{e}_z \end{split}$$

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{\rm f} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\rm f} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

由一般情况下 \vec{B} 的无散性 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入矢势 \vec{A} ,使得:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

于是:

$$\begin{split} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{split}$$

于是:

$$abla imes (ec{E} + rac{\partial ec{A}}{\partial t}) = ec{0}$$

这就是说, $\vec{E}+rac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场,于是可引入标势 arphi,使得:

$$ec{E}+rac{\partial ec{A}}{\partial t}=-
ablaarphi$$

于是:

$$ec{E} = -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t}$$

场量 \vec{B} , \vec{E} 可由矢势 \vec{A} 和 φ 表达为:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数,作变换(势的规范变换):

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$arphi
ightarrow arphi' = arphi - rac{\partial \psi}{\partial t}$$

有:

$$ec{B}' =
abla imes ec{A}' =
abla imes ec{A} +
abla imes (
abla \psi) =
abla imes ec{A} = ec{B}$$

$$ec{E}' = -
abla arphi' - rac{\partial ec{A}'}{\partial t} = -
abla (arphi - rac{\partial \psi}{\partial t}) - rac{\partial (ec{A} +
abla \psi)}{\partial t} = -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t} = ec{E}$$

即 (\vec{A}', φ') 与 (\vec{A}, φ) 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范**。

当势作规范变换时,所有的物理量和物理规律都保持不变,这种不变性称为**规范不变性**。

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$abla \cdot ec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} = 0$$

注意是对时间的一阶偏导。

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 $ec{E}, ec{B}$ 的方程,可化为关于势 $ec{A}, arphi$ 的方程。

真空中:

$$\begin{cases} \nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0}) = \frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程(真空中):

$$egin{aligned}
abla^2 ec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 ec{A}}{\partial t^2} -
abla igg(
abla \cdot ec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} igg) = -\mu_0 ec{J} \ \\
abla^2 arphi + rac{\partial}{\partial t}
abla \cdot ec{A} = -rac{
ho}{arepsilon_0} \end{aligned}$$

其中, $\mu_0 arepsilon_0 = 1/c^2$

库仑规范下的达朗贝尔方程

$$abla^2 ec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 ec{A}}{\partial t^2} - rac{1}{c^2} rac{\partial}{\partial t}
abla arphi = -\mu_0 ec{J}$$
 $abla^2 arphi = -rac{
ho}{arepsilon_0}$

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$
$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

推迟势

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程 (真空中)

$$abla^2 arphi - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 arphi}{\partial t^2} = -rac{
ho}{arepsilon_0}$$
 $abla^2 ec{A} - rac{1}{c^2} rac{\partial^2 ec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 ec{J}$

的解有推迟势的形式:

$$egin{aligned} arphi(ec{x},t) &= rac{1}{4\piarepsilon_0}\int\limits_V rac{
ho(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V' \ ec{A}(ec{x},t) &= rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V' \end{aligned}$$

它反映了电磁作用具有一定的传播速度。源点 \vec{x}' 对场点 \vec{x} 的电磁作用需要的传播时间为 $\frac{r}{c}=\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$ 当 ρ 和 \vec{J} 给定后,就可以算出势 \vec{A},φ ,再由

$$ec{B} =
abla imes ec{A}, \ \ ec{E} = -
abla arphi - rac{\partial ec{A}}{\partial t}$$

求电磁场。

计算辐射场的一般公式

$$egin{equation} ec{A}(ec{x},t) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}',t-rac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V' \end{aligned}$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流,即:

$$ec{J}(ec{x}',t)=ec{J}(ec{x}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中, $\vec{J}(\vec{x}')$ 是 t=0 时的电流密度分布。

交变电流情况下:

$$ec{A}(ec{x},t) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中, $k = \omega/c$

今:

$$ec{A}(ec{x},t)=ec{A}(ec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中, $\vec{A}(\vec{x})$ 是 t=0 时刻的矢势分布。

其中, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 是推迟作用因子,其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形, 电荷守恒定律为:

$$\mathrm{i}\omega\rho=\nabla\cdot\vec{J}$$

若知道了矢势 \vec{A} ,则可求磁场 \vec{B} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

知道了 \vec{B} ,可根据麦克斯韦方程组求电场 \vec{E} :

$$egin{align}
abla imes ec{B} &= \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} = -rac{\mathrm{i} \omega}{c^2} ec{E} \ ec{E} &= rac{\mathrm{i} c}{k}
abla imes ec{B} \end{aligned}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l , 波长 λ , 电荷到场点的距离 r

小区域:

$$l \ll \lambda, \ l \ll r$$

近区: $r \ll \lambda$

感应区: $r \sim \lambda$

远区 (辐射区) : $r\gg\lambda$

$$rpprox R-ec{e}_R\cdotec{x}'$$

矢势精确表达式:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势近似表达式:

$$egin{aligned} ec{A}(ec{x}) &pprox rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{ec{J}(ec{x}') e^{\mathrm{i}k(R-ec{e}_R\cdotec{x}')}}{R-ec{e}_R\cdotec{x}'} \mathrm{d}V' \ &pprox rac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\cdotec{J}(ec{x}') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kec{e}_R\cdotec{x}'}}{R} \mathrm{d}V' \ &pprox rac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \int\limits_V ec{J}(ec{x}') (1-\mathrm{i}kec{e}_R\cdotec{x}'+\cdots) \mathrm{d}V' \end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \int\limits_V ec{J}(ec{x}') \mathrm{d}V'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i , 速度为 v_i 的粒子, 则:

$$ec{J} = \sum_i n_i q_i ec{v}_i$$

$$ec{J}(ec{r}) =
ho(ec{r})ec{v}(ec{r})$$

$$\int_{V} \vec{J}(\vec{x}') dV' = \sum_{V} q\vec{v}$$

$$\sum_{V} q\vec{v} = \frac{d}{dt} \sum_{V} q\vec{x}$$

$$= \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\equiv \dot{\vec{p}}$$

其中, 成是电荷系统的电偶极矩

$$\int\limits_Vec{J}(ec{x}')\mathrm{d}V'=\dot{ec{p}}$$

于是:

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \dot{ec{p}}$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果:

$$abla \longleftrightarrow \mathrm{i} k \vec{e}_R$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i} \omega$$

辐射场:

$$egin{aligned} ec{B} &=
abla imes ec{A} \ &= rac{\mathrm{i} \mu_0 k}{4\pi R} e^{\mathrm{i} k R} ec{e}_R imes \dot{ec{p}} \ &= rac{e^{\mathrm{i} k R}}{4\pi arepsilon_0 c^3 R} \ddot{ec{p}} imes ec{e}_R \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ec{E} &= rac{\mathrm{i} c}{k}
abla imes ec{B} \ &= rac{e^{\mathrm{i} k R}}{4\pi arepsilon_0 c^2 R} (\ddot{ec{p}} imes ec{e}_R) imes ec{e}_R \end{aligned}$$

$$oxed{ec{B}=rac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\piarepsilon_0c^3R}\ddot{ec{p}} imesec{e}_R}$$

$$oxed{ec{E}=rac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\piarepsilon_0c^2R}(\ddot{ec{p}} imesec{e}_R) imesec{e}_R}$$

取球坐标原点在电荷分布区内, 并以 \vec{p} 方向为极轴,

$$ec{B}=rac{1}{4\piarepsilon_0c^3R}\ddot{p}e^{\mathrm{i}kR}\sin hetaec{e}_\phi$$

$$ec{E}=rac{1}{4\piarepsilon_0c^2R}\ddot{p}e^{\mathrm{i}kR}\sin hetaec{e}_{ heta}$$

辐射能流 角分布 辐射功率

电偶极辐射平均能流密度:

$$egin{aligned} ar{ec{S}} &= rac{1}{2}\Re\{ec{E}^* imesec{H}\} \ &= rac{|\ddot{ec{p}}|^2}{32\pi^2arepsilon_0c^3R^2}\sin^2 hetaec{e}_R \end{aligned}$$

辐射功率:

磁偶极辐射

$$ec{A}(ec{x}) = rac{\mathrm{i} k \mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i} k R}}{4 \pi R} ec{e}_R imes ec{m}$$

其中, \vec{m} 是体系的磁矩。

辐射区电磁场为:

$$egin{aligned} ec{B} &=
abla imes ec{A} \ &= \mathrm{i} k ec{e}_R imes ec{A} \ &= rac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i} k R}}{4 \pi c^2 R} (\ddot{ec{m}} imes ec{e}_R) imes ec{e}_R \end{aligned}$$

$$ec{E} = cec{B} imesec{e}_R = -rac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR} (\ddot{ec{m}} imesec{e}_R)$$

对比电偶极辐射场和磁偶极辐射场可发现,由电偶极辐射场作以下代换:

$$ec{p}
ightarrowrac{ec{m}}{c}$$
 $ec{E}
ightarrow cec{B}$ $cec{B}
ightarrow-ec{E}$

就能得到磁偶极辐射场。

磁偶极辐射的平均能流密度:

$$ar{ec{S}}=rac{\mu_0\omega^4ertec{m}ert^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2 hetaec{e}_R$$

其中, | 前 | 是磁矩的振幅。

磁偶极辐射总辐射功率:

$$P=rac{\mu_0\omega^4|ec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

第5章例题

例1

一电流线圈半径为 a, 激发电流振幅为 I_0 , 角频率为 ω , 求辐射功率。

解:

电流线圈磁矩的振幅为:

$$m=I_0\pi a^2$$

于是磁偶极辐射总辐射功率为:

$$P = rac{\mu_0 \omega^4 |ec{m}|^2}{12\pi c^3} \ = rac{\mu_0 \omega^4 (I_0 \pi a^2)^2}{12\pi c^3} \ = rac{\pi^2 \mu_0 \omega^4 I_0^2 a^4}{12\pi c^3}$$

例2

两个质量、电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞,证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

思路:要证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生,只要证明电偶极矩和磁偶极矩都为零即可。

解:

取两粒子的碰撞点为原点,则:

$$\vec{x}_1 = -\vec{x}_2$$

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

体系电偶极矩:

$$ec{p} = qec{x}_1 + qec{x}_2 = q(ec{x}_1 - ec{x}_1) = ec{0}$$

于是不会发生电偶极辐射。

体系磁偶极矩:

$$egin{aligned} ec{m} &= rac{1}{2}(ec{x}_1 imes q ec{v}_1 + ec{x}_2 imes q ec{v}_2) \ &= ec{0} \end{aligned}$$

于是不会发生磁偶极辐射。

例3

半径为 R_0 的均匀永磁体小球,磁化强度为 \vec{M}_0 ,球以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 \vec{M}_0 的轴旋转,设 $R_0\omega\ll c$,求辐射场和能流。 = 主要是磁偶极辐射。

解:

磁矩振幅:

$$ec{m}_0 = rac{4\pi R_0^3}{3} ec{M}_0$$

例4

带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动,回旋频率为 ω ,求远处的辐射电磁场和能流。

解:

主要是电偶极辐射。

体系电偶极矩:

$$ec{p} = e a ec{e}_r \ = e a (\cos \omega t ec{e}_x + \sin \omega t ec{e}_y)$$

复数形式为:

$$\vec{p} = ea(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega t}$$

第6章 狭义相对论

狭义相对论基本原理

- (1) 相对性原理: 所有惯性参考系是等价的。物理规律对于所有惯性参考系都可以表示为相同的形式。
- (2) 光速不变原理: 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为c, 且与光源运动无关。

间隔不变性

用四个坐标 (x,y,z,t) 表示一个事件

从 (\vec{x},t) 到 (\vec{x}',t) 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x_1',y_1',,z_1',t_1'),(x_2',y_2',z_2',t_2')$

间隔 s^2, s'^2 定义为:

$$s^2 \equiv c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2
onumber \ s'^2 \equiv c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性,即:

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

 $s^2=0$,类光间隔

 $s^2 > 0$,类时间隔

 $s^2 < 0$,类空间隔

洛伦兹变换

同一事件在两个不同参考系中观察的时空坐标关系为:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

运动尺度的缩短

$$l=l_0\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}$$

其中, l_0 是静止长度

推导:

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动,则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

其中,
$$\gamma \equiv rac{1}{\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}}$$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1,其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1,t_1) ,其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_1',t_1') ,由 Σ' 相对 Σ 的运动,有洛伦兹变换:

$$\left\{egin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 - vt) \ t_1' &= \gamma(t_1 - rac{v}{c^2}x_1) \end{aligned}
ight.$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动,则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v,于是其在 Σ 系中的时空坐标满足:

$$x_1 = a + vt_1$$

右边的质点记为 2,其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2,t_2) ,其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_2',t_2') ,由 Σ' 相对 Σ 的运动,有洛伦兹变换:

$$\left\{egin{aligned} x_2' &= \gamma(x_2 - vt) \ t_2' &= \gamma(t_2 - rac{v}{c^2}x_2) \end{aligned}
ight.$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动,则质点 2 在 Σ 中运动的速度也是 v,于是其在 Σ 系中的时空坐标满足:

$$x_2 = b + vt_2$$

尺子在 Σ 系中的长度, 记为 l_{Σ} , 定义为:

$$egin{aligned} l_{\Sigma} &\equiv (x_2 - x_1) igg|_{t_1 = t_2} \ &= \left[(b + vt_2) - (a + vt_1)
ight]_{t_1 = t_2} \ &= b - a \end{aligned}$$

尺子在 Σ' 系中的长度 (也就是静止长度) , 记为 $l_{\Sigma'}$, 定义为:

$$egin{aligned} l_{\Sigma'} &\equiv (x_2' - x_1') igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \left[\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)
ight] igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gamma igg[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)
ight] igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gamma igg[[(b + vt_2) - (a + vt_1) - v(t_2 - t_1)]
ight] igg|_{t_1' = t_2'} \ &= \gamma(b - a) \end{aligned}$$

可以看到,

$$l_{\Sigma} = rac{1}{\gamma} l_{\Sigma'} = \sqrt{1 - rac{v^2}{c^2}} l_{\Sigma'} < l_{\Sigma'}$$

洛伦兹变换四维形式

 $x_4 \equiv ict$, 间隔不变式可写为:

$$x'_{\mu}x'_{\mu}=x_{\mu}x_{\mu}=$$
不变量

一般洛伦兹变换是满足间隔不变性的四维线性变换:

$$x'_{\mu}=a_{\mu
u}x_{
u}$$

沿 x 轴方向的特殊洛伦兹变换的变换矩阵:

$$a = egin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}eta\gamma \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \ -\mathrm{i}eta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

其中,

$$eta = rac{v}{c}, \ \ \gamma = rac{1}{\sqrt{1-rac{v^2}{c^2}}}$$

四维协变量

在洛伦兹变换下不变的物理量称为洛伦兹标量或不变量。

间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

和**固有时**

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s$$

都是洛伦兹标量。

四维速度矢量:

$$U_{\mu} = \frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$$

四维空间矢量:

$$x_{\mu} = (\vec{x}, \mathrm{i} ct)$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量:

$$x_{\mu} = (\vec{x}, \mathrm{i} ct)$$

电流密度第四分量:

$$J_4 = \mathrm{i} c \rho$$

$$J_{\mu}=
ho_0 U_{\mu}$$

$$J_{\mu}=(ec{J},\mathrm{i}c
ho)$$

电荷守恒定律四维形式:

$$abla \cdot ec{J} + rac{\partial
ho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow rac{\partial J_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

四维势矢量

$$\square \equiv
abla^2 - rac{1}{c^2}rac{\partial^2}{\partial t^2} = rac{\partial}{\partial x_\mu}rac{\partial}{\partial x_\mu}$$

□是洛伦兹标量算符

洛伦兹规范下, 势满足的方程:

$$\nabla^{2}\vec{A} - \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2}\vec{A}}{\partial t^{2}} = -\mu_{0}\vec{J} \Longrightarrow \Box \vec{A} = -\mu_{0}\vec{J}$$

$$\nabla^{2}\varphi - \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_{0}} \Longrightarrow \Box \varphi = -\mu_{0}c^{2}\rho$$

$$A_{\mu} = \left(\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi\right)$$

合写为:

$$\Box A_{\mu} = -\mu_0 J_{\mu}$$

洛伦兹条件的四维形式:

$$abla \cdot \vec{A} + rac{1}{c^2} rac{\partial arphi}{\partial t} = 0$$

$$abla \frac{\partial A_{\mu}}{\partial t} = 0$$

电磁场张量

反对称四维张量:

$$F_{\mu
u}=rac{\partial A_
u}{\partial x_\mu}-rac{\partial A_\mu}{\partial x_
u}$$

电磁场构成一个四维张量:

$$F_{\mu
u} = egin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_1 \ -B_3 & 0 & B_1 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_2 \ B_2 & -B_1 & 0 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_3 \ rac{\mathrm{i}}{c}E_1 & rac{\mathrm{i}}{c}E_2 & rac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \
abla \
abla \cdot ec{E} = rac{
ho}{arepsilon_0} \
abla \cdot ec{B} = \mu_0 arepsilon_0 rac{\partial ec{E}}{\partial t} + \mu_0 ec{J} \
abla$$

可以合写为:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以合写为:

$$rac{\partial F_{\mu
u}}{\partial x_{\lambda}}+rac{\partial F_{
u\lambda}}{\partial x_{\mu}}+rac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{
u}}=0$$

麦克斯韦方程组协变形式:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\mu}$$

$$\left| \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \right|$$

由张量变换关系

$$F'_{\mu
u}=a_{\mulpha}a_{
ueta}F_{lphaeta}$$

以及沿 x 轴特殊洛伦兹变换

$$\left\{egin{aligned} x' &= \gamma(x-vt) \ y' &= y \ z' &= z \ t' &= \gamma\left(t'-vx/c^2
ight) \end{aligned}
ight.$$
 $\left\{egin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 + \mathrm{i} v x_4/c) \ x_2' &= x_2 \ x_3' &= x_3 \ x_4' &= \gamma\left(x_4 - \mathrm{i} v x_1/c
ight) \end{aligned}
ight.$

变换矩阵

$$a = \left[egin{array}{cccc} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{i} rac{v\gamma}{c} \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \ -\mathrm{i} rac{v\gamma}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{array}
ight]$$

电磁场张量

$$F_{\mu
u} = egin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_1 \ -B_3 & 0 & B_1 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_2 \ B_2 & -B_1 & 0 & -rac{\mathrm{i}}{c}E_3 \ rac{\mathrm{i}}{c}E_1 & rac{\mathrm{i}}{c}E_2 & rac{\mathrm{i}}{c}E_3 \ \end{pmatrix}$$

可以导出电磁场的变换关系:

$$F_{14}' = a_{1lpha}a_{4eta}F_{lphaeta} = a_{11}a_{44}F_{14} + a_{14}a_{41}F_{41} = \left(a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41}
ight)F_{14} = \left(\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2
ight)F_{14} = F_{14}$$
 $F_{23}' = a_{2lpha}a_{3eta}F_{lphaeta} = a_{22}a_{33}F_{23} = F_{23}$

上面两式等价于:

$$E_1' = E_1, \quad B_1' = B_1$$

类似可得:

$$E_2' = \gamma(E_2 - vB_3), \quad B_2' = \gamma\left(B_2 + rac{v}{c^2}E_3
ight)
onumber \ E_3' = \gamma(E_3 + vB_2), \quad B_3' = \gamma\left(B_3 - rac{v}{c^2}E_2
ight)$$

或写为:

$$E_{\parallel}' = E_{\parallel}, \quad B_{\parallel}' = B_{\parallel} \ E_{\perp}' = \gamma \left(ec{E} + ec{v} imes ec{B}
ight)_{\perp}, \quad B_{\perp}' = \gamma \left(ec{B} - rac{ec{v}}{c^2} imes ec{E}
ight)_{\perp},$$

若电场和磁场在 Σ 系都不为零,则可找到一个 Σ' 惯性系使得电场或磁场在 Σ' 为零。但不可能通过洛伦兹变换使得二者同时为零。可以证明, $\vec{E}\cdot\vec{B}$ 是洛伦兹不变量,即 $\vec{E'}\cdot\vec{B'}=\vec{E}\cdot\vec{B}$,因此不可能通过洛伦兹变换使电场和磁场的夹角从锐角变为钝角。