第三章　行列式

2021 年 12 月 9 日

动机

我们为什么要研究 (学习) 行列式?

- 没有行列式理论的线性代数是不完整的.
- 行列式起源于求解线性方程组.

  历史: 莱布尼茨 (1693)–> *克拉默* (1750)–> *范德蒙德* (1772)–>...
- 行列式定义了一个从 $n \times n$ 的矩阵到实数 (复数) 域上的多线性映射.
- 行列式是线性变换的伸缩因子.
- 理论应用: 矩阵求逆, 求解线性方程组 (克拉默法则), 本征值问题, 多面体体积, 雅可比行列式...

内容

1 行列式

2 行列式的性质

3 行列式的一些应用

行列式的余子式递归定义

定义

一个 $n \times n$ 的矩阵 A, 它的行列式定义为

$$\det A = |A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n},$$

其中 $C_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, 称为矩阵 A 的余因子 (代数余子式, cofactor). A_{ij} 为矩阵 A 划掉第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 阶矩阵.

实际上, $\det A$ 可以按照 A 的任一行或列来展开, 即

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} && \text{(按照第 } i \text{ 行)}\\ &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}. && \text{(按照第 } j \text{ 列)}\end{aligned}$$

用排列和逆序数来定义行列式

定义

$$\det A = \sum_{\{j\}} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列，$\sum_{\{j\}}$ 对所有可能的排列求和，排列的奇偶性决定 $\varepsilon_{j1 \cdots j_n}$ 的值.

n 阶反对称张量 $\varepsilon_{j_1 \cdots j_n}$ 定义为

$$\varepsilon_{j_1 \cdots j_n} = \begin{cases} +1, & j_1 \cdots j_n \text{ 是偶排列} \\ -1, & j_1 \cdots j_n \text{ 是奇排列} \end{cases}$$

$n = 2$ 时，$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$;

$n = 3$ 时，$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$.

多线性函数定义

$\det: \{A_n\} \to \mathbb{R}$, 满足

1. 归一化: $\det I_n = 1$;
2. 多线性: e.g.,

$$\det\left[\vec{a}_1 + \vec{a}_1' \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right] = \det\left[\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right] + \det\left[\vec{a}_1' \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right],$$

$$\det\left[\lambda\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right] = \lambda\det\left[\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right].$$

3. 反对称: e.g.,

$$\det\left[\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; \cdots\right] = -\det\left[\vec{a}_2 \;\; \vec{a}_1 \;\; \cdots\right].$$

这些要求完全确定了映射 det 的形式.

示例

例

上 (下) 三角矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \text{\huge 0} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

内容

1 行列式

2 行列式的性质

3 行列式的一些应用

设 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵, $\det A$ 在行初等变换下作如下改变:

- 交换两行变号;
- 倍加不变;
- 某行乘以数 λ 得到矩阵 B, 则 $\det B = \lambda \det A$;
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, 其中 n 为 A 的阶数.

以上陈述把"行"变成"列"一样成立. 即有行列式性质的关于行列的对称性.

其它性质

- 矩阵 A 可逆的一个充要条件为 $\det A \neq 0$.
- $\det A = \det A^T$.
- $\det AB = (\det A)(\det B)$.

示例

例

如果 A 是一个奇数阶反对称矩阵, 则有 $\det A = 0$.

证明:

A 是反对称矩阵, 即有 $A^T = -A$. 又 $\det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A$, 而 n 是奇数, 所以 $\det A^T = -\det A$. 而一般的, 对于任意方阵 A, 我们均有 $\det A^T = \det A$. 因此 $\det A = 0$.

内容

1 行列式

2 行列式的性质

3 行列式的一些应用

克拉默 (Cramer) 法则

定理

设 A 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵, 则 $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, 方程 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的唯一解可以表示为

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $A_i(\vec{b})$ 为 A 中第 i 列由向量 $\vec{b}$ 替换得到的矩阵, 即

$$A_i(\vec{b}) = [\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列}}}{\vec{b}} \quad \cdots \quad \vec{a}_n].$$

伴随矩阵与逆矩阵

定理

若 A 可逆, 则 $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$, 其中 $(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji}(A)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

证明方法:

- 利用克拉默法则.
- 直接验证 (利用 $\sum_l a_{il}C_{jl} = \det A \cdot \delta_{ij}$).

一般地, 我们有

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)\,A = \det A \cdot I_n$$

讨论: $\operatorname{rank}(\operatorname{adj} A)$, 即 A 的伴随矩阵的秩?

行列式与体积

定理

一个 n 阶方阵 A 的行列式的绝对值等于由 A 中的列向量在 $\mathbb{R}^n$ 中所张成的 n 维平行多面体的体积, 即

$$|\det A| = \text{volumn}\left[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\right].$$

简单的说, 一个矩阵的行列式就是一个平行多面体的 (定向的) 体积, 这个多面体的每条边分别对应着该矩阵的一个列向量.

例

$\mathbb{R}^2$ 上的例子

考虑由两个 (不共线) 向量 $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ 所张成的平行四边形 $\bar{B} = \{s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2 \mid s, t \in [0,1]\}$. 有线性变换 T (对应的矩阵为 $A_{2\times 2}$), 则

$$T(s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2) = sT(\vec{b}_1) + tT(\vec{b}_2) = sA\vec{b}_1 + tA\vec{b}_2 \quad \Rightarrow$$

$$T(\bar{B}) = \{sA\vec{b}_1 + tA\vec{b}_2 \mid s, t \in [0,1]\}.$$

变换之后的平行四边形的面积

$$\begin{aligned} S(T(\bar{B})) &= \det \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{bmatrix} = \det \left(A \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \right) = \det A \cdot \det B \\ &= \det A \cdot S(\bar{B}). \end{aligned}$$

- 顶点不在原点的平行四边形的情况, 即

$$\bar{B} = \{s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2 + \vec{p} \,|\, s, t \in [0, 1]\}, \quad \vec{p} \neq \vec{0}$$

我们有

$$T(\bar{B}) = \{sA\vec{b}_1 + tA\vec{b}_2 + A\vec{p} \,|\, s, t \in [0, 1]\}.$$

所以亦有 $S(T(\bar{B})) = \det A \cdot S(\bar{B})$.

- 不难推广到任意形状和更高维的情况.
- 结论: 线性变换对空间的拉伸程度由该变换对应的矩阵的行列式来度量.

雅可比行列式

例: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的雅可比行列式

有函数 $f\colon (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$, 则面元

$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \left|\frac{\partial\left(y_1, y_2\right)}{\partial\left(x_1, x_2\right)}\right| \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

其中

$$\frac{\partial\left(y_1, y_2\right)}{\partial\left(x_1, x_2\right)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

示例: 椭圆面积计算

有椭圆 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$. 考虑变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

则有 $u_1^2+u_2^2=1$. 所以 u -平面上的单位圆经过变换 A 变成了 x -平面上的椭圆. 我们有

$$S(\text{椭圆}) = |\det A|\, S(\text{圆}) = \pi ab.$$

本章作业

- 3.1 节: 7, 13, 17
- 3.2 节: 9, 13, 17, 19, 23, 33, 35, 43
- 3.3 节: 9, 11, 15, 25, 31

课堂练习

- 3.1 节: 1, 9, 15, 20
- 3.2 节: 3, 7, 11, 15, 21, 39
- 3.3 节: 7, 13, 21, 23