例题：

对于积分

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots$$

证明递推关系：

$$\begin{cases}I_n & =-5I_{n-1}+\frac{1}{n}\ \ (n=1,2,\cdots)\\ I_0 & =\ln 1.2\end{cases}$$

用上述递推关系计算 $I_1,I_2,\cdots,I_{20}$，观测结果是否合理，说明原因并提出改进方法

解：

证明：

注意到：

$$\begin{aligned}I_n+5I_{n-1}&=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x+5\int_0^1\frac{x^{n-1}}{x+5}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^{n-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^n}{n}\bigg|_0^1\\&=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

于是：

$$I_n=-5I_{n-1}+\frac{1}{n}\ \ (n=1,2,\cdots)$$

显然：

$$I_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}\mathrm{d}x=\ln(x+5)\bigg|_0^1=\ln 6-\ln 5=\ln 1.2$$

于是递推关系得证

观测结果不合理，因为根据 I_{n-1} 计算 I_n，I_{n-1} 前的 -5 会使误差越来越大

改进方法：

放缩：

$$\forall x \in (0,1), \frac{x^n}{6} < \frac{x^n}{x+5} < \frac{x^n}{5} \ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

于是:

$$\frac{1}{6(n+1)} = \int_0^1 \frac{x^n}{6}\mathrm{d}x < I_{n=} \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^n}{5}\mathrm{d}x = \frac{1}{5(n+1)}$$

估计 I_{20}:

$$I_{20} \approx \frac{1}{2}(\frac{1}{6\cdot(20+1)} + \frac{1}{5\cdot(20+1)}) \approx 0.008730$$

由递推式 $I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}$ 得:

$$I_{n-1} = \frac{\frac{1}{n} - I_n}{5}$$

注意到由 I_n 推 I_{n-1}，$-\frac{1}{5}$ 因子会使误差越来越小

这样递推就合理多了