兰州大学物理学院 2022 - 2023 学年第一学期
线性代数 I 期末练习

学号: ______________ 班级: ______________ 姓名: ______________

1. 线性方程组

   当 λ 取什么值时, 下面的线性方程组 (a) 无解; (b) 有唯一解; (c) 有无穷多解.

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

2. 证明

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_2 & 2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix} = n!\left(1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}a_m^2\right).$$

3. Gram 行列式

   (a) 设有向量组 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, 其中 $\mathbf{a}_1 = (1,-1,2,4)$, $\mathbf{a}_2 = (0,3,1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (3,0,7,14)$. 试确定该向量组各向量间的线性关系, 即求出其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组来线性表出.

   (b) 利用 (a) 中的向量组, 计算 3×3 矩阵 G 的行列式, 其中 G 的矩阵元 $g_{ij} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle$ (此时设内积为标准内积).

   (c) 推广: 一般地, 设 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ 为欧氏空间 V 中的一组向量, 定义 $m\times m$ 矩阵 G, 其矩阵元 $g_{ij} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle$. 证明: 该向量组线性相关的充要条件为 $\det G = 0$.

(d) (附加) 试证明一个向量组与其相应的 G 矩阵具有相同的秩. (一个向量组的秩定义为其一个极大线性无关组所包含的向量数目).

4. 设 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的两个线性无关的向量, 证明这两个向量生成的平行四边形的面积为 $\sqrt{\det(A^{\mathrm{T}}A)}$, 其中矩阵 $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$.

5. 有线性映射 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, 已知其标准矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ T(\mathbf{e}_3)],$$

其中 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准基.

(a) 说明矩阵 A 表示 $\mathbb{R}^3$ 中绕 $\mathbf{e}_2$ 方向逆时针旋转 θ 的变换.

(b) 设 $\mathbf{u} = (x, y, z)$, 求 $T(T(T(\mathbf{u})))$.

6. 特征值与特征向量

(a) 考虑实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

问该矩阵能否对角化? 并说明理由.

(b) 计算 A 的特征值和对应的特征向量, 并指出每个特征值的代数重数和几何重数.

(c) 根据上面的结果, 把矩阵 A 写成 $A = PDP^T$ 的形式, 其中 D 为对角矩阵, 其对角元按照从大到小的顺序排列, P 为相应的正交矩阵.

(d) 我们据此可以把 $\mathbb{R}^4$ 空间正交分解成 $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Col} A \oplus \operatorname{Nul} A$. 根据上面的结果, 分别写出这两个子空间的标准正交基.

7. 相互对易的矩阵可以同时对角化

已知 n 阶矩阵 A 和 B 各自可以完全对角化, 且 A 和 B 对易, 即 $[A, B] \equiv AB - BA = 0$.

(a) 假设 $\mathbf{v}$ 是矩阵 A 的一个特征向量, 对应的特征值为 λ, 即 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. 证明 $B\mathbf{v} \in V_\lambda$, 其中 V_λ 是 A 的属于特征值 λ 的特征子空间.

(b) 如果已知矩阵 A 的 n 个特征值全部互不相同, 从上面的观察, 证明矩阵 A 和 B 可以同时对角化, 即存在一个可逆矩阵 P, 能够使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

(c) 试将上述结论推广至 A 的特征值有简并 (或者说其特征多项式有重根) 的情形. 证明在这种情形下, A 和 B 依然可以同时对角化.

8. 已知 $\mathbb{R}^3$ 线性空间中的一组基 (简称为 α-基) 为 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, 其中 $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 1)$ (列向量), $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)$. 设 T 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 满足

$$T(\mathbf{a}_1) = (0, -1, 0), \qquad T(\mathbf{a}_2) = (1, 2, 3), \qquad T(\mathbf{a}_3) = (-1, 2, 2).$$

(a) 求出从 $\mathbb{R}^3$ 的自然基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 到 α-基的过渡矩阵 P, 即 P 满足 $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = [\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]\, P$.

(b) 求出线性变换 T 在自然基下的矩阵 $[T]_e$.

(c) 求出线性变换 T 在 α-基下的矩阵 $[T]_\alpha$.

(d) 讨论 $[T]_e$ 和 $[T]_\alpha$ 之间的关系, 即给出同一线性变换在不同基下的矩阵表示之间的联系.

(e) 已知向量 $\mathbf{b} = (0, 2, 3)$, 根据结果 (b), 求出 $T(\mathbf{b})$ 在自然基下的坐标向量, 即 $[T(\mathbf{b})]_e$.

(f) 求出 $\mathbf{b}$ 在 α-基下的坐标向量 $[\mathbf{b}]_\alpha$, 并根据结果 (c), 求出 $T(\mathbf{b})$ 在 α-基下的坐标向量, 即 $[T(\mathbf{b})]_\alpha$.

(g) 验证结果 (e) 和 (f) 是一致的.

9. 已知 3 阶矩阵 A 和 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\mathbf{x}$ 使得 $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}$ 线性无关, 且满足 $A^3\mathbf{x} = 3A\mathbf{x} - 2A^2\mathbf{x}$.

(a) 设 $P = [\mathbf{x}\ A\mathbf{x}\ A^2\mathbf{x}]$, 求矩阵 $B = P^{-1}AP$.

(b) 计算 $\det(A + I)$.

参考答案

1.
$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) & \lambda-1\end{bmatrix}$$

   解为

   - $\lambda = 1$: $\mathbf{x} = c_1(1,-1,0) + c_2(1,0,-1) + (1,0,0)$;
   - $\lambda = -2$: 无解;
   - $\lambda \neq 1, -2$: 唯一解, $x_1 = x_2 = x_3 = 1/(\lambda+2)$.

2. 提示: 可以用数学归纳法，把最后一个行向量拆成两个行向量之和: $[0\ 0\ \cdots\ n]$ 和 $[a_na_1\ a_na_2\ \cdots\ a_n^2]$, 原来的行列式变成相应的两个行列式之和.

3. $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$; 关于 Gram 矩阵的内容可以参看教材第七章的补充练习及相关参考书.

4. 证明:

   由
$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_2\end{bmatrix},$$
   再计算其行列式即可.

5.
$$T(T(T(\mathbf{u}))) = \begin{bmatrix}\cos 3\theta & 0 & \sin 3\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin 3\theta & 0 & \cos 3\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

6. 实对称矩阵均可以正交对角化. 对于矩阵 A, $\dim \operatorname{Col} A = 1$, 从而 $\dim \operatorname{Nul} A = 3$. 又 A 的零空间 $\operatorname{Nul} A$ 构成特征值为零的特征子空间, 所以 $\dim V_{\lambda=0} = 3$. 且由 $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{v}\}$, 其中 $\mathbf{v} = [1,1,1,1]$, 因此 $\mathbf{v}$ 一定是 A 的一个特征向量, 对应的特征值在这里是 8. 经过以上分析, 我们就可以直接得出 A 的特征值及其对应的重数了. 另外一条途径是通过写特征多项式求解得到, 在此从略.

   $V_{\lambda=8}$ 的单位正交基是 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}[1,1,1,1]$; $V_{\lambda=0}$ 的一个单位正交基是
$$\{\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,0,-1], \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1,0,-2,1], \mathbf{v}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[1,-3,1,1]\}.$$
   正交矩阵 $P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$, 对角矩阵 $D = \operatorname{diag}\{8;0;0;0\}$.

7. 略

8. (a)

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$[T]_e \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) 由

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} [T]_\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_\alpha = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$[T]_\alpha = P^{-1}[T]_e P$$

即 $[T]_\alpha$ 与 $[T]_e$ 相似.

(e)

$$[T(\mathbf{b})]_e = [T]_e \mathbf{b} = (0, 3, 5).$$

(f)

$$[\mathbf{b}]_\alpha = P^{-1}[\mathbf{b}]_e = (1, 1, 1), \qquad [T(\mathbf{b})]_\alpha = [T]_\alpha [\mathbf{b}]_\alpha = (2, 2, 1).$$

(g)

$$2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (0, 3, 5),$$

两者一致.

9. (a)

$$B = P^{-1}AP \;\Rightarrow\; PB = AP = A \begin{bmatrix} \mathbf{x} & A\mathbf{x} & A^2\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{x} & A^2\mathbf{x} & A^3\mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

由 $A^3\mathbf{x} = 3A\mathbf{x} - 2A^2\mathbf{x}$, 有

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

我们可以看到 B 矩阵实际上是线性变换 A 在基 $\{\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}\}$ 下的矩阵表示.

(b)

$$\det(A+I) = \det(B+I) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -4.$$