2.3 有限群表示理论的基本定理

定理1

有限群的线性表示等价于幺正表示。

设 $D(G)$ 是有限群 G 的一个线性表示，我们需要找出一个相似变换 X ，使得 $\forall g \in G$ 均有：

$$\bar{D}(g) \equiv X^{-1} D(g) X，\bar{D}^{\dagger}(g) \bar{D}(g) = E$$

把前式代入前后式得：

$$D^{\dagger}(g)\left(X X^{\dagger}\right)^{-1} D(g)=\left(X X^{\dagger}\right)^{-1}$$

定义如下的矩阵 H：

$$H \equiv \sum_{f \in G} D^{\dagger}(f) D(f)$$

显然 H 是一个厄米矩阵：

$$H^{\dagger}=H$$

由重排定理可知：

$$\begin{aligned}
D^{\dagger}(g) H D(g) & =D^{\dagger}(g)\left(\sum_{f \in G} D^{\dagger}(f) D(f)\right) D(g) \\
& =\sum_{f \in G}[D(f) D(g)]^{\dagger}[D(f) D(g)] \\
& =\sum_{f \in G} D^{\dagger}(f g) D(f g) \\
& =\sum_{f \in G} D^{\dagger}(f) D(f) \\
& \equiv H
\end{aligned}$$

因此只要找到 X 满足：

$$\left(XX^{\dagger}\right)^{-1}=H$$

若相似变换 X满足上式，则以 X 对线性表示 $D(g)$ 作相似变换得到的矩阵 $X^{-1}D(g)X$ 是幺正矩阵。

由于 H 是正定的厄米矩阵，因此可通过幺正的相似变换矩阵 U 把 H 对角化，对角元是正实数：

$$\Gamma\equiv U^{-1}HU=\operatorname{diag}\left(\Gamma_{11},\Gamma_{22},\cdots,\Gamma_{mm}\right)$$

定义：

$$\Gamma'\equiv\left[\operatorname{diag}\left(1/\sqrt{\Gamma_{11}},1/\sqrt{\Gamma_{22}},\cdots,1/\sqrt{\Gamma_{mm}}\right)\right]$$

可以证明，$X=U\Gamma'U^{-1}$ 满足 $\left(XX^{\dagger}\right)^{-1}=H$：

$$\begin{aligned}\left(XX^{\dagger}\right)^{-1}&=\left(X^{\dagger}\right)^{-1}X^{-1}\\&=\left(\left(U^{-1}\right)^{\dagger}\Gamma'^{\dagger}U^{\dagger}\right)^{-1}\left(U\Gamma'^{-1}U^{-1}\right)\\&=\left(\left(U^{\dagger}\right)^{-1}\Gamma'^{-1}U^{\dagger}\right)\left(U\Gamma'^{-1}U^{-1}\right)\\&=U\left(\Gamma'^{-1}\right)^{2}U^{-1}\\&=U\Gamma U^{-1}\\&=H\end{aligned}$$

综上，相似变换 $X=U\Gamma'U^{-1}$ 总可以把一个表示变换为幺正表示。

定理2

若 $D(G)$ 和 $\bar{D}(G)$ 为群 G 的等价和幺正表示，则一定存在一个幺正矩阵 U 使得：

$$\bar{D}(G)=U^{-1}D(G)U$$

定理3（舒尔定理）

舒尔定理一

设 $D(G)$ 为群 G 的不可约表示，且：

$$D(g)X=XD(g),\ \forall g\in G$$

则 M 为常数矩阵，即 $M=cE$

舒尔定理二

设 $D^{(1)}(G)$ 和 $D^{(2)}(G)$ 为群 G 的两个不等价不可约表示，维数分别为 m_1, m_2，设 X 为 $m_1 \times m_2$ 矩阵，若：

$$D_1(G)X = XD_2(G)$$

则：

$$X = \mathbf{0}$$

定理4：正交性定理

设群 G 有 r 个不等价不可约幺正表示 $D^{(u)}(G), u = 1, 2, \cdots, r$，则：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} D_{\gamma\eta}^{(u)*}(g_\alpha) D_{\lambda\rho}^{(v)}(g_\alpha) = \frac{n_G}{n_u} \delta^{uv} \delta_{\gamma\lambda} \delta_{\eta\rho}$$

其中，n_G 为群 G 的阶，n_u 为第 u 个不可约表示 $D^{(u)}(G)$ 的维数。

定理5

有限群的不等价不可约表示的个数等于群的类的个数。

2.4 群的正则表示

群空间

若用有限群 G 的所有群元 $\{g_\alpha\}$ 作为基矢则由基矢

$$v = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$$

所张成的线性空间称为群空间。

群空间内的矢量可以表达为这组基矢的线性叠加：

$$f = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \cdots + x_n g_n = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv vx$$

群的正则表示

以群空间为表示空间的表示称为正则表示。

群空间内任意矢量 f

$$g_\alpha : f \mapsto f'$$

$$\begin{aligned} f' &= g_\alpha f \\ &= g_\alpha(x_1 g_1 + \cdots + x_n g_n) \\ &= x_1 g_\alpha g_1 + \cdots + x_n g_\alpha g_n \\ &= vD(g_\alpha)x \\ &= v'x \\ &= vx' \end{aligned}$$

两种理解：

（1）$v' = vD(g_\alpha)$，保持坐标不变而基矢变换；

（2）$x' = D(g_\alpha)x$，保持基矢不变而基矢变换。

例：求群 $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ 的正则表示，乘法表如下：

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_1	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	g_2	g_1
g_4	g_4	g_3	g_1	g_2

$$f = x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 + x_4 g_4$$

以 g_2 为例，

$$\begin{aligned} f' &= g_2 f \\ &= x_1 g_2 g_1 + x_2 g_2 g_2 + x_3 g_2 g_3 + x_4 g_2 g_4 \\ &= x_1 g_2 + x_2 g_1 + x_3 g_4 + x_4 g_3 = v'x \\ &= x_2 g_1 + x_1 g_2 + x_4 g_3 + x_3 g_4 = vx' \\ &= vD(g_2)x \end{aligned}$$

从坐标变换的观点来看，

$$x' = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = D(g_2)x$$

于是 g_2 的表示矩阵为：

$$D(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

从基矢变换的观点来看，

$$\begin{bmatrix} g_2 & g_1 & g_4 & g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix} D(g_2)$$

同样可得 g_2 的表示矩阵：

$$D(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

同理可得 g_1, g_3, g_4 的表示矩阵：

$$D(g_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(g_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(g_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正则表示的特点

（1）除恒元外，其余群元的表示矩阵的对角元都为零

$$\chi(g_\alpha) = \begin{cases} n_G & , g_\alpha = e \\ 0 & , g_\alpha \neq e \end{cases}$$

（2）正则表示的维数为群 G 的阶数。

（3）$G \cong D(G)$

（4）任何有限群都有正则表示。

2.5 特征标相关理论

特征标

抽象群的线性表示建立了抽象群到矩阵群的一个同态关系。群元的特征标定义为该群元表示矩阵的迹：

$$\chi(g_\alpha) \equiv \mathrm{Tr} D(g_\alpha) = \sum_{i=1}^{n_D} D_{ii}(g_\alpha)$$

对于与 g_α 共轭的元素，他们的特征标为：

$$\begin{aligned}
\chi\left(f^{-1} g_\alpha f\right) &= \mathrm{Tr} D\left(f^{-1} g_\alpha f\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(D(f^{-1}) D\left(g_\alpha\right) D\left(f\right)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(D(f) D(f^{-1}) D(g_\alpha)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(D(f) D^{-1}(f) D(g_\alpha)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(D(g_\alpha)\right)
\end{aligned}$$

这就是说，同类元素在表示 $D(G)$ 中的特征标相同，即特征标是类的函数。

定理1

若两个表示等价，则任意群元在两个表示下的特征标相同。

$$\bar{D}(g_\alpha) = X^{-1} D(g_\alpha) X$$

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}(g_\alpha) &= \mathrm{Tr}\left(\bar{D}(g_\alpha)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(X^{-1} D(g_\alpha) X\right) \\
&= \mathrm{Tr}\{D(g_\alpha)\} \\
&= \chi(g_\alpha)
\end{aligned}$$

定理2：特征标正交关系定理

若群 G 有 r 个不等价不可约表示 $D^{(u)}(G), u = 1, 2, \cdots, r$，则：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi^{(u)}(g_\alpha)^* \chi^{(v)}(g_\alpha) = n_G \delta^{uv}$$

其中，$\chi^{(u)}(g_\alpha)$ 为 g_α 在表示 $D^{(u)}(G)$ 中的特征标。

证明：

利用正交性定理：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} D_{\sigma\delta}^{(u)*}(g_\alpha) D_{\lambda\rho}^{(v)}(g_\alpha) = \frac{n_G}{n_u}\delta^{uv}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\delta\rho}$$

令 $\delta = \sigma, \rho = \lambda$：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G} D_{\sigma\sigma}^{(u)*}(g_\alpha) D_{\lambda\lambda}^{(v)}(g_\alpha) = \frac{n_G}{n_u}\delta^{uv}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\sigma\lambda}$$

对 σ, λ 求和：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left(\sum_\sigma D_{\sigma\sigma}^{(u)*}(g_\alpha)\right)\left(\sum_\lambda D_{\lambda\lambda}^{(v)}(g_\alpha)\right) = \frac{n_G}{n_u}\delta^{uv}\sum_{\sigma,\lambda}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\sigma\lambda}$$

由于 $\sum\limits_{\sigma,\lambda}\delta_{\sigma\lambda}\delta_{\sigma\lambda} = \sum\limits_\sigma \delta_\sigma\delta_\sigma = n_u$，因此：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(u)*}(g_\alpha)\chi^{(v)}(g_\alpha) = n_G\delta^{uv}$$

引入特征标表：

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
$D^{(1)}$	$\chi^{(1)}(g_1)$	$\chi^{(1)}(g_2)$	$\cdots$	$\chi^{(1)}(g_n)$
$D^{(2)}$	$\chi^{(2)}(g_1)$	$\chi^{(2)}(g_2)$	$\cdots$	$\chi^{(2)}(g_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$D^{(r)}$	$\chi^{(r)}(g_1)$	$\chi^{(r)}(g_2)$	$\cdots$	$\chi^{(r)}(g_n)$

特征标表的某一行元素为不同群元在某一不可约表示中的特征标，称为**特征标行矢量**。

特征标表的某一列元素为同一群元在各个不等价不可约表示中的特征标，称为**特征标列矢量**。

从特征标表来看，正交定理可以表述为：特征标表的任意不同两行正交，任意一行的模长为 n_G

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(u)*}(g_\alpha)\chi^{(v)}(g_\alpha)=n_G\delta^{uv}$$

对于同一行，$u=v$，

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi^{(u)}(g_\alpha)\right|^2=n_G$$

也可以简记为：

$$\left|\chi^{(u)}(G)\right|^2=n_G$$

这也是不可约表示必须满足的条件。

定理3：唯一分解定理

设 $D(G)$ 为 G 的一个表示，$D^{(u)}(G)$ 为 G 的所有 r 个不等价不可约表示，则由表示的约化知 $D(G)$ 可以约化为：

$$X^{-1}D(G)X=\bigoplus_{u=1}^{r}a_uD^{(u)}(G)$$

其中，a_u 是唯一确定的，由下式确定：

$$a_u=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

其中，$\chi(g_\alpha)$ 是群元 g_α 在表示 $D(G)$ 中的特征标，$\chi^{(u)}(g_\alpha)$ 是群元 g_α 在 G 的第 r 个不等价不可约表示 $D^{(u)}(G)$ 中的特征标，即：

$$\chi(g_\alpha)=\operatorname{Tr}\left(D(g_\alpha)\right),\quad \chi^{(u)}(g_\alpha)=\operatorname{Tr}\left(D^{(u)}(g_\alpha)\right)$$

证明：

对 $X^{-1}D(G)X=\bigoplus_{u=1}^{r}a_uD^{(u)}(G)$ 两边同时求迹：

$$\chi(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}a_u\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

上式两边同乘 $\chi^{(v)*}(g_\alpha)$，再对 α 求和：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi(g_\alpha)\chi^{(v)*}(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}a_u\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(u)}(g_\alpha)\chi^{(v)*}(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}a_u n_G\delta_{uv}=n_G a_v$$

把下标 v 替换成 u 就得到：

$$a_u=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

练习：可约表示 $D(G)$ 的特征标行矢量的模方：

$$\sum_{\beta=1}^{n_G}\chi^*(g_\beta)\chi(g_\beta)\geqslant 2n_G$$

证明：

由唯一分解定理可知，可约表示 $D(G)$ 可以约化：

$$X^{-1}D(G)X=\bigoplus_{u=1}^{r}a_u D^{(u)}(G),\ \ a_u=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

两边同时求迹：

$$\chi(g_\beta)=\sum_{u=1}^{r}a_u\chi^{(u)}(g_\beta)$$

因此可约表示特征标矢量的模方为：

$$
\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^{n_G} \chi^*(g_\beta)\chi(g_\beta) &= \sum_{\beta=1}^{n_G} \left(\sum_{u=1}^{r} a_u \chi^{(u)*}(g_\beta)\right) \left(\sum_{v=1}^{r} a_v \chi^{(v)}(g_\beta)\right) \\
&= \sum_{u=1}^{r} \sum_{v=1}^{r} a_u a_v \sum_{\beta=1}^{n_G} \chi^{(u)*}(g_\beta)\chi^{(v)}(g_\beta) \\
&= \sum_{u=1}^{r} \sum_{v=1}^{r} a_u a_v \cdot n_G \delta_{uv} \\
&= n_G \sum_{u=1}^{r} a_u \sum_{v=1}^{r} a_v \delta_{uv} \\
&= n_G \sum_{u=1}^{r} a_u^2 \\
&\geqslant 2n_G
\end{aligned}
$$

唯一分解定理应用于正则表示：

正则表示中，恒元的表示矩阵为单位矩阵；非恒元的表示矩阵对角线元素全为零，因此特征标也为零。

$$
\begin{aligned}
a_u &= \frac{1}{n_G} \sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha) \\
&= \frac{1}{n_G} \chi^*(e)\chi^{(u)}(e) \\
&= \frac{1}{n_G} n_G n_u \\
&= n_u
\end{aligned}
$$

其中，n_u 为第 u 个不可约表示的维数。

因此，由唯一分解定理：

$$
X^{-1} D_{\text{regular}}(g_\alpha) X = \bigoplus_{u=1}^{r} n_u D^{(u)}(g_\alpha)
$$

两边求迹：

$$
\chi(g_\alpha) = \sum_{u=1}^{r} n_u \chi^{(u)}(g_\alpha)
$$

对于 $g_\alpha = e$，

$$n_G=\sum_{u=1}^{r}n_u^2$$

这就是说，群的不等价不可约表示的维数的平方和等于群的阶。

比如，对于 D_3 群，$n_G=6$，而：

$$6=1^2+1^2+2^2$$

因此 D_3 有 2 个一维不等价不可约表示和 1 个二维不等价不可约表示。

对于 D_4 群，$n_G=8$，而：

$$8=1^2+1^2+1^2+1^2+2^2$$

因此 D_4 有 4 个一维不等价不可约表示和 1 个二维不等价不可约表示。

正则表示中，

$$\chi(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}n_u\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

正则表示中，恒元以外的群元的表示矩阵的对角元均为零，即当 $g_\alpha\neq e$ 时，有：

$$0=\chi(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}n_u\chi^{(u)}(g_\alpha)=\sum_{u=1}^{r}n_u\chi^{(u)*}(g_\alpha),\quad g_\alpha\neq e$$

又因此 $n_u=\chi^{(u)}(e)$，于是：

$$\sum_{u=1}^{r}\chi^{(u)*}(e)\chi^{(u)}(g_\alpha)=0$$

即：特征表中，第一列与任意其他列正交。

由于同类群元的特征标相等，因此可把特征标表中同一类的元素合并。

	$C_1=\{e\}$	C_2	$\cdots$	C_n
$D^{(1)}$	1	1	$\cdots$	1

	$C_1=\{e\}$	C_2	$\cdots$	C_n
$D^{(2)}$	$\chi^{(2)}(C_1)=n_2$	$\chi^{(2)}(C_2)$	$\cdots$	$\chi^{(2)}(C_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$D^{(r)}$	$\chi^{(r)}(C_1)=n_r$	$\chi^{(r)}(C_2)$	$\cdots$	$\chi^{(r)}(C_n)$

约定:

- $D^{(1)}(G)$ 是一维恒等表示，所有元素在此表示下的特征标为 1
- $C_1=\{e\}$
- C_k 类也可以写成 $n_k g_k$，其中 $g_k\in C_k$，n_k 是 C_k 类中的群元的个数。

此时，对于特征标行矢量，特征标是类空间的矢量。

以 D_3 群为例:

	$\{e\}$	$\{d,f\}$	$\{a,b,c\}$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	x	y

由第一列与第二列正交：$x=-1$

由第一列与第三列正交：$y=0$

可以证明，以类为表头的特征标的任意两列正交:

$$\sum_{u=1}^{r}\chi^{(u)*}(C_\alpha)\chi^{(u)}(C_\beta)=\frac{n_G}{n_{C_\alpha}}\delta_{\alpha\beta}$$

其中，n_{C_α} 为 C_α 类中群元的个数。

特征标表的任意两行正交、任意两列正交:

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^{(u)*}(g_\alpha)\chi^{(v)}(g_\alpha)=n_G\delta_{uv}$$

$$\sum_{u=1}^{r}\chi^{(u)*}(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\beta)=\frac{n_G}{n_{C_\alpha}}\delta_{\alpha\beta}$$

任意两行正交也可以写为：

$$\sum_{\alpha=1}^{r} n_{C_\alpha} \chi^{(u)*}(C_\alpha) \chi^{(v)}(C_\alpha) = n_G \delta^{uv}$$

引入归一化的特征标行/列矢量：

$$\hat{\chi}(C_\alpha) \equiv \sqrt{\frac{n_{C_\alpha}}{n_G}} \chi^{(u)}(C_\alpha)$$

特征标正交定理可改写为：

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \hat{\chi}^{(u)*}(C_\alpha) \hat{\chi}^{(v)}(C_\alpha) = \delta^{uv}$$

$$\sum_{u=1}^{r} \hat{\chi}^{(u)*}(C_\alpha) \hat{\chi}^{(u)}(C_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

对于不可约表示，归一化特征标行、列矢量的模方为 1：

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left| \hat{\chi}^{(u)}(C_\alpha) \right|^2 = 1$$

$$\sum_{u=1}^{r} \left| \hat{\chi}^{(u)}(C_\alpha) \right|^2 = 1$$

对于可约表示，归一化的特征标行矢量的模方大于等于 2：

表示不可约的充要条件：

$$\sum_{u=1}^{r} \left| \hat{\chi}^{(u)}(C_\alpha) \right|^2 = 1$$

定理4

两个表示等价 $\Longleftrightarrow$ 特征标相同

证明：

充分性，即定理1，下面证明必要性：

设两个表示 $D, \bar{D}$ 的特征标相同，即：

$$\bar{\chi}(g_\alpha) = \chi(g_\alpha), \ \ g_\alpha \in G$$

唯一分解定理，$\forall g_\alpha \in G$，都有：

$$M^{-1}\bar{D}(g_\alpha)M = \bigoplus_{u=1}^{r} \bar{a}_u D^{(u)}(g_\alpha)$$

$$N^{-1}D(g_\alpha)N = \bigoplus_{u=1}^{r} a_u D^{(u)}(g_\alpha)$$

其中，

$$\bar{a}_u = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G} \bar{\chi}^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

$$a_u = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G} \chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

由于 $\bar{\chi}(g_\alpha) = \chi(g_\alpha)$，因此：

$$\bar{a}_u = a_u$$

于是：

$$M^{-1}\bar{D}(g_\alpha)M = N^{-1}D(g_\alpha)N$$

$$

$$

因此 $\bar{D}(g_\alpha)$ 和 $D(g_\alpha)$ 是等价表示。

特征标表的性质

（1）以类为表头的特征标表是个 $r \times r$ 方阵，r 为不等价不可约表示的个数，也等于类的个数。

（2）任意两行正交：

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \hat{\chi}^{(u)*}(C_\alpha)\hat{\chi}^{(v)}(C_\alpha) = \delta^{uv}$$

（3）任意两列正交：

$$\sum_{u=1}^{r}\hat{\chi}^{(u)*}(C_\alpha)\hat{\chi}^{(u)}(C_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$$

（4）特征标行/列矢量的模方为 1：

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\left|\hat{\chi}^{(u)}(C_\alpha)\right|^2=1$$

$$\sum_{u=1}^{r}\left|\hat{\chi}^{(u)}(C_\alpha)\right|^2=1$$

（5）第一列：

$$\frac{1}{n_G}\sum_{u=1}^{r}n_u^2=1$$

其中 n_u 为 $D^{(u)}$ 的维数。

（6）商群的不可约表示也是原群的不可约表示。因此在寻找一个群的不可约表示时，可以先通过寻找不变子群来构建商群，然后找到商群的不可约表示，也就找到了原群的部分不可约表示。

（7）群 G 的一维非恒等表示和高维不可约表示相乘，还是 G 的不可约表示。

（8）设 $G=H_1\otimes H_2$，则群 G 的类的个数为其子群 H_1 和 H_2 的类的个数的乘积。

例1：

$\mathrm{C}_n=\left\{e,c_n,c_n^2,\cdots,c_n^{n-1}\right\}$

阿贝尔群，每个群元自成一类，共 n 个类，共 n 个不等价不可约表示。

$$\sum_{u=1}^{n}n_u^2=n$$

其中，n_u 是第 u 个不等价不可约表示的维数。

$$D^{(k)}(c_n)=\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}k\right),\ \ k=1,2,\cdots,n$$

$\mathrm{C}_6=\mathrm{C}_3\otimes\mathrm{C}_2$

例2：

D_n 群

$\mathrm{D}_2 = \{e, c_2 = \sigma_x, c_2' = \sigma_y, c_2'' = \sigma_z\}$

$\mathrm{D}_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$

可以证明：$\mathrm{D}_{4n+2} = \mathrm{D}_{2n+1} \otimes \mathrm{C}_2$