

2020-2021学年第一学期线性代数I期中试卷

学号：

姓名：

1. (15分) 计算：

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 7 & 2 & -9 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

2. (10分) 计算下列行列式的值：

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. (30分) 已知线性方程组的增广矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 对应的简化阶梯型为矩阵 B 。

(a) 写出矩阵 B , 并指出矩阵的主元位置, 主元列;

(b) 写出线性方程组解的参数向量形式;

(c) 设矩阵 F 满足 $FA = B$, 试求出 F ;

(d) 分别给出矩阵 A 的列空间和零空间的的一个基。

4. (15分) 设矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1}B + 2X$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^* \text{ 为 } A \text{ 的伴随矩阵, 求矩阵 } X.$$

5. (15分) 设线性变换 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足 $T(x, y, z) = (x + y - z, y + z, x + 2y)$, 这里 $(x, y, z) \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

(a) 求该线性变换的值域;

(b) 说明该值域为 \mathbb{R}^3 的子空间, 子空间的维数是多少?

6. (15分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A 的列向量的一个最大线性无关组, 并把其余的

列向量用该组的列向量来线性表出。