已知 Kehagias-Sfetsos 黑洞背景时空可以由以下线元表示：

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

$$f(r)=1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8Mr\omega^2}\right)$$

其中，M 为黑洞质量，ω 为一参数。求下面的问题：

（1）写出度规行列式；

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-f(r) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

度规行列式为：

$$g=\det(g_{\mu\nu})=-r^4\sin^2\theta$$

（2）黑洞事件视界的位置；

事件视界的半径记为 r_h，其满足：

$$\frac{1}{g_{rr}}=f(r_h)=0$$

即：

$$1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r_h^2-\sqrt{r_h^4+8Mr_h\omega^2}\right)=0$$

方程可化简为：

$$r_h^2-2Mr_h+\omega^2=0$$

解得：

$$r_{h\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

（3）无限红移面的位置；

无限红移面半径记为 r_s，其满足：

$$g_{tt}|_{r=r_s}=0$$

即：

$$-f(r_s)=0$$

解得：

$$r_{s\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

（4）Hawking 温度；

$$F_H=G_H=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=r_{h+}}=\frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-\frac{2M\omega^2+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3}{\omega^2\sqrt{8M\omega^2\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^4}}$$

Hawking 温度：

$$T=\frac{\sqrt{F_HG_H}}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot F_H=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-\frac{2M\omega^2+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3}{\omega^2\sqrt{8M\omega^2\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)+\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^4}}\right]$$

（5）光球的位置。

选取 $x^\mu=(t,r,\theta,\varphi)$

光子的拉格朗日量：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]$$

考虑光子在赤道面 $\theta=\pi/2$ 上运动，光子的拉格朗日量可简化为：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

光子的拉格朗日量中不显含广义坐标 t,φ，因此对应的广义动量是守恒量：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{t}}=-E,\ \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=l$$

即：

$$-f(r)\dot{t}=-E,\ \ r^2\dot{\varphi}=l$$

可以解得对应的广义速度：

$$\dot{t}=\frac{E}{f(r)},\ \ \dot{\varphi}=\frac{l}{r^2}$$

又光子的拉格朗日量为零，即：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right]=0$$

将 $\dot{t}=\dfrac{E}{f(r)}$，$\dot{\varphi}=\dfrac{l}{r^2}$ 代入上式可得：

$$\dot{r}=E^2-f(r)\frac{l^2}{r^2}$$

其中，$f(r)=1+\dfrac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8Mr\omega^2}\right)$

或者可写为：

$$\dot{r}+f(r)\frac{l^2}{r^2}=E^2$$

定义有效势：

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}} &\equiv f(r)\frac{l^2}{r^2}\\
&=\frac{l^2}{r^2}\left[1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8Mr\omega^2}\right)\right]\\
&=\frac{l^2}{r^2}+\frac{l^2}{2\omega^2}\left(1-\frac{\sqrt{r^4+8Mr\omega^2}}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\dot{r}^2+V_{\text{eff}}=E^2$$

由于 $\dot{r}^2\geqslant 0$，因此光子只能在

$$E^2-V_{\text{eff}}\geqslant 0$$

的区域运动。

$V_{\text{eff}}(r)$ 的极大值点记为 r_{ps}

当 $E^2=(V_{\text{eff}})_{\max}$ 且光子的初始位置就在 r_{ps} 且初速度非零时，有：

$$\dot{r}=0$$

此时光子的运动轨迹是稳定的圆。

即光球的半径就是 r_{ps}，其满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_{\text{ps}}}=0$$

解得光球半径：

$$r_{\text{ps}}=\frac{3M^2}{\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}}+\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}$$