2.2

2.2-1

> 求 D_3 群的表示，表示空间为 $\mathbb{R}^3$ 空间，其中正三边形位于 xy 平面内，其中心位于坐标原点，a 轴与 x 轴重合。

e, d, f 的表示矩阵

$\mathbb{R}^3$空间中矢量绕 z 轴旋转 θ 角度这一线性变换可表示为：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

而 e, d, f 分别对应 $\mathbb{R}^3$空间中矢量绕 z 轴旋转 $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ 角度的线性变换，因此：

$$D(e)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \ D(d)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \ D(f)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a 的表示矩阵

设 $\vec{v}=x\vec{\mathrm{e}}_x+y\vec{\mathrm{e}}_y+z\vec{\mathrm{e}}_z$

$$D(a)\vec{\mathrm{e}}_x=\vec{\mathrm{e}}_x,\ \ D(a)\vec{\mathrm{e}}_y=-\vec{\mathrm{e}}_y,\ \ D(a)\vec{\mathrm{e}}_z=-\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$D(a)\vec{v}=xD(a)\vec{\mathrm{e}}_x+yD(a)\vec{\mathrm{e}}_y+zD(a)\vec{\mathrm{e}}_z=x\vec{\mathrm{e}}_x-y\vec{\mathrm{e}}_y-z\vec{\mathrm{e}}_z$$

因此：

$$D(a)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

b 的表示矩阵

$$D(b)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(b)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(b)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

于是：

$$D(b)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此：

$$D(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

c 的表示矩阵

$$D(c)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(c)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(c)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

于是：

$$D(c)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此：

$$D(c)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

综上，

$$D(e)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ D(d)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ D(f)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$D(a)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ D(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ D(c)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

2.2-2

> 计算说明 D_4 群的如下表示是可约表示还是不可约表示:
>
> $$D(C_4)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ D(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

解 $D(C_4)$ 的特征方程:

$$\det(D(C_4)-\lambda E)=0$$

即:

$$\lambda^2+1=0$$

解得:

$$\lambda=\pm\mathrm{i}$$

对于 $\lambda=\mathrm{i}$，特征向量为: $\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-\mathrm{i}$，特征向量为: $\begin{bmatrix}1&-\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

因此存在一个相似变换矩阵:

$$X_1=\begin{bmatrix}1&1\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

使得 $X_1^{-1}D(C_4)X_1$ 为对角矩阵。

解 $D(\sigma_x)$ 的特征方程:

$$\det(D(\sigma_x)-\lambda E)=0$$

即:

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

解得:

$$\lambda = \pm 1$$

对于 $\lambda = 1$，特征向量为: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda = -1$，特征向量为: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

因此存在一个相似变换矩阵:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使得 $X_2^{-1} D(\sigma_x) X_2$ 为对角矩阵。

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对比可知 $D(C_4)$ 和 $D(\sigma_x)$ 不能被同时相似对角化，因此这个表示是不可约表示。

2.2-3

> 证明 D_3 群的如下表示 $A(\mathrm{D}_3)$ 是二维不可约表示:
>
> $$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A(a) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
>
> $$A(d) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad A(b) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$
>
> $$A(f) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad A(c) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

选择 $\{d, a\}$ 作为生成元，可以生成 D_3 群。

解 $A(d)$ 的特征方程:

$$\det\left(A(d) - \lambda E\right) = 0$$

解得特征值:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

对于 $\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

于是存在矩阵：

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

使得 $X_1^{-1}A(d)X_1$ 是对角矩阵。

解 $A(a)$ 的特征方程：

$$\det\left(A(a)-\lambda E\right)=0$$

解得特征值：

$$\lambda=\pm 1$$

对于 $\lambda=1$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-1$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

于是存在矩阵：

$$X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

使得 $X_2^{-1}A(a)X_2$ 是对角矩阵。

由于：

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix},\quad X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

对比可知 $A(d)$ 和 $A(a)$ 不可能同时相似对角化，因此这个表示是不可约表示。

2.2-4

> 分别写出 D_3 群和 D_4 群的所有不等价不可约表示。

D_3 群的所有不等价不可约表示

D_3 群共有：$\{e\},\{d,f\},\{a,b,c\}$ 共 3 个类，因此有 3 个不等价不可约表示。

D_3 群的阶数为 6，而 $6=1^2+1^2+2^2$，因此 D_3 群有 2 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

D_3 群所有不等价不可约表示：

$$D^{(1)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,d,f,a,b,c$$

$$D^{(2)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,d,f;\ \ D^{(2)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=a,b,c$$

$$D^{(3)}(e)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(3)}(a)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$D^{(3)}(d)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{bmatrix},\quad D^{(3)}(b)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$D^{(3)}(f)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(3)}(c)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&1\\1&\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

D_4 群的所有不等价不可约表示

D_4 群有 $\{e\},\{C_4^1,C_4^3\},\{C_4^2\},\{\sigma_x,\sigma_y\},\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 共 5 个类，因此有 5 个不等价不可约表示。

D_4 群的阶数为 8，而 $8=1^2+1^2+1^2+1^2+2^2$，因此共有 4 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

D_4 所有不等价不可约表示：

$$D^{(1)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^1,C_4^2,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(2)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^1,C_4^2,C_4^3;\ \ D^{(2)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(3)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^2,\sigma_x,\sigma_y;\ \ D^{(3)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=C_4^1,C_4^3,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(4)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^2,\sigma_1,\sigma_2;\ \ D^{(4)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=C_4^1,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y$$

$$D^{(5)}(e)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^1)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^2)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^3)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$D^{(5)}(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_y)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_1)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_2)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$