第1章 \mathbb{R}^3 空间的向量分析

向量分析基本知识

爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和(除非特别指出该重复指标不求和),我们称求和指标 i 为"哑标"。

比如, \mathbb{R}^3 空间中的向量 $ec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为:

$$ec{A}=A_1ec{\mathrm{e}}_1+A_2ec{\mathrm{e}}_2+A_3ec{\mathrm{e}}_3\equiv\sum_iA_iec{\mathrm{e}}_i$$

其中, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $ec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为:

$$ec{A} = \sum_i A_i ec{\mathrm{e}}_i
ightarrow ec{A} = A_i ec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} = egin{cases} 1 &, i = j \ 0 &, i
eq j \end{cases}$$

三阶单位全反对称张量(三阶 Levi-Citita 符号) $arepsilon_{ijk}$

$$arepsilon_{ijk} = egin{cases} 1 &, ijk = 123, 231, 312, 即相邻两指标经过偶次对换能还原到123 \ -1 &, ijk = 132, 213, 321, 即相邻两指标经过奇次对换能还原到123 \ 0 &, ijk$$
中有相同指标

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式:

$$egin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ b_1 & b_2 & b_3 \ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = arepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

一些简单算例

$$\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$$

$$A_i \delta_{ij} = A_j$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$$

$$ec{A}\cdotec{B}=(A_iec{\mathrm{e}}_i)\cdot(B_jec{\mathrm{e}}_j)=A_iB_jec{\mathrm{e}}_i\cdotec{\mathrm{e}}_j=A_iB_j\delta_{ij}=A_iB_i$$

$$ec{A} imesec{B}=arepsilon_{ijk}ec{\mathrm{e}}_iA_jB_k$$

$$ec{A} imesec{B} = egin{array}{ccc} ec{\mathrm{e}}_1 & ec{\mathrm{e}}_2 & ec{\mathrm{e}}_3 \ A_1 & A_2 & A_3 \ B_1 & B_2 & B_3 \ \end{pmatrix} = arepsilon_{ijk}ec{\mathrm{e}}_iA_jB_k$$

梯度、散度、旋度

梯度 (gradient) 的定义

设 $\psi(\vec{r})$ 是标量场, $\psi(\vec{r})$ 其梯度,记为 $\operatorname{grad} \psi(\vec{r})$,由下式定义:

$$\operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = d\psi(\vec{r})$$

其中, $\mathrm{d}\vec{r}$ 是位矢 \vec{r} 的微小变化, $\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 是标量场 $\psi(\vec{r})$ 因位矢 \vec{r} 变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 而引起的相应的变化。具体来说, $\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 的定义为:

$$\mathrm{d}\psi(ec{r}) \equiv \psi(ec{r} + \mathrm{d}ec{r}) - \psi(ec{r})$$

散度 (divergence) 的定义

向量场 \vec{A} 的散度, 记为 $\operatorname{div} \vec{A}$, 定义为:

$$\mathrm{div} \; ec{A} \equiv \lim_{V
ightarrow 0^+} rac{1}{V} \oint\limits_{\partial V^+} ec{A} \cdot \mathrm{d} ec{S} \; .$$

旋度 (curl) 的定义

向量场 \vec{A} 的旋度,记为 $\operatorname{curl} \vec{A}$,由下式定义:

$$\left(\operatorname{curl} ec{A}
ight) \cdot ec{n} = \lim_{\sigma o 0^+} rac{1}{\sigma} \oint\limits_{\partial \sigma^+} ec{A} \cdot \operatorname{d} ec{l}$$

其中, σ 是与 \vec{n} 垂直的面元。 \vec{n} 与面元 σ 的正绕行方向满足右手定则。

直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi = ec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi$$
 $\mathrm{div}\ ec{A} = \partial_i A_i$ $\mathrm{curl}\ ec{A} = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k$

▽ 算子

▽ 算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为:

$$abla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i$$

其中, ∂_i 的定义为:

$$\partial_i \equiv rac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ∇ 算子, 可将梯度、散度、旋度表示为:

$$egin{aligned} \operatorname{grad} \psi &= ec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi \equiv
abla \psi \ &\mathrm{div} \ ec{A} &= \partial_i A_i \equiv
abla \cdot ec{A} \ &\mathrm{curl} \ ec{A} &= arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \equiv
abla imes ec{A} \end{aligned}$$

为了书写方便,以后用 $abla\psi,
abla\cdot \vec{A},
abla imes \vec{A}$ 分别来指代梯度、散度、旋度。

梯度与方向导数的关系

方向导数

标量场 ψ 在 \vec{r} 点处沿 \vec{v} 方向的方向导数,记为 $\left. \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{r}}$, 定义为:

$$\left.rac{\partial \psi(ec{r})}{\partial l}
ight|_{ec{v}} \equiv \lim_{v o 0^+} rac{\psi(ec{r}+ec{v})-\psi(ec{r})}{v}$$

特别地,标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 \vec{r} 点处沿曲面上 \vec{r} 点的外法向的方向导数简记为:

$$\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial n}$$

梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义:

$$\nabla \psi \cdot d\vec{r} = d\psi$$

设 $d\vec{r} = \vec{n}dr$, 其中 \vec{n} 是与 $d\vec{r}$ 同向的单位向量,则有:

$$(\nabla \psi) \cdot \vec{n} dr = d\psi$$

即:

$$(
abla\psi)\cdotec{n}=rac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=rac{\psi(ec{r}+\mathrm{d}ec{r})-\psi(ec{r})}{\mathrm{d}r}=rac{\partial\psi(ec{r})}{\partial l}igg|_{ec{n}}$$

这就是说,标量场 ψ 的梯度 $\nabla \psi$ 在某一方向 \vec{n} 的投影恰等于标量场沿这一方向 \vec{n} 的方向导数 $\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l}\Big|_{\vec{s}}$ 。

散度与高斯定理

从散度的定义

$$abla \cdot ec{A} \equiv \lim_{V
ightarrow 0^+} rac{1}{V} \oint ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

出发,可以导出高斯定理:

$$\oint\limits_{\partial V^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{S} = \int\limits_V (
abla \cdot ec{A}) \mathrm{d}V$$

旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(
abla imes ec{A}
ight) \cdot ec{n} = \lim_{\sigma o 0^+} rac{1}{\sigma} \oint\limits_{\partial \sigma^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l}$$

出发,可以导出斯托克斯定理:

$$\oint\limits_{\partial \Sigma^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{\Sigma} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

\mathbb{R}^3 空间中向量分析常用公式

分析工具

$$\left\{egin{aligned} ec{\mathbf{e}}_i \cdot ec{\mathbf{e}}_j &= \delta_{ij} \ ec{A} &= A_i ec{\mathbf{e}}_i \ A_i \delta_{ij} &= A_j \ ec{A} \cdot ec{B} &= A_i B_i \ ec{A} imes ec{B} &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i A_j B_k \ (ec{A} imes ec{B})_l &= arepsilon_{ljk} A_j B_k \
abla \psi &= ec{\mathbf{e}}_i \partial_i \
abla \psi &= ec{\mathbf{e}}_i \partial_i \
abla \psi &= ec{A}_i A_i \
abla \psi &= (\nabla \psi)_i \
abla \psi &= (\nabla \psi)_i \
abla v^2 &= \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \
abla v^2 \psi &= \nabla \cdot (\nabla \psi) &= \partial_i \partial_i \psi \
abla v^2 ec{A} &= (\nabla^2 A_i) ec{\mathbf{e}}_i \
abla v^2 ec{A} &= ec{\epsilon}_{jki} &= ec{\epsilon}_{kij} \
abla v^2 ec{\epsilon}_{ijk} &= ec{\epsilon}_{jki} &= ec{\epsilon}_{kij} \
abla v^2 ec{\epsilon}_{ijk} &= ec{\epsilon}_{ijk} &= \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \
abla v^2 &= \delta_{ij} \
abla v^2$$

\mathbb{R}^3 空间中重要微分恒等式

与 \vec{r} 有关的公式

$$abla \cdot \vec{r} = 3$$

$$abla \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$$

$$abla imesec{r}=ec{0}$$

$$abla imes ec{r} = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j x_k = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \delta_{jk} = ec{0}$$

从左往右证的公式

$$abla(arphi\psi) = arphi
abla\psi + \psi
ablaarphi$$

$$egin{aligned}
abla(arphi\psi) &= ec{\mathbf{e}}_i\partial_i(arphi\psi) \ &= ec{\mathbf{e}}_iarphi\partial_i\psi + ec{\mathbf{e}}_i\psi\partial_iarphi \ &= arphiec{\mathbf{e}}_i\partial_i\psi + \psiec{\mathbf{e}}_i\partial_iarphi \ &= arphi
abla\psi\psi + \psi
ablaarphiec{\mathbf{e}}_i\partial_iarphi + \psi
ablaarphiec{\mathbf{e}}_i\partial_iarphi \end{aligned}$$

$$abla \cdot (arphi ec{A}) = ec{A} \cdot (
abla arphi) + arphi
abla \cdot ec{A}$$

$$egin{aligned}
abla \cdot (arphi ec{A}) &= \partial_i (arphi ec{A})_i \ &= \partial_i (arphi A_i) \ &= arphi \partial_i A_i + A_i \partial_i arphi \ &= arphi
abla \cdot ec{A} \cdot arphi) arphi \ &= (ec{A} \cdot
abla) arphi + arphi
abla \cdot ec{A} \cdot ec{A} \end{aligned}$$

$$egin{aligned}
abla imes (arphi ec{A}) = (
abla arphi) imes ec{A} + arphi
abla imes ec{A} \end{aligned}$$

$$egin{aligned}
abla imes (arphi ec{A}) &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j (arphi ec{A})_k \ &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j (arphi A_k) \ &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i (A_k \partial_j arphi + arphi \partial_j A_k) \ &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i (
abla arphi)_j A_k + arphi arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j A_k \ &= (
abla arphi) imes ec{A} + arphi
abla imes ec{A} \end{aligned}$$

$$abla \cdot (ec{A} imes ec{B}) = ec{B} \cdot (
abla imes ec{A}) - ec{A} \cdot (
abla imes ec{B})$$

$$egin{aligned}
abla \cdot (ec{A} imes ec{B}) &= \partial_i (ec{A} imes ec{B})_i \ &= \partial_i (arepsilon_{ijk} A_j B_k) \ &= arepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \ &= arepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + arepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k \ &= B_k arepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j arepsilon_{jik} \partial_i B_k \ &= B_k (
abla imes ec{A})_k - A_j (
abla imes ec{B})_j \ &= ec{B} \cdot (
abla imes ec{A}) - ec{A} \cdot (
abla imes ec{B})_j \end{aligned}$$

$$\boxed{ \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) }$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m)$$

$$= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m$$

$$= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m$$

$$= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$abla imes (
abla imes ec{A}) =
abla (
abla \cdot ec{A}) -
abla^2 ec{A}$$

$$egin{aligned}
abla imes (
abla imes ec{A}) &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j (
abla imes ec{A})_k \ &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j arepsilon_{klm} \partial_l A_m \ &= arepsilon_{kij} arepsilon_{klm} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j \partial_l A_m \ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) ec{\mathbf{e}}_i \partial_j \partial_l A_m \ &= ec{\mathbf{e}}_l \partial_m \partial_l A_m - ec{\mathbf{e}}_m \partial_l \partial_l A_m \ &= ec{\mathbf{e}}_l \partial_l \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_m ec{\mathbf{e}}_m \ &=
abla (
abla \cdot ec{A}) -
abla^2 ec{A} \end{aligned}$$

需要注意力的公式

$$abla imes (
abla arphi) = ec{0}$$

$$egin{aligned}
abla imes (
abla arphi) &= arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j (
abla arphi)_k \ &= ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_k arphi \end{aligned}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数,于是 $\partial_i\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$,再结合 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$,有:

$$egin{aligned} ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi &= -ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j arphi \ &= -ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi \end{aligned}$$

最后一步是因为 j,k 都是用于求和的哑标,因此可以交换。

上式说明:

$$ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi = ec{0}$$

于是:

$$abla imes (
abla arphi) = ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_k arphi = ec{0}$$

$$abla \cdot (
abla imes ec{A}) = 0$$

$$egin{aligned}
abla \cdot (
abla imes ec{A}) &= \partial_i (
abla imes ec{A})_i \ &= \partial_i arepsilon_{ijk} \partial_j A_k \ &= arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

注意到:

$$egin{aligned} arepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k &= -arepsilon_{jik}\partial_j\partial_iA_k \ &= -arepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k \end{aligned}$$

于是:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k=0$$

这就是说:

$$abla \cdot (
abla imes ec{A}) = arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

从右往左证的公式

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_l B_m$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m$$

$$= B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m$$

$$= B_m \vec{e}_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m$$

$$= B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m$$

$$= \nabla (A_m B_m)$$

$$= \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

\mathbb{R}^3 空间中重要积分恒等式

高斯定理

$$\oint\limits_{\partial V^+}ec{A}\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_V(
abla\cdotec{A})\mathrm{d}V$$

斯托克斯定理

$$\oint\limits_{\partial \Sigma^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{\Sigma} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

格林第一恒等式

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi
abla\phi\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_{\Omega}\left(\psi
abla^2\phi+
abla\phi\cdot
abla\psi
ight)\mathrm{d}V$$

注意到:

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \partial_i (\psi \nabla \phi)_i$$

$$= \partial_i (\psi \partial_i \phi)$$

$$= (\partial_i \phi)(\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi$$

$$= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi$$

$$= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi$$

于是由高斯定理,有:

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi
abla\phi\cdot\mathrm{d}ec{S} &=\int\limits_{\Omega}
abla\cdot(\psi
abla\phi)\mathrm{d}V \ &=\int\limits_{\Omega}\left[(
abla\phi)\cdot(
abla\psi)+\psi
abla^2\phi
ight]\mathrm{d}V \ &=\int\limits_{\Omega}\left[\psi
abla^2\phi+(
abla\phi)\cdot(
abla\psi)\right]\mathrm{d}V \end{aligned}$$

格林第二恒等式

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} (\psi
abla\phi-\phi
abla\psi)\cdot\mathrm{d}ec{S} = \int\limits_{\Omega} (\psi
abla^2\phi-\phi
abla^2\psi)\mathrm{d}V$$

利用 $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla \cdot \vec{A}$ 可得:

$$egin{aligned}
abla \cdot (\psi
abla \phi - \phi
abla \psi) &=
abla \phi \cdot
abla \psi + \psi
abla \cdot (
abla \phi) - (
abla \psi \cdot
abla \phi + \phi
abla \cdot (
abla \psi)) \\ &= \psi
abla^2 \phi - \phi
abla^2 \psi \end{aligned}$$

于是由高斯定理可得:

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial\Omega^+} \left(\psi
abla\phi-\phi
abla\psi
ight)\cdot\mathrm{d}ec{S} &= \int\limits_{\Omega}
abla\cdot\left(\psi
abla\phi-\phi
abla\psi
ight)\mathrm{d}V \ &= \int\limits_{\Omega}\left(\psi
abla^2\phi-\phi
abla^2\psi
ight)\mathrm{d}V \end{aligned}$$

第2章 \mathbb{R}^3 空间曲线坐标系中的向量分析

▽ 算子

直角坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_x rac{\partial}{\partial x} + ec{e}_y rac{\partial}{\partial y} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}$$

球坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_r rac{\partial}{\partial r} + ec{e}_ heta rac{1}{r} rac{\partial}{\partial heta} + ec{e}_arphi rac{1}{r\sin heta} rac{\partial}{\partial arphi}$$

柱坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial
ho} + ec{e}_arphi rac{1}{
ho} rac{\partial}{\partial arphi} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}$$

$abla^2$ 算子

直角坐标下的 $abla^2$

$$abla^2 = rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial y^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标下的 $abla^2$

$$abla^2 = rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}\left(r^2rac{\partial}{\partial r}
ight) + rac{1}{r^2\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial}{\partial heta}
ight) + rac{1}{r^2\sin^2 heta}rac{\partial^2}{\partial arphi^2}$$

柱坐标下的 ∇^2

$$abla^2 = rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \ \theta \in \mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射,即:

$$f(z):\mathbb{C}^{\mathrm{R}}
ightarrow\mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z)=rac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}, \ \ a_i,b_i\in\mathbb{C}, \ \ m,n\in\mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z) = e^z$$

对数函数

$$f(z) = \ln z$$

幂函数

$$f(z)=z^a, \ \ a\in \mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质:

$$\cos(-z) = \cos(z), \ \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

 $\sin(-z) = -\sin(z), \ \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$
 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

 $|\cos z|, |\sin z|$ 可以大于 1,这与实三角函数不同。

双曲函数

$$\cosh z \equiv rac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$
 $\sinh z \equiv rac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系:

$$\sinh z = -i\sin(iz)$$
 $\cosh z = \cos(iz)$

双曲函数的性质:

$$\sinh(z + i2\pi) = \sinh z$$
 $\cosh(z + i2\pi) = \cosh z$
 $\cosh(-z) = \cosh z$
 $\sinh(-z) = -\sinh z$
 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

第5章 解析函数

复变函数的导数

复变函数的连续性

复变函数 f(z) 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时,都有:

$$\lim_{z o z_0}f(z)=f(z_0)$$

则称 f(z) 在 z_0 点连续。

若 f(z) 在区域 Ω 内的所有点都连续,则称 f(z) 在 Ω 内连续。

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时,即 $\Delta z=z-z_0$ 以任何方式趋于 0 时,若极限:

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一,则称 f(z) 在 z_0 点可导,f(z) 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y),若 f(z) 在 z 点可导,则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是柯西-黎曼条件(C-R条件)。

命题的证明

设 z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y), 则:

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y}$$

由于 f(z) 在 z 点可导, 故极限

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地,

(1) 令:

$$\mathrm{i}\Delta y=0, \Delta x o 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y} = \lim_{\Delta x o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x} = rac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i} rac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令:

$$\Delta x=0, \mathrm{i}\Delta y o 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y} = -\mathrm{i} rac{\partial u}{\partial y} + rac{\partial v}{\partial y}$$

由于 f(z) 在 z_0 点可导,则这两个导数值应该相等,于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 f(z) 在 z 点可导的必要条件,但不是充分条件。也就是说,可导必定满足 C-R 条件,但满足 C-R 条件不一定可导。

复变函数的解析性

复变函数的解析性

若复变函数 f(z) 在 z_0 的邻域内每一点都可导,则称 f(z) 在 z_0 点是解析的。

若复变函数 f(z) 在 Ω 内每一点都可导,则 f(z) 在 Ω 内是解析的,或称为**全纯的**。

相关定理

定理1

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i} v(x,y)$ 在区域 Ω 为解析函数 \Longleftrightarrow 在与复平面 Ω 相应的实平面区域内 u(x,y),v(x,y) 可微,且 u(x,y),v(x,y) 满足 C-R 条件。

特别地, 若 f(z) 为 Ω 上的连续函数, 则 f(z) 是 Ω 上的解析函数 \iff f(z) 满足 C-R 条件。

定理2

若 f(z) 为区域 Ω 上的解析函数,且 f(z) 为实函数,即 $f(z)=f^*(z)$,则 f(z) 为常数。

定理3

若 f(z) 为区域 Ω 上的解析函数,则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$,即 $f(z,z^*)$ 不依赖于 z^*

定理4

在复平面区域 Ω 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i} v(x,y)$,其实部 u(x,y) 和虚部 v(x,y) 都是平面区域 Ω 内的调和函数(即满足二维拉普拉斯方程 $\nabla^2 u(x,y)=0, \nabla^2 v(x,y)=0$ 的函数)。

例题

例1

已知解析函数的实部 $u = x^3 - 3xy^2$, 求该解析函数。

方法1 (积分法)

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i} v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

$$dv(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy$$
(1)

选择积分路径为: $\underbrace{(0,0) \to (x,0)}_{C}$, $\underbrace{(x,0) \to (x,y)}_{C}$, 两边积分:

$$egin{split} v(x,y) - v(0,0) &= \int\limits_{C_1} 6xy \mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y + \int\limits_{C_2} 6xy \mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y \ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y} (3x^2 - 3y^2) \mathrm{d}y \ &= 3x^2y - y^3 \end{split}$$

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + v(0,0) = 3x^2y - y^3 + C$$

于是:

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i} v(x,y) \ = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i} (3x^2y - y^3 + C)$$

例2

请证明:柱坐标系下的解析函数 $f(z)=u(
ho,arphi)+\mathrm{i} v(
ho,arphi)$ 满足的 C-R 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件:

$$rac{\partial u}{\partial x} = rac{\partial v}{\partial y}, \;\; rac{\partial u}{\partial y} = -rac{\partial v}{\partial x} \ \left\{ egin{align*} x =
ho\cosarphi \ y =
ho\sinarphi \end{array}
ight. \Longrightarrow \left\{ egin{align*}
ho = \sqrt{x^2 + y^2} \ anarphi = rac{y}{x} \end{array}
ight.$$

注意到:

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} \right)^{-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin\varphi}{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\rho} \right) \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} \right)^{-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin\varphi}{\rho} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\cos\varphi}{\partial \varphi} \right)^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos\varphi}{\rho} \right) \end{split}$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = -\left[\frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \right] \tag{2}$$

 $(1) \times \cos \varphi + (2) \times \sin \varphi$ 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

 $(2) \times \cos \varphi - (1) \times \sin \varphi$ 得到:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

例3

已知解析函数的虚部 $v=rac{y}{x^2+y^2}$,求该解析函数。

$$rac{\partial v}{\partial x} = rac{-2xy}{\left(x^2+y^2
ight)^2}, rac{\partial v}{\partial y} = rac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2
ight)^2}$$

函数解析, 故满足 C-R 条件, 即满足:

$$rac{\partial u}{\partial x} = rac{\partial v}{\partial y} = rac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$
 $rac{\partial u}{\partial y} = -rac{\partial v}{\partial x} = rac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

于是:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$
$$= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

极坐标变换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \rho} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi = \cos \varphi \mathrm{d}\rho - \rho \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi = \sin \varphi \mathrm{d}\rho + \rho \cos \varphi \mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

于是:

$$du = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$
$$= \frac{\cos \varphi}{\rho^2} d\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} d\varphi$$
$$= d\left(\frac{-\cos \varphi}{\rho}\right)$$

于是:

$$u = \frac{-\cos\varphi}{\rho} + C = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C$$

综上,

$$egin{aligned} f(z) &= u + \mathrm{i} v \ &= \left(-rac{x}{x^2 + y^2} + C
ight) + \mathrm{i} \left(rac{y}{x^2 + y^2}
ight) \end{aligned}$$

第6章 复变函数积分

第7章 复变函数的级数展开

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

第9章 傅里叶变换

第10章 拉普拉斯变换

第11章 δ 函数

第12章 小波变换初步

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其

定解问题

第14章 分离变量法

第15章 曲线坐标系下的分离变量

第16章 球函数

第17章 柱函数

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理