Example Code of Beamer

Your Name

Index

麦克斯韦的拉氏量

$$F = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$$

$$L_{\text{maxwell}} = -F$$

BI 模型的拉氏量

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta}\left(1 - \sqrt{1+\beta F}\right)$$

β 是任意常数。
弱场极限 $\beta F \ll 1$ 下，BI 模型的拉氏量可近似为：

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta}\left(1 - \sqrt{1+\beta F}\right) \approx -F + \frac{1}{4}\beta F^2 - \frac{1}{8}\beta^2 F^3 + \mathcal{O}\left(\beta^3 F^4\right)$$

当 $\beta \to 0$，BI 模型的拉氏量与线性麦克斯韦的拉氏量相同。

novel NLE 模型的拉氏量

$$L_{\text{general}}(F) = -\frac{(aF+1)^m}{\delta(bF+1)^n}(\beta F)^p$$

m,n,p 是无量纲常数，a,b,β,δ 是长度平方量纲的任意常数。
在弱场极限下，拉氏量可近似为：

$$L_{\text{general}}(F) = -\frac{(aF+1)^m}{\delta(bF+1)^n}(\beta F)^p \approx -c\left[F^p + c_1 F^{p+1} + c_2 F^{p+2} + \mathcal{O}\left(c_3 F^{p+3}\right)\right]$$

$p=1$ 时得到麦克斯韦的拉氏量。
通过分析取 $m=1, n=m+1, a=-3b$
得到含有两个参数且遵守麦克斯韦极限的拉氏量：

$$L(F) = \frac{\gamma(3\eta F-1)F}{(1+\eta F)^2}$$

其中，$\gamma = \beta/\delta$ 和 η 是任意参数。
当 $\eta F \ll 1$，即弱场极限下，拉氏量近似为：

$$L(F) = \frac{\gamma(3\eta F-1)F}{(1+\eta F)^2} \approx -\gamma F + 5\gamma\eta F^2 - 9\gamma\eta^2 F^3 + \gamma\mathcal{O}\left(\eta^3 F^4\right)$$

利用电位移矢量 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系 $\vec{D} = \partial L / \partial \vec{E}$，可由拉氏量式得到：

$$\vec{D} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \vec{E}$$

(10) $D_i = {\varepsilon_i}^j E_j$

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \delta_{ij}$$

磁场 $\vec{H} = -\partial L / \partial \vec{B}$ 结合拉氏量有

$$\vec{H} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \vec{B}$$

磁感应强度 $B_i = {\mu_i}^j H_j$
磁导率张量的逆 $\left(\mu^{-1}\right)_{ij}$

$$\left(\mu^{-1}\right)_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \delta_{ij}$$

可以认为新 NLE 拉氏量由这种特殊的介质生成。

平坦时空中拉氏量给出 E-L 运动方程：

$$\partial_\mu \left(L_F F^{\mu\nu}\right) = 0$$

其中，

$$L_F \equiv \frac{\partial L}{\partial F} = \frac{\gamma(-1+7\eta F)}{(1+\eta F)^3}$$

$F^{\mu\nu}$ 是麦克斯韦场强张量。
可以回到无源麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

由 Bianchi identity $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$，$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是场强张量的对偶，可得

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

考虑静电极限(electrostatic limit) $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$，对点电荷

$$\nabla \cdot \vec{D} = e\delta(\vec{r})$$

解：

$$\vec{D} = \frac{e}{4\pi r^3}\vec{r}$$

结合 $\vec{D}, \vec{E}$ 关系和 $F = -E^2/2$ 可得

$$E + \frac{7}{2}\eta E^3 = \frac{e}{4\gamma\pi r^2}\left(1 - \frac{\eta}{2}E^2\right)^3$$

上式限制 $F > -1/\eta$；弱场极限 $\eta F \ll 1$，$E(r)$ 可按 η 展开

$$E = E_{(0)} + \eta E_{(1)} + \eta^2 E_{(3)} + \mathcal{O}\left(\eta^3\right)$$

$E_{(1)}, E_{(2)}$ 分别代表对电场 $E_{(0)}$ 的一阶和二阶修正。

比较系数可得

$$E_{(0)} = \frac{e}{4\pi\gamma r^2}$$

$$E_{(1)} = -\frac{7}{2}E_{(0)}^3 - \frac{e}{4\pi\gamma r^2}E_{(0)}^2$$

$$E_{(2)} = -\frac{21}{2}E_{(0)}^2 E_{(1)} + \frac{e}{4\pi\gamma r^2}\left(-3E_{(0)}E_{(1)} + \frac{3}{4}E_{(0)}^4\right)$$

弱场极限下

$$E \approx \frac{e}{4\pi\gamma r^2} - 5\eta\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^3 + \frac{273}{4}\eta^2\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^5 + \mathcal{O}\left(\eta^3\right)$$

对于很小的 r 和任意的 η，电场最大值

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\eta}}$$

NLE 模型中电场有限。当 $\eta \to 0$，电场发散。

希尔伯特应力-能量张量(Hilbert stress-energy tensor)

$$T^H_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L(F)\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\Bigg|_{g=\eta}$$

可得

$$T^H_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}L(F) - L_F F^{\alpha}_{\mu}F_{\nu\alpha}$$

电能密度

$$\rho = -T^t_t = -L_F E^2 - L(F) = \frac{\gamma E^2\left[1+\frac{3}{2}\eta E^2\left(4+\frac{\eta}{2}E^2\right)\right]}{2\left(1-\frac{\eta}{2}E^2\right)^3}$$

总电能

$$\epsilon = 4\pi\int_0^{+\infty}\rho(r)r^2\mathrm{d}r$$

转化为对 E 的积分

$$\epsilon = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{4\pi\gamma}}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\eta}}}\frac{\sqrt{\left(2-\eta E^2\right)\left[4+3\eta E^2\left(8+\eta E^2\right)\right]\left[4+\eta E^2\left(52+21\eta E^2\right)\right]}}{16\sqrt{E}\left(2+7\eta E^2\right)^{5/2}}\mathrm{d}E$$

总能量有限。当 $\eta\to 0$，点电荷自能发散。

考虑平面电磁波 $(\vec{e},\vec{b})$ 沿 z 轴在两片平行电容板间传播，x 轴方向有匀强电场。外电场 $\vec{\bar{E}}=(\bar{E},0,0)$，总电场 $\vec{E}=\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{B}=\vec{b}$，设 $\vec{e}$ 远小于 $\vec{\bar{E}}$，拉氏量

$$L\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{b}\right)=\gamma\frac{\left\{\frac{3}{2}\eta\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}\right)^2\right]-1\right\}\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}\right)^2\right]}{2\left\{1+\frac{\eta}{2}\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}^2\right)\right]\right\}^2}$$

忽略高阶项

$$L^{(2)}(\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{b})=\frac{\gamma\eta\left(5+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^4}\left(\vec{e}\cdot\vec{\bar{E}}\right)^2-\frac{1}{2}\gamma\frac{\left(1+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^3}\left(\vec{b}^2-\vec{e}^2\right)$$

电位移矢量和磁场强度

$$d_i=\frac{\partial L^{(2)}}{\partial e_i}=\left(\alpha\delta_i^j+\beta\bar{E}_i\bar{E}^j\right)e_j,\quad h_i=-\frac{\partial L^{(2)}}{\partial b_i}=\alpha\delta_i^j b_j$$

其中

$$\beta=\frac{2\gamma\eta\left(5+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^4},\quad \alpha=\gamma\frac{\left(1+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^3}$$

结合关系 $d_i = \varepsilon_i^j e_j, h_i = \left(\mu^{-1}\right)_i^j b_j$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta \bar{E}_i \bar{E}_j, \quad \left(\mu^{-1}\right)_{ij} = \alpha\delta_{ij}$$

平面波麦克斯韦方程

$$k_i d^i = k_i b^i = 0, \quad \vec{k} \times \vec{e} = \omega\vec{b}, \quad \vec{k} \times \vec{h} = -\omega\vec{d}$$

$$\left\{\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(\mu^{-1}\right)_k^l k_j k^m + \omega^2\epsilon_n^i\right\} e^n = 0$$

ε_{ijk} 是反对称张量。矩阵形式

$$\Lambda\vec{e} = 0$$

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} -k^2\alpha + \omega^2\left(\alpha + \beta\bar{E}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2\alpha + \omega^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2\alpha \end{bmatrix}$$

由 $\det(\Lambda) = 0$ 可知电场有两种模式。两种模式定义了色散关系。折射率定义为 $n \equiv k/\omega$，因此有两种不同的折射率

$$n_{\parallel} = \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}\bar{E}^2}, \quad n_{\perp} = 1$$

不同偏振的电磁波有不同的速度 $v_{\parallel} = n_{\parallel}^{-1}, v_{\perp} = 1$

若拉氏量满足不等式：

$$L_F \leqslant 0, L_{FF} \geqslant 0, L_F + 2FL_{FF} \leqslant 0$$

则群速度不超过真空光速，且动能非负。
电场部分
取 $B = 0$，拉氏量 $L(F) = -\dfrac{(aF+1)^m}{\delta(bF+1)^n}(\beta F)^p$，前两个不等式给出

$$n \geqslant m+1, a \leqslant 0, b \geqslant 0$$

在此基础上，第三个不等式自动满足。
磁场部分
取 $E = 0$，类似可得

$$n \geqslant m+1, a \geqslant 0, b \leqslant 0$$

$n = m+1, a = -3b$ 时的因果性和单一性条件

$$L_F = \frac{\gamma(-1+7\eta F)}{(1+\eta F)^3}, L_{FF} = \frac{2\gamma\eta(5-7\eta F)}{(1+\eta F)^4}$$

$$L_F + 2FL_{FF} = \gamma\frac{-\eta F(26-21\eta F)}{(1+\eta F)^4}$$

仅电场部分，取 $B=0$，因果性和单一性条件三个不等式给出

$$-\frac{2+7\eta E^2}{\left(2-\eta E^2\right)^3}\leqslant 0,\ \frac{10+7\eta E^2}{\left(2-\eta E^2\right)^4}\geqslant 0,\ \frac{-4-\eta E^2\left(521\eta E^2\right)}{\left(2-\eta E^2\right)^4}\leqslant 0$$

所有情况都有 $E<\sqrt{2/\eta}$，$E_{\max}=\sqrt{\eta/2}$
分析磁场，取 $E=0$，前两个不等式给出

$$\left(-1+\frac{7}{2}\eta B^2\right)\leqslant 0,\ \left(5-\frac{7}{2}\eta B^2\right)\geqslant 0$$

可以得到 $F<1/7\eta$
第三不等式给出

$$-2+\eta B^2\left(26-\frac{21}{2}\eta B^2\right)\leqslant 0$$

得到 $(13-2\sqrt{37})/21<\eta F<(13+2\sqrt{37})/21$

通过作用量把拉氏量 $L(F)$ 与引力进行最小耦合

$$I=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{\kappa}+L(F)\right)$$

其中 R 为里奇标量。变分可得运动方程

$$\nabla_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial F}F^{\mu\nu}\right)=0$$

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\kappa T_{\mu\nu}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为里奇张量，$T_{\mu\nu}$ 为 Hilbert 能量-动量张量，在弯曲时空表达为

$$T_\mu^\nu=L\delta_\mu^\nu-L_F F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda}$$

考虑球对称静态时空，线元

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)$$

假设 $F_{tr},F_{\theta\phi}$ 在 $F_{\mu\nu}$ 非零，$F_{tr}=-F_{rt}$ 代表径向电场，$F_{\theta\phi}=-F_{\phi\theta}$ 代表径向磁场。应力能动-张量非零分量

$$T_t^t=T_r^r=L(F)-L_F F_{tr}F^{tr},T_\theta^\theta=T_\phi^\phi=L(F)-L_F F_{\theta\phi}F^{\theta\phi}$$

下面只关注纯磁场解和纯电场解。

磁场正则黑洞解

纯磁场解来自 $F_{tr=0}$，非零麦克斯韦张量分量 $F_{\theta\phi}=-q_m\sin\theta$，$q_m$ 为常数，可理解为一个磁单极子的总荷量，导致径向磁场 $B_r=q_m/r^2$，麦克斯韦不变量 $F=q_m^2/2r^4$；$r=0$ 处奇异

magnetic monopole 能动张量

$$T_t^t=T_r^r=\frac{\gamma q_m^2\left(3\eta q_m^2-2r^4\right)}{\left(2r^4+\eta q_m^2\right)^2}$$

$$T_\theta^\theta=T_\phi^\phi=\frac{\gamma q_m^2\left(4r^8-2\eta q_m^2r^4+3\eta^2q_m^4\right)}{\left(2r^4+\eta q_m^2\right)^3}$$

由线元可得爱因斯坦张量

$$G_\mu^\nu=\operatorname{diag}\left[\frac{f'}{r}+\frac{f-1}{r^2},\frac{f'}{r}+\frac{f-1}{r^2},\frac{f''}{2}+\frac{f'}{r},\frac{f''}{2}+\frac{f'}{r}\right]$$

$'$ 代表度规函数 $f(r)$ 的径向微分。爱因斯坦非线性麦克斯韦方程 tt 或 rr 分量简化为

$$\frac{f'}{r}+\frac{f-1}{r^2}=\kappa\frac{\gamma q_m^2\left(3\eta q_m^2-2r^4\right)}{\left(2r^4+\eta q_m^2\right)^2}$$

解上面方程可得度规函数

磁场正则黑洞解

$$f(r) = 1 + \frac{c_0}{r} + \frac{\kappa\gamma q_m^2 r^2}{2r^4 + \eta q_m^2}$$

c_0 是积分常数。取

$$c_0 = 0, \gamma = -\frac{2b_0^2}{\kappa q_m^2}, \eta = \frac{2g^4}{q_m^2}$$

b_0, g 是长度量纲常数。线元可改写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{b_0^2 r^2}{r^4 + g^4}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{b_0^2 r^2}{r^4 + g^4}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right)$$

当 r 趋于无穷大，时空度规渐近平坦

$$g_{tt} \to -1, g_{rr} \to 1 \quad \text{as} \quad r \to \infty$$

对于很小的 r，其行为与 de-Sitter 时空相似

$$g_{tt} \to -\left(1 - c^2 r^2\right), \quad g^{rr} \to \left(1 - c^2 r^2\right) \quad \text{as} \quad r \to 0$$

$g_{tt} = 0$ 给出无限红移面的位置。若度规参数满足 $0 < g < 0.5b_0^2$，则上面几何代表一系列双视界黑洞；当 $g^2 = 0.5b_0^2$，得到单视界黑洞；若 $g^2 > 0.5b_0^2$，则黑洞没有视界。特别地，当 $g^2 = 0$，黑洞有一个视界。

曲率张量和不变量的正则性

可通过黎曼和里奇张量各分量是否发散来判断时空的正则性、奇异性。坐标基底，非零黎曼曲率张量分量

$$R^0{}_{110} = -\frac{b_0^2\left(3r^8 - 12g^4r^4 + g^8\right)}{\left(r^4+g^4\right)^3}$$

$$R^0{}_{220} = R^0{}_{330} = R^2{}_{112} = R^3{}_{113} = \frac{b_0^2\left(r^4 - g^4\right)}{\left(r^4+g^4\right)^2}$$

$$R^3{}_{223} = -\frac{b_0^2}{r^4+g^4}$$

非零 Ricci 张量分量

$$R_{00} = -R_{11} = -\frac{b_0^2\left(r^8 - 12g^4r^4 + 3g^8\right)}{\left(r^4+g^4\right)^3}$$

$$R_{22} = R_{33} = \frac{b_0^2\left(3g^4 - r^4\right)}{\left(r^4+g^4\right)^2}$$

当 $r \to 0$，两个张量的分量都有限；当 $r \to \infty$，所有分量趋于零。

三个标量不变量：
Ricci 标量

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{4b_0^2\left(3g^8 - 5g^4r^4\right)}{\left(r^4+g^4\right)^3}$$

Ricci contraction

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{4b_0^2\left(r^{16} - 14g^4r^{12} + 74g^8r^8 - 30g^{12}r^4 + 9g^{16}\right)}{\left(r^4+g^4\right)^6}$$

Kretschmann scalar

$$K = R_{\mu\nu\lambda\delta}R^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{8\left(3g^{16} - 10g^{12}r^4 + 74g^8r^8 - 34g^4r^{12} + 7r^{16}\right)b_0^4}{\left(r^4+g^4\right)^6}$$

在 $r \to 0$ 时，三个不变量也都有限。

能量情况

定义 $\rho = -T^t_t, \tau = t^r_r, p = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$

$$\rho = -\tau = \frac{b_0^2\left(3g^4 - r^4\right)}{\kappa\left(r^4 + g^4\right)^2}$$

$$p = -\frac{b_0^2\left(3g^8 - 12g^4r^4 + r^8\right)}{\kappa\left(r^4 + g^4\right)^3}$$

NEC (Nullu Energy Condition) $\rho + \tau \geqslant 0, \rho + p \geqslant 0$，第一个在 $\rho + \tau = 0$ 时自动满足；

$$\rho + p = \frac{2b_0^2r^4\left(r^4 - 7g^4\right)}{\kappa\left(r^4 + g^4\right)^3}$$

第二个满足，只能 $r^4 \leqslant 7g^4$

裸电奇点解

Ricci 标量

$$R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{4}{r^2} - \frac{4f(r)}{r^2} - \frac{8f'(r)}{r} - 2f''(r)$$

通过变量替换 $\tilde{E} = E^2$ 可以写为

$$R = -8\kappa\left(L - FL_F\right) = -\frac{8\gamma\kappa\eta\tilde{E}^2\left(10+3\eta\tilde{E}\right)}{\left(-2+\eta\tilde{E}\right)^3}$$

Ricci contraction

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 8\left[\frac{f'(r)}{r} + \frac{f(r)-1}{r^2}\right]^2 + 8\left[\frac{f'(r)}{r} + \frac{f''(r)}{2}\right]^2$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= 8\kappa\left[\left(L-2FL_F\right)^2 + L^2\right] \\ &= \frac{16\kappa\gamma^2\tilde{E}^2\left\{16+\eta\tilde{E}\left[112+\eta\tilde{E}\left(296+3\eta\tilde{E}\left(20+3\eta\tilde{E}\right)\right)\right]\right\}}{\left(-2+\eta\tilde{E}\right)^6} \end{aligned}$$

在 $\tilde{E}=2/\eta$ 或 $r=0$ 处标量发散，或者说 $r=0$ 是个时空奇点。可以计算，Kretschmann 标量 $R_{\mu\nu\lambda\delta}R^{\mu\nu\lambda\delta}$ 在 $r=0$ 处也发散。

$f(T)$ 引力中的基本元素是四分量场 $h_a(x^\mu)$，其中英文字母标记切空间，希腊字母标记时空。$h_a = h_a^\mu \partial_\mu$，分量满足

$$h^a_\mu h^\mu_b = \delta^a_b, \quad h^a_\mu h^\nu_a = \delta^\nu_\mu.$$

其与度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的关系为 $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a_\mu h^b_\nu$，其中 $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ 是切空间中的闵氏度规。借助魏森博克联络 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = h^\lambda_a \partial_\nu h^a_\mu$，扭率张量 $T^\rho{}_{\mu\nu}$ 和张量 $S_\rho{}^{\mu\nu}$ 可定义为

$$T^\lambda{}_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = h^\lambda_a \left(\partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu \right),$$

$$S_\rho{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(K^{\mu\nu}{}_\rho + \delta^\mu_\rho T^{\theta\nu}{}_\theta - \delta^\nu_\rho T^{\theta\mu}{}_\theta \right),$$

其中，$K^{\mu\nu}{}_\rho = -\frac{1}{2}(T^{\mu\nu}{}_\rho - T^{\nu\mu}{}_\rho - T^{\mu\nu} - T_\rho{}^{\mu\nu})$

$f(T)$ 引力的作用量

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \mathrm{d}^4 x [e f(T) + L_m]$$

其中，$e = \sqrt{-g}, \kappa^2 = 8\pi G$，$G$ 是引力常量，L_m 是宇宙中物质拉格朗日密度。

对作用量变分可得场方程

$$\left[e^{-1}\partial_\mu\left(eS_a{}^{\mu\nu}+h_a^\lambda T^\rho{}_{\mu\lambda}S_\rho{}^{\nu\mu}\right)\right]f_T+S_a{}^{\mu\nu}\partial_\mu(T)f_{TT}+\frac{1}{4}h_a^\nu f=\frac{1}{2}\kappa^2 h_a^\rho T_\rho^\nu$$

其中，$f_T=\mathrm{d}f/\mathrm{d}T, f_{TT}=\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}T^2$，$T_\rho^\nu$ 是理想流体的能-动张量。平坦 FRW 宇宙线元

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-a^2(t)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right),$$

其中，a 是依赖于时间的标量因子，相应 $h_\mu^a=\mathrm{diag}(1,a,a,a)$
modified Friedmann equations

$$12H^2f_T+f=2\kappa^2\rho_t,$$

$$48H^2\dot{H}f_{TT}-\left(12H^2+4\dot{H}\right)f_T-f=2\kappa^2\rho_t,$$

其中，$H=\dot{a}/a$ 是哈勃参数，ρ_t, p_t 是宇宙的总能量密度和压力。

非线性电动力学

对任意物理量 Y，体积空间平均值定义为

$$\bar{Y} = \lim_{V \to V_0} \frac{1}{V} \int Y \sqrt{-g} \mathrm{d}^3 x,$$

其中，g 是度规行列式，$V = \int \sqrt{-g} \mathrm{d}^3 x$，电场和磁场的平均值

$$\bar{E}_i = 0, \quad \bar{B}_i = 0, \quad \overline{E_i B_i} = 0, \quad \overline{E_i E_j} = -\frac{1}{3} E^2 g_{ij}, \quad \overline{B_i B_j} = -\frac{1}{3} B^2 g_{ij},$$

利用电磁场不变量 F, F^* 来表达拉氏量，保留至二阶

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F + \omega F^2 + \eta_0 F^{*2},$$

其中，$F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2), F^* = F^*_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}$，$\omega_0, \eta_0$ 是任意常数。
相应能-动张量

$$T_{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_F F_{\mu}{}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left(F^* \mathcal{L}_{F^*} - \mathcal{L}\right) g_{\mu\nu},$$

结合电磁场平均值以及理想流体 $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$，可得能量密度 ρ 和压力 p

$$\rho = -\mathcal{L} - 4E^2\mathcal{L}_F,$$

$$p = \mathcal{L} + \frac{4}{3}\left(E^2 - 2B^2\right)\mathcal{L}_F,$$

考虑等离子体中迅速衰减至零的电场，进一步有

$$\rho_B = \frac{1}{2}B^2\left(1 - 8\omega B^2\right),$$

$$p_B = \frac{1}{6}B^2\left(1 - 40\omega_0 B^2\right),$$

当 $\omega_0 = \eta_0 = 0$ 时，拉氏量退化为线性麦克斯韦拉氏量，能动张量也退化

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F, \quad T_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}Fg_{\mu\nu}.$$

对于非线性过程

$$\rho = 3p = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right),$$

这表明宇宙由普通辐射组成，具有正压力。

场方程可写为

$$\frac{3H^2}{\kappa^2} = \rho_t, \quad -\frac{2\dot{H}}{\kappa^2} = \rho_t + p_t,$$

其中，$\rho_t = \rho_m + \rho_B + \rho_T, p_t = p_m + p_B + p_T$，脚标 m, B, T 分别代表物质，磁场和扭率的贡献。

$$\rho_T = \frac{1}{2\kappa^2}\left(-12H^2 f_T - f + 6H^2\right),$$

$$p_T = -\frac{1}{2\kappa^2}\left[48\dot{H}H^2 f_{TT} - \left(12H^2 + 4\dot{H}\right) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H}\right],$$

为了方便，取 $p_m = 0$，能量守恒方程

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0,$$

$$\dot{\rho}_B + 3H\left(\rho_B + p_B\right) = 0,$$

$$\dot{\rho}_T + 3H\left(\rho_T + p_T\right) = 0,$$

第一条方程解得

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3},$$

其中，a_{m0} 是任意常量。
第二条方程解得

$$B = \frac{B_0}{a^2},$$

其中，B_0 是任意常数。这表明磁场能量密度的演化随宇宙的膨胀而衰减。
EoS 参数

$$\omega_t = \left\{ -\frac{1}{\kappa^2} \left[48\dot{H}H^2 f_{TT} - \left(12H^2 + 4\dot{H}\right) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H} \right] + \frac{B^2}{6}\left(1 - 40\omega_0 B^2\right) \right\}$$
$$\times \left\{ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{2\kappa^2}\left[6H^2 - f - 12H^2 f_T\right] + \frac{B^2}{2}\left[1 - 8\omega_0 B^2\right] \right\}^{-1}$$

减速参数是宇宙膨胀加速度的度量，其由下式给出

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}.$$

负的 q 意味着加速状态。

目前 $q_t = \frac{1}{2}(1+3\omega_t)$，于是

$$2q_t = 1 + 3\left[-\frac{1}{\kappa^2}\left(48\dot{H}H^2 f_{TT} - \left(12H^2 + 4\dot{H}\right) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H}\right) + \frac{B^2}{6}\left(1 - 40\omega_0 B^2\right.\right.$$
$$\times\left[\rho_{m0}a^{-3} + \frac{1}{2}\left(6H^2 - f - 12H^2 f_T\right) + \frac{B^2}{2}\left(1 - 8\omega_0 B^2\right)\right]^{-1}$$

这是 $f(T)$ 的EoS(Equation of State)，可以通过几个 $f(T)$ 模型来检查这些宇宙学参数的行为。

广义热力学第二定律(GSLT)

GLST说，在视界里和视界上的总熵不随时间减少。
由热力学第一定律有克劳修斯关系 $-\mathrm{d}E = T_X \mathrm{d}S_X$，其中 $S_X = A/(4G)$ 是 Bekenstein 熵，$A = 4\pi R_X^2$ 是视界面积，X 是任意视界，$T_X = 1/(2\pi R_X)$ 是霍金温度。Miao 等人发现在 $f(T)$ 引力中热力学第一定律被违背，这导致额外的熵增项 S_P；而在 f_{TT} 很小时，热力学第一定律成立，这时熵 $S_X = (Af_T)/(4G)$，而与 S_P 无关。下面采用更一般的方法来研究磁 $f(T)$ 场景下的 GSLT。熵对时间微分

$$\frac{\mathrm{d}S_X}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_P}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi R_X}{G}\left(2\dot{R}_X f_T + R_X \dot{T} f_{TT}\right).$$

利用吉布斯方程找到视界熵正常熵 S_I 的变化率

$$\frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T_X}\left(\frac{\mathrm{d}E_I}{\mathrm{d}t} + p_t \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right),$$

其中，$E_I = \rho_t V, V = 4\pi R_X^3/3$ 是视界体积。计算得

$$\frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t} = \frac{4\pi R_X^2}{T_X}\left(\dot{R}_X - HR_X\right)(\rho_t + p_t).$$

总熵对时间的微分

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}S_X}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}S_P}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t}\\=&\frac{\pi R_X}{G}\Bigg\{2\dot{R}_X f_T+R_X\dot{T}f_{TT}\\&+8\pi G R_X^2\left[\rho_{m0}a^{-3}+\frac{1}{\kappa^2}\left(4\dot{H}Tf_{TT}+2\dot{H}\left(f_T-1\right)\right)+\frac{2B_0^2}{3a^4}\left(1-\frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4}\right)\right]\\&\times\left[\dot{R}_X-HR_X\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

GSLT $(\dot{S}_X+\dot{S}_I+\dot{S}_P)\geqslant 0$，下面讨论两种常用的宇宙学视界。

哈勃视界(Hubble Horizon)

假设FRW宇宙热力学系统的边界被处于平衡状态的表观视界(apparent horizon)占据。对于平坦的 FRW，它退化为半径为 R_H 的哈勃视界

$$R_H = \frac{1}{H}, \quad \dot{R}_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

把任意视界 X 替换为 H 得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}S_X}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_P}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\pi}{GH}\left\{\frac{2\dot{H}}{H^2} f_T + 12\dot{H} f_{TT} + \frac{8\pi G}{H^2}\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right)\right. \\
&\quad \left. \times \left[\rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{\kappa^2}\left(4\dot{H} T f_{TT} + 2\dot{H}\left(f_T - 1\right)\right) + \frac{2B_0^2}{3a^4}\left(1 - \frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

这是哈勃视界上所有宇宙中流体总熵的变化率。

事件视界(Event Horizon)

事件视界半径

$$R_E = a\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a}, \quad \dot{R}_E = HR_E - 1.$$

把任意视界 X 替换为 E 得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}S_E}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_P}{\mathrm{d}t}\\ =&\frac{\pi}{G}\left(a\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a}\right)\left[2\left(\dot{a}\int_t^\infty -1\right) - 12H\dot{H}\left(a\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a}\right)\right.\\ &+ 8\pi G\times\left(a\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a}\right)^2\left(\left(\dot{a}\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a} - 1\right) - H\left(a\int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a}\right)\right)\\ &\left.\times\left\{\rho_{m0}a^{-3} + \frac{1}{\kappa^2}\left(4\dot{H}Tf_{TT} + 2\dot{H}(f_T - 1)\right) + \frac{2B_0^2}{3a^4}\left(1 - \frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4}\right)\right\}\right].\end{aligned}$$

这代表了平衡态事件视界上宇宙中总熵的变化率。

考虑如下形式的标量因子

$$a(t) = a_0 \left(t_s - t\right)^{-h}, \quad h > 0, \quad t_s \geqslant t$$

哈勃参数 H，扭率(torsion)标量 T，$\dot{H}$ 为

$$H = \frac{h}{t_s - t}, \quad T = -\frac{6h^2}{\left(t_s - t\right)^2}, \quad \dot{H} = \frac{h}{\left(t_s - t\right)^2}.$$

把上式代入修正 Friedmann 方程的第一条可得

$$\begin{aligned} f(T) =& c_1 \left(-\frac{T}{6h^2}\right)^{1/2} + \frac{2\kappa^2 \rho_{m0}}{a_0^3 \left(3h+1\right)} \left(-\frac{6h^2}{T}\right)^{3h/2} + \frac{\kappa^2 B_0^2}{a_0^4 \left(4h+1\right)} \left(-\frac{6h^2}{T}\right)^{2h} \\ & - \frac{8\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{a_0^8 \left(8h+1\right)} \left(-\frac{6h^2}{T}\right)^{4h}, \end{aligned}$$

其中，c_1 由边界条件确定。

两个 EoS 参数

$$\omega_t = \frac{20\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{9h^2 a_0^8}(1+z)^{(8h+2)/h} - \frac{\kappa^2 B_0^2}{18h^2 a_0^4}(1+z)^{(4h+2)/h} - \frac{2(3h+2)}{3h},$$

$$q_t = \frac{10\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{3h^2 a_0^8}(1+z)^{(8h+2)/h} - \frac{\kappa^2 B_0^2}{12h^2 a_0^4}(1+z)^{(4h+2)/h} - \frac{5h+4}{2h},$$

检验GSLT

$$f_{TT} = \frac{(1+z)^{4/h}}{36h^4}\left[\frac{3h(3h+2)\kappa^2\rho_{m0}}{2a_0^3(3h+1)}(1+z)^3 + \frac{2h(2h+1)\kappa^2 B_0^2}{a_0^4(4h+1)}(1+z)^4 - \frac{32h(4h+1)\kappa^2 B_0^4\omega_0}{a_0^8(8h+1)}(1+z)^8 - \frac{c_1}{4(1+z)^{1/h}}\right].$$

Hubble Horizon

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}S_H}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}S_I}{\mathrm{d}t}\\
=&-\frac{\pi(1+z)^{3/h}}{Gh^3}\left[\frac{3h(3h+4)\kappa^2\rho_{m0}}{2a_0^3(3h+1)}(1+z)^3+\frac{4(h+1)\kappa^2B_0^2}{3a_0^4(4h+1)}(1+z)^4\right.\\
&\left.-\frac{64h(2h+1)\kappa^2B_0^4\omega_0}{3a_0^8(8h+1)}(1+z)^8-\frac{c_1}{4h(1+z)^{1/h}}\right]+\frac{2\pi}{Gh^3}(1+h)(1+z)^{1/h}.
\end{aligned}
$$

Thank You!