光的干涉

杨氏双孔干涉

杨氏双孔干涉强度分布公式

$$I(x,y)=I_0[1+\cos(k\frac{d}{D}x)]$$

其中，k 是波矢大小，d 是双孔间距，D 是双孔到屏幕的距离

杨氏双孔干涉干涉条纹间距公式

$$\Delta x=\frac{\lambda D}{d}$$

其中，Δx 是条纹间距，λ 是光波长，D 是双孔到屏幕距离，d 是双孔间距

杨氏双孔干涉点源位移导致条纹移动

$$\delta x=\frac{D}{R}x_0$$

其中，δx 是零级条纹的位移，D 是双孔到接收面的距离，R 是源面到双孔的距离，x_0 是点源相对中心轴的位移

两个分离点源照明时的部分相干场

$$I(x,y)=2I_0[1+\cos\frac{\varphi_0}{2}\cdot\cos(2\pi fx+\frac{\varphi_0}{2})]$$

$$\varphi_0=2\pi f_0x_0，\ f_0=\frac{d}{R\lambda}$$

衬比度：

$$\gamma=|\cos\frac{\varphi_0}{2}|,\ \ \varphi_0=2\pi f_0x_0$$

线光源照明时的部分相干场

$$I(x,y)=I_0\left(1+\frac{\sin\pi f_0b}{\pi f_0b}\cdot\cos(2\pi fx)\right)$$

衬比度：

$$\gamma=\left|\frac{\sin\pi f_0b}{\pi f_0b}\right|,\ \ f_0=\frac{d}{R\lambda}$$

其中，b 是线光源的宽度，R 是源面到双孔面的距离，d 是双孔间距，λ 是单色线光源的波长

光源极限宽度或双孔极限间隔

光源极限宽度，记为 b_0，定义为使得衬比度 γ 第一次降为 0 时 b 的取值。

注意到，杨氏双孔模型中，若采用线光源照明，有：

$$\begin{aligned}\gamma&=\left|\frac{\sin\pi f_0b}{\pi f_0b}\right|,\ \ f_0=\frac{d}{R\lambda}\\&=\left|\frac{\sin(\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd)}{\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd}\right|\end{aligned}$$

让线光源宽度 b 改变，而保持其他量不变，则由光源极限宽度的定义，有：

$$\frac{\pi}{R\lambda}\cdot b_0d=\pi\Longrightarrow b_0=\frac{R\lambda}{d}$$

$$\boxed{b_0=\frac{R\lambda}{d}}$$

双孔极限间隔，记为 d_0，定义为使得衬比度 γ 第一次降为 0 时 d 的取值。

让双孔间隔 d 改变，而保持其他量不变，则由双孔极限间隔的定义，有：

$$\frac{\pi}{R\lambda} \cdot bd_0 = \pi \Longrightarrow d_0 = \frac{R\lambda}{b}$$

$$\boxed{d_0 = \frac{R\lambda}{b}}$$

三种光源的光源极限宽度

$$b_0 = K\frac{R\lambda}{d}$$

线光源，$K = 1.0$

环状光源，$K = 0.78$

圆盘光源，$K = 1.2$

任何形状的面光源均可被压缩为沿 x 轴的一个等效线光源，相应地，等效线光源有一个非均匀的亮度分布 $B(x_0)$

光场的空间相干性

光场的空间相干性是指，在非相干扩展光源照明空间中，横向两点光扰动之间一般是部分相干的，或者说，这两个光扰动相位随机量之间是部分相关的，部分相干程度由观测平面上干涉场的衬比度 γ 来反映。

空间相干性反比公式——相干孔径角和相干面积

上面给出了当光源宽度 b 给定时，双孔的极限间隔：

$$d_0 = \frac{R\lambda}{b}$$

其中，R 是源面到双孔面的间距，λ 是光波长

上式可改写为：

$$b \cdot \frac{d_0}{R} = \lambda$$

注意到，当 $R \gg d_0$ 时，有：

$$\frac{d_0}{R} \approx \Delta\theta_0$$

其中，$\Delta\theta_0$ 是双孔对**线光源**中心张开的孔径角，称为**相干孔径角**，于是进一步有：

$$b \cdot \Delta\theta_0 \approx \lambda$$

上式就是空间相干性反比公式。

$\Delta\theta_0$ 的物理意义是，若两点源 S_1, S_2 对线光源中心的实际张角 $\Delta\theta \approx \Delta\theta_0$，则这两个点源几乎非相干；若 $\Delta\theta < \Delta\theta_0$，则 $\gamma > 0$，两点源部分相干；比值 $\Delta\theta/\Delta\theta_0$ 越小，两点源的相干程度越高。

前面给出了杨氏双孔干涉在线光源照明时的衬比度公式：

$$\gamma = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{R\lambda} \cdot bd)}{\frac{\pi}{R\lambda} \cdot bd}\right|$$

也给出了空间相干性反比公式：

$$b \cdot \Delta\theta_0 \approx \lambda \Longrightarrow \frac{b}{\lambda} \approx \frac{1}{\Delta\theta_0}$$

而双孔对线光源中心的实际张角 $\Delta\theta$ 可近似为：

$$\Delta\theta \approx \frac{d}{R}$$

于是杨氏双孔干涉在线光源照明时的衬比度可改写为关于 $\Delta\theta/\Delta\theta_0$ 的函数：

$$\gamma(\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}) = \left|\frac{\sin \pi\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}{\pi\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}\right|$$

若面光源在相互垂直的两个方向上均有宽度 b，则空间相干范围应该是一个由 $\Delta\theta_0$ 旋转而成的立体角 $\Delta\Omega_0$，与光源距离 R 处的相应面积 ΔS_0 称为相干面积。在相干面积之内的两个点源之间是部分相干的。

在球面上 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta,\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 范围内的立体角微元为

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{R\mathrm{d}\theta\cdot R\sin\theta\mathrm{d}\varphi}{R^2}=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

建立球坐标，使得 z 轴穿过相干面积的中心，积分得：

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_0&=\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\Delta\theta_0/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi(1-\cos\frac{\Delta\theta_0}{2})\\&=4\pi\sin^2\frac{\Delta\theta_0}{4}\\&\approx4\pi(\frac{\Delta\theta_0}{4})^2\\&=\frac{\pi}{4}(\Delta\theta_0)^2\end{aligned}$$

于是相干面积为：

$$\begin{aligned}\Delta S_0&\approx R^2\Delta\Omega_0\\&\approx\frac{\pi}{4}(R\Delta\theta_0)^2\end{aligned}$$

利用空间相干性反比公式 $b\cdot\Delta\theta_0\approx\lambda$ 以及极限间隔 $d_0=\frac{R\lambda}{b}$ 得到：

$$\begin{aligned}\Delta S_0&\approx\frac{\pi}{4}(R\Delta\theta_0)^2\\&\approx\frac{\pi}{4}(\frac{R\lambda}{b})^2\\&\approx\frac{\pi}{4}d_0^2\end{aligned}$$

其中，d_0 是光源宽度 b 对应的 S_1,S_2 极限间隔。

光场的时间相干性

非单色性对干涉衬比度的影响

光谱双线结构导致衬比度周期性变化

$$\gamma=\left|\cos(\frac{\Delta k}{2}\cdot\Delta L)\right|$$

干涉场中衬比度随光程差作周期性变化，半周期为：

$$\Delta L_0=\frac{\pi}{\Delta k}\approx\frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}$$

准单色线宽导致衬比度$\gamma(\Delta L)$ 下降

采用方垒形谱函数，可以得到：

$$\gamma(\Delta L)=\left|\frac{\sin(\frac{\Delta k}{2}\Delta L)}{\frac{\Delta k}{2}\Delta L}\right|$$

最大光程差 ΔL_M

最大光程差，记为 ΔL_M，定义为使得 γ 第一次等于 0 的光程差 ΔL 的取值

$$\frac{\Delta k}{2}\Delta L_M=\pi\Longrightarrow L_M=\frac{2\pi}{\Delta k}$$

借助公式 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\approx\frac{\Delta k}{k}$，也可将上式写为：

$$\Delta L_M=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

上面两式可写成反比形式：

$$\Delta L_M \cdot \Delta k = 2\pi，\ \Delta L_M \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \lambda$$

利用最大光程差 ΔL_M，可将衬比度函数改写为：

$$\gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin(\pi \frac{\Delta L}{\Delta L_M})}{\pi \frac{\Delta L}{\Delta L_M}} \right|$$

时间相干性的突出表现——长程差干涉

可以证明，由谱线宽度 $\Delta\lambda$ 决定的最大光程差 ΔL_M 与由波列长度 L_0 决定的最大光程差 $\Delta L'_M$ 是一致的。

时间相干性反比公式

$$L_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \lambda$$

利用 $\Delta\nu/\nu \approx \Delta\lambda/\lambda$，可将上式改写为：

$$\tau_0 \cdot \Delta\nu \approx 1$$

其中，τ_0 是相干时间。

两种典型薄膜干涉

等倾干涉

膜层厚度均匀、点光源照明条件下**无穷远处的干涉场**（借助透镜来实现）

表观光程差公式

$$\Delta L_0(P) = 2nh\cos i$$

其中，n 是薄膜折射率，h 是薄膜厚度，i 是入射角

表观光程差唯一地确定于倾角 i，于是等倾角的场点轨迹就是条纹形状。等倾干涉的干涉条纹是一系列**圆环**。

等倾干涉条纹的性质

（1）扩展光源有利于观察等倾干涉条纹

（2）等倾干涉条纹为一系列圆环

（3）中心处的级次最高（中心，$i=0$，表观光程差最大，级次最高），外围的级次逐渐降低。

（4）中心条纹稀疏，外围条纹密集

（5）膜厚度改变半个波长时，从中心冒出或缩进一个条纹。

考虑中心条纹，$i=0, \cos i = 1$，假设原来薄膜厚度为 h 时中心处是亮条纹/暗条纹，有：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2nh = \Delta\varphi_0$$

当薄膜厚度从 h 增加到 $h+\Delta h$ 时（$\Delta h > 0$）恰好冒出一个亮条纹/暗条纹，有：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2n(h+\Delta h) = \Delta\varphi_0 + 2\pi$$

作差得：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2n\Delta h = 2\pi$$

得到：

$$\Delta h = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{\lambda}{2}$$

其中，λ 是介质中的波长

根据冒出的条纹数，可以测定长度的微小变化。

等厚干涉

定域在薄膜表面上的干涉条纹

厚度相同的地方，是同一级亮条纹，故称等厚干涉。