Example Code of Beamer

Your Name

Index

麦克斯韦的拉氏量

$$F = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$$

$$L_{\text{maxwell}} = -F$$

BI 模型的拉氏量

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \beta F}\right)$$

β 是任意常数。
弱场极限 $\beta F \ll 1$ 下，BI 模型的拉氏量可近似为：

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta}\left(1 - \sqrt{1 + \beta F}\right) \approx -F + \frac{1}{4}\beta F^2 - \frac{1}{8}\beta^2 F^3 + \mathcal{O}\left(\beta^3 F^4\right)$$

当 $\beta \to 0$，BI 模型的拉氏量与线性麦克斯韦的拉氏量相同。

novel NLE 模型的拉氏量

$$L_{\text{general}}(F)=-\frac{(aF+1)^m}{\delta(bF+1)^n}(\beta F)^p$$

m,n,p 是无量纲常数，a,b,β,δ 是长度平方量纲的任意常数。
在弱场极限下，拉氏量可近似为：

$$L_{\text{general}}(F)=-\frac{(aF+1)^m}{\delta(bF+1)^n}(\beta F)^p\approx -c\left[F^p+c_1F^{p+1}+c_2F^{p+2}+\mathcal{O}\left(c_3F^{p+3}\right)\right]$$

$p=1$ 时得到麦克斯韦的拉氏量。
通过分析取 $m=1,n=m+1,a=-3b$
得到含有两个参数且遵守麦克斯韦极限的拉氏量：

$$L(F)=\frac{\gamma(3\eta F-1)F}{(1+\eta F)^2}$$

其中，$\gamma=\beta/\delta$ 和 η 是任意参数。
当 $\eta F\ll 1$，即弱场极限下，拉氏量近似为：

$$L(F)=\frac{\gamma(3\eta F-1)F}{(1+\eta F)^2}\approx -\gamma F+5\gamma\eta F^2-9\gamma\eta^2F^3+\gamma\mathcal{O}\left(\eta^3F^4\right)$$

利用电位移矢量 $\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 的关系 $\vec{D} = \partial L/\partial \vec{E}$，可由拉氏量式得到：

$$\vec{D} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1+\eta F)^3} \vec{E}$$

(10) $D_i = \varepsilon_i{}^j E_j$

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1+\eta F)^3} \delta_{ij}$$

磁场 $\vec{H} = -\partial L/\partial \vec{B}$ 结合拉氏量有

$$\vec{H} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1+\eta F)^3} \vec{B}$$

磁感应强度 $B_i = \mu_i{}^j H_j$
磁导率张量的逆 $\left(\mu^{-1}\right)_{ij}$

$$\left(\mu^{-1}\right)_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1+\eta F)^3} \delta_{ij}$$

可以认为新 NLE 拉氏量由这种特殊的介质生成。

平坦时空中拉氏量给出 E-L 运动方程：

$$\partial_\mu \left(L_F F^{\mu\nu} \right) = 0$$

其中，

$$L_F \equiv \frac{\partial L}{\partial F} = \frac{\gamma(-1 + 7\eta F)}{(1 + \eta F)^3}$$

$F^{\mu\nu}$ 是麦克斯韦场强张量。
可以回到无源麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

由 Bianchi identity $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$，$\tilde{F}^{\mu\nu}$ 是场强张量的对偶，可得

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

考虑静电极限(electrostatic limit) $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$，对点电荷

$$\nabla \cdot \vec{D} = e\delta(\vec{r})$$

解：

$$\vec{D} = \frac{e}{4\pi r^3}\vec{r}$$

结合 $\vec{D}, \vec{E}$ 关系和 $F = -E^2/2$ 可得

$$E + \frac{7}{2}\eta E^3 = \frac{e}{4\gamma\pi r^2}\left(1 - \frac{\eta}{2}E^2\right)^3$$

上式限制 $F > -1/\eta$；弱场极限 $\eta F \ll 1$，$E(r)$ 可按 η 展开

$$E = E_{(0)} + \eta E_{(1)} + \eta^2 E_{(3)} + \mathcal{O}\left(\eta^3\right)$$

$E_{(1)}, E_{(2)}$ 分别代表对电场 $E_{(0)}$ 的一阶和二阶修正。

比较系数可得

$$E_{(0)} = \frac{e}{4\pi\gamma r^2}$$

$$E_{(1)} = -\frac{7}{2}E_{(0)}^3 - \frac{e}{4\pi\gamma r^2}E_{(0)}^2$$

$$E_{(2)} = -\frac{21}{2}E_{(0)}^2 E_{(1)} + \frac{e}{4\pi\gamma r^2}\left(-3E_{(0)}E_{(1)} + \frac{3}{4}E_{(0)}^4\right)$$

弱场极限下

$$E \approx \frac{e}{4\pi\gamma r^2} - 5\eta\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^3 + \frac{273}{4}\eta^2\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^5 + \mathcal{O}\left(\eta^3\right)$$

对于很小的 r 和任意的 η，电场最大值

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\eta}}$$

NLE 模型中电场有限。当 $\eta \to 0$，电场发散。

希尔伯特应力-能量张量(Hilbert stress-energy tensor)

$$T_{\mu\nu}^{H} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L(F)\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\right)\bigg|_{g=\eta}$$

可得

$$T_{\mu\nu}^{H} = \eta_{\mu\nu}L(F) - L_F F_{\mu}^{\alpha}F_{\nu\alpha}$$

电能密度

$$\rho = -T_t^t = -L_F E^2 - L(F) = \frac{\gamma E^2\left[1+\frac{3}{2}\eta E^2\left(4+\frac{\eta}{2}E^2\right)\right]}{2\left(1-\frac{\eta}{2}E^2\right)^3}$$

总电能

$$\epsilon = 4\pi\int_0^{+\infty}\rho(r)r^2\mathrm{d}r$$

转化为对 E 的积分

$$\epsilon = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{4\pi\gamma}}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\eta}}}\frac{\sqrt{\left(2-\eta E^2\right)\left[4+3\eta E^2\left(8+\eta E^2\right)\right]\left[4+\eta E^2\left(52+21\eta E^2\right)\right]}}{16\sqrt{E}\left(2+7\eta E^2\right)^{5/2}}\mathrm{d}E$$

总能量有限。当 $\eta\to 0$，点电荷自能发散。

考虑平面电磁波 $(\vec{e},\vec{b})$ 沿 z 轴在两片平行电容板间传播，x 轴方向有匀强电场。外电场 $\vec{\bar{E}}=(\bar{E},0,0)$，总电场 $\vec{E}=\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{B}=\vec{b}$，设 $\vec{e}$ 远小于 $\vec{\bar{E}}$，拉氏量

$$L\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{b}\right)=\gamma\frac{\left\{\frac{3}{2}\eta\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}\right)^2\right]-1\right\}\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}\right)^2\right]}{2\left\{1+\frac{\eta}{2}\left[\vec{b}^2-\left(\vec{e}+\vec{\bar{E}}^2\right)\right]\right\}^2}$$

忽略高阶项

$$L^{(2)}(\vec{e}+\vec{\bar{E}},\vec{b})=\frac{\gamma\eta\left(5+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^4}\left(\vec{e}\cdot\vec{\bar{E}}\right)^2-\frac{1}{2}\gamma\frac{\left(1+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^3}\left(\vec{b}^2-\vec{e}^2\right)$$

电位移矢量和磁场强度

$$d_i=\frac{\partial L^{(2)}}{\partial e_i}=\left(\alpha\delta_i^j+\beta\bar{E}_i\bar{E}^j\right)e_j,\quad h_i=-\frac{\partial L^{(2)}}{\partial b_i}=\alpha\delta_i^j b_j$$

其中

$$\beta=\frac{2\gamma\eta\left(5+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^4},\quad \alpha=\gamma\frac{\left(1+\frac{7}{2}\eta\vec{\bar{E}}^2\right)}{\left(1-\frac{\eta}{2}\vec{\bar{E}}^2\right)^3}$$

结合关系 $d_i = \varepsilon_i^j e_j, h_i = \left(\mu^{-1}\right)_i^j b_j$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \beta\bar{E}_i\bar{E}_j, \quad \left(\mu^{-1}\right)_{ij} = \alpha\delta_{ij}$$

平面波麦克斯韦方程

$$k_i d^i = k_i b^i = 0, \quad \vec{k}\times\vec{e} = \omega\vec{b}, \quad \vec{k}\times\vec{h} = -\omega\vec{d}$$

$$\left\{\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn}\left(\mu^{-1}\right)_k^l k_j k^m + \omega^2\epsilon_n^i\right\} e^n = 0$$

ε_{ijk} 是反对称张量。矩阵形式

$$\Lambda\vec{e} = 0$$

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} -k^2\alpha + \omega^2\left(\alpha + \beta\bar{E}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2\alpha + \omega^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2\alpha \end{bmatrix}$$

由 $\det(\Lambda) = 0$ 可知电场有两种模式。两种模式定义了色散关系。折射率定义为 $n \equiv k/\omega$，因此有两种不同的折射率

$$n_\parallel = \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}\bar{E}^2}, \quad n_\perp = 1$$

不同偏振的电磁波有不同的速度 $v_\parallel = n_\parallel^{-1}, v_\perp = 1$

Thank You!