一、基础题

1

(1)

> 简述群的重排定理。

设 $G=\{g_\alpha\}$ 为群，f 为 G 中一个确定的元素。当 α 取遍所有可能的取值时，fg_α 给出且仅仅一次给出 G 的所有元素。

$$G=\{g_\alpha\}=\{fg_\alpha\}$$

(2)

> 写出三阶群的乘法表。

三阶群只有循环群这一种结构。

	$g_1=e$	g_2	g_3
$g_1=e$	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

(3)

> 对于某李群的线性表示 $D(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha_i B_i}$，其中 B_i 为常数矩阵，求该李群的生成元。

恒元对应的群参数的取值为：

$$\alpha=0$$

$$I_j\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}\equiv\left.\frac{\partial\mathrm{e}^{\alpha_i B_i}}{\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}=B_j$$

(4)

> 证明当 α,β 为小量时，李群的结构因子 $f(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$

题目默认恒元对应的群参数的取值为 0

由于 α,β 是小量，因此结构因子可展为：

$$\begin{aligned}f(\alpha,\beta)&=\left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=0}\alpha+\left.\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=0}\beta\\&=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha,0)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}f(0,\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta\end{aligned}$$

李群的结构因子满足：

$$g(f(\alpha,\beta))=g(\alpha)g(\beta)$$

分别令 α,β 取 0，结合恒元对应的群参数的取值为 0，可得：

$$g(f(0,\beta))=g(\beta)$$

$$g(f(\alpha,0))=g(\alpha)$$

因此：

$$f(0,\beta)=\beta$$

$$f(\alpha,0)=\alpha$$

于是：

$$\begin{aligned}f(\alpha,\beta)&=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha,0)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}f(0,\beta)}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta\\&=\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha+\left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0}\beta\\&=\alpha+\beta\end{aligned}$$

2

> 给出同态的定义，并证明 D_3 群与 C_2 群同态。

同态的定义

设 $G=\{g_{im}\}$ 与 $G'=\{g_i'\}$ 之间有多一对应关系，且为满射，且群 G 中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应于 G' 中相应两个元素的乘积，则称 G 与 G' 同态，记为：

$$G\simeq G'$$

证明

$\mathrm{D}_3=\{e,d,f,a,b,c\},\mathrm{C}_2=\{e',C_2^1\}$

从 D_3 到 C_2 的映射 $F:\mathrm{D}_3\to\mathrm{C}_2$ 定义为：

$$e,d,f\mapsto e',\ \ a,b,c\mapsto C_2^1$$

显然，F 是良定义的，且是满射。

映射 F 把 D_3 中的旋转操作 e,d,f 映射为 C_2 中的恒元 e'，把 D_3 中的反射操作 a,b,c 映射为 C_2 中的 C_2^1

令 $H_1=\{e,d,f\},H_2=\{a,b,c\}$，则：

$$F(x)=\begin{cases}e' & ,\ \ x\in H_1\\ C_2^1 & ,\ \ x\in H_2\end{cases}$$

若 $x\in H_1,y\in H_1$，则 $xy\in H_1$，于是 $F(xy)=e'=F(x)F(y)$

若 $x\in H_1,y\in H_2$，则 $xy\in H_2$，于是 $F(xy)=C_2^1=F(x)F(y)$

若 $x\in H_2,y\in H_1$，则 $xy\in H_2$，于是 $F(xy)=C_2^1=F(x)F(y)$

若 $x\in H_2,y\in H_2$，则 $xy\in H_1$，于是 $F(xy)=e'=F(x)F(y)$

综上，

$$\mathrm{D}_3\simeq\mathrm{C}_2$$

3

> 给出直积群与半直积群的定义。若群 H 与 F 可以直积，且 $K=H\otimes F$，则 H 与 F 是否为 K 的不变子群？若为半直积 $K=H\otimes_{\mathrm{S}}F$，则 H 与 F 是否为 K 的不变子群？

设 $H=\{h_\alpha\},F=\{f_\beta\}$ 是 G 的两个子群，且满足：

（1）除恒元以外 H 和 F 没有公共元素

（2）两个子群的元素可对易：$h_\alpha f_\beta=f_\beta h_\alpha$

则 $K=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$ 构成一个群，称为 H 与 F 的直积群，记为：

$$K=H\otimes F$$

H 与 F 为 K 的不变子群。

4

> 写出一个 C_2 群的二维线性表示。这个表示是否可约？

$$D(e)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D\left(C_2^1\right)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\chi(e)=2,\quad \chi(C_2^1)=-2$$

$$|\chi(e)|^2+\left|\chi\left(C_2^1\right)\right|^2=8>n_G=2$$

因此这个表示可约。

5

> 给出 $\mathrm{SO}(3)$ 群中判断元素是否相互共轭的方法，并据此求 D_6 群的共轭类。D_6 群的对称轴如下：

$\mathrm{SO}(3)$ 群的有限子群 G 中两个群元 $C_{\vec{k}_1}(\omega_1)$ 和 $C_{\vec{k}_2}(\omega_2)$ 共轭的条件是：

（1）$\omega_1=\omega_2$

（2）$\exists g\in G$ 使得 $\vec{k}_2=g\vec{k}_1$

D_6 群共轭类：

$$\{e\},\left\{C_6^1,C_6^5\right\},\left\{C_6^2,C_6^4\right\},\left\{C_6^3\right\},\left\{c_{2(1)},c_{2(3)},c_{2(5)}\right\},\left\{c_{2(2)},c_{2(4)},c_{2(6)}\right\}$$

二、应用题

1

> 已知 D_2 群为正 n 边形对称群，求：（1）该群的乘法表；（2）所有共轭类与非平庸不变子群；（3）商群与特征标表；（4）以标量函数 $\psi_1=x^2,\psi_2=xy,\psi_3=y^2$ 为基底写出 D_2 群的一个三维表示。

(1)

$$\mathrm{D}_2=\{e,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$$

乘法表：

	e	σ_x	σ_y	σ_z
e	e	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	e	σ_z	σ_y
σ_y	σ_y	σ_z	e	σ_x
σ_z	σ_z	σ_y	σ_x	e

(2)

所有共轭类

由于:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$$

于是:

$$\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1} = \sigma_i\sigma_j\sigma_j^{-1} = \sigma_i, \quad \forall\sigma_j$$

因此 D_2 群中每个群元自成一类。所有共轭类为:

$$\{e\}, \{\sigma_x\}, \{\sigma_y\}, \{\sigma_z\}$$

所有非平庸不变子群

$$A_x = \{e, \sigma_x\}, A_y = \{e, \sigma_y\}, A_z = \{e, \sigma_z\}$$

(3)

商群

$$\mathrm{D}_2/A_x = \{\{e, \sigma_x\}, \{\sigma_y, \sigma_z\}\}$$

$$\mathrm{D}_2/A_y = \{\{e, \sigma_y\}, \{\sigma_x, \sigma_z\}\}$$

$$\mathrm{D}_2/A_z = \{\{e, \sigma_z\}, \{\sigma_x, \sigma_y\}\}$$

特征标表

D_2 群阶数 $n = 4$

$$n = 4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

除一维恒等表示外，D_2 群有 3 三个指数为 2 的不变子群，于是容易得到四个一维不等价不可约表示:

	e	σ_x	σ_y	σ_z
$D^{(1)}$	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1	-1
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1
$D^{(4)}$	1	-1	-1	1

(4)

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 可看成 $\mathbb{R}^3$ 空间中的线性变换。

由 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 诱导出的标量函数变换算符分别记为 $P_{\sigma_x}, P_{\sigma_y}, P_{\sigma_z}$

注意到：

$$\sigma_x^{-1} = \sigma_x, \quad \sigma_y^{-1} = \sigma_y, \quad \sigma_z^{-1} = \sigma_z$$

$$\psi_1(x,y,z) = x^2, \quad \psi_2(x,y,z) = xy, \quad \psi_3(x,y,z) = y^2$$

于是：

$$P_{\sigma_x}\psi_1(\vec{r}) = \psi_1\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_1\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_1(x,-y,-z) = x^2 = \psi_1(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_x}\psi_2(\vec{r}) = \psi_2\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_2\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_2(x,-y,-z) = -xy = -\psi_2(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_x}\psi_3(\vec{r}) = \psi_3\left(\sigma_x^{-1}\vec{r}\right) = \psi_3\left(\sigma_x\vec{r}\right) = \psi_3(x,-y,-z) = y^2 = \psi_3(\vec{r})$$

可以合写为：

$$P_{\sigma_x}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，σ_x 的一个三维表示为：

$$D(\sigma_x) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{\sigma_y}\psi_1(\vec{r}) = \psi_1\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right) = \psi_1\left(\sigma_y\vec{r}\right) = \psi_1(-x,y,-z) = x^2 = \psi_1(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_y}\psi_2(\vec{r}) = \psi_2\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right) = \psi_2\left(\sigma_y\vec{r}\right) = \psi_2(-x,y,-z) = -xy = -\psi_2(\vec{r})$$

$$P_{\sigma_y}\psi_3(\vec{r}) = \psi_3\left(\sigma_y^{-1}\vec{r}\right) = \psi_3\left(\sigma_y\vec{r}\right) = \psi_3(-x,y,-z) = y^2 = \psi_3(\vec{r})$$

可以合写为：

$$P_{\sigma_y}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此，σ_y 的一个三维表示为：

$$
D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{\sigma_z}\psi_1(\vec{r}) &= \psi_1\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_1\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_1(-x,-y,z)=x^2=\psi_1(\vec{r})\\
P_{\sigma_z}\psi_2(\vec{r}) &= \psi_2\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_2\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_2(-x,-y,z)=xy=\psi_2(\vec{r})\\
P_{\sigma_z}\psi_3(\vec{r}) &= \psi_3\left(\sigma_z^{-1}\vec{r}\right)=\psi_3\left(\sigma_z\vec{r}\right)=\psi_3(-x,-y,z)=y^2=\psi_3(\vec{r})
\end{aligned}
$$

可以合写为：

$$
P_{\sigma_z}\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi_1(\vec{r}) & \psi_2(\vec{r}) & \psi_3(\vec{r})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

因此，σ_z 的一个三维表示为：

$$
D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

综上，D_2 的一个三维表示为：

$$
D(e)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_y)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D(\sigma_z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

2

> 求 $\mathrm{SO}(3)$ 群的生成元、无穷小算子、李代数、度规与 Casmir 算子。

生成元

$\mathrm{SO}(3)$ 群线性表示 $D(\omega)$：

$$
D(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}
$$

其中，

$$
T_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\quad T_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad T_3=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

生成元：

$$I_1=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_1}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$I_2=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_2}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$I_3=\left.\frac{\partial D(\omega)}{\partial\omega_3}\right|_{\omega=0}=-\mathrm{i}T_3=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

无穷小算子

利用李群无穷小算子与生成元的关系：

$$X_i=(I_i)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu$$

$$X_1=(I_1)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_2\partial_3-x_3\partial_2$$

$$X_2=(I_2)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_3\partial_1-x_1\partial_3$$

$$X_3=(I_3)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu=x_1\partial_2-x_2\partial_1$$

李代数

$$[I_i,I_j]=\varepsilon_{ijk}I_k$$

$$C_{ij}^k=\varepsilon_{ijk}$$

度规

$$g_{ij}=C_{ik}^lC_{jl}^k=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlk}=\varepsilon_{kli}\varepsilon_{kjl}=\delta_{lj}\delta_{il}-\delta_{ll}\delta_{ij}=\delta_{ij}-3\delta_{ij}=-2\delta_{ij}$$

Casmir 算子

$$g_{\mu\nu}=-2\delta_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}$$

$$C=g^{\mu\nu}X_\mu X_\nu=-\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}X_\mu X_\nu=-\frac{1}{2}X_\mu X_\mu=-\frac{1}{2}\left(X_1^2+X_2^2+X_3^2\right)$$

3

> 洛伦兹群 $\mathrm{SO}(1,3)$ 是满足如下规则的李群：

$$-c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2=-c^2t^2+x^2+y^2+z^2,\quad c=1$$

(1)

> 求 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群的生成元和对易关系。（提示：特殊洛伦兹变换 $t'=\dfrac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}},x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$ ）

对于转动，三个生成元：

$$R_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad R_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对于 Boost，考虑只含一个参数 v 的特殊洛伦兹变换：

$$t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}},\quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}},\quad y'=y,\quad z'=z$$

与参数 v 对应的无穷小算子：

$$X_v=\left.\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial v}\right|_{v=0}\partial_\mu=-x\partial_t-t\partial_x$$

推广到一般洛伦兹变换，有：

$$X_1=-x\partial_t-t\partial_x,\quad X_2=-y\partial_t-t\partial_y,\quad X_3=-z\partial_t-t\partial_z$$

根据无穷小算子与生成元的关系（多一个负号，与 ppt 一致）：

$$X_i=(I_i)^{\mu}{}_{\nu}\,x_\nu\partial_\mu$$

可得三个与 Boost 对应的生成元：

$$B_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

生成元对易关系：

$$[R_i,R_j]=\varepsilon_{ijk}R_k,\quad [B_i,B_j]=-\varepsilon_{ijk}R_k,\quad [R_i,B_j]=\varepsilon_{ijk}B_k$$

(2)

> 判断 $\mathrm{SO}(1,3)$ 是否为两个 $\mathrm{SO}(3)$ 群的直和。

生成元对易关系：

$$[R_i,R_j]=\varepsilon_{ijk}R_k,\quad [B_i,B_j]=-\varepsilon_{ijk}R_k,\quad [R_i,B_j]=\varepsilon_{ijk}B_k$$

对生成元做线性变换：

$$P_i = \frac{1}{2}\left(R_i + \mathrm{i}B_i\right), \quad Q_i = \frac{1}{2}\left(R_i - \mathrm{i}B_i\right)$$

对易关系化为：

$$[P_i, P_j] = \varepsilon_{ijk}P_k, \quad [Q_i, Q_j] = \varepsilon_{ijk}Q_k, \quad [P_i, Q_j] = 0$$

可见，分别以 $\{P_i\}$ 和 $\{Q_i\}$ 为基矢可张成 $\mathrm{SO}(1,3)$ 的两个理想 A, B：

$$A = \mathrm{span}\left\{P_i\right\}, \quad B = \mathrm{span}\left\{Q_i\right\}$$

且：

$$A \cup B = \mathfrak{so}(1,3), \quad A \cap B = 0, \quad [A, B] = 0$$

因此，$\mathfrak{so}(1,3)$ 李代数可写为 A, B 两个理想的直和：

$$\mathfrak{so}(1,3) = A \oplus B$$

(3)

> 判断 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群是否是半单纯的。

是半单纯的。

由 A, B 李代数生成元对易关系可知，A, B 都是 $\mathfrak{so}(3)$ 李代数，因此：

$$\mathfrak{so}(1,3) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$$

而 $\mathfrak{so}(3)$ 李代数不是 Abel 的，于是 $\mathfrak{so}(1,3)$ 李代数不含 Abel 理想，因此 $\mathrm{SO}(1,3)$ 群是半单纯的。

(4)

> 由此题结论推广至 $\mathrm{SO}(1,n)$ 群，求 $\mathrm{SO}(1,n)$ 群的生成元及其对易关系。

$\mathrm{SO}(1,n)$ 群有 $n(n+1)/2$ 个生成元，其中 n 个对应 Boost，$(n-1)n/2$ 个对应空间转动。

与 $\mathrm{SO}(1,3)$ 类似，与 Boost 对应的 n 个生成元为：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & & \\ 1 & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

规律：$\left(B_i\right)_{mn} = \delta_{mi}\delta_{n0} + \delta_{m0}\delta_{ni}$，其中矩阵的行、列均从 0 开始计数。

与空间转动对应的 $(n-1)n/2$ 个生成元即 $\mathrm{SO(n)}$ 的生成元，对应的无穷小算符对易关系为：

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{jk} X_{il} + \delta_{il} X_{jk} - \delta_{ik} X_{jl} - \delta_{jl} X_{ik}$$

生成元对易关系为：

$$[R_{ij}, R_{kl}] = -\delta_{jk} X_{il} - \delta_{il} X_{jk} + \delta_{ik} X_{jl} + \delta_{jl} X_{ik}$$