

1

| 推导复变函数可导的柯西-黎曼条件。

设 $f(z)$ 在 z 点可导, 则极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

设 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

特别地

(1) 令:

$$i\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令:

$$\Delta x = 0, i\Delta y \rightarrow 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导, 则这两个导数值应该相等, 于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2

| 求 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内，在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

$0 < |z| < 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$

由于 $|z| < 1$ ，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n\end{aligned}$$

$|z| > 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$

注意到 $|z| > 1$ ，则 $|1/z| < 1$ ，于是：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}$$

3

计算回路积分 $I = \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$, 其中回路 l 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

$$\text{令 } f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2}$$

在回路 l : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$ 内的孤立奇点有: $z_1 = i, z_2 = 1$, z_1 为一阶极点, z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned}
\text{Res } f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^0}{dz^0} (z - i) \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 1)^2} \\
&= \frac{1}{2i(i - 1)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^1}{dz^1} (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2+1} \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
I &= \oint_l \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} \\
&= 2\pi i [\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{\pi i}{2}
\end{aligned}$$

4

| 计算定积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$, 其中 $0 < \varepsilon < 1$

令：

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

于是：

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \\
&= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz
\end{aligned}$$

其中， C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z) = \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$, 被积函数的两个一阶极点为：

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数 $f(z)$ 可写为：

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数：

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^0}{dz^0}(z - z_1)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\varepsilon(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

由留数定理，有：

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz &= 2\pi i \text{Res } f(z_1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

于是积分为：

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

5

用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设 $i(t) \doteq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{di(t)}{dt} \doteq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \text{Re } p > 0, \quad \text{or } 1 \doteq \frac{1}{p}$$

对方程 $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$ ：

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \quad \frac{1}{p + R/L} \doteq e^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

6

证明 $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$, 并据此由 Gauss 公式 $\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ 证
明 Green 公式 $\int_{\Omega} \psi \nabla^2 \varphi + \varphi \nabla^2 \psi dV = \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{S}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i(\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i(\varphi A_i) \\ &= A_i \partial_i \varphi + \varphi \partial_i A_i \\ &= A_i (\nabla \varphi)_i + \varphi \partial_i A_i \\ &= \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

高斯公式给出:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

令 $\vec{A} = \nabla(\psi\varphi)$, 代入高斯公式得:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla(\psi\varphi) dV = \int_{\partial\Omega} \nabla(\psi\varphi) \cdot d\vec{S}$$

即:

$$\int_{\Omega} \psi \nabla^2 \varphi + \varphi \nabla^2 \psi dV = \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

7

求定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设：

$$u(x, t) = U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 可得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \implies T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$T'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0 \implies T'(t) \Big|_{t=0} = 0 \implies B = 0$$

因此：

$$T(t) = A \cos \omega t$$

令：

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \implies U(x) = C \cos kx + D \sin kx$$

$$U'(x) = -kC \sin kx + kD \cos kx$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=0} = 0 \implies D = 0$$

因此：

$$U(x) = C \cos kx, \quad U'(x) = -kC \sin kx$$

$$u_x \Big|_{x=l} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=l} = 0 \implies -kC \sin kl = 0$$

因此, k 的本征值 k_n 为:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

| $n = 0$ 是平庸解, 不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为:

$$U_n(x) = \cos k_n x = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

由 $k \equiv \omega/a$, 得 ω 的本征值 ω_n 为:

$$\omega_n = ak_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为:

$$T_n(t) = \cos \omega_n t = \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

本征解 $u_n(x, t)$ 为:

$$u_n(x, t) = U_n(x)T_n(t) = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

定解问题的通解 $u(x, t)$ 为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right)$$

最后结合初始条件

$$u \Big|_{t=0} = \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) + 0.3 \cos \left(\frac{3\pi x}{l} \right)$$

得到:

$$E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0.3, E_4 = E_5 = \dots = 0$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right) + 0.3 \cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{3\pi a}{l}t\right)$$

8

| 在均匀电场 \vec{E}_0 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

以球心 O 为坐标原点，选取 \vec{E}_0 方向为 z 轴正方向，则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布 $u(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \quad r > a$$

特别地，这里电势 u 关于 z 轴对称， u 与 φ 无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0, \quad r > a$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r, \theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 \vec{E}_0 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r \rightarrow +\infty$ ，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0 ，则：

$$u_0 - u(r, \theta) = E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0 \\ u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0 \\ u(r, \theta) = u_0 - E_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

考虑边界条件 $u(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow +\infty} = u_0 - E_0 r \cos \theta$ ，当 $r \rightarrow +\infty$ ，有 $r^{-(l+1)} \rightarrow 0$ ，于是：

$$\begin{aligned} u_0 - E_0 r \cos \theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= A_0 + A_1 r \cos \theta + \dots \end{aligned}$$

左右两边都看作关于 r 的多项式，对比系数得：

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = -E_0, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0$$

于是形式解可写为：

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

再考虑边界条件 $u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$, 将形式解代入边界条件, 得:

$$u_0 - E_0 a \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

即：

$$u_0 P_0(\cos \theta) - E_0 a P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

整理成以 $\cos \theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$ 的线性叠加的形式：

$$(u_0 + B_0 a^{-1}) P_0(\cos \theta) + (-E_0 a + B_1 a^{-2}) P_1(\cos \theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性, 它们的线性叠加为零, 当且仅当所有线性叠加系数为零, 即:

$$B_0 = -a u_0, \quad B_1 = a^3 E_0, \quad B_2 = B_3 = \dots = 0$$

综上, 导体球外电势分布为:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= u_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\ &= u_0 - E_0 r \cos \theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a \end{aligned}$$

其中， u_0 为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取 $u_0 = 0$ ，则导体球外电势分布为：

$$u(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad r \geq a$$

球外电场与电势的关系为：

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\ &= -\left[\frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right] \\ &= E_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \vec{e}_r + E_0 \sin \theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 1 \right) \vec{e}_\theta, \quad r \geq a \end{aligned}$$

导体表面电场为：

$$\vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} = 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r$$

利用高斯定理，导体球表面面电荷密度分布为：

$$\sigma(\vec{r}) \Big|_{r=a} = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r=a} \cdot \vec{e}_r = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

9

| 求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho, \varphi, t)$ 是 t 时刻 ρ, φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho, \varphi, t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho, \varphi, t) - a^2 \nabla_{(2)}^2 u(\rho, \varphi, t) = 0$$

其中， $\nabla_{(2)}^2$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla_{(2)}^2 \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设 $u(\rho, \varphi, t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho, \varphi)T''(t) - a^2 T(t) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = 0$$

上式两边同时除以 $U(\rho, \varphi)T(t)$, 再移项, 得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$$

注意到, $\frac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关, 而 $\frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$ 只与 ρ, φ 有关, 二者相等, 因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = -\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式, 因此只需要关注空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\frac{U(\rho, \varphi)}{a^2}$ 并移项, 得:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U(\rho, \varphi) = 0$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程为:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0$$

由于圆形膜边界固定, 因此得到一个边界条件:

$$U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限, 因此得到一个自然边界条件:

$$|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho, \varphi)$ 满足周期性边界条件:

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0 \\ U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \\ |U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \\ U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \end{cases}$$

设 $U(\rho, \varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

上式等号两边同乘 $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$ ，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$ ：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \implies R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \implies \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

可得：

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

令 $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho) \Big|_{\rho=x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$, 则上面方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

$$U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho)\Phi(\varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0$$

$$|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)\Phi(\varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$$

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \\ y(x) \equiv R(\rho) \Big|_{\rho=x/k} = R(x/k), \quad R(\rho) = y(x) \Big|_{x=k\rho} = y(k\rho) \\ R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0 \\ |R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \end{cases}$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

其通解为：

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x) + D_m N_m(x)$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$, 可得:

$$D_m = 0$$

因此:

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$y^{(m)}(x) \Big|_{x=k\rho} = C_m J_m(x) \Big|_{x=k\rho}$$

结合 $x = k\rho, R(\rho) = y(x) \Big|_{x=k\rho} = y(k\rho)$ 可得:

$$R^{(m)}(\rho) = C_m J_m(k\rho)$$

设 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$, 即:

$$J_m(x_n^{(m)}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots ; \quad n = 1, 2, \dots$$

结合边界条件 $R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0$, 即:

$$C_m \mathbf{J}_m(kb) = 0$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为:

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathbf{J}_m\left(k_n^{(m)}\rho\right) = \mathbf{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

再根据 $k \equiv \omega/a$, 得到 ω 的本征值, 即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$\omega_n^{(m)} = ak_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

综上所述, 边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$\boxed{\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots}$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho) = \mathbf{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots}$$

其中, $x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathbf{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。

10

数学物理方程反映了同一类现象的共同规律, 各个具体问题所处的特定“环境”(边界条件)决定了其特殊性的一面, 试简述你边界条件的认识 (从边界条件的分类、边界条件与本征值的关系、自然边界条件等方面阐述)。

大家自由发挥。