第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

向量分析基本知识

爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A} = A_1\vec{\mathrm{e}}_1 + A_2\vec{\mathrm{e}}_2 + A_3\vec{\mathrm{e}}_3 \equiv \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为：

$$\vec{A} = \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i \to \vec{A} = A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

三阶单位全反对称张量（三阶 Levi-Citita 符号）ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到123} \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到123} \\ 0 & , ijk\text{中有相同指标} \end{cases}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

一些简单算例

$\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$

$A_i \delta_{ij} = A_j$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j \vec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$$

梯度、散度、旋度

梯度（gradient）的定义

设 $\psi(\vec{r})$ 是标量场，$\psi(\vec{r})$ 其梯度，记为 $\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r})$，由下式定义：

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi(\vec{r})$$

其中，$\mathrm{d}\vec{r}$ 是位矢 $\vec{r}$ 的微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 是标量场 $\psi(\vec{r})$ 因位矢 $\vec{r}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 的定义为：

$$\mathrm{d}\psi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$

散度（divergence）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\ \vec{A}$，定义为：

$$\mathrm{div}\ \vec{A} \equiv \lim_{V \to 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

旋度（curl）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 $\mathrm{curl}\ \vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\mathrm{curl}\ \vec{A}\right) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与面元 σ 的正绕行方向满足右手定则。

直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \partial_i A_i$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k$$

∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为：

$$\nabla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i$$

其中，∂_i 的定义为：

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ∇ 算子，可将梯度、散度、旋度表示为：

$$\mathrm{grad}\ \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi \equiv \nabla \psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \partial_i A_i \equiv \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \equiv \nabla \times \vec{A}$$

为了书写方便，以后用 $\nabla \psi, \nabla \cdot \vec{A}, \nabla \times \vec{A}$ 分别来指代梯度、散度、旋度。

梯度与方向导数的关系

方向导数

标量场 ψ 在 $\vec{r}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为：

$$\left.\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}} \equiv \lim_{v \to 0^+} \frac{\psi(\vec{r} + \vec{v}) - \psi(\vec{r})}{v}$$

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{r}$ 点处沿曲面上 $\vec{r}$ 点的外法向的方向导数简记为：

$$\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial n}$$

梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla \psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi$$

设 $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{n}\mathrm{d}r$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 同向的单位向量，则有：

$$(\nabla \psi) \cdot \vec{n} \mathrm{d}r = \mathrm{d}\psi$$

即：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=\frac{\psi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r})-\psi(\vec{r})}{\mathrm{d}r}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场 ψ 的梯度 $\nabla\psi$ 在某一方向 $\vec{n}$ 的投影恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla\cdot\vec{A}\equiv\lim_{V\to0^+}\frac{1}{V}\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

分析工具

$$
\begin{cases}
\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij} \\
\vec{A} = A_i \vec{\mathrm{e}}_i \\
A_i \delta_{ij} = A_j \\
\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\
\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k \\
(\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\
\nabla \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \\
\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\
\nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \\
\partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\
\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\
\nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\
\nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{\mathrm{e}}_i \\
\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\
\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\
\partial_i x_j = \delta_{ij}
\end{cases}
$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

与 $\vec{r}$ 有关的公式

> $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$$

> $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$

$$\nabla \times \vec{r} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \delta_{jk} = \vec{0}$$

从左往右证的公式

> $\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= \vec{\mathrm{e}}_i\partial_i(\varphi\psi)\\ &= \vec{\mathrm{e}}_i\varphi\partial_i\psi + \vec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_i\varphi\\ &= \varphi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi + \psi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\varphi\\ &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi\end{aligned}$$

> $\nabla\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{A}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\cdot\vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\vec{A}) &= \partial_i(\varphi\vec{A})_i\\ &= \partial_i(\varphi A_i)\\ &= \varphi\partial_i A_i + A_i\partial_i\varphi\\ &= \varphi\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\varphi\\ &= (\vec{A}\cdot\nabla)\varphi + \varphi\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla\times(\varphi\vec{A}) = (\nabla\varphi)\times\vec{A} + \varphi\nabla\times\vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi\vec{A})_k\\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi + \varphi\partial_j A_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_j A_k + \varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j A_k\\ &= (\nabla\varphi)\times\vec{A} + \varphi\nabla\times\vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i\\ &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j + \varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k\\ &= B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k\\ &= B_k(\nabla\times\vec{A})_k - A_j(\nabla\times\vec{B})_j\\ &= \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\end{aligned}$$

> $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\vec{A} \times \vec{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l + \vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m - \vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l - \vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l + \vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m - \vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l - A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})
\end{aligned}
$$

> $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_lA_m - \vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_mA_m - \partial_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

需要注意力的公式

> $\nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{0}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla\varphi) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k \\
&= \vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi = \partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$，有:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi &= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi \\
&= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

最后一步是因为 j, k 都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明:

$$
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = \vec{0}
$$

于是:

$$
\nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = \vec{0}
$$

> $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= \partial_i(\nabla\times\vec{A})_i \\ &= \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k\end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0$$

这就是说：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0$$

从右往左证的公式

> $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$

$$\begin{aligned}&(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i B_j(\nabla\times\vec{A})_k + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i A_j(\nabla\times\vec{B})_k \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i B_j\partial_l A_m + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i A_j\partial_l B_m \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i B_j\partial_l A_m + (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i A_j\partial_l B_m \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \vec{\mathrm{e}}_l B_m\partial_l A_m - \vec{\mathrm{e}}_m B_l\partial_l A_m + \vec{\mathrm{e}}_l A_m\partial_l B_m - \vec{\mathrm{e}}_m A_l\partial_l B_m \\ =&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l A_m - B_l\partial_l A_m\vec{\mathrm{e}}_m + A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l B_m - A_l\partial_l B_m\vec{\mathrm{e}}_m \\ =&B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l A_m + A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l B_m \\ =&B_m\nabla A_m + A_m\nabla B_m \\ =&\nabla(A_m B_m) \\ =&\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

高斯定理

> $\displaystyle\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$

斯托克斯定理

> $$\oint\limits_{\partial\Sigma^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{\Sigma} (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

格林第一恒等式

> $$\oint\limits_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega} \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) \mathrm{d}V$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\
&= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\
&= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \psi\partial_i\partial_i\phi \\
&= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i + \psi\nabla^2\phi \\
&= (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi
\end{aligned}$$

于是由高斯定理，有:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega} \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega} \left[(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi\right] \mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega} \left[\psi\nabla^2\phi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right] \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

格林第二恒等式

> $$\oint\limits_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_{\Omega} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V$$

利用 $\nabla\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{A}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi\nabla\cdot\vec{A}$ 可得:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) &= \nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot(\nabla\phi) - (\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot(\nabla\psi)) \\
&= \psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi
\end{aligned}$$

于是由高斯定理可得:

$$\oint_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Omega} \nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\mathrm{d}V$$
$$= \int_{\Omega} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V$$

第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

∇ 算子

直角坐标下的 ∇

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标下的 ∇

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

柱坐标下的 ∇

$$\nabla = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

∇^2 算子

直角坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

柱坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \ \theta\in\mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z):\mathbb{C}^{\mathrm{R}}\to\mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n},\ \ a_i,b_i\in\mathbb{C},\ \ m,n\in\mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z)=\mathrm{e}^z$$

对数函数

$$f(z)=\ln z$$

幂函数

$$f(z)=z^a,\ \ a\in\mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质：

$$\cos(-z) = \cos(z),\ \ \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z),\ \ \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$|\cos z|, |\sin z|$ 可以大于 1，这与实三角函数不同。

双曲函数

$$\cosh z \equiv \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sinh z = -\mathrm{i} \sin(\mathrm{i}z)$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

双曲函数的性质：

$$\sinh(z + \mathrm{i}2\pi) = \sinh z$$

$$\cosh(z + \mathrm{i}2\pi) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

第5章 解析函数

复变函数的导数

复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时，都有:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续。

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z = z - z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)。**

命题的证明

设 $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，则:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地，

（1）令：

$$\mathrm{i}\Delta y = 0, \Delta x \to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（2）令：

$$\Delta x = 0, \mathrm{i}\Delta y \to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

复变函数的解析性

复变函数的解析性

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析的。**

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 Ω 内是**解析的**，或称为**全纯的。**

相关定理

定理1

复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在区域 Ω 为解析函数 $\Longleftrightarrow$ 在与复平面 Ω 相应的实平面区域内 $u(x, y), v(x, y)$ 可微，且 $u(x, y), v(x, y)$ 满足 C-R 条件。

特别地，若 $f(z)$ 为 Ω 上的连续函数，则 $f(z)$ 是 Ω 上的解析函数 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 满足 C-R 条件。

定理2

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，且 $f(z)$ 为实函数，即 $f(z) = f^*(z)$，则 $f(z)$ 为常数。

定理3

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$，即 $f(z,z^*)$ 不依赖于 z^*

定理4

在复平面区域 Ω 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是平面区域 Ω 内的调和函数（即满足二维拉普拉斯方程 $\nabla^2u(x,y)=0,\nabla^2v(x,y)=0$ 的函数）。

例题

例1

> 已知解析函数的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y \tag{1}$$

选择积分路径为: $\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分:

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$，则:

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C$$

于是:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \\
&= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C)
\end{aligned}
$$

例2

> 请证明：柱坐标系下的解析函数 $f(z) = u(\rho, \varphi) + \mathrm{i}v(\rho, \varphi)$ 满足的 C-R 方程：
>
> $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程：

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) = -\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right] \tag{2}
$$

$(1)\times\cos\varphi + (2)\times\sin\varphi$ 得到：

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}
$$

$(2)\times\cos\varphi - (1)\times\sin\varphi$ 得到：

$$
\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}
$$

例3

> 已知解析函数的虚部 $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ ，求该解析函数。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

极坐标变换：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\end{cases}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho+\frac{\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\varphi\\&=\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

于是：

$$u=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+C=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$$

综上，

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+C\right)+\mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

第6章 复变函数积分

复变函数积分

复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域 Ω 中，沿某一曲线 C 的**有向**的**线积分**，记为 $\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z$，其定义为：

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |z_j-z_{j-1}|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

把 C 分成 n 段，ξ_j 是 C 上 z_{j-1} 点到 z_j 点的中的某一点。

复变函数积分的性质

$$\left|\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int\limits_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$$

柯西积分定理

单连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 Ω 上解析，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

多连通区域的柯西积分定理

设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的回路 C 内的复连通区域内解析，规定 $C; C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的正方向为逆时针，则：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_{C_1^+} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{C_2^+} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint\limits_{C_k^+} f(z)\mathrm{d}z$$

柯西积分公式

若 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则：

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} f(z_0)$$

解析函数高阶导数的积分表达式

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，有:

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

第7章 复变函数的级数展开

解析函数的泰勒展开

设 z_0 为函数 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中，展开系数为:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

解析函数的洛朗展开

复变函数的零点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点的函数值 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 复变函数 $f(z)$ 的零点。

复变函数的奇点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点**不解析**，即 $f(z)$ 在 z_0 点的导数不存在或不唯一，则称 z_0 为复变函数 $f(z)$ 的奇点。

奇点的分类

孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

非孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，除 z_0 点外存在 $f(z)$ 的其他奇点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

孤立奇点的分类

极点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点。

本性奇点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若**不存在**一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

可去奇点：设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点没有定义，但在 z_0 的去心邻域内解析，此时可定义 $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

解析函数的洛朗展开定理

若函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线。

例题

例1

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内，在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

$0 < |z| < 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$：

由于 $|z| < 1$，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n
\end{aligned}
$$

$|z| > 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$:

注意到 $|z| > 1$，则 $|1/z| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}
$$

例2

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

$f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-0| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}
$$

$f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-1| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
\end{aligned}
$$

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

留数定理

留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，设 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
$$

$f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为 $\mathrm{Res} f(z_0)$，定义为:

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中，a_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数

留数的求法

定义法

直接把 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 点作洛朗展开，找到 $(z-z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1}，由留数的定义可知：

$$\text{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

极限法

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，$f(z)$ 可在其孤立奇点 z_0 点作如下的洛朗展开：

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ \ a_{-m} \neq 0$$

则：

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

特殊情况

若 $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}, z_0$ 为 $g(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则：

$$\text{Res}f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\text{i}$，即：

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\text{i}\sum_{j=1}^{k}\text{Res}f(z_j)$$

例1

> 计算回路积分 $I = \oint_{l^+}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

令 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \dfrac{1}{(z+\text{i})(z-\text{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i},z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2}\\
&=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\
&=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)\\
&=\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2}\\
&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I&=\oint\limits_l\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}\\
&=2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}f(z_1)+\mathrm{Res}f(z_2)\right]\\
&=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\\
&=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

留数定理在实积分中的应用

计算无穷限奇异积分的柯西主值

利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分：

$$I=\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中，$f(\cos\theta,\sin\theta)$ 为不包含有孤立奇点 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数。

计算此类积分，利用欧拉公式换元，将实积分转换为复平面单位圆上的复积分，最后利用留数定理计算积分。

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有：

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$$

于是：

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$$
$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\oint_{C^+} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，C 是以复平面原点为圆心的单位圆周，即 $C:|z|=1$

例1

> 计算定积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$，其中 $0<\varepsilon<1$

令：

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\Longrightarrow\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\ \ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$ ，被积函数的两个一阶极点为：

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数 $f(z)$ 可写为：

$$f(z)=\frac{1}{\varepsilon(z-z_1)(z-z_2)}$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)f(z)\\&=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{\varepsilon(z-z_2)}\\&=\frac{1}{\varepsilon(z_1-z_2)}\\&=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

由留数定理，有：

$$\begin{aligned}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_1)\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\&=\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

于是积分为：

$$\begin{aligned}I&=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

例2

> 计算定积分：$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}\right)$

设 C 是复平面上的单位圆，

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$，$f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1=2-\mathrm{i}, z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$，只有 z_2 在单位圆 C 内。

由于 z_1,z_2 是 $(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}=0$ 的两根，于是 $f(z)$ 可表达为：

$$
f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}
$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_2)f(z)\\
&=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)}\\
&=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z_2-z_1)}\\
&=\frac{1}{4\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

于是由留数定理，有：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_2)\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}\\
&=2\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

第9章 傅里叶变换

第10章 拉普拉斯变换

第11章 δ 函数

第12章 小波变换初步

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解

问题

第14章 分离变量法

第15章 曲线坐标系下的分离变量

第16章 球函数

第17章 柱函数

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理