一、基础题

1

(1)

> 简述群的重排定理。

设 $G=\{g_\alpha\}$ 为群，f 为 G 中一个确定的元素。当 α 取遍所有可能的取值时，fg_α 给出且仅仅一次给出 G 的所有元素。

$$G=\{g_\alpha\}=\{fg_\alpha\}$$

(2)

> 写出三阶群的乘法表。

三阶群只有循环群这一种结构。

	$g_1=e$	g_2	g_3
$g_1=e$	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

(3)

> 对于某李群的线性表示 $D(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha_i B_i}$，其中 B_i 为常数矩阵，求该李群的生成元。

恒元对应的群参数的取值为：

$$\alpha=0$$

$$I_j\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}\equiv\left.\frac{\partial\mathrm{e}^{\alpha_i B_i}}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}=B_j$$

(4)

> 证明当 α,β 为小量时，李群的结构因子 $f(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$

题目默认恒元对应的群参数的取值为 0

由于 α,β 是小量，因此结构因子可展为：

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\beta)&=\left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=0}\alpha+\left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=0}\beta\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha,0)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}f(0,\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta
\end{aligned}
$$

李群的结构因子满足：

$$
g(f(\alpha,\beta))=g(\alpha)g(\beta)
$$

分别令 α,β 取 0，结合恒元对应的群参数的取值为 0，可得：

$$
g(f(0,\beta))=g(\beta)
$$

$$
g(f(\alpha,0))=g(\alpha)
$$

因此：

$$
f(0,\beta)=\beta
$$

$$
f(\alpha,0)=\alpha
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\beta)&=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha,0)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}f(0,\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta\\
&=\alpha+\beta
\end{aligned}
$$

2

> 给出同态的定义，并证明 D_3 群与 C_2 群同态。

同态的定义

设 $G=\{g_{im}\}$ 与 $G'=\{g'_i\}$ 之间有多一对应关系，且为满射，且群 G 中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应于 G' 中相应两个元素的乘积，则称 G 与 G' 同态，记为：

$$
G\simeq G'
$$

证明

$\mathrm{D}_3=\{e,d,f,a,b,c\},\mathrm{C}_2=\{e',C_2^1\}$

从 D_3 到 C_2 的映射 $F:\mathrm{D}_3\to\mathrm{C}_2$ 定义为:

$$e,d,f\mapsto e',\ \ a,b,c\mapsto C_2^1$$

显然，F 是良定义的，且是满射。

映射 F 把 D_3 中的旋转操作 e,d,f 映射为 C_2 中的恒元 e'，把 D_3 中的反射操作 a,b,c 映射为 C_2 中的 C_2^1

令 $H_1=\{e,d,f\},H_2=\{a,b,c\}$，则:

$$F(x)=\begin{cases}e' & ,\ \ x\in H_1\\ C_2^1 & ,\ \ x\in H_2\end{cases}$$

若 $x\in H_1,y\in H_1$，则 $xy\in H_1$，于是 $F(xy)=e'=F(x)F(y)$

若 $x\in H_1,y\in H_2$，则 $xy\in H_2$，于是 $F(xy)=C_2^1=F(x)F(y)$

若 $x\in H_2,y\in H_1$，则 $xy\in H_2$，于是 $F(xy)=C_2^1=F(x)F(y)$

若 $x\in H_2,y\in H_2$，则 $xy\in H_1$，于是 $F(xy)=e'=F(x)F(y)$

综上，

$$\mathrm{D}_3\simeq\mathrm{C}_2$$

3

> 给出直积群与半直积群的定义。若群 H 与 F 可以直积，且 $K=H\otimes F$，则 H 与 F 是否为 K 的不变子群？若为半直积 $K=H\otimes_{\mathrm{S}}F$，则 H 与 F 是否为 K 的不变子群？

设 $H=\{h_\alpha\},F=\{f_\beta\}$ 是 G 的两个子群，且满足:

（1）除恒元以外 H 和 F 没有公共元素

（2）两个子群的元素可对易：$h_\alpha f_\beta=f_\beta h_\alpha$

则 $K=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$ 构成一个群，称为 H 与 F 的直积群，记为:

$$K=H\otimes F$$

H 与 F 为 K 的不变子群。

4

> 写出一个 C_2 群的二维线性表示。这个表示是否可约？

$$
D(e)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D\left(C_2^1\right)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}
$$

这个表示可约。

5

> 给出 $\mathrm{SO}(3)$ 群中判断元素是否相互共轭的方法，并据此求 D_6 群的共轭类。D_6 群的对称轴如下：

$\mathrm{SO}(3)$ 群的有限子群 G 中两个群元 $C_{\vec{k}_1}(\omega_1)$ 和 $C_{\vec{k}_2}(\omega_2)$ 共轭的条件是：

（1）$\omega_1=\omega_2$

（2）$\exists g\in G$ 使得 $\vec{k}_2=g\vec{k}_1$

n 为偶数

当 n 为偶数，

$$
\mathrm{D}_n=\left\{e,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},\sigma_1,\cdots,\sigma_n\right\}
$$

恒元 e 自成一类。

由于 $C_n^i=C_{\vec{k}}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ 和 $C_n^{n-i}=C_{-\vec{k}}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$，二者转动的角度相同，且 $\sigma_i\vec{k}=-\vec{k}$，因此 C_n^i 和 C_n^{n-i} 共轭。

由于 $\forall\sigma_i$ 转动的角度均为 π，且通过 C_n^1 可将 σ_1 的转动轴依次变换为 $\sigma_3,\sigma_5,\cdots,\sigma_{n-1}$ 的转动轴，将 σ_2 的转动轴依次变换为 $\sigma_4,\sigma_6,\cdots,\sigma_n$ 的转动轴，因此 $\{\sigma_1,\sigma_3,\cdots,\sigma_{n-1}\}$ 为一类，$\{\sigma_2,\sigma_4,\cdots,\sigma_n\}$ 为一类。

$C_n^{n/2}$ 自成一类。

n 为奇数

当 n 为奇数，

$$
\mathrm{D}_n=\left\{e,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},\sigma_1,\cdots,\sigma_n\right\}
$$

恒元 e 自成一类。

由于 $C_n^i=C_{\vec{k}}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ 和 $C_n^{n-i}=C_{-\vec{k}}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$，二者转动的角度相同，且 $\sigma_i\vec{k}=-\vec{k}$，因此 C_n^i 和 C_n^{n-i} 共轭。

由于 $\forall\sigma_i$ 转动的角度均为 π，且通过 C_n^1 可将 σ_1 的转动轴依次变换为 $\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n$ 的转动轴，因此 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$ 为一类。

二、应用题

1

> 已知 D_2 群为正 n 边形对称群，求：（1）该群的乘法表；（2）所有共轭类与非平庸不变子群；（3）商群与特征标表；（4）以标量函数 $\psi_1 = x^2, \psi_2 = xy, \psi_3 = y^2$ 为基底写出 D_2 群的一个三维表示。

(1)

$$\mathrm{D}_2 = \{e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$$

乘法表：

	e	σ_x	σ_y	σ_z
e	e	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	e	σ_z	σ_y
σ_y	σ_y	σ_z	e	σ_x
σ_z	σ_z	σ_y	σ_x	e

(2)

所有共轭类

由于：

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$$

于是：

$$\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1} = \sigma_i\sigma_j\sigma_j^{-1} = \sigma_i, \quad \forall\sigma_j$$

因此 D_2 群中每个群元自成一类。所有共轭类为：

$$\{e\}, \{\sigma_x\}, \{\sigma_y\}, \{\sigma_z\}$$

所有非平庸不变子群

$$A_x = \{e, \sigma_x\}, A_y = \{e, \sigma_y\}, A_z = \{e, \sigma_z\}$$

(3)

商群

$$\mathrm{D}_2/A_x = \{\{e, \sigma_x\}, \{\sigma_y, \sigma_z\}\}$$

$$\mathrm{D}_2/A_y = \{\{e, \sigma_y\}, \{\sigma_x, \sigma_z\}\}$$

$$\mathrm{D}_2/A_z = \{\{e, \sigma_z\}, \{\sigma_x, \sigma_y\}\}$$

特征标表

D_2 群阶数 $n = 4$

$$n = 4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

除一维恒等表示外，D_2 群有 3 三个指数为 2 的不变子群，于是容易得到四个一维不等价不可约表示：

	e	σ_x	σ_y	σ_z
$D^{(1)}$	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1	-1
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1
$D^{(4)}$	1	-1	-1	1

(4)

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 可看成 $\mathbb{R}^3$ 空间中的线性变换。

由 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 诱导出的标量函数变换算符分别记为 $P_{\sigma_x}, P_{\sigma_y}, P_{\sigma_z}$

注意到：

$$\sigma_x^{-1} = \sigma_x, \quad \sigma_y^{-1} = \sigma_y, \quad \sigma_z^{-1} = \sigma_z$$

$$\psi_1(x,y,z) = x^2, \quad \psi_2(x,y,z) = xy, \quad \psi_3(x,y,z) = y^2$$

于是：

$$P_{\sigma_x}\psi_1(\vec{r}) = \psi_1\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_1\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_1(x,-y,-z) = x^2 = \psi_1(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_x}\psi_2(\vec{r}) = \psi_2\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_2\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_2(x,-y,-z) = -xy = -\psi_2(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_x}\psi_3(\vec{r}) = \psi_3\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_3\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_3(x,-y,-z) = y^2 = \psi_3(\vec{r})$$

可以合写为：

$$P_{\sigma_x}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，σ_x 的一个三维表示为：

$$D(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{\sigma_y}\psi_1(\vec{r})=\psi_1\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right)=\psi_1\left(\sigma_y\vec{r}\right)=\psi_1(-x,y,-z)=x^2=\psi_1(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_y}\psi_2(\vec{r})=\psi_2\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right)=\psi_2\left(\sigma_y\vec{r}\right)=\psi_2(-x,y,-z)=-xy=-\psi_2(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_y}\psi_3(\vec{r})=\psi_3\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right)=\psi_3\left(\sigma_y\vec{r}\right)=\psi_3(-x,y,-z)=y^2=\psi_3(\vec{r})$$

可以合写为：

$$P_{\sigma_y}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，σ_y 的一个三维表示为：

$$D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{\sigma_z}\psi_1(\vec{r})=\psi_1\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_1\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_1(-x,-y,z)=x^2=\psi_1(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_z}\psi_2(\vec{r})=\psi_2\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_2\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_2(-x,-y,z)=xy=\psi_2(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_z}\psi_3(\vec{r})=\psi_3\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_3\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_3(-x,-y,z)=y^2=\psi_3(\vec{r})$$

可以合写为：

$$P_{\sigma_z}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，σ_z 的一个三维表示为：

$$D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

综上，D_2 的一个三维表示为：

$$D(e)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_z)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2

> 求 $\mathrm{SO}(3)$ 群的生成元、无穷小算子、李代数、度规与 Casmir 算子。

生成元

$\mathrm{SO}(3)$ 群线性表示 $D(\omega)$：

$$D(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}$$

其中，

$$T_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix},\quad T_3=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

生成元：

$$I_1=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_1}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$I_2=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_2}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$I_3=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_3}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_3=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

无穷小算子

利用李群无穷小算子与生成元的关系：

$$X_i=(I_i)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu$$

$$X_1=(I_1)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_2\partial_3-x_3\partial_2$$

$$X_2=(I_2)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_3\partial_1-x_1\partial_3$$

$$X_3=(I_3)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_1\partial_2-x_2\partial_1$$

李代数

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$$

$$C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$$

度规

$$g_{ij} = C_{ik}^l C_{jl}^k = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlk} = \varepsilon_{kli}\varepsilon_{kjl} = \delta_{lj}\delta_{il} - \delta_{ll}\delta_{ij} = \delta_{ij} - 3\delta_{ij} = -2\delta_{ij}$$

Casmir 算子

$$g_{\mu\nu} = -2\delta_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}$$

$$C = g^{\mu\nu} X_\mu X_\nu = -\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu} X_\mu X_\nu = -\frac{1}{2} X_\mu X_\mu = -\frac{1}{2}\left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2\right)$$

3

> 洛伦兹群 $\mathrm{SO}(1,3)$ 是满足如下规则的李群：

$$-c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 1$$

(1)

> 求 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群的生成元和对易关系。（提示：特殊洛伦兹变换 $t' = \dfrac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$ ）

对于转动，三个生成元：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于 Boost，考虑只含一个参数 v 的特殊洛伦兹变换：

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

与参数 v 对应的无穷小算子：

$$X_v = \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial v}\right|_{v=0} \partial_\mu = -x\partial_t - t\partial_x$$

推广到一般洛伦兹变换，有：

$$X_1 = -x\partial_t - t\partial_x, \quad X_2 = -y\partial_t - t\partial_y, \quad X_3 = -z\partial_t - t\partial_z$$

根据无穷小算子与生成元的关系（多一个负号，与 ppt 一致）：

$$X_i = (I_i)^\mu{}_\nu \, x_\nu \partial_\mu$$

可得三个与 Boost 对应的生成元：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

生成元对易关系：

$$[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad [B_i, B_j] = -\varepsilon_{ijk} R_k, \quad [R_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k$$

(2)

> 判断 $\mathrm{SO}(1,3)$ 是否为两个 $\mathrm{SO}(3)$ 群的直和。

生成元对易关系：

$$[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad [B_i, B_j] = -\varepsilon_{ijk} R_k, \quad [R_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k$$

对生成元做线性变换：

$$P_i = \frac{1}{2}\left(R_i + \mathrm{i} B_i\right), \quad Q_i = \frac{1}{2}\left(R_i - \mathrm{i} B_i\right)$$

对易关系化为：

$$[P_i, P_j] = \varepsilon_{ijk} P_k, \quad [Q_i, Q_j] = \varepsilon_{ijk} Q_k, \quad [P_i, Q_j] = 0$$

可见，分别以 $\{P_i\}$ 和 $\{Q_i\}$ 为基矢可张成 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的两个理想 A, B：

$$A = \operatorname{span}\{P_i\}, \quad B = \operatorname{span}\{Q_i\}$$

且：

$$A \cup B = \mathfrak{so}(1,3), \quad A \cap B = 0, \quad [A, B] = 0$$

因此，$\mathfrak{so}(1,3)$ 李代数可写为 A, B 两个理想的直和：

$$\mathfrak{so}(1,3) = A \oplus B$$

(3)

> 判断 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群是否是半单纯的。

是半单纯的。

由 A, B 李代数生成元对易关系可知，A, B 都是 $\mathfrak{so}(3)$ 李代数，因此：

$$\mathfrak{so}(1,3)=\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(3)$$

而 $\mathfrak{so}(3)$ 李代数不是 Abel 的，于是 $\mathfrak{so}(1,3)$ 李代数不含 Abel 理想，因此 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群是半单纯的。

(4)

> 由此题结论推广至 $\mathrm{SO}(1,n)$ 群，求 $\mathrm{SO}(1,n)$ 群的生成元及其对易关系。

$\mathrm{SO}(1,n)$ 群有 $n(n+1)/2$ 个生成元，其中 n 个对应 Boost，$(n-1)n/2$ 个对应空间转动。

与 $\mathrm{SO}(1,3)$ 类似，与 Boost 对应的 n 个生成元为：

$$B_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix},\quad \cdots$$

规律：$(B_i)_{mn}=\delta_{mi}\delta_{n0}+\delta_{m0}\delta_{ni}$，其中矩阵的行、列均从 0 开始计数。

与空间转动对应的 $(n-1)n/2$ 个生成元即 $\mathrm{SO(n)}$ 的生成元，对应的无穷小算符对易关系为：

$$[X_{ij},X_{kl}]=\delta_{jk}X_{il}+\delta_{il}X_{jk}-\delta_{ik}X_{jl}-\delta_{jl}X_{ik}$$

生成元对易关系为：

$$[R_{ij},R_{kl}]=-\delta_{jk}X_{il}-\delta_{il}X_{jk}+\delta_{ik}X_{jl}+\delta_{jl}X_{ik}$$