

## ▼ 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

### ▼ 向量分析基本知识

- 爱因斯坦求和约定
- Kronecher delta 符号  $\delta_{ij}$
- 三阶单位全反对称张量（三阶 Levi-Citita 符号） $\varepsilon_{ijk}$
- 一些简单算例

### ▼ 梯度、散度、旋度

- 梯度 (gradient) 的定义
- 散度 (divergence) 的定义
- 旋度 (curl) 的定义
- 直角坐标系下的梯度、散度、旋度
- $\nabla$  算子

### ▼ 梯度与方向导数的关系

- 方向导数
- 梯度和方向导数的关系
- 散度与高斯定理
- 旋度与斯托克斯定理

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

- 分析工具

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

- 与  $\vec{r}$  有关的公式
- 从左往右证的公式
- 需要注意力的公式
- 从右往左证的公式

### ▼ $\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

- 高斯定理
- 斯托克斯定理
- 格林第一恒等式
- 格林第二恒等式

## ▼ 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

### ▼ $\nabla$ 算子

- 直角坐标下的  $\nabla$
- 球坐标下的  $\nabla$
- 柱坐标下的  $\nabla$

### ▼ $\nabla^2$ 算子

- 直角坐标下的  $\nabla^2$
- 球坐标下的  $\nabla^2$
- 柱坐标下的  $\nabla^2$

## ▪ 第3章 线性空间

## ▼ 第4章 复变函数的概念

- 欧拉公式

## ▼ 复变函数

### ▼ 常见复变函数

- 有理函数
- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数
- 双曲函数

## ▼ 第5章 解析函数

### ▼ 复变函数的导数

- 复变函数的连续性
- 复变函数的导数
- 柯西-黎曼条件
- 命题的证明

### ▼ 复变函数的解析性

- 复变函数的解析性

#### ▼ 相关定理

- 定理1
- 定理2
- 定理3
- 定理4

### ▼ 例题

#### ▼ 例1

- 方法1（积分法）
- 例2
- 例3

## ▼ 第6章 复变函数积分

### ▼ 复变函数积分

- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的性质

### ▼ 柯西积分定理

- 单连通区域柯西积分定理
- 多连通区域的柯西积分定理
- 柯西积分公式
- 解析函数高阶导数的积分表达式

## ▼ 第7章 复变函数的级数展开

### ▪ 解析函数的泰勒展开

### ▼ 解析函数的洛朗展开

- 复变函数的零点
- 复变函数的奇点

#### ▼ 奇点的分类

- 孤立奇点

- 非孤立奇点
- 孤立奇点的分类
- 解析函数的洛朗展开定理
- ▼ 例题
  - 例1
  - 例2

## ▼ 第8章 留数定理及其在实积分中的应用

- ▼ 留数定理
  - 留数的定义
  - ▼ 留数的求法
    - 定义法
    - 极限法
    - 特殊情况
  - ▼ 留数定理
    - 例1
- ▼ 留数定理在实积分中的应用
  - 计算无穷限奇异积分的柯西主值
  - 利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题
  - ▼ 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分
    - 例1
    - 例2

## ▼ 第9章 傅里叶变换

- ▼ 傅里叶级数
  - 三角函数基的傅里叶级数
  - e 指数基的傅里叶级数
  - 傅里叶变换(to be continued)

## ▼ 第10章 拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换的定义
- ▼ 拉普拉斯变换的性质（两种记号）
  - 线性定理
  - 延迟定理
  - 位移定理
  - 标度变换定理
  - 卷积定理
  - 微分定理
  - 积分性质
  - 周期函数变换定理
- 常用拉普拉斯变换及反演
- ▼ 拉普拉斯变换的应用
  - ▼ 解常微分方程
    - 例1

## ▼ 第11章 $\delta$ 函数

- $\delta$  函数的定义
- $\delta$  函数的性质
- ▼ 三维  $\delta$  函数
  - 三维直角坐标系
  - 三维球坐标系
  - 三维柱坐标系
- 不同形式的  $\delta$  函数
- ▼  $\delta$  函数的傅里叶展式和傅里叶变换
  - 一维
  - 三维
- ▼ 例题
  - 例1
- 第12章 小波变换初步
- 第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题
- 第14章 分离变量法
- 第15章 曲线坐标系下的分离变量
- 第16章 球函数
- 第17章 柱函数
- 第18章 格林函数法
- 第19章 其他方程求解
- 第20章 非线性数学物理方程初步
- 第21章 泛函的变分
- 第22章 变分原理

# 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

## 向量分析基本知识

### 爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标  $i$  就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标  $i$  为“哑标”。

比如， $\mathbb{R}^3$  空间中的向量  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3 \equiv \sum_i A_i \vec{e}_i$$

其中， $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  分别是  $x, y, z$  轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  简写为：

$$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \rightarrow \vec{A} = A_i \vec{e}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

## Kronecher delta 符号 $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

## 三阶单位全反对称张量（三阶 Levi-Citita 符号） $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到123} \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到123} \\ 0 & , ijk \text{中有相同指标} \end{cases}$$

可以利用  $\varepsilon_{ijk}$  表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

## 一些简单算例

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$A_i \delta_{ij} = A_j$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{e}_i) \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k$$

## 梯度、散度、旋度

### 梯度 (gradient) 的定义

设  $\psi(\vec{r})$  是标量场,  $\psi(\vec{r})$  其梯度, 记为  $\text{grad } \psi(\vec{r})$ , 由下式定义:

$$\text{grad } \psi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = d\psi(\vec{r})$$

其中,  $d\vec{r}$  是位矢  $\vec{r}$  的微小变化,  $d\psi(\vec{r})$  是标量场  $\psi(\vec{r})$  因位矢  $\vec{r}$  变化  $d\vec{r}$  而引起的相应的变化。具体来说,  $d\psi(\vec{r})$  的定义为:

$$d\psi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r} + d\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$

## 散度 (divergence) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的散度, 记为  $\text{div } \vec{A}$ , 定义为:

$$\text{div } \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

## 旋度 (curl) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的旋度, 记为  $\text{curl } \vec{A}$ , 由下式定义:

$$(\text{curl } \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

其中,  $\sigma$  是与  $\vec{n}$  垂直的面元。  $\vec{n}$  与面元  $\sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

## 直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_i \partial_i \psi$$

$$\text{div } \vec{A} = \partial_i A_i$$

$$\text{curl } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k$$

## $\nabla$ 算子

$\nabla$  算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为:

$$\nabla \equiv \vec{e}_i \partial_i$$

其中,  $\partial_i$  的定义为:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用  $\nabla$  算子, 可将梯度、散度、旋度表示为:

$$\text{grad } \psi = \vec{e}_i \partial_i \psi \equiv \nabla \psi$$

$$\text{div } \vec{A} = \partial_i A_i \equiv \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\text{curl } \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \equiv \nabla \times \vec{A}$$

为了书写方便，以后用  $\nabla\psi, \nabla \cdot \vec{A}, \nabla \times \vec{A}$  分别来指代梯度、散度、旋度。

## 梯度与方向导数的关系

### 方向导数

标量场  $\psi$  在  $\vec{r}$  点处沿  $\vec{v}$  方向的方向导数，记为  $\left. \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{v}}$ ，定义为：

$$\left. \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{v}} \equiv \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\psi(\vec{r} + \vec{v}) - \psi(\vec{r})}{v}$$

特别地，标量场  $\psi$  在曲面  $\Sigma$  上的  $\vec{r}$  点处沿曲面上  $\vec{r}$  点的外法向的方向导数简记为：

$$\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial n}$$

### 梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi \cdot d\vec{r} = d\psi$$

设  $d\vec{r} = \vec{n}dr$ ，其中  $\vec{n}$  是与  $d\vec{r}$  同向的单位向量，则有：

$$(\nabla\psi) \cdot \vec{n}dr = d\psi$$

即：

$$(\nabla\psi) \cdot \vec{n} = \frac{d\psi}{dr} = \frac{\psi(\vec{r} + d\vec{r}) - \psi(\vec{r})}{dr} = \left. \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场  $\psi$  的梯度  $\nabla\psi$  在某一方向  $\vec{n}$  的投影恰等于标量场沿这一方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\left. \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}$ 。

## 散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

# 旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

### 分析工具

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{A} = A_i \vec{e}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla \psi = \vec{e}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{e}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

### 与 $\vec{r}$ 有关的公式

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3$$



$$\nabla \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$$

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$$

$$\nabla \times \vec{r} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \delta_{jk} = \vec{0}$$

## 从左往右证的公式

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= \vec{e}_i \partial_i (\varphi\psi) \\ &= \vec{e}_i \varphi \partial_i \psi + \vec{e}_i \psi \partial_i \varphi \\ &= \varphi \vec{e}_i \partial_i \psi + \psi \vec{e}_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i (\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i (\varphi A_i) \\ &= \varphi \partial_i A_i + A_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi \\ &= (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{A}) = (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\varphi \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi \vec{A})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\varphi A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (A_k \partial_j \varphi + \varphi \partial_j A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i (\nabla \varphi)_j A_k + \varphi \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j A_k \\ &= (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i \\ &= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \\ &= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k \\ &= B_k (\nabla \times \vec{A})_k - A_j (\nabla \times \vec{B})_j \\ &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m) \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\
&= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m \\
&= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\
&= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i \partial_j \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_m \partial_l A_m - \vec{e}_m \partial_l \partial_l A_m \\
&= \vec{e}_l \partial_l \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_m \vec{e}_m \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
\end{aligned}$$

## 需要注意力的公式

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \varphi) &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\nabla \varphi)_k \\
&= \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi
\end{aligned}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是  $\partial_j \partial_k \varphi = \partial_k \partial_j \varphi$ ，再结合  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ ，有：

$$\begin{aligned}
\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi &= -\vec{e}_i \varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \varphi \\
&= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi
\end{aligned}$$

最后一步是因为  $j, k$  都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明：

$$\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}$$

于是：

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_i \\
&= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\
&= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k
\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\
&= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k
\end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

这就是说：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

## 从右往左证的公式

$$\begin{aligned}
& \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
& (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m \\
& = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m \\
& = B_m \vec{e}_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m \\
& = B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m \\
& = \nabla(A_m B_m) \\
& = \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

### 高斯定理

$$\oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

## 斯托克斯定理

$$\oint_{\partial \Sigma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

## 格林第一恒等式

$$\oint_{\partial \Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV$$

注意到：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \partial_i (\psi \nabla \phi)_i \\ &= \partial_i (\psi \partial_i \phi) \\ &= (\partial_i \phi) (\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi \\ &= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi \\ &= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

于是由高斯定理，有：

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \Omega^+} \psi \nabla \phi \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV \\ &= \int_{\Omega} [(\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi] dV \\ &= \int_{\Omega} [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV \end{aligned}$$

## 格林第二恒等式

$$\oint_{\partial \Omega^+} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV$$

利用  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$  可得：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) - (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot (\nabla \psi)) \\ &= \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi \end{aligned}$$

于是由高斯定理可得：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot d\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) dV \\ &= \int_{\Omega} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi) dV\end{aligned}$$

## 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

### $\nabla$ 算子

#### 直角坐标下的 $\nabla$

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

#### 球坐标下的 $\nabla$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

#### 柱坐标下的 $\nabla$

$$\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

### $\nabla^2$ 算子

#### 直角坐标下的 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

#### 球坐标下的 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

柱坐标下的  $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \theta \in \mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z) : \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z) = e^z$$

对数函数

$$f(z) = \ln z$$

幂函数

$$f(z) = z^a, \quad a \in \mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

性质:

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$|\cos z|, |\sin z|$  可以大于 1, 这与实三角函数不同。

## 双曲函数

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系:

$$\sinh z = -i \sin(iz)$$

$$\cosh z = \cos(iz)$$

双曲函数的性质:

$$\sinh(z + i2\pi) = \sinh z$$

$$\cosh(z + i2\pi) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

# 第5章 解析函数

## 复变函数的导数

### 复变函数的连续性

复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内有定义。当自变量  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时，都有：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称  $f(z)$  在  $z_0$  点连续。

若  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内的所有点都连续，则称  $f(z)$  在  $\Omega$  内连续。

### 复变函数的导数

当  $z$  以任何路径趋于  $z_0$  时，即  $\Delta z = z - z_0$  以任何方式趋于 0 时，若极限：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称  $f(z)$  在  $z_0$  点可导， $f(z)$  在  $z_0$  点的导数记为  $f'(z_0)$

### 柯西-黎曼条件

设复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，若  $f(z)$  在  $z$  点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是柯西-黎曼条件(C-R条件)。

### 命题的证明

设  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，则：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

由于  $f(z)$  在  $z$  点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与  $\Delta z$  趋于 0 的方式无关。



特别地,

(1) 令:

$$i\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令:

$$\Delta x = 0, i\Delta y \rightarrow 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于  $f(z)$  在  $z_0$  点可导, 则这两个导数值应该相等, 于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是  $f(z)$  在  $z$  点可导的必要条件, 但不是充分条件。也就是说, 可导必定满足 C-R 条件, 但满足 C-R 条件不一定可导。

## 复变函数的解析性

### 复变函数的解析性

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域内每一点都可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  点是**解析的**。

若复变函数  $f(z)$  在  $\Omega$  内每一点都可导, 则  $f(z)$  在  $\Omega$  内是**解析的**, 或称为**全纯的**。

### 相关定理

#### 定理1

复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在区域  $\Omega$  为解析函数  $\iff$  在与复平面  $\Omega$  相应的实平面区域内  $u(x, y), v(x, y)$  可微, 且  $u(x, y), v(x, y)$  满足 C-R 条件。

特别地, 若  $f(z)$  为  $\Omega$  上的连续函数, 则  $f(z)$  是  $\Omega$  上的解析函数  $\iff f(z)$  满足 C-R 条件。

#### 定理2

若  $f(z)$  为区域  $\Omega$  上的解析函数, 且  $f(z)$  为实函数, 即  $f(z) = f^*(z)$ , 则  $f(z)$  为常数。

### 定理3

若  $f(z)$  为区域  $\Omega$  上的解析函数, 则在  $\Omega$  上有  $\frac{\partial f(z, z^*)}{\partial z} = 0$ , 即  $f(z, z^*)$  不依赖于  $z^*$

### 定理4

在复平面区域  $\Omega$  内解析的函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 其实部  $u(x, y)$  和虚部  $v(x, y)$  都是平面区域  $\Omega$  内的调和函数 (即满足二维拉普拉斯方程  $\nabla^2 u(x, y) = 0, \nabla^2 v(x, y) = 0$  的函数)。

## 例题

### 例1

已知解析函数的实部  $u = x^3 - 3xy^2$ , 求该解析函数。

#### 方法1 (积分法)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

$$dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy \quad (1)$$

选择积分路径为:  $\underbrace{(0, 0) \rightarrow (x, 0)}_{C_1}, \underbrace{(x, 0) \rightarrow (x, y)}_{C_2}$ , 两边积分:

$$\begin{aligned} v(x, y) - v(0, 0) &= \int_{C_1} 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy + \int_{C_2} 6xydx + (3x^2 - 3y^2)dy \\ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y} (3x^2 - 3y^2)dy \\ &= 3x^2y - y^3 \end{aligned}$$

令  $v(0, 0) = C$ , 则:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + v(0, 0) = 3x^2y - y^3 + C$$

于是:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C) \end{aligned}$$

## 例2

请证明：柱坐标系下的解析函数  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$  满足的 C-R 方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} &\implies \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d \tan \varphi} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right)
\end{aligned}$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = - \left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \right] \quad (2)$$

(1)  $\times \cos \varphi$  + (2)  $\times \sin \varphi$  得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

(2)  $\times \cos \varphi$  - (1)  $\times \sin \varphi$  得到:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

### 例3

已知解析函数的虚部  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ , 求该解析函数。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

于是：

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \end{aligned}$$

极坐标变换：

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

于是：

$$\begin{aligned} du &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= \frac{\cos \varphi}{\rho^2} d\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} d\varphi \\ &= d\left(\frac{-\cos \varphi}{\rho}\right) \end{aligned}$$

于是：

$$u = \frac{-\cos \varphi}{\rho} + C = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C$$

综上，

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} + C\right) + i\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

# 第6章 复变函数积分

## 复变函数积分

### 复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数  $f(z)$  在其有定义的区域  $\Omega$  中, 沿某一曲线  $C$  的**有向的线积分**, 记为  $\int_C f(z)dz$ , 其定义为:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

把  $C$  分成  $n$  段,  $\xi_j$  是  $C$  上  $z_{j-1}$  点到  $z_j$  点的中的某一点。

### 复变函数积分的性质

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

## 柯西积分定理

### 单连通区域柯西积分定理

设  $f(z)$  在单连通区域  $\Omega$  上解析, 当积分路径为  $\Omega$  内的任一闭合曲线  $C$  时, 有:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = 0$$

### 多连通区域的柯西积分定理

设  $f(z)$  在具有  $k$  个内边界  $C_1, C_2, \dots, C_k$  的回路  $C$  内的复连通区域内解析, 规定  $C; C_1, C_2, \dots, C_k$  的正方向为逆时针, 则:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = \oint_{C_1^+} f(z)dz + \oint_{C_2^+} f(z)dz + \dots + \oint_{C_k^+} f(z)dz$$

## 柯西积分公式

若  $f(z)$  在闭合回路  $C$  所包围的区域上解析,  $z_0$  是此区域中的一点, 则:

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

## 解析函数高阶导数的积分表达式

设  $f(z)$  在区域  $\Omega$  内解析,  $C$  为  $\Omega$  内的任一闭合回路, 对于  $C$  所包围的区域内的任一点  $z$ , 有:

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

# 第7章 复变函数的级数展开

## 解析函数的泰勒展开

设  $z_0$  为函数  $f(z)$  解析区域  $\Omega$  内的一点, 以  $z_0$  为圆心的圆周  $C$  在  $\Omega$  内, 则  $f(z)$  可以在  $C$  内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中, 展开系数为:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

## 解析函数的洛朗展开

## 复变函数的零点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点的函数值  $f(z_0) = 0$ , 则称  $z_0$  为复变函数  $f(z)$  的零点。

## 复变函数的奇点

若复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  点**不解析**, 即  $f(z)$  在  $z_0$  点的导数不存在或不唯一, 则称  $z_0$  为复变函数  $f(z)$  的奇点。

## 奇点的分类

### 孤立奇点

若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点, 而在  $z_0$  点任意小的邻域内, 函数  $f(z)$  解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点。

## 非孤立奇点

若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的奇点，而在  $z_0$  点任意小的邻域内，除  $z_0$  点外存在  $f(z)$  的其他奇点，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的非孤立奇点。

## 孤立奇点的分类

**极点：** 设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点，若存在一个正整数  $k$ ，使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的  $k$  阶极点。

**本性奇点：** 设  $z_0$  是  $f(z)$  的孤立奇点，若**不存在**一个正整数  $k$ ，使得  $(z - z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的本性奇点。

**可去奇点：** 设  $z_0$  为函数  $f(z)$  的孤立奇点， $f(z)$  在  $z_0$  点没有定义，但在  $z_0$  的去心邻域内解析，此时可定义  $f(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  使  $f(z)$  在  $z_0$  点解析，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的可去奇点。

## 解析函数的洛朗展开定理

若函数  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心，半径为  $R_1, R_2$  的两个圆周  $C_1, C_2$  所包围的环形区域  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  上解析，则在此区域内  $f(z)$  可展成 Laurent 级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$C$  是任一条在环形区域内把  $C_2$  包围在内的闭曲线。

## 例题

### 例1

求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在环形区域  $0 < |z| < 1$  和  $|z| > 1$  内，在  $z_0 = 0$  处的展开式。

$0 < |z| < 1$  区域在  $z_0 = 0$  处展开  $f(z)$ ：

由于  $|z| < 1$ ，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：



$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
 &= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\
 &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
 &= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n
 \end{aligned}$$

$|z| > 1$  区域在  $z_0 = 0$  处展开  $f(z)$ :

注意到  $|z| > 1$ , 则  $|1/z| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
 &= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
 &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
 &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
 \end{aligned}$$

## 例2

求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在  $z_1 = 0$  和  $z_2 = 1$  附近的展开式。

$f(z)$  在  $z_1 = 0$  附近的展开式:

由于  $0 < |z-0| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
 &= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
 &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
 \end{aligned}$$

$f(z)$  在  $z_2 = 1$  附近的展开式:

由于  $0 < |z-1| < 1$ , 于是:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
 &= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
 &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
 &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
 &= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
 &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
 \end{aligned}$$

## 第8章 留数定理及其在实积分中的应用

### 留数定理

#### 留数的定义

设  $z_0$  是函数  $f(z)$  的孤立奇点, 设  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$f(z)$  在  $z_0$  点的留数, 记为  $\text{Res}f(z_0)$ , 定义为:

$$\operatorname{Res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中,  $a_{-1}$  是  $f(z)$  在  $z_0$  点的洛朗展开式中  $(z - z_0)^{-1}$  项的系数

## 留数的求法

### 定义法

直接把  $f(z)$  在其孤立奇点  $z_0$  点作洛朗展开, 找到  $(z - z_0)^{-1}$  前的系数  $a_{-1}$ , 由留数的定义可知:

$$\operatorname{Res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

### 极限法

当  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点时,  $f(z)$  可在其孤立奇点  $z_0$  点作如下的洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

则:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

### 特殊情况

若  $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ ,  $z_0$  为  $g(z)$  的一阶极点, 即  $g(z_0) = 0$ , 且  $h(z)$  和  $g(z)$  在  $z_0$  点及其邻域内解析, 则:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

## 留数定理

若  $f(z)$  在回路  $C$  所包围的区域内除有限个孤立奇点  $z_1, z_2, \dots, z_k$  外解析, 则  $f(z)$  沿  $C^+$  的回路积分值等于  $f(z)$  在  $z_1, z_2, \dots, z_k$  的留数之和乘  $2\pi i$ , 即:

$$\oint_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res} f(z_j)$$

### 例1

计算回路积分  $I = \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$ , 其中回路  $l$  的方程为  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

$$\text{令 } f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2}$$

在回路  $l: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$  内的孤立奇点有:  $z_1 = i, z_2 = 1$ ,  $z_1$  为一阶极点,  $z_2$  为二阶极点。

计算  $f(z)$  在回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^0}{dz^0} (z-i) \cdot \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{2i(i-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^1}{dz^1} (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^2+1} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}I &= \oint_l \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} \\ &= 2\pi i [\operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)] \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{2}\end{aligned}$$

## 留数定理在实积分中的应用

### 计算无穷限奇异积分的柯西主值

### 利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

### 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

其中,  $f(\cos \theta, \sin \theta)$  为不包含有孤立奇点  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$  的有理函数。

计算此类积分, 利用欧拉公式换元, 将实积分转换为复平面单位圆上的复积分, 最后利用留数定理计算积分。

令  $z = e^{i\theta}$ , 有:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

于是:

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

于是:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= \oint_{C^+} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz \end{aligned}$$

其中,  $C$  是以复平面原点为圆心的单位圆周, 即  $C: |z| = 1$

## 例1

计算定积分  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ , 其中  $0 < \varepsilon < 1$

令:

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

于是:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \\ &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \end{aligned}$$

其中,  $C$  是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令  $f(z) = \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$ ，被积函数的两个一阶极点为：

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数  $f(z)$  可写为：

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}$$

只有  $z_1$  在积分回路内。

计算  $f(z)$  在回路内孤立奇点  $z_1$  处的留数：

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\varepsilon(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

由留数定理，有：

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{\pi i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

于是积分为：

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz \\ &= \frac{2}{i} \cdot \frac{\pi i}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

## 例2

计算定积分：  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

设  $C$  是复平面上的单位圆,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos \theta + \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \end{aligned}$$

令  $f(z) = \frac{1}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ ,  $f(z)$  有两个一阶极点  $z_1 = 2 - i, z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ , 只有  $z_2$  在单位圆  $C$  内。

由于  $z_1, z_2$  是  $(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i = 0$  的两根, 于是  $f(z)$  可表达为:

$$f(z) = \frac{1}{(1 - 2i)(z - z_1)(z - z_2)}$$

$f(z)$  在  $z_2$  处的留数:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_2) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{(1 - 2i)(z - z_1)} \\ &= \frac{1}{(1 - 2i)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

于是由留数定理, 有:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} I &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

# 第9章 傅里叶变换

## 傅里叶级数

设  $\mathcal{H}$  是一个希尔伯特空间，其元素是周期为  $2l$  的函数， $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ ， $\mathcal{H}$  上两个元素的内积，记为  $\langle f_1, f_2 \rangle$ ，定义为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

其中， $x$  是参数，而内积与参数无关。有时为了指明参数，也将内积写为：

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) dx$$

若  $f(x)$  是实函数，则内积可简化为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x) f_2(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}$$

## 三角函数基的傅里叶级数

容易验证如下结论：

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx' = 1 \\ \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x' \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x' dx' = \delta_{n,m}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x' \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x' dx' = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x'=-l}^{x'=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x' \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x' dx' = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x; \quad n, m = 1, 2, \dots \right\}$  是一个完备的正交归一函数族，它们可作为基张成  $\mathcal{H}$ 。

这个函数系具体写出来是：



$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi}{l} x, \dots \right\}$$

任意一个周期为  $2l$  的, 满足狄利克雷条件的函数  $f(x)$  可写成这些基函数的线性组合, 即  $f(x)$  可展成傅里叶级数:

$$f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

为求出线性组合的系数, 只需要利用“这组基是正交归一完备的”这一性质:

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x) \right\rangle = \int_{-l}^l \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$$

$$b_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

## e 指数基的傅里叶级数

注意到:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \delta_{m,n}$$

函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, m \in \mathbb{Z} \right\}$  可作为以  $2\pi$  为周期的函数为元素的希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  中的一组正交完备归一基, 以  $2\pi$  为周期的函数  $f$  在这组基上的展开式为:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$$

利用正交归一条件:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right)^* \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(m-n)x} dx \\ &= \delta_{m,n} \end{aligned}$$

内积可得系数:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n} \\
&= C_n
\end{aligned}$$

即系数  $C_m$  可通过内积求得：

$$C_m = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}, f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right)^* \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

## 傅里叶变换(to be continued)

# 第10章 拉普拉斯变换

## 拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数  $t \in [0, +\infty)$  上的实函数或复函数  $f(t)$ , 定义  $f(t)$  的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) \equiv F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

其中,  $p = s + i\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$

,  $e^{-pt}$  称为拉普拉斯变换核,  $F(p)$  称为像函数, 也记为：

$$F(p) \doteq f(t), f(t) \doteq F(p)$$

## 拉普拉斯变换的性质（两种记号）

### 线性定理

若  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , 则：

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}(p) = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设  $f_1(t) \doteq F_1(p), f_2(t) \doteq F_2(p)$ , 则：

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \doteq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

## 延迟定理

设  $\tau > 0$ , 则:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p) = e^{-\tau p}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设  $f(t) \doteq F(p), \tau > 0$ , 则:

$$f(t-\tau)H(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)$$

其中, 定义了阶跃函数  $H$ :

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

## 位移定理

设  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\lambda)$$

设  $f(t) \doteq F(p), \lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$e^{-\lambda t}f(t) \doteq F(p+\lambda)$$

## 标度变换定理

设  $a > 0$ , 则:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{a}\right)$$

设  $f(t) \doteq F(p)$ , 则:

$$f(at) \doteq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$$

## 卷积定理

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中，卷积的定义为：

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau) f_2(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

设  $f_1(t) \doteq F_1(p)$ ,  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ , 则：

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) F_2(p)$$

**微分定理**

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 \cdot f^{(n-1)}(0)$$

设  $f(t) \doteq F(p)$ , 则：

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 f^{(n-1)}(0)$$

特别地：

$$f^{(1)}(t) \doteq p^1 F(p) - p^0 f^{(0)}(0)$$

$$f^{(2)}(t) \doteq p^2 F(p) - p^1 f^{(0)}(0) - p^0 f^{(1)}(0)$$

**积分性质**

$$\underbrace{\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t f(t)\right\}}_{n\text{重积分}}(p) = \frac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t f(t)}_{n\text{重积分}} \doteq \frac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

**周期函数变换定理**

若  $f(t) = f(t + T)$ , 则：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \frac{\int_0^T f(\tau) \mathrm{e}^{-p\tau} \mathrm{d}\tau}{1 - \mathrm{e}^{-pT}}$$

若  $f(t) = f(t + T)$ , 则:

$$f(t) \doteq \frac{\int_0^T f(\tau) e^{-p\tau} d\tau}{1 - e^{-pT}}$$

## 常用拉普拉斯变换及反演

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(p) = \frac{1}{p - a}, \quad \operatorname{Re} p > a$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n + 1)}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(p) = \frac{\Gamma(n + 1)}{(p - a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(p) = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p) = \frac{a}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p) = \frac{p}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\}(p) = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\}(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &\doteq 1, \quad \frac{1}{p^2} \doteq t, \quad \frac{n!}{p^{n+1}} \doteq t^n \\ \frac{1}{p - \alpha} &\doteq e^{\alpha t}, \quad \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}} \doteq t^n e^{\alpha t} \\ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} &\doteq \sin \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \doteq \cos \alpha t \\ \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} &\doteq \sinh \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \doteq \cosh \alpha t \end{aligned}$$

# 拉普拉斯变换的应用

## 解常微分方程

### 例1

用拉普拉斯变换解下列  $RL$  串联电路方程, 其中  $L, R, E$  为常数:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设  $i(t) \rightleftharpoons F(p)$

微分定理给出:

$$\frac{di(t)}{dt} \rightleftharpoons p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \text{Re } p > 0, \quad \text{or } 1 \rightleftharpoons \frac{1}{p}$$

对方程  $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$  两边同时作拉普拉斯变换, 得:

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出  $F(p)$ :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L} \right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演:

$$\frac{1}{p - \alpha} \rightleftharpoons e^{\alpha t}$$

于是:

$$\frac{1}{p} \rightleftharpoons 1, \quad \frac{1}{p + R/L} \rightleftharpoons e^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程  $F(p) = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L} \right)$  两边同时作拉普拉斯逆变换, 得:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

# 第11章 $\delta$ 函数

## $\delta$ 函数的定义

$\delta$  函数是一个定义在  $\mathbb{R}$  上的广义函数，其满足：

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ +\infty & , x = x_0 \end{cases}, \text{ 且 } \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & , x_0 \in (a, b) \\ 0 & , x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$

## $\delta$ 函数的性质

(1) 设  $f(x)$  为连续函数，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

(2)  $\delta(x)$  是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

(3) :

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0)$$

(4) :

$$x \delta(x) = 0$$

(5) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_2) \delta(x - x_1) dx = \delta(x_1 - x_2)$$

(6) : 设  $\{x_i\}$  为  $\varphi(x)$  的单根，即  $\varphi(x_i) = 0$  且  $\varphi'(x_i) \neq 0$ ，则：

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

简单例子：

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]$$

## 三维 $\delta$ 函数

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & , \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ +\infty & , \vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}, \text{ 且 } \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3\vec{r} = 1, \vec{r}_0 \in V$$

## 三维直角坐标系

$$d^3\vec{r} = dx dy dz$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

## 三维球坐标系

$$d^3\vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$$

## 三维柱坐标系

$$d^3\vec{r} = \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$$

## 不同形式的 $\delta$ 函数

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$$

## $\delta$ 函数的傅里叶展式和傅里叶变换

### 一维

设  $\delta(x - x_0)$  可展为：



$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) e^{ikx} dk$$

其中，系数  $C(k)$  就是  $\delta(x - x_0)$  的傅里叶变换  $\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\}(k)$ ，即：

$$\begin{aligned} C(k) &= \mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\}(k) \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx \\ &= e^{-ikx_0} \end{aligned}$$

代回  $\delta(x - x_0)$  的傅里叶展式，可得：

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-ikx_0} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk \end{aligned}$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{i(x-x_0)k} dk$$

### 三维

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty} e^{i(x-x_0)k_x} dk_x \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty} e^{i(y-y_0)k_y} dk_y \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} e^{i(z-z_0)k_z} dk_z \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty} \int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} e^{i(x-x_0)k_x} e^{i(y-y_0)k_y} e^{i(z-z_0)k_z} dk_x dk_y dk_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} e^{i(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot \vec{k}} d^3 \vec{k} \end{aligned}$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} e^{i(\vec{r}-\vec{r}_0) \cdot \vec{k}} d^3 \vec{k}$$

# 例题

## 例1

证明:  $\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}$

当  $\vec{r} \neq \vec{0}$ , 有:

$$\begin{aligned}\nabla \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \nabla^2 \frac{1}{r} &= \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \\ &= \nabla \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= - \left( \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \right) \\ &= - \left( \vec{r} \cdot \left( -3r^{-4} \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{1}{r^3} \cdot 3 \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\nabla^2 \frac{1}{r}$  在  $\vec{r} = \vec{0}$  处无定义, 但可人为定义其在  $\vec{0}$  处的函数值为  $+\infty$

取以坐标原点为球心, 半径为  $R$  的一个球体  $V$ ,

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r} \in V} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3 \vec{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{r} \in V} \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right) d^3 \vec{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{S} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V^+} -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \oint_{\partial V^+} dS \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

## **第12章 小波变换初步**

## **第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题**

## **第14章 分离变量法**

## **第15章 曲线坐标系下的分离变量**

## **第16章 球函数**

## **第17章 柱函数**

## **第18章 格林函数法**

## **第19章 其他方程求解**

## **第20章 非线性数学物理方程初步**

## **第21章 泛函的变分**

## **第22章 变分原理**