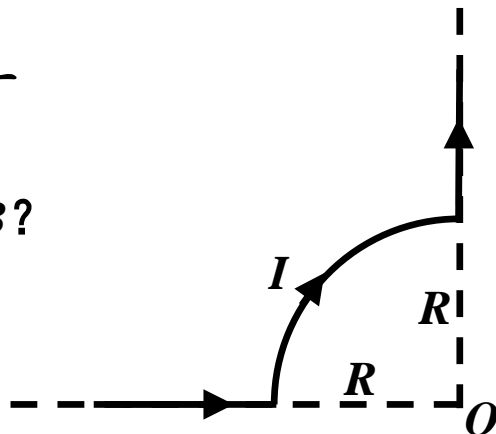


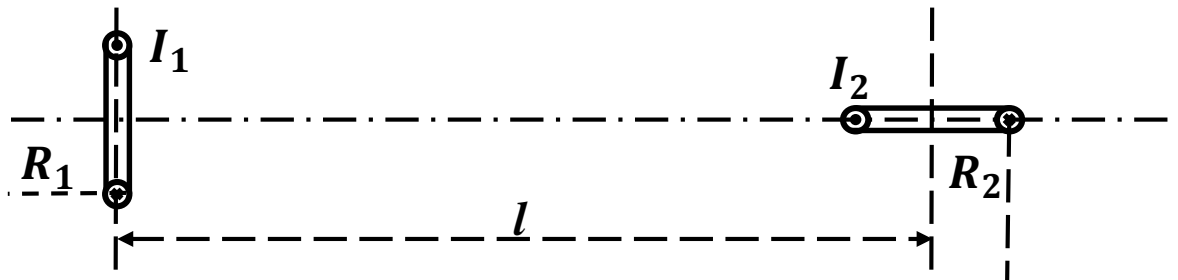
1. 一条载有电流 $I$ 的无穷长直导线，在一处弯折成半径为 $R$ 的1/4圆弧，如图所示。试求这个1/4圆弧中心 $O$ 点的磁感应强度 $B$ ？



- 解：1) 根据Biot-Savart定律，两直线部分的电流在 $O$ 点产生的磁感应强度均为零；
- 2) 1/4圆弧部分电流在 $O$ 点产生的磁感应强度 $B$ 的方向垂直纸面向里；
- 3) 其大小为整个圆线圈产生的磁感应强度大小的1/4

$$B = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

2. 两个圆线圈的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，所载电流分别为  $I_1$  和  $I_2$ ，圆心相距为  $l$ ，线圈2的直径在线圈1的轴线上，如图所示。当  $l$  比  $R_1$  和  $R_2$  都大很多时，试求  $I_1$  作用在线圈2上的力矩？



解：圆电流  $I_1$  在轴线上距离圆心为  $l$  处产生的磁感应强度为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2(l^2 + R_1^2)^{3/2}} \vec{e}_1$$

$\vec{e}_1$  表示电流  $I_1$  右手旋进方向上的单位矢量。令  $l \gg R_1$  可得近似公式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2l^3} \vec{e}_1$$

又由于  $l \gg R_2$ ，在线圈2处可以认为  $\vec{B}$  是匀强磁场，于是作用在线圈2上的力矩为

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} = I_2 \cdot \pi R_2^2 \cdot \vec{e}_2 \times \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2l^3} \vec{e}_1 = \frac{\pi \mu_0 I_1 I_2 R_2^2 R_1^2}{2l^3} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1$$

其中  $\vec{e}_2$  表示电流  $I_2$  右手旋进方向上的单位矢量。

3. 两个均匀带电的金属同心球壳，内球壳半径为 $R_1$ ，带电量 $q_1$ ，外球壳半径为 $R_2$ ，带电量为 $q_2$ ，试求两球壳之间任意一点 $P(R_1 < r < R_2)$ 的场强与电势？

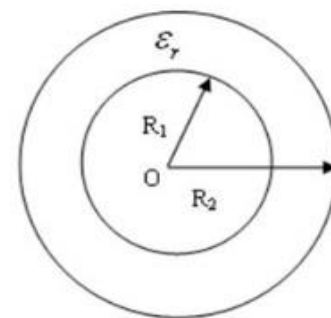
解：(1) 由高斯定理 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$ ，选择半径为 $r$ 的球面为高斯面，则对点 $P(R_1 < r < R_2)$ 有

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

(2) 电势叠加法 $U_P = U_1 + U_2$

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad U_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$U_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2} \right)$$



4. 在半径为 $R_1$ 的金属球之外有一层半径为 $R_2$ 的均匀介质层, 设介质的相对介电常数为 $\epsilon_r$ , 金属球带电量为 $+Q$ , 试求 (1) 介质层外的 $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$ ; (2) 介质层内外表面极化电荷面密度?

解: 应用高斯定理, 选半径为 $r$ 的同心球面为高斯面,

1) 当 $r < R_1$ 时, 因为是导体内部, 有 $\vec{D} = 0$ ,  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{P} = 0$ .

当 $R_1 < r < R_2$ 时,  $4\pi r^2 \vec{D} = Q$ , 故

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{r}, \quad \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r r^2} \hat{r}$$

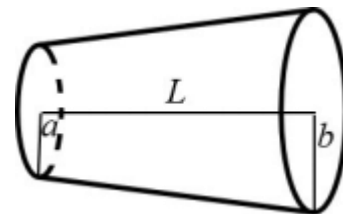
当 $r > R_2$ 时,  $4\pi r^2 \vec{D} = Q$ ,  $\epsilon_r = 1$ 故

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = 0$$

2) 由 $\sigma' = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \hat{n}_{21}$

$$\sigma'_{in} = -P(R_1) = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R_1^2}, \quad \sigma'_{out} = P(R_2) = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi \epsilon_r R_2^2}$$

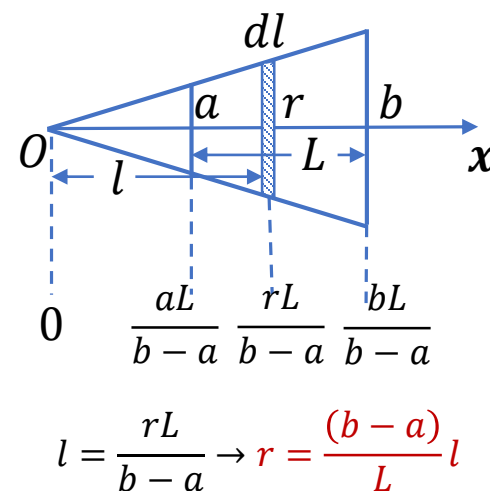
5. 如图所示，用电阻率为 $\rho$ 的金属制成一根长度为 $L$ ，底面半径分别为 $a$ 和 $b$ 的锥台形导体，计算其沿长度方向通电流时的电阻大小？



解：用电阻串联公式：

$$R = \int dR = \int \rho \frac{dl}{S}$$

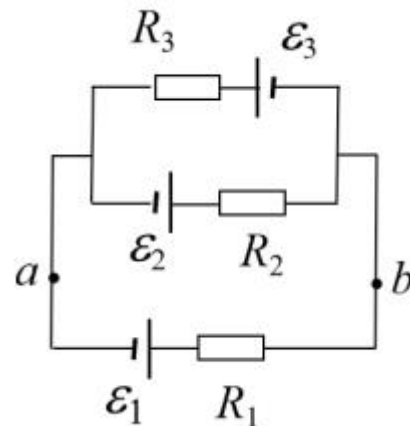
建立如图所示坐标系，可以确定上述积分的积分限



$$\begin{aligned} R &= \int dR = \int \rho \frac{dl}{S} = \rho \int_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}} \frac{1}{\pi r^2} dl = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{L^2}{(b-a)^2} \int_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}} \frac{1}{l^2} dl \\ &= \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{L^2}{(b-a)^2} \cdot \left( -\frac{1}{l} \right) \Big|_{\frac{aL}{b-a}}^{\frac{bL}{b-a}} = \frac{\rho}{\pi} \cdot \frac{L}{ab} \end{aligned}$$

6. 一电路如图所示, 已知  $\varepsilon_1 = 3\text{ V}$ ,  $\varepsilon_2 = 1.4\text{ V}$ ,

$\varepsilon_3 = 2.2\text{ V}$ ,  $R_1 = 1.5\ \Omega$ ,  $R_2 = 2.0\ \Omega$ ,  $R_3 = 1.4\ \Omega$ , 电源的内阻都已分别计算在  $R_1$ ,  $R_2$  和  $R_3$  内, 请计算各支路电流, 并求出图中  $a$ ,  $b$  两点的电势差  $U_a - U_b$ ?



解: 列基尔霍夫方程组: 1) 假设电流方向, 2) 回路绕行方向;

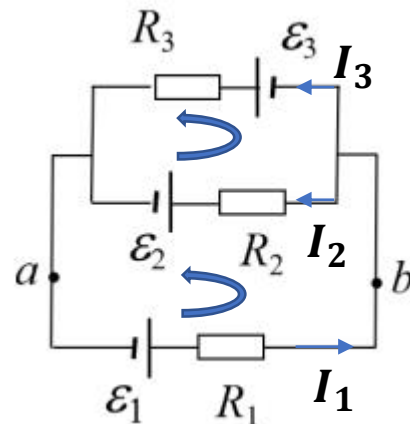
$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$$

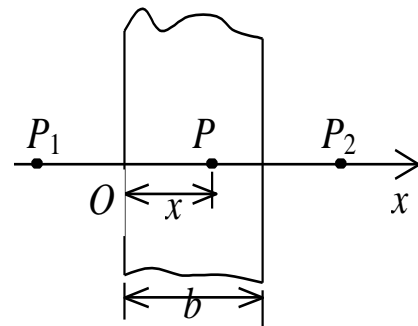
$$-I_2 R_2 - \varepsilon_3 + I_3 R_3 - \varepsilon_2 = 0$$

代入数值解得:  $I_1 = 1.6\text{ A}$ ,  $I_2 = -0.4\text{ A}$ ,  $I_3 = 2\text{ A}$

$$\begin{aligned} U_a - U_b &= -\varepsilon_1 + I_1 R_1 = -\varepsilon_2 - I_2 R_2 \\ &= -3\text{ V} + 2.4\text{ V} = -1.4\text{ V} + 0.8\text{ V} = -0.6\text{ V} \end{aligned}$$



7. 如图所示，一厚为 $b$ 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为： $\rho = kx, (0 \leq x \leq b)$ ，式中 $k$ 为一正的常量。求：(1) 平板外两侧任一点 $P_1$ 和 $P_2$ 处的电场强度大小；(2) 平板内任一点 $P$ 处的电场强度；(3) 场强为零的点在何处？

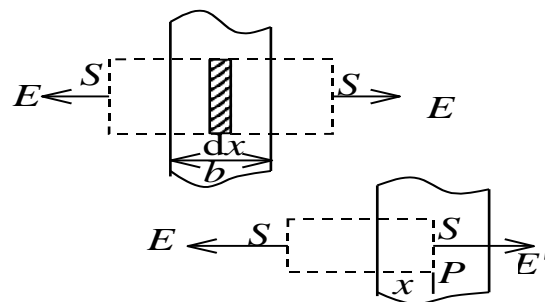


解：(1) 由对称性分析知，平板两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且指向背离平面的方向，可以设电场强度为 $\vec{E}$ ；

考虑位置 $x$ 处，厚度为 $dx$ 的微元平板，做底面大小为 $S$ 的高斯面，如图所示，

由高斯定理知微平板两侧 $P_1$ 和 $P_2$ 处的电场强度大小为

$$2SdE = \frac{kx \cdot S \cdot dx}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{kb^2}{4\epsilon_0}$$



(2) 过 $P$ 点做如图所示的高斯面，则由高斯定理

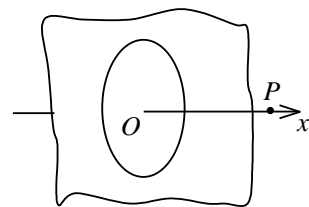
有

$$ES + E_P S = \frac{kS}{\epsilon_0} \int_0^x x dx = \frac{kSx^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow E_P = \frac{k}{2\epsilon_0} \left( x^2 - \frac{b^2}{2} \right), (0 \leq x \leq b)$$

带入具体的 $x$ 的值，如果为正表示方向向右，为负表示方向向左。

(3)  $E_P = \frac{k}{2\epsilon_0} \left( x^2 - \frac{b^2}{2} \right) = 0$ ，可以解得  $x = b/\sqrt{2}$

8. 如图所示，一‘无限大’平面，中部有一半径为 $R$ 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 $\sigma$ 。试求通过小孔中心并与平面垂直的直线上某个点 $P$ 的场强和电势（选 $O$ 点的电势为零）？



解：将题中的电荷分布看作是面密度为 $\sigma$ 的无限大平面和面密度为 $-\sigma$ 半径为 $R$ 厚度与平面相等的圆盘叠加的结果。

以 $O$ 点为原点，建立如图所示 $x$ 轴垂直于平面的坐标轴，则无限大平面在 $x$ 处产生的电场为 $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{x}$

圆盘在 $x$ 处产生的电场为 $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right) \hat{x}$

故所求电场为 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \hat{x}$

所求电势为

$$U = \int_x^0 \vec{E} dx = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} dx \Rightarrow U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( R - (R^2 + x^2)^{1/2} \right)$$