3-9

> 已知自由旋量粒子哈密顿算符假设为

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

其自旋算符可表示为：

$$\sigma_1 = \frac{1}{\mathrm{i}} \gamma_2 \gamma_3, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\mathrm{i}} \gamma_3 \gamma_1, \quad \sigma_3 = \frac{1}{\mathrm{i}} \gamma_1 \gamma_2$$

可证明：

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) = (\vec{\gamma} \cdot \vec{n}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \beta = \beta (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$$

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

请证明算符 $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$ 与 H 可以有共同的本征函数。求出每组本征值对应的共同本征函数，并证明它们是正交完备的。

计算对易关系：

$$\begin{aligned}
[\alpha_i, \sigma_j] &= \alpha_i \sigma_j - \sigma_j \alpha_i \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i^0 \\ \sigma_i^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_j^0 & 0 \\ 0 & \sigma_j^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_j^0 & 0 \\ 0 & \sigma_j^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i^0 \\ \sigma_i^0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i^0 \sigma_j^0 - \sigma_i^0 \sigma_j^0 \\ \sigma_i^0 \sigma_j^0 - \sigma_i^0 \sigma_j^0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2\mathrm{i} \varepsilon_{ijk} \sigma_k^0 \\ 2\mathrm{i} \varepsilon_{ijk} \sigma_k^0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2\mathrm{i} \varepsilon_{ijk} \sigma_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\vec{\alpha} \cdot \vec{n}, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] &= [n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3, n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3] \\
&= n_1 n_2 [\alpha_1, \sigma_2] + n_1 n_3 [\alpha_1, \sigma_3] + n_1 n_2 [\alpha_2, \sigma_1] + n_2 n_3 [\alpha_2, \sigma_3] + n_1 n_3 [\alpha_3, \sigma_1] + n_2 n_3 [\alpha_3, \sigma_2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\beta, \sigma_i] &= \beta \sigma_i - \sigma_i \beta \\
&= \begin{bmatrix} I^0 & 0 \\ 0 & -I^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_i^0 & 0 \\ 0 & \sigma_i^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_i^0 & 0 \\ 0 & \sigma_i^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^0 & 0 \\ 0 & -I^0 \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\beta, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] &= [\beta, n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3] \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
[H, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] &= [|\vec{p}| \, \vec{\alpha} \cdot \vec{n} + \beta m, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

这表明，$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 与 H 可以有共同的本征函数。

对于具有确定四维动量的自由旋量粒子，有

$$
H(\vec{p}) = \beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right), \quad p_0 = E, \quad p_4 = \mathrm{i}E = \mathrm{i}p_0
$$

由于 H 是厄米的，因此

$$
\begin{aligned}
H^2(p) &= H^\dagger(p) H(p) \\
&= \left[\beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \right]^\dagger \left[\beta \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \right] \\
&= \left(-\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \left(\mathrm{i} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \right) \\
&= \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \right)^2 + m^2 \\
&= \left(\gamma_i p_i \right) \left(\gamma_j p_j \right) + m^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i \right) p_i p_j + m^2 \\
&= \delta_{ij} p_i p_j + m^2 \\
&= \vec{p}^2 + m^2
\end{aligned}
$$

动量表象 H 本征方程：

$$
H(p) u(p) = p_0 u(p) \Longrightarrow H^2(p) u(p) = p_0^2 u(p)
$$

可得：

$$
p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv \pm E, \quad E \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}
$$

设 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ 的本征值为 λ，其本征方程

$$
\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) u(p) = \lambda u(p)
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right)^2 &= \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \\
&= \vec{n} \cdot \vec{n} + \mathrm{i} \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{n} \times \vec{n} \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right)^2 u(p) = \lambda^2 u(p)
$$

$$
\lambda = \pm 1
$$

即

$$
\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) u(p) = \pm u(p)
$$

根据本征值可将 $\psi(x)=u(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$ 划分为以下四种态：

$p_0=+E,\lambda=+1$ 记为 $u_1(\vec{p})$

$p_0=+E,\lambda=-1$ 记为 $u_2(\vec{p})$

$p_0=-E,\lambda=+1$ 记为 $u_3(\vec{p})$

$p_0=-E,\lambda=-1$ 记为 $u_4(\vec{p})$

即

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\,u_a(\vec{p})=\begin{cases}+u_a(\vec{p}),a=1,3\\-u_a(\vec{p}),a=2,4\end{cases}$$

$$H(\vec{p})u_a(\vec{p})=\begin{cases}+Eu_a(\vec{p}),a=1,2\\-Eu_a(\vec{p}),a=3,4\end{cases}$$