1.求方程 $x'+x\cos y-e^{-\sin y}=0$ 的通解

思路：求解一阶线性微分方程，利用通解公式

解：

$$x'+\cos y\cdot x=e^{-\sin y}$$

通解为：

$$x=e^{-\int\cos y\mathrm{d}y}[\int e^{\int\cos y\mathrm{d}y}e^{-\sin y}+C]=(y+C)e^{-\sin y}$$

2.求方程 $y''-3y'+2y=e^{2x}$ 的通解

思路：二阶线性常系数微分方程，可用常数变易法，也可用待定系数法

解：

常数变易法：

先求特征方程 $r^2-3r+2r=0$ 的根：

$$r_1=1,r_2=2$$

于是方程 $y''-3y'+2y=0$ 的两个线性无关的特解为：

$$y_1(x)=e^x$$

$$y_2(x)=e^{2x}$$

计算两个偏导数：

$$y_1'(x)=e^x$$

$$y_2'(x)=2e^{2x}$$

计算行列式：

$$W=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}=e^{3x}$$

在这里，

$$f=e^{2x}$$

套用公式得到通解为：

$$\begin{aligned}y&=C_1'y_1(x)+C_2'y_2(x)-y_1\int\frac{y_2f}{W}\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1f}{W}\mathrm{d}x\\&=C_1'e^x+C_2'e^{2x}-e^x\int e^x\mathrm{d}x+e^{2x}\int 1\mathrm{d}x\\&=C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^{2x}\end{aligned}$$

3.计算极限：

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,3)}(1+\frac{1}{2x})^{\frac{x^2}{x+y}}$$

思路：利用结论 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

解：

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(\infty,3)}(1+\frac{1}{2x})^{\frac{x^2}{x+y}}&=\lim_{(x,y)\to(\infty,3)}(1+\frac{1}{2x})^{2x\cdot\frac{x^2}{2x(x+y)}}\\&=\lim_{(x,y)\to(\infty,3)}\left((1+\frac{1}{2x})^{2x}\right)^{\frac{x}{2(x+y)}}\\&=\lim_{(x,y)\to(\infty,3)}e^{\frac{x}{2(x+y)}}\\&=e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

二、已知某直线过$(-1,0,4)$，与平面 $3x-4y+z=10$ 平行，且与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交，求该直线

思路：可用点向式或交面式表达（尽量让target equation 简单一些）

解：

点向式：

直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=t+3 \\ z=2t \end{cases}$$

设两直线的交点为：$(t_0-1,t_0+3,2t_0)$

则所求直线的一个方向向量为：

$$(t_0-1,t_0+3,2t_0)-(-1,0,4)=(t_0,t_0+3,2t_0-4)$$

由于所求直线与平面 $3x-4y+z=10$ 平行，故所求直线的方向向量与平面的法向量 $(3,-4,1)$ 垂直，即 target equation 为：

$$3t_0-4(t_0+3)+2t_0-4=0$$

解得：

$$t_0=16$$

于是所求直线的一个方向向量为：

$$(16,19,28)$$

于是所求直线的点向式方程为：

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$$

三、已知 z 满足 $f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})=z$，其中，$z$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

思路：嗯求导就行了（参考答案貌似错了？我的答案最后一项是 $-\frac{y}{x^3}g''$，参考答案的最后一项是 $-\frac{y}{x}g''$）

解：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'(xy,\frac{x}{y})+(-\frac{x}{y^2})f_2'(xy,\frac{x}{y})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1'+x(yf_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}'')-\frac{1}{y^2}f_2'+(-\frac{x}{y^2})(yf_{21}'+\frac{1}{y}f_{22}'')-\frac{1}{x^2}g'+\frac{1}{x}(-\frac{y}{x^2})g'' \\ &=f_1'+xyf_{11}''-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\end{aligned}$$

四、已知 z 满足 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\mathrm{d}z$

思路：

解：

两边求微分，得：

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{y}{z}\cdot\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}$$

求得：

$$\mathrm{d}z=\frac{yz\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y}{y(x+z)}$$

五、已知 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，且过 $(1,1,2)$，求 z 在椭圆域 $\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 时 z 的最值

思路：

解：

一眼看出：

$$z = x^2 - y^2 + 2$$

构造：

$$L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)$$

计算三个偏导数，三个偏导数令为零：

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

解出四个可能的极值点为：

$$(0, \pm 2), (\pm 1, 0)$$

$f(1,0) = 3, f(-1,0) = 3, f(0,-2) = -2, f(0,2) = -2$ 故最大值为 3，最小值为 -2

六：

（1）：计算积分：$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{y} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{y} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}x \int_{y=x}^{y=x^2} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}y = \int_{x=0}^{x=1} (x \sin x - \sin x) \mathrm{d}x = \sin 1 - 1$$

（2）计算积分：$I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围成的空间

旋转曲面方程为：

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

被积区域在 xOy 投影为：$D : x^2 + y^2 \leqslant 16$

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}V \\ &= \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z=\frac{x^2+y^2}{2}}^{z=8} (x^2 + y^2) \mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)(8 - \frac{x^2 + y^2}{2}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D'} r^2 (8 - \frac{r^2}{2}) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{r=0}^{r=4} r^2 (16 - r^2) \mathrm{d}(r^2) \\ &= \frac{1024\pi}{3} \end{aligned}$$

七、计算曲面积分：

$$\iint\limits_{\Sigma} (f(x,y,z) + x) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2f(x,y,z)) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (f(x,y,z) + z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$f(x,y,z)$ 连续可导，Σ 为平面 $x - y + z - 1 = 0$ 在第四卦限部分的上侧

原积分 I 可拆分为：

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (f, 2f, f) \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint\limits_{\Sigma} (x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{D_{xy}} (f, 2f, f) \cdot (1, -1, 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{xy}} (x, y, -x + y + 1) \cdot (1, -1, 1) = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$