> 最后更新于 2024/12/11
> markdown源文件请见：https://github.com/BeiHai0/Surviving-LZU-Physics/tree/master/小班讲义/数学物理方法1小班讲义

第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

向量分析基本知识

爱因斯坦求和约定

爱因斯坦求和约定就是说，在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A} = A_1\vec{\mathrm{e}}_1 + A_2\vec{\mathrm{e}}_2 + A_3\vec{\mathrm{e}}_3 \equiv \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为：

$$\vec{A} = \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i \to \vec{A} = A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号 $\sum\limits_i$ 的工作。

Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

三阶 Levi-Citita 符号 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & ,ijk=123,231,312,\text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到123}\\ -1 & ,ijk=132,213,321,\text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到123}\\ 0 & ,ijk\text{中有相同指标}\end{cases}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

一些简单算例

- $\vec{\mathrm{e}}_i\cdot\vec{\mathrm{e}}_j=\delta_{ij}$
- $\vec{\mathrm{e}}_i\times\vec{\mathrm{e}}_j=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_k$
- $A_i\delta_{ij}=A_j$
- $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_i\vec{\mathrm{e}}_i)\cdot(B_j\vec{\mathrm{e}}_j)=A_iB_j\vec{\mathrm{e}}_i\cdot\vec{\mathrm{e}}_j=A_iB_j\delta_{ij}=A_iB_i$$

- $\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_jB_k$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_jB_k$$

梯度、散度、旋度

梯度（gradient）的定义

设 $\psi(\vec{x})$ 是标量场，$\psi(\vec{x})$ 的梯度，记为 $\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})$，由下式定义：

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}\psi(\vec{x})$$

其中，$\mathrm{d}\vec{x}$ 是位矢 $\vec{x}$ 的微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 是标量场 $\psi(\vec{x})$ 因位矢 $\vec{x}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{x}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{x})$ 的定义为：

$$\mathrm{d}\psi(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-\psi(\vec{x})$$

散度（divergence）的定义

矢量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\ \vec{A}$，定义为：

$$\mathrm{div}\ \vec{A}\equiv\lim_{V\to0^+}\frac{1}{V}\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

旋度（curl）的定义

矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 $\mathrm{curl}\ \vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\mathrm{curl}\ \vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与 $\partial\sigma$ 的正绕行方向满足右手定则。

直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A}=\partial_iA_i$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k$$

∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为：

$$\nabla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i$$

其中，∂_i 的定义为：

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ∇ 算子，可将梯度、散度、旋度表示为：

$$\mathrm{grad}\ \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi \equiv \nabla \psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \partial_i A_i \equiv \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \equiv \nabla \times \vec{A}$$

为了书写方便，以后用 $\nabla\psi, \nabla \cdot \vec{A}, \nabla \times \vec{A}$ 分别来指代标量场的梯度、矢量场的散度、矢量场的旋度。

梯度与方向导数的关系

方向导数

标量场 ψ 在 $\vec{x}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为：

$$\left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{v}} \equiv \lim_{t \to 0^+} \frac{\psi(\vec{x} + t\vec{v}) - \psi(\vec{x})}{tv}$$

从方向导数的定义可以看出，方向导数描述的是标量场沿某一方向变化的快慢。

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{x}$ 点处沿曲面上 $\vec{x}$ 点的外法向的方向导数简记为：

$$\left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial n}\right|_{\Sigma}$$

梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla \psi(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}\psi(\vec{x})$$

设 $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{n}\mathrm{d}x$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{x}$ 同向的单位向量，则有：

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi(\vec{x})$$

即：

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \frac{\mathrm{d}\psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi(\vec{x} + \mathrm{d}\vec{x}) - \psi(\vec{x})}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场 ψ 的梯度 $\nabla\psi$ 在某一方向 $\vec{n}$ 的投影恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

标量场的梯度的意义

考虑标量场梯度与方向导数的关系：

$$[\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = \left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

有

$$\left.\frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}} = [\nabla \psi(\vec{x})] \cdot \vec{n} = |\nabla \psi(\vec{x})|\,|\vec{n}| \cos\langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n}\rangle = |\nabla \psi(\vec{x})| \cos\langle \nabla\psi(\vec{x}), \vec{n}\rangle$$

上式中，$\vec{n}$ 为方向任意的单位向量。

对于确定的场点 $\vec{x}$，$\psi(\vec{x})$ 和 $\nabla\psi(\vec{x})$ 也是确定的，则 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 是确定的。

现在我们想看看 $\psi(\vec{x})$ 沿哪个方向的变化速度最快，也就是看 $\psi(\vec{x})$ 在哪个方向上的方向导数最大。

显然，在固定场点 $\vec{x}$ 的情况下，当 $\vec{n}$ 与 $\nabla\psi(\vec{x})$ 同向时，也即 $\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/\left|\nabla\psi(\vec{x})\right|$ 时，$\psi(\vec{x})$ 在 $\vec{n}$ 方向上的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$ 最大，这个最大的方向导数为

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial l}\right|_{\vec{n}=\nabla\psi(\vec{x})/|\nabla\psi(\vec{x})|}=|\nabla\psi(\vec{x})|\cos\left\langle\nabla\psi(\vec{x}),\vec{n}\right\rangle=|\nabla\psi(\vec{x})|$$

也就是说，标量场 $\psi(\vec{x})$ 的梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的方向就是标量场 $\psi(\vec{x})$ 方向导数最大的方向；标量场梯度 $\nabla\psi(\vec{x})$ 的大小 $|\nabla\psi(\vec{x})|$ 就是最大方向导数。

梯度定理

设 $\psi(\vec{x})$ 是任意标量场，C 是连结 $\vec{p},\vec{q}\in\mathbb{R}^3$ 的任一曲线，则有

$$\psi\left(\vec{p}\right)-\psi\left(\vec{q}\right)=\int\limits_{\vec{x}\in C[\vec{q}\to\vec{p}]}\nabla\psi(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}$$

散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla\cdot\vec{A}\equiv\lim_{V\to0^+}\frac{1}{V}\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V$$

旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{\Sigma}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

分析工具

$$
\begin{cases}
\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij} \\
\vec{\mathrm{e}}_i \times \vec{\mathrm{e}}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_k \\
\vec{A} = A_i \vec{\mathrm{e}}_i \\
A_i \delta_{ij} = A_j \\
\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\
\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k \\
\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\
\nabla = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \\
\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\
\nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \\
\partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\
\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\
\nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\
\nabla^2 \vec{A} \equiv \left(\nabla^2 A_i\right) \vec{\mathrm{e}}_i \\
\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\
\varepsilon_{{\color{red}i}jk}\varepsilon_{{\color{red}i}lm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\
\partial_i x_j = \delta_{ij}
\end{cases}
$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

与 $\vec{x}$ 有关的公式

> $\nabla \cdot \vec{x} = 3$

$$\nabla \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = 3$$

> $\nabla \times \vec{x} = \vec{0}$

$$\nabla \times \vec{x} = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i \delta_{jk} = \vec{0}$$

从左往右证的公式

> $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

$$
\begin{aligned}
\nabla(\varphi\psi) &= \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i(\varphi\psi) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_i \varphi \partial_i \psi + \vec{\mathrm{e}}_i \psi \partial_i \varphi \\
&= \varphi \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi + \psi \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \varphi \\
&= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi
\end{aligned}
$$

> $\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi\nabla \cdot \vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) &= \partial_i (\varphi\vec{A})_i \\
&= \partial_i(\varphi A_i) \\
&= \varphi \partial_i A_i + A_i \partial_i \varphi \\
&= \varphi \nabla \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\varphi \\
&= (\vec{A} \cdot \nabla)\varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A}
\end{aligned}
$$

> $\nabla \times (\varphi\vec{A}) = (\nabla\varphi) \times \vec{A} + \varphi\nabla \times \vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi\vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi+\varphi\partial_jA_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_jA_k+\varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k \\
&= (\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}
\end{aligned}
$$

> $\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i \\
&= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k) \\
&= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k \\
&= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k \\
&= B_k(\nabla\times\vec{A})_k-A_j(\nabla\times\vec{B})_j \\
&= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})
\end{aligned}
$$

> $\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l+A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-\vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} \\
&= \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)
\end{aligned}
$$

> $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_lA_m-\vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_mA_m-\partial_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

需要注意力的公式

> $\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\varphi) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k \\
&= \vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$，有：

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi &= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi \\
&= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

最后一步是因为 j,k 都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明：

$$
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}
$$

于是：

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}$$

> $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)&=\partial_i\left(\nabla\times\vec{A}\right)_i\\&=\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k\\&=\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k&=-\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_iA_k\\&=-\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k\end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k=0$$

这就是说：

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k=0$$

从右往左证的公式

> $\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)$

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\left(\nabla\times\vec{B}\right)_k\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m+\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\varepsilon_{klm}\partial_lB_m\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_iB_j\partial_lA_m+\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_iA_j\partial_lB_m\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_iB_j\partial_lA_m+(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_iA_j\partial_lB_m\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+\vec{\mathrm{e}}_lB_m\partial_lA_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_l\partial_lA_m+\vec{\mathrm{e}}_lA_m\partial_lB_m-\vec{\mathrm{e}}_mA_l\partial_lB_m\\=&B_i\partial_iA_j\vec{\mathrm{e}}_j+A_i\partial_iB_j\vec{\mathrm{e}}_j+B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lA_m-B_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m+A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lB_m-A_l\partial_lB_m\vec{\mathrm{e}}_m\\=&B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lA_m+A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_lB_m\\=&B_m\nabla A_m+A_m\nabla B_m\\=&\nabla(A_mB_m)\\=&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

高斯定理

> $\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_V\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V$

斯托克斯定理

> $\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_\Sigma\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

格林第一恒等式

> $\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_\Omega\left(\psi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}V$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\
&= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\
&= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi)+\psi\partial_i\partial_i\phi \\
&= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i+\psi\nabla^2\phi \\
&= (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)+\psi\nabla^2\phi
\end{aligned}
$$

于是由高斯定理，有:

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi\nabla\phi\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega}\left[(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)+\psi\nabla^2\phi\right]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega}\left[\psi\nabla^2\phi+(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right]\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

格林第二恒等式

> $\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{\Omega}\left(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V$

利用 $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$ 可得:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi) &= \nabla\phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot(\nabla\phi)-(\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot(\nabla\psi)) \\
&= \psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi
\end{aligned}
$$

于是由高斯定理可得:

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega}\left(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

高斯定理的一个推论

> $\oint\limits_{\partial V^+}\psi\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V$

对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x})\vec{a}$$

由高斯定理

$$\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V}(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

等式左边

$$\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint\limits_{\partial V^+}(\psi\vec{a})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial V^+}\psi\mathrm{d}\vec{S}$$

等式右边

$$\int\limits_{V}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V=\int\limits_{V}\left[\nabla\cdot(\psi\vec{a})\right]\mathrm{d}V=\int\limits_{V}\left[(\nabla\psi)\cdot\vec{a}+\psi\nabla\cdot\vec{a}\right]\mathrm{d}V=\int\limits_{V}(\nabla\psi)\cdot\vec{a}\mathrm{d}V=\vec{a}\cdot\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V$$

于是

$$\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial V^{+}}\psi\mathrm{d}\vec{S}=\vec{a}\cdot\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial V^{+}}\psi\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V}\nabla\psi\mathrm{d}V$$

斯托克斯定理的一个推论

> $\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l}=-\int\limits_{S}\nabla\psi\times\mathrm{d}\vec{S}$

对任意标量场 $\psi(\vec{x})$ 和任意常矢量 $\vec{a}$，构造矢量场

$$\vec{A}(\vec{x})\equiv\psi(\vec{x})\vec{a}$$

由斯托克斯定理

$$\oint\limits_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{S}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

等式左边

$$\oint\limits_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\limits_{\partial S}(\psi\vec{a})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l}$$

等式右边

$$\int\limits_{S}\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{S}\left[\nabla\times(\psi\vec{a})\right]\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{S}\left[(\nabla\psi)\times\vec{a}+\psi\nabla\times\vec{a}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{S}\left[(\nabla\psi)\times\vec{a}\right]\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{S}\left[\mathrm{d}\vec{S}\times(\nabla\psi)\right]\cdot\vec{a}=-\vec{a}\cdot\int\limits_{S}\nabla\psi\times\mathrm{d}\vec{S}$$

于是

$$\vec{a}\cdot\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l}=-\vec{a}\cdot\int\limits_{S}\nabla\psi\times\mathrm{d}\vec{S}$$

由 $\vec{a}$ 的任意性就得到

$$\oint\limits_{\partial S}\psi\mathrm{d}\vec{l}=-\int\limits_{S}\nabla\psi\times\mathrm{d}\vec{S}$$

第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

∇ 算子

直角坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

柱坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

∇^2 算子

直角坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

柱坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

内积空间

设 L 是一个域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。在 L 上定义一个映射

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: L\times L\to\mathbb{F}$$

若这个映射满足以下三个条件

(1)共轭对称：

$$\forall\psi,\phi\in L,\quad\langle\psi,\phi\rangle=\langle\phi,\psi\rangle^*$$

(2)对第二个元素是线性的，对第一个元素是反线性的：

$$\forall a\in\mathbb{F},\quad\psi,\phi\in L,\quad\langle\psi,a\phi\rangle=a\langle\psi,\phi\rangle,\quad\langle a\psi,\phi\rangle=a^*\langle\psi,\phi\rangle$$

(3)非负性：

$$\forall\psi\in L,\quad\langle\psi\mid\psi\rangle\geqslant 0$$

则称 L 是一个内积空间。映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 称为内积。

Hilbert 空间

完备的内积空间称为 Hilbert 空间。一般用 $\mathcal{H}$ 表示希尔伯特空间。

在量子力学中，一般用 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间中的向量。

线性空间上的各种算符

算符

线性空间 L 上的算符 O 是一个从 L 到 L 的映射：

$$O: L\to L$$

因此有

$$\forall\psi \in L, \quad O\psi \in L$$

算符加法

$$(A+B)\psi = A\psi + B\psi$$

算符乘法

$$(AB)\psi = A(B\psi)$$

算符的对易括号

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

线性算符

$$O(a\psi + b\phi) = aO\psi + bO\phi$$

对称算符与反对称算符

线性算符的转置

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的转置 O^{T} 由下式定义

$$\forall\psi, \phi \in L, \quad \left\langle\phi, O^{\mathrm{T}}\psi\right\rangle = \langle\psi, O\phi\rangle$$

对称算符

$$O^{\mathrm{T}} = O$$

反对称算符

$$O^{\mathrm{T}} = -O$$

线性算符的复共轭算符

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的复共轭算符，记为 O^*，由下式定义

$$\forall\psi, \phi \in L, \quad \langle\phi, O^*\psi\rangle = \langle\phi, O\psi\rangle^*$$

线性算符的伴随算符

设 O 是 L 上的线性算符，则 O 的伴随算符，记为 $O^\dagger$，由下式定义

$$\forall\psi, \phi \in L, \quad \left\langle\phi, O^\dagger\psi\right\rangle = \langle O\phi, \psi\rangle$$

注意到

$$\langle O\phi, \psi\rangle = \left(\langle O\phi, \psi\rangle^*\right)^* = \langle\psi, O\phi\rangle^* = \left\langle\phi, O^{\mathrm{T}}\psi\right\rangle^* = \left\langle\phi, \left(O^{\mathrm{T}}\right)^*\psi\right\rangle$$

即

$$\left\langle\phi, O^\dagger\psi\right\rangle = \left\langle\phi, \left(O^{\mathrm{T}}\right)^*\psi\right\rangle$$

对比得

$$O^\dagger = \left(O^{\mathrm{T}}\right)^*$$

性质

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

例题

证明线性算符 O 的伴随算符 $O^\dagger$ 也是线性算符。

$$\begin{aligned}\forall \psi,\phi,\chi\in\mathcal{L},\quad \left\langle \chi, O^\dagger\left(a\psi+b\phi\right)\right\rangle &= \left\langle O\chi, a\psi+b\phi\right\rangle \\ &= a\left\langle O\chi,\psi\right\rangle + b\left\langle O\chi,\phi\right\rangle \\ &= a\left\langle \chi, O^\dagger\psi\right\rangle + b\left\langle \chi, O^\dagger\phi\right\rangle \\ &= \left\langle \chi, aO^\dagger\psi+bO^\dagger\phi\right\rangle\end{aligned}$$

前后对比得

$$O^\dagger\left(a\psi+b\phi\right) = aO^\dagger\psi + bO^\dagger\phi$$

厄米算符

$$O^\dagger = O$$

例题

设 A,B 是厄米算符，则 $[A,B]=0$ 的充要条件是 $(AB)^\dagger = AB$.

若 $[A,B]=0$，即 $AB=BA$，则

$$(AB)^\dagger = (BA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger = AB$$

若 $(AB)^\dagger = AB$，则

$$AB = (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$$

于是

$$[A,B]\equiv AB-BA=0$$

例题

证明：复内积空间 L 中的线性算符 A 为厄米算符的充要条件是 $\forall\phi\in L, \langle\phi, A\phi\rangle\in\mathbb{R}$.

若 A 为厄米算符，即 $A^\dagger = A$ 则

$$\langle\phi, A\phi\rangle = \left\langle\phi, A^\dagger\phi\right\rangle = \langle A\phi,\phi\rangle = \langle\phi, A\phi\rangle^*$$

前后对比得

$$\langle\phi, A\phi\rangle\in\mathbb{R}$$

把上面过程反过来就能证明必要性。

线性算符的本征值和本征向量

形如

$$A\psi=\lambda\psi,\quad \lambda\in K,\psi\in\mathcal{L}$$

的方程称为 A 的本征方程。λ 称为 A 的本征值，ψ 称为 A 的本征向量。

若某个本征值 λ_i 对应着 n 个线性独立的 $\psi_{ij}, j=1,2,\cdots,n$，则称本征值 λ_i 是 n 重简并的。

例题

厄米算符的本征值是实数。

$$A\psi=\lambda\psi,\quad A^\dagger = A$$

一方面

$$\langle\psi, A\psi\rangle = \langle\psi, \lambda\psi\rangle = \lambda\langle\psi, \psi\rangle$$

另一方面

$$\langle\psi, A\psi\rangle = \left\langle\psi, A^{\dagger}\psi\right\rangle = \langle A\psi, \psi\rangle = \langle\lambda\psi, \psi\rangle = \lambda^{*}\langle\psi, \psi\rangle$$

对比得

$$\lambda^{*} = \lambda$$

例题

属于厄米算符不同本征值的本征向量是正交的。

设厄米算符 A 的本征向量 ψ_1, ψ_2 分别对应本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$，则有

$$A\psi_1 = \lambda_1\psi_1, \quad A\psi_2 = \lambda_2\psi_2$$

一方面

$$\langle\psi_2, A\psi_1\rangle = \langle\psi_2, \lambda_1\psi_1\rangle = \lambda_1\langle\psi_2, \psi_1\rangle$$

$$\langle\psi_2, A\psi_1\rangle = \left\langle\psi_2, A^{\dagger}\psi_1\right\rangle = \langle A\psi_2, \psi_1\rangle = \langle\lambda_2\psi_2, \psi_1\rangle = \lambda_2^{*}\langle\psi_2, \psi_1\rangle = \lambda_2\langle\psi_2, \psi_1\rangle$$

作差得

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\psi_2, \psi_1\rangle = 0$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，于是

$$\langle\psi_2, \psi_1\rangle = 0$$

例题

假设体系处在纯态 $|\psi\rangle$，若对体系的可观测物理量 O 进行测量，证明测量期望值 $\langle O\rangle$ 可表达为

$$\langle O\rangle = \langle\psi\,|\,O\,|\,\psi\rangle$$

考虑本征值离散情况，本征方程

$$O\,|n\rangle = o_n\,|n\rangle$$

利用正交性关系和完备性关系

$$\langle n\,|\,n'\rangle = \delta_{n,n'}, \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = I$$

有

$$\begin{aligned}
O &= IOI \\
&= \left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right) O \left(\sum_{n'} |n'\rangle\langle n'|\right) \\
&= \sum_{n,n'} \langle n\,|\,O\,|\,n'\rangle\,|n\rangle\langle n'| \\
&= \sum_{n,n'} \langle n\,|\,o_{n'}\,|\,n'\rangle\,|n\rangle\langle n'| \\
&= \sum_{n,n'} o_{n'}\langle n\,|\,n'\rangle\,|n\rangle\langle n'| \\
&= \sum_{n,n'} o_{n'}\delta_{n,n'}\,|n\rangle\langle n'| \\
&= \sum_n o_n\,|n\rangle\langle n|
\end{aligned}$$

量子力学告诉我们，在 $|\psi\rangle$ 态下对可观测量 O 进行测量，测得 o_n 的概率为 $|\langle n\,|\,\psi\rangle|^2$，于是期望值

$$
\begin{aligned}
\langle O\rangle &\equiv \sum_n o_n \left|\langle n \,|\, \psi\rangle\right|^2 \\
&= \sum_n o_n \langle n \,|\, \psi\rangle^* \langle n \,|\, \psi\rangle \\
&= \sum_n o_n \langle \psi \,|\, n\rangle \langle n \,|\, \psi\rangle \\
&= \left\langle \psi \,\middle|\, \sum_n o_n \,|\, n\rangle \langle n \,| \,\middle|\, \psi \right\rangle \\
&= \langle \psi \,|\, O \,|\, \psi\rangle
\end{aligned}
$$

例题

已知若体系以 p_i 的概率处于纯态 $|\psi_i\rangle$，则体系的状态可用密度矩阵

$$
\rho \equiv \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|
$$

来描述。证明在上述状态下对可观测量 O 进行测量，测量期望值 $\langle O\rangle$ 可写为

$$
\langle O\rangle = \operatorname{Tr}(\rho O)
$$

其中，求迹操作 $\operatorname{Tr}(\cdot)$ 的定义为：设 $\{|j\rangle\}$ 是任意一组正交完备基，则

$$
\operatorname{Tr}(O) \equiv \sum_j \langle j \,|\, O \,|\, j\rangle
$$

考虑本征值离散情况，本征方程

$$
O|n\rangle = o_n |n\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
\langle O\rangle &\equiv \sum_i p_i \sum_n o_n \left|\langle n \,|\, \psi_i\rangle\right|^2 \\
&\equiv \sum_i p_i \sum_n o_n \langle n \,|\, \psi_i\rangle \langle n \,|\, \psi_i\rangle^* \\
&\equiv \sum_i p_i \sum_n o_n \langle n \,|\, \psi_i\rangle \langle \psi_i \,|\, n\rangle \\
&\equiv \sum_i \sum_n o_n p_i \langle n \,|\, \psi_i\rangle \langle \psi_i \,|\, n\rangle \\
&\equiv \sum_n \sum_i o_n p_i \langle n \,|\, \psi_i\rangle \langle \psi_i \,|\, n\rangle \\
&\equiv \sum_n o_n \langle n| \left(\sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|\right) |n\rangle \\
&\equiv \sum_n o_n \langle n| \rho |n\rangle \\
&\equiv \sum_n \langle n| \rho o_n |n\rangle \\
&\equiv \sum_n \langle n| \rho O |n\rangle \\
&= \operatorname{Tr}(\rho O)
\end{aligned}
$$

例题

利用 Schwarz 不等式

$$
\forall |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle \alpha \,|\, \alpha\rangle \langle \beta \,|\, \beta\rangle \geqslant \left|\langle \alpha \,|\, \beta\rangle\right|^2
$$

以及不等式

$$
\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 \geqslant |\operatorname{Im}(z)|^2
$$

推导不确定性关系

$$\forall\,|\psi\rangle\in\mathcal{H},\quad \Delta A\Delta B\geqslant\frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$$

其中 A,B 是厄米算符，

$$\langle O\rangle=\langle\psi\,|\,O\,|\,\psi\rangle\,,\quad \Delta O\equiv\sqrt{\left\langle\left(O-\langle O\rangle\right)^2\right\rangle}$$

注意到对于厄米算符 O，有

$$\begin{aligned}\forall\,|\psi\rangle\in\mathcal{H},\quad \Delta O&\equiv\sqrt{\left\langle\left(O-\langle O\rangle\right)^2\right\rangle}\\&=\sqrt{\langle\left(O-\langle O\rangle\right)\left(O-\langle O\rangle\right)\rangle}\\&=\sqrt{\left\langle O^2-2\,\langle O\rangle\,O+\langle O\rangle^2\right\rangle}\\&=\sqrt{\langle O^2\rangle-2\,\langle O\rangle\,\langle O\rangle+\langle O\rangle^2}\\&=\sqrt{\langle O^2\rangle-\langle O\rangle^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\psi\,\middle|\,\left(O-\langle O\rangle\right)^\dagger\left(O-\langle O\rangle\right)\,\middle|\,\psi\right\rangle&=\langle\psi\,|\,\left(O^\dagger-\langle O\rangle^*\right)\left(O-\langle O\rangle\right)|\,\psi\rangle\\&=\langle\psi\,|\,\left(O-\langle O\rangle\right)\left(O-\langle O\rangle\right)|\,\psi\rangle\\&=\left\langle\psi\,\middle|\,\left(O-\langle O\rangle\right)^2\,\middle|\,\psi\right\rangle\end{aligned}$$

令 $|\alpha\rangle=\left(A-\langle A\rangle\right)|\psi\rangle\,,|\beta\rangle=\left(B-\langle B\rangle\right)|\psi\rangle$，则

$$\begin{aligned}\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle&=\left\langle\psi\,\middle|\,\left(A-\langle A\rangle\right)^2\,\middle|\,\psi\right\rangle=\left\langle\left(A-\langle A\rangle\right)^2\right\rangle=\left(\Delta A\right)^2\\\langle\beta\,|\,\beta\rangle&=\left\langle\psi\,\middle|\,\left(B-\langle B\rangle\right)^2\,\middle|\,\psi\right\rangle=\left\langle\left(B-\langle B\rangle\right)^2\right\rangle=\left(\Delta B\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha\,|\,\beta\rangle&=\langle\psi\,|\,\left(A^\dagger-\langle A\rangle^*\right)\left(B-\langle B\rangle\right)|\,\psi\rangle\\&=\langle\psi\,|\,\left(A-\langle A\rangle\right)\left(B-\langle B\rangle\right)|\,\psi\rangle\\&=\langle\psi\,|\,AB-\langle A\rangle\,B-\langle B\rangle\,A+\langle A\rangle\,\langle B\rangle\,|\,\psi\rangle\\&=\langle AB\rangle-\langle A\rangle\,\langle B\rangle-\langle B\rangle\,\langle A\rangle+\langle A\rangle\,\langle B\rangle\\&=\langle AB\rangle-\langle A\rangle\,\langle B\rangle\end{aligned}$$

$$\langle\beta\,|\,\alpha\rangle=\langle BA\rangle-\langle B\rangle\,\langle A\rangle$$

$$\begin{aligned}\left|\langle\alpha\,|\,\beta\rangle\right|^2&\geqslant\left|\mathrm{Im}\,\langle\alpha\,|\,\beta\rangle\right|^2\\&=\left|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\langle\alpha\,|\,\beta\rangle-\langle\alpha\,|\,\beta\rangle^*\right)\right|^2\\&=\left|\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\langle\alpha\,|\,\beta\rangle-\langle\beta\,|\,\alpha\rangle\right)\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left|\langle AB\rangle-\langle BA\rangle\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left|\langle AB-BA\rangle\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2\end{aligned}$$

代入 Schwarz 不等式 $\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle\,\langle\beta\,|\,\beta\rangle\geqslant\left|\langle\alpha\,|\,\beta\rangle\right|^2\geqslant\left[\mathrm{Im}\,\langle\alpha\,|\,\beta\rangle\right]^2$，有

$$\left(\Delta A\right)^2\left(\Delta B\right)^2\geqslant\frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle\right|^2$$

即

$$\Delta A\Delta B\geqslant\frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$$

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,\ \ \theta \in \mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z) : \mathbb{C}^{\mathrm{R}} \to \mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},\ \ a_i, b_i \in \mathbb{C},\ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z) = \mathrm{e}^z$$

对数函数

$$f(z) = \ln z$$

幂函数

$$f(z) = z^a,\ \ a \in \mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质：

$$\cos(-z) = \cos(z),\ \ \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z),\ \ \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$|\cos z|, |\sin z|$ 可以大于 1，这与实三角函数不同。

双曲函数

$$\cosh z \equiv \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

双曲函数的性质：

$$\sinh(z+\mathrm{i}2\pi)=\sinh z$$

$$\cosh(z+\mathrm{i}2\pi)=\cosh z$$

$$\cosh(-z)=\cosh z$$

$$\sinh(-z)=-\sinh z$$

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$$

第5章 解析函数

复变函数的导数

复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时，都有：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续。

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z=z-z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)**。

命题的证明

设 $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地，

（1）令：

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\Delta x\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（2）令：

$$\Delta x=0,\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

复变函数的解析性

复变函数的解析性

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析的**。

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 Ω 内是**解析的**，或称为**全纯的**。

相关定理

定理1

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 Ω 为解析函数 $\Longleftrightarrow$ 在与复平面 Ω 相应的实平面区域内 $u(x,y),v(x,y)$ 可微，且 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 C-R 条件。

特别地，若 $f(z)$ 为 Ω 上的连续函数，则 $f(z)$ 是 Ω 上的解析函数 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 满足 C-R 条件。

定理2

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，且 $f(z)$ 为实函数，即 $f(z)=f^*(z)$，则 $f(z)$ 为常数。

定理3

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$，即 $f(z,z^*)$ 不依赖于 z^*

定理4

在复平面区域 Ω 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是平面区域 Ω 内的调和函数（即满足二维拉普拉斯方程 $\nabla^2u(x,y)=0,\nabla^2v(x,y)=0$ 的函数）。

例题

例1

> 已知解析函数的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y \tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$，则：

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C$$

于是：

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+C)\end{aligned}$$

例2

> 请证明：柱坐标系下的解析函数 $f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$ 满足的 C-R 方程：
>
> $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\\tan\varphi=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial\tan\varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial\tan\varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) = -\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right] \tag{2}
$$

$(1)\times\cos\varphi + (2)\times\sin\varphi$ 得到:

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}
$$

$(2)\times\cos\varphi - (1)\times\sin\varphi$ 得到:

$$
\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}
$$

例3

> 已知解析函数的虚部 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ，求该解析函数。

$$
\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

于是:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

极坐标变换:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\\mathrm{d}y=\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\end{cases}$$

于是:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho+\frac{\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\varphi\\&=\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

于是:

$$u=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+C=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$$

综上,

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+C\right)+\mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

第6章 复变函数积分

复变函数积分

复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域 Ω 中，沿某一曲线 C 的**有向**的**线积分**，记为 $\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z$，其定义为:

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\|z_j-z_{j-1}|\to0}}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$$

把 C 分成 n 段，ξ_j 是 C 上 z_{j-1} 点到 z_j 点的中的某一点。

复变函数积分的性质

$$\left|\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int\limits_C|f(z)|\,|\mathrm{d}z|$$

柯西积分定理

单连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 Ω 上解析，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有:

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

多连通区域的柯西积分定理

设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的回路 C 内的复连通区域内解析，规定 $C; C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的正方向为逆时针，则:

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_{C_1^+} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{C_2^+} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint\limits_{C_k^+} f(z)\mathrm{d}z$$

柯西积分公式

若 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则:

$$\oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0)$$

解析函数高阶导数的积分表达式

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，有:

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}f(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

第7章 复变函数的级数展开

解析函数的泰勒展开

设 z_0 为函数 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

其中，展开系数为:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

解析函数的洛朗展开

复变函数的零点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点的函数值 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 复变函数 $f(z)$ 的零点。

复变函数的奇点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点**不解析**，即 $f(z)$ 在 z_0 点的导数不存在或不唯一，则称 z_0 为复变函数 $f(z)$ 的奇点。

奇点的分类

孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

非孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，除 z_0 点外存在 $f(z)$ 的其他奇点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

孤立奇点的分类

极点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点。

本性奇点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若**不存在**一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

可去奇点：设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点没有定义，但在 z_0 的去心邻域内解析，此时可定义 $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

解析函数的洛朗展开定理

若函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线。

例题

例1

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内，在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

$0 < |z| < 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$：

由于 $|z| < 1$，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

$|z| > 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$：

注意到 $|z| > 1$，则 $|1/z| < 1$，于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}
$$

例2

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

$f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-0| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^{n}
\end{aligned}
$$

$f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-1| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{n} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} (z-1)^{n} \\
&= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{n} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{n}
\end{aligned}
$$

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

留数定理

留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，设 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中的洛朗展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为 $\mathrm{Res}f(z_0)$，定义为：

$$\mathrm{Res}f(z_0)\equiv a_{-1}$$

其中，a_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数

留数的求法

定义法

直接把 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 点作洛朗展开，找到 $(z-z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1}，由留数的定义可知：

$$\mathrm{Res}f(z_0)\equiv a_{-1}$$

极限法

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，$f(z)$ 可在其孤立奇点 z_0 点作如下的洛朗展开：

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \ a_{-m}\neq 0$$

则：

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

特殊情况

若 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}, z_0$ 为 $g(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则：

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即：

$$\oint_{C^+}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}f(z_j)$$

例1

> 计算回路积分 $I=\oint_{l^+}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$ ，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i},z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\&=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)\\&=\lim_{z\to1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\oint\limits_l\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}f(z_1)+\mathrm{Res}f(z_2)\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\\&=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\end{aligned}$$

留数定理在实积分中的应用

计算无穷限奇异积分的柯西主值

利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分：

$$I=\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中，$f(\cos\theta,\sin\theta)$ 为不包含有孤立奇点 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数。

计算此类积分，利用欧拉公式换元，将实积分转换为复平面单位圆上的复积分，最后利用留数定理计算积分。

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有：

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$$

于是：

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \oint\limits_{C^+} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

其中，C 是以复平面原点为圆心的单位圆周，即 $C:|z|=1$

例1

> 计算定积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$，其中 $0<\varepsilon<1$

令：

$$
z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\ \ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

其中，C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$，被积函数的两个一阶极点为：

$$
z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},\ \ z_2=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}
$$

被积函数 $f(z)$ 可写为：

$$
f(z)=\frac{1}{\varepsilon(z-z_1)(z-z_2)}
$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{\varepsilon(z-z_2)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon(z_1-z_2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

由留数定理，有：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_1) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

于是积分为：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2}{\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

例2

> 计算定积分：$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} \mathrm{d}\theta$

$$
z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \ z^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\ \ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right),\ \ \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - z^{-1}\right)
$$

设 C 是复平面上的单位圆，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \oint\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

令 $f(z) = \dfrac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i}}$，$f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1 = 2 - \mathrm{i}, z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$，只有 z_2 在单位圆 C 内。

由于 z_1, z_2 是 $(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i} = 0$ 的两根，于是 $f(z)$ 可表达为：

$$
f(z) = \frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}
$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z_2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \to z_2} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} (z - z_2) f(z) \\
&= \lim_{z \to z_2} \frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)} \\
&= \frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z_2-z_1)} \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

于是由留数定理，有：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i}} &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res} f(z_2) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I &= 2 \oint\limits_{C^+} \frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2 + 6\mathrm{i}z - 1 - 2\mathrm{i}} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

第9章 傅里叶变换

傅里叶级数

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，其元素是周期为 $2l$ 的单变量函数，$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 上两个元素的内积，记为 $\langle f_1, f_2 \rangle$，定义为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

其中，x 是参数，而内积与参数无关。有时为了指明参数，也将内积写为：

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 是实函数，则内积可简化为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x) f_2(x) \mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

三角函数基的傅里叶级数

容易验证如下结论：

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} \mathrm{d}x = 1 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = \delta_{n,m}, \quad n = 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \cdots
\end{cases}$$

函数系 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x; \ n, m = 1, 2, \cdots \right\}$ 是一个完备的正交归一函数族，它们可作为基矢张成 $\mathcal{H}$。

这个函数系具体写出来是：

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi}{l} x, \cdots \right\}$$

任意一个周期为 $2l$ 的，满足狄利克雷条件的函数 $f(x)$ 可写成这些基函数的线性组合，即 $f(x)$ 可展成傅里叶级数：

$$f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

为求出线性组合的系数，只需要利用“这组基是正交归一完备的”这一性质，比如：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{k',k} \\
&= a_{k'}
\end{aligned}$$

总之：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x) \right\rangle = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x \\
a_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{k\pi}{l}x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{k\pi}{l}x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \\
b_k &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{k\pi}{l}x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{k\pi}{l}x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

e 指数基的傅里叶级数

注意到：

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x = \delta_{m,n}
$$

函数系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}, m\in\mathbb{Z}\right\}$ 可作为以 2π 为周期的函数为元素的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一组正交完备归一基矢，以 2π 为周期的函数 f 在这组基矢上的展开式为：

$$
f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}
$$

利用正交归一条件：

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)^* \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x \\
&= \delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

内积可得系数：

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n} \\
&= C_n
\end{aligned}
$$

即系数 C_m 可通过内积求得：

$$
C_m = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}, f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right)^* \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x
$$

傅里叶变换(to be continued)

傅里叶分解与傅里叶变换

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f(x)$ 可进行**傅里叶分解**（将 $f(x)$ 分解为无穷多不同频率 k 的基函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的线性叠加）：

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k
$$

其中，系数 $C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换（或频谱）。

为求出系数 $C(k)$ 的表达式，令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}$ 与上式两端内积，等式仍成立：

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x) \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \right\rangle$$

根据内积的定义，分别计算内积：

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x) \right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\right)^* f(x)\mathrm{d}x \\ &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\right)^* \left(\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}k\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x\mathrm{d}k \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}k \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\delta(k-k')\mathrm{d}k \\ &= C(k')\end{aligned}$$

$$C(k') = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}x$$

将 k' 替换成 k，即：

$$C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

这就得到了 $f(x)$ 的傅里叶分解 $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$ 中系数 $C(k)$ 的表达式。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k,\ \ C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其中，系数 $C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换（或频谱），也记为：

$$C(k) \equiv \mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

也就是说，函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$ 是一个关于 k 的函数，其表达式为：

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

傅里叶变换的基本性质

线性定理

$$\mathscr{F}\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} = \alpha_1\mathscr{F}\{f_1\} + \alpha_2\mathscr{F}\{f_2\}$$

延迟定理

$$\mathscr{F}\{f(x-x_0)\}(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

位移定理

设 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k) = C(k)$，则：

$$\mathscr{F}\{f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}\}(k) = C(k-k_0)$$

标度变换定理

设 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)=C(k)$，则:

$$\mathscr{F}\{f(ax)\}(k)=\frac{1}{|a|}C\left(\frac{k}{a}\right)$$

微分定理

设当 $|x|\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，则有:

$$\mathscr{F}\{f'(x)\}(k)=\mathrm{i}k\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(x)\}(k)=(\mathrm{i}k)^n\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

卷积定理

$$f_1(x)*f_2(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\mathscr{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}(k)=\mathscr{F}\{f_1(x)\}(k)\mathscr{F}\{f_2(x)\}(k)$$

第10章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数 $t\in[0,+\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)\equiv F(p)\equiv\int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中，$p=s+\mathrm{i}\sigma,s\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}$
，e^{-pt} 称为拉普拉斯变换核，$F(p)$ 称为像函数，也记为:

$$F(p)\risingdotseq f(t),\quad f(t)\fallingdotseq F(p)$$

拉普拉斯变换的性质（两种记号）

线性定理

若 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$，则:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1f_1(t)+\alpha_2f_2(t)\}(p)=\alpha_1\mathcal{L}\{f_1(t)\}(p)+\alpha_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设 $f_1(t)\fallingdotseq F_1(p),f_2(t)\fallingdotseq F_2(p)$，则:

$$\alpha_1f_1(t)+\alpha_2f_2(t)\fallingdotseq\alpha_1F_1(p)+\alpha_2F_2(p)$$

延迟定理

设 $\tau>0$，则:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p)=\mathrm{e}^{-\tau p}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设 $f(t)\fallingdotseq F_(p),\tau>0$，则:

$$f(t-\tau)H(t-\tau)\fallingdotseq\mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$$

其中，定义了阶跃函数 H:

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & ,t > 0 \\ 0 & ,t \leqslant 0 \end{cases}$$

位移定理

设 $\lambda \in \mathbb{C}$，则:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\right\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\lambda)$$

设 $f(t) \risingdotseq F(p), \lambda \in \mathbb{C}$，则:

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p+\lambda)$$

标度变换定理

设 $a > 0$，则:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{a}\right)$$

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则:

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$$

卷积定理

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中，卷积的定义为:

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

设 $f_1(t) \risingdotseq F_1(p), f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$，则:

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) F_2(p)$$

微分定理

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 \cdot f^{(n-1)}(0)$$

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 f^{(n-1)}(0)$$

特别地:

$$f^{(1)}(t) \risingdotseq p^1 F(p) - p^0 f^{(0)}(0)$$

$$f^{(2)}(t) \risingdotseq p^2 F(p) - p^1 f^{(0)}(0) - p^0 f^{(1)}(0)$$

积分性质

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t}_{n\text{重积分}} f(t)\right\}(p) = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t}_{n\text{重积分}} f(t) \fallingdotseq \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

周期函数变换定理

若 $f(t) = f(t+T)$，则:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

若 $f(t) = f(t+T)$，则:

$$f(t) \fallingdotseq \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

常用拉普拉斯变换及反演

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p},\ \ \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(p) = \frac{1}{p-a},\ \ \mathrm{Re}\, p > a$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p) = \frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin at\}(p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos at\}(p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1,\ \ \frac{1}{p^2} \risingdotseq t,\ \ \frac{n!}{p^{n+1}} \risingdotseq t^n$$
$$\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t},\ \ \frac{n!}{(p-n)^{n+1}} \risingdotseq t^n\mathrm{e}^{\alpha t}$$
$$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \risingdotseq \sin\alpha t,\ \ \frac{p}{p^2+\alpha^2} \risingdotseq \cos\alpha t$$

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \fallingdotseq \sinh \alpha t, \quad \frac{p}{p^2-\alpha^2} \fallingdotseq \cosh \alpha t$$

拉普拉斯变换的应用

解常微分方程

例1

> 用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：
>
> $$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=E \\ i(0)=0 \end{cases}$$

设 $i(t) \risingdotseq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \risingdotseq p^1F(p)-p^0i^{(0)}(0)=pF(p)-i(0)=pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p)=\frac{1}{p}, \ \ \mathrm{Re}\, p>0, \ \ \text{or} \ \ 1 \risingdotseq \frac{1}{p}$$

对方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=+Ri(t)=E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p)+RF(p)=\frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$：

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2+Rp} \\ &= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p+R/L}\right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p-\alpha} \fallingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \fallingdotseq 1, \quad \frac{1}{p+R/L} \fallingdotseq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p)=\dfrac{E}{R}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p+R/L}\right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

第11章 δ 函数

δ 函数的定义

δ 函数是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的广义函数，其满足：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & ,x\neq x_0\\ +\infty & ,x=x_0\end{cases},\quad 且\int_a^b\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & ,x_0\in(a,b)\\ 0 & ,x_0\notin(a,b)\end{cases}$$

δ 函数的性质

（1）设 $f(x)$ 为连续函数，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$$

（2）$\delta(x)$ 是偶函数：

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

（3）：

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

（4）：

$$x\delta(x)=0$$

（5）：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x=\delta(x_1-x_2)$$

（6）：设 $\{x_i\}$ 为 $\varphi(x)$ 的单根，即 $\varphi(x_i)=0$ 且 $\varphi'(x_i)\neq 0$，则：

$$\delta(\varphi(x))=\sum_i\frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

简单例子：

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

三维 δ 函数

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}0 & ,\vec{r}\neq\vec{r}_0\\ +\infty & ,\vec{r}=\vec{r}_0\end{cases},且\int_V\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\mathrm{d}^3\vec{r}=1,\vec{r}_0\in V$$

三维直角坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

三维球坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

三维柱坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

不同形式的 δ 函数

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}$$

$$\delta(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

δ 函数的傅里叶展式和傅里叶变换

一维

设 $\delta(x-x_0)$ 可展为：

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

其中，系数 $C(k)$ 就是 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶变换 $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)$，即：

$$\begin{aligned}C(k)&=\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)\\&=\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\end{aligned}$$

代回 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶展式，可得：

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k}\mathrm{d}k}$$

三维

$$\begin{aligned}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)&=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{d}k_x\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{d}k_y\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_z\right)\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}}$$

例题

例1

> 证明：$\delta(\vec{r})=-\dfrac{1}{4\pi}\nabla^2\dfrac{1}{r}$

当 $\vec{r} \neq \vec{0}$，有：

$$
\begin{aligned}
\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \\
\nabla^2 \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \\
&= \nabla \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\
&= -\left(\vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\nabla \cdot \vec{r}\right) \\
&= -\left(\vec{r} \cdot \left(-3r^{-4}\frac{\vec{r}}{r}\right) + \frac{1}{r^3} \cdot 3\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\nabla^2 \frac{1}{r}$ 在 $\vec{r} = \vec{0}$ 处无定义，但可人为定义其在 $\vec{0}$ 处的函数值为 $+\infty$

取以坐标原点为球心，半径为 R 的一个球体 V，

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\vec{r}\in V} -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \frac{1}{r}\mathrm{d}^3\vec{r} &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\vec{r}\in V} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}^3\vec{r} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V^+} \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V^+} -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2}\oint\limits_{\partial V^+} \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

第12章 小波变换初步

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题

波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

波动方程（双曲方程）

$$u_{tt} - a^2\nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

输运方程（抛物方程）

$$u_t - a^2\nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

泊松方程（椭圆方程）

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0$$

波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

定解条件包括**初始条件**和**边界条件**。

初始条件

波动方程初始条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布**和**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布：

$$\begin{cases} u(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \end{cases}$$

输运方程初始条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布**或**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布：

$$u(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r})$$

或：

$$u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r})$$

泊松方程初始条件

泊松方程没有初始条件（稳定场，场量不随时间改变）

边界条件

第一类边界条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在边界 $\partial\Omega$ 处的取值所要满足的条件

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第一类齐次边界条件**：

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = 0$$

第二类边界条件

场量沿边界的外法线的梯度对时间的依赖关系

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第二类齐次边界条件**：

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} = 0$$

第三类边界条件

$$\left(\alpha u(\vec{r},t) + \beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega} = g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第三类齐次边界条件**：

$$\left(\alpha u(\vec{r},t) + \beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega} = 0$$

自然边界条件

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即：

$$|u| < +\infty$$

周期性边界条件

场函数 $u(\vec{r}, t)$ 具有空间周期性。

衔接条件

若研究的区域 Ω 可分成几个性质不同的子区域，则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件。

波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

波动方程定解条件

$$\begin{cases} u_{tt}(\vec{r}, t) - a^2\nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r}, t) + \beta\dfrac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r}, t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

输运方程定解条件

$$\begin{cases} u_t(\vec{r}, t) - a^2\nabla^2 u = f(\vec{r}, t) \\ u(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \text{ or } u_t(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r}, t) + \beta\dfrac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r}, t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

泊松方程定解条件

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r}) + \beta\dfrac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega} = g(\vec{r}s)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

第14章 分离变量法

例1

> 求解四边固定，x, y 方向上边长分别为 l, d 的矩形薄膜的本征振动（即求本征振动频率和本征振动函数）

矩形薄膜的振动满足二维波动方程。这里采用直角坐标，结合“四周固定”这一边界条件，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}\right) = 0 \\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0 \\ u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

设 $u(x, y, t)$ 可分离变量：

$$u(x, y, t) = U(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$$

代入波动方程可得：

$$X(x)Y(y)T''(t)-a^2\left[Y(y)T(t)X''(x)+X(x)T(t)Y''(y)\right]=0$$

上式两边同时除以 $X(x)Y(y)T(t)$ 得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}-a^2\left[\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right]=0$$

观察可知，必定有:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2,\quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-k_x^2,\quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2$$

将上式代入上上式，可知 ω, k_x, k_y 满足:

$$\omega^2=a^2\left(k_x^2+k_y^2\right)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k_x^2 \Longrightarrow X(x)=A\cos(k_x x)+B\sin(k_x x)$$

结合边界条件 $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0$ 可得:

$$A=0,\quad k_x^{(n)}=\frac{n\pi}{l},\quad n=1,2,\cdots$$

因此，$X(x)$ 的本征函数为:

$$X^{(n)}=B^{(n)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2 \Longrightarrow Y(y)=C\cos(k_y y)+D\sin(k_y y)$$

结合边界条件 $u\big|_{y=0}=u\big|_{y=d}=0$ 可得:

$$C=0,\quad k_y^{(m)}=\frac{m\pi}{d},\quad m=1,2,\cdots$$

因此，$Y(y)$ 的本征函数为:

$$Y^{(m)}=D^{(m)}\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)$$

由 $U(x,y)=X(x)Y(y)$ 可知，本征振动函数为:

$$\begin{aligned}U^{(nm)}(x,y)&=X^{(n)}(x)Y^{(m)}(y)\\&=B^{(n)}D^{(m)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)\\&\equiv E^{(nm)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right),\quad E^{(nm)}\equiv B^{(n)}D^{(m)},\quad n,m=1,2,\cdots\end{aligned}$$

由 $\omega^2=a^2\left(k_x^2+k_y^2\right)$ 可知，本征振动频率为:

$$\begin{aligned}\omega^{(nm)}&=a\sqrt{\left(k_x^{(n)}\right)^2+\left(k_y^{(m)}\right)^2}\\&=a\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2},\quad n,m=1,2,\cdots\end{aligned}$$

例2

> 求定解问题:

> $$
> \begin{cases}
> u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\
> u_x\Big|_{x=0}=0\\
> u_x\Big|_{x=l}=0\\
> u\Big|_{t=0}=\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)+0.3\cos\left(\dfrac{3\pi x}{l}\right)\\
> u_t\Big|_{t=0}=0
> \end{cases}
> $$

设:

$$u(x,t)=U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 可得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=a^2\frac{U''(x)}{U(x)}=-\omega^2$$

$$T''(t)+\omega^2T(t)=0\Longrightarrow T(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$T'(t)=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$$

$$u_t\Big|_{t=0}=0\Longrightarrow T'(t)\Big|_{t=0}=0\Longrightarrow B=0$$

因此:

$$T(t)=A\cos\omega t$$

令:

$$k\equiv\frac{\omega}{a},\ \ k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x)+k^2U(x)=0\Longrightarrow U(x)=C\cos kx+D\sin kx$$

$$U'(x)=-kC\sin kx+kD\cos kx$$

$$u_x\Big|_{x=0}=0\Longrightarrow U'(x)\Big|_{x=0}=0\Longrightarrow D=0$$

因此:

$$U(x)=C\cos kx,\ \ U'(x)=-kC\sin kx$$

$$u_x\Big|_{x=l}=0\Longrightarrow U'(x)\Big|_{x=l}=0\Longrightarrow -kC\sin kl=0$$

因此，k 的本征值 k_n 为:

$$k_n=\frac{n\pi}{l},\ \ n=,1,2,\cdots$$

> $n=0$ 是平庸解，不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为:

$$U_n(x)=\cos k_nx=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \ n=1,2,\cdots$$

由 $k\equiv\omega/a$，得 ω 的本征值 ω_n 为:

$$\omega_n=ak_n=\frac{n\pi a}{l},\ \ n=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为:

$$T_n(t)=\cos\omega_n t=\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

本征解 $u_n(x,t)$ 为:

$$u_n(x,t)=U_n(t)T_n(t)=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

定解问题的通解 $u(x,t)$ 为:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

最后结合初始条件

$$u\Big|_{t=0}=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)+0.3\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$

得到:

$$E_1=1,E_2=0,E_3=0.3,E_4=E_5=\cdots=0$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x,t)=\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)+0.3\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{3\pi a}{l}t\right)$$

例3

> 求定解问题:
>
> $$\begin{cases}u_t-a^2\nabla^2u=0\\ u\Big|_{x=0}=0,u\Big|_{x=l_1}=0\\ u\Big|_{y=0}=0,u\Big|_{y=l_2}=0\\ u\Big|_{z=0}=0,u\Big|_{z=l_3}=0\\ u\Big|_{t=0}=T_0\end{cases}$$

设 $u(x,y,z,t)$ 可分离变量:

$$u(x,y,z,t)=U(x,y,z)T(t)$$

代入输运方程可得:

$$U(x,y,z)T'(t)-a^2T(t)\nabla^2U(x,y,z)=0$$

两边同时处以 $a^2U(x,y,z)T(t)$ 得:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{\nabla^2U(x,y,z)}{U(x,y,z)}$$

显然，有:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{\nabla^2U(x,y,z)}{U(x,y,z)}=-k^2,\quad k>0$$

$T(t)$ 满足方程:

$$T'(t)+a^2k^2T(t)=0$$

$U(x,y,z)$ 满足方程:

$$\nabla^2U(x,y,z)+k^2U(x,y,z)=0$$

设 $U(x,y,z)$ 可分离变量:

$$U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

代入 $U(x,y,z)$ 满足的方程，得:

$$Y(y)Z(z)X''(x)+X(x)Z(z)Y''(y)+X(x)Y(y)Z''(z)+k^2X(x)Y(y)Z(z)=0$$

等号两边同时除以 $X(x)Y(y)Z(z)$ 得:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}+k^2=0$$

注意到，$\dfrac{X''(x)}{X(x)},\dfrac{Y''(y)}{Y(y)},\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}$ 分别只与 x,y,z 有关。上式成立，则有:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k_x^2,\quad k_x>0$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2,\quad k_y>0$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-k_z^2,\quad k_z>0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

即:

$$X''(x)+k_x^2X(x)=0$$

$$Y''(y)+k_y^2Y(y)=0$$

$$Z''(z)+k_z^2Z(z)=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

方程 $X''(x)+k_x^2X(x)=0$ 的通解为:

$$X(x)=A_x\cos(k_xx)+B_x\sin(k_xx)$$

边界条件:

$$u\Big|_{x=0}=0,u\Big|_{x=l_1}=0\Longrightarrow X(x)\Big|_{x=0}=0,X(x)\Big|_{x=l_1}=0$$

由 $X(x)\Big|_{x=0}=0$ 可知:

$$A_x=0$$

因此:

$$X(x)=B_x\sin(k_xx)$$

再由 $X(x)\Big|_{x=l_1}=0$ 可得 k_x 的本征值 $k_x^{(n_x)}$ 为:

$$k_x^{(n_x)}=\frac{n_x\pi}{l_1},\quad n_x=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $X_{n_x}(x)$ 为:

$$X_{n_x}(x)=\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right),\quad n_x=1,2,\cdots$$

类似的，k_y 的本征值 $k_y^{(n_y)}$ 为:

$$k_y^{(n_y)}=\frac{n_y\pi}{l_2},\quad n_y=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $Y_{n_y}(y)$ 为:

$$Y_{n_y}(y)=\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right),\quad n_y=1,2,\cdots$$

k_z 的本征值 $k_z^{(n_z)}$ 为:

$$k_z^{(n_z)}=\frac{n_z\pi}{l_3},\quad n_z=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $Z_{n_z}(z)$ 为:

$$Z_{n_z}(z)=\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right),\quad n_z=1,2,\cdots$$

由 $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$ 可知，k 的本征值 $k_{n_xn_yn_z}$ 为:

$$\begin{aligned}k_{n_xn_yn_z}&=\sqrt{\left(k_x^{(n_x)}\right)^2+\left(k_y^{(n_y)}\right)^2+\left(k_z^{(n_z)}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{n_z\pi}{l_3}\right)^2}\end{aligned}$$

由 $U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ 可知，相应于本征值 $k_{n_xn_yn_z}$ 的本征函数 $U_{n_xn_yn_z}$ 为:

$$U_{n_xn_yn_z}(x,y,z)=X_{n_x}(x)Y_{n_y}(y)Z_{n_z}(z)=\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)$$

由 $T'(t)+a^2k^2T(t)=0$ 可知，$T(t)$ 的本征函数 $T_{n_xn_yn_z}(t)$ 为:

$$T_{n_xn_yn_z}(t)=\mathrm{e}^{-k_{n_xn_yn_z}^2a^2t}$$

由 $u(x,y,z,t)=U(x,y,z)T(t)$ 可知，$u(x,y,z,t)$ 的本征函数 $u_{n_xn_yn_z}(x,y,z,t)$ 为:

$$\begin{aligned}u_{n_xn_yn_z}(x,y,z,t)&=U_{n_xn_yn_z}(x,y,z)T_{n_xn_yn_z}(t)\\&=\mathrm{e}^{-k_{n_xn_yn_z}^2a^2t}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\end{aligned}$$

因此，定解问题的形式解 $u(x,y,z,t)$ 为:

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)&=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}u_{n_xn_yn_z}(x,y,z,t)\\&=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\mathrm{e}^{-k_{n_xn_yn_z}^2a^2t}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\\&=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\exp\left\{-a^2\left[\left(\frac{n_x\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{n_z\pi}{l_3}\right)^2\right]t\right\}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\end{aligned}$$

结合初始条件 $u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=T_0$，得:

$$\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)=T_0$$

等号两边同乘 $\sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y'\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z'\pi z}{l_3}\right)$ 并积分（$n_x',n_y',n_z'\in\{1,2,\cdots\}$）:

$$\begin{aligned}&\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\int_{x=0}^{x=l_1}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right)\mathrm{d}x\int_{y=0}^{y=l_2}\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_y'\pi y}{l_2}\right)\mathrm{d}y\int_{z=0}^{z=l_3}\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\sin\left(\frac{n_z'\pi z}{l_3}\right)\mathrm{d}z\\=&T_0\int_{x=0}^{x=l_1}\sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right)\mathrm{d}x\int_{y=0}^{y=l_2}\sin\left(\frac{n_y'\pi y}{l_2}\right)\mathrm{d}y\int_{z=0}^{z=l_3}\sin\left(\frac{n_z'\pi z}{l_3}\right)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x &= \frac{l_1}{n_x'\pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \\
&= \frac{-l_1}{n_x'\pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \mathrm{d}\left[\cos\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{-l_1}{n_x'\pi} \cdot \cos\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= \frac{-l_1}{n_x'\pi} \cdot \left[\cos\left(n_x'\pi\right) - 1\right] \\
&= \frac{l_1}{n_x'\pi}\left[1 - (-1)^{n_x'}\right]
\end{aligned}
$$

利用积化和差公式 $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$，有：

$$
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x + n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x
$$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x + n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x &= \frac{l_1}{\left(n_x + n_x'\right)\pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \mathrm{d}\left[\sin\left(\frac{\left(n_x + n_x'\right)\pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{\left(n_x + n_x'\right)\pi} \cdot \sin\left(\frac{\left(n_x + n_x'\right)\pi x}{l_1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

再注意到，当 $n_x = n_x'$ 时，

$$
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x = l_1
$$

当 $n_x \neq n_x'$ 时，

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x &= \frac{l_1}{\left(n_x - n_x'\right)\pi} \int_{x=0}^{x=l_1} \mathrm{d}\left[\sin\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right)\right] \\
&= \frac{l_1}{\left(n_x - n_x'\right)\pi} \cdot \sin\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l_1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x = l_1\delta_{n_x,n_x'}
$$

终于，我们可以计算：

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x - n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=l_1} \cos\left(\frac{\left(n_x + n_x'\right)\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} l_1\delta_{n_x,n_x'} - \frac{1}{2}\cdot 0 \\
&= \frac{l_1}{2}\delta_{n_x,n_x'}
\end{aligned}
$$

于是，下面这个复杂的方程

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty} C_{n_x n_y n_z} \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right) \sin\left(\frac{n_y'\pi y}{l_2}\right) \mathrm{d}y \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right) \sin\left(\frac{n_z'\pi z}{l_3}\right) \mathrm{d}z \\
=&T_0 \int_{x=0}^{x=l_1} \sin\left(\frac{n_x'\pi x}{l_1}\right) \mathrm{d}x \int_{y=0}^{y=l_2} \sin\left(\frac{n_y'\pi y}{l_2}\right) \mathrm{d}y \int_{z=0}^{z=l_3} \sin\left(\frac{n_z'\pi z}{l_3}\right) \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

可简化为：

$$\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\frac{l_1l_2l_3}{8}\delta_{n_x,n_x'}\delta_{n_y,n_y'}\delta_{n_z,n_z'}=T_0\frac{l_1l_2l_3}{n_x'n_y'n_z'\pi^3}\left[1-(-1)^{n_x'}\right]\left[1-(-1)^{n_y'}\right]\left[1-(-1)^{n_z'}\right]$$

继续化简:

$$C_{n_x'n_y'n_z'}\cdot\frac{1}{8}=T_0\frac{1}{n_x'n_y'n_z'\pi^3}\left[1-(-1)^{n_x'}\right]\left[1-(-1)^{n_y'}\right]\left[1-(-1)^{n_z'}\right]$$

解得系数:

$$C_{n_x'n_y'n_z'}=\frac{8}{n_x'n_y'n_z'\pi^3}T_0\left[1-(-1)^{n_x'}\right]\left[1-(-1)^{n_y'}\right]\left[1-(-1)^{n_z'}\right]$$

把下标 n_x', n_y, n_z' 替换为 n_x, n_y, n_z:

$$C_{n_xn_yn_z}=\frac{8}{n_xn_yn_z\pi^3}T_0\left[1-(-1)^{n_x}\right]\left[1-(-1)^{n_y}\right]\left[1-(-1)^{n_z}\right]$$

综上，定解问题的解 $u(x,y,z,t)$ 为:

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)&=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}C_{n_xn_yn_z}\exp\left\{-a^2\left[\left(\frac{n_x\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{n_z\pi}{l_3}\right)^2\right]t\right\}\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\\&=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}\frac{8}{n_xn_yn_z\pi^3}T_0\left[1-(-1)^{n_x}\right]\left[1-(-1)^{n_y}\right]\left[1-(-1)^{n_z}\right]\exp\left\{-a^2\left[\left(\frac{n_x\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{l_2}\right)^2+\left(\frac{n_z\pi}{l_3}\right)^2\right]t\right\}\times\\&\sin\left(\frac{n_x\pi x}{l_1}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{l_2}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{l_3}\right)\end{aligned}$$

第15章 曲线坐标系下的分离变量

球坐标系下方程的分离变量

拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量

在球坐标系下，拉普拉斯方程为:

$$\nabla^2u(r,\theta,\varphi)=0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为:

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(r,\theta,\varphi)$ 可分离变量:

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到:

径向方程

径向部分 $R(r)$ 满足**径向方程**:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R(r)=0$$

球函数方程

角度部分 $Y(\theta,\varphi)$ 满足**球函数方程**:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y(\theta,\varphi)=0$$

方位角满足的方程

方位角部分 $\Phi(\varphi)$ 满足：

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$$

结合周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\lambda=m^2,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

连带勒让德方程

极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

令 $x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x),\theta\in[0,\pi],|x|\leqslant1,\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关：

$$u=u(r,\theta)$$

这对应 $m=0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2u(r,\theta,\varphi)+k^2u(r,\theta,\varphi)=0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(r,\theta,\varphi)$ 可分离变量：

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到：

球贝塞尔方程

径向部分 $R(r)$ 满足球贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

球函数方程

角度部分 $Y(\theta,\varphi)$ 满足**球函数方程**：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y(\theta,\varphi)=0$$

可见，亥姆霍兹方程解的角度部分满足的方程与拉普拉斯一致。

方位角满足的方程

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

连带勒让德方程

极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

令 $x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x),\theta\in[0,\pi],|x|\leqslant1,\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关：

$$u=u(r,\theta)$$

对应 $m=0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

柱坐标系下方程的分离变量

柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)+k^2u(\rho,\varphi,z)=0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,z)$ 可分离变量：

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算，可以得到：

$\Phi(\varphi)$ 满足的方程

$\Phi(\varphi)$ 满足：

$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\Phi(\varphi)=0,\ \ \nu\geqslant0$$

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\nu = m, \ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

> ps：这里为了让 ν 和 ν^2 一一对应，约定 ν 取非负实数。

$Z(z)$ 满足的方程

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

$R(\rho)$ 满足的方程及贝塞尔方程

$R(\rho)$ 满足:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

令 $x = \sqrt{k^2+\lambda}\rho, \rho = x/\sqrt{k^2+\lambda}, (k^2+\lambda \neq 0), R(\rho)\Big|_{\rho = x/\sqrt{k^2+\lambda}} \equiv y(x), \ \ y(x)\Big|_{x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho} = R(\rho)$，则上面方程可化为贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0, \ \ \nu \geqslant 0$$

或称为 ν 阶贝塞尔方程。

第16章 球函数

勒让德多项式

在球坐标系下，拉普拉斯方程为:

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

设 $u(r, \theta, \varphi)$ 可分离变量:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入拉普拉斯方程，可得极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) = 0$$

令 $x = \cos\theta, \Theta(\theta) = y(x), \theta \in [0, \pi], |x| \leqslant 1, \sin\theta = \sqrt{1-x^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关:

$$u = u(r, \theta) \text{ or } \Phi(\varphi) = \text{const}$$

对应 $m = 0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0, \ \ l = 0, 1, 2, \cdots$$

利用级数法可以求得，勒让德方程在自变量 $|x| \leqslant 1$ 范围内，在自然边界条件 $|y(x)| < +\infty$ 下，对应于本征值 $l(l+1), \ \ l = 0, 1, 2, \cdots$ 的本征解为勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$:

$$\mathrm{P}_l(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n}, \quad N = \begin{cases} \dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数} \\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ (1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2 y_l(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y_l(x)}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y_l(x) = 0, \quad l = 0,1,2,\cdots \\ |y_l(x)| < 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_l(x) = \mathrm{P}_l(x), \quad \mathrm{P}_l(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n}, \quad N = \begin{cases} \dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数} \\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数} \end{cases}$$

前几个勒让德多项式

$$\mathrm{P}_0(x) = 1$$

$$\mathrm{P}_1(x) = x$$

$$\mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$\mathrm{P}_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$$

$$\mathrm{P}_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

$$\mathrm{P}_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

勒让德多项式的性质

$$\mathrm{P}_l(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n}, \quad N = \begin{cases} \dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数} \\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}_l(1) = 1$$

$$\mathrm{P}_l(-x) = (-1)^l \mathrm{P}(x)$$

罗德里格斯公式（勒让德多项式的微分表达式）

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2 - 1\right)^l$$

勒让德多项式的生成函数（母函数）

定义勒让德多项式的生成函数 $f(r)$ 为：

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}}$$

其中，$x = \cos\theta, |x| \leqslant 1$

当 $r < 1$，可将 $f(r)$ 在 $r = 0$ 处进行泰勒展开，可得：

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l, \quad r < 1$$

或者：

$$\boxed{f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^l,\ \ r<1}$$

当 $r>1, \frac{1}{r}<1$，有：

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} \\ &= \frac{1}{r\sqrt{1+(1/r)^2-2(1/r)x}} \\ &= \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x)\left(\frac{1}{r}\right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^{-(l+1)},\ \ r>1 \end{aligned}$$

或者：

$$\boxed{f(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^{-(l+1)},\ \ r>1}$$

勒让德多项式的递推公式

$$x(1+2l)\mathrm{P}_l(x)-(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0$$

$$\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)$$

$$(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

$$(l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-x\mathrm{P}_l'(x)$$

$$l\mathrm{P}_l(x)=x\mathrm{P}_l'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)$$

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{P}_l'(x)=lx\mathrm{P}_l(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)$$

勒让德函数的正交归一性

$\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x),\ \ l=0,1,2,\cdots\right\}$ 构成 $[-1,1]$ 上的正交归一函数系，基函数的正交归一性可表达为：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\mathrm{P}_k(x)\cdot\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\delta_{kl},\ \ k,l=0,1,2,c\ldots$$

具有轴对称的拉普拉斯方程的求解

拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(r,\theta,\varphi)=0$$

若求解的问题具有极轴对称性，即场分布与方位角 φ 无关：

$$u=u(r,\theta)$$

则拉普拉斯方程简化为：

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0$$

可以证明，在自然边界条件的要求下，方程的通解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

例1

> 在单位球的北极点上放置一电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷，求单位球内任一点 $\vec{r}$ 的电势，并用勒让德多项式表示。

由余弦定理知，单位球内 $\vec{r}$ 点离单位球上北极点的距离为：

$$r' = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta},\ \ r < 1$$

单位球内 $\vec{r}$ 点的电势为：

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}},\ \ r < 1 \end{aligned}$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数，其可在 $r = 0$ 点展开为：

$$u(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^l,\ \ r < 1$$

例2

> 在半径 $r = r_0$ 的球内求解 $\nabla^2 u = 0$，使满足边界条件 $u\Big|_{r=r_0} = \sin^2\theta$

边界条件与方位角 φ 无关，因此所求应也与 φ 无关：

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

由自然边界条件，球心 $r = 0$ 处场量不应发散：

$$|u(r,\theta)|\Big|_{r=0} < +\infty$$

因此 $-r^{(l+1)}$ 项必须舍弃，即、：

$$B_l = 0,\ \ l = 0, 1, 2, \cdots$$

于是：

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u\Big|_{r=r_0} = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$，注意到：

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0(\cos\theta) = 1 \\ \mathrm{P}_1(\cos\theta) = \cos\theta \\ \mathrm{P}_2(\cos\theta) = \dfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \end{cases} \Longrightarrow 1 - \cos^2\theta = \frac{2}{3}\left[\mathrm{P}_0(\cos\theta) - \mathrm{P}_2(\cos\theta)\right]$$

因此：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \frac{2}{3}\left[\mathrm{P}_0(\cos\theta) - \mathrm{P}_2(\cos\theta)\right]$$

把边界条件整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$\left(A_0-\frac{2}{3}\right)\mathrm{P}_0(\cos\theta)+A_1r_0\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\left(A_2r_0^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\sum_{l=3}^{\infty}A_lr_0^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$A_0-\frac{2}{3}=0, A_1=0, A_2r_0^2+\frac{2}{3}=0, A_3=A_4=\cdots=0$$

即：

$$A_0=\frac{2}{3}, A_1=0, A_2=-\frac{2}{3r_0^2}, A_3=A_4=\cdots=0$$

于是：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=\frac{2}{3}-\frac{2}{3r_0^2}r^2\mathrm{P}_2(\cos\theta)\\&=\frac{2}{3}-\frac{r^2}{3r_0^2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\end{aligned}$$

例3

> 在均匀电场 $\vec{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

以球心 O 为坐标原点，选取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴正方向，则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布 $u(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2u(\vec{r})=0,\ \ r>a$$

特别地，这里电势 u 关于 z 轴对称，u 与 φ 无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2u(r,\theta)=0,\ \ r>a$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r,\theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 $\vec{E}_0$ 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r\to+\infty$，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0，则：

$$u_0-u(r,\theta)=E_0r\cos\theta,\ \ r\to+\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2u(r,\theta)=0\\u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0\\u(r,\theta)=u_0-E_0r\cos\theta,\ \ r\to+\infty\end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r\to+\infty}=u_0-E_0r\cos\theta$，当 $r\to+\infty$，有 $r^{-(l+1)}\to0$，于是：

$$\begin{aligned}u_0-E_0r\cos\theta&=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=A_0+A_1r\cos\theta+\cdots\end{aligned}$$

左右两边都看作关于 r 的多项式，对比系数得：

$$A_0 = u_0,\ \ A_1 = -E_0,\ \ A_2 = A_3 = \cdots = 0$$

于是形式解可写为：

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\ &= u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

再考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r=a} = 0$，将形式解代入边界条件，得：

$$u_0 - E_0 a\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

即：

$$u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta) - E_0 a\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$\left(u_0 + B_0 a^{-1}\right)\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \left(-E_0 a + B_1 a^{-2}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$B_0 = -a u_0,\ \ B_1 = a^3 E_0,\ \ B_2 = B_3 = \cdots = 0$$

综上，导体球外电势分布为：

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\ &= u_0 - E_0 r\cos\theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3\frac{\cos\theta}{r^2},\ \ r \geqslant a \end{aligned}$$

其中，u_0 为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取 $u_0 = 0$，则导体球外电势分布为：

$$\boxed{u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3\frac{\cos\theta}{r^2}},\ \ r \geqslant a$$

球外电场与电势的关系为：

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\ &= -\left[\frac{\partial u}{\partial r}\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{\mathrm{e}}_\varphi\right] \\ &= E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\vec{\mathrm{e}}_r + E_0\sin\theta\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\vec{\mathrm{e}}_\theta,\ \ r \geqslant a \end{aligned}$$

导体表面电场为：

$$\vec{E}(\vec{r})\Big|_{r=a} = 3E_0\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_r$$

利用高斯定理，导体球表面面电荷密度分布为：

$$\sigma(\vec{r})\Big|_{r=a} = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})\Big|_{r=a}\cdot\vec{\mathrm{e}}_r = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

例4

> 半径为 a 的导体球接地，在距球心为 b 的地方放置一点电荷，$b>a$，电荷量为 q，求导体球外的电势分布。

选取 z 轴使得点电荷的位矢为 $b\vec{e}_z$，则球外电势 u 具有 z 轴对称性，即 $u=u(r,\theta)$

点电荷会在接地导体球表面激发出感应电荷。根据电势叠加原理，导体球外的电势 u 是感应电荷单独存在时产生的电势 u_r 与 点电荷单独存在时的电势 u_q 之和：

$$u=u_r+u_q$$

考虑点电荷单独存在时在球外产生的电势 u_q，由余弦定理，场点 $\vec{r}$ 到点电荷 q 的距离 r' 满足：

$$r'=\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}$$

点电荷 q 在 $\vec{r}$ 处产生的电势 u_q 满足：

$$\begin{aligned}u_q&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{q}{\sqrt{1+(r/b)^2-2\,(r/b)\cos\theta}},\ \ r>a\end{aligned}$$

根据勒让德多项式的母函数的相关知识，

$$\frac{1}{\sqrt{1+(r/b)^2-2\,(r/b)\cos\theta}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l & ,\ \ r/b<1,\ \ r<b\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & ,\ \ r/b>1,\ \ r>b\end{cases}$$

因此点电荷产生的电势分布 u_q 可展为：

$$\boxed{\begin{aligned}u_q&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\frac{1}{\sqrt{1+(r/b)^2-2\,(r/b)\cos\theta}}\\&=\begin{cases}\displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l & ,\ \ a<r<b\\ \displaystyle\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & ,\ \ r>b\end{cases}\end{aligned}}$$

再考虑感应电荷单独存在时在球外产生的电势 u_r，此时球外没有电荷，因此球外的电势分布 u_r 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2u_r(r,\theta)=0,\ \ r>a$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u_r(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

在无穷远处，电势 u_r 应趋于零：

$$u_r\Big|_{r\to+\infty}=0$$

可得：

$$A_l=0,\ \ l=0,1,2,\cdots$$

因此：

$$u_r(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑点电荷和感应电荷产生的总电势 $u(r,\theta)$，形式上可写为：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u_q(r,\theta)+u_r(r,\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^l+\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & ,\quad a<r<b\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)}+\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) & ,\quad r>b\end{cases}\end{aligned}$$

导体球接地给出边界条件：

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$$

即：

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{a}{b}\right)^l+\sum_{l=0}^{\infty}B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

整理成以 $\cos\theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的线性叠加的形式：

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}}+B_l a^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得：

$$\frac{qa^l}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}}+B_l a^{-(l+1)}=0,\quad l=0,1,2,\cdots$$

解得：

$$B_l=-\frac{qa^{2l+1}}{4\pi\varepsilon_0 b^{l+1}},\quad l=0,1,2,\cdots$$

因此：

$$\begin{aligned}u_r(r,\theta)&=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}}r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

注意到，$r>a,b>a$，于是有：

$$\frac{br}{a^2}>1,\quad \frac{1}{\sqrt{1+\left(br/a^2\right)^2-2\left(br/a^2\right)\cos\theta}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)},\quad \frac{br}{a^2}>1$$

> ps：注意不到也没事，只不过最终答案可能看起来复杂点。

因此，感应电荷在导体球外产生的电势 $u_r(r,\theta)$ 实际上可写为：

$$\boxed{\begin{aligned}u_r(r,\theta)&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(br/a^2\right)^2-2\left(br/a^2\right)\cos\theta}},\quad r>a\end{aligned}}$$

最终得到导体球外的电势分布 $u(r,\theta)$：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u_q(r,\theta)+u_r(r,\theta)\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(br/a^2\right)^2-2\left(br/a^2\right)\cos\theta}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-aq/b}{\sqrt{\left(a^2/b\right)^2+r^2-2\left(a^2/b\right)r\cos\theta}}\end{aligned}$$

可以看到，感应电荷在导体球外产生的电势与一个处于 z 轴正半轴距球心 $b'=a^2/b$ 处电荷量为 $Q'=-aq/b$ 的点电荷相同。

第17章 柱函数

贝塞尔函数

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)+k^2u(\rho,\varphi,z)=0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,z)$ 可分离变量：

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算，可以得到：

$\Phi(\varphi)$ 满足：

$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\Phi(\varphi)=0,\ \ \nu\geqslant 0$$

> ps：这里 $\nu\geqslant 0$ 是约定好的。

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\nu=m,\ \ m=0,1,2,\cdots$$

$Z(z)$ 满足：

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0$$

$R(\rho)$ 满足：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2+\lambda-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

令 $x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho,(k^2+\lambda\neq 0),R(\rho)=y(x)$，则上面方程化为贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

或称为 ν 阶贝塞尔方程。

贝塞尔函数（第一类贝塞尔函数）和诺伊曼函数（第二类贝塞尔函数）

ν 阶贝塞尔函数，记为 $\mathrm{J}_\nu(x)$，定义为：

$$\mathrm{J}_\nu(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

> ps：这里的 $\nu\geqslant 0$

将 ν 替换为 $-\nu$，就得到 $-\nu$ 阶贝塞尔函数：

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

对 $\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 进行如下的线性组合就得到诺伊曼函数 $\mathrm{N}_{\nu}(x)$：

$$\mathrm{N}_{\nu}(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\,\mathrm{J}_{\nu}(x) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

可以看到，若 ν 为整数 m，诺伊曼函数是 $0/0$ 型的函数，此时其定义由洛必达法则给出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_m(x) &\equiv \lim_{\nu\to m} \mathrm{N}_{\nu}(x) \\
&= \lim_{\nu\to m} \frac{\frac{\partial \mathrm{J}_{\nu}(x)}{\partial\nu}\cos(\nu\pi) - \pi\sin(\nu\pi)\mathrm{J}_{\nu}(x) - \frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\partial \mathrm{J}_{\nu}(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=m} - (-1)^m \left.\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=m}\right] \\
&= \text{太复杂了不写了}
\end{aligned}$$

其中 $m = 0, 1, 2, \cdots$

$\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 也称第一类贝塞尔函数，$\mathrm{N}_{\nu}(x)$ 也称第二类贝塞尔函数。

贝塞尔方程的通解

非整数阶贝塞尔方程的通解

（非整数）ν 阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,\ \ \nu > 0,\ \ \nu\text{非整数}$$

的通解为：

$$y(x) = C_1 \mathrm{J}_{\nu}(x) + C_2 \mathrm{J}_{-\nu}(x)$$

其中，C_1, C_2 是非零实数，$\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 分别是（非整数）ν 阶贝塞尔函数：

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

$$\mathrm{J}_{\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

整数阶贝塞尔方程的通解

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$，可得：

$$\nu = m,\ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

此时贝塞尔方程是（正整数）m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0,\ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

此时，m 阶贝塞尔方程的通解为：

$$y(x) = C_1 \mathrm{J}_m(x) + C_2 \mathrm{N}_m(x)$$

其中，C_1, C_2 是任意非零常数，$\mathrm{J}_m(x)$ 称为（正整数）m 阶贝塞尔函数，其定义为：

$$\mathrm{J}_m(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$\mathrm{N}_m(x)$ 是（正整数）m 阶诺伊曼函数，其表达式就不写了。

整数阶贝塞尔函数的简单性质

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-1)^m \mathrm{J}_m(x)$$

$$\mathrm{J}_0(0) = 1$$

$$\mathrm{J}_m(0) = 0, \ \ m = 1, 2, \cdots$$

$$\mathrm{N}_{-m}(x) = (-1)^m \mathrm{N}_m(x)$$

贝塞尔函数的递推关系

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) - \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{J}'_\nu(x)$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(x) + \mathrm{N}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{N}_\nu(x)$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(x) - \mathrm{N}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{N}'_\nu(x)$$

$$\mathrm{J}'_0(x) = -\mathrm{J}_1(x)$$

柱函数

若函数 $y_\nu(x)$ 满足：

$$\begin{cases} y_{\nu-1}(x) + y_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} y_\nu(x) \\ y_{\nu-1}(x) - y_{\nu+1}(x) = 2y'_\nu(x) \end{cases}$$

或满足与上两式等价的关系：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu y_\nu(x)\right] = x^\nu y_{\nu-1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} y_{\nu+1}(x)\right] = x^{-\nu} y_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

则这类函数统称为柱函数。

- 柱函数必定满足贝塞尔方程。

例题

例1

> 求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho, \varphi, t)$ 是 t 时刻 ρ, φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho, \varphi, t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho, \varphi, t) - a^2 \nabla^2_{(2)} u(\rho, \varphi, t) = 0$$

其中，$\nabla^2_{(2)}$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla^2_{(2)} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设 $u(\rho, \varphi, t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi) T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho,\varphi)T''(t)-a^2T(t)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=0$$

上式两边同时除以 $U(\rho,\varphi)T(t)$，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$$

注意到，$\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关，而 $\dfrac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$ 只与 ρ,φ 有关，二者相等，因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2,\ \ \frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=-\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\dfrac{U(\rho,\varphi)}{a^2}$ 并移项，得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\omega^2}{a^2}U(\rho,\varphi)=0$$

令：

$$k\equiv\frac{\omega}{a},\ \ k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho,\varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0\\ U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\\ |U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\\ U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\end{cases}$$

设 $U(\rho,\varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2R(\rho)\Phi(\varphi)=0$$

上式等号两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]=-m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\Longrightarrow\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi)=A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

可得：

$$m=0,1,2,\cdots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]=-m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

令 $x=k\rho,\rho=x/k,R(\rho)\Big|_{\rho=x/k}=R(x/k)\equiv y(x)$，则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$$

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\dfrac{m^2}{x^2}\right)y=0 \\
y(x)\equiv R(\rho)\Big|_{\rho=x/k}=R(x/k),\ \ R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho) \\
R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0 \\
|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty
\end{cases}
$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0
$$

其通解为:

$$
y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)+D_m\mathrm{N}_m(x)
$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$，可得:

$$
D_m=0
$$

因此:

$$
y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)
$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$
y^{(m)}(x)\Big|_{x=k\rho}=C_m\mathrm{J}_m(x)\Big|_{x=k\rho}
$$

结合 $x=k\rho, R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho)$ 可得:

$$
R^{(m)}(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(k\rho)
$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$，即:

$$
\mathrm{J}_m\left(x_n^{(m)}\right)=0,\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=,1,2,\cdots
$$

结合边界条件 $R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$，即:

$$
C_m\mathrm{J}_m(kb)=0
$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为:

$$
k_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b},\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots
$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$
R_n^{(m)}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(k_n^{(m)}\rho\right)=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right),\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots
$$

再根据 $k\equiv\omega/a$，得到 ω 的本征值，即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$
\omega_n^{(m)}=ak_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot a,\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots
$$

综上所述，边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$
\boxed{\omega_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot a},\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots
$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中，$x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理