A 卷

1.计算二重积分：

$$\iint\limits_D \sin y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，D 为 $x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和平面 $y=x$ 所围的闭区域

答案：$\frac{1}{2}$

思路：只能先对 x 积分，再对 y 积分

解：

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \sin y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \mathrm{d}y \int_{x=0}^{x=y} \sin y^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{y=0}^{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y \sin y^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}(-\cos y^2)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.计算三重积分：

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围的闭区域

答案：$\frac{\pi h^3}{6}$

解：

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z=x^2+y^2}^{z=h} (x^2+y^2)\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h} (x^2+y^2)\Big(h-(x^2+y^2)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
(\text{极坐标变换}) &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{h} \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} r^2(h-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{r=0}^{r=\sqrt{h}} (hr^3-r^5)\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi h^3}{6}
\end{aligned}$$

3.计算曲面积分：

$$\oiint\limits_\Sigma \left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S$$

其中，Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$

答案：$\frac{13\pi a^4}{9}$

思路：利用轮换对称性. 关于轮换对称性可以参考：轮换对称性

解：

球面 $\Sigma : x^2+y^2+z^2=a^2$ 具有轮换对称性，于是：

$$\oiint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}S$$

而：

$$\oiint_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} a^2 \mathrm{d}S = 4\pi a^4$$

于是：

$$\oiint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} y^2 \mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} z^2 \mathrm{d}S = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \frac{4\pi a^4}{3}$$

于是所求积分：

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})\mathrm{d}S &= (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\cdot\frac{4\pi a^4}{3} \\ &= \frac{13\pi a^4}{9}\end{aligned}$$

4.计算曲线积分：

$$\oint_{L} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

其中，L 是沿逆时针方向的无重点且不过原点的分段光滑闭曲线

思路：显然没办法参数化，只能用格林公式. 要注意，$\mathrm{d}x$ 前的是 P，$\mathrm{d}y$ 前的是 Q

用格林公式要分类讨论

解：

找到 P,Q：$P=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

计算两个偏导数：

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

注意到，两个偏导数在 $(0,0)$ 处无定义，当然也就在 $(0,0)$ 处不连续，于是要分类讨论

1）若 $(0,0)$ 不在 L 内：

由格林公式，有：

$$
\begin{aligned}
\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2）若 $(0,0)$ 在 L 内:

取充分小的 $\varepsilon > 0$, 构造区域 $D' : \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant \varepsilon^2\}$

记 $\partial D = L$，由格林公式，有:

$$
\begin{aligned}
\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} &= \iint_{D\setminus D'} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \oint_{\partial D'-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\
&= \oint_{\partial D'+} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \\
\text{(再次使用格林公式)} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'} \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{\varepsilon^2}\pi\varepsilon^2 \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

5.计算曲面积分:

$$
I = \iint_\Sigma 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

其中，Σ 是平面曲线 $x = e^y (0 \leqslant y \leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的曲面，其法向量与 x 轴正向的夹角为钝角

答案：$2\pi a^2(e^{2a}-1)$

思路：定向类曲面积分可以用参数化方法，也可以构造闭合曲面后用高斯公式，这里用高斯公式以简化运算. ps：用参数化方法（投影或者说以 y,z 为参数）相当难算，不过还是可以算的

解:

旋转：$(x',y',0) \to (x,y,z)$，满足：$x' = e^{y'}, x' = x, (y')^2 + 0^2 = y^2 + z^2$

得到旋转曲面的方程:

$$
x = e^{\sqrt{y^2+z^2}},\ \ 0 \leqslant y^2+z^2 \leqslant a^2
$$

构造圆片 $\Sigma' : \{(x,y,z)|x = e^a, y^2+z^2 \leqslant a^2\}$，定向为 x 轴负向指向 x 轴正向

计算被积向量函数的散度:

$$
\nabla \cdot (2(1-x^2), 8xy, -4zx) = 0
$$

由高斯定理，有:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{\Sigma'} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint\limits_{D'} 2(1-e^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2(e^{2a}-1)\iint\limits_{0\leqslant y^2+z^2\leqslant a^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2(e^{2a}-1)\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi a^2(e^{2a}-1)
\end{aligned}
$$

B 卷

1.计算二重积分：

$$
\iint\limits_{D} \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

其中，D 为由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围成的区域

答案：$\frac{8}{15}$

解：

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} \sqrt{r\cos\theta}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{r=0}^{r=\cos\theta} \sqrt{\cos\theta}\, r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r \\
&= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{2}{5}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

2.计算三重积分：

$$
I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

其中，$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1\}$

答案：$\frac{4\pi}{3}$

思路：球坐标变换

利用球坐标变换：$\begin{cases} x=r\sin\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\cos\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$，积分区域可表示为：$\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta \\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \end{cases}$

于是：

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{r=0}^{r=2\cos\theta} r\sin\theta\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

3.计算曲线积分：

$$\oint\limits_{L}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s$$

其中，L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线

答案：$-\pi a^3$

思路：曲线积分上的点 (x,y,z) 是满足两条方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$ 的，利用这两条方程改造曲线积分

解：

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{L}(xy+yz+zx)\mathrm{d}s &= \oint\limits_{L}\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\mathrm{d}s \\
&= \oint\limits_{L}\frac{-a^2}{2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{-a^2}{2}\oint\limits_{L}\mathrm{d}s \\
&= -\pi a^3
\end{aligned}$$

4,计算曲线积分：

$$\int\limits_{L}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

其中，L 是沿顺时针方向以原点为中心，a 为半径的上半圆周

答案：$a^2(\frac{2a}{3}-\pi)$

思路：构造闭合曲线，然后用格林公式

解：

构造曲线 $L':\{(x,y)|y=0,-a\leqslant x\leqslant a\}$

计算两个偏导数：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -1 \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= -3
\end{aligned}$$

由格林公式，有：

$$\begin{aligned}\int\limits_{L+}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{L'-}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y \\ &= \pi a^2 + \int\limits_{L'+}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y \\ &= \pi a^2 + \int_{x=a}^{x=-a} x^2\mathrm{d}x \\ &= a^2(\pi - \frac{2a}{3})\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}\int\limits_{L}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y &= -\int\limits_{L+}(x^2-3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y \\ &= a^2(\frac{2a}{3}-\pi)\end{aligned}$$

5.计算曲面积分：

$$I = \oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ 是椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧

答案：4π

思路：高斯公式，不过要挖掉一个球面

解：

计算被积向量函数的散度：

$$\nabla\cdot(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}) = \nabla\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) = 0$$

其中，$x^2+y^2+z^2\neq 0$

取充分小 $\varepsilon>0$，构造小球体 $\Omega':\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant\varepsilon^2\}$

由高斯公式，有：

$$\begin{aligned} I &= \oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \oiint\limits_{\partial\Omega'-} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\partial\Omega'+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ (\text{再次使用高斯公式}) &= \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega'} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 4\pi\end{aligned}$$