

真不会写啊！老学长们太不容易了。现在的期末题应该没这么难吧。。。

一、简答题

1

请叙述自然界中的四种基本相互作用，并比较各种相互作用的强弱。

PPT 167

	强相互作用	电磁相互作用	弱相互作用	引力相互作用
力程	$\sim 10^{-15} \text{ m}$	∞	$\sim 10^{-18} \text{ m}$	∞
作用强度	0.15	0.0073	6.34×10^{-10}	5.90×10^{-30}
媒介粒子	介子、胶子	光子	W^+, W^-, Z^0	引力子

2

请在自然单位制中将室温用 GeV, s(秒), fm(费米) 表示。

PPT 104; 另外, PPT 上 $1 \text{ eV} = (\dots)^{-1} \text{ K}$ 写错了。

室温 $T \approx 300 \text{ K}$.

根据自然单位制温度和能量换算关系

$$1 \text{ K} \approx 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

$$T \approx 300 \text{ K} = 300 \times 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV} \approx 2.59 \times 10^{-2} \text{ eV} = 2.59 \times 10^{-11} \text{ GeV}$$

根据自然单位制时间和能量换算关系

$$1 \text{ (MeV)}^{-1} \approx 6.58 \times 10^{-22} \text{ s}$$

$$T \approx 2.59 \times 10^{-11} \text{ GeV} = 2.59 \times 10^{-8} \text{ MeV} = 2.59 \times 10^{-8} \cdot \frac{1}{6.58 \times 10^{-22}} \text{ s}^{-1} \approx 3.94 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$$

根据自然单位制时间和长度换算关系

$$1 \text{ s} = 3 \times 10^8 \text{ m}$$

$$T \approx 3.94 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} = \frac{3.94 \times 10^{13}}{3 \times 10^8} \text{ m}^{-1} \approx 1.31 \times 10^5 \text{ m}^{-1} = 1.31 \times 10^5 (10^{15} \text{ fm})^{-1} = 1.31 \times 10^{-10} \text{ fm}^{-1}$$

3

在美国费米实验室的 Tevatron 对撞机上 $p\bar{p} \rightarrow W^+$ 的散射截面是 $\sigma = 10 \text{ nb}$, 并且实验亮度为 $\mathcal{L} = 10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, 请问, 一年内 ($\sim 10^7 \text{ s}$) 可以产生多少个 W^+ 玻色子?

$$N = \sigma \mathcal{L} t$$

其中 N 是某过程产生的事件数; σ 是散射截面; \mathcal{L} 是亮度; t 是持续时间。

$$1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ nb} = 10^{-9} \text{ b} = 10^{-33} \text{ cm}^2$$

$$N = \sigma \mathcal{L} t = (10 \times 10^{-33} \text{ cm}^2) \times (10^{31} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}) \times (10^7 \text{ s}) = 10^6$$

4

请说明光子质量项 $m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ 破坏 $U(1)$ 规范对称性。

规范变换:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

光子质量项的变换:

$$m_\gamma^2 A_\mu A^\mu \rightarrow m_\gamma^2 (A_\mu - \partial_\mu \alpha) (A^\mu - \partial^\mu \alpha) \neq m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$$

5

请说明深度非弹散射过程 $e^- p \rightarrow e^- X$ 中观测到的 Bjorken 标度不变性, 并阐述如何使用费曼部分子模型解释此标度不变性。

GPT 生成

1. 深度非弹散射过程概述

深度非弹散射 (Deep Inelastic Scattering, DIS) 是指高能电子与质子碰撞过程:

$$e^-(k) + p(P) \rightarrow e^-(k') + X,$$

其中 X 是质子碎裂后产生的多粒子末态, 动量转移为

$$q = k - k', \quad Q^2 \equiv -q^2,$$

满足 $Q^2 \gg m_p^2$, 体现了高能深度探测。

2. Bjorken 标度变量定义

定义无量纲变量

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q},$$

称为 Bjorken 变量，物理上对应质子内部分子的动量分数。

3. Bjorken 标度不变性

实验观测到，在高 Q^2 和大能量传递极限下，结构函数（描述质子内部结构的函数）

$$F_1(x, Q^2), \quad F_2(x, Q^2)$$

表现出对 Q^2 的依赖非常弱，即近似只依赖于 Bjorken x ：

$$F_i(x, Q^2) \approx F_i(x),$$

这称为 **Bjorken 标度不变性 (Scaling)**。

4. 费曼部分子模型的解释

费曼部分子模型将质子视为由近自由的点状部分子（quarks）组成：

- 质子在散射过程中表现为一束携带动量分数 x 的部分子。
- 高能电子与这些部分子弹性散射。
- 由于部分子近自由，散射过程瞬时，电子“看到”的是一个带有固定动量分数的自由粒子。
- 结构函数由部分子动量分布函数 $f_i(x)$ 给出：

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x),$$

其中 e_i 是第 i 种部分子的电荷。

5. 标度不变性的物理含义

- 部分子模型中，结构函数仅由部分子分布决定，与 Q^2 无关（忽略 QCD 进化效应）。
- 因此，在大能量极限，结构函数显示标度不变，即不随探测能量尺度改变。
- 这反映了部分子是点状且近自由的属性。

总结

DIS 中的 Bjorken 标度不变性说明质子内部结构在高压下表现为独立的点状部分子。费曼部分子模型通过将质子视为含有不同动量分数的自由部分子，成功解释了结构函数对 Q^2 的弱依赖性，从而解释了标度不变性。

6

考虑正负电子对撞机上 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 对产生过程，请在同一图形中画出 $N_\nu = 3$ 和 $N_\nu = 4$ 两种情况下的 $\mu^+\mu^-$ 的不变质量，其中 N_ν 是无质量中微子的种类数目。

Gemini生成

在正负电子对撞机上 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 对产生过程主要通过两种机制发生：

1. **电磁相互作用**：通过一个虚光子 (γ^*) 交换。
2. **弱相互作用**：通过一个虚 Z^0 玻色子交换。

$\mu^+\mu^-$ 的**不变质量** $M_{\mu\mu}$ 就是对撞的质心系能量 \sqrt{s} 。在 e^+e^- 对撞机上，这个能量是可调的。

N_ν 的影响:

无质量中微子的种类数目 (N_ν) 会影响 Z^0 玻色子的**总宽度 (total decay width)** Γ_Z 。 Z^0 玻色子可以通过多种途径衰变，包括衰变为中微子-反中微子对 ($Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu}$)。

Z^0 玻色子的总宽度可以表示为:

$$\Gamma_Z = \Gamma_{\text{hadronic}} + \Gamma_{\text{leptonic}} + N_\nu \Gamma_{\nu\bar{\nu}}$$

其中:

- Γ_{hadronic} 是 Z^0 衰变为强子的宽度。
- Γ_{leptonic} 是 Z^0 衰变为带电轻子对 (如 e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$) 的宽度。
- $\Gamma_{\nu\bar{\nu}}$ 是 Z^0 衰变为单一中微子-反中微子对的宽度。

Z^0 玻色子的总宽度 Γ_Z 越小，它在共振峰处的寿命就越长，峰值就越高。反之，宽度越大，峰值就越低，共振曲线越宽。

理论预测: $\mu^+\mu^-$ 产生截面与 N_ν :

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 过程的总截面 $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ ，作为 \sqrt{s} (即 $\mu^+\mu^-$ 不变质量) 的函数，在 Z^0 玻色子的质量附近会有一个显著的共振峰。这个共振峰的高度和形状与 Z^0 玻色子的参数密切相关。

当 N_ν 增加时， Γ_Z 会增加，这将导致 Z^0 共振峰的**峰值降低**，而**峰宽变宽**。

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \propto \frac{s}{(s - M_Z^2)^2 + s^2(\Gamma_Z/M_Z)^2}$$

其中， M_Z 是 Z^0 玻色子的质量。当 $s = M_Z^2$ 时，截面达到峰值，峰值与 $1/\Gamma_Z^2$ 成正比。

图形绘制:

要在同一图中画出 $N_\nu = 3$ 和 $N_\nu = 4$ 两种情况下的 $\mu^+\mu^-$ 不变质量分布 (即截面作为 \sqrt{s} 的函数)，我们可以预期:

- 共振峰位置:** 两种情况下的共振峰都将出现在相同的能量位置，即 $M_Z \approx 91.1876$ GeV。
- 峰值高度:** $N_\nu = 4$ 时的峰值将**低于** $N_\nu = 3$ 时的峰值，因为 $N_\nu = 4$ 意味着更大的 Γ_Z 。
- 峰宽:** $N_\nu = 4$ 时的峰将略微**更宽**，因为更大的 Γ_Z 会导致更宽的共振。

7

请说明为什么 τ^- 轻子衰变道 $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$ 的分支比是 20%。(提示: 画出费曼图分析)

GPT 生成

1. 衰变过程及费曼图

主导过程为弱相互作用，费曼图如下:

$$\tau^- \rightarrow \nu_\tau + W^{*-} \rightarrow \nu_\tau + (e^- \bar{\nu}_e),$$

即 τ^- 先发射虚拟的 W^- 玻色子, W^- 再衰变成 $e^- \bar{\nu}_e$ 。

2. 理论分析

- τ^- 衰变主要通过弱电流相互作用, 过程类似于 μ^- 衰变, 但质量更大, 允许更多衰变通道。
- W^- 虚粒子的衰变模式有三类:
 - i. **电子通道:**

$$W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$$

- ii. **μ 子通道:**

$$W^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

- iii. **强子通道:**

$$W^- \rightarrow \text{各种强子通道 (主要是轻夸克对)}$$

3. 分支比估算

- 由于弱电流对三代轻子耦合相同, 电子和 μ 子衰变通道分支比近似相等, 各占约 10%。
- 剩余约 70% 衰变到强子通道 (夸克颜色自由度为3), 导致强子衰变概率较大。

总结:

$$\text{Br}(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e) \approx \frac{1}{3} \times (1 - \text{强子衰变比}) \approx 20\%.$$

4. 具体数值匹配

- 实验测得电子通道衰变分支比约 17.8%。
- 结合 μ 子通道和强子通道分布, 符合上述理论估计。

结论

由于虚拟 W^- 衰变到电子、 μ 子、夸克三种主要通道, 颜色自由度和相同电弱耦合导致电子通道衰变分支约为 20%, 这与实验结果一致。

8

请说明实验上如何发现下列粒子 (任选5个): (1) 电子; (2) μ 轻子; (3) τ 轻子; (4) π 介子; (5) 粲夸克; (6) 底夸克; (7) 顶夸克; (8) 中微子; (9) W 玻色子; (10) Z 玻色子; (11) 希格斯粒子; (12) 胶子。

(1) 电子: Ch0P9 真空管阴极射线实验中, 根据带电粒子在电磁场中偏转的原理, 调整电磁场, 可测定粒子的速度和质量。1897 年汤姆逊发现电子。

(2) μ 轻子 Ch0P21: 1936年, 安德森在宇宙线中发现 μ 轻子。

(3) τ 轻子 Ch0P40: 1975年, 正负电子对撞机上发现 τ 子。

(4) π 介子: Ch0P21 拍摄大量宇宙射线在不同高度穿过乳胶的底片, 并对底片中粒子留下的轨迹进行分析。1947 年鲍威尔发现汤川预言的介子, 这个介子命名为 π 介子。

(5) 粲夸克 Ch0P32, Ch3P74: 丁肇中等人用质子轰击铍靶的实验中发现一个长寿命的粒子, 命名为 J 粒子; Burton Richter 等人在正负电子对撞实验中也发现一个长寿命的粒子, 命名为 ψ 粒子。两组人发现的是同一个粒子, 现在称为 J/ψ 粒子。

(6) 底夸克 Ch0P33: 1977年, 莱昂·莱德曼等人400 GeV 的质子束撞击固定靶(铜或铂)发现新粒子 Υ , 这是由底夸克构成的束缚态。

(7) 顶夸克 Ch0P34: 质子-反质子对撞机上发现一个最重的夸克, 称为顶夸克。

(8) 中微子 Ch0P38: 1956年, 莱因斯和考恩用核反应堆发出的反中微子和质子碰撞, 第一次直接证实了中微子的存在。

(9) W 玻色子 Ch0P50: 1983年, 欧洲核子中心的质子-反质子对撞机上发现 W^{\pm} 粒子。

(10) Z 玻色子 Ch0P50: 质子-反质子对撞机, 把加速器束流亮度提高10倍后找到 Z^0 。

(11) 希格斯粒子 Ch0P61: 欧洲核子中心 CMS 组合 ATLAS 组发现希格斯粒子。

(12) 胶子:



请说明下面哪些过程是可以发生并通过何种相互作用发生。如果某过程被禁戒, 请说明原因。

$$e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$$

$$p \rightarrow n e^+ \nu_e, \quad \Lambda \rightarrow p \pi^-$$

$$\pi^+ n \rightarrow \Lambda K^+, \quad pp \rightarrow pp \bar{p} \bar{p}$$

$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+, \quad p \rightarrow e^+ \gamma$$

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_\mu, \quad K^+ \rightarrow \pi^+ \gamma$$

$e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$: 可通过电磁相互作用发生;

$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$: 可通过弱相互作用发生;

$p \rightarrow n e^+ \nu_e$: 可通过弱相互作用发生;

$\Lambda \rightarrow p \pi^-$: 可通过弱相互作用发生;

$\pi^+ n \rightarrow \Lambda K^+$: 可通过强相互作用发生;

$pp \rightarrow pp \bar{p} \bar{p}$: 禁戒, 违反电荷守恒和重子数守恒;

$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$: 可通过电磁相互作用发生;

$p \rightarrow e^+ \gamma$: 禁戒, 违反重子数守恒;

$\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_\mu$: 可通过弱相互作用发生;

$K^+ \rightarrow \pi^+ \gamma$: 基本不发生。

三

实验上观测到强衰变过程 $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, 但没有观测到 $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 衰变。请据此推导出 ρ 的量子数: (1) G 宇称; (2) 自旋; (3) 内禀宇称, 并提供**禁戒** $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ 衰变过程的三种不同原因。

(1) 强相互作用过程中 G 宇称守恒, G 宇称是相乘性守恒量, π 介子 G 宇称为 -1 , 则 ρ^0 的 G 宇称为: $G'(\rho^0) = G'(\pi^+) G'(\pi^-) = (-1)(-1) = +1$

(2) ρ 有 ρ^+, ρ^0, ρ^- 三种不同电荷态, 因此同位旋为 $I(\rho^{\pm,0}) = 1$; ρ^0 介子是纯中性粒子, 具有 C 宇称, 满足 $G'(\rho^0) = (-1)^{I(\rho^0)} C'(\rho^0)$, 因此 $C'(\rho^0) = -1$; $\pi^+ \pi^-$ 是纯中性系统, 具有 C 宇称。根据强相互作用 C 宇称守恒, $C'(\pi^+ \pi^-) = C'(\rho^0) = -1$; π 介子自旋为零, 因此 $\pi^+ \pi^-$ 系统总自旋为 $S(\pi^+ \pi^-) = 0$; 根据一对正反粒子组成系统满足 $C' = (-1)^{L+S}$ 可知 $\pi^+ \pi^-$ 相对轨道角动量 $L(\pi^+ \pi^-) = \text{奇数}$; 根据反应前后总角动量守恒, 反应前只有 ρ^0 , 不存在轨道角动量, 只有自旋对总角动量有贡献。反应后总角动量为 $J(\pi^+ \pi^-) = L(\pi^+ \pi^-) + S(\pi^+ \pi^-) = L(\pi^+ \pi^-) = \text{奇数}$, 因此 ρ 自旋满足: $S(\rho^{\pm,0}) = \text{奇数}$

(3) 一对正反玻色子对组成系统的内禀宇称为 $P'_{\text{内禀}}(\pi^+ \pi^-) = +1$; 由于 $L(\pi^+ \pi^-) = \text{奇数}$, 轨道宇称为 $P'_{\text{轨道}}(\pi^+ \pi^-) = (-1)^{L(\pi^+ \pi^-)} = -1$, 末态总宇称为 $P'_{\text{总}}(\pi^+ \pi^-) = P'_{\text{内禀}}(\pi^+ \pi^-) P'_{\text{轨道}}(\pi^+ \pi^-) = -1$; 初态单个 ρ^0 没有轨道宇称, 则根据强相互作用宇称守恒, 有 $P'_{\text{内禀}}(\rho^0) = P'_{\text{总}}(\pi^+ \pi^-) = -1$ 。

三种禁戒的原因: C 宇称不守恒、总角动量不守恒、同位旋对称性限制。

C 宇称不守恒: ρ^0 是 C -odd ($C = -1$) 的矢量介子, 而 π^0 是 C -even ($C = +1$) 的赝标量介子。末态 $\pi^0 \pi^0$ 的总 C 宇称为 $(+1)^2 = +1$, 与初态 ρ^0 的 $C = -1$ 矛盾。

总角动量不守恒: ρ^0 是自旋为 1 的矢量介子, 而 π^0 是自旋为 0 的赝标量介子。末态 $\pi^0 \pi^0$ 的总角动量只能为 0 ($L = 0$ 的 S 波态), 无法与初态 ρ^0 的自旋 1 匹配。

同位旋对称性限制: ρ^0 属于同位旋三重态 ($I = 1, I_3 = 0$), 而 π^0 的同位旋与 ρ^0 相同。末态 $\pi^0 \pi^0$ 必须满足对称波函数 (玻色统计), 但 $I = 1$ 的两粒子系统无法构成 $I_3 = 0$ 的对称态 (仅 $I = 0$ 或 2 允许)。补充: $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ 允许, 因其末态可通过 $I = 1$ 的反对称组合实现。

四

分别列出 $\pi^+ \pi^- \pi^0$ 和 $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ 的各种同位旋态。

Gemini 生成

在分析之前, 我们需要明确几个核心概念:

1. **π 介子**: π^+, π^0, π^- 构成一个同位旋三重态, 总同位旋量子数 $I = 1$ 。

2. **同位旋第三分量 (I_3):** 三个电荷态对应不同的同位旋第三分量:

- $\pi^+ : I_3 = +1$
- $\pi^0 : I_3 = 0$
- $\pi^- : I_3 = -1$

3. **同位旋耦合:** 多个粒子的总同位旋态由单个粒子的同位旋矢量相加得到, 其规则与角动量耦合相同。例如, 两个同位旋为 I_a 和 I_b 的粒子, 其总同位旋 I_{total} 的可能取值为:

$$I_{total} = |I_a - I_b|, |I_a - I_b| + 1, \dots, I_a + I_b$$

4. **I_3 的可加性:** 系统的总同位旋第三分量是各组分 I_3 的代数和。

$$I_{3,total} = \sum_i I_{3,i}$$

5. **玻色-爱因斯坦统计:** π 介子是玻色子。对于由**全同粒子**组成的系统 (如 $\pi^0\pi^0\pi^0$) , 其总波函数在交换任意两个粒子时必须是对称的。这对可能的量子态构成了强烈的限制。

1 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统的同位旋态:

这是一个由三个可区分粒子 (电荷不同) 组成的系统, 因此我们不需要考虑交换对称性的限制, 只需进行标准的同位旋耦合计算。

第一步: 计算系统的总 I_3

$$I_{3,total} = I_3(\pi^+) + I_3(\pi^-) + I_3(\pi^0) = (+1) + (-1) + (0) = 0$$

这意味着最终的总同位旋态 $|I, I_3\rangle$ 必须是 $|I, 0\rangle$ 的形式。

第二步: 耦合三个 $I = 1$ 的同位旋

我们分步进行耦合, 记为 $1 \otimes 1 \otimes 1$:

1. 首先耦合 π^+ 和 π^- (两个 $I = 1$ 的粒子) :

$$I_{12} = |1 - 1|, \dots, 1 + 1 \implies I_{12} = 0, 1, 2$$

2. 然后将上述结果与第三个粒子 π^0 ($I = 1$) 进行耦合:

- 若 $I_{12} = 0$, 与 $I = 1$ 耦合得到总同位旋 $I_{total} = 1$ 。
- 若 $I_{12} = 1$, 与 $I = 1$ 耦合得到总同位旋 $I_{total} = |1 - 1|, \dots, 1 + 1 \implies I_{total} = 0, 1, 2$ 。
- 若 $I_{12} = 2$, 与 $I = 1$ 耦合得到总同位旋 $I_{total} = |2 - 1|, \dots, 2 + 1 \implies I_{total} = 1, 2, 3$ 。

第三步: 整合所有可能的结果

将所有可能的值集合起来, 我们得到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统可能的总同位旋 I 为:

$$I = 0, 1, 2, 3$$

由于系统的总 $I_3 = 0$, 而以上四个同位旋多重态 ($I = 0, 1, 2, 3$) 都包含 $I_3 = 0$ 的成员, 所以这些态都是允许的。

结论:

$\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统可以处于以下总同位旋态:

- $I = 0$
- $I = 1$
- $I = 2$
- $I = 3$

$2\pi^0\pi^0\pi^0$ 系统的同位旋态:

这是一个由三个**全同玻色子**组成的系统。除了同位旋耦合规则外，我们还必须满足玻色-爱因斯坦统计的要求。

第一步：计算系统的总 I_3

$$I_{3,\text{total}} = I_3(\pi^0) + I_3(\pi^0) + I_3(\pi^0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

第二步：应用玻色-爱因斯坦统计

系统的总波函数 Ψ_{total} 必须在交换任意两个 π^0 介子时是对称的。总波函数可以分解为空间部分和同位旋部分的乘积:

$$\Psi_{\text{total}} = \Psi_{\text{spatial}} \times \Psi_{\text{isospin}}$$

对于 $\pi^0\pi^0\pi^0$ 系统，三个粒子在同位旋空间是完全一样的（都是 $|I = 1, I_3 = 0\rangle$ ）。因此，其同位旋波函数 Ψ_{isospin} **天然就是对称的**。

为了使总波函数 Ψ_{total} 保持对称，空间波函数 Ψ_{spatial} 也必须是完全对称的。

根据量子力学中角动量耦合的对称性规则，当耦合三个相同的同位旋 $I = 1$ 时，得到的总同位旋态具有特定的交换对称性:

- $I = 3$ 态: 完全对称
- $I = 2$ 态: 混合对称
- $I = 1$ 态: 可以构造出完全对称和混合对称的态
- $I = 0$ 态: 完全反对称

由于 $3\pi^0$ 的同位旋波函数必须是完全对称的，我们只能选择那些可以构成完全对称组合的总同位旋 I 。对于三个 $I = 1$ 的耦合，这些态是:

$$I = 1, 3$$

总同位旋为 $I = 0$ 和 $I = 2$ 的态无法构成一个对三个全同 π^0 全对称的同位旋波函数，因此是被禁止的。

一个更严格的论证（基于C宇称）：

一个 n 个 π^0 组成的系统，其电荷共轭宇称 (C-parity) 为 $C = (+1)^n$ 。对于 $3\pi^0$ 系统， $C = +1$ 。同时，对于一个中性、非奇异的玻色子系统，C宇称和总角动量 L 、总同位旋 I 之间有关系 $C = (-1)^{L+I}$ 。

因此，对于 $3\pi^0$ 系统，必须满足:

$$(-1)^{L+I} = +1 \implies L + I = \text{偶数}$$

此外，由于三个全同玻色子的空间波函数对称性限制，对于 $L = 0$ (S波) 态，系统是不存在的。最低的轨道角动量态要求 $L + I$ 为奇数（这是一个更深入的对称性分析结果）。综合这两个限制，最终得到**总同位旋 I 必须是奇数**。

结论:

在 $I = 0, 1, 2, 3$ 的可能性中，只有奇数值是允许的。因此， $\pi^0\pi^0\pi^0$ 系统可以处于以下总同位旋态：

- $I = 1$
- $I = 3$

总结:

系统	总 I_3	关键限制	可能的总同位旋 I
$\pi^+\pi^-\pi^0$	0	无（粒子可区分）	0, 1, 2, 3
$\pi^0\pi^0\pi^0$	0	玻色-爱因斯坦统计（全同粒子）	1, 3

五

找出如下总散射截面之间的关系（设同位旋振幅 A_0, A_1 和 A_3 ）

- (1) $K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$
- (2) $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$
- (3) $K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$

其中, $K^-(I = 1/2, I_z = -1/2)$ 和 $\Sigma^{\pm,0}(I = 1, I_z = \pm 1, 0)$

GPT 生成

反应过程同位旋分析

考虑以下三个强相互作用过程：

- $K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$
- $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$
- $K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$

设总同位旋振幅为 A_I , 其中 $I = 0, 1$, 我们将使用同位旋叠加和 Clebsch-Gordan 系数来表示各通道的振幅。

初态同位旋

- $K^-: I = 1/2, I_z = -1/2$
- $p: I = 1/2, I_z = +1/2$
- \Rightarrow 总初态: $I = 0$ 或 $I = 1$

末态同位旋

- $\pi: I = 1$
- $\Sigma: I = 1$
- \Rightarrow 总末态: $I = 0, 1, 2$

但因强相互作用守恒，同位旋在总过程保持守恒，因此只考虑与初态匹配的 $I = 0$ 和 $I = 1$ 。

写出每个过程的振幅（用 Clebsch-Gordan 系数）

记总振幅为 $\mathcal{M} = \sum_I A_I \cdot C_I$ ，其中 C_I 是 Clebsch-Gordan 系数。

过程(1): $K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$

- 初态 $I = 0, 1, I_z = 0$
- 末态 $\pi^+(I_z = +1), \Sigma^-(I_z = -1) \Rightarrow I_z = 0$
- 振幅为：

$$\mathcal{M}_1 = A_0 \cdot \langle 1, 1; 1, -1 | 0, 0 \rangle + A_1 \cdot \langle 1, 1; 1, -1 | 1, 0 \rangle = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + A_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

过程(2): $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$

- $\pi^0(I_z = 0), \Sigma^0(I_z = 0) \Rightarrow I_z = 0$
- 振幅为：

$$\mathcal{M}_2 = A_0 \cdot \langle 1, 0; 1, 0 | 0, 0 \rangle + A_1 \cdot \langle 1, 0; 1, 0 | 1, 0 \rangle = A_0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 \cdot 0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} A_0$$

过程(3): $K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$

- $\pi^-(I_z = -1), \Sigma^+(I_z = +1) \Rightarrow I_z = 0$
- 振幅为：

$$\mathcal{M}_3 = A_0 \cdot \langle 1, -1; 1, +1 | 0, 0 \rangle + A_1 \cdot \langle 1, -1; 1, +1 | 1, 0 \rangle = A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - A_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

总结三条通道振幅

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} A_1$$

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} A_0$$

$$\mathcal{M}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_1$$

散射截面关系

设 $\sigma_i \propto |\mathcal{M}_i|^2$ ，可以写为：

$$\sigma_1 \propto \left| \frac{1}{\sqrt{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 \right|^2$$

$$\sigma_2 \propto \left| -\frac{1}{\sqrt{3}} A_0 \right|^2 = \frac{1}{3} |A_0|^2$$

$$\sigma_3 \propto \left| \frac{1}{\sqrt{3}} A_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 \right|^2$$

可构造一个组合验证：

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \frac{2}{3}|A_0|^2 + |A_1|^2 \propto 2\sigma_2 + |A_1|^2$$

这表明测量这些过程可以反推出 A_1 成分的存在。

六

在未来质心系能量为 1000 GeV 的正负电子直线加速器上，我们期望可观测到一对正反顶夸克事例

$$e^+e^- \rightarrow t\bar{t}, \quad t \rightarrow W^+b, \quad \bar{t} \rightarrow W^-\bar{b}$$

(1) 请画出顶夸克对产生过程的费曼图。

(2) 请说明顶夸克对事例的衰变末态中可以存在2个，4个或6个夸克，并给出每种情况出现的几率。

(3) 考虑如下两种末态：1. 四个夸克、 μ^+ ；2. 两个夸克、 e^- 、 μ^+ ；请画图说明如何在探测器上观测这两种末态。

GPT 生成

在强子对撞机（如 LHC）中，顶夸克对主要通过以下两种机制产生：

1. **胶子-胶子融合**（占主导）：

$$g + g \rightarrow t + \bar{t}$$

对应的费曼图包括：

- s -道图：两胶子融合成一个中间态虚拟胶子，再产生 $t\bar{t}$ 对；
- t -道与 u -道图：一个胶子与另一个胶子的夸克线交换。

2. **夸克-反夸克湮灭**（在质子-反质子对撞中显著）：

$$q + \bar{q} \rightarrow t + \bar{t}$$

费曼图：

- 单一 s -道图：通过一个中间态虚拟胶子产生 $t\bar{t}$ 对。

(2) 顶夸克对衰变末态中可能存在的夸克数与几率

每个顶夸克几乎总是衰变为一个底夸克和一个 W 玻色子：

$$t \rightarrow b + W^+, \quad \bar{t} \rightarrow \bar{b} + W^-$$

两个 W 玻色子可以衰变为：

- **轻子 + 轻子中微子**（轻子衰变）：每个 W 有 $e\nu_e, \mu\nu_\mu, \tau\nu_\tau$ 三种轻子衰变方式；
- **夸克 + 反夸克对**（强子衰变）：如 $u\bar{d}, c\bar{s}$ 等。

考虑两种 W 的组合：

- **双轻子态**：两个 W 都轻子衰变，末态中有两个轻子 + 两个底夸克 → **2 个夸克**

概率为：

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- **半轻子态**：一个 W 轻子衰变，一个 W 强子衰变，末态有两个轻子 + 两个轻夸克 + 两个底夸克 → **4 个夸克**

概率为：

$$2 \times \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

- **全强子态**：两个 W 都强子衰变，末态有两个底夸克 + 四个轻夸克 → **6 个夸克**

概率为：

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

末态 1：四个夸克 + μ^+

对应情形：

- $t \rightarrow b + W^+ \rightarrow b + u\bar{d}$
- $\bar{t} \rightarrow \bar{b} + W^- \rightarrow \bar{b} + \mu^- \bar{\nu}_\mu$

最终状态为：

- 两个底夸克 b, \bar{b} ：在探测器中形成两个 **b-喷注 (b-jets)**；
- 两个轻夸克 u, \bar{d} ：形成两个 **轻喷注 (jets)**；
- 一个高能带电轻子 μ^+ ：在 **μ 子探测器** 中形成明确轨迹；
- 一个中微子 ν_μ ：导致 **缺失能量** (missing transverse energy, MET)。

探测器签名：

- 4 jets, 其中两个可识别为 b-jets；
- 一条 μ^+ 轨迹；
- 明显 MET。

末态 2：两个夸克 + e^-, μ^+

对应情形：

- $t \rightarrow b + W^+ \rightarrow b + e^+ \nu_e$
- $\bar{t} \rightarrow \bar{b} + W^- \rightarrow \bar{b} + \mu^- \bar{\nu}_\mu$

最终状态为：

- 两个 b-喷注；
- 一个 e^- 、一个 μ^+ ：分别在 **电磁簇射器** 和 **μ 子探测器** 中留下轨迹；
- 两个中微子：产生较大的 **MET**。

探测器签名：

- 2 b-jets;
- 一条 e^- 轨迹 + 一条 μ^+ 轨迹;
- 强烈 MET（比半轻子通道更明显）。

七

R_X 定义如下：

$$R_X \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow X)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

考虑下列各种新物理奇异粒子，假设这些奇异粒子仅参与QED相互作用。当正负电子对撞机具有足够高的能量可以产生一对新物理粒子时，请计算相应的 R 值：

(1) R_L ：SU(2) 弱同位旋二重态的新轻子 L ，设其超荷为 $Y = +3$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

(2) $R_{Q'}$ ：SU(2) 弱同位旋三重态的新夸克 Q' ，设其超荷为 $Y = +4/3$

$$Q' = \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \end{bmatrix}$$

GPT 生成

设新粒子仅通过 QED 与光子相互作用，我们可以利用 QED 中的对易产生截面公式：

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) \propto Q_f^2 N_c$$

其中：

- Q_f 是粒子的电荷，
- N_c 是颜色因子（对于轻子 = 1，夸克 = 3）。

归一化对 $\mu^+\mu^-$ 截面得到：

$$R_X = \sum_i N_c Q_i^2$$

(1) R_L ：SU(2) **弱二重态新轻子**， $Y = +3$

弱双重态的两个分量的电荷由公式

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

可得：

- $L_1: T_3 = +\frac{1}{2} \Rightarrow Q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = +2$
- $L_2: T_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = +1$

由于是轻子, $N_c = 1$, 故：

$$R_L = 1 \cdot (2)^2 + 1 \cdot (1)^2 = 4 + 1 = 5$$

(2) $R_{Q'}$: SU(2) **弱三重态新夸克**, $Y = +\frac{4}{3}$

弱三重态的分量 $T_3 = +1, 0, -1$, 电荷为：

- $Q'_1: T_3 = +1 \Rightarrow Q = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
- $Q'_2: T_3 = 0 \Rightarrow Q = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
- $Q'_3: T_3 = -1 \Rightarrow Q = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

(注: $\frac{Y}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$)

每个为夸克, $N_c = 3$, 故：

$$R_{Q'} = 3 \left[\left(\frac{5}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = 3 \left[\frac{25}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right] = 3 \cdot \frac{30}{9} = 10$$

八

仅考虑QED理论。在非极化的正负电子对撞机上, 忽略电子质量时, $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ 的散射振幅模方为：

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4 Q_\tau^2}{(p_1 \cdot p_2)^2} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + m_\tau^2 (p_1 \cdot p_2)]$$

其中, $p_{1,2,3,4}$ 分别是 e^-, e^+, τ^-, τ^+ 的动量, Q_τ 是 τ 轻子电荷。

(1) 令质心系能量为 \sqrt{s} , 设 e^- 和 e^+ 分别沿 $+\hat{z}$ 和 $-\hat{z}$ 方向入射。请推导 e^+e^- 质心系中末态 τ^- 的空间极化角 θ 的微分散射截面, 并计算总散射截面。

(2) 计算前后不对称性

$$A_{FB} \equiv \frac{\sigma(\cos \theta > 0) - \sigma(\cos \theta < 0)}{\sigma(\cos \theta > 0) + \sigma(\cos \theta < 0)}$$

并解释物理原因。

(3) 如果光子仅仅和左手手征性的带电轻子相互作用, 在忽略电子和 τ 轻子质量的情况下, 请通过螺旋度振幅分析给出散射振幅模方。

(4) 接上问, 请写出末态 τ^- 的空间极化角的微分散射截面, 并计算 A_{FB} 。

(5) 如果 τ^\pm 自旋为零, 请说明 τ^- 极化角微分散射截面在前后方向处为零。

(6) 如果光子自旋为0, 请给出末态 τ^- 的空间极化角微分分布。

(7) 请写出强子对撞机上 $\tau^+\tau^-$ 产生过程的散射截面。

(8) 考虑 τ 质量不可忽略的情况。当 $m_\tau = 500 \text{ GeV}$, 请分析在 $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$ 的质子-反质子强子对撞机上价夸克和海夸克的贡献大小; 当 $m_\tau = 1 \text{ GeV}$ 时重复上面分析。

GPT 生成

(1) 质心系微分截面与总截面推导

设质心系能量为 \sqrt{s} , 入射电子与正电子动量分别为

$$p_1 = (E, 0, 0, +E), \quad p_2 = (E, 0, 0, -E), \quad E = \frac{\sqrt{s}}{2}.$$

末态 τ^- 的动量大小为

$$k = \frac{\sqrt{s}}{2}\beta, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}}.$$

利用能量动量守恒, 末态粒子能量为

$$E_3 = E_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}.$$

计算动量点积:

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2 = \frac{s}{2}.$$

末态四动量方向定义 τ^- 空间极化角为 θ , 则

$$p_1 \cdot p_3 = EE_3 - |\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta = \frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta),$$

$$p_1 \cdot p_4 = \frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta),$$

$$p_2 \cdot p_3 = \frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta), \quad p_2 \cdot p_4 = \frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta).$$

将以上代入振幅模方表达式:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4 Q_\tau^2}{(p_1 \cdot p_2)^2} [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + m_\tau^2(p_1 \cdot p_2)].$$

代入点积结果:

$$\begin{aligned}
& (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \\
&= \left(\frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta) \right) \left(\frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta) \right) + \left(\frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta) \right) \left(\frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta) \right) \\
&= \frac{s^2}{16} [(1 + \beta \cos \theta)^2 + (1 - \beta \cos \theta)^2] \\
&= \frac{s^2}{16} [2 + 2\beta^2 \cos^2 \theta] = \frac{s^2}{8} (1 + \beta^2 \cos^2 \theta).
\end{aligned}$$

带入质量项：

$$m_\tau^2(p_1 \cdot p_2) = m_\tau^2 \cdot \frac{s}{2}.$$

故振幅模方为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4 Q_\tau^2}{(s/2)^2} \left[\frac{s^2}{8}(1 + \beta^2 \cos^2 \theta) + \frac{m_\tau^2 s}{2} \right] = \frac{8e^4 Q_\tau^2}{s^2} \left[\frac{s^2}{8}(1 + \beta^2 \cos^2 \theta) + \frac{m_\tau^2 s}{2} \right].$$

简化得

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = e^4 Q_\tau^2 \left[1 + \beta^2 \cos^2 \theta + \frac{4m_\tau^2}{s} \right].$$

微分截面公式为（无极化，电子近似无质量）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\overline{\mathcal{M}}|^2.$$

代入

$$|\vec{p}_3| = \frac{\sqrt{s}}{2}\beta, \quad |\vec{p}_1| = \frac{\sqrt{s}}{2},$$

得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \beta \cdot e^4 Q_\tau^2 \left[1 + \beta^2 \cos^2 \theta + \frac{4m_\tau^2}{s} \right].$$

用 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 表示精细结构常数

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Q_\tau^2 \beta}{4s} \left[1 + \beta^2 \cos^2 \theta + \frac{4m_\tau^2}{s} \right].$$

总截面为

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

积分角度部分：

$$I = \int_0^\pi \sin \theta (1 + \beta^2 \cos^2 \theta) d\theta = 2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right).$$

所以总截面

$$\sigma = \frac{\alpha^2 Q_\tau^2 \beta}{4s} \cdot 2\pi \cdot 2 \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) + \frac{4m_\tau^2}{s} \times 4\pi \frac{\alpha^2 Q_\tau^2 \beta}{4s},$$

化简为

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_\tau^2}{3s} \beta \left(1 - \frac{\beta^2}{3} + \frac{6m_\tau^2}{s} \right).$$

(2) 前后不对称性 A_{FB}

定义

$$A_{FB} = \frac{\sigma(\cos \theta > 0) - \sigma(\cos \theta < 0)}{\sigma(\cos \theta > 0) + \sigma(\cos \theta < 0)}.$$

纯 QED 过程由光子交换支配，散射振幅关于 $\cos \theta$ 对称，故

$$A_{FB} = 0.$$

物理解释：光子是矢量玻色子，不含手征耦合，正负方向对称。

(3) 光子仅与左手带电轻子相互作用的振幅模方

忽略质量，仅左手手征性参与耦合，采用螺旋度投影算符 $\frac{1-\gamma_5}{2}$ 。

螺旋度选择规则使散射振幅中只有特定螺旋态非零，计算得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (1 + \cos \theta)^2,$$

显著偏向前向散射。

(4) 只左手相互作用时的前后不对称性

计算积分

$$\sigma(\cos \theta > 0) \propto \int_0^1 (1+x)^2 dx = \frac{7}{3}, \quad \sigma(\cos \theta < 0) \propto \int_{-1}^0 (1+x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

故

$$A_{FB} = \frac{7/3 - 1/3}{7/3 + 1/3} = \frac{6/3}{8/3} = \frac{3}{4}.$$

(5) τ^\pm 自旋为零时

零自旋粒子无内禀方向性，角分布均匀且对称，前后方向微分截面趋近于零。

(6) 光子自旋为零时

若光子自旋为标量，自旋传递被抑制，角分布均匀：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{常数}.$$

(7) 强子对撞机上 $\tau^+\tau^-$ 产生截面

强子对撞机中，主要过程为夸克反夸克对产生：

$$q\bar{q} \rightarrow \gamma^*/Z \rightarrow \tau^+\tau^-.$$

总截面通过PDF加权计算：

$$\sigma_{pp} = \sum_q \int dx_1 dx_2 f_q(x_1, Q^2) f_{\bar{q}}(x_2, Q^2) \hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow \tau^+\tau^-; \hat{s} = x_1 x_2 s).$$

(8) τ 质量效应与价夸克、海夸克贡献分析

- 当 $m_\tau = 500 \text{ GeV}$, $\sqrt{s} = 2000 \text{ GeV}$, 阈值高，价夸克PDF较大，贡献主导。
- 当 $m_\tau = 1 \text{ GeV}$, 阈值低，低 x 区域海夸克贡献显著。

质量越大，生产越依赖大 x 区域的价夸克；质量较小时，海夸克贡献不可忽视。