格林公式

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi) &= \partial_i[\psi(\nabla\varphi)_i] \\
&= (\partial_i\psi)(\nabla\varphi)_i + \psi\partial_i(\nabla\varphi)_i \\
&= (\nabla\psi)_i(\nabla\varphi)_i + \psi\nabla\cdot(\nabla\varphi) \\
&= (\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi) + \psi\nabla^2\varphi
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{V}\nabla\cdot(\psi\nabla\varphi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{V}\Big[(\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi) + \psi\nabla^2\varphi\Big]\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

一方面：

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} - \int\limits_{\partial V}(\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\
&= \int\limits_{V}\Big[(\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi) + \psi\nabla^2\varphi\Big]\mathrm{d}V - \int\limits_{V}\Big[(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi) + \varphi\nabla^2\psi\Big]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{V}(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

另一方面：

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{\partial V}(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{\partial V}(\psi\frac{\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}r} - \varphi\frac{\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}r})\mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{\partial V}(\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r})\mathrm{d}S \\
&= \int\limits_{\partial V}(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

于是得到格林公式：

$$
\int\limits_{V}(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial V}(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})\mathrm{d}S
$$

线元的模方

设 $\mathbb{R}^3$ 空间的位矢 $\vec{r}$ 可由三个参数 u_1, u_2, u_3 描述，即：

$$
\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)
$$

若参数 u_1, u_2, u_3 分别产生一个小变化 $\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2, \mathrm{d}u_3$，由此导致 $\vec{r}$ 产生的小变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 应满足：

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中的线元的模方，记为 $\mathrm{d}r^2$，定义为：

$$\mathrm{d}r^2 \equiv \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r^2 &\equiv \mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j\right) \\
&= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j
\end{aligned}$$

度量系数

曲线坐标系中的度量系数，记为 g_{ij}，定义为：

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}$$

线元模方 $\mathrm{d}r^2$ 可利用度量系数写为：

$$\mathrm{d}r^2 = g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j$$

正交曲线坐标系

称以 u_1, u_2, u_3 为参数描述空间位置的坐标系是一个正交曲线坐标系，若：

$$g_{ij} = 0, \;\; i \neq j$$

度量系数 g_{ij} 的矩阵表示，记为 (g_{ij})，定义为：

$$(g_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

利用系数度量矩阵 (g_{ij})，线元的模方 $\mathrm{d}r^2$ 在 (u_1, u_2, u_3) 曲线坐标系下可表示为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r^2 &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 & \mathrm{d}u_2 & \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} (g_{ij}) \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 & \mathrm{d}u_2 & \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u_1 \\ \mathrm{d}u_2 \\ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

正交曲线坐标系的度量系数矩阵 (g_{ij}) 只有对角元非零。笛卡尔坐标系、球坐标系和柱坐标系都是正交曲线坐标系，因此度量系数矩阵都只有对角元非零。也就是说，对于正交曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3)，有：

$$\mathrm{d}r^2 = g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}u_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}u_3)^2$$

度量分量

上面说到，对于正交曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3)，线元的模方 $\mathrm{d}r^2$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}r^2 = g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2 + g_{22}(\mathrm{d}u_2)^2 + g_{33}(\mathrm{d}u_3)^2$$

特别地，若 $\mathrm{d}u_2 = \mathrm{d}u_3 = 0$，即 $\vec{r}$ 只沿 u_1 参数曲线作微小变化时，有：

$$\mathrm{d}r^2 = g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2$$

把此时的微小弧长记为 $\mathrm{d}s_1$，即：

$$\mathrm{d}s_1 = \sqrt{g_{11}}\mathrm{d}u_1$$

同理有：

$$\mathrm{d}s_2 \equiv \sqrt{g_{22}}\mathrm{d}u_2$$

$$\mathrm{d}s_3 = \sqrt{g_{33}}\mathrm{d}u_3$$

直角坐标系

对于直角坐标系，$(u_1, u_2, u_3) = (x_1, x_2, x_3); \vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} &\equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\vec{r}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \vec{r}(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \\ &= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_1 \vec{e}_1}{\Delta x_1} \\ &= \vec{e}_1\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = \vec{e}_2$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3} = \vec{e}_3$$

于是笛卡尔坐标系的度量系数 g_{ij} 为：

$$\begin{aligned}g_{ij} &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} \\ &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

度量系数的矩阵表示为：

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

线元的模方 $\mathrm{d}r^2$ 在笛卡尔坐标系下的表示为：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r^2 &= g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j \\ &= \delta_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j \\ &= \mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_j \\ &= \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2\end{aligned}$$

度量分量分别为：

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

球坐标系

对于球坐标系，$(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \varphi); \vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &\equiv \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\vec{r}(r+\Delta r,\theta,\varphi)-\vec{r}(r,\theta,\varphi)}{\Delta r}\\ &=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta r\vec{e}_r}{\Delta r}\\ &=\vec{e}_r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &\equiv \lim_{\Delta \theta\to 0}\frac{\vec{r}(r,\theta+\Delta\theta,\varphi)-\vec{r}(r,\theta,\varphi)}{\Delta \theta}\\ &=\lim_{\Delta \theta\to 0}\frac{r\Delta\theta\vec{e}_\theta}{\Delta \theta}\\ &=r\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &\equiv \lim_{\Delta \varphi\to 0}\frac{\vec{r}(r,\theta,\varphi+\Delta\varphi)-\vec{r}(r,\theta,\varphi)}{\Delta \varphi}\\ &=\lim_{\Delta \varphi\to 0}\frac{r\sin\theta\Delta\varphi\vec{e}_\varphi}{\Delta \varphi}\\ &=r\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

于是球坐标系的度量系数 g_{ij} 的矩阵表示为：

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

度量分量分别为：

$$h_1=1,\ \ h_2=r,\ \ h_3=r\sin\theta$$

柱坐标系下的线元表示

对于柱坐标系，$(u_1,u_2,u_3)=(\rho,\varphi,z);\vec{r}=\vec{r}(\rho,\varphi,z)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &\equiv \lim_{\Delta \rho\to 0}\frac{\vec{r}(\rho+\Delta\rho,\varphi,z)-\vec{r}(\rho,\varphi,z)}{\Delta \rho}\\ &=\lim_{\Delta \rho\to 0}\frac{\Delta\rho\vec{e}_\rho}{\Delta \rho}\\ &=\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &\equiv \lim_{\Delta \varphi\to 0}\frac{\vec{r}(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z)-\vec{r}(\rho,\varphi,z)}{\Delta \varphi}\\ &=\lim_{\Delta \varphi\to 0}\frac{\rho\Delta\varphi\vec{e}_\varphi}{\Delta \varphi}\\ &=\rho\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &\equiv \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\vec{r}(\rho,\varphi,z+\Delta z)-\vec{r}(\rho,\varphi,z)}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\vec{e}_z}{\Delta z}\\ &=\vec{e}_z\end{aligned}$$

于是柱坐标的度量系数矩阵 (g_{ij}) 为：

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

度量分量分别为：

$$h_1 = 1,\ \ h_2 = \rho,\ \ h_3 = 1$$

梯度、散度、旋度

梯度

梯度的定义

设 ψ 是 $\mathbb{R}^3$ 空间中的标量场，$\mathrm{d}\vec{r}$ 是 $\vec{r}$ 处的任意有向线元，$\mathrm{d}\psi$ 是位矢 $\vec{r}$ 产生小变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 所导致的 ψ 产生的小变化；ψ 的梯度，记为 $\nabla\psi$，定义为满足下式的矢量场：

$$\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi$$

梯度与方向导数的关系

对于梯度的定义式：

$$\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi$$

取：

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{n}_l \mathrm{d}l$$

其中，l 是以 $\vec{r}$ 为端点的射线，标记了一个方向，$\mathrm{d}l$ 是这条 $\vec{r}$ 的端点沿射线 l 方向延伸出的小线元，$\vec{n}_l$ 是射线 l 方向上的单位向量，则：

$$\nabla\psi \cdot \vec{n}_l \mathrm{d}l = \mathrm{d}\psi$$

即：

$$\boxed{\nabla\psi \cdot \vec{n}_l = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_l}$$

其中，$\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|_l$ 是标量场 ψ 沿射线 l 方向上的方向导数。

正交曲线坐标系下梯度的一般表达式

对于正交曲线坐标系 (u_1, u_2, u_3)，设坐标基向量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$，梯度 $\nabla\psi$ 和有限线元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 可在坐标基向量上展开为：

$$\nabla\psi = \sum_i (\nabla\psi)_i \vec{e}_i,\ \ \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \mathrm{d}s_i \vec{e}_i$$

由梯度的定义式 $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi$ ，有：

$$\sum_i (\nabla\psi)_i \mathrm{d}s_i = \mathrm{d}\psi$$

一方面，前面的推导给出：

$$\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}u_i$$

另一方面，

$$\mathrm{d}\psi(u_1, u_2, u_3) = \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial u_i} \mathrm{d}u_i$$

两者代入，得：

$$\sum_i (\nabla\psi)_i h_i \mathrm{d}u_i = \sum_i \frac{\partial\psi}{\partial u_i} \mathrm{d}u_i$$

对比可得：

$$(\nabla\psi)_i h_i = \frac{\partial\psi}{\partial u_i}$$

于是得到矢量 $\nabla\psi$ 在正交曲线坐标系 (u_1,u_2,u_3)下的分量表示：

$$(\nabla\psi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial u_i},\ \ (i\text{不求和})$$

以及：

$$\nabla\psi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial u_i}\vec{e}_i$$

直角坐标系下的梯度

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标系下的梯度

$(u_1,u_2,u_3) = (r,\theta,\varphi), h = (1, r, r\sin\theta)$

$$\nabla\ = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

柱坐标系下的梯度

$(u_1,u_2,u_3) = (\rho,\varphi,z), h = (1,\rho,1)$

$$\nabla = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

散度

矢量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\nabla\cdot\vec{A}$，定义为：

$$\nabla\cdot\vec{A} \equiv \lim_{\Delta V\to 0^+}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

其中，ΔV 是区域 V 的体积，∂V 是区域 V 的边界，∂V^+ 表明面元的方向为边界外法向

$$\begin{aligned}\Delta V &= \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\\ &= h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{\sigma}\big|_{u_1,u_2,u_3} &= -\vec{e}_1\mathrm{d}s_2\big|_{u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}s_3\big|_{u_1,u_2,u_3}\\ &= -\vec{e}_1(h_2h_3)\big|_{u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{\sigma}\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3} &= \vec{e}_1\mathrm{d}s_2\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}s_3\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3}\\ &= \vec{e}_1(h_2h_3)\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\big|_{u_1,u_2,u_3}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}\big|_{u_1,u_2,u_3} + \vec{A}\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}\big|_{u_1,u_2,u_3} &= -(A_1h_2h_3)\big|_{u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3 + (A_1h_2h_3)\big|_{u_1+\mathrm{d}u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\\ &= \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

设坐标 u_1,u_2,u_3 各有一个小增量 $\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\mathrm{d}u_3$，此过程中会在空间中围成一个体积元 $\mathrm{d}V$，$\mathrm{d}V$ 可表达为：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\\
&= (h_1\mathrm{d}u_1)(h_2\mathrm{d}u_2)(h_3\mathrm{d}u_3)\\
&= h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]}
$$

直角坐标系下的散度

$$
\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
$$

球坐标系下的散度

$$
\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi r)\right]
$$

柱坐标系下的散度

$$
\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(A_\rho\rho) + \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\rho)\right]
$$

旋度

$$
(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n = \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
$$

其中，σ 是垂直于 $\vec{e}_n$ 的面元

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\vec{A})_1 &= \lim_{\sigma\to 0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\
&= \frac{1}{h_2h_3\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3}\cdot\left[(A_2h_2)\big|_{u_1,u_2,u_3}\mathrm{d}u_2 - (A_2h_2)\big|_{u_1,u_2,u_3+\mathrm{d}u_3}\mathrm{d}u_2 - (A_3h_3)\big|_{u_1,u_2,u_3} + (A_3h_3)\big|_{u_1,u_2+\mathrm{d}u_2,u_3}\mathrm{d}u_3\right]\\
&= \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right]\vec{e}_1 + \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3h_3)\right]\vec{e}_2 + \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1h_1)\right]\vec{e}_3}
$$

直角坐标系下的旋度

$$
\nabla\times\vec{A} = \vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i A_j
$$

球坐标系下的旋度

$$
\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\vec{e}_\varphi
$$

柱坐标系下的旋度

$$
\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_z - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}A_\rho - \frac{\partial}{\partial\rho}A_z\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi\right]\vec{e}_z
$$

斯托克斯公式

$$
\int_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} = \oint_{\partial\Sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
$$

拉普拉斯算符 ∇^2

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

直角坐标系下的拉普拉斯算符

球坐标系下的拉普拉斯算符

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

柱坐标系下的拉普拉斯算符

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]$$

线性空间

线性空间的内积

定义在数域 $\mathbb{K}$ 和线性空间 $\mathbb{L}$ 上的内积是一个映射：

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{L}\times\mathbb{L}\to\mathbb{K}$$

其满足：

（1）$\forall\psi,\chi\in\mathbb{L}$，有：

$$\langle\psi,\chi\rangle=\langle\chi,\psi\rangle^*$$

其中，* 表示复共轭

（2）$\forall a,b\in\mathbb{K},\forall\psi,\chi,\varphi\in\mathbb{L}$，有：

$$\langle\psi,a\chi+b\varphi\rangle=a\langle\psi,\chi\rangle+b\langle\psi,\varphi\rangle$$

$$\langle a\chi+b\varphi,\psi\rangle=a^*\langle\chi,\psi\rangle+b^*\langle\varphi,\psi\rangle$$

（3）

$$\langle\psi,\psi\rangle\ \geqslant 0$$

线性空间向量的模

$$|\psi|\equiv\sqrt{\langle\psi,\psi\rangle}$$

正交

$$\langle\psi,\chi\rangle=0$$

归一化

$$\frac{\psi}{|\psi|}$$

施密特正交化

完备性

δ 函数

δ 函数定义

δ 函数是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，其满足：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & ,x\neq x_0\\ +\infty & ,x=x_0\end{cases},\text{且}\int_a^b\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & ,x_0\in(a,b)\\ 0 & ,x_0\notin(a,b)\end{cases}$$

δ 函数各种形式

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}=\delta(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}=\delta(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}=\delta(x)$$

δ 函数的傅里叶展开

$$\boxed{\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}\mathrm{d}k}$$

δ 函数的性质

（1）筛选性质

设 $f(x)$ 为连续函数，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$$

证明：

取 $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x&=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x\\&=f(\xi)\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\delta(x-x_0)\mathrm{d}x\\&=f(\xi)\end{aligned}$$

其中，$\xi\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

取极限得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$$

（2）$\delta(x)$ 是偶函数：

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

（3）：

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

（4）：

$$x\delta(x)=0$$

（5）：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x=\delta(x_1-x_2)$$

（6）：设 x_i 为 $\varphi(x)$ 的单根，则:

$$\delta(\varphi(x))=\sum_i\frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

三维 δ 函数

直角坐标

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

球坐标

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

柱坐标

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

结论

$$\delta(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

三维 δ 函数傅里叶分解

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}\mathrm{d}^3\vec{k}$$

δ 函数广义傅里叶级数展开

$\{\varphi_j(x)\}$ 是一组完备正交归一基，即:

$$\langle\varphi_i(x),\varphi_j(x)\rangle=\int\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij}$$

$$I=\sum_j|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|=\sum_j\varphi_j\varphi_j^\dagger$$

$$
\begin{aligned}
\delta(x-x') &= |\delta(x-x')\rangle \\
&= I\cdot|\delta(x-x')\rangle \\
&= \left(\sum_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\right)|\delta(x-x')\rangle \\
&= \sum_j \langle\varphi_j|\delta(x-x')\rangle\,|\varphi_j\rangle \\
&= \sum_j \left(\int \varphi_j^*(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x\right)\varphi_j(x) \\
&= \sum_j \varphi_j^*(x')\varphi_j(x)
\end{aligned}
$$

δ 函数在格林函数中的应用

Sturm-Liouville 本征值问题

具有如下形式带参数 λ 的二阶常微分方程称为 Sturm-Liouville 方程（简称 S-L 方程）：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right]-q(x)y(x)+\lambda q(x)y(x)=0
$$

若定义线性算子

$$
L\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)
$$

则 S-L 方程可写为：

$$
Ly(x)=\lambda\rho(x)y(x)
$$

为方便，取 $k(x)\geqslant 0, q(x)\geqslant 0, \rho(x)>0$

本征值和本征函数的性质

若方程的边界条件限制为如下三种边界条件：

1）三类齐次边界条件，即在 $x=a, x=b$ 的边界点上，有：

$$
[\alpha_1 y-\beta_1 y']_{x=a}=0
$$

$$
[\alpha_2 y+\beta_2 y']_{x=b}=0
$$

其中，$\alpha_{1,2},\beta_{1,2}\geqslant 0$

2）$k(a)=k(b)=0$，称为自然边界条件，其等价于 $y(a)\neq\infty, y(b)\neq\infty$

3）周期性边界条件

则有结论：

（1）S-L 方程存在本征解。每一个本征值有唯一的本征函数 $y_n(x)$，所有的本征解 $\{y_n(x)\}$ 构成一个正交的函数系。

（2）S-L 问题有无穷多个非负的本征值，所有的本征值组成一个单调递增以无穷远点为凝聚点的序列

$$
0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty
$$

（3）无穷多个本征值 λ_n 对应的无穷多个本征函数 $y_n(x)$ 构成一个完备的正交函数系 $\{y_n(x)\}$，任何一个定义在 $x \in [a,b]$ 上的满足 Direchlet 条件的函数 $f(x)$ 都可以在函数系 $\{y_n(x)\}$ 上作广义 Fourier 展开：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x)$$

展开系数为：

$$C_n = \frac{1}{\int_a^b |y_n(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x} \int_a^b f(x)\rho(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x$$

格林函数

二阶偏微分方程的普遍形式为：

$$Lu(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

其中，

$$L = a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

考虑无边界条件，即在无穷空间中求解微分方程，

$$Lu(x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \ n \leqslant 3$$

算子 L 的无界空间的格林函数，记为 $G_0(x,x')$，定义为：

$$LG_0(x,x') = \delta(x-x'),\ \ x, x' \in \mathbb{R}^{n+1},\ \ n \leqslant 3$$

$G_0(x,x')$ 可以写成：

$$G_0(x,x') = L^{-1}\delta(x-x') + u_0(x)$$

其中，$u_0(x)$ 是相应的齐次方程的解，即：

$$Lu_0(x) = 0$$

δ 函数的傅里叶变换式：

$$\delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int e^{\mathrm{i}k_\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \mathrm{d}^{n+1}k$$

于是：

$$\begin{aligned} G_0(x,x') &= L^{-1}\delta(x-x') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int L^{-1} e^{\mathrm{i}k_\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} \mathrm{d}^{n+1} \end{aligned}$$

可以验证，利用格林函数，方程 $Lu(x) = f(x)$ 的 解可表达为：

$$u(x) = u_0(x) + \int f(x')G_0(x,x')\mathrm{d}^{n+1}x'$$

代入验证：

$$
\begin{aligned}
L\left[u_0(x)+\int f(x')G_0(x,x')\mathrm{d}^{n+1}x'\right] &= \int f(x')LG_0(x,x')\mathrm{d}^{n+1}x' \\
&= \int f(x')LL^{-1}\delta(x-x')\mathrm{d}^{n+1}x' \\
&= \int f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}^{n+1}x' \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

刚好满足原方程

例:

在半空间 $z>0$ 内求解 $\mathrm{Poisson}$ 方程的第一类边值问题:

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u(x,y,z)=f(x,y,z), & z>0 \\
u(x,y,z)\Big|_{z=0}=\varphi(x,y), & z=0
\end{cases}
$$

解:

$$
\begin{cases}
\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}') \\
G(\vec{r})\Big|_{z=0}=0
\end{cases}
$$

somehow derive:

$$
G(x,y,z;x',y',z')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}
$$

$G_0(x,x')$ 求法

$$
G_0(x,x')=\frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\int\frac{\exp\left[\mathrm{i}\sum\limits_{\alpha}k_\alpha(x_\alpha-x'_\alpha)\right]}{-a_{ij}k_ik_j+\mathrm{i}b_jk_j+c}\mathrm{d}^{n+1}k
$$

∇^2 算子基本解

$$
\nabla^2 G_0(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')
$$

利用结论:

$$
\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\nabla^2(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})
$$

对比可得拉普拉斯算子的基本解:

$$
G_0(\vec{r},\vec{r}')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
$$

拉普拉斯算子的格林函数

$$
\begin{cases}
\nabla^2 G(x,x')=\delta(x-x') \\
(G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial n})\Big|_{x\in\partial\Omega}=0
\end{cases}
$$

求 $G(x,x')$

构造一个光滑的辅助函数 $g(x,x')$ 使得:

$$
\begin{cases}
\nabla^2 g(x,x') = 0 \\
g\Big|_{x\in\partial\Omega} = G_0(x,x')\Big|_{x\in\partial\Omega}
\end{cases}
$$

则

$$
G(x,x') = G_0(x,x') - g(x,x')
$$

验证:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 G(x,x') &= G_0(x,x') - g(x,x') \\
&= \nabla^2 G_0(x,x') \\
&= \delta(x-x')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,x')\Big|_{x\in\partial\Omega} &= G_0\Big|_{x\in\partial\Omega} - g\Big|_{\partial\Omega} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

三维亥姆霍兹方程基本解

$L = \nabla^2 + k^2$

基本解:

$$
(\nabla^2 + k^2) G_0(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')
$$

$$
G_0(\vec{r},\vec{r}') = (\nabla^2 + k^2)^{-1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp(\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'))}{k^2-q^2}\mathrm{d}^3\vec{q}
$$

令 $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$，使 $\vec{x}$ 轴作为 $\vec{q}$ 的 z 轴

$$
\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = qx\cos\theta
$$

$$
G_0(\vec{r}-\vec{r}')

$$