矢量分析

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \varepsilon_{ijk}a_i(\vec{b}\times\vec{c})_j\vec{e}_k \\
&= \varepsilon_{ijk}a_i\varepsilon_{lmj}b_lc_m\vec{e}_k \\
&= \varepsilon_{jik}\varepsilon_{jml}a_ib_lc_m\vec{e}_k \\
&= (\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})a_ib_lc_m\vec{e}_k \\
&= a_mb_kc_m\vec{e}_k - a_lb_lc_k\vec{e}_k \\
(\text{若}\vec{b},\vec{c}\neq\nabla) &= a_mc_mb_k\vec{e}_k - a_lb_lc_k\vec{e}_k \\
&= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}
\end{aligned}
$$

特别地，若 $\vec{a}=\nabla$，有：

注意，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ 只有在 $\vec{b},\vec{c}\neq\nabla$ 时才成立。

例：求证：$\vec{A}\times(\nabla\times\vec{A})=\frac{1}{2}\nabla A^2-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}$

证明：

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} &= (\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}(1/r^3)}{\mathrm{d}r}\nabla r\right)\cdot\vec{r}+\frac{3}{r^3} \\
&= -\frac{3}{r^4}\vec{e}_r\cdot\vec{r}+\frac{3}{r^3} \\
&= 0,\ (r\neq 0)
\end{aligned}
$$

电磁现象的普遍规律

电荷和磁场

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 $\vec{F}$ 为：

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

其中 $\vec{r}$ 是 Q 到 Q' 的矢径，ε_0 是真空电容率（真空介电常量）

电场

电场，记为 $\vec{E}$，定义为单位检验电荷在场中所受的力：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中，$\vec{F}$ 是检验电荷 Q 在场中所受的力。

静止点电荷激发的电场

一个静止点电荷 Q 所激发的电场强度为：

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电荷连续分布情况下的电场

设电荷连续分布于区域 V 内，$\vec{x}'$ 处体积元 $\mathrm{d}V'$ 所含电荷：

$$\mathrm{d}Q' = \rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

用 $\vec{r}$ 表示点源到场点的矢径，则场点 $\vec{x}$ 处的电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'$$

高斯定理

通过闭合曲面 S 的电场强度通量：

$$\oint\limits_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

高斯定理：

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

其中，Q 是闭合曲面 S 内的总电荷（包括自由电荷和极化电荷）

证明1：

考虑闭合曲面内的一点电荷 q，其产生的电场记为 $\vec{E}$

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S\\&=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\mathrm{d}S\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\cos\theta\mathrm{d}S}{r^2}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega\\&=\frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

若电荷在空间中连续分布，则高斯定理的形式为：

$$\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

证明2：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=&\oint_{\partial V}\left[\int_{V_\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{x}')\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'\right]\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\=&\end{aligned}$$

上面两种形式都是积分形式的高斯定理

数学上有散度定理：

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_\Omega(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

于是：

$$\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{E})\mathrm{d}V$$

代入电荷连续分布的积分形式高斯定理，得：

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E})\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

当积分区域 V 的体积趋于无穷小时，

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E})\mathrm{d}V = (\nabla \cdot \vec{E})\mathrm{d}V$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \mathrm{d}V$$

于是得到微分形式的高斯定理：

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

其中，ρ 是总电荷密度

静电场的旋度

考虑一个点电荷 q 激发的电场 $\vec{E}$ 沿任一回路 L 的回路积分：

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= \oint_{L^+} E \cos\theta \mathrm{d}l \\
&= \oint_{L^+} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} \cos\theta \mathrm{d}l \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L^+} \frac{1}{r^2} \mathrm{d}r \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L^+} \mathrm{d}(\frac{1}{r}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

斯托克斯公式：

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

其中，∂S 的正方向和 S 的正方向满足右手法则

于是：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

而 $\oint\limits_{L} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，于是：

$$\oint_{S} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

当曲面 S 的面积趋于 0，此时的曲面 S 是一个面元 $\mathrm{d}\vec{S}$，有：

$$\oint_{S^+} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

于是得到：

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = \vec{0}}$$

上式可以表述为：静电场是无旋的。

电流和磁场

电流密度

$$\mathrm{d}I = \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

通过任意曲面 S 的总电流 I 为：

$$I = \int_{S} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

当 $\Delta t \to 0$，电荷守恒定律：

$$\Delta t \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\Delta \int_{V} \rho \mathrm{d}V$$

两边同时除以 Δt：

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= -\frac{\Delta \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V}{\Delta t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V} \rho \mathrm{d}V \\
&= -\int_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

即：

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V$$

这就是电荷守恒定律的积分形式

散度定理给出：

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{J}) \mathrm{d}V$$

代入电荷守恒定律的积分形式，得：

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \mathrm{d}V = 0$$

当区域 V 的体积趋于 0，得到电荷守恒定律的微分形式（也称为电流连续性方程）：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

特别地，在恒定电流的情况下，一切物理量不随时间改变，于是 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，结合电流连续性方程得到：

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

上式表示恒定电流的连续性。

毕奥-萨伐尔定律

实验指出，一个电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在磁场中所受的力可以表示为：

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

其中，$\vec{B}$ 称为磁感应强度

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出：设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 $\vec{x}'$ 处的电流密度，$\vec{r}$ 为源点 $\vec{x}'$ 到 场点 $\vec{x}$ 的矢径，则场点 $\vec{x}$ 的磁感应强度为：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V'$$

其中，μ_0 是真空磁导率，积分遍及电流分布区域。

特别地，若电流集中于细导线上，用 $\mathrm{d}\vec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' &= \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}S_n\mathrm{d}l \\ &= J(\vec{x}')\mathrm{d}S_n\mathrm{d}\vec{l} \end{aligned}$$

则：

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V']\times\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{J(\vec{x}')\mathrm{d}S_n(\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r})}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}\int\limits_S J(\vec{x}')S_n \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L^+} \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}
$$

磁场的环量和旋度

安培环路定理：

$$
\oint\limits_{\partial S} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I
$$

其中，∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则

或者：

$$
\oint\limits_{\partial S} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\int\limits_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

利用旋度定理：

$$
\oint\limits_{\partial S} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

其中，面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的取向与环路 ∂S 的绕行方向满足右手法则

将上式代入安培环路定理，得：:

$$
\int\limits_S (\nabla\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0\int\limits_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

当曲面的 S 面积趋于 0，得到：

$$
\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}
$$

磁场的散度

$$\oint\limits_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$\vec{B}$ 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

磁场旋度和散度公式的证明

由毕奥-萨伐尔定律，有：

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\times(-\nabla\frac{1}{r})\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V(\nabla\frac{1}{r})\times\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{A}\varphi)&=\varepsilon_{ijk}\partial_i(\vec{A}\varphi)_j\vec{e}_k\\&=\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j\varphi\vec{e}_k\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j\varphi\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}[\varphi\partial_iA_j+A_j\partial_i\varphi]\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\varphi\partial_iA_j+\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}A_j\partial_i\varphi\\&=\varphi\cdot\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j+\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}A_j(\nabla\varphi)_i\\&=\varphi\cdot\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_iA_j+\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}(\nabla\varphi)_iA_j\\&=\varphi(\nabla\times\vec{A})+(\nabla\varphi)\times\vec{A}\end{aligned}$$

令 $\vec{A}=\vec{J}(\vec{x}'),\varphi=\frac{1}{r}$，得：

$$\nabla\times(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})=\frac{1}{r}(\nabla\times\vec{J}(\vec{x}'))+(\nabla(\frac{1}{r}))\times\vec{J}(\vec{x}')$$

注意到，∇ 与 $\vec{x}$ 有关，而与 $\vec{x}'$ 无关，即 $\nabla\times\vec{J}(\vec{x}')=\vec{0}$，于是：：

$$\nabla\times(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})=(\nabla\frac{1}{r})\times\vec{J}(\vec{x}')$$

将上式代入毕奥-萨伐尔定律，接着写：

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V (\nabla\frac{1}{r})\times\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \nabla\times(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V' \\
&\equiv \nabla\times\vec{A}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\vec{A}\equiv\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'
$$

于是：

$$
\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0
$$

其中用到了下面的结论：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= \partial_k(\nabla\times\vec{A})_k \\
&= \partial_k\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_j \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_k A_j \\
&= -\varepsilon_{kji}\partial_i\partial_k A_j \\
&= -\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_j
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_j=-\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_j\implies\varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_j=0\implies\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0
$$

再计算 $\vec{B}$ 的旋度

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B} &= \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) \\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

先计算 $\nabla\cdot\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A} &= \nabla\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'\right]\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\nabla\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\right]\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\cdot(-\nabla'\frac{1}{r})\mathrm{d}V'\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\left[\nabla'\cdot(\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r})-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')\right]\mathrm{d}V'\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\nabla'\cdot\left[\vec{J}(\vec{x}')\frac{1}{r}\right]\mathrm{d}V'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

右边第一项可转化为面积分，积分区域 V 包含了所有电流，没有电流通过 V 的边界，因此这面积分为零；右边第二项，由恒定电流连续性有 $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}')=0$，这项也为零，于是：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

再计算 $\nabla^2\vec{A}$:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\vec{A} &= \nabla^2\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'\right]\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\nabla^2\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\nabla\cdot(\nabla\frac{1}{r})\mathrm{d}V'\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\nabla\cdot(-\frac{\vec{r}}{r^3})\mathrm{d}V'\\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\vec{J}(\vec{x}')\nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

最后

$$\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

于是：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

麦克斯韦方程组

电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

感应电场是有旋场。

位移电流

之前给出了电流激发磁场的规律式：

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

两边同时取散度，并注意到任意矢量场的旋度的散度为零，于是得到：

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

然而，电荷守恒定律给出：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

即：

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

电荷守恒定律告诉我们，在非恒定情况下，电流密度的散度不为零。可见，在非恒定情况下，$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 与电荷守恒定律矛盾。

电荷守恒定律是更基本的规律，出现矛盾只可能是公式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 不适用于非恒定情况，需要改进。

注意到，在非恒定情况下，一样有：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

结合电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

消去 ρ 得：

$$\nabla\cdot(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=0$$

$$\vec{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

真空中麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

洛伦兹力公式

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

介质的电磁性质

有外场时，介质中的带电粒子受场的作用，正负电荷发生相对位移，有极分子的取向以及分子电流的取向也呈现一定的规则性，这就是介质的极化和磁化。由于介质的极化和磁化，介质的内部及表面就出现宏观的电荷分布，这些电荷、电流称为束缚电荷和磁化电流。

介质的极化

电极化强度，记为 $\vec{P}$，用于描述宏观电偶极矩分布，定义为：

$$\vec{P}\equiv\lim_{\Delta V\to 0^+}\frac{\sum\limits_i\vec{p}_i}{\Delta V}$$

其中，$\vec{p}_i$ 表示 ΔV 内 第 i 个分子的电偶极矩，求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

用简化模型描述介质中的分子。设每个分子由相距为 $\vec{l}$ 的一对正负电荷 $\pm q$ 构成，则分子电偶极矩为 $\vec{p}=q\vec{l}$。设单位体积分子数为 n，则穿出 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的正电荷为：

$$qn\vec{l}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=n\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

V 内通过截面 ∂V 穿出的正电荷为：

$$\oint\limits_{\partial V}\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

由电荷守恒，V 内净余的负电荷为：

$$-\oint\limits_{\partial V}\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

用 ρ_{P} 表示束缚电荷密度，有：

$$\int\limits_{V}\rho_{P}\mathrm{d}V=-\oint\limits_{\partial V}\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

利用高斯公式，得微分形式：

$$\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\vec{P}$$

上式适用于**电介质内部**。

对于两电介质的分界面，可以认为束缚电荷分布在交界面上，可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷，用 σ_{P} 表示束缚电荷面密度，用 $\vec{n}_{1\to 2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量，则：

$$\sigma_{\mathrm{P}}\mathrm{d}S=-\left[\vec{P}_1\cdot(-\vec{n}_{1\to 2})\mathrm{d}S+\vec{P}_2\cdot\vec{n}_{1\to 2}\mathrm{d}S\right]$$

得到：

$$\sigma_{\mathrm{P}}=-\vec{n}_{1\to 2}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)$$

将电荷密度分为自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_{P}，介质内部：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Longrightarrow\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=\rho_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{P}}$$

其中，$\rho=\rho_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{P}}$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\vec{P}$ 消去 ρ_{P}，得：

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\rho_{\mathrm{f}}$$

引入电位移矢量 $\vec{D}$，定义为：

$$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

则：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_{\mathrm{f}}$$

这就是介质中的高斯定理（微分形式），其积分形式为：

$$\oiint\limits_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\limits_{V}\rho_{\mathrm{f}}\mathrm{d}V$$

对于一般各向同性线性介质，极化强度 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 之间有简单的线性关系：

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$

其中，χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质：

$$\begin{aligned}\vec{D}&\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\&=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}\\&=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}\end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r\equiv1+\chi_e$，介质的电容率 $\varepsilon\equiv\varepsilon_r\varepsilon_0$，上式可写为：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

介质的磁化

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈，线圈面积矢量记为 $\vec{a}$，分子电流的磁矩 $\vec{m}$ 为：

$$\vec{m}=i\vec{a}$$

磁化强度，记为 $\vec{M}$，定义为：

$$\vec{M}\equiv\lim_{\Delta V\to0}\frac{\sum\limits_i\vec{m}_i}{\Delta V}$$

对于介质内部的一个曲面 S，其边界线为 ∂S，通过 S 的总磁化电流 I_M 等于边界线 ∂S 串着的分子数目乘每个分子电流 i

单位体积分子数记为 n，则边界线 ∂S 串着的分子电流数目为：

$$\oint\limits_L n\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

总磁化电流为：

$$I_\mathrm{M}=i\oint\limits_L n\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\limits_L n\vec{m}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\limits_L\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

用 $\vec{J}_\mathrm{M}$ 表示磁化电流密度，有：

$$\int\limits_S\vec{J}_\mathrm{M}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint\limits_{\partial S}\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

微分形式为：

$$\vec{J}_\mathrm{M}=\nabla\times\vec{M}$$

当电场变化，介质的极化强度 $\vec{P}$ 发生变化，这就会产生极化电流。设 ΔV 内每个带电粒子的位矢为 $\vec{x}_i$，电荷为 e_i，则：

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0^+} \frac{\sum\limits_i e_i \vec{x}_i}{\Delta V}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \lim_{\Delta V \to 0^+} \frac{\sum\limits_i e_i \vec{v}_i}{\Delta V} = \vec{J}_{\mathrm{P}}$$

$\vec{J}_{\mathrm{P}}$ 称为极化电流密度

考虑自由电流密度 $\vec{J}_{\mathrm{f}}$ 和介质内的诱导电流密度 $\vec{J}_{\mathrm{M}} + \vec{J}_{\mathrm{P}}$，麦克斯韦方程应写为：

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{J}_{\mathrm{f}} + \vec{J}_{\mathrm{M}} + \vec{J}_{\mathrm{P}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

磁场强度，记为 $\vec{H}$，定义为：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

对于各向同性非铁磁物质，

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{M}} \vec{H}$$

χ_{M} 称为磁化率

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{M}})\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中，$\mu_r \equiv 1 + \chi_{\mathrm{M}}$ 称为相对磁导率，$\mu \equiv \mu_r \mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{f}} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\mathrm{f}} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{S} \vec{J}_{\mathrm{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{V} \rho_{\mathrm{f}} \mathrm{d}V \\
\oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{\mathrm{f}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{S} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{f}} \\
\oint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0
\end{cases}
$$

电磁场的边值关系

法向分量的跃变

$$\vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma_{\mathrm{f}} + \sigma_{\mathrm{P}}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{\mathrm{f}}$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\mathrm{f}}$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

切向分量的跃变

$$\vec{n}_{1\to 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_{\mathrm{f}}$$

$$\vec{n}_{1\to 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\begin{cases}\vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}\\ \vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_{\mathrm{f}}\\ \vec{n}_{1\to 2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_{\mathrm{f}}\\ \vec{n}_{1\to 2}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\end{cases}$$

电磁场的能量和能流

场的**能量密度**，记为 w，定义为单位体积内场的能量，是空间位置 $\vec{x}$ 和时间 t 的函数。

场的**能流密度**，记为 $\vec{S}$，其方向定义为能量传输方向，其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 $\vec{f}$ 表示场对电荷作用力密度，$\vec{v}$ 表示电荷运动速度

能量守恒定律要求：

$$-\oint\limits_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=\int\limits_{V}\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{V}w\mathrm{d}V$$

相应的微分形式为：

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=-\vec{f}\cdot\vec{v}$$

取 V 为全空间，则：

$$\int\limits_{\infty}\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{\infty}w\mathrm{d}V$$

上式说明，场对电荷所做的总功率等于场的总能量的减小率，因此场和电荷的总能量守恒。

$$\begin{aligned}\vec{f}\cdot\vec{v}&=(\rho\vec{E}+\rho\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\\&=\rho\vec{v}\cdot\vec{E}\\&=\vec{J}\cdot\vec{E}\end{aligned}$$

$$\vec{J}=\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J}\cdot\vec{E}=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})&=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})\\&=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

于是：

$$\vec{f}\cdot\vec{v}=\vec{J}\cdot\vec{E}=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

代入能量守恒式，得：

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

对比可得：

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

真空：

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B},\quad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

介质中：

$$\delta w=\vec{E}\cdot\delta\vec{D}+\vec{H}\cdot\delta\vec{B}$$

介质内（线性介质）电磁场能量密度：

$$\boxed{w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})}$$

电磁能量传输

静电场

静电场的标势及其微分方程

静止情况下，电场与磁场无关：

$$\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_{\mathrm{f}}$$

其中，$\vec{E}$ 是静电场， ρ_{f} 是自由电荷体密度

静电场无旋，且自由电荷是电位移矢量的源

因为静电场无旋，于是可以引入一个标势来描述静电场。

无旋性的积分表达式为：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

设 C_1, C_2 是连结空间中两点 P_1, P_2 的不同路径，则 C_1, C_2 构成闭合回路。

这种情形下，静电场无旋性的积分表达式为：

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

这就是说，在静电场中，把电荷从 P_1 点移动到 P_2 点过程中，静电场对电荷所做的功与路径无关，只与两端点有关。

把**单位**正电荷从 P_1 移动到 P_2，静电场所做功为：

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

上式定义为 P_1 与 P_2 点的电势差

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

微分形式：

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由于：

$$\mathrm{d}\varphi = (\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

比较可得：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

选取无穷远点作为参考点，规定参考点的电势为零，即 $\varphi(\infty) = 0$，则：

$$\varphi(P) = \int_{P}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

点电荷电势：

$$\varphi(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi(P) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

其中，r_i 是点电荷 Q_i 到场点 P 的距离

电荷连续分布：

$$\varphi(\vec{x})=\int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在**均匀各向同性线性介质**中，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_{\mathrm{f}}\Longrightarrow\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon}\Longrightarrow\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon}$$

其中，ρ 是自由电荷密度。

电场边值关系：

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}$$

$$\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_{\mathrm{f}}$$

电场边值关系可化为电势边值关系：

$$\varphi_1\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_2\Big|_{\partial\Omega}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\Bigg|_{\partial\Omega}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\Bigg|_{\partial\Omega}=\sigma_{\mathrm{f}}$$

其中，$\partial\Omega$ 是两电介质界面；$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\Bigg|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数，σ_{f} 是界面上自由电荷面密度。

证明下电势边值关系的第二条：

由

$$\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_{\mathrm{f}}$$

可得：

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{f}}&=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)\\&=\vec{n}_{1\to2}\cdot(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1)\\&=\vec{n}_{1\to2}\cdot\left(\varepsilon_1\nabla\varphi_1\Big|_{\partial\Omega}-\varepsilon_2\nabla\varphi_2\Big|_{\partial\Omega}\right)\\&=\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\Bigg|_{\partial\Omega}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\Bigg|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

其中，用到了如下结论：

$$\nabla\psi\cdot\vec{n}_l=\frac{\partial\psi}{\partial n_l}$$

其中，$\vec{n}_l$ 是射线 l 方向上的单位向量，$\dfrac{\partial\psi}{\partial n_l}$ 是标量场 ψ 在射线 l 方向上的方向导数。

这个结论的证明如下：

由梯度的定义：

$$\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\psi$$

令 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{n}_l\mathrm{d}r$，得：

$$\nabla\psi\cdot\vec{n}_l\mathrm{d}r=\mathrm{d}\psi$$

两边同时除以 $\mathrm{d}r$ 得：

$$\nabla\psi\cdot\vec{n}_l=\frac{\partial\psi}{\partial n_l}$$

静电场的能量

第1章给出，在线性介质中静电场能量为：

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

其中，$w=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下，W 可由电势和电荷分布给出：

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\rho_{\mathrm{f}}\varphi\mathrm{d}V$$

注意，不能把 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质，电容率为 ε，则：

$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int\mathrm{d}V\int\mathrm{d}V'\frac{\rho_{\mathrm{f}}(\vec{x})\rho_{\mathrm{f}}(\vec{x'})}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho_{\mathrm{f}}(\vec{x})$，在 V 的边界 ∂V 给定：

（1）电势 $\varphi\Big|_{\partial V}$

或

（2）电势的外法线法向 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$

则 V 内电场唯一确定。

证明：

无导体时的唯一性定理

设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，令：

$$\varphi = \varphi' - \varphi''$$

由：

$$\nabla^2\varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i},\ \ \nabla^2\varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

于是在每个均与区域内有：

$$\nabla^2\varphi = 0$$

在两均匀区域界面上有：

$$\varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_i = \varepsilon_j(\frac{\partial\varphi}{\partial n})_j$$

在整个区域 V 的边界 S 上有：

$$\varphi\Big|_S \equiv \varphi'\Big|_S - \varphi''\Big|_S = 0$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S \equiv \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\Big|_S - \frac{\partial\varphi''}{\partial n}\Big|_S = 0$$

考虑第 i 个均匀区域 V_i 的界面 S_i 上的积分：

$$\begin{aligned}\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int_{V_i}\nabla\cdot(\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi)\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V + \int_{V_i}\varphi\varepsilon_i\nabla^2\varphi\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V\end{aligned}$$

对所有分区域 V_i 求和：

$$\sum_i\oint_{S_i}\varepsilon_i\varphi\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum_i\int_{V_i}\varepsilon_i(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}V$$

上式左边应为零，于是右边也为零：

$$\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla\varphi)^2 \mathrm{d}V = 0$$

于是：

$$\nabla\varphi = 0$$

于是：

$$\varphi = \text{const}$$

也就是说，φ' 和 φ'' 最多相差一个常数

有导体的时的唯一性定理

拉普拉斯方程 分离变量法

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 在球坐标中的通解为：

$$\varphi(R,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_{nm}R^n + \frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\phi + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(c_{nm}R^n + \frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ，此情形下通解为：

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

其中，P_n 为勒让德函数，a_n, b_n 是待定系数，由边界条件确定。

例题

例2.6：电容率为 ε 的介质球置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求电势

例2.7：半径为 R_0 的接地导体球置于均匀外电场 $\vec{E}_0$ 中，求电势、导体上的电荷面密度

镜像法

若求解电场的区域内有自由电荷，则必须解泊松方程。

若区域内只有一个或几个点电荷，区域边界是导体或介质界面，则可用镜像法求解。

例 2.9：接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q，求空间中的电场。

解：

设无限大接地平面导体板的位置为 $z = 0$，点电荷 Q 处在 $z > 0$ 的区域。

要求解 $z>0$ 空间的电场，则镜像点电荷只能放在 $z<0$ 空间，否则会改变泊松方程的源，唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 $(0,0,a)$，其中 $a>0$

此问题的边界条件为：

$$\varphi\Big|_{z=0}=0$$

也就是说 $z=0$ 平面是等相面，$z=0$ 处电场强度垂直于 $z=0$ 平面。

考虑在 $(0,0,-a)$ 处再放置一个带电量 $Q'=-Q$ 的点电荷，则两个对称的点电荷在 $z=0$ 处产生的场强处处于 $z=0$ 平面垂直。

于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是：

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

例2.10：真空中有一半径为 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，求空间各点的电势

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}}-\frac{R_0Q/a}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}\right)$$

例2.11：真空中有一半径为 R_0 的**不接地**而带电荷 Q_0 的导体球，距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，求球外电势，并求电荷 Q 所受的力

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\frac{R_0Q}{ar'}+\frac{Q_0+R_0Q/a}{R}\right)$$

$$4\pi\varepsilon_0F=\frac{QQ_0}{a^2}-\frac{Q^2R_0^3(2a^2-R_0^2)}{a^3(a^2-R_0^2)^2}$$

格林函数

格林函数

一个处于 $\vec{x}'$ 点上的**单位**点电荷所激发的电势 $\psi(\vec{x})$ 满足泊松方程：

$$\nabla^2\psi(\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

无界空间的格林函数

在 $\vec{x}'$ 上一个单位点电荷在无界空间中激发的电势为：

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

无界空间的格林函数为：

$$G(\vec{x}',\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

上半空间的格林函数

上半空间的格林函数为：

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$$

球外空间的格林函数

$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+R'^2-2RR'\cos\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{(\frac{RR'}{R_0})^2+R_0^2-2RR'\cos\alpha}}\right]$$

电多极矩

$$\varphi(\vec{x})=\int\limits_V\frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l，这种情况下，可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式，由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点，用 R 表示坐标原点到场点的距离，

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$r=|\vec{x}-\vec{x}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

将 $f(\vec{x}-\vec{x}')$ 看作 $\vec{x}'$ 的函数（即可以看作 x_1',x_2',x_3' 的函数），在 $\vec{x}'=\vec{0}$ 处展开：

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}-\vec{x}')&=f(\vec{x}-\vec{x}')\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}+\sum_i x_i'\frac{\partial f(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial x_i'}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i'x_j'\frac{\partial^2 f(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial x_i'\partial x_j'}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}+\cdots\\
&=f(\vec{x})+\sum_i x_i'\frac{\partial f(\vec{x}-\vec{x}')}{\partial(x_i-x_i')}\cdot\frac{\mathrm{d}(x_i-x_i')}{\mathrm{d}x_i'}\Big|_{\vec{x}'=\vec{0}}+\frac{1}{2}\\
&=f(\vec{x})-\sum_i x_i'\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\\
&=f(\vec{x})-\vec{x}'\cdot\nabla f(\vec{x})+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}-\vec{x}') &= f(\vec{x})+\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial}{\partial x_i'}f(\vec{x})+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}+\cdots \\
&= f(\vec{x})+\vec{x}'\cdot\nabla' f(\vec{x})+\frac{1}{2!}(\vec{x}'\cdot\nabla')^2 f(\vec{x})+\cdots \\
&= f(\vec{x})-\vec{x}'\cdot\nabla f(\vec{x})+\frac{1}{2!}(\vec{x}'\cdot\nabla)^2 f(\vec{x})+\cdots
\end{aligned}
$$

令 $f(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{1}{r}$

$$
\frac{1}{r}=\frac{1}{R}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\cdots
$$

$$
\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{x}')\left[\frac{1}{R}-\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right]\mathrm{d}V'
$$

令：

$$
Q=\int_V\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'
$$

$$
\vec{p}=\int_V\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'
$$

$$
\mathscr{D}_{ij}=\int_V 3x_i'x_j'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'
$$

则电势可写为：

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\overset{\rightrightarrows}{\mathscr{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\varphi^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},\ \ Q=\int_V\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'
$$

零级近似 $\varphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷，其激发的电势就是零级近似。

$$
\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3},\ \ \vec{p}=\int_V\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'
$$

一级近似是电偶极矩 $\vec{p}$ 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\vec{\vec{\mathscr{D}}}:\nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial_i\partial x_j}\frac{1}{R},\quad \vec{\vec{\mathscr{D}}}=\int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

电四极矩张量 $\mathscr{D}_{ij}$ 是对称张量，它有 6 个分量 $\mathscr{D}_{11},\mathscr{D}_{22},\mathscr{D}_{33},\mathscr{D}_{12}=\mathscr{D}_{21},\mathscr{D}_{23}=\mathscr{D}_{32},\mathscr{D}_{31}=\mathscr{D}_{13}$，只有 5 个独立分量。

静磁场

矢势及其微分方程

恒定电流产生的磁场：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

由矢量分析，从 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可引入一个矢量 $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$ 称为磁场的矢势。

注意到：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}&=\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\&=\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

由矢势 $\vec{A}$ 可以唯一确定 $\vec{B}$，反过来则不行，这是因为：

$$\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)=\nabla\times\vec{A}$$

若 $\vec{A}$ 满足 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，则 $\vec{A}+\nabla\psi$ 也满足 $\vec{B}=\nabla\times(\vec{A}+\nabla\psi)$，因此由磁场 $\vec{B}$ 无法唯一确定 $\vec{A}$

$\vec{A}$ 具有任意性，因此可以对它加上一定限制，如：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

称为库仑规范。

矢势微分方程

线性均匀介质：

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{\mathrm{f}}$$

$$\Longrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J}_{\mathrm{f}}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

结合库仑规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

得到库仑规范下矢势微分方程：

$$\Longrightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_{\mathrm{f}}}$$

$$(\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为：

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_{\mathrm{f}i}$$

库仑规范下的矢势 $\vec{A}$ 是无源有旋场。

矢势的形式解

电势（均匀线性介质中）：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{\varepsilon} \Longrightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int\limits_V \frac{\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r}$$

> 上式可用格林函数推导。∇^2 算子的基本解为：$G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

类似应有：

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_{\mathrm{f}} \Longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{J}_{\mathrm{f}}(\vec{x}')}{r} \mathrm{d}V'$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int\limits_V \frac{\vec{J}_{\mathrm{f}}(\vec{x}')\mathrm{d}V}{r} \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_V \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \times \vec{J}_{\mathrm{f}}(\vec{x}')\mathrm{d}V' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{J}_{\mathrm{f}} \times \vec{r}}{r^3} \mathrm{d}V'
\end{aligned}$$

矢势边值关系

$$\vec{n}_{1\to 2}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

$$\vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}$$

对于非铁磁性均匀介质，

$$\vec{e}_n\cdot(\nabla\times\vec{A}_2-\nabla\times\vec{A}_1)=0$$

$$\vec{e}_n\times(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\vec{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\vec{A}_1)=\vec{\alpha}$$

在两介质分界面上（采用库仑规范）

$$\vec{A}_2=\vec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量：

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$$

静磁场情况下，可以用矢势和电流表示总能量。

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{H}&=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}\\&=\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})\\&=\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{H})+\vec{A}\cdot\vec{J}\end{aligned}$$

静磁场中，

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V\\&=\frac{1}{2}\int_V\vec{A}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义，且不能把 $\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}$ 看作能量密度。

上式中，矢势 $\vec{A}$ 是电流分布 $\vec{J}$ 本身激发的。

若要计算某电流分布 $\vec{J}$ 在给定外磁场中的相互作用能，以 $\vec{A}_\mathrm{e}$ 表示外磁场的矢势，$\vec{J}_\mathrm{e}$ 表示该外磁场的电流分布，则总电流分布为 $\vec{J}+\vec{J}_\mathrm{e}$，总矢势为 $\vec{A}+\vec{A}_\mathrm{e}$，磁场总能量为：

$$W=\frac{1}{2}\int(\vec{J}+\vec{J}_\mathrm{e})\cdot(\vec{A}+\vec{A}_\mathrm{e})\mathrm{d}V$$

此式减去 $\vec{J}$ 和 $\vec{J}_\mathrm{e}$ 单独存在时的能量后，就得到电流 $\vec{J}$ 在外场中的相互作用能：

$$W_{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\int(\vec{J}\cdot\vec{A}_{\mathrm{e}}+\vec{J}_{\mathrm{e}}\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

由于

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r},\quad \vec{A}_{\mathrm{e}}=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{\vec{J}_{\mathrm{e}}(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r}$$

两式相等，因此电流 $\vec{J}$ 在外场 $\vec{A}_{\mathrm{e}}$ 中的相互作用能为：

$$W_{\mathrm{i}}=\int_V\vec{J}\cdot\vec{A}_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V$$

注意，这时没有 $\frac{1}{2}$ 系数

磁标势

在恒定电流情况下，安培环路定理：

$$\oint_{\partial S}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

在某一局部区域内，若闭合回路 L 没有链环着**自由电流**，则：

$$\int_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

此时可以引入标势，因为此时：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{0}$$

能够引入磁标势的条件：区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

因此 $\vec{H}$ 可看作某一标量场的梯度

在 $\vec{J}=\vec{0}$ 的区域内：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{0}$$

引入磁标势 φ_m，使得：

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

假想磁荷密度：

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$$

真空中静电场和静磁场的对比

$$\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_{\mathrm{p}} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\mu_0}$$

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\nabla^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

边值关系

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$$

$$\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \frac{\sigma_m}{\mu_0}$$

$$\sigma_m = \mu_0 \vec{n} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)$$

磁多极矩

磁矢势:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'}{r}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \vec{J}(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] \mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}^{(0)} = \vec{0}$$

$$\vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \vec{J}(\vec{x}') \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} \mathrm{d}V' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\oint\limits_{L} \vec{x}' \times \mathrm{d}\vec{l}'$$

称为电流线圈的磁矩

对体电流分布，

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int\limits_{V} \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

磁偶极矩的场和标势

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\cdot\nabla)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\varphi_{\mathrm{m}}^{(1)} = \frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$$

小区域内电流分布在外磁场中的能量

$$W = \int\limits_{V} \vec{J}\cdot\vec{A}_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V$$

$$\begin{aligned} W &= I\oint\limits_{L} \vec{A}_{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \\ &= I\int\limits_{S} \cdot\mathrm{d}\vec{S} \\ &= I\Phi_{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

$$\vec{B}_{\mathrm{e}}(\vec{x}) = \vec{B}_{\mathrm{e}}(\vec{0}) + \vec{x}\cdot\nabla\vec{B}_{\mathrm{e}}(\vec{0}) + \cdots$$

$$\begin{aligned} W &\approx I\vec{B}_{\mathrm{e}}(\vec{0})\cdot\int\limits_{S}\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \vec{m}\cdot\vec{B}_{\mathrm{e}}(\vec{0}) \end{aligned}$$

磁矩在外磁场中受力和力矩

$$\vec{F} = -\nabla U = \vec{m}\cdot\nabla\vec{B}_{\mathrm{e}}$$

$$ \begin{aligned} \vec{F}^

\end{aligned}
$$

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}_{\mathrm{e}}$$

第4章 电磁波的传播

平面电磁波

一般情况：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质（$\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$）：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

真空（$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$）：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

可以得到：

$$\nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}$$

令：

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0}}$$

具有上面方程形式的方程称为**波动方程**。

介质情形

线性介质：

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$$

$$\vec{B}(\omega)=\mu(\omega)\vec{H}(\omega)$$

介质的色散：

$$\varepsilon=\varepsilon(\omega),\quad \mu=\mu(\omega)$$

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡得波称为时谐电磁波。

时谐电磁波的复数表示：

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

对线性均匀介质，有 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H}$，代入无源麦克斯韦方程组，得：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}(\vec{x},t)=-\dfrac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}(\vec{x},t)=\varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t)=0\\ \nabla\cdot\vec{B}(\vec{x,t})=0\end{cases}$$

用 $\vec{E}$ 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$，将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t},\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入上面方程组，得场量**空间部分**满足的方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\vec{B}\\ \nabla\times\vec{B}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

上面这组方程是**不独立**的，由第一式可以推出第四式，由第二式可以推出第三式（两边取散度，而任意矢量场旋度的散度为零）

对第一式两边取旋度，并利用公式 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$，得：

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}+\omega^2\varepsilon\mu\vec{E}=\vec{0}}$$

令：

$$\boxed{k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

则得到时谐电场**空间部分**满足的方程（称为**亥姆霍兹方程**）：

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

> ps：亥姆霍兹方程的解并不一定满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$，亥姆霍兹方程的解加上条件 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 才代表电磁波的解。

解出电场的空间部分后，磁场的空间部分可由方程组第一式给出：

$$\boxed{\vec{B}=\frac{-\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\vec{E}=\frac{-\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}}$$

在一定频率 ω 下，均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为：

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{B}=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}$$

或：

$$\nabla^2\vec{B}+k^2\vec{B}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{E}=\frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{\mu\varepsilon}}\nabla\times\vec{B}$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

设电磁波沿 x 轴方向传播，其场强在与 x 轴正交的平面上具有相同的值，即 $\vec{E}, \vec{B}$ 只与 x, t 有关，而与 y, z 无关，这样的电磁波称为**平面电磁波**。

亥姆霍兹方程化为：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\vec{E}(\vec{x}) + k^2\vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

一个解为：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 要求 $\vec{E} \perp \vec{k}$，即 $\vec{E}$ 可以在垂直于 $\vec{k}$ 的任意方向上振荡。$\vec{E}$ 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 $\vec{k}$ 垂直的任意两个相互正交的方向作为 $\vec{E}$ 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}$$

取 $\vec{x}$ 与 $\vec{k}$ 同向，

$$kx - \omega t = \text{const}$$

相速度为：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

介质中平面电磁波相速度：

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

真空中电磁波传播速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

散度：

$$0=\nabla\cdot\vec{E}=\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{E}\Longrightarrow\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

计算电场旋度：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=\nabla\times\left(\vec{E}_0e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)\\&=\left[\nabla\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right]\times\vec{E}_0\\&=\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}=\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}}$$

于是可以得出磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B}&=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}\nabla\times\vec{E}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{k}\sqrt{\mu\varepsilon}(\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E})\\&=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}}$$

由上式可得

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

$$

$$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v}$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\boxed{\left|\frac{E}{B}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c}$$

平面电磁波特性：

（1）电磁波为横波，$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 都与传播方向垂直

（2）$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 互相垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

（3）$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 同相，振幅比为 v

电磁波的能量和能流

线性均匀介质中电磁场能量密度：

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\frac{1}{2}(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2)$$

平面电磁波情形，$\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$，于是得到**平面电磁波能量密度**：

$$\boxed{w=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2}$$

$$w=\varepsilon E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2[1+\cos 2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)]$$

由 $\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**：

$$\boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\vec{e}_k}$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\vec{e}_k=vw\vec{e}_k$$

设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 有复数表示：

$$f(t)=f_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\ \ g(t)=g_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\phi}$$

则 fg 对一周期的平均值为：

$$\begin{aligned}\overline{fg}&=\frac{\omega}{2\pi}\int_{t=0}^{t=2\pi/\omega}f_0\cos(\omega t)\times g_0\cos(\omega t-\phi)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}f_0g_0\cos\phi\\&=\frac{1}{2}\Re\{f^*g\}\end{aligned}$$

能量密度平均值：

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2$$

能流密度平均值：

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k$$

电磁波在介质界面上的反射和折射

$$\vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}$$

$$\vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_\mathrm{f}$$

$$\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_{\mathrm{f}}$$

$$\vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$$

讨论时谐电磁波时，只需要考虑：

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}$$

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_{\mathrm{f}}$$

设介质 1 和介质 2 的分界面时无穷大平面，且平面电磁波从介质 1 入射到界面上。

设入射波、反射波和折射波的频率相同，入射波的电场强度为 $\vec{E}$，波矢量为 $\vec{k}$；反射波的电场强度为 $\vec{E}'$，波矢量为 $\vec{k}'$；折射波的电场强度为 $\vec{E}''$，波矢量为 $\vec{k}''$

它们的平面波表达式分别为：

$$\vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}'=\vec{E}_0'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}''=\vec{E}_0''\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

先求波矢量方向之间的关系。

介质 1 中的总场强是入射波与反射波场强的叠加，结合边界关系 $\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}$ 得：

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{E}+\vec{E}')=\vec{n}_{1\to2}\times\vec{E}''$$

代入平面波表达式：

$$\vec{n}_{1\to2}\times(\vec{E}_0e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}+\vec{E}_0'e^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)})=\vec{n}_{1\to2}\times\vec{E}_0''e^{\mathrm{i}(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{x}=\vec{k}'\cdot\vec{x}=\vec{k}''\cdot\vec{x}$$

选界面为 $z=0$ 平面，则：

$$k_x=k_x'=k_x'',\ \ k_y=k_y'=k_y''$$

若取入射波矢平行于 xz 平面，则：

$$k_y=0=k_y'=k_y''$$

这就是说，反射波矢和折射波矢都在同一平面上。

用 θ 表示入射角，θ' 表示反射角，θ'' 表示折射角，则有：

$$k_x=k\sin\theta,\ \ k_x'=k'\sin\theta',\ \ k_x''=k''\sin\theta''$$

设电磁波在两介质中得相速分别为 v_1,v_2，则：

$$k=k'=\frac{\omega}{v_1},\ \ k''=\frac{\omega}{v_2}$$

可得：

$$\theta = \theta'$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2}$$

电磁波，$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = n_{21}$$

振幅关系 菲涅耳公式

$\vec{E}$ 垂直入射面：

当界面上自由电流密度 $\vec{\alpha} = \vec{0}$，则边值关系为：

$$E_\perp + E'_\perp = E''_\perp$$

$$H_\perp \cos\theta - H'_\perp \cos\theta = H''_\perp \cos\theta''$$

$H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}E$，对于非铁磁性的一般介质，取 $\mu = \mu_0$，则第二式可写为：

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E_\perp - E'_\perp)\cos\theta = \sqrt{\varepsilon_2}E''_\perp \cos\theta''$$

$$\frac{E'_\perp}{E_\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon}_1\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''_\perp}{E_\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$\vec{E}$ 平行入射面：

$$E_\parallel \cos\theta - E'_\parallel \cos\theta = E''_\parallel \cos\theta''$$

$$H_\parallel + H'_\parallel = H''_\parallel$$

$$\frac{E'_\parallel}{E_\parallel} = \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''_\parallel}{E_\parallel} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$$

几种特殊情况

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

由折射定律，$\theta > \theta''$，则 $E'/E < 0$，即反射波电场与入射波电场反相，此现象称为反射过程中的**半波损失**。

$$\theta + \theta'' = \pi/2$$

此时 $\vec{E}$ 平行于入射面的分量没有反射波，反射光为垂直于入射面偏振的线偏光，这就是**布儒斯特定律**，此情形下的入射角为**布儒斯特角**。

全反射

若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则 $n_{21} < 0$

假设在 $\sin\theta > n_{21}$ 情形下，下面式子仍然成立：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}' = \vec{E}_0' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}''\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$k_x = k_x' = k_x'',\ \ k_y = k_y' = k_y''$$

仍满足：

$$k_x'' = k_x = k\sin\theta$$

$$k'' = k\frac{v_1}{v_2} = kn_{21}$$

$$k_z'' = \sqrt{k''^2 - k_x''^2} = \mathrm{i}k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

令

$$k_z'' = \mathrm{i}\kappa,\ \ \kappa = k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}$$

折射波电场为：

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' \mathrm{e}^{-\kappa z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x'' x-\omega t)}$$

这是沿 x 轴方向传播的电磁波，它的场强沿 z 轴方向指数衰减。

这种电磁波是存在于界面附近一薄层内的表面波，该层厚度 $\sim \kappa^{-1}$，可以认为，κ^{-1} 就是穿透深度：

$$\begin{aligned}\kappa^{-1} &= \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} \\ &= \frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}\end{aligned}$$

有导体存在时电磁波的传播

导体内的自由电荷分布

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$$

考虑固定场点，其解为：

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

衰减的特征时间为：

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

只要电磁波的频率 ω 满足

$$\omega \ll \tau^{-1} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

就可以认为 $\rho(t) = 0$

良导体条件：

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$$

导体内的电磁波

具有一定频率的电磁波：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = \mathrm{i}\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

复电容率：

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}$$

则第二式可写为：

$$\nabla \times \vec{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon'\vec{E}$$

一定频率下导体内部的亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0},\ \ k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$$

形式上有平面波解：

$$\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0 e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

设

$$\vec{k}=\vec{\beta}+\mathrm{i}\vec{\alpha}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{\mathrm{i}(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

波矢量 $\vec{k}$ 的实部 $\vec{\beta}$ 描述波传播的相位关系，虚部 $\vec{\alpha}$ 描述波幅的衰减。$\vec{\beta}$ 称为**相位常量**，$\vec{\alpha}$ 称为**衰减常量**。

$$k^2=\beta^2-\alpha^2+2\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\omega^2\mu(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega})$$

比较得：

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

用 $\vec{k}^{(0)}$ 表示空间中的波矢，$\vec{k}$ 表示导体中的波矢，设入射面为 xz 面，z 轴指向导体内部的法线，由边值关系，有：

$$k_x^{(0)}=k_x=\beta_x+\mathrm{i}\alpha_x$$

空间中波矢 $\vec{k}^{(0)}$ 为实数，由上式可得

$$\alpha_x=0,\ \ \beta_x=k_x$$

趋肤效应和穿透深度

考虑垂直入射情形，导体表面为 xy 平面，z 轴指向导体内部

$\alpha_x=\beta_x=0$

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-\alpha z}e^{\mathrm{i}(\beta z-\omega t)}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{1/2}$$

$$\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}$$

良导体情形，

$$k^2\approx\mathrm{i}\omega\mu\sigma$$

$$k\approx\sqrt{\mathrm{i}\omega\mu\sigma}\approx\beta+\mathrm{i}\alpha$$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

波幅降至导体表面原值 $1/e$ 的传播距离称为穿透深度 δ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

磁场与电场的关系：

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega\mu}(\beta + \mathrm{i}\alpha)\vec{e}_n \times \vec{E}$$

良导体情形，

$$\vec{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \vec{e}_n \times \vec{E}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{\vec{H}}{\vec{E}}\right| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \gg 1$$

在金属导体中，磁场比电场重要

导体表面上的反射

真空垂直入射导体表面

设 $\mu \approx \mu_0$

$$\frac{E'}{E} = -\frac{1 + \mathrm{i} - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1 + \mathrm{i} + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$$

反射系数：

$$R = \left|\frac{E'}{E}\right|^2 = \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

理想导体边界条件

在导体表面上，电场线与界面正交，磁感应线与界面相切。

谐振腔

矩形谐振腔内的电磁振荡

设 $u(x, y, z)$ 是 $\vec{E}$ 或 $\vec{H}$ 的任一直角分量

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

令

$$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0\\\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0\\\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0\\k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2\end{cases}$$

驻波解：

$$u(x,y,z)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)(C_3\cos k_zz+D_3\sin k_zz)$$

考虑边界条件，得：

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz\end{cases}$$

$$k_x=\frac{m\pi}{L_1},\ \ k_y=\frac{n\pi}{L_2},\ \ k_z=\frac{p\pi}{L_3}$$

$$m,n,p=0,1,2,\cdots$$

$$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0$$

对于每一组 (m,n,p) 值，有两个独立偏振波模

谐振频率

$$\omega_{mnp}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{L_1})^2+(\frac{n}{L_2})^2+(\frac{p}{L_3})^2}$$

波导

当频率更高时，需要用波导代替同轴传输线。波导是一根空心金属管，截面通常为矩形或圆形。波导传输适用于微波范围。

矩形波导中的电磁波

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电场应有如下形式：

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_z z}$$

代入亥姆霍兹方程，得：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)\vec{E}(x,y)=\vec{0}$$

设 $u(x,y)$ 为电磁场的任一直角坐标分量，

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

分离变量法可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

特解：

$$u(x,y)=(C_1\cos k_xx+D_1\sin k_xx)(C_2\cos k_yy+D_2\sin k_yy)$$

考虑边界条件 $x=0,y=0$ 面上的边界条件，可得：

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yye^{\mathrm{i}k_zz}\end{cases}$$

再考虑 $x=a,y=b$ 面上的边界条件，可得：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\ \ k_y=\frac{n\pi}{b},\ \ m,n=0,1,2,\cdots$$

再考虑波导中电场应满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$，得：

$$k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$$

也就是说，A_1,A_2,A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组 (m,n) 值，有两种独立波模，有两种独立波模。

解出 $\vec{E}$ 后，磁场为：

$$\vec{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$$

对一组确定的 (m,n)，若选一种波模具有 $E_z=0$，则该波模的 $A_1/A_2=-k_y/k_x$ 就完全确定，因而另一种波模必须有 $E_z\neq0$

对 $E_z=0$ 的波模，$H_z\neq 0$

在波导内传播的波的特点：

电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z=0$ 的波，称为横电波（TE）；另一种波模为 $H_z=0$ 的波，称为横磁波（TM）。

TE 波和 TM 波又按 (m,n) 的值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波，一般情况下，在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

若激发频率 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$，则 k_z 变为虚数，此时传播因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的**最低频率** ω_e 称为该波模的**截止频率**。

由：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\ \ k_y=\frac{n\pi}{b},\ \ k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

得到 (m,n) 型的**截止角频率**为：

$$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$$

若 $a>b$，则 TE_{10} 波有最低截止频率：

$$\frac{\omega_{c,10}}{2\pi}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若管内为真空，此时最低截止频率为 $\dfrac{c}{2a}$，相应的截止波长为：

$$\lambda_{c,10}=2a$$

因此，在波导内能够通过的最大波长为 $2a$

最常用的是 TM_{10} 波，它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

TE_{10} 波的电磁场和管壁电流

当 $m=1,n=0$ 时，$k_x=m\pi/a=\pi/a, k_y=n\pi/b=0$，且对 TE 波有 $E_z=0$，因此 $A_3=0$

由 $k_xA_1+k_yA_2-\mathrm{i}k_zA_3=0$ 得 $A_1=0$，把 A_2 写为：

$$A_2=\frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi}H_0$$

由

$$
\begin{cases}
E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i} k_z z} \\
E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{\mathrm{i} k_z z} \\
E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{\mathrm{i} k_z z}
\end{cases}, \quad \vec{H} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}
$$

得 TE_{10} 波的电磁场：

$$
H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a}
$$

$$
E_y = \frac{\mathrm{i}\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}
$$

$$
H_x = -\frac{\mathrm{i} k_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}
$$

$$
E_x = E_z = h_y = 0
$$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $\vec{n}_{1\to 2} \times \vec{H} = \vec{\alpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_\mathrm{f} \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\mathrm{f} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0
\end{cases}
$$

由一般情况下 $\vec{B}$ 的无散性 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入矢势 $\vec{A}$，使得：

$$
\vec{B} = \nabla \times \vec{A}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \\
&= -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

于是：

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

这就是说，$\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场，于是可引入标势 φ，使得：

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$$

于是：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

场量 $\vec{B}, \vec{E}$ 可由矢势 $\vec{A}$ 和 φ 表达为：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数，作变换（势的规范变换）：

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

有：

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla\psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) - \frac{\partial(\vec{A} + \nabla\psi)}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

即 $(\vec{A}', \varphi')$ 与 $(\vec{A}, \varphi)$ 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范**。

当势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为**规范不变性**。

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 $\vec{E},\vec{B}$ 的方程，可化为关于势 $\vec{A},\varphi$ 的方程。

真空中：

$$\begin{cases}\nabla\times(\dfrac{\vec{B}}{\mu_0})=\dfrac{\partial(\varepsilon_0\vec{E})}{\partial t}+\vec{J}\\ \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E})=\rho\\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

其中，$\mu_0\varepsilon_0=1/c^2$

库仑规范下

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

洛伦兹规范

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

推迟势

求解达朗贝尔方程：

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

考虑某一体元内的变化电荷激发的势：

$$\rho(\vec{x},t)=Q(t)\delta(\vec{x})$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$$

由球对称性，$\varphi=\varphi(r,t)$，球坐标下：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$$

除原点外 φ 的通解为：

$$\varphi(r,t)=\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}+\frac{g(t+\frac{r}{c})}{r}$$

猜出：

$$\varphi(r,t)=\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由场的叠加性，

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

电偶极辐射

计算辐射场的一般公式

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'}$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流，即：

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中，$\vec{J}(\vec{x}')$ 是 $t=0$ 时的电流密度分布。

交变电流情况下：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中，$k=\omega/c$

令：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

其中：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中，$\vec{A}(\vec{x})$ 是 $t=0$ 时刻的矢势分布。

其中，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 是推迟作用因子，其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形，电荷守恒定律为：

$$\mathrm{i}\omega\rho=\nabla\cdot\vec{J}$$

若知道了矢势 $\vec{A}$，则可求磁场 $\vec{B}$：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

知道了 $\vec{B}$，可根据麦克斯韦方程组求电场 $\vec{E}$：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\vec{E}$$

$$\vec{E}=\frac{\mathrm{i}c}{k}\nabla\times\vec{B}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l，波长 λ，电荷到场点的距离 r，

小区域：

$$l\ll\lambda,\ \ l\ll r$$

近区：$r\ll\lambda$

感应区：$r\sim\lambda$

远区（辐射区）：$r\gg\lambda$

$$r\approx R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'$$

矢势精确表达式：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势近似表达式：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{\mathrm{i}k(R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}\mathrm{d}V' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\cdot\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}}{R}\mathrm{d}V' \\ &\approx \frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int\limits_V \vec{J}(\vec{x}')(1-\mathrm{i}k\vec{e}_R\cdot\vec{x}'+\cdots)\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int\limits_V \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i，速度为 v_i 的粒子，则：

$$\boxed{\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i}$$

> $\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

$$\int\limits_V \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' = \sum q\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\sum q\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum q\vec{x} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &\equiv \dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

其中，$\vec{p}$ 是电荷系统的电偶极矩

$$\boxed{\int\limits_V \vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V' = \dot{\vec{p}}}$$

考虑一个简单电偶极子系统，它由两个相距为 $\Delta\vec{l}$ 的导体球组成，两导体之间由细导线相连。

此系统的电偶极矩：

$$\vec{p} = Q\Delta\vec{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$$

电偶极矩变化率：

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q \Delta \vec{l} \\
&= I \Delta \vec{l} \\
&= \int\limits_V \vec{J}(\vec{x}') \mathrm{d}V'
\end{aligned}
$$

与一般公式相符。

于是：

$$
\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \dot{\vec{p}}
$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果：

$$
\nabla \longleftrightarrow \mathrm{i}k\vec{e}_R
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega
$$

辐射场：

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\
&= \frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi R} e^{\mathrm{i}kR} \vec{e}_R \times \dot{\vec{p}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{\mathrm{i}kR} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\mathrm{i}c}{k} \nabla \times \vec{B} \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R
\end{aligned}
$$

取球坐标原点在电荷分布区内，并以 $\vec{p}$ 方向为极轴，

$$
\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin\theta \vec{e}_\phi
$$

$$
\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin\theta \vec{e}_\theta
$$

辐射能流 角分布 辐射功率

$$\begin{aligned}\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^{*}\times\vec{H}\} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &= \oint|\bar{\vec{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\oint\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

短天线辐射 辐射电阻

磁偶极辐射和电四极辐射

矢势展开式第二项：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int\vec{J}(\vec{x}')(\vec{e}_R\cdot\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$-\vec{e}_R\times\int\frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{J}'\mathrm{d}V = -\vec{e}_R\times\vec{m}$$

此项导致的辐射是磁偶极辐射

$$\mathscr{D}\equiv\sum 3q\vec{x}'\vec{x}'$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\left(-\vec{e}_R\times\vec{m}+\frac{1}{6}\vec{e}_R\cdot\dot{\mathscr{D}}\right)}$$

第一项是磁偶极辐射，第二项是电四极辐射

磁偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = \ \vec{e}_R\times\vec{m}$$

辐射区（很远，近似）电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla\times\vec{A} \\ &= \frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= c\vec{B}\times\vec{e}_R \\
&= -\frac{\mu_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{e}_R)
\end{aligned}
$$

磁偶极辐射的平均能流密度：

$$
\bar{\vec{S}} = \frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R
$$

总辐射功率：

$$
P = \frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{12\pi c^3}
$$

电四极辐射

$$
\vec{A} = -\frac{\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi R}\vec{e}_R\cdot\mathscr{D}
$$

定义矢量：

$$
\vec{\mathscr{D}}(\vec{e}_R) \equiv \vec{e}_R\cdot\mathscr{D}
$$

$$
\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{\vec{\mathscr{D}}}
$$

辐射区电磁场：

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \mathrm{i}k\vec{e}_R\times\vec{A} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi\varepsilon_0c^4R}\dddot{\vec{\mathscr{D}}}\times\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= c\vec{B}\times\vec{e}_R \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{24\pi\varepsilon_0c^3R}(\dddot{\vec{\mathscr{D}}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

平均能流密度：

$$
\begin{aligned}
\bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{288\pi c^5R^2}(\dddot{\vec{\mathscr{D}}}\times\vec{e}_R)^2\vec{e}_R
\end{aligned}
$$

例 5.3

$$
\mathscr{D} = 6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z
$$

$$
\vec{\mathscr{D}} \equiv \vec{e}_R\cdot\mathscr{D} = 6Ql^2\cos\theta\vec{e}_z
$$

$$
\vec{\mathscr{D}}\times\vec{e}_R = 6Ql^2\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\phi
$$

$$|\dddot{\vec{\mathscr{D}}} \times \vec{e}_R|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

辐射功率：

$$P = \int \bar{S} R^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\varepsilon_0 c^5}$$

天线辐射（了解）

天线上的电流分布

细长直线天线上电流分布的形式

取天线沿 z 轴，天线表面上的电流 $\vec{J}$ 沿 z，$\vec{A}$ 沿 z 轴

洛伦兹条件：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

得：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}$$

天线是理想导体，$E_z = 0$，A_z 满足一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0$$

矢势 $\vec{A}$ 与天线电流的关系：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V'$$

半波天线

天线总长度为 l，电流分布为：

$$I(z) = \begin{cases} I_0 \sin\ k(\frac{l}{2} - z), & 0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2} \\ I_0 \sin\ k(\frac{l}{2} + z), & -\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant 0 \end{cases}$$

若 $l = \lambda/2$

$$I(z) = I_0 \cos(kz), \quad |z| \leqslant \frac{\lambda}{4}$$

$$A_z(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\lambda/4}^{\lambda/4}\cos(kz)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cos\theta}\mathrm{d}z$$

计算远场

天线阵

半波天线对极角有一定方向性，对方位角没有方向性。

要得到高度定向的辐射，可以用一系列天线排成天线阵，利用各条天线辐射的干涉效应来获得较强的方向性。

电磁波的衍射

电磁场的动量

力密度 $\vec{f}$:

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$$

真空中：

$$\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E},\ \ \vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{f}=\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$$

结合

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\ \ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{f}=\left[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}+\varepsilon_0(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}\right]-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

电磁场的动量密度：

$$\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

方括号部分表示电磁场内部的动量转移

令：

$$\mathscr{T}=-\varepsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}+\frac{1}{2}\mathscr{I}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$$

其中，$\mathscr{I}$ 是单位张量

动量守恒定律：

$$\int\limits_V \vec{f}\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \vec{g}\mathrm{d}V = -\int\limits_V \nabla\cdot\mathscr{T}\mathrm{d}V = -\oint\limits_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\mathscr{T}$$

张量 $\mathscr{T}$ 称为电磁场的动量流密度张量

第6章 狭义相对论

迈克尔逊-莫雷实验

调整迈克尔逊干涉仪，使得有效光程 $l_{MM_1} = l_{MM_2} = l$

设地球相对于“以太”的绝对运动速度 $\vec{v}$ 沿 $M_1 \to M$ 方向，则按经典理论，将产生光程差于是观察到干涉效应

按经典理论，干涉条纹应移动 0.4 个左右，但实验观察到的上限仅为 0.01 个

迄今为止的所有实验都指出，光速与观察者所处的参考系无关，也与光源的运动速度无关。

相对论的基本原理 洛伦兹变换

（1）相对性原理：所有惯性参考系是等价的。

（2）光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c，且与光源运动无关。

设惯性系 Σ' 相对于 Σ 以速率 v 运动，并选 x 和 x' 沿运动方向，则伽利略变换为：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

间隔不变性

用四个坐标 (x, y, z, t) 表示一个事件

从 $(\vec{x}, t)$ 到 $(\vec{x}', t)$ 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1, y_1,, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x'_1, y'_1,, z'_1, t'_1), (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$

间隔 s^2, s'^2 定义为：

$$s^2 \equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$
$$s'^2 \equiv c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性，即：

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

$s^2 = 0$，类光间隔

$s^2 > 0$，类时间隔

$s^2 < 0$，类空间隔

洛伦兹变换

某一事件在两个不同的惯性参考系中的时空坐标关系为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

同时相对性

相对论不应破坏因果律

洛伦兹变换给出：

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

不破坏因果律就是说，若 $t_2 > t_1$，则 $t_2' > t_1'$

运动时钟的延缓

运动尺度的缩短

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

其中，l_0 是静止长度

推导：

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换：

$$
\begin{cases}
x' = \gamma(x - vt) \\
t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x)
\end{cases}
$$

其中，$\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1, t_1)，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_1', t_1')，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$
\begin{cases}
x_1' = \gamma(x_1 - vt) \\
t_1' = \gamma(t_1 - \dfrac{v}{c^2}x_1)
\end{cases}
$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$
x_1 = a + vt_1
$$

右边的质点记为 2，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2, t_2)，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x_2', t_2')，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$
\begin{cases}
x_2' = \gamma(x_2 - vt) \\
t_2' = \gamma(t_2 - \dfrac{v}{c^2}x_2)
\end{cases}
$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 2 在 Σ 中运动的速度也是 v，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$
x_2 = b + vt_2
$$

尺子在 Σ 系中的长度，记为 l_Σ，定义为：

$$
\begin{aligned}
l_\Sigma &\equiv (x_2 - x_1)\Big|_{t_1=t_2} \\
&= [(b + vt_2) - (a + vt_1)]\Big|_{t_1=t_2} \\
&= b - a
\end{aligned}
$$

尺子在 Σ' 系中的长度（也就是静止长度），记为 $l_{\Sigma'}$，定义为：

$$
\begin{aligned}
l_{\Sigma'} &\equiv (x_2' - x_1')\Big|_{t_1'=t_2'} \\
&= \Big[\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\
&= \gamma\Big[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\
&= \gamma\Big[[(b + vt_2) - (a + vt_1) - v(t_2 - t_1)]\Big]\Big|_{t_1'=t_2'} \\
&= \gamma(b - a)
\end{aligned}
$$

可以看到，

$$l_\Sigma = \frac{1}{\gamma} l_{\Sigma'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_{\Sigma'} < l_{\Sigma'}$$

速度变换公式

$$
\begin{cases}
u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\
u_y' = \dfrac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\
u_z' = \dfrac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}
\end{cases}
$$

相对论时空观

相对论理论的四维形式

设一个点在 Σ 系的直角坐标为 x_1, x_2, x_3，在 Σ 系的直角坐标为 x_1', x_2', x_3'

其中，

$$x_i' = a_{ij} x_j$$

由不变量：

$$x_i x_i = x_i' x_i' = (a_{il} x_l)(a_{im} x_m) = a_{il} a_{im} x_l x_m$$

可得：

$$a_{il} a_{im} = \delta_{lm}$$

即三维坐标转动是个正交变换

$x_4 \equiv \mathrm{i}ct$，间隔不变式可写为：

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

四维矢量：

$$V'_\mu = a_{\mu\nu} V_\nu$$

四维张量：

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau}$$

间隔

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\mu$$

和固有时

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s$$

都是洛伦兹标量

四维速度矢量：

$$U_\mu = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

四维波矢量：

$$k_\mu = \left(\vec{k}, \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)$$

相对论的多普勒和光行差公式：

$$\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)}$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量：

$$x_\mu = (\vec{x}, \mathrm{i}ct)$$

电流密度第四分量：

$$J_4 = \mathrm{i}c\rho$$

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu$$

$$J_\mu = (\vec{J}, \mathrm{i}c\rho)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

四维势矢量

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$\Box$ 是洛伦兹标量算符

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\Box \varphi = -\mu_0 c^2 \rho$$

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$$

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

洛伦兹条件的四维形式：

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

电磁场张量

反对称四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

电磁场构成一个四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

张量变换关系：

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$$

电磁场的不变量

洛伦兹不变量：

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = B^2 - \frac{1}{c^2} E^2$$

四维全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}$

$$\frac{\mathrm{i}}{8} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} F_{\mu\nu} F_{\lambda\tau} = \frac{1}{c} \vec{B} \cdot \vec{E}$$