已知 Kehagias-Sfetsos 黑洞背景时空可以由以下线元表示:

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + rac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d} heta^2 + r^2\sin^2 heta\mathrm{d}\phi^2
onumber$$
 $f(r) = 1 + rac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8Mr\omega^2}
ight)$

其中, M 为黑洞质量, ω 为一参数。求下面的问题:

(1) 写出度规行列式;

$$g_{\mu
u} = egin{bmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \ 0 & rac{1}{f(r)} & 0 & 0 \ 0 & 0 & r^2 & 0 \ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 heta \end{bmatrix}$$

度规行列式为:

$$g=\det(g_{\mu
u})=-r^4\sin^2 heta$$

(2) 黑洞事件视界的位置;

事件视界的半径记为 r_h , 其满足:

$$rac{1}{q_{rr}}=f(r_h)=0$$

即:

$$1+rac{1}{2\omega^2}\left(r_h^2-\sqrt{r_h^4+8Mr_h\omega^2}
ight)=0$$

方程可化简为:

$$r_h^2 - 2Mr_h + \omega^2 = 0$$

解得:

$$r_{h\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

(3) 无限红移面的位置;

无限红移面半径记为 r_s , 其满足:

$$|q_{tt}|_{r=r_s} = 0$$

即:

$$-f(r_s)=0$$

解得:

$$r_{s\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

(4) Hawking 温度;

$$\left. F_H = G_H = rac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}
ight|_{r=r_{h+}} = rac{M + \sqrt{M^2 - \omega^2}}{\omega^2} - rac{2M\omega^2 + \left(M + \sqrt{M^2 - \omega^2}
ight)^3}{\omega^2 \sqrt{8M\omega^2 \left(M + \sqrt{M^2 - \omega^2}
ight) + \left(M + \sqrt{M^2 - \omega^2}
ight)^4}}$$

Hawking 温度:

$$T=rac{\sqrt{F_HG_H}}{4\pi}=rac{1}{4\pi}\cdot F_H=rac{1}{4\pi}\left[rac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-rac{2M\omega^2+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}
ight)^3}{\omega^2\sqrt{8M\omega^2\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}
ight)+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}
ight)^4}}
ight]$$

(5) 光球的位置。

选取 $x^{\mu}=(t,r,\theta,\varphi)$

光子的拉格朗日量:

$$\mathscr{L}=rac{1}{2}g_{\mu
u}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{
u}=rac{1}{2}igg[-f(r)\dot{t}^2+rac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{ heta}^2+r^2\sin^2 heta\dot{arphi}^2igg]$$

考虑光子在赤道面 $heta=\pi/2$ 上运动,光子的拉格朗日量可简化为:

$$\mathscr{L} = rac{1}{2}igg[-f(r)\dot{t}^2 + rac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{arphi}^2igg]$$

光子的拉格朗日量中不显含广义坐标 t, φ ,因此对应的广义动量是守恒量:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E, \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = l$$

即:

$$-f(r)\dot{t} = -E, \ r^2\dot{\varphi} = l$$

可以解得对应的广义速度:

$$\dot{t}=rac{E}{f(r)},~~\dot{arphi}=rac{l}{r^2}$$

又光子的拉格朗日量为零,即:

$$\mathscr{L}=rac{1}{2}igg[-f(r)\dot{t}^2+rac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{arphi}^2igg]=0$$

将
$$\dot{t}=rac{E}{f(r)},\;\; \dot{arphi}=rac{l}{r^2}$$
 代入上式可得:

$$\dot{r}=E^2-f(r)rac{l^2}{r^2}$$

其中,
$$f(r)=1+rac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8Mr\omega^2}
ight)$$

或者可写为:

$$\dot{r}+f(r)rac{l^2}{r^2}=E^2$$

定义有效势:

$$egin{split} V_{
m eff} &\equiv f(r)rac{l^2}{r^2} \ &= rac{l^2}{r^2}iggl[1 + rac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8Mr\omega^2}
ight) iggr] \ &= rac{l^2}{r^2} + rac{l^2}{2\omega^2}\left(1 - rac{\sqrt{r^4 + 8Mr\omega^2}}{r^2}
ight) \ & \dot{r}^2 + V_{
m eff} = E^2 \end{split}$$

由于 $\dot{r}^2 \geqslant 0$,因此光子只能在

$$E^2 - V_{
m eff} \geqslant 0$$

的区域运动。

 $V_{
m eff}(r)$ 的极大值点记为 $r_{
m ps}$

当 $E^2 = (V_{
m eff})_{
m max}$ 且光子的初始位置就在 $r_{
m ps}$ 且初速度非零时,有:

$$\dot{r} = 0$$

此时光子的运动轨迹是稳定的圆。

即光球的半径就是 $r_{\rm ps}$, 其满足:

$$\left.rac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}
ight|_{r=r_{\mathrm{ps}}}=0$$

解得光球半径:

$$r_{
m ps} = rac{3M^2}{\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}
ight)^{1/3}} + \left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}
ight)^{1/3}$$