4.1 李群的定义和线性表示

李群的定义

李群 G 是一种特殊的连续群，群元 $g \in G$ 可以用 r 个独立实参数 $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ 来标记：

$$g(\alpha) \equiv g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$

参数 α 可在有限或无限范围内连续变化。α 的所有取值构成一个参数空间，称为群参数空间。

若 $g(\alpha)$ 满足以下 5 个条件，则称群 $G = \{g(\alpha)\}$ 为 r 阶李群：

（1）封闭性：对于任意给定的参数 α 和 β，总可以在群参数空间中找到 γ，使得：

$$g(\gamma) = g(\alpha)g(\beta)$$

参数 γ 为实参数 α, β 的实函数：

$$\gamma = f(\alpha, \beta)$$

即：

$$\gamma_i = f_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \cdots, \beta_r)$$

称为李群的结构函数。

（2）结合律：

$$[g(\alpha)g(\beta)]\, g(\gamma) = g(\alpha)\, [g(\beta)g(\gamma)]$$

也即：

$$f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f(\beta, \gamma))$$

（3）存在恒元 $g(\alpha_0)$：群参数空间中存在参数 α_0，使得对任意群参数 α 都有：

$$g(\alpha) = g(\alpha_0)g(\alpha) = g(\alpha)g(\alpha_0)$$

也即：

$$\alpha = f(\alpha_0, \alpha) = f(\alpha, \alpha_0)$$

（4）存在逆元：对任意群参数 α，存在群参数 $\bar{\alpha}$，使得：

$$g(\alpha)g(\bar{\alpha}) = g(\bar{\alpha})g(\alpha) = g(\alpha_0)$$

也即：

$$\alpha_0 = f(\alpha, \bar{\alpha}) = f(\bar{\alpha}, \alpha)$$

（5）结构函数 $\gamma = f(\alpha, \beta)$ 是解析函数。

- 通常选择 $\alpha_0 = 0$，即 $(\alpha_{01}, \alpha_{02}, \cdots, \alpha_{0r}) = (0, 0, \cdots, 0)$ 作为恒元对应的群参数的取值。
- 若 α 的取值范围有界，则称李群 G 为紧致李群。
- 上面的描述中，所有的希腊字母均代表一组参数。
- 当 α, β 是小量时，$f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$
- 当 α 是小量时，$\bar{\alpha} = -\alpha$，其中 $g(\bar{\alpha}) = g^{-1}(\alpha)$
- 连通性：一个李群如果具有如下性质，则称为单连通的：任意群元都能连续地变到恒元。/任意群元所对应地群参数都能连续地经过群参数允许区域变到零。

n 维空间中带 r 个实参数的线性坐标变换

$$x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r), \ \ i = 1, 2, \cdots, n$$

简写为：

$$x_i' = \varphi_i(x; \alpha)$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = g(\alpha) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

满足前面 5 个条件的 $g(\alpha)$ 构成 r 阶李群 $G = \{g(\alpha)\}$

李群的线性表示

李群的线性表示是一种将群元映射到表示矩阵的同态关系：

$$G = \{g(\alpha)\} \to D(G) = \{D(g_\alpha) \equiv D(\alpha)\}$$

其中 $D(\alpha)$ 称为 α 的函数矩阵，满足李群的法则：

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\gamma), \ \ \gamma = f(\alpha, \beta)$$

$$D(\alpha_0)D(\alpha) = ED(\alpha) = D(\alpha)$$

$$D(\alpha)D(\bar{\alpha}) = D(\alpha_0) = E, \ D(\bar{\alpha}) = D^{-1}(\alpha)$$

还要求 $D(\alpha)$ 是 2 阶光滑的。

结构函数不依赖于表示。只要两个群同构，它们的结构函数就是一致的。李群的结构函数只有李群的结构决定。

李群的线性表示的生成元

若在恒元附近（群参数 α 在 α_0 附近），α 与恒元附近的群元的矩阵表示存在一一对应关系，则可以将 $D(\alpha)$ 在 α_0 附近展开：

$$D(\alpha) = D(\alpha_0) + \left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha_k - \alpha_{0k}) = E + (\alpha_k - \alpha_{0k}) I_k$$

其中，

$$I_k \equiv \left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

为李群的线性表示的生成元。

若 $\alpha_0 = 0$，则上式化简为：

$$D(\alpha) = E + \left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} \alpha_k \equiv E + \alpha_k I_k$$

引入：

$$\tilde{I}_k \equiv \mathrm{i} I_k$$

则：

$$D(\alpha) = E - \mathrm{i}\alpha_k \tilde{I}_k$$

生成元的线性无关性

r 阶李群的生成元是线性无关的。

证明：

假设 r 个 I_k 是线性相关的，则存在一组不全为零的系数 $\{C_k\}$ 使得：

$$C_k I_k = 0$$

引入一个小量 $\lambda \ll 1$，有:

$$\lambda C_k I_k = 0$$

记 $\alpha_k = \lambda C_k \ll 1$，即 $\alpha = \lambda C \neq 0$

$$D(\alpha) = D(\lambda C) = E + \lambda C_k I_k = E = D(0)$$

于是 $\alpha = 0$，即 $\lambda C = 0$，于是

$$C_k = 0$$

这与假设 C_k 不全为零矛盾。

几个例子

$\mathrm{SO}(2)$ 群

$\mathrm{SO}(2)$ 群只有一个独立的群参数，因此是**一阶**李群。

表示矩阵为:

$$D(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}, \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

群参数 ω 有界，因此 $\mathrm{SO}(2)$ 是**紧致**的。

当 $\omega = 0$，$D(0) = E$，因此 $\omega_0 = 0$ 是恒元对应的群参数的取值。

生成元的定义:

$$I \equiv \left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=0} = \left.\begin{bmatrix} -\sin\omega & -\cos\omega \\ \cos\omega & -\sin\omega \end{bmatrix}\right|_{\omega=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\omega \ll 1$，

$$D(\omega) = E + \omega I = \begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ 群：2 维空间实线性变换群

表示矩阵为:

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix},\ \det D(\alpha)\neq 0$$

确定恒元对应的群参数 α_0 的取值：

$$\alpha_0=(\alpha_{01},\alpha_{02},\alpha_{03},\alpha_{04})=(1,0,0,1)$$

生成元：

$$I_k\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

$$I_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ I_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ I_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

当 α 接近 $\alpha_0=(1,0,0,1)$ 时，

$$D(\alpha)=E+(\alpha_k-\alpha_{0k})I_k=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$：$n$ 维空间实线性变换群

表示矩阵为：

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\ \det D(\alpha)\neq 0$$

共 n^2 个群参数。

恒元对应的群参数的取值为：

$$\alpha_0=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}\text{或}\alpha_{0ij}=\delta_{ij}$$

生成元：

$$I_{ij}\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_{ij}}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

$$[I_{ij}]_{pq}=\delta_{ip}\delta_{jq}$$

生成元 I_{ij} 的 i 行 j 列为 1，其他矩阵元为零。

二维实特殊线性变换群：$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$（3 阶非紧致李群）

表示矩阵为：

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix},\ \det D(\alpha)=1\Longrightarrow \alpha_4=\frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4}$$

恒元对应的群参数：

$$D(\alpha_0)=E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Longrightarrow \alpha_0=(\alpha_{01},\alpha_{02},\alpha_{03})=(1,0,0)$$

生成元：

$$I_1\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$I_2\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_2}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$I_3\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{SO}(3)$ 群（3 阶紧致李群）

$\mathrm{SO}(3)$ 群元可用三个参数 φ,θ,ω 表示：

$$C_{\hat{n}(\theta,\varphi)}(\omega)=S(\varphi,\theta)C_{\vec{k}}(\omega)S^{-1}(\varphi,\theta)$$

对于上式，当 $\omega=0$，任意的 θ,φ 都对应着李群表示矩阵的恒元。也就是说，在恒元 E 附近，参数 $\alpha=(\theta,\varphi,\omega)$ 与群元不是一一对应的。因此，这组参数不能用于求李群线性表示的生成元。

指数表示：

$$D(\omega)=C_{\hat{n}(\theta,\varphi)}(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}$$

$$T_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\ T_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\end{bmatrix},\ T_3=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{cases}\omega_1=\omega\sin\theta\cos\varphi\\ \omega_2=\omega\sin\theta\sin\varphi\\ \omega_3=\omega\cos\theta\end{cases}$$

只有当 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(0,0,0)$ 时，$D(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}\mathrm{T}_\mathrm{i}}=E$。因此可选择群参数 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 对应的指数表示来求生成元。

生成元：

$$I_1\equiv\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_1}\right|_{\omega=\omega_0}=-\mathrm{i}T_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$I_2\equiv\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_2}\right|_{\omega=\omega_0}=-\mathrm{i}T_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$I_3\equiv\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_3}\right|_{\omega=\omega_0}=-\mathrm{i}T_3=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

对易关系：

$$[I_i,I_j]=\varepsilon_{ijk}I_k$$

二维特殊幺正变换群 $\mathrm{SU}(2)$ 群

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ \ D^\dagger D=E,\ \ \det D(\alpha)=1$$

每个矩阵均有实部与虚部，共 8 个实参数。

幺正条件和行列式条件分别给出 2^2 和 1 个约束方程。

$\mathrm{SU}(2)$ 只有 3 个独立实参数，是三阶李群。

$$D^{-1}(\alpha)=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^*&c^*\\b^*&d^*\end{bmatrix}$$

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}a&b\\-b^*&a^*\end{bmatrix}$$

$$|a|^2+|b|^2=1$$

若令

$$a=\cos\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2},\ \ b=\sin\alpha_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3}$$

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2}\cos\alpha_1&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3}\sin\alpha_1\\-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3}\sin\alpha_1&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_2}\cos\alpha_1\end{bmatrix}$$

然而，$\alpha_1=0,\alpha_2=0$ 时 $D(\alpha)=E$，而对 α_3 无任何要求。这样无法求生成元。

$$\begin{aligned}1&=\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1\\&=\cos^2\alpha_1\left(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2\right)+\sin^2\alpha_1\left(\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_2\right)\\&=\left(\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2+\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\right)+\left(\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2+\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\right)\\&=|a|^2+|b|^2\end{aligned}$$

令:

$$\begin{cases}a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3}\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)\\b=\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2\end{cases}$$

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3}\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)&\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2\\-\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3}\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2\right)\end{bmatrix}$$

这样定义下，只有当 $\alpha=(0,0,0)$ 时，$D(\alpha)=E$，因此这样定义的 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可作为群参数。

生成元:

$$I_1=\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_1}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}=\mathrm{i}\sigma_1$$

$$I_2=\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_2}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\mathrm{i}\sigma_2$$

$$I_3=\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_3}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\begin{bmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{bmatrix}=\mathrm{i}\sigma_3$$

对易关系:

$$[I_i,I_j]=-2\varepsilon_{ijk}I_k$$

有限群元的生成

$\mathrm{SO}(2)$ 群

$\mathrm{SO}(2)$ 群只有一个独立的群参数 θ，与恒元对应的参数的取值为 $\theta=0$

当 $\delta\theta\to0$，

$$D(\delta\theta)=E+I\delta\theta$$

$$\delta\theta=\frac{\theta}{N},\quad N\gg1$$

$$D(\theta) = D^N(\delta\theta) \approx (E + I\delta\theta)^N$$

$$D(\theta) = \lim_{N\to\infty}\left(E + \frac{\theta I}{N}\right)^N = \mathrm{e}^{\theta I}$$

当李群有多个独立的群参数时，

$$D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha_i I_i}$$

对于 $\mathrm{SO}(2)$ 群，有限转动 $D(\theta)$ 可由无穷小转动变换生成：

$$D(\theta) = \mathrm{e}^{\theta I} = \exp\left(\theta\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$\mathrm{SO}(3)$ 群

$$D(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathrm{e}^{\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3}$$

$\mathrm{O}(3)$ 群的生成元与 $\mathrm{SO}(3)$，只不过对 $\mathrm{O}(3)$ 群中行列式为 -1 的群元，还需要乘上空间反演矩阵：

$$D(\omega) = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\omega_i I_i}$$

4.2 李群三定理

定理一

李群的线性表示完全由生成元决定。

证明：

设李群的表示矩阵为 $D(\alpha)$，乘法法则：

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\gamma),\ \ \gamma = f(\alpha, \beta)$$

上式两端右乘 $D^{-1}(\beta)$：

$$D(\alpha) = D(\gamma)D^{-1}(\beta)$$

上式两端对 α_i 求导：

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial D(\gamma)}{\partial \gamma_j}\frac{\partial f_j(\alpha, \beta)}{\partial a_i}D^{-1}(\beta)$$

取 $\beta=\bar{\alpha}$，此时 $\gamma=f(\alpha,\bar{\alpha})=\alpha_0, D^{-1}(\beta)=D^{-1}(\bar{\alpha})=D(\alpha)$

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i}=\left.\frac{\partial D(\gamma)}{\partial \gamma_j}\right|_{\gamma=\alpha_0}\left.\frac{\partial f_j(\alpha,\beta)}{\partial a_i}\right|_{\beta=\bar{\alpha}}D(\alpha)$$

令:

$$S_{ji}(\alpha)=\left.\frac{\partial f_j(\alpha,\beta)}{\partial \alpha_i}\right|_{\beta=\bar{\alpha}}$$

则:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i}=I_jS_{ji}(\alpha)D(\alpha)\\ D(\alpha_0)=E\end{cases}$$

因此 $D(\alpha)$ 完全由生成元 I_j 决定。

若令 $\alpha=\alpha_0$，可得:

$$I_i=I_jS_{ji}(\alpha_0)E=I_jS_{ji}(\alpha_0)$$

另一方面，

$$I_i=I_j\delta_{ji}$$

对比可得:

$$S_{ji}(\alpha_0)=\delta_{ji}$$

定理二

李群的线性表示的生成元满足如下关系:

$$[I_j,I_k]=C^i_{jk}I_i$$

其中，C^i_{jk} 为结构常数:

$$C^i_{jk}\equiv\left.\left(\frac{\partial S_{ik}(\alpha)}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial S_{ij}(\alpha)}{\partial \alpha_k}\right)\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

一种证明方法

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i}=I_jS_{ji}(\alpha)D(\alpha)$$

上式两端对 α_k 求导，再令 $\alpha=\alpha_0$：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial\alpha_k\partial\alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0} &= I_j\left.\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0} D(\alpha_0)+I_jS_{ji}(\alpha_0)\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}\\
&= I_j\left.\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}+I_j\delta_{ji}I_k\\
&= I_j\left.\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}+I_iI_k
\end{aligned}$$

交换 i,k，得：

$$\left.\frac{\partial^2 D(\alpha)}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right|_{\alpha=\alpha_0}=I_j\left.\frac{\partial S_{jk}}{\partial\alpha_i}\right|_{\alpha=\alpha_0}+I_kI_i$$

相减可得：

$$I_iI_k-I_kI_i=\left.\left(\frac{\partial S_{jk}(\alpha)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial S_{ji}(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right)\right|_{\alpha=\alpha_0}I_j$$

令：

$$C_{ik}^j=\left.\left(\frac{\partial S_{jk}(\alpha)}{\partial\alpha_i}-\frac{\partial S_{ji}(\alpha)}{\partial\alpha_k}\right)\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

则得到：

$$[I_i,I_k]=C_{ik}^jI_j$$

从上式可看出：

$$C_{ik}^j=-C_{ki}^j$$

定理3

李群的结构常数满足如下关系：

$$C_{ij}^mC_{km}^n+C_{jk}^mC_{im}^n+C_{ki}^mC_{jm}^n=0$$

也记为：

$$C_{\{ij}^mC_{k\}}^n=0$$