一、计算题

1.求方程 $y' - \frac{2}{x}y = \frac{2}{x} - 2$ 的通解

答案：$y = Cx^2 + 2x - 1$

解：

原微分方程等价于：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x + 2y + 2}{x}$$

解方程组：$\begin{cases} -2x + 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$，得：$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

令：$x = X, y = Y - 1$，则原微分方程等价于：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{-2X + 2Y}{X}$$

令 $Z = \frac{Y}{X}$，$Y = ZX$，$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = X\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}X} + Z$，代入上面方程，分离变量得：

$$\frac{\mathrm{d}Z}{-2 + Z} = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

两边积分得：

$$Z = CX + 2$$

将 $Z = \frac{Y}{X}, X = x, Y = y + 1$ 代回得原微分方程的通解为：

$$y = Cx^2 + 2x - 1$$

注意点：换元后记得还回去

2.求方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解

答案：$y = e^x(C_1 + C_2x)$

解：

特征方程为：

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

解得：$r = 1$

于是通解为：

$$y = e^{rx}(C_1 + C_2x) = e^x(C_1 + C_2x)$$

3.计算曲线积分：

$$\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}s$$

其中，Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = x$

答案：2

解：

极坐标变换：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

则 Γ 在极坐标下的方程为：

$$\begin{cases} r = \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

于是：

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta})^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 2 \end{aligned}$$

4.求曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在 $(2,1,4)$ 点的切平面方程

答案：$4x+2y-z-6=0$

解：

曲面 $z=x^2+y^2-1$ 可以看作三元函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2-z-1$ 的值为 0 的等值面

曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的一个法向量，也就是等值面在点 $(2,1,4)$ 处的一个法向量，

$$\vec{n} = \nabla\cdot(x^2+y^2-z-1)|_{(2,1,4)} = (4,2,-1)$$

于是切平面上的点 (x,y,z) 应满足：

$$(x-2,y-1,z-4)\cdot(4,2,-1)=0$$

于是得到切平面方程为：

$$4x+2y-z-6=0$$

5.计算极限：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$$

答案：0

解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2) = \lim_{r\to 0} r(\cos\theta+\sin\theta)\ln r^2 = 2(\cos\theta+\sin\theta)\lim_{r\to 0} r\ln r = 0$$

6.求与二直线：$L_1:\begin{cases} x=3z-1 \\ y=2z-3 \end{cases}$，和：$L_2:\begin{cases} y=2x-5 \\ z=7x+2 \end{cases}$ 垂直且相交的直线方程

答案：所求直线的交面式方程为：$\begin{cases} x-3z+1=0 \\ 37x+20y-11z+122=0 \end{cases}$

解：

记所求直线为 L_3

L_1 的一个方向向量 $\vec{v}_1=(1,0,-3)\times(0,1,-2)=(3,2,1)$

L_2 的一个方向向量 $\vec{v}_2=(2,-1,0)\times(7,0,-1)=(1,2,7)$

由于 L_3 垂直 L_1,L_2，于是 L_3 的一个方向向量为：

$$\vec{v}_3' = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (12, -20, 4)$$

L_3 的一个方向向量为：

$$\vec{v}_3 = (3, -5, 1)$$

令 $z = 0$，得 L_1 上的一个点为：$(-1, -3, 0)$

记 (x, y, z) 是 L_1, L_3 组成平面上任意一点，则有：

$$(x+1, y+3, z) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3) = 0$$

得到 L_1, L_3 组成平面方程为：$x - 3z + 1 = 0$

令 $x = 0$，得 L_2 上的一个点为：$(0, -5, 2)$

记 (x, y, z) 是 L_2, L_3 组成平面上任意一点，则有：

$$(x, y+5, z-2) \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 0$$

得到 L_2, L_3 组成平面方程为：$37x + 20y - 11z + 122 = 0$

于是所求直线 L_3 的交面式方程为：

$$L_3 : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ 37x + 20y - 11z + 122 = 0 \end{cases}$$

二、设 $y = g(x, z)$，而 z 是由方程 $f(x-z, xy) = 0$ 所确定的 x, y 的函数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

答案：$\frac{f_1' + yf_2' + xf_2'g_1';}{f_1' - xf_2'g_2'}$ 或写成 $\frac{f_1' + yf_2' + xf_2'g_x';}{f_1' - xf_2'g_z'}$

解：

构造：

$$\begin{cases} F(x, y, z) = g(x, z) - y = 0 \\ G(x, y, z) = f(x-z, xy) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= -\left|\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}\right| \Big/ \left|\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right| \\ &= \frac{f_1' + yf_2' + xf_2'g_1';}{f_1' - xf_2'g_2'} \end{aligned}$$

或者把 g_1' 写成 g_x'，g_2' 写成 g_2' 也行

三、设 $z = f(2x - y, y\sin x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

四、求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在抛物面 $x^2 + y^2 + z = 16$ 之外部分的面积

答案：8π

解：

球面的球坐标：$\begin{cases} x = 4\sin\theta\cos\varphi \\ y = 4\sin\theta\sin\varphi \\ z = 4\cos\theta \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S \\
&= \iint_{\substack{\arccos\frac{1}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} 4^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= 16 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta=\arccos\frac{1}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

五、计算曲线积分：

$$
I = \int_{L} \frac{x-y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{d}y
$$

其中，L 是按逆时针定向的椭圆 $x^2+2y^2=1$

答案：2π

解：

$P=\frac{x-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

取充分小 $\varepsilon>0$, 构造闭合曲线：$L': x^2+y^2=\varepsilon^2$

由格林公式：

$$
\begin{aligned}
\int_{L} \frac{x-y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{d}y &= \iint_{D} 0 \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \int_{L'-} \frac{x-y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L'+} (x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{0}^{2\pi} \varepsilon^2 \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

六、计算曲面积分：

$$
I = \iint_{\Sigma} 2x \mathrm{d}y \mathrm{d}z - y \mathrm{d}z \mathrm{d}x + z \mathrm{d}x \mathrm{d}y
$$

其中，Σ 由柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截部分的外侧

答案：0

解：

$\Sigma_1: \begin{cases} x+z=2 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \end{cases}, \Sigma_2: \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2 \leqslant 4 \end{cases}$

计算被积向量函数的散度：

$$
\nabla \cdot (2x, -y, z) = 2
$$

由高斯公式：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Sigma} 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint\limits_{\Omega} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Sigma_1+} - \iint\limits_{\Sigma_2-} \\
&= 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z=0}^{z=-x+2} \mathrm{d}z - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} (2x,-y,z)\cdot(1,0,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} (2x,-y,z)\cdot(0,0,-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 8\pi - 8\pi - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

七、求抛物面 $x^2+y^2=4z$，柱面 $x^2+y^2=8y$，平面 $z=0$ 围成几何体的体积

解：

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 8y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z=0}^{z=\frac{x^2+y^2}{4}} \mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 8\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} \frac{r^2}{4} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 96\pi
\end{aligned}
$$