第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

向量分析基本知识

爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A}\in\mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A}=A_1\vec{\mathrm{e}}_1+A_2\vec{\mathrm{e}}_2+A_3\vec{\mathrm{e}}_3\equiv\sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1,\vec{\mathrm{e}}_2,\vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x,y,z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A}\in\mathbb{R}^3$ 简写为：

$$\vec{A}=\sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i\rightarrow\vec{A}=A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ,i=j\\ 0 & ,i\neq j\end{cases}$$

三阶单位全反对称张量（三阶 Levi-Citita 符号）ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & ,ijk=123,231,312,\text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到}123\\ -1 & ,ijk=132,213,321,\text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到}123\\ 0 & ,ijk\text{中有相同指标}\end{cases}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

一些简单算例

$\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$

$A_i \delta_{ij} = A_j$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j \vec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$$

梯度、散度、旋度

梯度（gradient）的定义

设 $\psi(\vec{r})$ 是标量场，$\psi(\vec{r})$ 其梯度，记为 $\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r})$，由下式定义：

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi(\vec{r})$$

其中，$\mathrm{d}\vec{r}$ 是位矢 $\vec{r}$ 的微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 是标量场 $\psi(\vec{r})$ 因位矢 $\vec{r}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 的定义为：

$$\mathrm{d}\psi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$

散度（divergence）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\ \vec{A}$，定义为：

$$\mathrm{div}\ \vec{A} \equiv \lim_{V \to 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

旋度（curl）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 $\mathrm{curl}\ \vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\mathrm{curl}\ \vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与面元 σ 的正绕行方向满足右手定则。

直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A}=\partial_iA_i$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k$$

∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为：

$$\nabla\equiv\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i$$

其中，∂_i 的定义为：

$$\partial_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ∇ 算子，可将梯度、散度、旋度表示为：

$$\mathrm{grad}\ \psi=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi\equiv\nabla\psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A}=\partial_iA_i\equiv\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k\equiv\nabla\times\vec{A}$$

为了书写方便，以后用 $\nabla\psi,\nabla\cdot\vec{A},\nabla\times\vec{A}$ 分别来指代梯度、散度、旋度。

梯度与方向导数的关系

方向导数

标量场 ψ 在 $\vec{r}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为：

$$\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}\equiv\lim_{v\to0^+}\frac{\psi(\vec{r}+\vec{v})-\psi(\vec{r})}{v}$$

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{r}$ 点处沿曲面上 $\vec{r}$ 点的外法向的方向导数简记为：

$$\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial n}$$

梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\psi$$

设 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{n}\mathrm{d}r$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 同向的单位向量，则有：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}\mathrm{d}r=\mathrm{d}\psi$$

即：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=\frac{\psi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r})-\psi(\vec{r})}{\mathrm{d}r}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场 ψ 的梯度 $\nabla\psi$ 在某一方向 $\vec{n}$ 的投影恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla\cdot\vec{A}\equiv\lim_{V\to0^+}\frac{1}{V}\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint\limits_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{\Sigma}(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

分析工具

$$\begin{cases}
\vec{\mathrm{e}}_i\cdot\vec{\mathrm{e}}_j=\delta_{ij}\\
\vec{A}=A_i\vec{\mathrm{e}}_i\\
A_i\delta_{ij}=A_j\\
\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i\\
\vec{A}\times\vec{B}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_iA_jB_k\\
(\vec{A}\times\vec{B})_l=\varepsilon_{ljk}A_jB_k\\
\nabla\psi=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\\
\nabla\cdot\vec{A}=\partial_iA_i\\
\nabla\times\vec{A}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k\\
\partial_i\psi=(\nabla\psi)_i\\
\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i\\
\nabla^2\psi\equiv\nabla\cdot(\nabla\psi)=\partial_i\partial_i\psi\\
\nabla^2\vec{A}\equiv(\nabla^2A_i)\vec{\mathrm{e}}_i\\
\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}\\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}\\
\partial_ix_j=\delta_{ij}
\end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

与 $\vec{r}$ 有关的公式

> $\nabla\cdot\vec{r}=3$

$$\nabla\cdot\vec{r}=\partial_ix_i=3$$

> $\nabla\times\vec{r}=\vec{0}$

$$\nabla\times\vec{r}=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jx_k=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\delta_{jk}=\vec{0}$$

从左往右证的公式

> $\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi)&=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i(\varphi\psi)\\&=\vec{\mathrm{e}}_i\varphi\partial_i\psi+\vec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_i\varphi\\&=\varphi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi+\psi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\varphi\\&=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi\end{aligned}$$

> $\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\vec{A})&=\partial_i(\varphi\vec{A})_i\\&=\partial_i(\varphi A_i)\\&=\varphi\partial_iA_i+A_i\partial_i\varphi\\&=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\varphi\\&=(\vec{A}\cdot\nabla)\varphi+\varphi\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla\times(\varphi\vec{A})=(\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\varphi\vec{A})&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi\vec{A})_k\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k)\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi+\varphi\partial_jA_k)\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_jA_k+\varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_jA_k\\&=(\nabla\varphi)\times\vec{A}+\varphi\nabla\times\vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})&=\partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i\\&=\partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)\\&=\varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k)\\&=\varepsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j+\varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k\\&=B_k\varepsilon_{kij}\partial_iA_j-A_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k\\&=B_k(\nabla\times\vec{A})_k-A_j(\nabla\times\vec{B})_j\\&=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\end{aligned}$$

> $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\vec{A} \times \vec{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l + \vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m - \vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l - \vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l + \vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m - \vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l - A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \\
&= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})
\end{aligned}
$$

> $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla \times \vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_lA_m - \vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_mA_m - \partial_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

需要注意力的公式

> $\nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{0}$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla\varphi) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k \\
&= \vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi = \partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$，有：

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi &= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi \\
&= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

最后一步是因为 j, k 都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明：

$$
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = \vec{0}
$$

于是：

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{\mathrm{e}}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = \vec{0}$$

> $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_i (\nabla \times \vec{A})_i \\ &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k\end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

这就是说：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

从右往左证的公式

> $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$

$$\begin{aligned}
&(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{\mathrm{e}}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{\mathrm{e}}_i A_j \partial_l B_m \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \vec{\mathrm{e}}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \vec{\mathrm{e}}_i A_j \partial_l B_m \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + \vec{\mathrm{e}}_l B_m \partial_l A_m - \vec{\mathrm{e}}_m B_l \partial_l A_m + \vec{\mathrm{e}}_l A_m \partial_l B_m - \vec{\mathrm{e}}_m A_l \partial_l B_m \\
=&B_i \partial_i A_j \vec{\mathrm{e}}_j + A_i \partial_i B_j \vec{\mathrm{e}}_j + B_m \vec{\mathrm{e}}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{\mathrm{e}}_m + A_m \vec{\mathrm{e}}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{\mathrm{e}}_m \\
=&B_m \vec{\mathrm{e}}_l \partial_l A_m + A_m \vec{\mathrm{e}}_l \partial_l B_m \\
=&B_m \nabla A_m + A_m \nabla B_m \\
=&\nabla (A_m B_m) \\
=&\nabla (\vec{A} \cdot \vec{B})
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

高斯定理

> $$\oint\limits_{\partial V^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V (\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

斯托克斯定理

> $$\oint\limits_{\partial \Sigma^+} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_\Sigma (\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

格林第一恒等式

> $$\oint\limits_{\partial \Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_\Omega \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right)\mathrm{d}V$$

注意到:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\
&= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\
&= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \psi\partial_i\partial_i\phi \\
&= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i + \psi\nabla^2\phi \\
&= (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi
\end{aligned}$$

于是由高斯定理，有:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial \Omega^+} \psi\nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_\Omega \nabla\cdot(\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_\Omega \left[(\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi\right]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_\Omega \left[\psi\nabla^2\phi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right]\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

格林第二恒等式

> $$\oint\limits_{\partial \Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_\Omega (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V$$

利用 $\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$ 可得:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)&=\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot(\nabla\phi)-(\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot(\nabla\psi))\\&=\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\end{aligned}$$

于是由高斯定理可得:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{\partial\Omega^+}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}&=\int\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\mathrm{d}V\\&=\int\limits_{\Omega}(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

∇ 算子

直角坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

柱坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

∇^2 算子

直角坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

柱坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z) : \mathbb{C}^{\mathrm{R}} \to \mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n},\ \ a_i,b_i\in\mathbb{C},\ \ m,n\in\mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z)=\mathrm{e}^z$$

对数函数

$$f(z)=\ln z$$

幂函数

$$f(z)=z^a,\ \ a\in\mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质：

$$\cos(-z)=\cos(z),\ \ \cos(z+2\pi)=\cos(z)$$

$$\sin(-z)=-\sin(z),\ \ \sin(z+2\pi)=\sin(z)$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1$$

$|\cos z|,|\sin z|$ 可以大于 1，这与实三角函数不同。

双曲函数

$$\cosh z\equiv\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\sinh z\equiv\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\tanh z\equiv\frac{\sinh z}{\cosh z}=\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

双曲函数的性质：

$$\sinh(z+\mathrm{i}2\pi) = \sinh z$$

$$\cosh(z+\mathrm{i}2\pi) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

第5章 解析函数

复变函数的导数

复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时，都有：

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续。

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z = z - z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)。**

命题的证明

设 $z=x+\mathrm{i}y,f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地，

（1）令：

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\Delta x\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（2）令：

$$\Delta x=0,\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

复变函数的解析性

复变函数的解析性

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析的。**

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 Ω 内是**解析的**，或称为**全纯的。**

相关定理

定理1

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 Ω 为解析函数 $\Longleftrightarrow$ 在与复平面 Ω 相应的实平面区域内 $u(x,y),v(x,y)$ 可微，且 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 C-R 条件。

特别地，若 $f(z)$ 为 Ω 上的连续函数，则 $f(z)$ 是 Ω 上的解析函数 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 满足 C-R 条件。

定理2

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，且 $f(z)$ 为实函数，即 $f(z)=f^*(z)$，则 $f(z)$ 为常数。

定理3

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$，即 $f(z,z^*)$ 不依赖于 z^*

定理4

在复平面区域 Ω 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是平面区域 Ω 内的调和函数（即满足二维拉普拉斯方程 $\nabla^2u(x,y)=0,\nabla^2v(x,y)=0$ 的函数）。

例题

例1

> 已知解析函数的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y \tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$，则：

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C$$

于是：

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+C)\end{aligned}$$

例2

> 请证明：柱坐标系下的解析函数 $f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i}v(\rho,\varphi)$ 满足的 C-R 方程：
>
> $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\varphi=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

注意到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) = -\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right] \tag{2}$$

$(1)\times\cos\varphi + (2)\times\sin\varphi$ 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$(2)\times\cos\varphi - (1)\times\sin\varphi$ 得到:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

例3

> 已知解析函数的虚部 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ，求该解析函数。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

极坐标变换：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\\mathrm{d}y=\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\end{cases}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho+\frac{\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\varphi\\&=\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

于是：

$$u=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+C=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$$

综上，

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u + \mathrm{i}v \\
&= \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + C\right) + \mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}
$$

第6章 复变函数积分

第7章 复变函数的级数展开

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

第9章 傅里叶变换

第10章 拉普拉斯变换

第11章 δ 函数

第12章 小波变换初步

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其

定解问题

第14章 分离变量法

第15章 曲线坐标系下的分离变量

第16章 球函数

第17章 柱函数

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理