光的衍射

衍射现象

波在传播传播过程中遇到障碍物，能够绕过障碍物的边缘前进。这种偏离直线传播的现象成文衍射现象。

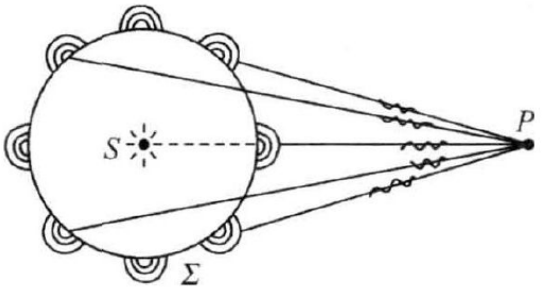
波长越大，障碍物越小，衍射越明显。

惠更斯-菲涅耳原理

波前上的每个面元可以看为次波源，它们向四周发射次波；波场中任一场点的扰动，是所有次波源所贡献的次级扰动的**相干叠加**。

设波前 Σ 上任一面元 $\mathrm{d}S$ 对场点 P 贡献的刺激扰动复振幅为 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$，则按惠更斯-菲涅耳原理，总扰动 $\tilde{U}(P)$ 应表达为：

$$\tilde{U}(P)=\oiint_{(\Sigma)}\mathrm{d}\tilde{U}(P)$$

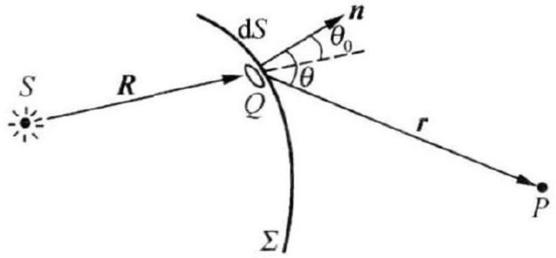


(b)

菲涅耳衍射积分式

决定 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$ 的因素：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{U}(P)&\propto \mathrm{d}S\ \text{波前上作为次波源的微分面元}\\&\propto \tilde{U}_0(Q)\ \text{次波源自身的复振幅}\\&\propto \frac{1}{r}e^{ikr}\ \text{次波源发射球面波到达场点}\\&\propto f(\theta_0,\theta)\ \text{倾斜因子用以表明次波面源的发射并非各向同性}\end{aligned}$$



综合以上因素，$\tilde{U}(P)=\oiint_{(\Sigma)}\mathrm{d}\tilde{U}(P)$ 可以进一步表达为：

$$\boxed{\tilde{U}(P)=K\oiint_{(\Sigma)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S}$$

其中，Q 是次波源，$\mathrm{d}S$ 是波前 Σ 上 Q 点处的一个小面元，$\tilde{U}_0(Q)$ 是 Q 点复振幅，r 是次波源 Q 到场点 P 的距离，$f(\theta_0,\theta)$ 是倾斜因子。

基尔霍夫衍射积分式

基尔霍夫从定态波场的亥姆霍兹方程出发，利用矢量场论中的格林公式，在 $kr\gg 1$，即 $r\gg\lambda$ 的条件下，导出了无源空间边值定解的表达式：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\oiint_{(\Sigma)}\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S$$

凡是隔离实在的点光源与场点的任意闭合曲面，都可以作为衍射积分式中的积分面。

基尔霍夫边界条件

取闭合面：

$$(\Sigma)=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2$$

其中，Σ_0 是光孔面，Σ_1 是光屏面，Σ_2 是无穷远半球面。

基尔霍夫边界条件认为：

（1）无穷远面Σ_2 上的波前对场点的贡献为零

（2）光屏面 Σ_1 上波前函数为零，对场点也没有贡献

（3）只有光孔面 Σ_0 的波前对场点有贡献，且其波前函数 $\tilde{U}_0'(Q)$ 等于无屏障时自由传播的光场 $\tilde{U}_0(Q)$，即 $\tilde{U}_0'(Q)=\tilde{U}_0(Q)$

基于此，基尔霍夫衍射积分式简化为：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint\limits_{\Sigma_0} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

其中，倾斜因子为 $f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$

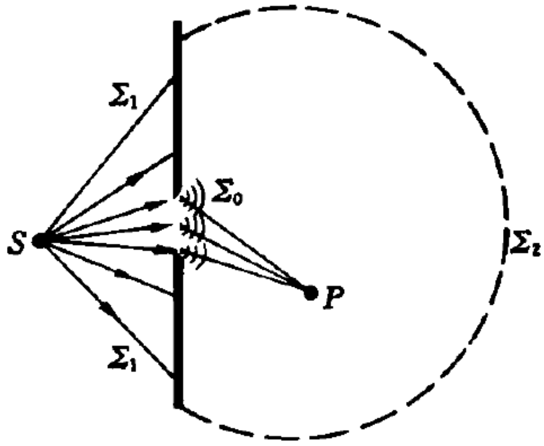


图 2.29　说明基尔霍夫边界条件

傍轴条件衍射积分式

傍轴条件下，

倾斜因子 $f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)\approx 1$

球面次波函数 $\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\approx\frac{1}{r_0}e^{\mathrm{i}kr}$

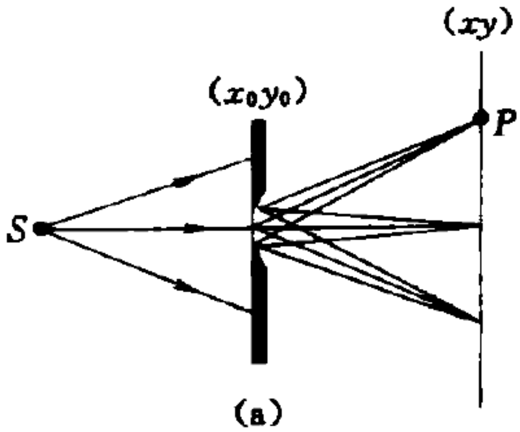
得到傍轴条件衍射积分公式：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint\limits_{\Sigma_0}\tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

衍射系统及其分类——菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射

菲涅耳衍射

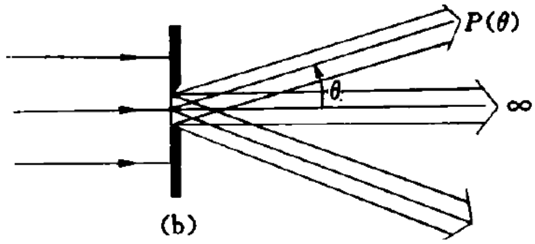
光源到衍射屏、衍射屏到接收屏之间的距离均为有限远，或其中之一是有限远的场合；或者说，**球面波照明**时在**有限远处接收**的是菲涅耳衍射场。



(a)

夫琅禾费衍射

光源到衍射屏、衍射屏到接收屏的距离都是无限远；或者说。**平面波照明**时在**无穷远处接收**的是夫琅禾费衍射场。



(b)

衍射巴比涅原理

设 Σ_a,Σ_b 是一对透光率互补的屏面，现将它们作为衍射屏先后插置于衍射系统中，设 Σ_a 单独存在时形成的衍射场为 $\tilde{U}_a(P)$，Σ_b 单独存在时形成的衍射场为 $\tilde{U}_b(P)$，光波通行无阻时全波前 Σ_0 形成的自由光场为 $\tilde{U}_0(P)$，由于：

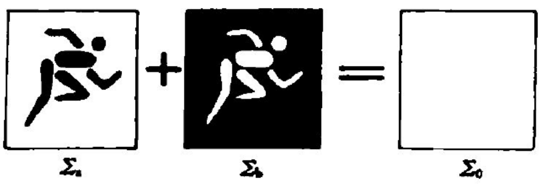


图 2.34　巴比涅原理中的一对互补屏

$$\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma_0$$

根据基尔霍夫衍射积分公式，结合二重积分的区域可加性，有：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_0(P) &= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_0)} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_a)+(\Sigma_b)} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_a)} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S + \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint\limits_{(\Sigma_b)} f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S \\
&= \tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P)
\end{aligned}
$$

最终结果是：

$$
\tilde{U}_0(P) = \tilde{U}_a(P) + \tilde{U}_b(P)
$$

这一反映两个孔型互补屏产生的两个衍射场关系的方程，称为**巴比涅原理**(Babinet principle)

巴比涅原理的应用

由于自由光场是容易知道的，故我们可以由单缝衍射场，直接导出细丝衍射场；由圆孔衍射场，直接导出圆屏衍射场

圆孔和圆屏菲涅耳衍射

半波带法

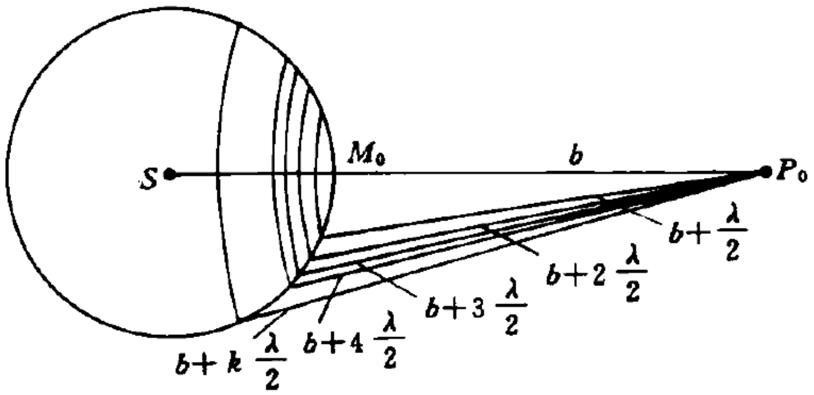


图 2.39　分割波前的半波带方法

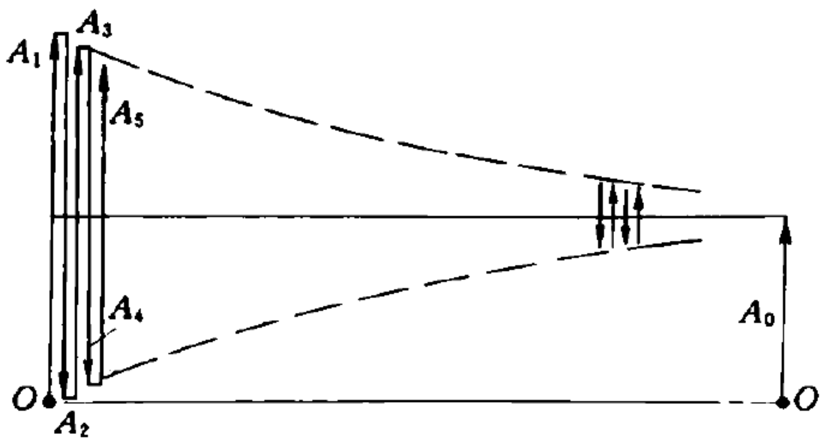


图 2.41　采取半波带方法时的相干叠加矢量图解

螺旋式曲线

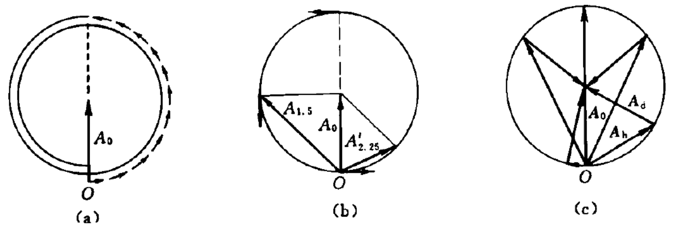
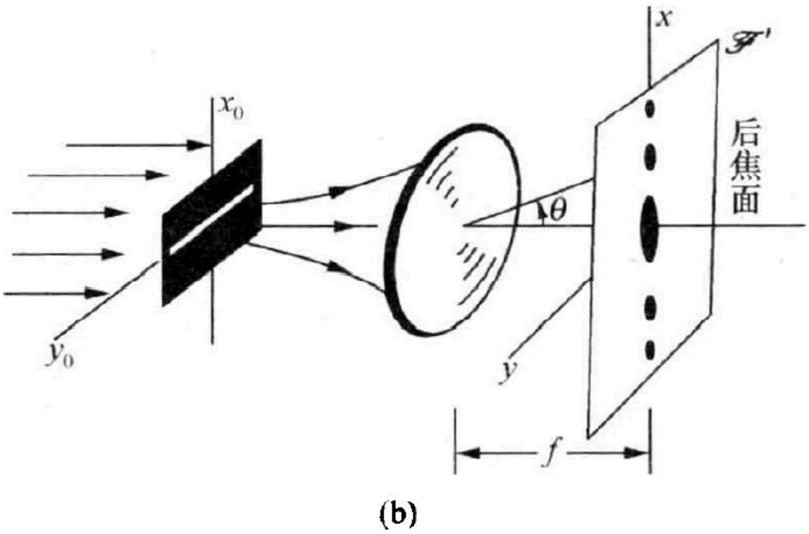


图 2.43 圆孔衍射轴上光场的矢量图解(a)，用于圆孔包含非整数个半波带(b)，用于说明圆屏衍射(c)

效仿半波带方法，将每个半波带再细分为 N 个环带；每个细环带上的次波源对场点贡献的小扰动，可由一个小矢量表示；这 N 个小矢量长度相等，取向渐变以反映彼此间的相位差。这些小矢量头尾相接，形成半个正多边形，其极限过渡为半圆。于是，波前上全部次波源在轴上场点 P_0 贡献地扰动小矢量，形成一个个半径及其缓慢收缩地螺旋式曲线。借此，可以求得 k 为非整数时的衍射强度 $I(P_0)$

单缝夫琅禾费衍射



平行光照射单缝，在透镜后焦面 $\mathscr{F}'$ 上接收夫琅禾费衍射场。

单狭缝的宽度 $\Delta x_0 = a \ll$ 长度 $\Delta y_0 = b$，其衍射强度显著地沿 x 轴扩展。

矢量图解法

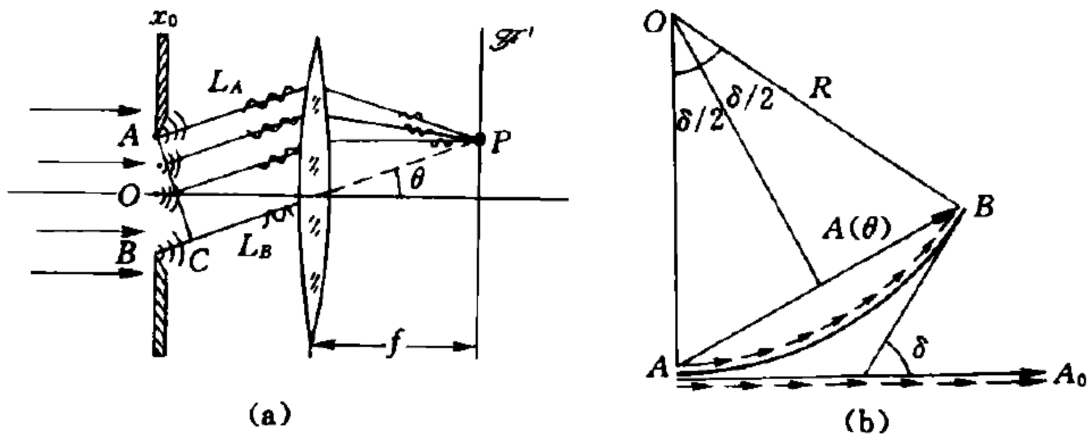


图 2.49 单缝夫琅禾费衍射.(a) 光程差分析，(b) 矢量图解法，

θ 是衍射角，用于标定场点 P 的位置，现在分析后焦面上的衍射强度分布 $I(\theta)$：

由透镜的性质，像空间后焦面上的一个点对应于物空间的一个方向，即从单缝出发衍射角为 θ 的一系列次波线才能会聚在后焦面上的一点 P，发生相干叠加，从而决定了衍射强度。

为此，将单缝的宽度 $\Delta x_0 = a$ 继续细分（尽管已经很细了）为一系列更细的细缝，每个细缝作为次波源对场点贡献一个小扰动，用一个小矢量；这一系列小矢量长度相等，但取向依次变动，首位相接，形成一段圆弧。

这段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 起点 A 与终点 B 的两条切线的夹角 δ 是确定的，因为它代表了 A 边与 B 边贡献的两个小扰动之间的相位差 δ_{AB}，而相位差 δ_{AB} 又取决于光程差。

光程差为：

$$
\begin{aligned}
\Delta &= L(BP) - L(AP) \\
&= n\overline{BC} \\
&= na\sin\theta
\end{aligned}
$$

由光程差和相位差的关系，可得：

$$
\begin{aligned}
\delta_{AB} &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta \\
&= \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta
\end{aligned}
$$

$\overset{\frown}{AB} = A_0$，$\angle AOB = \delta$，$R = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\delta}$，于是可以求得相干叠加的合成振幅：

$$
\begin{aligned}
A(\theta) &= 2R\sin\frac{\delta}{2} \\
&= 2\cdot\frac{\overset{\frown}{AB}}{\delta}\cdot\sin\frac{\delta}{2} \\
&= A_0\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{(\frac{\delta}{2})}
\end{aligned}
$$

引入宗量：

$$
\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

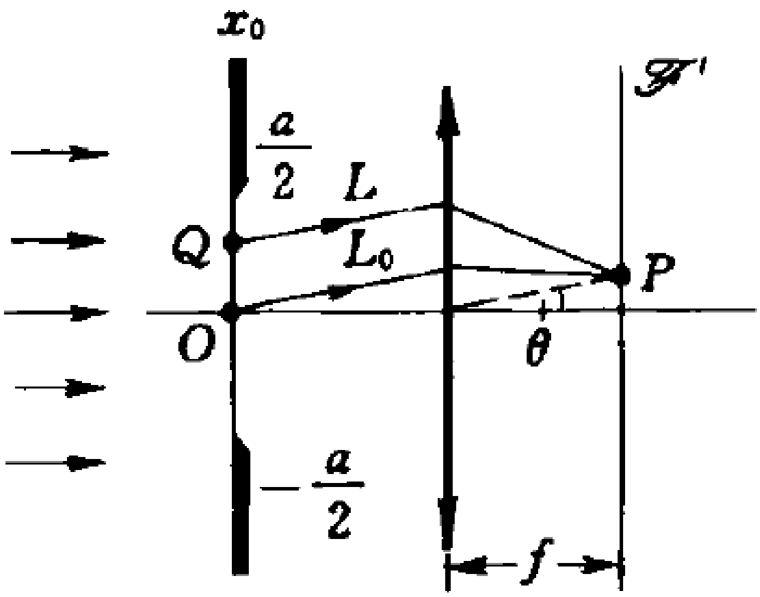
得到单缝夫琅禾费衍射场的振幅分布和强度分布：

$$
A(\theta) = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

$$
I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,\ \ I_0 = A_0^2, \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

其中，A_0 代表一系列振动小矢量取向一致时的合成振幅。

衍射积分法



(c)

：.(c) 衍射积分法

单缝夫琅禾费衍射场也可以由傍轴衍射积分公式求得：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint \tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

经透镜变换，振幅系数：

$$\frac{1}{r_0}\to\frac{1}{f}$$

平行光正入射：

$$\tilde{U}_0(x_0)=A$$

积分面元：

$$\mathrm{d}S=b\mathrm{d}x_0$$

相位因子 $e^{\mathrm{i}kr}$：

$$\begin{aligned}kr&=\frac{k}{n}\cdot nr\\&=k_0L\\&=k_0(L-L_0)+k_0L_0\\&=-k_0nx_0\sin\theta+k_0L_0\\&=-kx_0\sin\theta+k_0L_0\end{aligned}$$

其中，L_0 是坐标原点 O 出发沿 θ 方向到达场点 P 的光程 $L_0(OP)$，作为参考光程。

综上，衍射积分式可以表示为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\theta) &= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint \tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}\int_{x_0=-a/2}^{x_0=a/2} A\cdot e^{\mathrm{i}(-kx_0\sin\theta+k_0L_0)}\cdot b\mathrm{d}x_0 \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}Abe^{\mathrm{i}k_0L_0}\int_{x_0=-a/2}^{x_0=a/2} e^{-\mathrm{i}kx_0\sin\theta}\mathrm{d}x_0 \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}Abe^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{2\sin(\frac{a}{2}k\sin\theta)}{k\sin\theta} \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{a}{2}k\sin\theta)}{\frac{a}{2}k\sin\theta} \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{a}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{a}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta} \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}} \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \\
&= \boxed{\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}},\ \ \tilde{c}=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A,\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
\end{aligned}
$$

光强分布为：

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= \tilde{U}\tilde{U}^* \\
&= I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\tilde{c}=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A,\ \ I_0=\tilde{c}\tilde{c}^*=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2,\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

$$
A(\theta)=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

单缝夫琅禾费衍射的主要特征

（1）**最大值**

$$
I(\theta)=I_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}
$$

当 $\theta=0$ 时，$I(\theta)$ 取最大值 $I(0)=I_0$，称为零级衍射峰。可以看出，I_0 的物理就是零级衍射峰的光强。

（2）**零点位置**

$$
I(\theta)=I_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}
$$

当：

$$
\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=j\pi,\ \ j=\pm1,\pm2,\cdots
$$

时，即：

$$
a\sin\theta=j\lambda,\ \ j=\pm1,\pm2,\cdots
$$

时，$I(\theta)=0$，出现暗点。上式称为单缝衍射零点条件。

（3）**次极大**

在相邻两个零点之间存在一个极大值

（4）**半角宽度** $\Delta\theta_0$

零级衍射峰的半角宽度，记为 $\Delta\theta_0$，定义为由零级衍射峰与其邻近暗点之间的角方位之差，即：

$$
\Delta\theta_0\equiv\theta_1-\theta_0
$$

其中，$\theta_0=0$，θ 满足单缝衍射零点条件：

$$a\sin\theta_1=1\cdot\lambda\Longrightarrow\theta_1\approx\sin\theta_1=\frac{\lambda}{a}$$

于是：

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

半角宽度也叫衍射发散角。

（5）**单缝宽度的影响**

单缝宽度 a 影响半角宽度 $\Delta\theta_0$，也影响零级衍射峰光强 I_0

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

单缝宽度 a 越小，半角宽度 $\Delta\theta_0$ 越大，这意味着衍射波更加发散。

$$I_0=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

单缝宽度 a 越小，零级衍射峰光强 I_0 也越小。

（6）**波长的影响**

波长 λ 影响半角宽度 $\Delta\theta_0$，也影响零级衍射峰光强 I_0

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

波长 λ 越大，半角宽度 $\Delta\theta_0$ 也越大，这就是说长波衍射效应更强烈。

$$I_0=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

波长 λ 越大，零级衍射峰光强 I_0 越小。

（7）**关于参考光程决定的相因子**

参考光程相因子 $e^{\mathrm{i}k_0L_0}$ 是场点 P 的函数，应当明确表示为 $e^{\mathrm{i}k_0L_0(P)}$

衍射反比律

$$\rho\cdot\Delta\theta\approx\lambda$$

其中，ρ 是限制波前的光孔在某方向的几何线度，$\Delta\theta$ 是衍射发散角。

圆孔夫琅禾费衍射

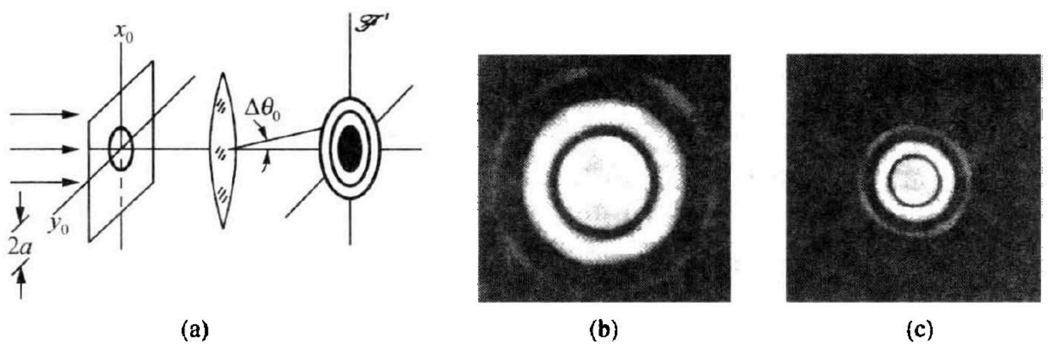


图 2.56 圆孔夫琅禾费衍射.(a) 实验装置,(b) 艾里斑(孔径 0.5 mm),(c) 艾里斑(孔径 1.0 mm)

$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot 2\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}$$

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x}\right)^2$$

其中，

$$x=\frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda},\quad I_0=\frac{(\pi a^2)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

其中，a 是圆孔半径，$\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数。

中心的那个亮斑称为**艾里斑**，I_0 是艾里斑中心强度。

一阶贝塞尔函数的第一个零点 x_0 的位置为：

$$x_0=1.22\pi$$

于是第一个暗环的角方位 θ_{10} 应满足：

$$\frac{2\pi a\sin\theta_{10}}{\lambda}=1.22\pi$$

圆孔直径记为 D，$D=2a$，于是：

$$\sin\theta_{10}=1.22\frac{\lambda}{D}$$

艾里斑的半角宽度：

$$\Delta\theta_0=\theta_{10}\approx1.22\frac{\lambda}{D}$$

或写为：

$$\boxed{D\Delta\theta_0\approx1.22\lambda}$$

瑞利判据

两个物点反映在像面上有两个艾里斑，设这两个艾里斑中心之角间隔为 $\delta\theta$, 每个艾里斑自身有个半角宽度 $\Delta\theta_0$, 瑞利提出的判据为：

$$\begin{gathered}\delta\theta>\Delta\theta_0\text{时，可分辨;}\\ \delta\theta<\Delta\theta_0\text{时，不可分辨}\\ \delta=\Delta\theta_0\text{时，给出可分辨的最小角间隔}\delta_m\end{gathered}$$

瑞利判据规定，当一个像斑中心恰好落在另一像斑边缘暗环时，确认两个像斑刚好可以分辨。

位移-相移定理

在一个夫琅禾费衍射系统中，当一图像位移时，其夫琅禾费衍射场将响应一个相移，两者的定量关系为：

$$\text{位移}(x_0,y_0)\leftrightharpoons\text{相移}(\delta_1,\delta_2)$$

$$\begin{gathered}\delta_1=-kx_0\sin\theta_1\\ \delta_2=-ky_0\sin\theta_2\end{gathered}$$

其中，θ_1,θ_2 标定了夫琅禾费衍射场点的位置。

有序结构的夫琅禾费衍射场

设一衍射屏含 N 个全同单元，它们取向有序但不一定规则排列，设其中心单元产生的夫琅禾费场为 $\tilde{u}_0(\theta_1,\theta_2)$, 其他单元相对中心单元的位移矢量分别为 $\vec{r}_j=(x_j,y_j)$，由位移-相移定理，相应的夫琅禾费场的相移量分别为：

$$\delta_{1j}=-kx_j\sin\theta_1$$

$$\delta_{2j}=-ky_j\sin\theta_2$$

于是这有序结构产生的夫琅禾费场的组成为：

$$\begin{cases}\tilde{u}_0(\theta_1,\theta_2),\\ \tilde{u}_1(\theta_1,\theta_2)=\tilde{u}_0\cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{11}+\delta_{21})},\\ \tilde{u}_2(\theta_1,\theta_2)=\tilde{u}_0\cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{12}+\delta_{22})},\\ \tilde{u}_3(\theta_1,\theta_2)=\tilde{u}_0\cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{13}+\delta_{23})},\\ \qquad\qquad\vdots\end{cases}$$

根据波叠加原理，我们得到 N 个全同单元的有序结构产生的夫琅禾费衍射场的一般表达式为：

$$\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)=\sum_{i=0}^{(N-1)}\tilde{u}_i=\tilde{u}_0\sum_{i=0}^{N-1}e^{\mathrm{i}(\delta_{1i}+\delta_{2i})}$$

上式中规定，$\delta_{10}=\delta_{20}=0$

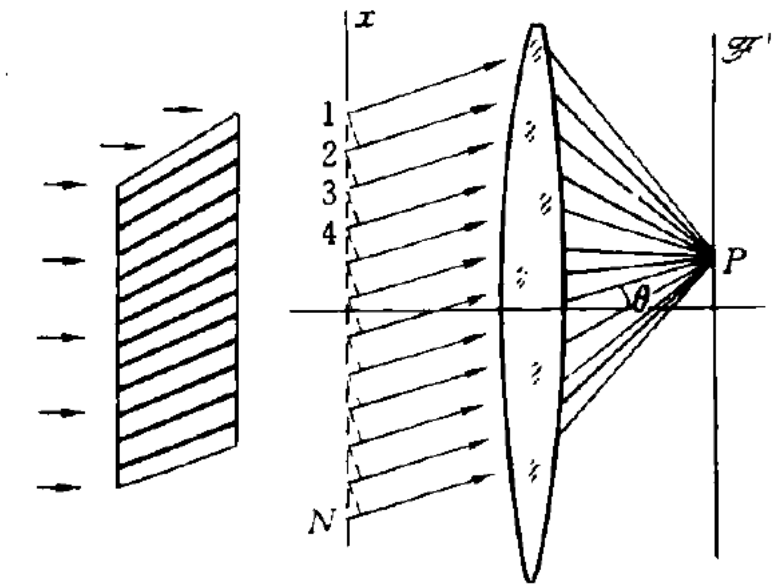
上式可以改写为：

$$\tilde{U}(\theta_1,\theta_2)=\tilde{u}_0(\theta_1,\theta_2)\cdot\tilde{S}(\theta_1,\theta_2)$$

$$\tilde{S}(\theta_1,\theta_2)=\sum_{i=0}^{N-1}e^{\mathrm{i}(\delta_{1i}+\delta_{2i})}$$

其中，$\tilde{u}_0$ 为单元衍射因子，简称其为**单元因子**或**形状因子**；$\tilde{S}(\theta_1,\theta_2)$ 为单元之间的干涉因子，简称为**结构因子**或**分布因子。**

一维光栅衍射



（a）多缝光栅　　（b）光程递增 $\Delta r=d\sin\theta$

光栅定义：凡含众多全同单元，且排列规则、取向有序的周期结构，统称为光栅（grating）

设一个一维多缝光栅透光的缝宽为 a，挡光的缝宽为 b，光栅的空间周期 d 定义为 $a+b$，亦称为**光栅常数**。单元密度定义为 $\frac{1}{d}$，光栅的有效长度记为 D，则这块光栅含单元总数为：

$$N=\frac{D}{d}$$

一维光栅的单元因子

一维光栅的基本单元就是宽度为 a，长度为 b 的狭缝，其单元因子为：

$$\tilde{u}_0=\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

一维光栅的结构因子

自上而下将 N 个单元依次编号为 $1,2,\cdots,N$. 对于一位光栅，单元的位移仅沿 x 方向，相邻单元之间的位移量恒为 d，相应的夫琅禾费场的相移量依次为 $\delta=kd\sin\theta$，于是，一位光栅夫琅禾费衍射场的结构因子为：

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\theta)&=\sum_{i=1}^{N}(1+e^{\mathrm{i}\delta}+e^{\mathrm{i}(2\delta)}+e^{\mathrm{i}(3\delta)}+\cdots+e^{\mathrm{i}(N-1)\delta})\\&=\frac{1-e^{\mathrm{i}N\delta}}{1-e^{\mathrm{i}\delta}},\ \ \delta=kd\sin\theta\end{aligned}$$

利用公式：

$$1-e^{\mathrm{i}\varphi}=-2\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{\varphi}{2})}$$

结构因子可进一步表达为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(\theta) &= \frac{1-e^{\mathrm{i}N\delta}}{1-e^{\mathrm{i}\delta}} \\
&= -2\mathrm{i}\sin(\frac{N\delta}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{N\delta}{2})} \Big/ -2\mathrm{i}\sin(\frac{\delta}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{\delta}{2})} \\
&= e^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right),\ \ \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}
\end{aligned}
$$

于是一维光栅的夫琅禾费场为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\theta) &= \tilde{u}_0(\theta)\cdot\tilde{S}(\theta) \\
&= \tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot e^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)
\end{aligned}
$$

把 $e^{\mathrm{i}k_0L_0}$ 吸收到 $\tilde{c}$ 中，得：

$$
\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)e^{\mathrm{i}(N-1)\beta}
$$

其中，

$$
\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda},\ \ \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}
$$

衍射强度分布为：

$$
I(\theta)=\tilde{U}\tilde{U}^*=i_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2
$$

上式中，i_0 是单缝衍射零级中心即几何像点处的衍射光强，$(\sin\alpha/\alpha)^2$ 称为强度单元因子，$(\sin N\beta/\sin\beta)^2$ 称为强度结构因子。

一维光栅结构因子的主要特征

（1）主峰（主极强位置）

$$
\beta=j\pi\Longrightarrow d\sin\theta_j=j\lambda,\ \ j=0,\pm1,\pm2,\cdots
$$

此时：

$$
\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2=N^2
$$

$$
I(\theta_j)=N^2\cdot(\theta_j)
$$

（2）主峰的半角宽度

第 j 级主峰，其左右相邻的两个暗点的位置满足：

$$
d\sin(\theta_j\pm\Delta\theta)=(k\pm\frac{1}{N})\lambda\Longrightarrow d\cos\theta_j\cdot\Delta\theta=\frac{\lambda}{N}
$$

第 j 级主峰的半角宽度：

$$
\Delta\theta_j=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_j}
$$

（3）两个主峰之间

（4）单元因子作用

$$
d\sin\theta_j=j\lambda
$$

$$
a\sin\theta_{j'}=j'\lambda
$$

$$
\frac{j}{j'}=\frac{d}{a}
$$

出现缺级现象