

兰州大学 2021~2022 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、计算题 (共 54 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x^2} - 1) \sin x}{x^2 \ln(1 - 2x)}$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \sin x}$

4. 计算  $f(x) = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}$  的导数

5. 求由方程  $e^{xy} + \sin(x^2 y) = y^2$  所确定的隐函数  $y$  的导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 已知在极坐标下的曲线  $r = a\theta$ , 计算一阶导数  $\frac{dy}{dx}$  与二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

7. 计算积分  $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$

8. 计算积分  $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

9. 计算积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$

二 (8 分) 设  $y = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$ , 求  $y$  的极值

三 (10 分) 求曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{t^2} \sqrt{1+u} du \\ y = \int_0^{t^2} \sqrt{1-u} du \end{cases}$  在  $t \in [1, 2]$  上的弧长

四 (12 分) 已知摆线  $L: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$ ,  $L$  与  $x$  轴围成的图形为  $D$ . (1) 计算  $D$  的面积 (2) 计算  $D$  绕  $x$  轴所得的旋转体体积

五 (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的收敛域与和函数

六 (6 分) 已知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续且可求二阶导数,  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明

存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{b-\xi}$

兰州大学 2020~2021 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、计算题 (共 54 分):

1. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1)$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$

4. 计算  $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$  的导数

5. 设  $\rho = \sin^2 \theta$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

7. 计算积分  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$

8. 计算积分  $\int x \arctan x dx$

9. 计算积分  $\int \sin 4x \sin 3x dx$

二 (11 分) 求由方程  $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$  所确定的隐函数  $y$  的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

三 (11 分) 求圆片  $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$  绕  $y$  轴所得的旋转体体积

四 (12 分) 在底面半径为  $y$  cm, 高为  $h$  cm 的直圆锥形容器中注满了水 (尖端朝下), 在顶点处有一面积为  $A$  cm<sup>2</sup> 的小孔, 水从孔中流出, 水深  $x$  cm 时, 水流出速度是  $\sqrt{2gx}$  cm/s, 问需多少时间才能把水流尽?

五 (12 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛区域与和函数

兰州大学 2016~2017 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、计算题 (共 54 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

2. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1)$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$

4. 计算  $f(x) = x^x$  的导数

5. 设  $\rho = \sin \theta + \cos \theta$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t \cos t^2 - \int_1^{t^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

7. 计算积分  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$

8. 计算积分  $\int x^2 \cos x dx$

9. 计算积分  $\int \tan^3 x \sec x dx$

二 (10 分) 求偶函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值

三 (10 分) 一个球被平面截下的一部分叫球缺, 截面叫球缺的底面, 垂直于截面的直径被截下的线段叫球缺的高。证明半径为  $R$  且高为  $h$  的球缺的体积为

$$V = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$$

四 (11 分) 设  $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$ ,  $-1 < x < 1$ 。证明:

(1)  $f(x)$  是偶函数, 且  $0 < x < 1$  时严格增;

(2)  $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ .

五 (11 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域与和函数

六 (4 分) 求函数  $f(x) = x^2$  在  $[0, \pi]$  上的余弦级数展开

兰州大学 2015~2016 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、计算题 (共 54 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{1/(1-\cos x)}$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ \left( \frac{1+\cos x}{2} \right)^x - 1 \right]$

4. 计算  $f(x) = \cos x^{\sin x}$  的导数

5. 设  $\rho = \sin^2 \theta$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

7. 计算积分  $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

8. 计算积分  $\int x \ln x dx$

9. 计算积分  $\int_0^1 \arccos x dx$

二 (11 分) 求由方程  $\int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^x \frac{\sin t}{t} = 1$  所确定的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

三 (10 分) 求圆片  $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$  绕  $y$  轴所得的旋转体体积

四 (10 分) 展开  $\ln \cos x$  到  $x^4$  的项

五 (11 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$  的和

六 (4 分) 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续,  $(0,1)$  上可导, 且满足

$$f(1) = 2 \int_0^{1/2} e^{1-x^2} f(x) dx$$

证明存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$

兰州大学 2013~2014 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

一、计算题 (共 45 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x}$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$

3. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\sqrt[n]{3} - 1)$

4. 计算  $f(x) = x^{x^x}$  的导数

5. 设  $\rho = \sin \theta + \cos \theta$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t - \int_0^{\sin t} e^{-x^2} dx \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

7. 计算积分  $\int \cos^3 x dx$

8. 计算积分  $\int \sin 7x \cos 3x dx$

9. 计算积分  $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$

二 (10 分) 求由方程  $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 1$  所确定的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

三 (8 分) 计算由摆线  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  一拱的下方图绕  $y$  轴所得的旋转体体积

四 (8 分) 由抛物线  $y = x^2$  与  $y = 4x^2$  绕  $y$  轴旋转一周得一容器, 其高为  $H$ , 如果容器内装满水, 问把水全部抽出, 至少要做多少功?

五 (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$  的和

六 (8 分) 设  $x > 1$  且  $x \neq 0$ , 证明  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

七 (6 分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f''(x)$  在  $(a, b)$  内存在, 若  $f(a) = f(b) = 0$  且存在  $c \in (a, b)$ , 使  $f(c) > 0$  证明存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) < 0$

八 (5 分) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  点取极小值, 且右导数  $f'_+(x_0)$  在  $x_0$  点连续, 证明  $f'_+(x_0) = 0$

兰州大学 2012~2013 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
分数								

一、计算题 (共 50 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{3/x}$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

4. 计算  $f(x) = \cos x^{\sin x}$  的导数

5. 设  $\rho = \sin 3\theta$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \int_0^{\sin t} e^{\cos x} dx \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

7. 计算积分  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

8. 计算积分  $\int \tan^3 x \sec x dx$

9. 计算积分  $\int \sin \ln x dx$

二 (10 分) 求由方程  $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$  所确定的隐函数  $y$  的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

三 (10 分) 求圆片  $(x-a)^2 + y^2 \leq R^2$  绕  $y$  轴所得的旋转体体积

四 (10 分) 一圆柱形水桶高为  $H$ , 底半径为  $r$  米, 桶内装满水。如果问把桶内水全部吸出, 问至少要做多少功?

五 (10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$  的和

六 (5 分) 证明当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x + 2 \sin x > 3x$

七 (5 分) 证明极坐标曲线  $r = r(\theta)$  的曲率公式为  $K = \frac{|r^2 + 2r'^3 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$ 。据此

说明双纽线  $r^2 = \cos 2\theta$  的曲率半径与  $r$  呈反比

兰州大学 2011~2012 学年第 一 学期

期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 高等数学 (物理类) 任课教师: \_\_\_\_\_

学院: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_ 校园卡号: \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

一、计算题 (共 50 分):

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$

2. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

3. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_1^x e^{2t^2} dt)^2}{\int_1^x e^{2t^2} dt}$

4. 计算  $f(x) = \sin x^{\cos x}$  的导数

5. 设  $e^x = xy$ , 计算导数  $\frac{dy}{dx}$

6. 设  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ , 计算导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

7. 计算积分  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

8. 计算积分  $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$

9. 计算积分  $\int e^x \sin x dx$

二 (10 分) 试证变量代换  $x = \cos t (0 < t < \pi)$  可将微分方程

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

化简为  $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$

三 (10 分) 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$  所围图形的面积

四 (10 分) 求曲线  $\rho \theta = 1$  相应于  $\theta = \frac{3}{4}$  到  $\theta = \frac{4}{3}$  的一段弧长

五 (12 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$  的和

六 (8 分) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ 。

证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = f(\xi)$

答案:

2021-2022:

1.  $\frac{1}{2}$       2.  $e^4$     3.  $-\frac{1}{12}$     4.  $e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$

5.  $\frac{ye^{xy} + 2xy \cos(x^2 y)}{2y - xe^{xy} - x^2 \cos(x^2 y)}$

6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 + \theta^2}{a(\cos \theta - \theta \sin \theta)^3}$

7.  $\frac{1}{2} \tan x + C$     8.  $(\arctan \sqrt{x})^2 + C$     9.  $\frac{\ln 2}{3}$

二、  $f(0)=1, f(1)=f(-1)=0$

三、  $3\sqrt{2}$

四、 (1)  $3\pi a^2$       (2)  $5\pi^2 a^3$

五、  $[-1, 1) \quad S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

六、提示: 构造  $g(x) = f'(x)(b-x)^2$ , 再利用罗尔定理