第3章 恒定电流

基本概念

电流

单位时间内通过导体某一横截面的电荷量，称为电流.

$$I \equiv \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

电流密度

导体中某点的电流密度 $\vec{j}$ 的方向是该点的电流方向。在该点取一个与电流密度方向相同的面元 $\mathrm{d}\vec{S}'$，通过该面元的电流记为 $\mathrm{d}I$，则该点的电流密度大小 j 由下式定义：

$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S'$$

其中，$\mathrm{d}S'$ 是面元的面积

一般地，若在某点取一个面元 $\mathrm{d}\vec{S}$，面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 与 该点电流密度 $\vec{j}$ 的夹角记为 θ，可将 面元 $\mathrm{d}S$ 往垂直于电流密度 $\vec{j}$ 的平面上投影，投影得到的面元记为 $\mathrm{d}\vec{S}'$，$\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}S'$ 满足几何关系：

$$\mathrm{d}S' = \cos\theta \mathrm{d}S$$

由电流密度的定义，通过面元 $\mathrm{d}\vec{S}'$ 的电流，记为 $\mathrm{d}I'$，满足：

$$\mathrm{d}I' = j\mathrm{d}S'$$

通过面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电流记为 $\mathrm{d}I$，从几何上容易看出，在该点附近的小区域内，电流密度可近似认为不变，则任一通过 $\mathrm{d}S$ 的电荷也必定通过 $\mathrm{d}S'$，于是得到：

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I'$$

将上面的两条关系代入上式，得：

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}I' = j\mathrm{d}S' = j\cos\theta\mathrm{d}S = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

这就是说，通过任意一个面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电流 $\mathrm{d}I$ 可用电流密度 $\vec{j}$ 表达为：

$$\mathrm{d}I = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

利用电流密度，可以写出通过某一有限大曲面 S 的电流 I：

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

恒定电流

电流场不随时间变化的电流称为恒定电流。

电流连续方程（实质是电荷守恒定律）

积分形式

$$\oiint_{\partial V} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

其中，q 是 V 内总电荷量。

或者也可以写为：

$$\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

微分形式

高斯公式给出：

$$\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{j}) \mathrm{d}V$$

再结合电流连续方程的积分形式

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial V} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V\end{aligned}$$

得到：

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) \mathrm{d}V = 0$$

于是：

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

这就得到电流连续方程的微分形式。

恒定电流

电流场不随时间变化的电流称为恒定电流

恒定电流的性质

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

电阻和电阻率

均匀导体

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

其中，R 是电阻，ρ 是电阻率，l 是长度，S 是横截面积

非均匀导体

$$R = \int \frac{\rho}{S} \mathrm{d}l$$

电导率

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$$

σ 是电导率，ρ 是电阻率

电导

$$G \equiv \frac{1}{R}$$

欧姆定律

宏观形式

$$I = \frac{U}{R}$$

微观形式

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

普遍欧姆定律微分形式

$$\vec{j} = \sigma(\vec{K} + \vec{E})$$

其中，$\vec{K}$ 表示作用在单位正电荷上的非静电力。

焦耳定律微观形式

$$p = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2$$

其中，p 是单位体积内的热功率，称为热功率密度。

基尔霍夫方程组

基尔霍夫第一方程组（节点电流方程组）

汇于各节点的各支路电流的代数和为零。（基础是恒定电流条件）

对于一个有 n 个节点的完整电路，可写出 $n-1$ 个独立的方程组，称为基尔霍夫第一方程组。

基尔霍夫第二方程组（回路电压方程组）

规定电势从高到低的电势降落为正，电势从低到高的电势降落为负，则沿回路环绕一周，电势降落的代数和为 0

确定内阻上电势降落正负号方法（看绕行方向与规定电流方向的关系）：

绕行方向与规定电流方向同向，电势降落为正；绕行方向与规定电流反向，电势降落为负

确定电源上电势降落正负号方法（看绕行方向是先碰到电源正极还是先碰到电源负极）：

绕行时**先碰到电源正极**后碰到电源负极，**电势降落为正**；绕行时**先碰到电源负极**后碰到电源正极，**电势降落为负**

对于一个有 n 个节点 p 条支路的电路，共有 $p-n+1$ 个独立的回路方程，它们构成基尔霍夫第二方程组。