数学准备

Levi-Civita 符号

n 阶 Levi-Civita 符号 $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}(i_j \in \{1, \cdots, n\}, j = 1, 2, \cdots, n)$ 定义如下：

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \equiv \begin{cases} +1 & , \quad \text{当} i_1 i_2 \cdots i_n \text{进行偶数次相邻两数交换后能还原为} 12 \cdots n \\ -1 & , \quad \text{当} i_1 i_2 \cdots i_n \text{进行奇数次相邻两数交换后能还原为} 12 \cdots n \\ 0 & , \quad \text{当} i_1, i_2, \cdots i_n \text{中有任意二指标相等} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = n!$$

两个 n 阶 Levi-Civita 符号中 $m(m \leqslant n)$ 个指标缩并的规律：

$$\varepsilon_{\color{red}{k_1 \cdots k_m} i_1 \cdots \cdots i_{n-m}} \varepsilon_{\color{red}{k_1 \cdots k_m} j_1 \cdots \cdots j_{n-m}} = m! \left(\varepsilon_{l_1 \cdots l_{n-m}} \delta_{i_1 j_{l_1}} \cdots \delta_{i_{n-m} j_{l_{n-m}}} \right)$$

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 4 个指标缩并：

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 4!$$

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 3 个指标缩并：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\alpha_1} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta_1} &= 3! \left(\varepsilon_{\rho_1} \delta_{\alpha_1 \beta_{\rho_1}} \right) \\ &= 3! \delta_{\alpha_1 \beta_1} \end{aligned}$$

> 注意，ε_{ρ_1} 是 1 阶 Levi-Civita 符号，ρ_1 的爱因斯坦求和只能取 $\rho_1 = 1$.

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 2 个指标缩并：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\alpha_1\alpha_2} \varepsilon_{\mu\nu\beta_1\beta_2} &= 2! \left(\varepsilon_{\rho_1\rho_2} \delta_{\alpha_1 \beta_{\rho_1}} \delta_{\alpha_2 \beta_{\rho_2}} \right) \\ &= 2! \left(\delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\alpha_2\beta_1} \right) \end{aligned}$$

> 注意，$\varepsilon_{\rho_1\rho_2}$ 是 2 阶 Levi-Civita 符号，ρ_1, ρ_2 的爱因斯坦求和只能取 $\rho_1, \rho_2 \in \{1, 2\}$.

两个 4 阶 Levi-Civita 符号中 1 个指标缩并：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \varepsilon_{\mu\beta_1\beta_2\beta_3} &= 1! \left(\varepsilon_{\rho_1\rho_2\rho_3} \delta_{\alpha_1 \beta_{\rho_1}} \delta_{\alpha_2 \beta_{\rho_2}} \delta_{\alpha_3 \beta_{\rho_3}} \right) \\ &= \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\alpha_3\beta_3} - \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_3} \delta_{\alpha_3\beta_2} \\ &- \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta_{\alpha_3\beta_3} + \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\alpha_2\beta_3} \delta_{\alpha_3\beta_1} \\ &+ \delta_{\alpha_1\beta_3} \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta_{\alpha_3\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_3} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\alpha_3\beta_1} \end{aligned}$$

> 注意，$\varepsilon_{\rho_1\rho_2\rho_3}$ 是 3 阶 Levi-Civita 符号，ρ_1, ρ_2, ρ_3 的爱因斯坦求和只能取 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \{1, 2, 3\}$.

行列式

$$
\begin{aligned}
\det(A) \equiv& \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \\
=& \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{n j_n} \\
=& \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n}
\end{aligned}
$$

重要结论：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det(A) &= \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{n j_n} \\
&= \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n}
\end{aligned}
$$

证明：

当 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中至少有两个相等，不妨设为 $i_\alpha = i_\beta, \alpha \neq \beta$，则由 Levi-Civita 张量定义，等式左边：

$$
\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \det(A) = 0
$$

等式右边：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} &= \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\alpha j_\alpha} \cdots A_{i_\beta j_\beta} \cdots A_{i_n j_n} \\
&= \varepsilon_{j_1 \cdots j_\alpha \cdots j_\beta \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\alpha j_\alpha} \cdots A_{i_\beta j_\beta} \cdots A_{i_n j_n} \\
&= -\varepsilon_{j_1 \cdots j_\beta \cdots j_\alpha \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\alpha j_\alpha} \cdots A_{i_\beta j_\beta} \cdots A_{i_n j_n} \\
&= -\varepsilon_{j_1 \cdots j_\beta \cdots j_\alpha \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\beta j_\alpha} \cdots A_{i_\alpha j_\beta} \cdots A_{i_n j_n} \\
(j_\alpha, j_\beta \text{是哑标, 二者交换是恒等变形}) &= -\varepsilon_{j_1 \cdots j_\alpha \cdots j_\beta \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\beta j_\beta} \cdots A_{i_\alpha j_\alpha} \cdots A_{i_n j_n} \\
&= -\varepsilon_{j_1 \cdots j_\alpha \cdots j_\beta \cdots j_n} A_{i_1 j_1} \cdots A_{i_\alpha j_\alpha} \cdots A_{i_\beta j_\beta} \cdots A_{i_n j_n}
\end{aligned}
$$

即：

$$
\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} = 0
$$

因此当 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中至少有两个相等时原式成立。

当 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 各不相等时，$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个排列，设此排列的逆序对的个数为 m，则等式左边：

$$
\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{n j_n} = (-1)^m \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{1 j_1} A_{2 j_2} \cdots A_{n j_n}
$$

等式右边：

$$
\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n} =
$$

$$
\det(A) \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \begin{vmatrix} A_{i_1 j_1} & \cdots & A_{i_1 j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_n j_1} & \cdots & A_{i_n j_n} \end{vmatrix}
$$

$$
\det(I)\varepsilon_{i_1 i_2\cdots i_n}\varepsilon_{j_1 j_2\cdots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \cdots & \delta_{i_1 j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \cdots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix}
$$

Clifford 代数

设有域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 V，且其上配有二次型

$$
Q : V \to \mathbb{F}
$$

Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V, Q)$ 定义为 V 生成的、满足以下条件的单位结合代数：

$$
\forall v \in V, \quad v^2 = Q(v)\mathbf{1}
$$

其中，$v^2 \equiv vv$ 代表单位结合代数的乘法；$\mathbf{1}$ 代表单位结合代数中的乘法单位元，满足：

$$

$$

R场论中，Clifford 代数是 n 维复向量空间生成的结合代数。

设 V 是 n 维复向量空间，则由 V 生成的结合代数就是 Clifford 代数，记为 $C_n(V)$.

V 中向量的几何乘积具有以下性质：

$$
a(bc) = (ab)c
$$

$$
a(b+c) = ab + ac
$$

$$
(a+b)c = ac + bc
$$

$$
\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \quad \alpha \in \mathbb{F}
$$

定义内积：

$$
a \cdot b \equiv \frac{1}{2}(ab + ba)
$$

定义外积：

$$
a \wedge b \equiv \frac{1}{2}(ab - ba)
$$

由 V 的正交归一基生成 $C_n(V)$ 的基

设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组正交归一基，即它们的内积满足正交归一性：

$$
e_\mu \cdot e_\nu = \delta_{\mu\nu}\mathbf{1}
$$

其中，$\mathbf{1}$ 是乘法单位元。

根据内积的定义，上式等价于：

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}$$

特别地，当 $\mu \neq \nu$ 时，有：

$$e_\mu e_\nu = -e_\nu e_\mu, \quad \mu \neq \nu$$

基于 n 维复向量空间 V 的一组基 $\{e_\mu\}$ 可构造 Clifford 代数 $C_n(V)$ 的一组基二阶反对称张量基 $\{e_\mu e_\nu, \mu \neq \nu\}$.

类似，$\{e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_m}, \mu_1 \neq \mu_2 \neq \cdots \neq \mu_m\}$ 也是 $C_n(V)$ 的一组基，直到最高反对称基 $e_1 e_2 \cdots e_n$.

可以证明：

$$e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} = e_{\mu_1} e_{\mu_2}$$

$$e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_r} = e_{\mu_1} e_{\mu_2} \cdots e_{\mu_r}$$

r-矢量

$$A_r \equiv a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r, \quad a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$$

若 $a \in V$，则

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2}\left[aA_r + (-1)^r A_r a\right]$$

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2}\left[aA_r - (-1)^r A_r a\right]$$

$C_n(V)$ 中元素的一般形式

$C_n(V)$ 中的元素 $A \in C_n(V)$ 一般可写为：

$$A = a + a_\mu e_\mu + \frac{1}{2!} a_{\mu_1\mu_2} e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} + \cdots + \frac{1}{n!} a_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_n}$$

Clifford 代数的代数表示

$$\Gamma : C_n(V) \to \mathrm{End}(W), \quad \dim V = n, \quad \dim W = d$$

其中 W 为复向量空间，$\mathrm{End}(W)$ 为 W 上所有线性变换的全体，满足：

$$\Gamma(a+b) = \Gamma(a) + \Gamma(b)$$

$$\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

$$\Gamma(\alpha a) = \alpha\Gamma(a)$$

$$\Gamma(\mathbf{1}) = I$$

> 可见“代数表示”比“群线性表示”多了一个“保持加法”的性质。

γ 矩阵作为 Clifford 代数矢量基的代数表示

把 Clifford 代数 $C_n(V)$ 中的矢量基 $\{e_\mu, \mu = 1, 2, \cdots, n\}$ 的某个代数表示 $\Gamma(e_\mu)$ 定义为 γ_μ 矩阵，即：

$$\gamma_\mu \equiv \Gamma(e_\mu), \quad \mu = 1, 2, \cdots, n$$

由于

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}$$

则：

$$\Gamma(e_\mu)\Gamma(e_\nu) + \Gamma(e_\nu)e(e_\mu) = 2\delta_{\mu\nu}\Gamma(\mathbf{1})$$

$$\boxed{\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}I}$$

且

$$\gamma_\mu^2 = I$$

注意到

$$\gamma_\mu^\dagger\gamma_\nu^\dagger + \gamma_\nu^\dagger\gamma_\mu^\dagger = 2\delta_{\mu\nu}I$$

因此可人为约定 γ 矩阵还满足

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$

结合

$$\gamma_\mu^2 = I$$

可得

$$\boxed{\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu^{-1} = \gamma_\mu}$$

γ 矩阵的性质

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

特别地

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu, \quad \mu \neq \nu$$

$$\gamma_\mu^2 = I$$

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho$$

$$\gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

$$\gamma_5^2 = I$$

$$\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5^{-1} = -\gamma_\mu$$

$$\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5^{-1} = \gamma_\mu\gamma_\nu$$

$$\gamma_5\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5^{-1} = (-1)^n\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\right) = (-1)^n\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\right)$$

奇数个 γ_μ 矩阵的迹为零。

偶数个 γ_μ 矩阵的迹：

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\right) = 4\sum_p \delta_p\delta_{\nu_1\nu_2}\delta_{\nu_3\nu_4}\cdots\delta_{\nu_{n-1}\nu_n}$$

$$\delta_p \equiv \begin{cases} +1, \mu_1\cdots\mu_n\text{经过偶次置换变为}\nu_1\cdots\nu_n \\ -1, \mu_1\cdots\mu_n\text{经过偶次置换变为}\nu_1\cdots\nu_n \end{cases}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\right) = 4\delta_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho\right) = 4\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\rho\nu} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}\right)$$

旋量表示

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}I$$

$$\gamma'_\mu = A_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

$$\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu = 2\delta_{\mu\nu}I$$

则定理保证 γ'_μ 与 γ_μ 相似，即存在 Λ 使得 $\gamma'_\mu = A_{\mu\nu}\gamma_\nu = \Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= A_{\mu\rho}\partial_\rho\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda - m\bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\Lambda \\ &= A_{\mu\rho}\partial_\rho\bar{\psi}(x)A_{\mu\nu}\gamma_\nu - m\bar{\psi}(x) \\ &= \delta_{\rho\nu}\partial_\rho\bar{\psi}(x)\gamma_\nu - m\bar{\psi}(x) \\ &= \partial_\nu\bar{\psi}(x)\gamma_\nu - m\bar{\psi}(x) \end{aligned}$$

拉格朗日原理与场的运动方程

引入广义场函数 $\phi_A(x)$，其可以是张量场函数，也可以是旋量场函数，也可以是标量场函数。

场的作用量定义如下：

$$I\left[\phi_A(x)\right] = \int_G \mathcal{L}\left(\phi_A, \partial_\mu\phi_A\right)\mathrm{d}^4x, \quad \mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3, \quad x_4 = \mathrm{i}x_0$$

G 是场在四维时空中存在的范围；$\mathcal{L}$ 是场的拉格朗日密度。

Lagrange 原理就是说，场的真实运动规律使作用量 I 取最小值，即：

$$\delta I = 0$$

利用变分法可得场的运动方程（E-L方程）：

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)} = 0}$$

定义拉格朗日密度对广义场函数的欧拉式 $[\mathcal{L}]_{\phi_A}$：

$$[\mathcal{L}]_{\phi_A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_A)}$$

则场的运动方程可写为：

$$[\mathcal{L}]_{\phi_A} = 0$$

拉格朗日密度满足的条件

$\mathcal{L}$ 是固有洛伦兹变换 $a_{\mu\nu}$ 及其旋量表示 Λ 的不变量。这样才能保证场方程对固有洛伦兹变换协变和角动量守恒。

$\mathcal{L}$ 是四维位移变换的不变量，因此 $\mathcal{L}$ 不应显含 x_μ,这样才能保证能量和动量守恒。

$\mathcal{L}$ 必须是 $\phi_A(x)$ 和 $\partial_\mu \phi_A$ 的二次齐式。这样才能保证场的微分方程是线性的，荷守恒定律及电荷数、重子数、轻子数守恒（整体相因子变换下的守恒性）。

$\mathcal{L}$ 是时间反演变换的不变量。在强和电磁作用中还要求 $\mathcal{L}$ 对空间反射变换合电荷共轭变换的不变性。

$\mathcal{L}$ 是规范变换的不变量。整体规范变换的协变性保证荷守恒。局域规范变换的协变性引入相互作用。

各种自由场的拉格朗日函数

实标量场

实标量场描述自旋为零、偶宇称、无反粒子的粒子，

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi} = -m^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \phi)} = -\partial_\mu \phi$$

代入E-L方程，得标量场方程：

$$\left(\square - m^2\right) \phi = 0$$

复标量场

复标量场描述自旋为零，存在正、反粒子的粒子。

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

分别把 ϕ, ϕ^* 作为变分量代入 E-L 方程，可得复标量场方程：

$$\left(\Box - m^2\right)\phi = 0$$

$$\left(\Box - m^2\right)\phi^* = 0$$

赝标量场

赝标量场描述自旋为零、奇宇称的粒子。

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\partial_\mu\tilde{\phi} + m^2\tilde{\phi}^2\right)$$

赝标量场方程为：

$$\left(\Box - m^2\right)\tilde{\phi} = 0$$

旋量场

旋量场描述自旋为 $1/2$ 的粒子（自旋为 $1/2$ 粒子总有反粒子存在)。

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right) - m\bar{\psi}\psi = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\left(\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m\psi\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu - m\bar{\psi}\right)\psi$$

分别把 $\psi, \bar{\psi}$ 作为变分量，代入 E-L 方程可得 Dirac 方程以及共轭 Dirac 方程：

$$\left(\gamma_\mu\partial_\mu + m\right)\psi = 0$$

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0$$

矢量场

矢量场描述自旋为 1 的光子。

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial_\mu A_\nu$$

把 A_μ 作为变分量代入 E-L 方程，的达朗贝尔方程：

$$\Box A_\mu = 0$$

静止质量不为零的矢量粒子的拉格朗日密度为：

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial_\mu A_\nu\right) - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A_\mu$$

运动方程：

$$\left(\Box - m^2\right)A_\mu = 0$$

这破坏规范协变性。

若令

$$\mathcal{L}_0' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

则可得：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$$

若 A_μ 满足 Lorenz 条件

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

则

$$\mathcal{L}_0' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu$$

等价。

2.11 经典场论中的广义守恒定理和诺特定理

广义守恒定理1

设 $\theta_{\mu\cdots\nu\lambda}(x)$ 是 n 阶张量函数，且满足：

$$\theta_{\mu\cdots\nu\lambda}(x)\Big|_{\vec{x}\to\infty} = 0$$

若

$$\partial_\lambda \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} = 0$$

则存在一个 $(n-1)$ 阶守恒张量：

$$T_{\mu\cdots\nu}(x_4) \equiv \frac{1}{\mathrm{i}} \int\limits_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \theta_{\mu\cdots\nu 4}(\vec{x}, x_4)\mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{const}$$

即 $T_{\mu\cdots\nu}$ 不随时间改变。

证明：

由于

$$\theta_{\mu\cdots\nu\lambda}(x)\Big|_{\vec{x}\to\infty} = 0, \quad \partial_\lambda \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} = 0$$

于是高斯定理给出：

> 怎么用文字描述 G

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_G \partial_\lambda \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}^4 x \\
&= \int\limits_{\partial G} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda \\
&= \left(\int\limits_{\Sigma_1} - \int\limits_{\Sigma_2} \right) \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda
\end{aligned}
$$

即：

$$
\int\limits_{\Sigma_1} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda = \int\limits_{\Sigma_2} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda
$$

由于 Σ_1, Σ_2 是任意选取的，因此

$$
\int\limits_{\Sigma} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda = \mathrm{const}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_1 &\equiv \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \\
\mathrm{d}\sigma_2 &\equiv \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \\
\mathrm{d}\sigma_3 &\equiv \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_4 \\
\mathrm{d}\sigma_4 &\equiv \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3
\end{aligned}
$$

且选取的 Σ 要保证其边界 $\partial\Sigma$ 是三维空间的无穷远面。

特别地，若取 Σ 为与 $x_4 = \mathrm{i}ct$ 垂直的超平面 $\Sigma^\perp$，且这个超平面与 x_4 轴的交点为 x_4，即 $\Sigma^\perp$ 是 t 时刻的全空间 $\mathbb{R}^3$，则在 $\Sigma^\perp$ 上有：

$$
\mathrm{d}x_4 = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}\sigma_1 = \mathrm{d}\sigma_2 = \mathrm{d}\sigma_3 = 0
$$

因此有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{const} &= \int\limits_{\Sigma} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda \\
&= \int\limits_{\Sigma^\perp} \theta_{\mu\cdots\nu\lambda} \mathrm{d}\sigma_\lambda \\
&= \int\limits_{\Sigma^\perp} \theta_{\mu\cdots\nu 4} \mathrm{d}\sigma_4 \\
&= \int\limits_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \theta_{\mu\cdots\nu 4}(\vec{x}, x_4) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \\
&= \int\limits_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \theta_{\mu\cdots\nu 4}(\vec{x}, x_4) \mathrm{d}^3\vec{x}
\end{aligned}
$$

于是：

$$T_{\mu\cdots\nu}(x_4) \equiv \frac{1}{\mathrm{i}} \int\limits_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} \theta_{\mu\cdots\nu 4}(\vec{x}, x_4) \mathrm{d}^3\vec{x} = \mathrm{const}$$

广义守恒定理2

若场的作用量

$$I = \int\limits_G \mathcal{L}\left(\phi_A, \partial_\mu \phi_A\right) \mathrm{d}^4 x$$

对微量变换

$$x \to x' = x + \delta x, \quad \phi_A \to \phi'_A = \phi_A + \delta_0 \phi_A$$

$$\phi_A(x) \to \phi'_A(x') = \phi_A(x) + \delta\phi_A(x)$$

保持不变，则存在一个矢量

$$\theta_\mu = \left(\mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_A\right)} \partial_\nu \phi_A\right) \delta x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_A\right)} \delta \phi_A$$

满足关系式：

$$\partial_\mu \theta_\mu + [\mathcal{L}]_{\phi_A} \delta_0 \phi_A = 0$$

第4章 场的相互作用和S矩阵

4.1 场的相互作用拉格朗日函数

在场的相互作用情况下，总拉格朗日函数 $\mathcal{L}$ 应是自由场拉格朗日函数 $\mathcal{L}_0$ 与相互作用拉格朗日函数 $\mathcal{L}_i$ 之和：

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_i$$

场的相互作用拉格朗日函数 $\mathcal{L}_i$ 也必须是 Lorentz 变换的不变量。因此有场的相互作用的拉格朗日函数广义形式：

$$\hat{\mathcal{L}}_i = g \hat{T}^1_{\mu\nu\cdots\lambda}(x) \hat{T}^2_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$$

常数 g 称为作用常数，代表两种场相互作用的大小。

$\hat{T}^1_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 和 $\hat{T}^2_{\mu\nu\cdots\lambda}(x)$ 为两种不同的场函数组成的同级张量。

玻色场与费米场的相互作用

标量场与旋量场的作用

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x)\hat{\phi}(x), \quad ?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\partial_\mu\hat{\phi}(x)$$

赝标量场与旋量场的作用

赝标耦合：

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

赝矢耦合：

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

矢量场与旋量场的作用

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x), \quad ?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\hat{\psi}(x)\hat{F}_{\mu\nu}$$

π 介子与核子的作用

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x), \quad ?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x) + \mathrm{i}\frac{g}{\mu}\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{mc}{h} = \frac{mc}{2\pi\hbar}$$

电子与光子的作用

$$?\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)$$

费米场与费米场的相互作用

核子 β^- 衰变：

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e$$

$\mu^\pm$ 轻子衰变：

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_e, \quad \mu^- \to e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$$

五种形式：标量耦合、赝标耦合、矢量耦合、赝矢耦合、张量耦合，合写为：

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \sum_{i=1}^{5} C_i \left[\hat{\bar{\psi}}(x)O_i\hat{\psi}(x)\right]\left[\hat{\bar{\psi}}(x)O_i\hat{\psi}(x)\right]$$

Gellmann & Feynman：

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \frac{C}{\sqrt{2}}\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\hat{\psi}(x)\right]\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\hat{\psi}(x)\right]$$

玻色场与玻色场的相互作用

π 介子与π 介子的相互作用：

$$?\hat{\tilde{\phi}}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

光子与 π 介子的相互作用：

$$?\left[\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}^*(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)-\hat{\tilde{\phi}}^*(x)\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x)\right]\hat{A}_\mu(x)$$

场的作用常数问题

场的作用常数也称为荷。

强作用常数

$$\frac{G_\pi^2}{\hbar c}\sim 15$$

中作用常数

$$\frac{G_K^2}{\hbar c}\sim 1$$

电磁作用常数

$$\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}$$

弱作用常数

$$G=\frac{10^{-5}}{M_p^2}$$

4.2 场的相互作用运动方程荷相互作用哈密顿量

场相互作用情况下总拉格朗日函数：

$$\hat{\mathcal{L}}=\hat{\mathcal{L}}_0+\hat{\mathcal{L}}_i$$

把 $\hat{\mathcal{L}}$ 代入 E-L 方程就得到场的运动方程：

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\hat{\phi}_A(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial_\mu\hat{\phi}_A(x)\right)}=0$$

电子与电磁场作用的运动方程

总拉格朗日函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\\&-\frac{1}{2}\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\hat{\psi}(x)-\partial_\mu\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\right]-m\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x)\\&+\mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)\end{aligned}$$

对 $\hat{A}_\mu(x), \hat{\bar{\psi}}(x), \hat{\psi}(x)$ 变分，得场方程：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)$$

$$\left(\gamma_\mu\partial_\mu + m\right)\hat{\psi}(x) = \mathrm{i}e\hat{A}_\mu(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)$$

$$\partial_\mu(x)\hat{\bar{\psi}}\gamma_\mu - m\hat{\bar{\psi}}(x) = -\mathrm{i}e\hat{A}_\mu(x)\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu$$

四维电流矢量：

$$j_\mu = \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)$$

核子与介子场作用的运动方程

总拉格朗日函数：

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}} = &-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x)\partial_\mu\hat{\tilde{\phi}}(x) + m_\pi^2\hat{\tilde{\phi}}^2(x)\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\hat{\psi}(x) - \partial_\mu\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\right] - M\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x) \\
&+\mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)
\end{aligned}$$

变分得场方程：

$$\left(\square - m_\pi^2\right)\hat{\tilde{\phi}}(x) = -\mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)$$

$$\left(\gamma_\mu\partial_\mu + M\right)\hat{\psi}(x) = \mathrm{i}G\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)$$

$$\partial_\mu\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu - M\hat{\bar{\psi}}(x) = -\mathrm{i}G\hat{\tilde{\phi}}(x)\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5$$

场相互作用的哈密顿量

场的相互作用情况下的能量-动量张量：

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{\mathcal{L}}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial_\nu\hat{\phi}_A(x)\right)}\partial_\mu\hat{\phi}_A(x)$$

由于

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_i$$

于是能量-动量张量也可以分为自由部分 $\hat{T}_{\mu\nu}^{(0)}$ 与相互作用部分 $\hat{T}_{\mu\nu}^{(i)}$：

$$\hat{T}_{\mu\nu}^{(0)} = \hat{\mathcal{L}}_0\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_0}{\partial\left(\partial_\nu\hat{\phi}_A(x)\right)}\partial_\mu\hat{\phi}_A(x)$$

$$\hat{T}_{\mu\nu}^{(i)} = \hat{\mathcal{L}}_i\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_i}{\partial\left(\partial_\nu\hat{\phi}_A(x)\right)}\partial_\mu\hat{\phi}_A(x)$$

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}^{(0)} + \hat{T}_{\mu\nu}^{(i)}$$

能量密度也同样可分为自由部分 $\hat{\mathcal{H}}_0$ 和相互作用部分 $\hat{\mathcal{H}}_i$：

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\hat{T}_{44}^{(0)}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i = -\hat{T}_{44}^{(i)} = -\hat{\mathcal{L}}_i + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_i}{\partial \partial_t \hat{\phi}_A(x)} \partial_t \hat{\phi}_A(x)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = -\hat{T}_{44} = -\hat{T}_{44}^{(0)} - \hat{T}_{44}^{(i)} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_i$$

哈密顿算符 $\hat{H}$ 也可分为自由场哈密顿算符 $\hat{H}_0$ 和场相互作用哈密顿算符 $\hat{H}_i$：

$$\hat{H}_0 = \int \hat{\mathcal{H}}_0 \mathrm{d}V$$

$$\hat{H}_i = \int \hat{\mathcal{H}}_i \mathrm{d}V$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_i = \int \hat{\mathcal{H}}_0 \mathrm{d}V + \int \hat{\mathcal{H}}_i \mathrm{d}V$$

电子旋量场与电磁场相互作用哈密顿算符

总拉格朗日函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{2}\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu \partial_\mu \hat{\psi}(x) - \partial_\mu \hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu \hat{\psi}(x)\right] - m\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x) \\ &+ \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu \hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)\end{aligned}$$

相互作用拉格朗日函数：

$$\hat{\mathcal{L}}_i = \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu \hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)$$

相互作用能量-动量张量：

$$\begin{aligned}\hat{T}_{\mu\nu}^{(i)} &= \hat{\mathcal{L}}_i \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_i}{\partial\left(\partial_\nu \hat{\phi}_A(x)\right)} \partial_\mu \hat{\phi}_A(x) \\ &= \delta_{\mu\nu} \mathrm{i}e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\alpha \hat{\psi}(x)\hat{A}_\alpha(x)\end{aligned}$$

电子旋量场与电磁场相互作用哈密顿算符：

$$\begin{aligned}\hat{H}_i &= -\int \hat{T}_{44}^{(i)} \mathrm{d}V \\ &= -\mathrm{i}e \int \hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu \hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x) \mathrm{d}V\end{aligned}$$

核子旋量场与介子场相互作用哈密顿算符

总拉格朗日函数：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}} = &-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu \hat{\tilde{\phi}}(x)\partial_\mu \hat{\tilde{\phi}}(x) + m_\pi^2 \hat{\tilde{\phi}}^2(x)\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\hat{\psi}(x) - \partial_\mu\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\psi}(x)\right] - M\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x) \\
&+\mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)
\end{aligned}
$$

相互作用拉格朗日函数：

$$
\hat{\mathcal{L}}_i = \mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)
$$

相互作用能量-动量张量：

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_{\mu\nu}^{(i)} &= \hat{\mathcal{L}}_i\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}_i}{\partial\left(\partial_\nu\hat{\phi}_A(x)\right)}\partial_\mu\hat{\phi}_A(x) \\
&= \delta_{\mu\nu}\mathrm{i}G\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)
\end{aligned}
$$

核子旋量场与介子场相互作用哈密顿算符

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_i &= -\int \hat{T}_{44}^{(i)}\mathrm{d}V \\
&= -\mathrm{i}G\int \hat{\bar{\psi}}(x)\gamma_5\hat{\psi}(x)\hat{\tilde{\phi}}(x)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

4.3 相互作用绘景

薛定谔绘景

薛定谔绘景中，场相互作用情况下，状态幅度 Ψ_S 随时间的变化规律：

$$
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_S = \hat{H}_S\Psi_S
$$

$$
\hat{H}_S = \hat{H}_{S0} + \hat{H}_{Si}
$$

其中，$\hat{H}_{S0}$ 为薛定谔绘景中自由场哈密顿算符，$\hat{H}_{Si}$ 为场相互作用哈密顿算符。$\hat{H}_{S0}$ 和 $\hat{H}_{Si}$ 都不随时间改变。

海森堡绘景

$$
\Psi_H = \Psi_S(0), \quad \hat{F}_H \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_S t}\hat{F}_S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_S t}
$$

$$
\hat{H}_H = \hat{H}_S \equiv \hat{H}
$$

$$
\frac{\partial\Psi_H}{\partial t} = 0
$$

$$
\frac{\partial\hat{F}_H}{\partial t} = \mathrm{i}\left[\hat{H}, \hat{F}_H\right]
$$

相互作用绘景

$$\Phi_I(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\Psi_S$$

相互作用绘景中的算符 $\hat{F}_I$ 定义为：

$$\hat{F}_I(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\hat{F}_S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}$$

$$\hat{H}_I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\left(\hat{H}_{S0}+\hat{H}_{Si}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\hat{H}_{Si}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t} \equiv \hat{H}_{Ii}$$

$\Phi_I(t)$ 随时间变化规律为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_I(t)}{\partial t} &= \mathrm{i}\frac{\partial\hat{V}(t)}{\partial t}\Psi_S(t)+\mathrm{i}\hat{V}(t)\frac{\partial\Psi_S(t)}{\partial t} \\
&= -\hat{V}(t)\hat{H}_{S0}\Psi_S(t)+\hat{V}(t)\hat{H}_{S0}\Psi_S(t)+\hat{V}(t)\hat{H}_{Si}\Psi_S(t) \\
&= \hat{V}(t)\hat{H}_{Si}\Psi_S(t) \\
&= \hat{V}(t)\hat{H}_{Si}\hat{V}^\dagger(t)\hat{V}(t)\Psi_S(t) \\
&\equiv \hat{H}_{Ii}(t)\Phi_I(t)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_I(t) = \hat{H}_{Ii}(t)\Phi_I(t)$$

$\hat{F}_I(t)$ 随时间的变化规律为：

$$\frac{\partial\hat{F}_I}{\partial t} = \mathrm{i}\left[\hat{H}_{I0}(t),\hat{F}_I(t)\right]$$

薛定谔绘景：

$$\boxed{\hat{H}_S = \hat{H}_{S0}+\hat{H}_{Si}}$$

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_S = \hat{H}_S\Psi_S, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{F}_S}{\mathrm{d}t} = 0}$$

相互作用绘景：

$$\boxed{\Phi_I(t) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\Phi_S(t), \quad \hat{F}_I \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\hat{F}_S\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}, \quad \hat{H}_I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}\hat{H}_{Si}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}_{S0}t}}$$

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_I(t) = \hat{H}_{Ii}\Phi_I(t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{F}_I = \mathrm{i}\left[\hat{H}_{I0},\hat{F}_I\right]}$$

积分方程

$$\Phi_I(t) = \Phi_I(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{Ii}(t_1)\Phi_I(t_1)\mathrm{d}t_1$$

4.4 $\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵及其性质

$\hat{U}(t,t_0)$ 把相互作用绘景中 t_0 时刻的状态幅度 $\Phi_I(t_0)$ 变为 t 时刻的状态幅度 $\Phi_I(t)$:

$$\Phi_I(t)=\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)$$

把上式代入状态幅度满足的积分方程

$$\Phi_I(t)=\Phi_I(t_0)-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{Ii}(t_1)\Phi_I(t_1)\mathrm{d}t_1$$

可得:

$$\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)=\Phi_I(t_0)-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\Phi_I(t_0)\mathrm{d}t_1$$

即:

$$\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)=\left(I-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1\right)\Phi_I(t_0)$$

对比得 $\hat{U}(t,t_0)$ 满足的积分方程:

$$\boxed{\hat{U}(t,t_0)=I-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0)\mathrm{d}t_1}$$

把

$$\Phi_I(t)=\hat{U}(t,t_0)\Phi_I(t_0)$$

代入

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Phi_I(t)}{\partial t}=\hat{H}_{Ii}(t)\Phi_I(t)$$

得到 $\hat{U}(t,t_0)$ 满足的微分方程:

$$\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial\hat{U}(t,t_0)}{\partial t}=\hat{H}_{Ii}(t)\hat{U}(t,t_0)}$$

$\hat{U}(t,t_0)$ 的性质

$$\hat{U}(t,t)=\hat{U}(t_0,t_0)=I$$

$$\hat{U}^{-1}(t_1,t_2)=\hat{U}(t_2,t_1)$$

$$\hat{U}^{\dagger}(t_1,t_2)\hat{U}(t_1,t_2)=\hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}^{\dagger}(t_1,t_2)=I$$

$$\hat{U}(t_1,t_3)=\hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}(t_2,t_3)$$

$\hat{U}(t,t_0)$ 矩阵级数解

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,t_0) = I& \\ &+\frac{(-\mathrm{i})}{1!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\right] \\ &+\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{H}_{Ii}(t_2)\right] \\ &+\cdots\end{aligned}$$

或简写为：

$$\hat{U}(t,t_0) = P\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\hat{H}_{Ii}(t')}\right]$$

4.5 S 矩阵

假设相互作用发生在 $t=0$ 附近的一段时间。用 Φ_i 表示初态状态幅度，用 Φ_f 表示终态状态幅度，则：

$$\Phi_i = \Phi_I(-\infty)$$

$$\Phi_f = \Phi_I(+\infty)$$

另一方面，

$$\Phi_I(t_2) = \hat{U}(t_2,t_1)\Phi_I(t_1)$$

所以：

$$\Phi_f = \hat{U}(+\infty,-\infty)\Phi_i$$

S 矩阵就定义为使基本粒子系统的状态幅度由初态到终态的演化算符，即：

$$\boxed{\hat{S}\equiv\hat{U}(+\infty,-\infty)}$$

$$\boxed{\Phi_f = \hat{S}\Phi_i}$$

由于 $\hat{U}$ 是幺正的，因此 $\hat{S}$ 也是幺正的：

$$\hat{S}^\dagger\hat{S} = \hat{S}\hat{S}^\dagger = I$$

把 $\hat{U}(t,t_0)$ 的级数表达式

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,t_0) = I& \\ &+\frac{(-\mathrm{i})}{1!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\right] \\ &+\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}(t_1)\hat{H}_{Ii}(t_2)\right] \\ &+\cdots\end{aligned}$$

中的 t_0 替换为 $-\infty$，t 替换为 $+\infty$，则得到 S 矩阵的级数表达式：

$$
\begin{aligned}
\hat{S}= & I \\
& +\frac{(-\mathrm{i})}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_1 P\left[\hat{H}_{Ii}\left(t_1\right)\right] \\
& +\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_2 P\left[\hat{H}_{Ii}\left(t_1\right) \hat{H}_{Ii}\left(t_2\right)\right] \\
& +\cdots
\end{aligned}
$$

或简写为：

$$
\hat{S}=P\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t^{\prime} \hat{H}_{Ii}\left(t^{\prime}\right)}\right]
$$

为了计算方便，定义各级 S 矩阵：

$$
\hat{S}=\sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n
$$

$$
\hat{S}_0 \equiv I
$$

$$
\hat{S}_n \equiv \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_1 \mathrm{d} t_2 \cdots \mathrm{d} t_n P\left[\hat{H}_{Ii}\left(t_1\right) \hat{H}_{Ii}\left(t_2\right) \cdots \hat{H}_{Ii}\left(t_n\right)\right]
$$

$\hat{S}_n$ 称为第 n 级 $\hat{S}$ 矩阵。

各阶 S 矩阵都是 Lorentz 协变的，也都满足规范变换的协变性。

量子电动力学中的 S 矩阵

电子或正电子与光子相互作用哈密顿算符：

$$
\hat{H}_{Ii}(t)=-\mathrm{i} e \int \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \hat{A}_\mu(x) \mathrm{d} V
$$

设

$$
\hat{A}(x) \equiv \gamma_\mu \hat{A}_\mu(x)
$$

则可证明：

$$
\hat{H}_{Ii}(t)=-\mathrm{i} e \int \hat{\bar{\psi}}(x) \hat{A}(x) \hat{\psi}(x) \mathrm{d} V
$$

量子电动力学中的 S 矩阵：

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_n & =\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} t_n P\left[\hat{H}_{Ii}\left(t_1\right) \cdots \hat{H}_{Ii}\left(t_n\right)\right] \\
& =\frac{(-e)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} x^1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} x^n P\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right) \hat{A}\left(x^1\right) \hat{\psi}\left(x^1\right) \cdots \hat{\bar{\psi}}\left(x^n\right) \hat{A}\left(x^n\right) \hat{\psi}\left(x^n\right)\right]
\end{aligned}
$$

由于积分中 P 乘积中同一个时间坐标的费米场函数是成对的，因此积分中 P 乘积与 T 乘积是等价的。

$$\boxed{\hat{S}_n=\frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^n T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\cdots\hat{\bar{\psi}}\left(x^n\right)\hat{A}\left(x^n\right)\hat{\psi}\left(x^n\right)\right]}$$

4.6 T 乘积展开的 Wick 定理

量子电动力学中 $\hat{S}$ 矩阵的具体形式为：

$$\hat{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{S}_n,\quad \hat{S}_0=I$$

$$\hat{S}_n=\frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^n T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\cdots\hat{\bar{\psi}}\left(x^n\right)\hat{A}\left(x^n\right)\hat{\psi}\left(x^n\right)\right]$$

要计算 n 阶 S 矩阵 $\hat{S}_n$，则必须要算出积分中的 T 乘积。

T 乘积展开的 Wick 定理

n 个场算符的 T 乘积，等于这 n 个场算符的 N 乘积与包括了所有可能的各种耦合的 N 乘积之和。

$$\begin{aligned}T\left[\hat{U}_1\hat{U}_2\cdots\hat{U}_n\right]=N&\left[\hat{U}_1\hat{U}_2\cdots\hat{U}_n\right]\\&+\sum_{i\neq j}N\left[\hat{U}_1\cdots\dot{\hat{U}}_i\cdots\dot{\hat{U}}_j\cdots\hat{U}_n\right]\\&+\sum_{i,j,l,m\neq}N\left[\hat{U}_1\cdots\dot{\hat{U}}_i\cdots\dot{\hat{U}}_j\cdots\ddot{\hat{U}}_l\cdots\ddot{\hat{U}}_m\cdots\hat{U}_n\right]\\&+\cdots\end{aligned}$$

其中，$\hat{U}$ 代表任何一种场函数的产生或消灭算符。

$$N\left[\hat{U}_1\cdots\dot{\hat{U}}_i\cdots\dot{\hat{U}}_j\cdots\hat{U}_n\right]\equiv(-1)^{\varepsilon_{ij}}\dot{\hat{U}}_i\dot{\hat{U}}_jN\left[\hat{U}_1\cdots\hat{U}_{i-1}\hat{U}_{i+1}\cdots\hat{U}_{j-1}\hat{U}_{j+1}\cdots\hat{U}_n\right]$$

ε_{ij} 表示将算符 $\hat{U}_i,\hat{U}_j$ 依次置换到所有算符最左边时，所需的费米置换次数。

QED中的 $\hat{S}$ 矩阵和耦合式

$$\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\nu\left(x^2\right)=\frac{1}{2}D^F\left(x^1-x^2\right)\delta_{\mu\nu}$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\beta\left(x^2\right)=-\frac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}\left(x^1-x^2\right)$$

$$\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^2\right)=\frac{1}{2}S^F_{\beta\alpha}\left(x^2-x^1\right)$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^2\right)=\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\beta\left(x^2\right)=0$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^2\right)=\dot{\hat{\bar{\psi}}}_{\alpha\cdot}\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^2\right)=0$$

在 QED 中 $\hat{S}$ 矩阵耦合式只需计算以下三种**非零耦合**情况：

$$\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\nu\left(x^2\right)=\frac{1}{2}D^F\left(x^1-x^2\right)\delta_{\mu\nu}$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\bar{\hat{\psi}}}_\beta\left(x^2\right)=-\frac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}\left(x^1-x^2\right)$$

$$\dot{\bar{\hat{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^2\right)=\frac{1}{2}S^F_{\beta\alpha}\left(x^2-x^1\right)$$

另外，在计算 $\hat{S}$ 矩阵时，没必要计算

$$\dot{\bar{\hat{\psi}}}_\alpha(x)\dot{\hat{\psi}}_\beta(x)=\infty$$

这样同一时空点的旋量场的耦合式。

也就是说，$\hat{S}$ 矩阵中四维时空坐标相同的 $\bar{\hat{\psi}}_\alpha(x)$ 和 $\hat{\psi}_\beta(x)$ 可以不考虑。

QED中 $\hat{S}$ 矩阵的 Wick 展开式

$$\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\nu\left(x^2\right)=\frac{1}{2}D^F\left(x^1-x^2\right)\delta_{\mu\nu}$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\bar{\hat{\psi}}}_\beta\left(x^2\right)=-\frac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}\left(x^1-x^2\right)$$

$$\dot{\bar{\hat{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^2\right)=\frac{1}{2}S^F_{\beta\alpha}\left(x^2-x^1\right)$$

除上面之外的耦合式全为零。

$$\hat{S}_n=\frac{(-e)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^nT\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\cdots\bar{\hat{\psi}}\left(x^n\right)\hat{A}\left(x^n\right)\hat{\psi}\left(x^n\right)\right]$$

计算 $\hat{S}_0$

$$\hat{S}_0=I$$

计算 $\hat{S}_1$

$$\begin{aligned}T\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]&=N\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]\\&+(-1)^{\varepsilon_{12}}\dot{\bar{\hat{\psi}}}\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}\left(x^1\right)N\left[\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]\\&+(-1)^{\varepsilon_{13}}\dot{\bar{\hat{\psi}}}\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^1\right)N\left[\hat{A}\left(x^1\right)\right]\\&+(-1)^{\varepsilon_{13}}\dot{\hat{A}}\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}\left(x^1\right)N\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\right]\\&=N\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_1&=-e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1T\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]\\&=-e\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1N\left[\bar{\hat{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\right]\end{aligned}$$

计算 $\hat{S}_2$

$$\hat{S}_2=\frac{e^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x^2 T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\hat{\bar{\psi}}\left(x^2\right)\hat{A}\left(x^2\right)\hat{\psi}\left(x^2\right)\right]$$

> QED Wick 定理不考虑同一时空点的耦合 and 旋量旋量耦合、共轭旋量共轭旋量耦合为零。下面用 Wick 定理计算 T 乘积时就不写耦合为零的项了。

$$\begin{aligned}
&T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\hat{\bar{\psi}}\left(x^2\right)\hat{A}\left(x^2\right)\hat{\psi}\left(x^2\right)\right]\\
=&T\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
=&N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\dot{\hat{A}}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\dot{\hat{\psi}}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\ddot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\ddot{\hat{\bar{\psi}}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\dot{\hat{\psi}}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^1\right)\ddot{\hat{A}}_\mu\left(x_1\right)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\ddot{\hat{A}}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\ddot{\hat{A}}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\dot{\hat{\psi}}_\lambda\left(x^2\right)\ddot{\hat{A}}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&N\left[\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\dddot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^1\right)\ddot{\hat{A}}_\mu\left(x_1\right)\dddot{\hat{\bar{\psi}}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\dot{\hat{\psi}}_\lambda\left(x^2\right)\ddot{\hat{A}}_\nu\left(x_2\right)\right]
\end{aligned}$$

接下来利用

$$N\left[\hat{U}_1\cdots\dot{\hat{U}}_i\cdots\dot{\hat{U}}_j\cdots\hat{U}_n\right]\equiv(-1)^{\varepsilon_{ij}}\dot{\hat{U}}_i\dot{\hat{U}}_j N\left[\hat{U}_1\cdots\hat{U}_{i-1}\hat{U}_{i+1}\cdots\hat{U}_{j-1}\hat{U}_{j+1}\cdots\hat{U}_n\right]$$

$$\dot{\hat{A}}_\mu\left(x^1\right)\dot{\hat{A}}_\nu\left(x^2\right)=\frac{1}{2}D^F\left(x^1-x^2\right)\delta_{\mu\nu}$$

$$\dot{\hat{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\beta\left(x^2\right)=-\frac{1}{2}S^F_{\alpha\beta}\left(x^1-x^2\right)$$

$$\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\alpha\left(x^1\right)\dot{\hat{\psi}}_\beta\left(x^2\right)=\frac{1}{2}S^F_{\beta\alpha}\left(x^2-x^1\right)$$

可进一步计算 T 乘积：

$$\begin{aligned}
&T\left[\hat{\bar{\psi}}\left(x^1\right)\hat{A}\left(x^1\right)\hat{\psi}\left(x^1\right)\hat{\bar{\psi}}\left(x^2\right)\hat{A}\left(x^2\right)\hat{\psi}\left(x^2\right)\right]\\
=&N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&\frac{1}{2}D^F\left(x^1-x^2\right)\delta_{\mu\nu}N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta\left(x^1\right)\hat{\bar{\psi}}_\rho\left(x^2\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\right]\\
-&\frac{1}{2}S^F_{\beta\rho}\left(x^1-x^2\right)N\left[\hat{\bar{\psi}}_\alpha\left(x^1\right)\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{A}_\mu\left(x_1\right)\left(\gamma_\nu\right)_{\rho\lambda}\hat{\psi}_\lambda\left(x^2\right)\hat{A}_\nu\left(x_2\right)\right]\\
+&\cdots
\end{aligned}$$

4.7 S 矩阵的 Feynman 图解

$\hat{S}$ 矩阵是各级 $\hat{S}_n$ 矩阵之和，而由 Wick 定理，每个 $\hat{S}_n$ 可展开成场算符各种可能的耦合叠加，其中每一项应当有一定的物理意义。

具体来说，某种特定耦合方式代表基本粒子相互作用的某种反应。在 QED 中，某种特定耦合方式代表正负电子和光子相互作用的某种反应。

QED Feynman 图形规则

$$\hat{A}_\mu^{(+)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{k_0=\varepsilon_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}}\hat{C}_\mu^{(+)}\left(\vec{k}\right)\mathrm{d}^3\vec{k}$$

$$\hat{A}_\mu^{(-)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{k_0=\varepsilon_{\vec{k}}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}}\hat{C}_\mu^{(-)}\left(\vec{k}\right)\mathrm{d}^3\vec{k}$$

$$\hat{\psi}^{(+)}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{p_0=E_{\vec{p}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{b}_i^{(+)}(\vec{p})v_i(\vec{p})\mathrm{d}^3\vec{p}$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{p_0=E_{\vec{p}}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}\hat{a}_i^{(-)}(\vec{p})u_i(\vec{p})\mathrm{d}^3\vec{p}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{p_0=E_{\vec{p}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{a}_i^{(+)}(\vec{p})\bar{u}_i(\vec{p})\mathrm{d}^3\vec{p}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{p_0=E_{\vec{p}}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}\hat{b}_i^{(-)}(\vec{p})\bar{v}_i(\vec{p})\mathrm{d}^3\vec{p}$$

注意到：

$\hat{\psi}^{(+)}(x)$ 对应 $\hat{b}_i^{(+)}(\vec{p})$，即对应产生正电子算符；

$\hat{\psi}^{(-)}(x)$ 对应 $\hat{a}_i^{(-)}(\vec{p})$，即对应消灭负电子算符；

$\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)$ 对应 $\hat{a}_i^{(+)}(\vec{p})$，即对应产生负电子算符；

$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)$ 对应 $\hat{b}_i^{(-)}(\vec{p})$，即对应消灭正电子算符。

用实线代表电子或正电子的运动；

用虚线代表光子的运动；

$\hat{\psi}(x_1)$ 即 $\hat{\psi}^{(+)}(x)$ 或 $\hat{\psi}^{(-)}(x)$ 代表产生正电子或消灭负电子，用入向电子外线表示

$\hat{\bar{\psi}}(x_1)$ 即 $\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)$ 或 $\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)$ 代表产生负电子或消灭正电子，用出向电子外线表示；

$A_\mu(x_1)$ 代表光子的放出或吸收，用光子外线表示；

耦合式 $\dot{\hat{\psi}}_\alpha(x_1)\dot{\hat{\bar{\psi}}}_\beta(x_2) = -\frac{1}{2}\hat{S}^F_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)$ 代表中间态的正负电子，用电子内线表示；

耦合式 $\dot{\hat{A}}_\alpha(x_1)\dot{\hat{A}}_\beta(x_2) = \frac{1}{2}D^(x_1 - x_2)\delta_{\alpha\beta}$ 代表中间态的光子或虚光子，用光子内线表示；

γ_i 矩阵代表正负电子和光子有一次作用，用顶点图形表示。

QED 中的 Feynman 图

一般在 Wick 定理展开式中，有两种或两种以上展开项对应同一种 Feynman 图解。

用 r 代表同一 Feynman 图解所对应的不同形式的 $\hat{S}_n$ 矩阵的展开式的数目。r 称为 Feynman 图解的等值数。

$\hat{S}_1$ 的 Feynman 图解

$$
\hat{S}_1

$$

$\hat{S}_2$ 的 Feynman 图解

$\hat{S}_2$

$\hat{S}_3$ 的 Feynman 图解

4.8 Furry 关于电子封闭内线的定理

奇数个电子封闭内线的 Feynman 图对 $\hat{S}$ 矩阵没有任何贡献。

4.9 $\hat{S}$ 矩阵的矩阵元

为了研究基本粒子反应，采用相互作用绘景的粒子数表象。

QED 中，α 个动量为 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\alpha$，自旋为 $i_1, \cdots, i_\alpha$ 的正负电子和 r 个动量为 $\vec{k}_1, \cdots \vec{k}_r$，极化为 $\mu_1, \cdots, \mu_r$ 的光子系统，在相互作用绘景粒子数表象中的状态幅度可记为：

$$\Phi_{\vec{p}_1 i_1, \cdots, \vec{p}_\alpha i_\alpha; \vec{k}_1\mu_1 \cdots \vec{k}_r\mu_r} = \hat{a}^{(+)}_{\vec{p}_1 i_1} \cdots \hat{b}^{(+)}_{\vec{p}_\alpha i_\alpha} \hat{C}^{\mu_1(+)}_{\vec{k}_1} \cdots \hat{C}^{\mu_r(+)}_{\vec{k}_r} \Phi_0$$

其中，$\hat{a}^{(+)}_{\vec{p}i}$ 是产生动量为 $\vec{p}$，自旋为 i 的电子的算符；$\hat{b}^{(+)}_{\vec{p}i}$ 是产生动量为 $\vec{p}$，自旋为 i 的正电子的算符；$\hat{C}^{\mu(+)}_{\vec{k}}$ 是产生动量为 $\vec{k}$，极化为 μ 的光子的算符。

为简便，记：

$$\Phi_{\vec{p}_1 i_1,\cdots,\vec{p}_\alpha i_\alpha;\vec{k}_1\mu_1\cdots\vec{k}_r\mu_r} \equiv \Phi_\beta$$

对于基本粒子反应，初态 Φ_i 应是粒子数表象的某个本征态 Φ_α，即

$$\Phi_i = \Phi_\alpha$$

$\hat{S}$ 矩阵给出了末态 Φ_f：

$$\Phi_f = \hat{S}\Phi_i = \hat{S}\Phi_\alpha$$

一般来说，末态 Φ_f 不是粒子数表象的本征态，而是粒子数表象本征态的某种混合。假设 Φ_f 可按粒子数表象本征态 $\{\Phi_\beta\}$ 展开：

$$\Phi_f = \hat{S}\Phi_i = \hat{S}\Phi_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\Phi_\beta$$

根据量子力学基本原理，展开系数模方 $|C_{\alpha\beta}|^2$ 就代表了初态为粒子数表象本征态 Φ_α 时，系统随时间演化直至末态，对末态进行测量，测得末态为粒子数表象本征态 Φ_β 的概率。

为了计算展开系数，上式左乘 $\Phi_{\beta'}^\dagger$，并利用正交关系 $\Phi_{\beta'}^\dagger\Phi_\beta = \delta_{\beta\beta'}$ 可得：

$$C_{\alpha\beta'} = \Phi_{\beta'}^\dagger\hat{S}\Phi_\alpha$$

用 Dirac 符号来说，假设 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ 都是粒子数表象的本征态，那么矩阵元 $\left\langle\beta\,\middle|\,\hat{S}\,\middle|\,\alpha\right\rangle$ 就是初态 α 到末态 β 的跃迁振幅，$\left|\left\langle\beta\,\middle|\,\hat{S}\,\middle|\,\alpha\right\rangle\right|^2$ 就是初态为粒子数表象本征态 $|\alpha\rangle$ 时，系统随时间演化直至末态，对末态进行测量，测得末态为粒子数表象本征态 $|\beta\rangle$ 的概率。

产生、消灭粒子算符对状态幅度的作用

$$\hat{a}_{\vec{p}i}^{(-)}\Phi_{\vec{p}'i'} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0$$

$$\hat{b}_{\vec{p}i}^{(-)}\Phi_{\vec{p}'i'} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0$$

$$\hat{C}_{\vec{k}}^{\mu(-)}\Phi_{\vec{k}'\mu'} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\Phi_0$$

取厄米共轭有：

$$\Phi_{\vec{p}'i'}^\dagger\hat{a}_{\vec{p}i}^{(+)} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0^\dagger$$

$$\Phi_{\vec{p}'i'}^\dagger\hat{b}_{\vec{p}i}^{(+)} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ii'}\Phi_0^\dagger$$

$$\Phi_{\vec{k}'\mu'}^\dagger\hat{C}_{\vec{k}}^{\mu(+)} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\mu\mu'}\Phi_0^\dagger$$

可以推广到 α 个正负电子和 r 个光子系统的情况也类似。

场算符 N 乘积对本征态矢量的作用

要研究 $\hat{S}$ 在粒子数表象中的矩阵元，就必须讨论场算符的 N 乘积对本征态矢量的作用。

已知

$$\hat{A}_\mu^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\nu} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} e_\mu^\nu \hat{C}_{\vec{k}}^{\nu(+)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

$$\hat{A}_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\nu} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} e_\mu^\nu \hat{C}_{\vec{k}}^{\nu(-)} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}$$

$$\hat{\psi}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},i} \hat{b}_{\vec{p}i}^{(+)} v_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},i} \hat{a}_{\vec{p}i}^{(-)} u_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},i} \hat{a}_{\vec{p}i}^{(+)} \bar{u}_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},i} \hat{b}_{\vec{p}i}^{(-)} \bar{v}_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$$

我们需要的是 $\hat{A}_\mu^{(-)}(x), \hat{\psi}^{(-)}(x), \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)$ 从左边作用于粒子数表象单粒子本征态的结果。

注意到：

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\mu^{(+)}(x)\Phi_{\vec{k}\nu} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}',\nu'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}'}}} e_\mu^{\nu'} \hat{C}_{\vec{k}'}^{\nu'(-)} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k'x} \right) \Phi_{\vec{k}\nu} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}',\nu'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}'}}} e_\mu^{\nu'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\nu,\nu'} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k'x} \right) \Phi_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} e_\mu^\nu \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \Phi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}^{(-)}(x)\Phi_{\vec{p}i} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}',i'} \hat{a}_{\vec{p}'i'}^{(-)} u_{i'}(\vec{p}') \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x} \right) \Phi_{\vec{p}i} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}',i'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \delta_{i,i'} u_{i'}(\vec{p}') \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x} \right) \Phi_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} u_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \Phi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)\Phi_{\vec{p}i} &= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}',i'} \hat{b}_{\vec{p}'i'}^{(-)} \bar{v}_{i'}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x} \right) \Phi_{\vec{p}i} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}',i'} \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \delta_{i,i'} \bar{v}_{i'}(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x} \right) \Phi_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{v}_i(\vec{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}
\end{aligned}$$

总之:

$$\hat{A}_{\mu}^{(-)}(x)\Phi_{\vec{k}\nu}=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}}e_{\mu}^{\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Phi_0$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x)\Phi_{\vec{p}i}=\frac{1}{\sqrt{V}}u_i\left(\vec{p}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\Phi_0$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x)\Phi_{\vec{p}i}=\frac{1}{\sqrt{V}}\bar{v}_i\left(\vec{p}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\Phi_0$$

取厄米共轭得:

$$\Phi_{\vec{k}\nu}^{\dagger}\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}}e_{\mu}^{\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Phi_0^{\dagger}$$

$$\Phi_{\vec{p}i}^{\dagger}\hat{\psi}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}v_i(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\Phi_0^{\dagger}$$

$$\Phi_{\vec{p}i}^{\dagger}\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\bar{u}_i(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\Phi_0^{\dagger}$$

令 $\hat{O}$ 为产生和消灭算符的 N 乘积，粒子数表象下 $\hat{O}$ 算符由确定初态向确定终态跃迁的矩阵元定义为:

$$\Phi_f^{\dagger}\hat{O}\Phi_i=\left\langle f\middle|\hat{O}\middle|i\right\rangle$$

其中 $|i\rangle$, $|f\rangle$ 都是粒子数算符本征态。

只有当 $\hat{O}$ 中消灭粒子算符的数目和种类与初态 Φ_i 的完全相同，且 $\hat{O}$ 中产生粒子算符的数目和种类与终态 Φ_f 的完全相同，$\left\langle f\middle|\hat{O}\middle|i\right\rangle$ 才可能不为零。

S 矩阵的矩阵元

S 矩阵可分解为 $\hat{S}_n$ 矩阵之和，而 $\hat{S}_n$ 矩阵又可用 Wick 定理展开成数项场算符的 N 乘积对时空坐标的积分。

这些项中，有 r 项可以用同一 Feynman 图解表示。

$\hat{S}_n$ 中可以用同一 Feynman 图解表达的项记为 $\hat{M}^n$，则:

$$\hat{S}_n=\sum_{\hat{M}^n}\hat{M}^n$$

其中，求和对不同的 Feynman 图进行。

$$\begin{aligned}\hat{M}^n&=\frac{r\left(-e\right)^n}{n!}\int\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^nN\left[F\left(\hat{A}_{\mu}(x),\hat{\bar{\psi}}(x),\hat{\psi}(x),D^F,S^F\right)\right]\\&=\frac{r\left(-e\right)^n}{n!}\int\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n\hat{F}_f\left(\hat{A}_{\mu}^{(+)}(x),\hat{\bar{\psi}}^{(+)},\hat{\psi}^{(+)}\right)\hat{F}_m\left(D_{\mu\nu}^F,S_{\alpha\beta}^F\right)\hat{F}_i\left(\hat{A}_{\mu}^{(-)}(x),\hat{\bar{\psi}}^{(-)},\hat{\psi}^{(-)}\right)\end{aligned}$$

设 $\hat{F}_i$ 中消灭正负电子的算符数为 α_i'，消灭光子的算符数为 r_i'；$\hat{F}_f$ 中产生正负电子的算符数为 α_f'，产生光子的算符数为 r_f'，则 $\hat{M}^n$ 可写为:

$$\hat{M}^n=\hat{M}^n\left(\alpha_f',r_f';\alpha_i',r_i'\right)$$

为了计算粒子数表象 $\hat{S}$ 矩阵元，假设要研究的基本粒子反应的初态为 α_i 个正负电子和 r_i 个光子，终态为 α_f 个正负电子和 r_f 个光子。

$$\Phi_f^\dagger \hat{S} \Phi_i = \sum_n \Phi_f^\dagger \hat{S}_n \Phi_i = \sum_n \Phi_f^\dagger \sum_{\hat{M}^n} \hat{M}^n \Phi_i$$

$$\Phi_i = \Phi_{\alpha_i r_i}, \quad \Phi_f = \Phi_{\alpha_f r_f}$$

可以知道，只有当 $\alpha_f' = \alpha_f, r_f' = r_f, \alpha_i' = \alpha_i, r_i' = r_i$ 时 $\Phi_{\alpha_f r_f}^\dagger \hat{M}^n \left(\alpha_f', r_f'; \alpha_i', r_i'\right) \Phi_{\alpha_i r_i}$ 才可能不为零。

设 $\hat{M}(\alpha_f, r_f; \alpha_i, r_i)$ 为所有不同级的 $\hat{S}_n$ 矩阵的展开式中具有初态为 (α_i, r_i) 且终态为 (α_f, r_f) 的各项 $\hat{M}^n(\alpha_f, r_f; \alpha_i, r_i)$ 之和，即：

$$\hat{M}(\alpha_f, r_f; \alpha_i, r_i) = \sum_{n=l}^{\infty} \hat{M}^n(\alpha_f, r_f; \alpha_i, r_i)$$

其中，l 代表可能发生上述基本粒子反应的最低阶 $\hat{S}_n$ 矩阵的阶数。

则 $\hat{S}$ 矩阵元可写为：

$$\Phi_f^\dagger \hat{S} \Phi_i = \Phi_{\alpha_f r_f}^\dagger \hat{M}(\alpha_f, r_f; \alpha_i, r_i) \Phi_{\alpha_i r_i}$$

在计算有固定动量和自旋的初态和终态的 $\hat{S}$ 矩阵矩阵元时，只要作替换：

4.10 动量表象 S 矩阵元

假设所研究的正负电子和光子反应的 Feynman 图中有：n 个顶点（即 n 阶 S 矩阵）、E_e 个正负电子外线、E_γ 个光子外线、I_e 个正负电子内线、I_γ 个光子外线、S 个电磁场外线，则：

外线总数 $E = E_e + E_\gamma$

内线总数 $I = I_e + I_\gamma$

动量表象 Feynman 图解规则

n 个顶点对应 $(2\pi)^4 \prod_{i=1}^{n} \delta\left(\sum p\right)_i$

E_e 个正负电子外线对应 E_e 个 $u_i(\vec{p}), \bar{u}_i(\vec{p}), v_i(\vec{p}), \bar{v}_i(\vec{p})$，系数为 $\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{E_e}$

E_γ 个光子外线对应着 E_γ 个 $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} \hat{e}^\nu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} e_\mu^\nu \gamma_\mu$，系数为 $\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{E_\gamma}$

I_e 个正负电子内线对应着 I_e 个 $\frac{\mathrm{i}\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$，系数为 $\left[\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_e}$，对 $\prod_{I_e} \mathrm{d}p$ 积分

I_γ 个光子内线对应着 I_γ 个 $\gamma_\mu \frac{1}{k^2} \gamma_\mu$，系数为 $\left[\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\right]^{I_\gamma}$，对 $\prod_{I_\gamma} \mathrm{d}k$ 积分

l 个电子封闭内线贡献一个因子 $(-1)^l$

S 个外场线对应着 S 个 $\hat{a}=a_\mu(q)\gamma_\mu$，系数为 $\left[\dfrac{1}{(2\pi)^4}\right]^S$，对 $\prod\limits_S \mathrm{d}q$ 积分

Feynman图解中的要素	**Feynman图**	M_{i-f}^n**矩阵元中的因子**
自旋为 i 的电子初态外线		$u_i(\vec{p})$
自旋为 i 的电子终态外线		$\bar{u}_i(\vec{p})$
自旋为 i 的正电子初态外线		$\bar{v}_i(\vec{p})$
自旋为 i 的正电子终态外线		$v_i(\vec{p})$
积化为 $\hat{e}^\nu$ 的光子初态终态外线		$\hat{e}^\nu/\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}=e_\mu^\nu\gamma_\mu/\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}$
电子或正电子内线		$\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}$
光子内线		$\gamma_\mu\cdots\frac{1}{k^2}\cdots\gamma_\mu$
每个顶点有两根正负电子线和一根光子线		$\delta(p_2\pm k-p_1)$ 出向粒子动量为正，入向粒子动量为负
电子或正电子封闭内线		$\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{p^2+m^2}$ 与 $\hat{e}^\nu$ 间隔乘积之迹
外场线		$\hat{a}(q)=a_\mu(q)\gamma_\mu$

规定 Feynman 图解中时间坐标方向为从左到右。

Compton 效应

Compton 效应：电子先吸收一个光子，变为中间态，然后又放出一个光子；或电子先放出一个光子，变为中间态，又吸收一个光子。

$$e^-+\gamma\to e^-+\gamma$$

用 $(k_1,\sigma),(k_2,\lambda)$ 表征光子动量和极化，用 $(\vec{p}_1,i),(\vec{p}_2,j)$ 表征电子的动量和自旋。

最低阶 Feynman 图（$n=2$）有两张。

$n=2,r=2,I_e=1,I_\gamma=0,I=I_e+I_\gamma=1,S=0,l=0,E=E_e+E_\gamma=4$

$$M_{i-f}^n=B_{i-f}^n\underbrace{\int\cdots\int}_{I_e+I_\gamma+S}\prod_{I_e}\mathrm{d}p\prod_{I_\gamma}\mathrm{d}k\prod_S\mathrm{d}q\,\{\cdots\}$$

$$\begin{aligned}B_{i-f}^n&=\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^E\frac{r}{n!}(-e)^n(-1)^l(\mathrm{i})^{I_e-I_\gamma}(2\pi)^{4(n-I-S)}\\&=\mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}(2\pi)^4\end{aligned}$$

可以写出图一的贡献：

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_{i-f}^{2} &= \mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}(2\pi)^4\int(\mathrm{d}p)\,\delta\left(p-p_1-k_1\right)\delta\left(p_2+k_2-p\right)\bar{u}_j(\vec{p}_2)\frac{\hat{e}^{\lambda}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}}\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{\hat{p}^2+m^2}\frac{\hat{e}^{\sigma}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}}u_i(\vec{p}_1) \\
&= \mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}(2\pi)^4\delta\left(p_2+k_2-p_1-k_1\right)\bar{u}_j(\vec{p}_2)\frac{\hat{e}^{\lambda}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}}\frac{\mathrm{i}\left(\hat{p}_1+\hat{k}_1\right)-m}{\left(\hat{p}_1+\hat{k}_1\right)^2+m^2}\frac{\hat{e}^{\sigma}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}}u_i(\vec{p}_1)
\end{aligned}
$$

可以写出图二的贡献：

$$
\begin{aligned}
\hat{M}_{i-f}^{\prime 2} &= \mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}(2\pi)^4\int(\mathrm{d}p)\,\delta\left(p+k_2-p_1\right)\delta\left(p_2-p-k_1\right)\bar{u}_j(\vec{p}_2)\frac{\hat{e}^{\sigma}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}}\frac{\mathrm{i}\hat{p}-m}{\hat{p}^2+m^2}\frac{\hat{e}^{\lambda}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}}u_i(\vec{p}_1) \\
&= \mathrm{i}\frac{e^2}{V^2}(2\pi)^4\delta\left(p_2-k_1+k_2-p_1\right)\bar{u}_j(\vec{p}_2)\frac{\hat{e}^{\sigma}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_1}}}\frac{\mathrm{i}\left(\hat{p}_1-\hat{k}_2\right)-m}{\left(\hat{p}_1-\hat{k}_2\right)^2+m^2}\frac{\hat{e}^{\lambda}}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}_2}}}u_i(\vec{p}_1)
\end{aligned}
$$

总的 M_{i-f}^2 矩阵元是二者之和。

4.11 基本粒子反应几率和截面

$|\langle f\mid S\mid i\rangle|^2$ 的意义

$|\langle f\mid S\mid i\rangle|^2\equiv M_{i-f}$ 表示初终态之间的跃迁几率，即基本粒子衰变或反应几率。不同的 $\langle f|$ 代表不同的反应道。

单位时间、单位空间基本粒子反应跃迁几率

M_{i-f} 矩阵一般可写成如下形式：

$$
M_{i-f}=\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^{E}\delta\left(p^f-p^i\right)M\left(p^f,p^i\right)
$$

其中 p^f 是末态总动量，p^i 是初态总动量，$E=E_e+E_\gamma=E_i+E_f$

用 Γ 表示单位时间单位空间反应的几率，设 $\Omega=TV$ 为基本粒子进行反应的四维空间体积，则

$$
\Gamma\equiv\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\left|M_{i-f}\right|_{\Omega}^{2}}{\Omega}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\left(\frac{1}{V}\right)^{E_i+E_f}\left|M\left(p^f,p^i\right)\right|^2\delta\left(p^f-p^i\right)
$$

单位时空体积初终态跃迁几率为：

$$
\mathrm{d}\omega=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\left(\prod_i n_i\right)\left|M\left(p^i,p^f\right)\right|^2\delta\left(p^f-p^i\right)\prod_f\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}
$$

其中，n_i 为某一种初态粒子单位体积的粒子数 $n_i\equiv N_i/V$

基本粒子的反应截面

基本粒子的反应**微分**截面 $\mathrm{d}\sigma$ 定义为单位时间单位体积基本粒子（群）反应的几率除以初态粒子流的强度。

$$\mathrm{d}\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{J}$$

在一半的基本粒子反应中，初态只有两种粒子

$$J = n_1 n_2 v_{12}$$

v_{12} 是两种基本粒子相对运动速度。

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{v_{12}} \left|M\left(p^i, p^f\right)\right|^2 \delta\left(p^f - p^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{\left(2\pi\right)^3}$$

两个初态粒子相对运动公式：

$$v_{12} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{\left(p_\mu^1 p_\mu^2\right)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

初态有两种基本粒子反应的微分截面公式：

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{F} \left|M\left(p^i, p^f\right)\right|^2 \delta\left(p^f - p^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{\left(2\pi\right)^3}, \quad F \equiv \sqrt{\left(p_\mu^1 p_\mu^2\right)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

总反应截面公式：

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \cdots \int \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{F} \left|M\left(p^i, p^f\right)\right|^2 \delta\left(p^f - p^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{\left(2\pi\right)^3}$$

反应的微分截面 $\mathrm{d}\sigma$ 的两个特点：

- $\mathrm{d}\sigma$ 和 σ 的量纲为面积；
- $\mathrm{d}\sigma$ 表达式与初态粒子数密度无关。
- 总截面 σ 代表反应几率。

不稳定基本粒子衰变的平均寿命

单位时间 1 个基本粒子衰变几率为：

$$\lambda = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \left|M\left(p^i, p^f\right)\right|^2 \delta\left(p^f - p^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{\left(2\pi\right)^3}$$

λ 又称为基本粒子的衰变宽度，其倒数称为衰变寿命 τ，即：

$$\tau \equiv \frac{1}{\lambda}$$

单位时间基本粒子反应的几率

在外场作用下基本粒子反应的截面

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s} V^{E_f} \left|M_{i-f}^{(e)}\left(p^f, p^i\right)\right|^2 \delta\left(\varepsilon^f - \varepsilon^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{\left(2\pi\right)^3}$$

4.12 光子或电子的自旋状态的求和与平均的公式

一般的基本粒子反应中，初态或终态同类的基本粒子的自旋是平均分布的，称为非极化的。

若终态基本粒子非极化，则反应几率或截面要对**终态**基本粒子自旋求**和**；

若初态基本粒子非极化，则反应几率或截面要对**初态**基本粒子自旋求**平均**。

对电子和正电子终态的自旋求和

初态有两种基本粒子反应的微分截面公式：

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{F}\left|M\left(p^i,p^f\right)\right|^2\delta\left(p^f-p^i\right)\prod_f\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3},\quad F\equiv\sqrt{\left(p_\mu^1p_\mu^2\right)^2-m_1^2m_2^2}$$

总反应截面公式：

$$\sigma=\int\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int\cdots\int\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{F}\left|M\left(p^i,p^f\right)\right|^2\delta\left(p^f-p^i\right)\prod_f\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3}$$

通常反应中，首先以初、终态各为一电子的情形为例，此时

$$M\left(p^i,p^f\right)=\bar{u}_f\left(\vec{p}_1\right)\hat{O}u_i\left(\vec{p}_2\right)$$

其中 $\hat{O}$ 是矩阵函数。

$$M^\dagger\left(p^i,p^f\right)=M^*\left(p^i,p^f\right)$$

设

$$\hat{\bar{O}}=\gamma_4\hat{O}^\dagger\gamma_4$$

则

$$\left|M\left(p^i,p^f\right)\right|^2=\bar{u}_i\left(\vec{p}_2\right)\hat{\bar{O}}u_f\left(\vec{p}_1\right)\bar{u}_f\left(\vec{p}_1\right)\hat{O}u_i\left(\vec{p}_2\right),\quad i,f\text{不求和}$$

对终态自旋求和

$$\sum_{f=1}^2\left|M\left(p^i,p^f\right)\right|^2=\sum_{f=1}^2\bar{u}_i\left(\vec{p}_2\right)\hat{\bar{O}}u_f\left(\vec{p}_1\right)\bar{u}_f\left(\vec{p}_1\right)\hat{O}u_i\left(\vec{p}_2\right)$$

又由

$$\sum_{f=1}^2u_f\left(\vec{p}_1\right)\bar{u}_f\left(\vec{p}_1\right)=\frac{m}{E_1}\Lambda_-\left(p_1\right)=-\frac{1}{2E_1}\left(\mathrm{i}\hat{p}_1-m\right)$$

则终态求和为

$$\boxed{\sum_{f=1}^{2}\left|M\left(p^{i},p^{f}\right)\right|^{2}=\frac{m}{E_{1}}\bar{u}_{i}\left(\vec{p}_{2}\right)\hat{\bar{O}}\Lambda_{-}\left(p_{1}\right)\hat{O}u_{i}\left(\vec{p}_{2}\right)}$$

对电子或正电子终态自旋求和并对初态自旋平均

接着对初态自旋求平均。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{f=1}^{2}\left|M\left(p^{i},p^{f}\right)\right|^{2}\right)&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{m}{E_{1}}\bar{u}_{i}\left(\vec{p}_{2}\right)\hat{\bar{O}}\Lambda_{-}\left(p_{1}\right)\hat{O}u_{i}\left(\vec{p}_{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{m^{2}}{E_{1}E_{2}}\operatorname{Tr}\left[\Lambda_{-}(p_{2})\hat{\bar{O}}\Lambda-(p_{1})\hat{O}\right]\end{aligned}$$

总之，要利用

$$\sum_{i}u_{i}(\vec{p})\bar{u}_{i}(\vec{p})=\frac{m}{E}\Lambda_{-}(p)=-\frac{1}{2E}\left(\mathrm{i}\hat{p}-m\right)$$

$$\sum_{i}v_{i}(\vec{p})\bar{v}_{i}(\vec{p})=-\frac{m}{E}\Lambda_{+}(p)=-\frac{1}{2E}\left(\mathrm{i}\hat{p}+m\right)$$

最后把旋量场粒子非极化态问题转化为 γ_μ 矩阵求迹问题。

常用 γ_μ 矩阵求迹公式

对光子的极化求和

例子

求 $B\to f+\tilde{f}$ 寿命。已知：B 是自旋为零、质量为 M 的玻色子；$f,\tilde{f}$ 是自旋为 $1/2$、质量为 m 的正反费米子。相互作用哈密顿量为

$$\hat{\mathcal{H}}_{i}=\mathrm{i}g\hat{\phi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x)$$

求 B 粒子衰变为正反费米子 $f,\tilde{f}$ 的寿命。

（1）根据反应式画出相应费曼图（仅考虑一阶图），写出 λ 表达式。

$$\hat{S}_{1}=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}xN\left[\hat{\mathcal{H}}_{I}(x)\right]=g\int\mathrm{d}^{4}xN\left[\hat{\bar{\psi}}(x)\hat{\psi}(x)\phi(x)\right]$$

衰变初、终态

$$|B\rangle=\left|\vec{k}\right\rangle,\quad\left|f,\tilde{f}\right\rangle=|\vec{p}_{1},i;\vec{p}_{2},j\rangle$$

相应 $\hat{M}_{i-f}^{(1)}$ 为

$$\hat{M}_{i-f}^{(1)}=g\int\mathrm{d}^{4}x\left\langle f,\tilde{f}\left|\hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x)\hat{\psi}^{(+)}(x)\hat{\phi}^{(-)}(x)\right|B\right\rangle$$

$$\hat{\phi}^{(-)}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}_i\left(\vec{p}_1\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1 x}, \quad \hat{\psi}^{(+)}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} v_j\left(\vec{p}_2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2 x}$$

代入得

$$\hat{M}_{i-f}^{(1)} = g\,(2\pi)^4\, \delta\left(p_1 + p_2 - k\right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} \bar{u}_i(\vec{p}_1) v_j(\vec{p}_2)$$

$$M\left(p^i, p^f\right) = (2\pi)^4\, g \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} \bar{u}_i(\vec{p}_1) v_j(\vec{p}_2)$$

代入

$$\lambda = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \left|M\left(p^i, p^f\right)\right|^2 \delta\left(p^f - p^i\right) \prod_f \frac{\mathrm{d}^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3}$$

得到极化态衰变宽度

$$\lambda = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \int \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{k}}} \left|\bar{u}_i(\vec{p}_1) v_j(\vec{p}_2)\right|^2 \delta(p_1 + p_2 - k) \mathrm{d}^3 \vec{p}_1 \mathrm{d}^3 \vec{p}_2$$

（2）终态自旋求和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left|\bar{u}_i(\vec{p}_1) v_j(\vec{p}_2)\right|^2 &= \sum_{i,j} \mathrm{Tr}\left[u_i(\vec{p}_1) \bar{u}_i(\vec{p}_1) v_j(\vec{p}_2) \bar{v}_j(\vec{p}_2)\right] \\ &= -\frac{1}{E_1 E_2}\left[(p_1 p_2) + m^2\right] \end{aligned}$$

$$\lambda = -\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \int \frac{m^2 + (p_1 p_2)}{2\varepsilon_{\vec{k}} E_1 E_2} \delta(p_1 + p_2 - k) \mathrm{d}^3 \vec{p}_1 \mathrm{d}^3 \vec{p}_2$$

（3）对终态动量积分

取初态为质心系

$$\vec{k} = 0, \quad \varepsilon_{\vec{k}} = M$$

$$\delta(p_1 + p_2 - k) = \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(E_1 + E_2 - M)$$

对 $\vec{p}_1$ 积分，考虑到 $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ 函数，只需要把被积函数中除 $\delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ 函数外的项中 $\vec{p}_1$ 全替换成 $-\vec{p}_2$ 即可：

$$\vec{p}_1 \rightarrow -\vec{p}_2, \quad E_1 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} \rightarrow \sqrt{\vec{p}_2^2 + m^2} = E_2 \equiv E, \quad (p_1 p_2) = \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - E_1 E_2 \rightarrow -\vec{p}_2^2 - E^2 = m^2 - 2E^2$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \int \frac{m^2 + (p_1 p_2)}{2\varepsilon_{\vec{k}} E_1 E_2} \delta(p_1 + p_2 - k) \mathrm{d}^3 \vec{p}_1 \mathrm{d}^3 \vec{p}_2 \\ &= -\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 \int \frac{m^2 - E^2}{M E^2} \delta(2E - M) \mathrm{d}^3 \vec{p}_2 \end{aligned}$$

再考虑对 $\vec{p}_2$ 的积分，利用球坐标

$$E^2 = \left|\vec{p}_2\right|^2 + m^2 \quad 2E\mathrm{d}E = 2\left|\vec{p}_2\right| \mathrm{d}\left|\vec{p}_2\right|, \quad \left|\vec{p}_2\right|^2 \mathrm{d}\left|\vec{p}_2\right| = \left|\vec{p}_2\right| E\mathrm{d}E = \sqrt{E^2 - m^2} E\mathrm{d}E$$

$$\mathrm{d}^3\vec{p}_2=|\vec{p}_2|^2\,\mathrm{d}\,|\vec{p}_2|\,\mathrm{d}\Omega=\sqrt{E^2-m^2}E\mathrm{d}E\mathrm{d}\Omega$$

$$\begin{aligned}\lambda&=-\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\int\frac{m^2-E^2}{ME^2}\delta(2E-M)\mathrm{d}^3\vec{p}_2\\&=-\left(\frac{g}{2\pi}\right)^2\int\frac{m^2-E^2}{ME^2}\cdot\frac{1}{2}\delta(E-M/2)\sqrt{E^2-m^2}E\mathrm{d}E\\&=\frac{g^2}{8\pi M^2}\left(M^2-4m^2\right)^{3/2}\end{aligned}$$

对应衰变寿命为

$$\tau=\frac{8\pi M^2}{g^2}\left(M^2-4m^2\right)^{-3/2}$$

4.13 非相对论情况下 Rutherford 散射问题

4.14 光子和电子的散射（Compton 效应）

设动量为 $h\nu_0/c$ 的光子与质量为 m 的静止于 O 点质量为 m 的电子相撞，其结果：电子以速度 v 向 φ 角方向运动，光子以动量 $h\nu/c$ 向 θ 方向偏转。

Compton 效应的 $M_{i-f}^{(2)}$ 矩阵元素

反应式：

$$e^-+\gamma\to e^-+\gamma$$

最低阶费曼图有两张。

截面

光子角分布公式

总截面

4.15 正负电子对湮灭为两个光子

$$e^++e^-\to\gamma+\gamma'$$

4.16 高能电子对撞

4.17 μ 粒子衰变

$$\mu^-\to e^-+\nu_\mu+\bar{\nu}_e,\quad\mu^+\to e^++\nu_e+\bar{\nu}_\mu$$

弱相互作用哈密顿量和 λ 的计算公式

平均求和

终态动量积分