1

> 求 $|\Psi_{AB}\rangle = x_1|0_A,0_B\rangle + x_2|0_A,1_B\rangle + x_3|1_A,0_B\rangle + x_4|1_A,1_B\rangle$ 的约化密度矩阵 ρ_A 和 ρ_B

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}|$$

$$\begin{aligned}\rho_A &= \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ &= \langle 0_B|\rho_{AB}|0_B\rangle + \langle 1_B|\rho_{AB}|1_B\rangle \\ &= (|x_1|^2 + |x_2|^2)|0_A\rangle\langle 0_A| + (|x_3|^2 + |x_4|^2)|1_A\rangle\langle 1_A| + (x_1x_3^* + x_2x_4^*)|0_A\rangle\langle 1_A| + (x_3x_1^* + x_4x_2^*)|1_A\rangle\langle 0_A|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_B &= \mathrm{Tr}_A(\rho_{AB}) \\ &= \langle 0_A|\rho_{AB}|0_A\rangle + \langle 1_A|\rho_{AB}|1_A\rangle \\ &= (|x_1|^2 + |x_3|^2)|0_B\rangle\langle 0_B| + (|x_2|^2 + |x_4|^2)|1_B\rangle\langle 1_B| + (x_1x_2^* + x_3x_4^*)|0_B\rangle\langle 1_B| + (x_2x_1^* + x_4x_3^*)|1_B\rangle\langle 0_B|\end{aligned}$$

2

> 设双电子自旋态为：
>
> $$\rho_{AB} = \alpha|+_A^z,+_B^z\rangle\langle +_A^z,+_B^z| + (1-\alpha)|-_A^z,-_B^z\rangle\langle -_A^z,-_B^z| + \gamma|+_A^z,+_B^z\rangle\langle -_A^z,-_B^z| + \gamma^*|-_A^z,-_B^z\rangle\langle +_A^z,+_B^z|$$
>
> 求 $\hat{\sigma}_A^z$ 和 $\hat{\sigma}_A^x$ 在此态的平均值。

$$\begin{aligned}\rho_A &= \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right) \\ &= \langle +_B^z|\rho_{AB}|+_B^z\rangle + \langle -_B^z|\rho_{AB}|-_B^z\rangle \\ &= \alpha|+_A^z\rangle\langle +_A^z| + (1-\alpha)|-_A^z\rangle\langle -_A^z|\end{aligned}$$

由于 $\hat{\sigma}_A^z|+_A^z\rangle = +1|+_A^z\rangle, \hat{\sigma}_A^z|-_A^z\rangle = -|-_A^z\rangle$，于是：

$$\hat{\sigma}_A^z\rho_A = \alpha|+_A^z\rangle\langle +_A^z| - (1-\alpha)|-_A^z\rangle\langle -_A^z|$$

$\hat{\sigma}_A^z$ 在 ρ_{AB} 态的平均值为：

$$\begin{aligned}\langle\hat{\sigma}_A^z\rangle &= \mathrm{Tr}_A\left(\hat{\sigma}_A^z\rho_A\right) \\ &= \langle +_A^z|\hat{\sigma}_A^z\rho_A|+_A^z\rangle + \langle -_A^z|\hat{\sigma}_A^z\rho_A|-_A^z\rangle \\ &= 2\alpha - 1\end{aligned}$$

由于

$$\hat{\sigma}_A^x \doteq \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\ \ \rho_A = \alpha|+_A^z\rangle\langle +_A^z| + (1-\alpha)|-_A^z\rangle\langle -_A^z| \doteq \begin{bmatrix}\alpha & 0\\0 & 1-\alpha\end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_A^x\rho_A \doteq \begin{bmatrix}0 & 1-\alpha\\\alpha & 0\end{bmatrix}$$

于是 $\hat{\sigma}_A^x$ 在 ρ_{AB} 的平均值为：

$$\langle\hat{\sigma}_A^x\rangle = \mathrm{Tr}_A\left(\hat{\sigma}_A^x\rho_A\right) = 0$$

3

> 求哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{\hbar\Omega}{2}[\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t)+\mathrm{h.c.}]$ 在 $\hat{H}_0=\frac{\hbar\omega_L}{2}\hat{\sigma}_z$ 的相互作用绘景的形式。

$$
\begin{aligned}
\hat{H}&=\frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{\hbar\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t)+\hat{\sigma}_-\exp(\mathrm{i}\omega_L t)\right]\\
&=\frac{\hbar\omega_L}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{\hbar\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t)+\hat{\sigma}_-\exp(\mathrm{i}\omega_L t)\right]\\
&=\hat{H}_0+\hat{V}(t)
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\hat{H}_0=\frac{\hbar\omega_L}{2}\hat{\sigma}_z
$$

$$
\hat{V}(t)=\frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z+\frac{\hbar\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t)+\hat{\sigma}_-\exp(\mathrm{i}\omega_L t)\right]
$$

由于 $\hat{H}_0$ 不含时，于是 $\hat{H}_0$ 的相互作用绘景形式：

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{0,\mathcal{I}}&=\exp(\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar)\hat{H}_0\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar)\\
&=\hat{H}_0\\
&=\frac{\hbar\omega_L}{2}\hat{\sigma}_z
\end{aligned}
$$

注意到：

$$
\exp(\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)\hat{\sigma}_z\exp(-\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)=\hat{\sigma}_z
$$

$$
\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)&=\hat{\sigma}_++[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,\hat{\sigma}_+]+\frac{1}{2!}[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,\hat{\sigma}_+]]+\cdots\\
&=\hat{\sigma}_++(\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_++\frac{(\mathrm{i}\omega_L t/2)^2}{2!}\hat{\sigma}_++\cdots\\
&=[1+(\mathrm{i}\omega_L t/2)+\frac{(\mathrm{i}\omega_L t/2)^2}{2!}+\cdots]\hat{\sigma}_+\\
&=\exp(\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_+
\end{aligned}
$$

同理，

$$
\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)\hat{\sigma}_-\exp(-\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)&=\hat{\sigma}_-+[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,\hat{\sigma}_-]+\frac{1}{2!}[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,[\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2,\hat{\sigma}_-]]+\cdots\\
&=\hat{\sigma}_-+(-\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_-+\frac{(-\mathrm{i}\omega_L t/2)^2}{2!}\hat{\sigma}_-+\cdots\\
&=[1+(-\mathrm{i}\omega_L t/2)+\frac{(-\mathrm{i}\omega_L t/2)^2}{2!}+\cdots]\hat{\sigma}_-\\
&=\exp(-\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_-
\end{aligned}
$$

于是可得 $\hat{V}(t)$ 的相互作用绘景形式：

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{\mathcal{I}}(t) &= \exp(\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar)\hat{V}(t)\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar) \\
&= \exp(\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)\hat{V}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2) \\
&= \exp(\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2)\left\{\frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t) + \hat{\sigma}_-\exp(\mathrm{i}\omega_L t)\right]\right\}\exp(-\mathrm{i}\omega_L t\hat{\sigma}_z/2) \\
&= \frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[\exp(\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_+\exp(-\mathrm{i}\omega_L t) + \exp(-\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_-\exp(\mathrm{i}\omega_L t)\right] \\
&= \frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left[\exp(-\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_+ + \exp(\mathrm{i}\omega_L t/2)\hat{\sigma}_-\right] \\
&= \frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega\left[\cos(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_x + \sin(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_y\right]
\end{aligned}$$

综上，

$$\begin{aligned}
H_{\mathcal{I}} &= H_{0,\mathcal{I}} + V_{\mathcal{I}}(t) \\
&= \frac{\hbar\omega_L}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar(\omega_0-\omega_L)}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega\left[\cos(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_x + \sin(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_y\right] \\
&= \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega\left[\cos(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_x + \sin(\omega_L t/2)\hat{\sigma}_y\right]
\end{aligned}$$

4

> 求哈密顿量 $\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_x\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$ 在 $\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger$ 的相互作用绘景的形式。

$$\hat{V} = \hbar g\hat{\sigma}_x\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$$

由于 $\hat{H}_0$ 不含时，于是：

$$\hat{H}_{0,\mathcal{I}} = \hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger$$

注意到：

$$\left[\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right), \hat{\sigma}_x\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right] = \mathrm{i}\omega_0\hat{\sigma}_y\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) + \omega\hat{\sigma}_x\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)$$

$$\left[\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right), \left[\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right), \hat{\sigma}_x\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]\right] = \left(\omega^2+\omega_0^2\right)\hat{\sigma}_x(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) + \mathrm{i}\left(2\omega\omega_0\right)\hat{\sigma}_y\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)$$

$$\left[\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right), \left(\omega^2+\omega_0^2\right)\hat{\sigma}_x(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) + \mathrm{i}\left(2\omega\omega_0\right)\hat{\sigma}_y\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\right] = \mathrm{i}\left(3\omega^2+\omega_0^2\right)\hat{\sigma}_y\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) + \omega\left(3\omega_0^2+\omega^2\right)\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)$$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{\mathcal{I}}(t) &= \exp(\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar)\hat{V}\exp(-\mathrm{i}\hat{H}_0 t/\hbar) \\
&= \exp\left[\mathrm{i}t\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\right]\left[\hbar g\hat{\sigma}_x\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}t\left(\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\right]
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathcal{I}} &= \hat{H}_{0,\mathcal{I}} + \hat{V}_{\mathcal{I}}(t) \\
&=
\end{aligned}$$

5

> 设仅存两种中微子 ν_μ 和 ν_τ，其哈密顿量为 $\hat{H}=\sum_{j=1}^{2}E_j\left|\nu_j\right\rangle\left\langle\nu_j\right|$，其中 $E_j=\sqrt{c^2p^2+m_j^2c^4}$。已知两种中微子的状态可表示为 $\left|\nu_\mu\right\rangle=\cos\theta\left|\nu_1\right\rangle+\sin\theta\left|\nu_2\right\rangle$ 和 $\left|\nu_\tau\right\rangle=-\sin\theta\left|\nu_1\right\rangle+\cos\theta\left|\nu_2\right\rangle$，设 $t=0$ 时刻体系产生一个 ν_μ，求 t 时刻探测到 ν_τ 的概率。

6

> 体系哈密顿量 $\hat{H}$ 不含时且具有非简并本征值 $\hbar\nu_n$ 和本征态 $\left|\nu_n\right\rangle$，物理量 $\hat{A}$ 的本征解 $\hat{A}\left|a_m\right\rangle=a_m\left|a_m\right\rangle$。设 $|\Psi(0)\rangle=\left|\nu_1\right\rangle$，此时测 $\hat{A}$ 得 a_m 的概率和总平均值为多少？；若测得 a_m，经 t 时间后再重复测量，再次得到 a_m 的概率为多少?

7

> 求状态 $|\Psi\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$ 的 Bloch 矢量 $\vec{r}$

8

> 设某二能级系统的哈密顿量为 $\hat{H}=\hbar\vec{\omega}\cdot\hat{\vec{\sigma}}=\hbar\sum_{j=x,y,z}\omega_j\hat{\sigma}_j$，求其 Bloch 矢量 $\vec{r}(t)$ 满足的动力学方程。

9

> 求 $\hat{S}\hat{J}_z\hat{S}^\dagger$，其中 $\hat{S}=\exp\left(-\mathrm{i}\phi\hat{J}_z/\hbar\right)\exp\left(-\mathrm{i}\theta\hat{J}_y/\hbar\right)$

10

> 在 Ramsey 谱学 中，需要测量如下二能级系统哈密顿量中的频率 Δ：$\hat{H}=-\Delta\hat{\sigma}_z$。为此制备系统初态 $|\Psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+_z\right\rangle+\left|-_z\right\rangle\right)$，并让它在 $\hat{H}$ 支配下演化固定时间 T，然后测量 $\hat{\sigma}_x$，求测得 $+_x$ 的概率，从中解出 Δ；如果重复该实验 N 次，计算得到 n 次 $+_x$ 的概率。

11

> 求量子谐振子降算符 $\hat{a}$ 的本征解 $\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$

12

> 证明量子谐振子降算符 $\hat{a}$ 的本征态 $|\alpha\rangle$ 可以写为 $|\alpha\rangle=\hat{D}(\alpha)|0\rangle$，其中 $\hat{D}(\alpha)=\exp(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a})$

13

> 求 $\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}$，其中 $\hat{S}=\exp\left[\frac{1}{2}\left(\xi^*\hat{a}^2-\xi\hat{a}^{\dagger 2}\right)\right]$ 与 $\xi=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

14

> 用 Peres-Horodecki 判据判断如下态是纠缠态的条件，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$|\Psi_\pm\rangle=\frac{|01\rangle\pm|10\rangle}{\sqrt{2}},|\Phi_\pm\rangle=\frac{|00\rangle\pm|11\rangle}{\sqrt{2}}$

> $\rho_1=\lambda\,|\Phi_+\rangle\,\langle\Phi_+|+(1-\lambda)\,|\Psi_+\rangle\,\langle\Psi_+|$

> $\rho_2=(1-\lambda)\,|\Psi_-\rangle\,\langle\Psi_-|+\lambda\,|11\rangle\,\langle11|$

> $\rho_3=\lambda\,|\Psi_-\rangle\,\langle\Psi_-|+\frac{1-\lambda}{3}(|\Psi_+\rangle\,\langle\Psi_+|+|\Phi_+\rangle\,\langle\Phi_+|+|\Phi_-\rangle\,\langle\Phi_-|)$

15

> 定义量子谐振子的两个正交分量 $\hat{X}_1=\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{2}$ 和 $\hat{X}_2=\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{2\mathrm{i}}$，求在降算符本征态 $|\alpha\rangle$ 的 $\delta\hat{X}_\theta$，其中 $\hat{X}_\theta=\cos\theta\hat{X}_1+\sin\theta\hat{X}_2$

16

> 求 $|\Psi\rangle=\sum_{i,j=0}^{1}a_{ij}\,|ij\rangle$ 的 von Neumann 熵，其中 $\sum_{i,j=0}^{1}|a_{ij}|^2=1$

17

> 求以下状态的 Concurrence：(1) Bell 态：$|\Psi_+\rangle=\frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$；(2) Werner 态：$\rho_{\mathrm{W}}=p\,|\Psi_+\rangle\,\langle\Psi_+|+(1-p)\frac{I_{4\times4}}{4}$，其中 $I_{4\times4}$ 为四维单位矩阵。

18

> 两种电子自旋处于 $|\Psi^{AB}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z^A-_z^B\rangle-|-_z^A+_z^B\rangle)$

> （1）先后测量 $\hat{S}_z^A$ 和 $\hat{S}_z^B$，测值和概率为多少?

> （2）先后测量 $\hat{S}_x^A$ 和 $\hat{S}_x^B$，测值和概率为多少?

> （3）先后测量 $\hat{S}_n^A$ 和 $\hat{S}_n^B$，测值和概率为多少? 其中，$\hat{S}_n=\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}},\vec{n}=\sin\theta\cos\varphi\vec{\mathrm{e}}_x+\sin\theta\sin\varphi\vec{\mathrm{e}}_y+\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_z$

19

> 求证三粒子自旋态 $|W\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(|+_z -_z -_z\rangle+|-_z +_z -_z\rangle+|-_z -_z +_z\rangle)$ 是总自旋算符平方及其第三分量的 共同本征态 $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

20

> 考虑一个处于 $|+_z\rangle$ 的粒子，执行 N 次关于算符 $\hat{\sigma}_k=\vec{n}_k\cdot\hat{\vec{\sigma}}$ 的测量，其中 $\vec{n}_k=\sin\frac{k\pi}{2N}\vec{\mathrm{e}}_x+\cos\frac{k\pi}{2N}\vec{\mathrm{e}}_z(k=1,2,\cdots,N)$ ，求:

> （1）全部测量结果都是 $+1$ 的概率。当 $N\to\infty$ 时出现什么?

> （2）若初态为 $|-_z\rangle$，全部测量结果都是 $+1$ 的概率。当 $N\to\infty$ 时 出现什么?