第0章 数学基础

立体角

任意有向曲面的立体角

微分形式

有向面元的微元立体角：

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^3}$$

积分形式

$$\Omega = \iint\limits_{S} \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^3}$$

球坐标下球面微元立体角

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

两个重要公式

高斯公式

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint\limits_{V} (\nabla \cdot \vec{A}) \mathrm{d}V$$

斯托克斯公式

$$\oint\limits_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_{S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

第1章 静电场

基本概念

库仑定律

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{12}$$

式中，$\vec{F}_{12}$ 是**真空中**电荷 q_1 对电荷 q_2 的静电力，$\vec{e}_{12}$ 是从 q_1 到 q_2 的单位矢量，其中：

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

上式中，ε_0 称为真空介电常量或真空电容率，其数值为：

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$$

对应的k值为：

$$k = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

库仑定律又可以写为：

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{12}$$

电场强度

电场强度，记为 $\vec{E}$，定义为：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

其中，q_0 是试探电荷的电荷量，$\vec{F}$ 是试探电荷所受电场力。

特别地，若产生电场的源是点电荷 q，则有：

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &\equiv \frac{\vec{F}}{q_0} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{e}_r \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

其中，r 是场点到源点的位矢大小，$\vec{e}_r$ 是源点指向场点的单位矢量。

电场叠加原理

点电荷组产生的电场在某点的电场强度等于各点电荷单独存在时所产生的电场在该点电场强度的矢量叠加。

例：一半径为 R 的均匀带电半球壳，面电荷密度为 σ，求球心处的场强。

解：

取过球心且垂直于半球壳平面的轴为 z 轴，采用球坐标 (r, θ, φ)，半球壳的位置可描述为：

$$
S : r = R,\ \ \theta \in [0, \pi/2],\ \ \varphi \in [0, 2\pi)
$$

半球壳上 θ, φ 处的面元：

$$
\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
$$

对应的电荷：

$$
\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
$$

对应的电场强度大小：

$$
\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
$$

由对称性可知，总的电场强度矢量仅 z 分量不为零，因此只需要计算对应的电场强度 z 分量：

$$
\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cos\theta = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
$$

积分：

$$
\begin{aligned}
E_z &= \int \mathrm{d}E_z \\
&= \iint\limits_S \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta) \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) \\
&= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

例：半径为 R 的带电细圆环，电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin\varphi, \lambda_0$ 是一个正的常数， φ 是半径 R 和 x 轴正方向所成的角，求环心 O 处的电场强度 $\vec{E}$

答案：

$$
\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{e}_y
$$

解：

$\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ 范围内的电荷：

$$
\mathrm{d}q = \lambda R\mathrm{d}\varphi = \lambda_0 R\sin\varphi\mathrm{d}\varphi
$$

$\mathrm{d}q$ 产生的电场大小：

$$
\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi
$$

由对称性，原点处电场的 x 分量 $E_x = 0$，y 分量为：

$$
\begin{aligned}
E_y &= 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \mathrm{d}E\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

考虑方向，得：

$$\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{e}_y$$

电偶极子

由一对等量异号点电荷组成的带电体系叫做**电偶极子**。两电荷间的距离 l 远比场点到它们的距离小

电偶极矩

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

其中，$\vec{l}$ 的方向：从负电荷指向正电荷；$\vec{l}$ 的大小 l：正负电荷间的距离

电场线

在电场中作出许多曲线，使这些曲线上每一点的切线方向和该点场强方向一致，那么所有这样作出的曲线叫做电场的**电场线**

静电场电场线性质：

（1）电场线自正电荷(或自无穷远)，止于负电荷(或伸向无穷远)，但不会在没有电荷的地方中断。

（2）若带电体系中正、负电荷一样多，则由正电荷出发的全部电场线都集中到负电荷上去。

（3）两条电场线不会相交。

（4）**静**电场中的电场线不会形成闭合线。

电场强度通量

通过某一曲面 S 的电场强度通量，记为 Φ_E，定义为：

$$\mathit{\Phi}_E \equiv \iint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

其中，θ 是 $\vec{E}$ 与 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的夹角

高斯定理

通过任意闭合曲面 S 的电场强度通量等于该面所包围的**所有电荷量**的代数和 $\sum q$ 除以 ε_0, 与闭合曲面外的电荷无关。

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i$$

例：求半径为 R，带电量为 Q 的，**均匀带电球壳**内外场强。

解：

$r>R$ 区域：

由对称性，球壳外某点的电场强度方向与球壳中心和此点连线平行

高斯定理：

$$\oiint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q$$

取高斯面为球面，方程两边分别代入，得：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

于是：

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

$0<r<R$ 区域：

高斯定理：

$$\oiint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q$$

同样由对称性，取高斯面为球面，得：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 0$$

于是:

$$E = 0$$

综上:

$$E = \begin{cases} 0,\ 0 \leqslant r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ r > R \end{cases}$$

例:求均匀带电球体内外的电场分布,球体半径为 R,球体总带电量为 Q

解:

由对称性,球体内外某点 P 的电场方向与 P 和球心 O 的连线共线

$r > R$,取高斯面为球面,则由高斯定理:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

分别计算上式等号两端表达式,有:

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

于是:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\ r > R$$

$r < R$,取高斯面为球面,则由高斯定理:

$$4\pi r^2 E = Q(\frac{r}{R})^3$$

于是:

$$E = \frac{Qr}{4\pi R^3},\ r < R$$

静电场力做功与路径无关。

证明:

考虑点电荷 q 产生的电场 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ ，电场力对试探电荷 q_0 所做的功为：

$$
\begin{aligned}
\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}E\cos\theta\mathrm{d}l\\
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}E\mathrm{d}r\\
&=q_0\int_{r_P}^{r_Q}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r\\
&=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q})
\end{aligned}
$$

显然，此功与路径无关。

静电场的环路定理给出：

$$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

高斯公式给出：

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

由上面两式，得：

$$\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\Longrightarrow\nabla\times\vec{E}=\vec{0}$$

这就是说，**静电场**是**无旋场**。

电势能的改变量/增量

在电场中把一个试探电荷 q_0 从 P 点移到 Q 点，此过程中**试探电荷电势能的改变量**(或称之为增量)，记为 ΔE_p，定义为此过程中**静电场力对试探电荷做功的负值**$-A_{PQ}$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_p &\equiv -A_{PQ} \\
&= -\int_P^Q q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= -q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}
$$

电势差

P, Q 两点之间的电势差，记为 U_{PQ}，定义为从 P 到 Q 移动单位正电荷时电场力所做的功，并可被进一步表达为从 P 到 Q 电场沿任意路径的路径积分：

$$
\begin{aligned}
U_{PQ} &\equiv \frac{-\Delta E_p}{q_0} \\
&= \frac{A_0}{q_0} \\
&= \int_P^Q \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}
$$

电势

空间中某点 P 的电势 $U(P)$ 就是 P 点对人为选定的电势零点的电势差

若以选取无穷远处为电势零点，则**点电荷**产生的电场中某一点电势：

$$
\begin{aligned}
U(P) &= \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_{r_p}^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_P}
\end{aligned}
$$

电势叠加原理

点电荷组的电场中某点的电势，等于各个点电荷单独存在时的电场在该点电势的代数和。

等势面的性质：

等势面与电场线处处正交。

等势面较密集的地方场强大，较稀疏的地方场强小。

电场强度和电势的关系

$$\vec{E}=-\nabla U$$

证明：

考虑点电荷 q 产生的电场，电势为：

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

设 $\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z$，注意到：

$$\begin{aligned}\nabla f(r)&=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{e}_z\\&=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{e}_z\\&=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\left(\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}\\&=\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r\end{aligned}$$

利用上面结论，可以验证：

$$\begin{aligned}-\nabla U&=-\nabla(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r})\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla(\frac{1}{r})\\&=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}(\frac{1}{r})}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\vec{e}_r\\&=\vec{E}\end{aligned}$$

对点电荷组及电荷连续分布的情况，证明也是类似的。

带电体系的静电能

带电体系的静电能 W_e 等于把各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时抵抗静电力所做的功 A'

两个点电荷的情形

设两个点电荷 q_1, q_2 原本处在位置 P_1, P_2

由电势能差的定义（电势能的改变量等于电场力做功的负值）：

先把 q_1 移动到它应该在的位置，此过程还没有已经存在的电场，电场力为零，静电能改变量为零。

再把 q_2 移动到它应该在的位置，由于已经存在由 q_1 产生的电场，故此过程电场力做功的负值即为 q_2 电势能的改变量：

$$
\begin{aligned}
E_p &= -\int_{\infty}^{P_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q_2 \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q_2 U_{12}
\end{aligned}
$$

其中，U_{12} 表示点电荷 q_1 **单独**放置在 P_1 处时在 P_2 处产生的电势。

多个点电荷的情形

$$
\begin{cases}
E_{p1} = 0 \\
E_{p2} = q_2 U_{12} \\
E_{p3} = q_3 (U_{13} + U_{23}) \\
\vdots \\
E_{pn} = q_n (U_{1n} + U_{2n} + \cdots + U_{n-1,n})
\end{cases}
$$

用求和符号表达：

$$
E_{pi} = q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_{ji}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)
$$

总电势能：

$$
\begin{aligned}
E_p &= \sum_{i=1}^{n} E_{pi} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_{ji} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

由于：

$$
\begin{aligned}
q_i U_{ji} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
q_j U_{ji} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_{ij}}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

所以：

$$
q_i U_{ji} = q_j U_{ji}
$$

E_p可进一步表达为：

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

记 U_i 为除 q_i 外其余电荷在 q_i 位置 P_i 上产生的电势，则电势能又可以写成：

$$
E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i U_i
$$

电荷连续分布情形的静电能

体电荷分布：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_e U \mathrm{d}V$$

面电荷分布：

$$W_e = \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma_e U \mathrm{d}S$$

线电荷分布：

$$W_e = \frac{1}{2}\int\limits_l \eta_e U \mathrm{d}l$$

例：计算均匀带电球壳的静电自能，设球的半径为 R，总带电荷量为 q

电荷应均匀分布在球壳表面，电荷面密度为：

$$\sigma_e = \frac{q}{4\pi R^2}$$

容易得到球壳处的电势为：

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

于是：

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\oiint\limits_S \sigma_e U \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}\oiint\limits_S \frac{q}{4\pi R^2}\cdot\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\oiint\limits_{(\text{球面})}\mathrm{d}S \\ &= \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^3}\cdot 4\pi R^2 \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

第1章课后习题选解

1.3-6

半径为 R 的无穷长直圆筒面上均匀带电，沿轴线单位长度的电荷量为 λ .求场强分布

答案：

$$\begin{cases} E=0 & ,r<R \\ E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & ,r>R \end{cases}$$

解：

$r>R$, 取高斯面为一个高为 h,底面半径为 r 的闭合圆柱，由高斯定理，有：

$$2\pi rhE=\frac{1}{\varepsilon_0}h\lambda$$

解得：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

1.3-4

根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 q_e 的原子核(可以看作点电荷)，外面是带负电的电子云.在正常状态(核外电子处在s态)下，电子云的电荷密度分布是球对称的：

$$\rho_e(r)=-\frac{q_e}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

其中，a_0是一常量. 求原子内的电场分布

答案：

$$E=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\frac{2}{a_0^2}r^2+\frac{2}{a_0}r+1)e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

思路：积分有点难算(可以用待定系数法求此类积分)，不过思路还是明确的

解：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}(q_e+\int_0^r 4\pi r^2\rho_e(r)\mathrm{d}r)$$

于是：

$$E=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1-\frac{4}{a_0^3}\int_0^r r^2e^{-\frac{2r}{a_0}}\mathrm{d}r)$$

为求解积分，由经验，设：

$$\left((Ar^2+Br+C)e^{-\frac{2r}{a_0}}\right)'=r^2e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

即：

$$\left(-\frac{2A}{a_0}r^2+(2A-\frac{2B}{a_0})r+B-\frac{2C}{a_0}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}=r^2e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

对应项系数相等，解方程组：

$$\begin{cases}-\frac{2A}{a_0}=1\\ 2A-\frac{2B}{a_0}=0\\ B-\frac{2C}{a_0}=0\end{cases}$$

解得：

$$A=-\frac{a_0}{2}$$
$$B=-\frac{a_0^2}{2}$$
$$C=-\frac{a_0^3}{4}$$

于是：

$$\begin{aligned}E&=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1-\frac{4}{a_0^3}\int_0^r r^2e^{-\frac{2r}{a_0}}\mathrm{d}r)\\&=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1-\frac{4}{a_0^3}(-\frac{a_0}{2}r^2-\frac{a_0^2}{2}r-\frac{a_0^3}{4})e^{-\frac{2r}{a_0}}\Big|_0^r\right)\\&=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\frac{2}{a_0^2}r^2+\frac{2}{a_0}r+1)e^{-\frac{2r}{a_0}}\end{aligned}$$

一道考试题

一个厚度为 b 的无限大带电平板，其电荷体密度为 : $\rho_e = kx(0 \leqslant x \leqslant b), k$为正的常数

（1）求平板外两侧任意点 P_1, P_2 的场强大小

思路：题目可没说是“金属带电平板”；带电平板电荷体密度不均匀，但我们可以用微元法，极薄的平板周围的电场分布我们是清楚的，再积分即可。

解：

厚度为 b 的无限大带电平板可分割成大量薄平板，每个薄平板的电荷体密度可看作是均匀的，由均匀带电平板周围的电场分布及电场叠加原理知，整个厚度为 b 的无限大带电平板左右两侧电场强度大小处处相等，于是由高斯定理：

$$2\Delta SE = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b kx\Delta S\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon_0}k\Delta S\frac{b^2}{2}$$

解得：

$$E = \frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

（2）求平板内任一点P的电场强度

思路：在第一问的基础上，我们现在可以把高斯面的一部分取在平板内了

解：

$$\begin{aligned} -E_{内}\Delta S + E_{外}\Delta S &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_x^b kx\Delta S\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}k\Delta S\frac{b^2 - x^2}{2} \end{aligned}$$

解得：

$$E_{内} = \frac{k}{2\varepsilon_0}(x^2 - \frac{b^2}{2}), \qquad (0 \leqslant x \leqslant b)$$

答案：

$$E_{内} = \frac{k}{2\varepsilon_0}(x^2 - \frac{b^2}{2}), \qquad (0 \leqslant x \leqslant b)$$

（3）求场强为零的点的坐标

答案：$x=\frac{b}{\sqrt{2}}$

解:

令 $E_{内}=0$,解得:

$$x=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

一道小难题

一无限大平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ_e,求通过小孔中心 O 且与平面垂直的直线上某点 P 的场强和电势（设小孔中心O的电势为零）

答案：

$$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\vec{e}_x$$

$$U=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(R-\sqrt{R^2+x^2})$$

解:

假设有一块完整的无限大均匀带电平面，其可被人为分为两部分：一个实心圆和除圆以外的部分。设完整平板所产生的电场为 $\vec{E}_{total}$,实心圆产生的电场为 $\vec{E}_o$, 除实心圆外部分产生的电场为 $\vec{E}$, 则由电场叠加原理，有:

$$\vec{E}_{total}=\vec{E}_o+\vec{E}$$

于是:

$$\vec{E}=\vec{E}_{total}-\vec{E}_o$$

这就是说，若想求无限大均匀带电平板除实心圆以外部分产生的电场，只要求出整个平板产生的电场，再减去实心圆产生电场即可.

由高斯定理，有:

$$2\Delta SE_{total}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Delta S\sigma_e$$

解得:

$$E_{total}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$$

下面利用极坐标求实心圆产生的电场 E_o：

$$
\begin{aligned}
E_o &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{r^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r=0}^{r=R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e x r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= 2\pi\int_{r=0}^{r=R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e x r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{xr}{[x^2(1+\frac{r^2}{x^2})]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\\
&= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{\frac{r}{x}}{(1+(\frac{r}{x})^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(\frac{r}{x})\\
&= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{x})^2}})\Bigg|_{r=0}^{r=R}\\
&= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})
\end{aligned}
$$

于是:

$$
E = E_{total} - E_o = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}
$$

由于题目假定小孔中心电势为零，故:

$$
\begin{aligned}
U &= \int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\
&= \int_0^x -\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(R-\sqrt{R^2+x^2})
\end{aligned}
$$

第2章 静电场中的导体和电介质

基本概念

导体静电平衡的条件

均匀**导体**的静电平衡条件就是其体内电场强度处处为零。

处于静电平衡的导体的性质

导体是个等势体，导体表面是个等势面。

导体以外靠近其表面地方的场强处处与表面垂直。

导体内部处处没有未抵消的净电荷（即电荷的体密度$\rho_e = 0$），电荷只分布在导体的表面。

导体表面之外附近空间的场强 $\vec{E}$ 与该处导体表面的电荷面密度 σ_e 的关系：

$$E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

导体壳(腔内无带电体)

导体壳的**内表面上处处没有电荷**，电荷只能分布在**外表面**

空腔内没有电场，或者说，空腔内的电势处处相等

导体壳(腔内有带电体)

当导体壳腔内有其他带电体时，在静电平衡状态下，导体壳的内表面所带电荷与腔内电荷的代数和为 0

孤立导体

附近没有其他导体和带电体的导体

孤立导体的电容

$$C \equiv \frac{q}{U}$$

电容器的电容

$$C_{AB} \equiv \frac{q}{U_{AB}}$$

电容器的串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

电容器的并联

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

电容器储能

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

电介质

电介质就是绝缘介质，它们是不导电的。

无极分子位移极化

在没有外加电场时，无极分子的等效负电荷与等效正电荷的位置重合，不存在电矩.当加上外电场，等效正电荷与等效负电荷就要错开来，从而形成由等效负电荷指向等效正电荷的电偶极矩，称为**感生电矩**；对于均匀电介质，其内部仍是电中性的，但是在与外电场垂直的两个介质端面上，由于极化电荷不能离开电介质，故会出现极化电荷

有极分子取向极化

每个有极分子都有固有电矩，但宏观上相互抵消，于是电矩的矢量和为零，宏观上不产生电场；当施加一个外加电场，固有电矩会不同程度地转向，于是在介质端面会出现未被抵消地束缚电荷，这种极化机制称为**取向极化**.当然，在取向极化中也会存在一定程度的位移极化，但取向极化占据主导地位.

电极化强度(度量电介质极化状态)：

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{(\Delta V内)} \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$

均匀极化

电介质中各点的电极化强度矢量大小和方向都相同。

电极化强度与极化电荷分布的关系

$$\oiint_{\partial V} \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum_{(\partial V内)} q'$$

极化电荷面密度

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P_n$$

各向同性线性均匀介质电极化率

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

比例常量 χ_e 叫作极化率。极化率与电介质的种类有关，是介质材料的属性。真空中 $\chi_e = 0$

电位移矢量

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

各向同性线性均匀介质中的电位移矢量

各向同性线性均匀介质中，有：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

比例常量 χ_e 叫作极化率。极化率与电介质的种类有关，是介质材料的属性。真空中 $\chi_e = 0$

于是：

$$\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E}\end{aligned}$$

相对介电常量，记为 ε，定义为：

$$\varepsilon \equiv 1 + \chi_e$$

则：

$$\begin{aligned}\vec{D} &= (1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E} \\ &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\end{aligned}$$

有介质时的高斯定理

$$\oiint_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(\partial V内)}q_0$$

其中，$\sum\limits_{(\partial V内)}q_0$ 是 ∂V 内总自由电荷量。

做题几板斧

其中，q_0 是 S 内的自由电荷。

$$\begin{gathered}\sigma_e'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n \\ \vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E} \\ \varepsilon=1+\chi_e \\ \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \oiint_{S}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)}q_0\end{gathered}$$

各向同性线性介质中，三个矢量：$\vec{P},\vec{E},\vec{D}$存在各种转化关系：

$\vec{P},\vec{E}:\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{E},\vec{D}:\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{D},\vec{P}:\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\frac{1}{\chi_e})\vec{P}$

以及系数转化关系：

$\varepsilon=1+\chi_e$

电场的能量和能量密度

匀强电场：

$$W_e=\frac{1}{2}DEV$$

电能密度：

$$w_e = \frac{W_e}{V}$$

匀强电场：

$$w_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$$

真空中，$\varepsilon = 1$

进一步，无介质（真空）：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

对全空间进行积分：

$$W_e = \iiint\limits_V w_e \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{1}{2}DE\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V$$

在真空中，进一步有：

$$W_e = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V$$

第2章习题选解

2.3-4

平行板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中间充满两层厚度为 $d_1, d_2(d_1 + d_2 = d)$、介电常量为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的电介质层

(1)求电容C

结合：

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

和介质中的高斯定理：

$$\oiint\limits_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_0$$

取一个圆柱形高斯面，圆柱一端的底面在电容器一个极板内部，圆柱另一端的底面在电介质中，有：

$$D\Delta S=\sigma_{e0}\Delta S$$

于是第一步求出电位移矢量$\vec{D}$：

$$D=\sigma_{e0}=\frac{Q}{S}(\text{假设电容器带电荷}Q)$$

再由$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(\varepsilon\text{是电介质的介电常量})$分别求出电介质1,2中的实际电场(原来电场和退极化场叠加后的结果)：

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}$$
$$E_2=\frac{D}{\varepsilon_2\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}$$

第三步求电极板电势差：

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{Qd_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}+\frac{Qd_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}$$

最后由电容的定义：

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}$$

(2)

当金属极板上带电面密度为$\pm\sigma_{e0}$时，求两层介质间分界面上的极化电荷面密度σ'_e

分析：

电介质解题几板斧：

$$\sigma'_e=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n$$
$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\varepsilon=1+\chi_e$$
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\oiint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{S\text{内}}q_0$$

要想求 σ'_{e0}, 就要求电极化矢量 $\vec{P}$

第一步：

结合(电容器两极板间电场为零，电位移矢量也为零):

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

和介质中的高斯定理:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)}q_0$$

有:

$$D\Delta S=\sigma_{e0}\Delta S$$

即:

$$D=\sigma_{e0}$$

于是:

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}$$
$$E_2=\frac{D}{\varepsilon_2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_2\varepsilon_0}$$

又由于:

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E}$$

于是:

$$P_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0E_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{(\varepsilon_1-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1}$$
$$P_2=\frac{(\varepsilon_2-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_2}$$

于是两电介质分界面上的电荷面密度(最好规定图上哪个板带正电):

$$\sigma_e'=P_1-P_2=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sigma_{e0}$$

(3)求电容器两极板间电势差U

$$U=\frac{(\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}$$

(4)两层电介质中的电位移D

$$D=\sigma_{e0}$$

电介质解题几板斧：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{S内}q_0$$
$$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\sigma_e'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n$$

各向同性线性介质中，三个矢量：$\vec{P},\vec{E},\vec{D}$存在各种转化关系：

$\vec{P},\vec{E}:\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{E},\vec{D}:\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{D},\vec{P}:\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\frac{1}{\chi_e})\vec{P}$

以及系数转化关系：

$\varepsilon=1+\chi_e$

一道考试题

某球形介质球在匀强电场 E 下被均匀极化，该介质的介电常量为 ε，求球心处的电场强度大小

思路：均匀极化，极化电荷只分布在介质球表面，介质球内部没有极化电荷；球坐标下求解

解：

令 z 轴于原电场 $\vec{E}$ 同向平行，

$$\begin{aligned}P&=\chi_e\varepsilon_0 E\\&=(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_e' &= \vec{P} \cdot \vec{e}_n \\
&= P\cos\theta \\
&= (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}q' &= \sigma_e \mathrm{d}S \\
&= \sigma_e R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 R^2 E \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_z' &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q'}{R^2} \cdot \cos\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E\cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{4\pi}
\end{aligned}
$$

（其中，正负代表方向）

$$
\begin{aligned}
E_z' &= \oiint\limits_S \mathrm{d}E_z' \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{4\pi} \oiint\limits_S \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{3}
\end{aligned}
$$

实际电场是E, E'的矢量和：

$$
\begin{aligned}
E_{real} &= E' + E \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{3} + E \\
&= \frac{(4 - \varepsilon)E}{3}
\end{aligned}
$$

第3章 恒定电流

基本概念

电流

单位时间内通过导体某一横截面的电荷量，称为电流.

$$I \equiv \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

电流密度

导体中某点的电流密度 $\vec{j}$ 的方向是该点的电流方向。在该点取一个与电流密度方向相同的面元 $\mathrm{d}\vec{S}'$，通过该面元的电流记为 $\mathrm{d}I$，则该点的电流密度大小 j 由下式定义：

$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S'$$

其中，$\mathrm{d}S'$ 是面元的面积

一般地，若在某点取一个面元 $\mathrm{d}\vec{S}$，面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 与 该点电流密度 $\vec{j}$ 的夹角记为 θ，可将 面元 $\mathrm{d}S$ 往垂直于电流密度 $\vec{j}$ 的平面上投影，投影得到的面元记为 $\mathrm{d}\vec{S}'$，$\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}S'$ 满足几何关系：

$$\mathrm{d}S' = \cos\theta \mathrm{d}S$$

由电流密度的定义，通过面元 $\mathrm{d}\vec{S}'$ 的电流，记为 $\mathrm{d}I'$，满足：

$$\mathrm{d}I' = j\mathrm{d}S'$$

通过面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电流记为 $\mathrm{d}I$，从几何上容易看出，在该点附近的小区域内，电流密度可近似认为不变，则任一通过 $\mathrm{d}S$ 的电荷也必定通过 $\mathrm{d}S'$，于是得到：

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I'$$

将上面的两条关系代入上式，得：

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I' = j\mathrm{d}S' = j\cos\theta\mathrm{d}S = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

这就是说，通过任意一个面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电流 $\mathrm{d}I$ 可用电流密度 $\vec{j}$ 表达为：

$$\mathrm{d}I = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

利用电流密度，可以写出通过某一有限大曲面 S 的电流 I：

$$I=\iint\limits_{S}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

恒定电流

电流场不随时间变化的电流称为恒定电流。

电流连续方程（实质是电荷守恒定律）

积分形式

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

其中，q 是 V 内总电荷量。

或者也可以写为：

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V}\rho\mathrm{d}V$$

微分形式

高斯公式给出：

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\limits_{V}(\nabla\cdot\vec{j})\mathrm{d}V$$

再结合电流连续方程的积分形式

$$\begin{aligned}\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{V}\rho\mathrm{d}V\\&=-\iiint\limits_{V}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V\end{aligned}$$

得到：

$$\iiint\limits_{V}(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t})\mathrm{d}V=0$$

于是：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

这就得到电流连续方程的微分形式。

恒定电流

电流场不随时间变化的电流称为恒定电流

恒定电流的性质

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

电阻和电阻率

均匀导体

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

其中，R 是电阻，ρ 是电阻率，l 是长度，S 是横截面积

非均匀导体

$$R = \int \frac{\rho}{S} \mathrm{d}l$$

电导率

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$$

σ 是电导率，ρ 是电阻率

电导

$$G \equiv \frac{1}{R}$$

欧姆定律

宏观形式

$$I=\frac{U}{R}$$

微观形式

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

普遍欧姆定律微分形式

$$\vec{j}=\sigma(\vec{K}+\vec{E})$$

其中，$\vec{K}$ 表示作用在单位正电荷上的非静电力。

焦耳定律微观形式

$$p=\rho j^2=\frac{j^2}{\sigma}=\sigma E^2$$

其中，p 是单位体积内的热功率，称为热功率密度。

基尔霍夫方程组

基尔霍夫第一方程组（节点电流方程组）

汇于各节点的各支路电流的代数和为零。（基础是恒定电流条件）

对于一个有 n 个节点的完整电路，可写出 $n-1$ 个独立的方程组，称为基尔霍夫第一方程组。

基尔霍夫第二方程组（回路电压方程组）

规定电势从高到低的电势降落为正，电势从低到高的电势降落为负，则沿回路环绕一周，电势降落的代数和为 0

确定内阻上电势降落正负号方法（看绕行方向与规定电流方向的关系）：

绕行方向与规定电流方向同向，电势降落为正；绕行方向与规定电流反向，电势降落为负

确定电源上电势降落正负号方法（看绕行方向是先碰到电源正极还是先碰到电源负极）：

绕行时**先碰到电源正极**后碰到电源负极，**电势降落为正**；绕行时**先碰到电源负极**后碰到电源正极，**电势降落为负**

对于一个有 n 个节点 p 条支路的电路，共有 $p-n+1$ 个独立的回路方程，它们构成基尔霍夫第二方程组。

第4章 恒定磁场

基本概念

安培分子环流假说

组成磁铁的最小单元就是环形电流。若这样一些分子环流定向地排列起来，在宏观上就会显示出 $\mathrm{N,S}$ 极来，这就是安培分子环流假说。

安培定律

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12}=k\frac{I_1I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{e}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$k=\frac{\mu_0}{4\pi},\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$$

其中，$\mathrm{d}\vec{F}_{12}$ 是电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$ 对电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 的作用力

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F}_2&=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L_1}\frac{I_1I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{e}_{12})}{{r_{12}}^2}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\oint\limits_{L_1}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{e}_{12}}{r_{12}^2}\end{aligned}$$

磁感应强度

$$\mathrm{d}\vec{F}_2=I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{B}$$

$$\vec{B}\equiv\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L_1}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

毕奥-萨伐尔定律

微分形式

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

其中，$I\mathrm{d}\vec{l}$ 是电流元，$\vec{e}_r$ 是从电流元所在位置指向场点位置的单位矢量，r 是电流元与场点的距离

积分形式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

例：求有限长载流直导线产生的磁场

设 l 是以 O 为原点，以竖直向上为正方向，建立一维坐标系后导线上一点 P 相对原点 O 的**位矢。**

先找 l,θ关系：

$$\tan(\pi-\theta) = \frac{r_0}{l} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{r_0}{-l}$$

$$l = -r_0\cot\theta$$

两边取微分：

$$\boxed{\mathrm{d}l = r_0\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta}$$

再找 r,θ 关系：

$$\sin(\pi-\theta) = \frac{r_0}{r} \Longrightarrow \sin\theta = \frac{r_0}{r} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{r_0}{\sin\theta}}$$

于是（消去 $\mathrm{d}l,r$）：

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{A_1}^{A_2}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

无限长载流直导线$(\theta_1=0,\theta_2=\pi)$：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

无限长载流直导线周围的磁感应强度B与距离r_0的一次方成反比

磁感应通量（磁通量）

$$\Phi_B\equiv\iint\limits_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

磁场的“高斯定理”

积分形式

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

安培环路定理

恒磁场中适用

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_{(L内)}I$$

当穿过回路 L 的电流方向与回路 L 的环绕方向服从右手法则时，$I>0$，反之，$I<0$

安培力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

平行无限长直导线间的相互作用

作用在单位长度导线上的作用力的大小为：

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

其中，a 是两直导线的间距

载流线圈的磁矩

任意形状的载流平面线圈作为整体，在均匀外场中不受力，但受到一个力矩，这力矩总是力图使这线圈的磁矩 $\vec{m}$ (或者说它的右旋法线矢量 $\vec{e}_n$)转到磁感应强度矢量 $\vec{B}$的方向

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

其中，$\vec{m} = IS\vec{e}_n$

洛伦兹力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

第5章 电磁感应和暂态过程

基本概念

法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，$\mathscr{E}$ 是回路内感应电动势，Φ 是穿过回路的磁通量

$\mathscr{E}$ 的正方向与 Φ 的正方向满足右手法则。

楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它(感应电流)所激发的磁场来**阻碍**引起感应电流的磁通量的变化。

动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律给出：

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，Φ 可写为：

$$\Phi=\iint\limits_{S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

从上式可见，产生感生电动势有两种途径：

（1）回路面积在随时间变化，产生动生电动势。

（2）磁场在随时间变化，产生感生电动势。

动生电动势

动生电动势只可能存在于运动的那一段导体上，而不动的那一段导体上没有动生电动势。

“导体切割磁感线时产生动生电动势”

$$\mathscr{E}=\int\limits_{L}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

感生电动势

随时间变化的磁场会在其周围激发一种电场，称为感应电场或涡旋电场。

涡旋电场不是由电荷激发，而是由随时间变化的磁场激发；描述涡旋电场的电场线是闭合的，从而它不是保守场。

数学表达式：

$$\oint\vec{E}_{旋}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

感生电动势由涡旋电场产生，即：

$$\mathscr{E} = \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

一般情况下，空间的总电场 $\vec{E}$ 是静电场 $\vec{E}_{静}$ 和涡旋电场 $\vec{E}_{旋}$ 的叠加，即：

$$\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋}$$

由于静电场是无旋场，即：

$$\oint_{\partial S} \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

所以感生电动势可以写为：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + 0 \\
&= \oint_{\partial S} (\vec{E}_{旋} + \vec{E}_{静}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}$$

另一方面，法拉第电磁感应定律给出：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}$$

两者对比可得：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

这是电磁学的基本方程之一。

第6章 磁介质

基本概念

磁化强度矢量

磁化强度矢量$\vec{M}$，定义为单位体积内分子磁矩的矢量和，数学表达式为：

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \to 0^+} \frac{\sum \vec{m}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

电介质公式

$$\oint_L \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{(L\text{内})} I'$$

磁化强度与介质表面磁化电流的关系

$$M_{\mathrm{t}} = i'$$

其中，M_{t} 是 $\vec{M}$ 的切向分量，i' 是介质表面单位长度上的磁化电流

矢量式：

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

其中，$\vec{e}_n$ 是磁介质表面外法线的单位矢量。

只有介质表面附近 $\vec{M}$ 有切向分量的地方 $\vec{i}' \neq \vec{0}$

磁介质中的安培环路定理

考虑磁介质，安培环路定理应写为：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L\text{内})} I_0 + \mu_0 \sum_{(L\text{内})} I'$$

磁场强度矢量，记为 $\vec{H}$，定义为：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\begin{cases} \oint\limits_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{(L内)} I_0 + \mu_0 \sum\limits_{(L内)} I' \\ \oint\limits_L \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum\limits_{(L内)} I' \\ \vec{H} \equiv \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \end{cases} \Longrightarrow \oint\limits_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum\limits_{(L内)} I_0$$

磁场的两个普遍公式（磁介质情况也适用）

磁场的“高斯定理”

$$\boxed{\oiint\limits_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

$\vec{H}$ 矢量的安培环路定理

$$\boxed{\oint\limits_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum\limits_{(L内)} I_0}$$

磁化率和磁导率

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{m}} \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = (1 + \chi_{\mathrm{m}})\mu_0 \vec{H} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

其中，χ_m 称为磁化率，$\mu \equiv 1 + \chi_m$ 称为磁导率

顺磁质和抗磁质

顺磁质 $\chi_m > 0$

抗磁质 $\chi_m < 0$

磁介质的边界条件

$\vec{B}$ 的法线分量的连续性

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0，\text{或}\ B_{2n} = B_{1n}$$

在边界面两侧磁感应强度的法线分量连续

$\vec{H}$ 的切线分量的连续性

$$H_{2t}=H_{1t}\text{，或 }\vec{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{0}$$

在边界面两侧磁场强度矢量的切线分量连续

磁路定理

磁感应管叫作磁路。

闭合电路：

$$\begin{aligned}\mathscr{E}&=\sum_i IR_i\\&=I\sum_i R_i\\&=I\sum_i\frac{l_i}{\sigma_i S_i}\end{aligned}$$

磁路：

$$\begin{aligned}NI_0&=\oint\limits_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\&=\sum_i H_i l_i\\&=\sum_i\frac{B_i l_i}{\mu_i\mu_0}\\&=\sum_i\frac{\Phi_{Bi}l_i}{\mu_i\mu_0 S_i}\end{aligned}$$

磁路定理

$$\begin{cases}\text{磁动势}\mathscr{E}_m=NI_0\\\text{磁阻}R_{mi}=\dfrac{l_i}{\mu_i\mu_0 S_i}\\\text{磁势降落}H_i l_i=\Phi_B R_{mi}\end{cases}$$

$$\mathscr{E}_m = \sum_i H_i l_i = \Phi_B \sum_i R_{mi}$$

电路和磁路的对比

电路	电动势 $\mathscr{E}$	电流 I	电导率 σ_i	电阻 $R_i = \frac{l_i}{\sigma_i S_i}$	电势降落 IR_i
磁路	磁动势 $\mathscr{E}_m = NI_0$	磁感应通量 Φ_B	磁导率 $\mu_i \mu_0$	磁阻 $R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i \mu_0 S_i}$	磁势降落 $H_i l_i = \Phi_B \frac{l_i}{\mu_i \mu_0 S_i}$

磁场的能量和能量密度

磁场的能量密度

$$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

磁场的能量

$$W_\mathrm{m} = \iiint_V w_\mathrm{m} \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V$$

第7章 交流电

基本概念

交流电路

在一个电路里，若电源的电动势 $e(t)$ 随时间做周期性变化，则各段电路中的电压 $u(t)$ 和 $i(t)$ 都将随时间做周期性变化，这种电路叫作**交流电路**。

任何非简谐的交流电都可分解为一系列不同频率的简谐成分。（周期函数展成傅里叶级数）

简谐交流电的任何变量 [电动势 $e(t)$、电压 $u(t)$、电流 $i(t)$] 都可以写成时间 t 的正弦或余弦函数的形式，我们采用余弦函数的形式：

$$
\begin{cases}
e(t) = \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \\
u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\
i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)
\end{cases}
$$

峰值

与机械简谐振动的振幅相对应，每个交变简谐量都有自己的幅值，或称**峰值。**

$\mathscr{E}_0$：电动势的峰值

U_0：电压的峰值

I_0：电流的峰值

相位

$\omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_i$ 称为相位；其中，$\varphi_e, \varphi_u, \varphi_i$ 称为初相位

交流电路中的元件

交流电路中某个元件的特性用两个物理量，**阻抗** Z 和**相位差** φ 来描述（相位差指电压**与**电流的相位差，其中，“与”是个介词）

阻抗和相位差

设一个元件两端电压和流过这个元件的电流分别为：

$$
u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\
i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)
$$

则这个元件的阻抗，记为 Z，定义为：

$$
Z \equiv \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0/\sqrt{2}}{I_0/\sqrt{2}} = \frac{U}{I}
$$

这个元件的相位差，记为 φ，定义为：

$$
\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i
$$

交流电路中的电阻的阻抗和相位差

$$
Z_R = R
$$

$$\varphi = 0$$

交流电路中的电容的阻抗和相位差

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

电容元件的阻抗 Z_C 也称为**容抗**。从上式可看出，容抗与频率成反比。电容具有高频短路，直流开路的性质。

电容上，电压的相位落后于电流的相位 $\pi/2$

交流电路中的电感的阻抗和相位差

$$Z_L = \omega L$$

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

电感元件的阻抗 Z_L 也称为**感抗**。电感元件具有阻高频、通低频的性质。

电感上，电压的相位超前电流的相位 $\pi/2$

矢量图解法

交流电路复数解法

复电压、复电流和复阻抗

交流电路中某元件上实际的电压和电流：

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

在此基础上可定义复电压和复电流：

$$\begin{cases} \tilde{U} \equiv U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \\ \tilde{I} \equiv I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \end{cases}$$

其中，$\mathrm{j}^2 = -1$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ 易知，复电压和复电流与实际电压和实际电流的关系为：

$$
\begin{cases} u(t) = \Re\{\tilde{U}\} \\ i(t) = \Re\{\tilde{I}\} \end{cases}
$$

一段电路上的复阻抗，记为 $\tilde{Z}$，定义为：

$$
\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}
$$

其中，$\tilde{U}$ 和 $\tilde{I}$ 分别是这段电路上的复电压和复电流。

利用复电压和复电流的定义，复阻抗可进一步表达为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} &\equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} \\
&= \frac{U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}}{I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}} \\
&= \frac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)}
\end{aligned}
$$

再注意到，之前定义了阻抗和相位差：

$$
Z \equiv \frac{U_0}{I_0},\ \ \varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i
$$

于是复阻抗可进一步表达为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \frac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} \\
&= Z e^{\mathrm{j}\varphi}
\end{aligned}
$$

从上式可见，一个元件的复阻抗给出了此元件的阻抗和相位信息：

$$
\boxed{Z = |\tilde{Z}|}
$$

$$
\boxed{\varphi = \arg \tilde{Z}}
$$

电阻元件的复阻抗

$$
Z_R = R,\ \ \varphi = 0
$$

$$
\tilde{Z}_R = R
$$

电容元件的复阻抗

$$Z_C = \frac{1}{\omega C},\ \ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-\mathrm{j}\pi/2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

电感元件的复阻抗

$$Z_L = \omega L,\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{Z}_L = \omega L e^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j}\omega L$$

串联电路复数解法

注意到，“取实部”操作 $\Re\{\cdot\}$ 是线性操作，即：

$$\Re\{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\} = \lambda_1 \Re\{z_1\} + \lambda_2 \Re\{z_2\}$$

对于实际电压 $u = U_0 \cos(\omega + \varphi_u)$，其对应的复电压定义为 $\tilde{U} \equiv U_0 e^{\mathrm{j}(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{u})}$ 是有原因的。对复电压取实部后就能得到实际电压，即：

$$\Re\{\tilde{U}\} = u$$

对于串联电路，总电压的瞬时值等于各段分电压之和：

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

问题是，总电压对应的复电压 $\tilde{U}$ 又如何用分电路的复电压 $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ 表达?

类似地，总电压对应的复电压取实部后应得到实际的总电压，即 $\tilde{U}$ 应满足

$$\Re\{\tilde{U}\} = u_1(t) + u_2(t)$$

注意到，若 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$，则：

$$\begin{aligned}\Re\{\tilde{U}\} &= \Re\{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2\} \\ &= \Re\{\tilde{U}_1\} + \Re\{\tilde{U}_2\} \\ &= u_1(t) + u_2(t)\end{aligned}$$

这就说明，我们的猜想：

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$$

是正确的。

再同时除以复电流 $\tilde{I}$ 得到：

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

$$\boxed{\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}$$

$$\boxed{\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2}$$

交流电的功率

瞬时功率

$$P(t) = u(t)i(t)$$

设：

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t),\ \ u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

则利用“积化和差”公式，瞬时功率可表达为：

$$\begin{aligned} P(t) &= U_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi) + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

平均功率

$$\begin{aligned} \bar{P} &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi}$$

纯电阻元件的平均功率

纯电阻元件，$\varphi = 0, \cos\varphi = 1$

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos\varphi \\ &= \frac{1}{2}U_0 I_0 \\ &= \frac{1}{2}I_0^2 R\end{aligned}$$

纯电容元件的平均功率

纯电容元件，$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$

$$\bar{P} = 0$$

纯电感元件的平均功率

纯电感元件，$\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$

$$\bar{P} = 0$$

功率因数

普遍情形下，任意一个与外界有两个连接点的电路（称为二端网络），它两端的**电压**与其中的**电流**之间的相位差 φ 可以取 $-\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$ 之间的任意值，从而 $\cos\varphi$ 介于 $0 \sim 1$ 之间。

利用有效值 $U \equiv \frac{U_0}{\sqrt{2}}, I \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}}$，可将二端网络的平均功率写为：

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos\varphi \\ &= UI\cos\varphi\end{aligned}$$

其中，正因子 $\cos\varphi$ 称为该二端网络的**功率因数**。

有功电流和无功电流

当一个用电器中的**电压**与**电流**之间有相位差 φ 时，可定义有功电流 $I_{\parallel}$ 和无功电流 $I_{\perp}$：

$$I_{\parallel} \equiv I\cos\varphi$$

$$I_{\perp} \equiv I\sin\varphi$$

电路中的平均功率可写为：

$$\begin{aligned}\bar{P} &= UI\cos\varphi \\ &= UI_{\parallel}\end{aligned}$$

可见，只有 $I_{\parallel}$ 分量对平均功率有贡献

视在功率

视在功率，记为 S，定义为：

$$S \equiv UI$$

利用视在功率 S 和功率因数 $\cos\varphi$，可将平均功率表达为：

$$\bar{P} = S\cos\varphi$$

有功功率和无功功率

$$P_{\text{有功}} \equiv UI_{\parallel} = UI\cos\varphi = S\cos\varphi$$

显然，

$$\bar{P} = P_{\text{有功}}$$

$$P_{\text{无功}} = UI_{\perp} = UI\sin\varphi = S\sin\varphi$$

从而：

$$S = \sqrt{P_{\text{有功}}^2 + P_{\text{无功}}^2}$$

有功电阻和电抗

一个电路的复阻抗 $\tilde{Z} = Ze^{\mathrm{j}\varphi} = r + \mathrm{j}x$ 的实部 r 称为**有功电阻**，虚部 x 叫作**电抗**

对于 RC 串联电路，

$$\tilde{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}$$

RC 串联电路的有功电阻 r 和电抗 x 为：

$$r = R$$

$$x = -\frac{1}{\omega C}$$

电容性电路的电抗 $x<0$

电感性电路的电抗 $x>0$

负的电抗叫**容抗**

正的电抗叫**感抗**

品质因数（Q 值）

一个电抗元件的品质因数，记为 Q，定义为：

$$Q \equiv \frac{P_{无功}}{P_{有功}} = \frac{UI_{\perp}}{UI_{\parallel}} = \frac{I\sin\varphi}{I\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{x}{r}$$

损耗角 δ

$$\delta \equiv \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\tan\delta = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cot\varphi = \frac{P_{有功}}{P_{无功}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\delta = \frac{1}{Q}, \quad Q = \frac{1}{\tan\delta}$$

$\tan\delta$ 称为**耗散因数**

第7章习题选解

2020期末

并联电路复数解法

$$\boxed{\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}}$$

第8章 麦克斯韦电磁理论和电磁波

基本概念

位移电流

恒定条件下，有：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 \\ = \iint_{S} \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

其中，I_0 是穿过曲面 S 的传导电流

上式在非恒定情况下不适用。

在非恒定情况下，有电流连续性方程：

$$\iint_{\partial V} \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}t}$$

介质中的高斯定理：

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_0$$

对时间求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \oiint_{\partial V} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

与电流连续性方程比较，得：

$$\oiint_{\partial V}(\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

上式表明，$\vec{j}_0+\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 这个量永远是连续的。

透过某一曲面 S 的电位移通量，记为 Φ_D，定义为：

$$\Phi_D \equiv \iint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

有：

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$ 称为位移电流，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 称为位移电流密度

传导电流 $I_0=\iint\limits_S \vec{j}_0\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 与位移电流 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\iint\limits_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 合在一起，称为**全电流**。全电流在任何情况下都是连续的。

在恒定情况下，有安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_0$$

上式不适用于非恒定情况。非恒定情况下，有**麦克斯韦位移电流假说**，即用全电流来替换传导电流：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_0+\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

在电介质中的位移电流：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \varepsilon_0\iint\limits_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint\limits_S \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}
$$

注意到，介质中，有：

$$
\oiint\limits_{\partial V} \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -Q'
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oiint\limits_{\partial V} \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oiint\limits_{\partial V} \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}
$$

另一方面，极化电荷的连续性方程为：

$$
\oiint\limits_{\partial V} \vec{j}_P\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t}
$$

其中，$\vec{j}_P$ 是极化电流密度

结合两式，可得：

$$
\oiint\limits_{\partial V} \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oiint\limits_{\partial V} \vec{j}_P\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组积分形式

$$\begin{cases}\oiint\limits_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Q_0\\ \oint\limits_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\iint\limits_{S}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\ \oiint\limits_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\\ \oint\limits_{\partial S}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_0+\iint\limits_{S}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\end{cases}$$

其中，Q_0 是 V 内总电荷量，I_0 是通过曲面 S 的总传导电流

麦克斯韦方程组微分形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_{e0}\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

其中，ρ_{e0} 是自由电荷体密度，$\vec{j}_0$ 是传导电流密度，$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 是位移电流密度

三个描述介质性质的方程

各向同性线性介质中：

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}\\ \vec{j}_0=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

坡印廷矢量

坡印廷矢量，记为 $\vec{S}$，定义为：

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{S}$ 的方向代表电磁能传播的方向，$\vec{S}$ 的大小代表单位时间流过与之垂直的单位面积的电磁能量。$\vec{S}$ 就是电磁能流密度矢量。

简谐波平均能流密度

$$\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

又由于 $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}$，于是:

$$\bar{S} \propto E_0^2，\text{或}\ \ \bar{S} \propto H_0^2$$

这就是说，电磁波中的能流密度正比于电场或磁场振幅的平方。

自由空间内传播的平面电磁波的性质

（1）电磁波是横波。令 $\vec{k}$ 代表带电磁波传播方向的单位矢量，则振动的电场强度矢量 $\vec{E}$ 和磁场强度矢量 $\vec{H}$ 都与 $\vec{k}$ 垂直，即:

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \ \ \vec{H} \perp \vec{k}$$

（2）电场强度矢量与磁场强度矢量垂直，即:

$$\vec{E} \perp \vec{H}$$

（3）$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 同相位，并且在任何时刻、任何地点，$\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ 三个矢量总构成右旋系，即 $\vec{E} \times \vec{H}$ 的方向总是沿着传播方向 $\vec{k}$

（4）$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的幅值成比例:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0} H_0$$

（5）电磁波的传播速率为:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

在真空中，$\varepsilon = 1, \mu = 1,$ 电磁波在真空中的传播速度为:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$