

Pre

兰州大学物理科学与技术学院

2024 年 8 月 28 日

外差干涉

设探测器表面上两束光的复振幅分别为 $U_M = A_M \exp[i(\omega_M t + \phi_M)]$ 和 $U_R = A_R \exp[i(\omega_R t + \phi_R)]$ 。其中，下标 M 代表测量光，下标 R 代表参考光。外差干涉得到的光强为：

$$\begin{aligned} I &= |U_M + U_R|^2 \\ &= |A_M \exp[i(\omega_M t + \phi_M)] + A_R \exp[i(\omega_R t + \phi_R)]|^2 \\ &= A_M^2 + A_R^2 + 2A_M A_R \cos[(\omega_M - \omega_R)t + (\phi_M - \phi_R)] \end{aligned}$$

定义两个物理量：

$$\omega_{\text{het}} := \omega_M - \omega_R, \quad \phi_{\text{het}} := \phi_M - \phi_R$$

则光强可以写为：

$$I = A_M^2 + A_R^2 + 2A_M A_R \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi_{\text{het}})$$

光强正比于平均电磁能流密度，不妨认为光强对探测器表面 S 的面积分就是探测器接收的功率 P ，即：

$$\begin{aligned}
 P &= \int I dS \\
 &= \int \left[A_M^2 + A_R^2 + 2A_M A_R \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi_{\text{het}}) \right] dS \\
 &= P_M + P_R + \int 2A_M A_R \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi_{\text{het}}) dS \\
 &= P_M + P_R + \text{Re} \left\{ \int 2A_M A_R \exp(i\omega_{\text{het}} t) \cdot \exp(i\phi_{\text{het}}) dS \right\} \\
 &= P_M + P_R + \text{Re} \left\{ 2 \exp(i\omega_{\text{het}} t) \int A_M A_R \exp(i\phi_{\text{het}}) dS \right\} \\
 &= P_M + P_R + \text{Re} \{ 2 \exp(i\omega_{\text{het}} t) \cdot A \exp(i\phi) \}, \quad A \exp(i\phi) := \int A_M A_R \exp(i\phi_{\text{het}}) dS \\
 &= P_M + P_R + 2A \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi) \\
 &= P_M + P_R + 2\sqrt{P_M P_R} |o| \cos(\omega_{\text{het}} t + \arg\{o\}), \quad o := \frac{A \exp(i\phi)}{\sqrt{P_M P_R}}
 \end{aligned}$$

一般来说, $A_M, A_R, \phi_{\text{het}}$ 都是探测器表面坐标的函数。

若考虑外差干涉的两束光均为平面波且正入射的情况, 则探测器接收的功率可简化为:

$$P = P_M + P_R + 2\sqrt{P_M P_R} |o| \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi_{\text{het}})$$

其中,

$$\omega_{\text{het}} = \omega_M - \omega_R, \quad \phi_{\text{het}} = \phi_M - \phi_R$$

$$P_M = \int A_M^2 dS, \quad P_R = \int A_R^2 dS$$

$$o = \frac{\int A_M A_R \exp(i\phi_{\text{het}}) dS}{\sqrt{P_M P_R}}$$

激光频率噪声

理想情况下，单频单纵模激光器输出的激光全部由受激辐射产生，没有自发辐射。此时电场与时间的关系为：

$$E(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

其中， E_0 表示电场强度振幅， f_0 表示频率， φ_0 表示初相位。频率 f_0 和初相位 φ_0 不随时间变化，输出频率为 f_0 的单一谱线。

实际上，相位不总是线性增加的。任何与相位线性演化的偏差都称为频率噪声。频率噪声主要来源于：

- 固有的自发辐射。这将产生白噪声 (功率谱密度为常数的噪声)
- 激光腔、驱动电路等不同来源的扰动。这将产生闪烁噪声 (功率谱密度与频率成反比的噪声)

频域表征手段

在频域，采用功率谱密度 (PSD, Power Spectral Density) 表征激光频率噪声。
对于一个功率信号 $x(t)$ ，其傅里叶变换不存在。可新定义一个截断函数 $x_T(t)$ ：

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , t \in [0, T] \\ 0 & , t \notin [0, T] \end{cases}$$

函数 $x_T(t)$ 的傅里叶变换是存在的，记为 $\hat{x}_T(f)$ 。
根据帕塞瓦尔定理，信号 $x(t)$ 的平均功率 P 可写为：

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}_T(f)|^2 df \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{x}_T(f)|^2}{T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{x}_T(f)|^2}{T} df \end{aligned}$$

信号 $x(t)$ 的功率谱密度，记为 $S_{xx}(f)$ ，定义为：

$$S_{xx}(f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{x}_T(f)|^2}{T}$$

利用功率谱密度可将平均功率写为：

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

功率谱密度描述的是单位频率区间内携带的平均功率。

给定频带 $[f_1, f_2]$ 中信号的平均功率可以由功率谱密度给出：

$$P_{\text{bandlimited}} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_{xx}(f) df$$

功率信号 $x(t)$ 的自相关函数，记为 $R_{xx}(\tau)$ 或 $x(t) \star x(t)$ 定义为：

$$R_{xx}(\tau) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x_T(t) x_T^*(t - \tau) dt$$

维纳-辛钦定理给出，对于平稳随机过程 $x(t)$ ，功率谱密度和自相关函数是一对傅里叶变换对，即：

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau$$

频率噪声和相位噪声

对一般的随时间演化 (不一定是线性演化) 的相位 $\varphi(t)$, 其在 t 时刻的瞬时频率, 记为 $\nu(t)$, 定义为:

$$\nu(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

频率噪声就是瞬时频率 $\nu(t)$ 的随机扰动。相位噪声就是 $\varphi(t)$ 的随机扰动。截断后可写为:

$$\nu_T(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_T(t)}{dt}$$

与之对应, 在频域的关系为:

$$\hat{\nu}_T(f) = if\hat{\varphi}_T(f)$$

频率噪声与相位噪声的关系

频率噪声的功率谱密度:

$$S_\nu(f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{\nu}_T(f)|^2}{T}$$

相位噪声的功率谱密度:

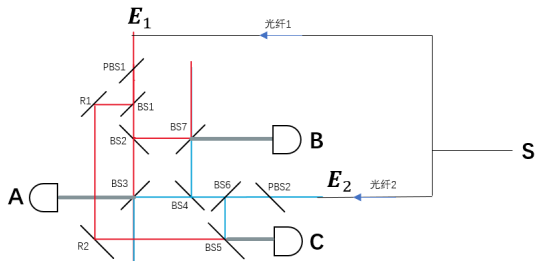
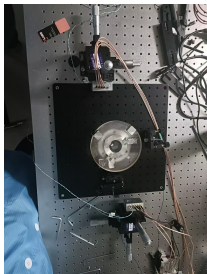
$$S_\varphi(f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{\varphi}_T(f)|^2}{T}$$

利用关系式 $\hat{\nu}_T(f) = i f \hat{\varphi}_T(f)$ 可得二者的关系为:

$$S_\nu(f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|\hat{\nu}_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{f^2 |\hat{\varphi}_T(f)|^2}{T} = f^2 S_\varphi(f)$$

知道了相位噪声也就可以得到频率噪声。

实验光路



干涉仪中的激光频率噪声

以探测器 A 为例，设外差干涉的两束光均为平面波正入射。
前面给出了探测器 A 接收的功率为：

$$P = P_M + P_R + 2\sqrt{P_M P_R} |o| \cos(\omega_{\text{het}} t + \phi_{\text{het}})$$

从光源 S 经光纤 1 到探测器 A 的光程记为 L_{A1}

从光源 S 经光纤 2 到探测器 A 的光程记为 L_{A2}

先不考虑光纤噪声，只考虑频率噪声，设 t 时刻激光器产生的光场为：

$$E(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi_0(t)]$$

则 t 时刻在探测器 A 的表面上干涉的两束光的相位差 ϕ_{het} 为：

$$\phi_{\text{het}} = \phi_0 \left(t - \frac{L_{A1}}{c} \right) - \phi_0 \left(t - \frac{L_{A2}}{c} \right)$$

ϕ_{het} 随时间的变化可以描述激光频率噪声。

若 $L_{A1} = L_{A2}$ ，则 $\phi_{\text{het}} = 0$ ，此时激光频率噪声被消除。

光纤热噪声

光纤热噪声是光纤传输中由于光纤材料的热扰动引起的噪声。

环境热扰动 → 光纤长度扰动 → 光程扰动 → 相位扰动

设光纤 1, 2 的光程的扰动分别为 $\delta L_1(t), \delta L_2(t)$, 则相位扰动 $\delta\phi_{f1}(t), \delta\phi_{f2}(t)$ 分别为:

$$\delta\phi_{f1}(t) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta L_1(t), \quad \delta\phi_{f2}(t) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta L_2(t),$$

不考虑频率噪声, 只考虑光纤热噪声, 探测器 A 上的两束光的相位为:

$$\phi_{M,A} = \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{A1} + \delta\phi_{f1}(t) = \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} [L_{A1} - \delta L_1(t)]$$

$$\phi_{R,A} = \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{A2} + \delta\phi_{f2}(t) = \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} [L_{A2} - \delta L_2(t)]$$

相位差为:

$$\phi_{\text{het},A} = \phi_{M,A} - \phi_{R,A} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} [(L_{A1} - L_{A2}) + (\delta L_1(t) - \delta L_2(t))]$$

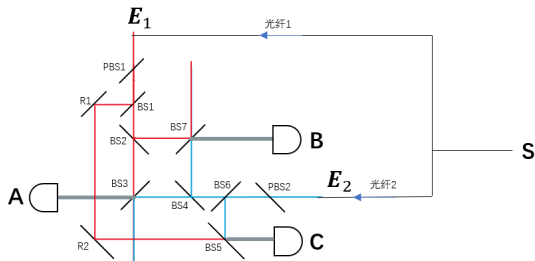
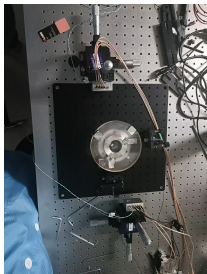
探测器 A 可作为参考干涉仪，其上的干涉信号不携带 **test mass** 的信息。
对于携带 **test mass** 信息的探测器 B，其上的干涉信号的相位差还要多携带 **test mass** 的信息：

$$\phi_{\text{het},B} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} [(L_{B1} - L_{B2}) + (\delta L_1(t) - \delta L_2(t))] + \phi_{\text{test}}$$

若能使光程满足 $L_{A1} - L_{A2} = L_{B1} - L_{B2}$ ，则可以得到：

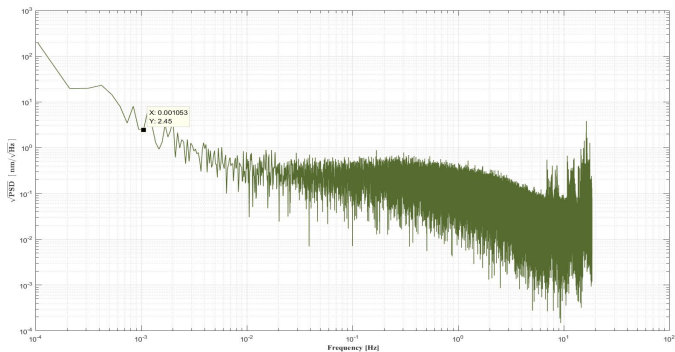
$$\phi_{\text{test}} = \phi_{\text{het},B} - \phi_{\text{het},A}$$

实验光路



数据





空气环境下静置的噪声功率谱密度，由探测器 A, B 结果相减得到。