

一、概念题

1

名词解释：电场强度与磁感应强度。

电场，记为 \vec{E} ，定义为单位检验电荷在场中所受的力：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中， \vec{F} 是检验电荷 Q' 在电场中所受的力。

实验指出，一个电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中所受的力 $d\vec{F}$ 可以表示为：

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

其中， \vec{B} 称为磁感应强度。

2

写出电磁场能量守恒的微分形式与积分形式。

积分形式：

$$\frac{d}{dt} \int_V w dV = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} - \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} dV$$

微分形式：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S} - \vec{f} \cdot \vec{v}$$

3

写出库仑规范条件与洛伦兹规范条件。

库仑规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

4

什么是推迟势？写出表达式及其意义。

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程（真空中）

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

的解有推迟势的形式：

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

它反映了电磁作用具有一定的传播速度。源点 \vec{x}' 对场点 \vec{x} 的电磁作用需要的传播时间为 $\frac{r}{c} = \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$

5

牛顿力学与狭义相对论的原理是什么？它们各自的适用范围？

牛顿力学原理：牛顿三定律、绝对时空观、伽利略变换；适用范围：宏观、低速物体

狭义相对论原理：（1）相对性原理：所有惯性参考系是等价的。（2）光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c ，且与光源运动无关。适用范围：高速

二、计算题

1

一个半径为 R 的无限长圆柱内通有恒定电流，电流密度为 j_0 ，求空间内的磁感应强度与磁能量密度。

安培环路定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

当 $r > R$

$$2\pi r B = \mu_0 \pi R^2 j_0 \implies B = \frac{\mu_0 R^2 j_0}{2r}$$

当 $r < R$

$$2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j_0 \implies B = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}$$

于是：

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \vec{e}_\varphi & , r < R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r} \vec{e}_\varphi & , r > R \end{cases}$$

磁场能量密度：

$$w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0^2 r^2}{8} & , r < R \\ \frac{\mu_0 j_0^2 R^4}{8r^2} & , r > R \end{cases}$$

2

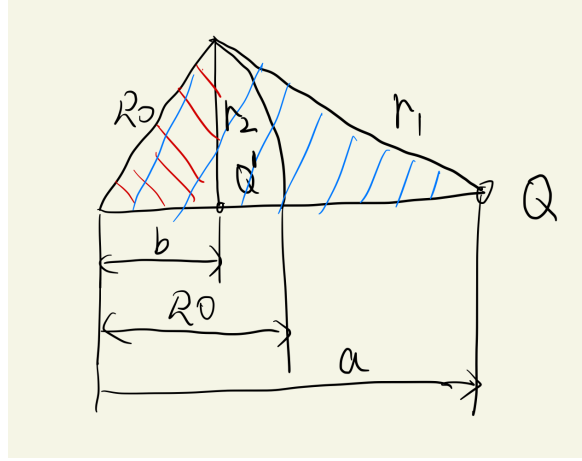
真空中有一个半径为 R_0 的导体球，在距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，已知导体球电势为 0，求：

（1）空间内的电势；

（2）点电荷 Q 受到的静电力。

(1)

电荷 Q 会使导体表面产生感应电荷。电像法说，这些感应电荷在球面上以及球外产生的电势可等效为一个电荷为 Q' 的点电荷产生的电势。



由相似：

$$\frac{b}{R_0} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

可得：

$$b = \frac{R_0^2}{a}, \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

导体球边界电势为零：

$$\frac{Q'}{r_2} + \frac{Q}{r_1} = 0$$

得到：

$$Q' = -Q \frac{r_2}{r_1} = -\frac{R_0}{a} Q$$

再考虑球外空间任一点 (r, θ, ϕ) ，这点到 Q 距离记为 r_1 ，到 Q' 距离记为 r_2 ，由余弦定理有：

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta} = \sqrt{r^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2\frac{R_0^2}{a} r \cos \theta}$$

空间内电势为：

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{R_0}{a} Q}{\sqrt{r^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2\frac{R_0^2}{a} r \cos \theta}} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{a^2 r^2 / R_0^2 + R_0^2 - 2ar \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} \right] \end{aligned}$$

(2)

点电荷受到的力等于与像电荷给的力：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{(a-b)^2} \vec{e}_x = \frac{-Q^2 R_0 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)^2} \vec{e}_x$$

3

求磁化强度为 \vec{M}_0 的均匀磁化铁球产生的磁场。

取 z 轴与 \vec{M}_0 同向，则问题有 z 轴对称性。

界面为球面

在球内部，即 $R < R_0$ 区域（记为区域 1），磁化强度 $\vec{M} = \vec{M}_0$ ，则磁荷密度为：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0, \quad R < R_0$$

区域 1 内无自由电流，于是磁标势 φ_1 满足方程：

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_1 的形式解为：

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

由于球心处磁标势有限，即 $\varphi_1|_{R=0} < \infty$ ，则：

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta)$$

在球外部，即 $R > R_0$ 区域（记为区域 2），磁化强度 $\vec{M} = \vec{0}$ ，则磁荷密度为：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0, \quad R > R_0$$

区域 2 内无自由电流，于是磁标势 φ_2 满足方程：

$$\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_2 的形式解为：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

由于无穷远处磁标势为零，即 $\varphi_2|_{R=\infty} = 0$ ，则：

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \\ \begin{cases} \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) \\ \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

第一条边值关系（界面处磁标势连续）：

$$\varphi_1|_{R=R_0} = \varphi_2|_{R=R_0} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

于是得到：

$$a_n R_0^n = \frac{b_n}{R_0^{n+1}}$$

即：

$$\boxed{b_n = a_n R_0^{2n+1}}$$

第二条边值关系：

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2), \quad \text{界面处}$$

计算方向导数在界面处的取值：

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{R=R_0} &= \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) \Big|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) \\ \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{R=R_0} &= \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta) \Big|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

代入边值关系第二条：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_n R_0^{n-1} + \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

将第一条边值关系得到的结论 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 代入上式，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

对比等式两边 $\cos \theta$ 的各级系数，可得：

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{3} M_0, \quad a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

代回关系 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 得：

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3, \quad b_2 = b_3 = \cdots = 0$$

于是得到磁标势：

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{3} M_0 R \cos \theta \\ &= \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{3} M_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} \cos \theta \\ &= \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$

球内磁场：

$$\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0, \quad R < R_0$$

球内磁感应强度：

$$\vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{H}_1 + \vec{M}_1) = \mu_0 \left(-\frac{1}{3} \vec{M}_0 + \vec{M}_0 \right) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0$$

球外磁场：

$$\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{R_0^3}{3} \left(\frac{\vec{M}_0}{R^3} - \frac{3(\vec{M}_0 \cdot \vec{R})}{R^4} \vec{e}_R \right)$$

4

已知在长宽分别为 a, b 的矩形波导内，磁场强度的 z 分量大小为：

$$H_z = H_0 \cos \left[\frac{\pi}{a} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)}$$

(1)

求波导内电场强度、磁感应强度大小

时谐电磁波：

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$$

波导内：

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

考虑波导内真空且无源，有 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ， $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ，再结合时谐电磁波 $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$ 可得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = \mathrm{i}\omega\mu_0\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

对第一式两边同时取 x, y 分量:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x &= \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ &= \partial_y E_z - \mathrm{i}k_z E_y \\ \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y &= \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ &= \mathrm{i}k_z E_x - \partial_x E_z \end{aligned}$$

对第二式两边同时取 x, y 分量:

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x &= \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ &= \partial_y H_z - \mathrm{i}k_z H_y \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y &= \partial_z H_x - \partial_x H_z \\ &= \mathrm{i}k_z H_x - \partial_x H_z \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x = \partial_y E_z - \mathrm{i}k_z E_y \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y = \mathrm{i}k_z H_x - \partial_x H_z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x + \mathrm{i}k_z E_y = \partial_y E_z \\ \mathrm{i}k_z H_x + \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y = \partial_x H_z \end{cases}$$

解得:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} \left(-\omega\varepsilon_0 \partial_y E_z + k_z \partial_x H_z \right) \\ E_y &= \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} \left(-\omega\mu_0 \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z \right) \end{aligned}$$

其中, $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y = \mathrm{i}k_z E_x - \partial_x E_z \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z - \mathrm{i}k_z H_y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y - \mathrm{i}k_z E_x = -\partial_x E_z \\ \mathrm{i}k_z H_y - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z \end{cases}$$

解得:

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} \left(\omega\varepsilon_0 \partial_x E_z + k_z \partial_y H_z \right) \\ E_x &= \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} \left(\omega\mu_0 \partial_y H_z + k_z \partial_x E_z \right) \end{aligned}$$

本题中, $H_z = H_0 \cos \left[\frac{\pi}{a} y \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$, $E_z = 0$, 于是:

$$E_x = \frac{-\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$E_y = 0$$

$$H_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}\pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$B_y = \mu_0 H_y = \frac{-i\pi\mu_0 k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

(2)

求平均能流密度功率

解：

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{H}\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\{-E_x^* H_z \vec{e}_y + E_x^* H_y \vec{e}_z\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\left\{-\frac{i\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) e^{-i(k_z z - \omega t)} \cdot H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}y\right] e^{i(k_z z - \omega t)} \vec{e}_y + \frac{i\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) e^{-i(k_z z - \omega t)} \cdot \frac{-i\pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \vec{e}_z\right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \omega \mu_0 k_z H_0^2}{a^2 (k^2 - k_z^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

5

证明：在相同荷质比 $\frac{q}{m} = C$ 粒子组成的体系中，不可能存在电偶极辐射。

远场电偶极辐射公式：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R \\ \vec{E} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

要证明不存在电偶极辐射，只需要证明 $\ddot{\vec{p}} = \vec{0}$

设第 i 个粒子的质量为 m_i ，带电量为 q_i ，满足：

$$\frac{q_i}{m_i} = C$$

计算体系电偶极矩：

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \sum_i q_i \vec{r}_i \\ &= \sum_i \frac{q_i}{m_i} m_i \vec{r}_i \\ &= C \sum_i m_i \vec{r}_i\end{aligned}$$

电偶极矩对时间二阶导数：

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{p}} &= C \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \\ &= C \sum_i m_i \vec{a}_i \\ &= C \sum_i \vec{F}_i \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

于是得证。

6

(1) 狭义相对论中洛伦兹标量有哪些？通过洛伦兹标量、洛伦兹矢量 dx_μ ，构造尽可能多的洛伦兹矢量。

(2) 狭义相对论中的绝对量和相对量分别有哪些？

(3) 写出 $F_{44}, F_{4i}, F_{\mu\nu}$, 并写出麦克斯韦方程组的协变形式。

(1)

洛伦兹标量：

间隔

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

洛伦兹矢量：

$$x_\mu = (\vec{x}, ict)$$

四维电流密度：

$$J_\mu = (\vec{J}, ict)$$

(2)

绝对量：真空中的光速 c , 间隔 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, 固有时

相对量：各惯性参考系中的时间、空间

(3)

$$F_{44} = 0$$

$$F_{4i} = \left[\frac{i}{c} E_1 \quad \frac{i}{c} E_2 \quad \frac{i}{c} E_3 \quad 0 \right]$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c} E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c} E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c} E_3 \\ \frac{i}{c} E_1 & \frac{i}{c} E_2 & \frac{i}{c} E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

麦克斯韦方程组协变形式：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$