3-8

> 假设无质量费米子的波函数为 $\varphi=(1-\gamma_5)\psi$，证明：无质量费米子的自旋方向永远沿运动方向；无质量反费米子的自旋方向永远与运动方向相反。

$m=0$ 时 Dirac 方程的哈密顿量为

$$H=\mathrm{i}\beta\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\right)$$

利用

$$\sigma_k=\mathrm{i}\beta\gamma_5\gamma_k,\quad k=1,2,3\Longrightarrow\vec{\sigma}=\mathrm{i}\beta\gamma_5\vec{\gamma}$$

且 $m=0$ 时

$$E^2=\vec{p}^2+m^2=\vec{p}^2\Longrightarrow|\vec{p}|=E$$

有

$$\begin{aligned}H&=\mathrm{i}\beta\left(\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\right)\\&=\mathrm{i}\beta\gamma_5\gamma_5\left(\vec{\gamma}\cdot E\vec{n}\right)\\&=-\mathrm{i}\beta\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\left(E\vec{n}\right)\gamma_5\\&=-E\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\gamma_5\end{aligned}$$

哈密顿量作用于 φ 上：

$$\begin{aligned}H\varphi&=-E\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\gamma_5\left(1-\gamma_5\right)\psi\\&=-E\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\left(\gamma_5-1\right)\psi\\&=E\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\left(1-\gamma_5\right)\psi\\&=E\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\varphi\end{aligned}$$

由于

$$\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\varphi=\pm\varphi$$

因此，当 $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\varphi=+\varphi$ 时，

$$H\varphi=+E\varphi$$

当 $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\varphi=-\varphi$ 时，

$$H\varphi=-E\varphi$$

故 φ 仅有两个状态即两个分量。且对 $+E$ 状态，其自旋永远沿 $\vec{p}$ 方向；对 $-E$ 状态，其自旋永远与 $\vec{p}$ 方向相反。