> 完整版笔记在 https://github.com/BeiHai0/Surviving-LZU-Physics

1.5 不变子群和商群

不变子群的定义

定义一：

设 H 为 G 的一个子群，若 $\forall g_\alpha \in G$，都有

$$g_\alpha H = H g_\alpha$$

则称 H 为 G 的不变子群。

定义二：

设 H 为 G 的一个子群，若 H 中任意元素的共轭元素还在 H 中，即 $\forall g_\alpha \in G, h_\beta \in H$ 都有

$$g_\alpha h_\beta g_\alpha^{-1} = h_\gamma \in H$$

则称 H 为 G 的不变子群。

- $\{e\}$ 和 G 本身都是 G 的不变子群。
- 若 G 的一个子群是 Abel 子群（子群中的任意元素与 G 中的元素都满足交换律），则它一定是 G 的不变子群。C_6 群是 Abel 群，它的两个非平庸子群 $\{C_6^3, C_6^6 = e\}$ 和 $\{C_6^2, C_6^4, C_6^6 = e\}$ 都是 C_6 群的不变子群。

不变子群的性质

- 不变子群的左右陪集相同（定义一）。
- 若子群 H 中的任意一个元素的共轭元素仍在 H 中，则 H 为不变子群。
- 不变子群由多个类构成；若一个子群由多个类构成，则其一定为不变子群。
- 指数为 2 的子群必为不变子群。（设有限群 G 的阶数为 n_G，其子群 H 的阶数为 n_H，n_G/n_H 称为子群 H 的阶数）

商群的定义

设 H 为群 G 的不变子群，则 H 及其陪集串

$$\{\phi_0 = H,\ \ \phi_1 = s_1 H, \cdots, \phi_{k-1} = s_{k-1} H\},\ \ s_i \in G$$

构成一个新的群，称为群 G 关于不变子群 H 的商群，记为

$$G/H$$

商群的乘法由群 G 的乘法来确定：

$$\phi_i \phi_j \equiv \{(s_i h_\alpha)(s_j h_\beta) | h_\alpha, h_\beta \in H\}$$

$$\phi_i \phi_j = s_i H s_j H = s_i s_j H H = s_i s_j H = g_\alpha H$$

验证商群满足群的定义：

- 封闭性：$\forall \phi_i, \phi_j \in G/H, \phi_i \phi_j = g_\alpha H = \phi_m \in G/H$
- 恒元：H

$$H(s_i H) = s_i H H = s_i H$$

- 逆元：

$$\forall s_i H \in G/H, (s_i H)(s_i^{-1} H) = s_i s_i^{-1} H H = H$$

- 结合律：

$$(\phi_i \phi_j)\phi_k = (s_i H s_j H) s_k H = \{[(s_i h_\alpha)(s_j h_\beta)]\,(s_k h_\gamma) | \forall h_\alpha, h_\beta, h_\gamma \in H\} = \{(s_i h_\alpha)[(s_j h_\beta)(s_k h_\gamma)] | \forall h_\alpha, h_\beta, h_\gamma \in H\} = s_i H (s_j H s_k H) = \phi_i($$

例子：C_6 群有两个非平庸不变子群 $\mathrm{C}_3 = \{e, C_6^2, C_6^4\}$ 和 $\mathrm{C}_2 = \{e, C_6^3\}$，因此有两个商群：

$$\mathrm{C}_6/\mathrm{C}_3=\{\phi_0=\mathrm{C}_3=\{e,C_6^2,C_6^4\},\ \ \phi_1=C_6^1\mathrm{C}_3=\{C_6^1,C_6^3,C_6^5\}\}$$

$$\mathrm{C}_6/\mathrm{C}_2=\{\phi_0=\mathrm{C}_2=\{e,C_6^3\},\ \ \phi_1=C_6^1\mathrm{C}_2=\{C_6^1,C_6^4\},\ \ \phi_2=C_6^2\mathrm{C}_2=\{C_6^2,C_6^5\}\}$$

1.6 同态与同构

同构

设 $G=\{g_\alpha\}$ 和 $G=\{g'_\alpha\}$ 为两个群，群元之间存在一一对应关系 $g_\alpha\longleftrightarrow g'_\alpha$，并且为满射，且 G 中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应于 G' 中相应两个元素的乘积，则称 G 和 G' 同构，记为 $G\cong G'$

符号语言表述：

$g_\alpha\longleftrightarrow g'_\alpha$

若 $g_\alpha\longleftrightarrow g'_\alpha, g_\beta\longleftrightarrow g'_\beta$，则 $g_\alpha g_\beta\longleftrightarrow g'_\alpha g'_\beta$

两个同构的群具有相同的乘法表。若两个群的乘法表相同，则它们一定同构。

- 阶为同一素数的两个群同构
- 无限群也存在同构，如 $\mathrm{SO}(2)\cong\mathrm{U}(1)$，$\mathrm{U}(1)$ 群的群元 $g'(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 可以作为 $\mathrm{SO}(2)$ 群的一维表示。

$$\mathrm{SO}(2):g(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\ \ \mathrm{U}(1):g'(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

一一对应关系：

$$g(\theta)\longleftrightarrow g'(\theta)\Longrightarrow g(\theta_1)g(\theta_2)=g(\theta_1+\theta_2)\longleftrightarrow g'(\theta_1+\theta_2)=g'(\theta_1)g'(\theta_2)$$

于是 $\mathrm{SO}(2)\cong\mathrm{U}(1)$

D_3 关于其不变子群 $H=\{e,d,f\}$ 的商群 D_3/H 与 C_2 群同构。

$$\mathrm{D}_3/H=\{H=\{e,d,f\},aH=\{a,b,c\}\}$$

一一对应关系：

$$H\longleftrightarrow e,\ \ aH\longleftrightarrow C_2^1$$

可以验证乘积的对应关系：

$$H\cdot aH=aH\longleftrightarrow C_2^1=e\cdot C_2^1$$

$$aH\cdot aH=H\longleftrightarrow C_2^1\cdot C_2^1=e$$

于是：

$$\mathrm{D}_3/H\cong\mathrm{C}_2$$

不满足同构条件的例子：

4 阶循环群 C_4 和时空反演群 $\mathrm{V}_4=\{e,\tau,\sigma,\rho\}$（$e$ 代表恒元，τ 代表时间反演，σ 代表空间反演，ρ 代表时空反演）

V_4 群可用四阶矩阵表示：

$$e=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\ \ \tau=\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix},\ \ \sigma=\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix},\ \ \rho=\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

从群元的阶就能看出二者不同构。

当群元的阶不同时，群的乘法表结构就不同，两个群就不可能同构。

同态

设 $G=\{g_{im}\}$ 与 $G'=\{g'_i\}$ 之间有多一对应关系，且为满射，且群 G 中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应于 G' 中相应两个元素的乘积，即：

$g_{im}\longrightarrow g'_i$

若 $g_{im}\longrightarrow g'_i, g_{jn}\longrightarrow g'_j$，则 $g_{im}g_{jn}\longrightarrow g'_ig'_j$

则称 G 与 G' 同态，记为：

$$G\simeq G'$$

- 若 $G\simeq G'$，则 $e\mapsto e', g^{-1}\mapsto g'^{-1}$

证明恒元对应关系：

设 $g_{im}\mapsto g'_i, e\mapsto f'$

一方面，由 $G\simeq G'$ 有 $g_{im}e\mapsto g'_if'$

另一方面，$g_{im}e=g_{im}\mapsto g'_i$

于是：$g'_if'=g'_i\Longrightarrow f'=e$

证明逆元对应关系：

设 $G\simeq G', e\mapsto e', g\mapsto g', g^{-1}\mapsto h'$

一方面，$gg^{-1}\mapsto g'h'$

另一方面，$gg^{-1}=e\mapsto e'$

$$g'h'=e'\Longrightarrow h'=g'^{-1}$$

同态核

设 $G\simeq G'$，则 G 中所有与 e' 对应的元素的集合称为同态关系的同态核，记为：

$$I=\{i_l\}$$

同态核定理

若 $G\simeq G'$，I 为同态核，则 I 为 G 的不变子群。

证明：

先证 I 为子群：

封闭性：$\forall i_l, i_k\in I, i_li_k\mapsto e'e'=e'$，于是 $i_li_k\in I$

逆元在 I 中：$\forall i_l\in I, i_l^{-1}\mapsto e'^{-1}=e'$，于是 $i_l^{-1}\in I$

再证 I 为不变子群：

$i_l\mapsto e'$，设 $g_{im}\in G\mapsto g'_i\in G'$，则 $g_{im}^{-1}\mapsto g_i'^{-1}$

$$g_{im}i_lg_{im}^{-1}\mapsto g'_ie'g_i'^{-1}=e'$$

于是 $g_{im}i_lg_{im}^{-1}\in I$，因此 I 是 G 的不变子群。

定理1

若 H 为群 G 的不变子群，则 $G\simeq G/H$，其中 $G/H=\{s_0H=H, s_1H, s_2H, \cdots, s_{k-1}H\}=\{s_iH\}$

证明：

建立对应关系为：若 $g_{im}=s_ih_m\in s_iH$，则 $g_{im}\mapsto s_iH$

设 $g_{im} \in s_iH, g_{jm} \in s_jH$，则对应关系为：

$$g_{im} \mapsto s_iH, g_{jm} \mapsto s_jH$$

由于：

$$g_{im}g_{jn} \in (s_iH)(s_jH)$$

于是：

$$g_{im}g_{jn} \mapsto (s_iH)(s_jH)$$

定理2

若 $G \simeq G'$，则 $G/I \cong G'$，I 为同态核。