2.1

2.1-1

> $D(\theta)=\mathrm{e}^{in\theta}$（$n$ 为整数）是否为 $\mathrm{SO}(2)$ 群的线性表示？如果是，是否为真实表示？

是线性表示。当 $n=1$，是真实表示；当 $n\neq 1$，不是真实表示。

定义如下的对应关系：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{in\theta}\in D(\theta)$$

显然，这样定义的对应关系是良定义的映射。

设：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{in\theta_1}\in D(\theta)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{in\theta_2}\in D(\theta)$$

则：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta_1+\theta_2)}=\mathrm{e}^{in\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{in\theta_2}$$

因此：

$$\mathrm{SO}(2)\simeq D(\theta)$$

因此，$D(\theta)=\mathrm{e}^{in\theta}$（$n$ 为整数）是 $\mathrm{SO}(2)$ 群的线性表示。

$n=0$，非真实表示

当 $n=0$，$\mathrm{SO}(2)$ 的所有群元都映射到 $1\in D(\theta)$，于是此映射非一一对应，于是当 $n=0$ 时 $D(\theta)$ 不是 $\mathrm{SO}(2)$ 的真实表示。

$n=1$，真实表示

当 $n=1$，设：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\in D(\theta)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\in D(\theta)$$

其中，$\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)$

若 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则：

$$\theta_1=\theta_2$$

于是得到：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}$$

因此，定义的对应关系是一一对应，于是当 $n=1$ 时 $D(\theta)$ 是 $\mathrm{SO}(2)$ 的真实表示。

$n>1$，非真实表示

当 $n>1$ 且 n 为整数时，设：

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1}\in D(\theta)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(2)\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_2}\in D(\theta)$$

其中，$\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi)$

注意到，当 $\theta_1\neq\theta_2$ 满足：

$$\theta_1-\theta_2=\frac{2k}{n}\pi,\ \ k=1,2,\cdots,n-1$$

此时有：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1}=\exp\left(\mathrm{i}n\cdot(\theta_2+2k\pi/n)\right)=\exp(\mathrm{i}n\theta_2+2k\pi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

即此时定义的对应关系是多一对应关系，因此当 $n>1$ 时 $D(\theta)$ 不是 $\mathrm{SO}(2)$ 的真实表示。

2.1-2

> 设 $D(G)$ 为群 G 的一个 m 维表示，设 X 为一个 $m\times m$ 的非奇异矩阵（$\det X\neq 0$），证明：
> $\bar{D}(G)=\{X^{-1}D(g_i)X|g_i\in G\}$ 也构成一个群。

封闭性

$\forall X^{-1}D(g_i)X, X^{-1}D(g_j)X \in \bar{D}(G)$，都有：

$$\left(X^{-1}D(g_i)X\right)\left(X^{-1}D(g_j)X\right) = X^{-1}D(g_i)D(g_j)X \in \bar{D}(G)$$

结合律

$\forall X^{-1}D(g_i)X, X^{-1}D(g_j)X, X^{-1}D(g_k)X \in \bar{D}(G)$，都有：

$$\left(X^{-1}D(g_i)X\right)\left[\left(X^{-1}D(g_j)X\right)\left(X^{-1}D(g_k)X\right)\right] = \left[\left(X^{-1}D(g_i)X\right)\left(X^{-1}D(g_j)X\right)\right]\left(X^{-1}D(g_k)X\right)$$

存在恒元

由于单位矩阵 $E \in D(G)$，于是：

$$X^{-1}EX = E \in \bar{D}(G)$$

$\forall \bar{D}(g_i) \in \bar{D}(G)$，都有：

$$E\bar{D}(g_i) = \bar{D}(g_i)E = \bar{D}(g_i)$$

存在逆元

$\forall \bar{D}(g_i) = X^{-1}D(g_i)X \in \bar{D}(G), \exists \bar{D}^{-1}(g_i) = X^{-1}D^{-1}(g_i)X$，使得：

$$\bar{D}^{-1}(g_i)\bar{D}(g_i) = X^{-1}D^{-1}(g_i)XX^{-1}D(g_i)X = E$$

$$\bar{D}(g_i)\bar{D}^{-1}(g_i) = X^{-1}D(g_i)XX^{-1}D^{-1}(g_i)X = E$$

综上，$\bar{D}(G) = \{X^{-1}D(g_i)X | g_i \in G\}$ 也构成一个群。

2.1-3

> 证明：可约表示的等价表示依然是可约表示；不可约表示的等价表示依然是不可约表示。

可约表示的等价表示依然是可约表示

设 $D(G)$ 是群 G 的一个可约表示，即存在 $X, \det X \neq 0$ 使得：

$$X^{-1}D(G)X = \begin{bmatrix} D_1(G) & M(G) \\ \mathbf{0} & D_2(G) \end{bmatrix}$$

设 $\bar{D}(G)$ 是可约表示 $D(G)$ 的一个等价表示，即存在 $Y, \det(Y) \neq 0$ 使得：

$$\bar{D}(G) = Y^{-1}D(G)Y$$

令:

$$Z=Y^{-1}X,\ \ \mathrm{det}Z=\det\left(Y^{-1}X\right)\neq 0$$

注意到:

$$\begin{aligned}Z^{-1}\bar{D}(G)Z&=\left(Y^{-1}X\right)^{-1}\left(Y^{-1}D(G)Y\right)\left(Y^{-1}X\right)\\&=X^{-1}D(G)X\\&=\begin{bmatrix}D_1(G)&M(G)\\\mathbf{0}&D_2(G)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此，可约表示 $D(G)$ 的等价表示 $\bar{D}(G)$ 仍是可约表示。

不可约表示的等价表示依然是不可约表示

设 $D(G)$ 是群 G 的一个不可约表示，即 $\forall X, \mathrm{det}X\neq 0$ 都有:

$$X^{-1}D(G)X\neq\begin{bmatrix}D_1(G)&M(G)\\\mathbf{0}&D_2(G)\end{bmatrix}$$

设 $\bar{D}(G)$ 是不可约表示 $D(G)$ 的一个等价表示，即存在 $Y, \det(Y)\neq 0$ 使得:

$$\bar{D}(G)=Y^{-1}D(G)Y$$

注意到，$\forall Z, \mathrm{det}Z\neq 0, \det(YZ)=\det(Y)\det(Z)\neq 0$，且都有:

$$\begin{aligned}Z^{-1}\bar{D}(G)Z&=Z^{-1}Y^{-1}D(G)YZ\\&=(YZ)^{-1}D(G)(YZ)\\&\neq\begin{bmatrix}D_1(G)&M(G)\\\mathbf{0}&D_2(G)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此，不可约表示 $D(G)$ 的等价表示 $\bar{D}(G)$ 仍是不可约表示。

2.1-4

> 证明 T_1 群的二维表示 $D(\mathrm{T}_1)$ 是真实表示，其中，
>
> $$D(a)=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$$

定义如下的对应关系:

$$T_1(a)\mapsto D(a)=\begin{bmatrix}1&a\\0&1\end{bmatrix}$$

这样定义的对应关系是一一对应。

设:

$$T_1(a) \mapsto D(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ T_1(b) \mapsto D(b) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则:

$$T_1(a)T_1(b) = T_1(a+b) = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D(a)D(b)$$

因此，$\mathrm{T}_1 \cong D(\mathrm{T}_1)$，于是 T_1 群的二维表示 $D(\mathrm{T}_1)$ 是真实表示。

2.1-5

> $D_k(\mathrm{C}_n) \equiv \{D_k(C_n^m) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2\pi/n)m} | m = 1, 2, \cdots, n\}$ 是否为 C_n 群的真实表示?

当 $k = 1$ 时，是真实表示；当 $k \neq 1$ 时，不是真实表示。

$k = 0$，非真实表示

当 $k = 0$，所有循环群的群元都映射为 $1 \in D_0(\mathrm{C}_n)$，此时不是真实表示。

$k = 1$，真实表示；$k > 1$，非真实表示

当 $k \geqslant 1$ 时，

设 $1 \leqslant j < i \leqslant n$，且 $D_k(C_n^i) = D_k(C_n^j)$，即:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2\pi/n)i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2\pi/n)j}$$

即存在 $l \in \mathbb{N}^+$ 使得:

$$k(2\pi/n)i = k(2\pi/n)j + 2\pi l$$

即:

$$i - j = \frac{n}{k} l$$

又 $i - j < n$，于是:

$$l < k$$

当 $k=1$，不存在 $l\in\mathbb{N}^+$ 使得 $i-j=\frac{n}{k}l$，因此不存在 $i>j$，使得 $D_k(C_n^i)=D_k(C_n^j)$，因此 $\mathrm{C}_n\cong D_k(\mathrm{C}_n)$，此时 $D_k(\mathrm{C}_n)$ 是 C_n 的一个真实表示。

当 $k>1$，存在 $l\in\mathbb{N}^+$ 使得 $i-j=\frac{n}{k}l$，因此存在 $i>j$，使得 $D_k(C_n^i)=D_k(C_n^j)$，因此 C_n 与 $D_k(\mathrm{C}_n)$ 不同构，此时 $D_k(\mathrm{C}_n)$ 是 C_n 的一个非真实表示。

2.2

2.2-1

> 求 D_3 群的表示，表示空间为 $\mathbb{R}^3$ 空间，其中正三边形位于 xy 平面内，其中心位于坐标原点，a 轴与 x 轴重合。

e,d,f 的表示矩阵

$\mathbb{R}^3$空间中矢量绕 z 轴旋转 θ 角度这一线性变换可表示为:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

而 e,d,f 分别对应 $\mathbb{R}^3$空间中矢量绕 z 轴旋转 $0,2\pi/3,4\pi/3$ 角度的线性变换，因此:

$$D(e)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D(d)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D(f)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a 的表示矩阵

设 $\vec{v}=x\vec{\mathrm{e}}_x+y\vec{\mathrm{e}}_y+z\vec{\mathrm{e}}_z$

$$D(a)\vec{\mathrm{e}}_x=\vec{\mathrm{e}}_x,\quad D(a)\vec{\mathrm{e}}_y=-\vec{\mathrm{e}}_y,\quad D(a)\vec{\mathrm{e}}_z=-\vec{\mathrm{e}}_z$$

$$D(a)\vec{v}=xD(a)\vec{\mathrm{e}}_x+yD(a)\vec{\mathrm{e}}_y+zD(a)\vec{\mathrm{e}}_z=x\vec{\mathrm{e}}_x-y\vec{\mathrm{e}}_y-z\vec{\mathrm{e}}_z$$

因此:

$$D(a)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

b 的表示矩阵

$$D(b)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(b)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(b)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

于是:

$$D(b)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此:

$$D(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

c 的表示矩阵

$$D(c)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(c)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\ D(c)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

于是:

$$D(c)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此:

$$D(c)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

综上,

$$D(e)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ D(d)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ D(f)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$D(a)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ D(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ D(c)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

2.2-2

> 计算说明 D_4 群的如下表示是可约表示还是不可约表示：
>
> $$D(C_4)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ D(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

解 $D(C_4)$ 的特征方程：

$$\det(D(C_4)-\lambda E)=0$$

即：

$$\lambda^2+1=0$$

解得：

$$\lambda=\pm\mathrm{i}$$

对于 $\lambda=\mathrm{i}$，特征向量为：$\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-\mathrm{i}$，特征向量为：$\begin{bmatrix}1&-\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

因此存在一个相似变换矩阵：

$$X_1=\begin{bmatrix}1&1\\\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

使得 $X_1^{-1}D(C_4)X_1$ 为对角矩阵。

解 $D(\sigma_x)$ 的特征方程：

$$\det(D(\sigma_x)-\lambda E)=0$$

即：

$$\lambda^2-1=0$$

解得：

$$\lambda=\pm1$$

对于 $\lambda=1$，特征向量为：$\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-1$，特征向量为：$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

因此存在一个相似变换矩阵：

$$X_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

使得 $X_2^{-1}D(\sigma_x)X_2$ 为对角矩阵。

$$X_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

对比可知 $D(C_4)$ 和 $D(\sigma_x)$ 不能被同时相似对角化，因此这个表示是不可约表示。

2.2-3

> 证明 D_3 群的如下表示 $A(\mathrm{D}_3)$ 是二维不可约表示：
>
> $$A(e)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad A(a)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$
>
> $$A(d)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{bmatrix},\quad A(b)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$$
>
> $$A(f)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix},\quad A(c)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

选择 $\{d,a\}$ 作为生成元，可以生成 D_3 群。

解 $A(d)$ 的特征方程：

$$\det\left(A(d)-\lambda E\right)=0$$

解得特征值：

$$\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

对于 $\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，对应的特征向量为：$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

于是存在矩阵：

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

使得 $X_1^{-1}A(d)X_1$ 是对角矩阵。

解 $A(a)$ 的特征方程：

$$\det\left(A(a)-\lambda E\right)=0$$

解得特征值：

$$\lambda=\pm 1$$

对于 $\lambda=1$，对应的特征向量为：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda=-1$，对应的特征向量为：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

于是存在矩阵：

$$X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

使得 $X_2^{-1}A(a)X_2$ 是对角矩阵。

由于：

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix},\quad X_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

对比可知 $A(d)$ 和 $A(a)$ 不可能同时相似对角化，因此这个表示是不可约表示。

2.2-4

> 分别写出 D_3 群和 D_4 群的所有不等价不可约表示。

D_3 群的所有不等价不可约表示

D_3 群共有：$\{e\},\{d,f\},\{a,b,c\}$ 共 3 个类，因此有 3 个不等价不可约表示。

D_3 群的阶数为 6，而 $6=1^2+1^2+2^2$，因此 D_3 群有 2 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

D_3 群所有不等价不可约表示：

$$D^{(1)}(g_\alpha)=1,\quad g_\alpha=e,d,f,a,b,c$$

$$D^{(2)}(g_\alpha)=1,\quad g_\alpha=e,d,f;\quad D^{(2)}(g_\beta)=-1,\quad g_\beta=a,b,c$$

$$D^{(3)}(e)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(3)}(a)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$D^{(3)}(d)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{bmatrix},\quad D^{(3)}(b)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1\\1&-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$D^{(3)}(f)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(3)}(c)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&1\\1&\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

D_4 群的所有不等价不可约表示

D_4 群有 $\{e\},\{C_4^1,C_4^3\},\{C_4^2\},\{\sigma_x,\sigma_y\},\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 共 5 个类，因此有 5 个不等价不可约表示。

D_4 群的阶数为 8，而 $8=1^2+1^2+1^2+1^2+2^2$，因此共有 4 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

D_4 所有不等价不可约表示:

$$D^{(1)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^1,C_4^2,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(2)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^1,C_4^2,C_4^3;\ \ D^{(2)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(3)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^2,\sigma_x,\sigma_y;\ \ D^{(3)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=C_4^1,C_4^3,\sigma_1,\sigma_2$$

$$D^{(4)}(g_\alpha)=1,\ \ g_\alpha=e,C_4^2,\sigma_1,\sigma_2;\ \ D^{(4)}(g_\beta)=-1,\ \ g_\beta=C_4^1,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y$$

$$D^{(5)}(e)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^1)=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^2)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(C_4^3)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$D^{(5)}(\sigma_x)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_y)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_1)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \ D^{(5)}(\sigma_2)=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$