第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

> $\partial_i\varphi=(\nabla\varphi)_i$

爱因斯坦求和约定：在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”

克罗内克符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & ,i=j\\ 0 & ,i\neq j\end{cases}$$

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij},\ \ i,j=1,2,3$$

三阶全反对称张量

三阶单位全反对称张量（三阶勒维-契维塔）符号 ε_{ijk}：

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & ,ijk=123,231,312,\text{即相邻两指标经过偶次对换}\\ -1 & ,ijk=132,213,321,\text{即相邻两指标经过奇次对换}\\ 0 & ,ijk\text{中有相同指标}\end{cases}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_i\vec{e}_i)\times(B_j\vec{e}_j)=A_iB_j(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)=\varepsilon_{ijk}A_iB_j\vec{e}_k$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_k=\varepsilon_{ijk}A_iB_j$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$$

∇

$$\nabla\equiv\vec{e}_i\partial_i$$

$$\nabla f=\vec{e}_i\partial_i f$$

$$(\nabla f)_i=\partial_i f$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=(\vec{e}_i\partial_i)\cdot(A_j\vec{e}_j)=\partial_iA_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\partial_iA_j\delta_{ij}=\partial_iA_i$$

旋度：

$$\nabla\times\vec{A}=(\partial_i\vec{e}_i)\times(A_j\vec{e}_j)=\partial_iA_j(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)=\partial_iA_j\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$$

∇^2

$$\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i$$

重要公式

> 需要注意力的恒等式

(12) $\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\varphi)&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i(\nabla\varphi)_j\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi\end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_i\varphi\\&=-\vec{e}_k\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i\varphi\\&=-\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi\end{aligned}$$

于是：

$$\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\varphi=\vec{0}$$

于是：

$$\nabla\times\nabla\varphi=\vec{0}$$

(13) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})&=\partial_i(\nabla\times\vec{A})_i\\&=\partial_i\varepsilon_{lmi}\partial_l A_m\\&=\varepsilon_{lmi}\partial_i\partial_l A_m\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lmi}\partial_i\partial_l A_m&=\varepsilon_{lmi}\partial_l\partial_i A_m\\&=-\varepsilon_{iml}\partial_l\partial_i A_m\\&=-\varepsilon_{lmi}\partial_i\partial_l A_m\end{aligned}$$

于是：

$$\varepsilon_{lmi}\partial_i\partial_l A_m=0$$

于是：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$$

> 从右往左证的恒等式

(11) $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$

$$\begin{aligned}&(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})\\=&B_i\partial_i A_j\vec{e}_j+A_i\partial_i B_j\vec{e}_j+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k B_i(\nabla\times\vec{A})_j+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k A_i(\nabla\times\vec{B})_j\\=&B_i\vec{e}_j\partial_i A_j+A_i\vec{e}_j\partial_i B_j+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k B_i\varepsilon_{lmj}\partial_l A_m+\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k A_i\varepsilon_{lmj}\partial_l B_m\\=&B_i\vec{e}_j\partial_i A_j+A_i\vec{e}_j\partial_i B_j+\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jml}B_i\vec{e}_k\partial_l A_m+\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jml}A_i\vec{e}_k\partial_l B_m\\=&B_i\vec{e}_j\partial_i A_j+A_i\vec{e}_j\partial_i B_j+(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})B_i\vec{e}_k\partial_l A_m+(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})A_i\vec{e}_k\partial_l B_m\\=&B_i\vec{e}_j\partial_i A_j+A_i\vec{e}_j\partial_i B_j+B_m\vec{e}_l\partial_l A_m-B_l\vec{e}_m\partial_l A_m+A_m\vec{e}_l\partial_l B_m-A_l\vec{e}_m\partial_l B_m\\=&B_m\vec{e}_l\partial_l A_m+A_m\vec{e}_l\partial_l B_m\\=&\vec{e}_l(B_m\partial_l A_m+A_m\partial_l B_m)\\=&\vec{e}_l\partial_l(A_m B_m)\\=&\vec{e}_l\partial_l(\vec{A}\cdot\vec{B})\\=&\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

(9) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})&=\partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i\\&=\partial_i\varepsilon_{lmi}(A_l B_m)\\&=\varepsilon_{lmi}\partial_i(A_l B_m)\\&=\varepsilon_{lmi}B_m\partial_i A_l+\varepsilon_{lmi}A_l\partial_i B_m\\&=B_m(\varepsilon_{ilm}\partial_i A_l)-A_l(\varepsilon_{iml}\partial_i B_m)\\&=B_m(\nabla\times\vec{A})_m-A_l(\nabla\times\vec{B})_l\\&=\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})\end{aligned}$$

(14) $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\vec{A})&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i(\nabla\times\vec{A})_j\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{ijk}\partial_i\varepsilon_{lmj}\partial_l A_m\\&=\vec{e}_k\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jml}\partial_i\partial_l A_m\\&=\vec{e}_k(\delta_{im}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{km})\partial_i\partial_l A_m\\&=\vec{e}_k\partial_m\partial_k A_m-\vec{e}_k\partial_l\partial_l A_k\\&=\vec{e}_k\partial_k\partial_m A_m-\partial_l\partial_l A_k\vec{e}_k\\&=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}\end{aligned}$$

第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

∇ 算符

三维直角坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

球坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

柱坐标下的 ∇

$$\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

∇^2 算符

三维直角坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

柱坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial}{\partial \rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

幅角和主幅角

$$z=|z|e^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)},\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ \ 0<\theta\leqslant 2\pi$$

$\arg z=\theta$ 为主幅角

$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi$ 为幅角

复变量三角函数

$$\cos z\equiv\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z\equiv\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

双曲函数

双曲正弦：

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

双曲余弦：

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

双曲正切：

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

复变函数的定义

复变函数是黎曼面到复平面上的映射：

$$f(z): C^R \to C, \ \ z \in C^R$$

第5章 解析函数

复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径区域 z_0 时，有：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z = z - z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)**

证明：

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关

设 $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，则：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

特别地

1.令：

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\Delta x\to 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

2.令:

$$\Delta x=0,\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

函数的解析性

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析的**

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 Ω 内是**解析的**，或称为**全纯的**

复变函数解析的充要条件

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 Ω 内为解析函数 $\Longleftrightarrow$ 在与复平面区域 Ω 相应的实平面区域内 $u(x,y),v(x,y)$ 可微且满足柯西-黎曼条件

对于区域 Ω 上的连续函数 $f(z)$，其解析的充要条件：柯西-黎曼条件

第6章 复变函数积分

复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域 Ω 中，沿某一曲线 C 的**有向**的**线积分**，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$，其定义为:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{n\to\infty\\|z_j-z_{j-1}|\to 0}}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$$

单连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 Ω 上解析，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有:

$$\oint_{C^+}f(z)\mathrm{d}z=0$$

证明（用到格林公式和C-R条件）:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z&=\oint_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\oint_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)\\&=\int_\Sigma(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}\sigma+\mathrm{i}\int_\Sigma(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}\sigma\\&=0+0\\&=0\end{aligned}$$

多连通区域的柯西积分定理:

设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 的回路 C 内的复连通区域内解析，规定逆时针为正方向，则:

$$\oint_{C^+}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1^+}f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2^+}f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_k^+}f(z)\mathrm{d}z$$

柯西积分公式:

若 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则:

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

证明:

以 z_0 为圆心，r 为半径构造一个圆 C'

由多联通区域的柯西积分定理，有:

$$\begin{aligned}\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = & \oint_{C'^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}(z_0+re^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{i}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

两边取极限:

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\mathrm{i}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

注意到,

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \tag{2}$$

$$\lim_{r\to 0}\mathrm{i}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(z_0)\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}f(z_0) \tag{3}$$

$(2)(3)$ 代入 (1)，得:

$$\oint_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0) \tag{2}$$

柯西积分公式的应用

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，由柯西积分公式，$f(z)$ 可表达为:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

计算导数:

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\cdot \oint_{C^+}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\cdot \oint_{C^+}\frac{\Delta z f(\zeta)}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_{C^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

依此类推，有:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

解析函数存在任意阶导数，且任意阶导数都为解析函数

复变函数积分的重要性质

$$|\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z| \leqslant \int\limits_C |f(z)||\mathrm{d}z|$$

第7章 复变函数的级数展开

解析函数的泰勒展开

设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中，展开系数为：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$z_0 = 0$ 时的泰勒展开式称为麦克劳林级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

C 为 $f(z)$ 解析区域内以 z_0 为圆心的圆周

证明：

$f(z)$ 在 Ω 内解析，圆周 C 在 Ω 内，而 z 又是 C 内一点，于是由柯西积分公式：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

其中，ζ 是积分回路 C 上的点，令 $|\zeta - z_0| = R$, 则 $|z-z_0| < R$，令 $t = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, 则 $|t| = |\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|} < 1$

当 $|t| < 1$，有几何级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})^n = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}$$

两边同时除以 $\zeta - z_0$ 得：

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

把上式代入柯西积分公式得：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_C f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_C \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \oint\limits_C f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

奇点的定义与分类

称 z_0 点为 $f(z)$ 的**奇点**，若 $f(z)$ 在 z_0 点的导数不存在或导数不唯一

孤立奇点：若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点

非孤立奇点（分为极点、本性奇点和可去奇点）：

极点：z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点

本性奇点：z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若**不存在**一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点

可去奇点：z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点没有定义，但在 z_0 的去心邻域内解析，此时可定义 $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点

泰勒级数收敛半径 R

$$
R \equiv \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|
$$

洛朗级数

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域，$R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数：

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
$$

其中，

$$
a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta
$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，设 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中的洛朗展开式为：

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
$$

$f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为 $\mathrm{Res}f(z_0)$，定义为：

$$\mathrm{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中，a_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数

留数的求法

1）定义法：

直接把 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 点作洛朗展开，找到 $(z-z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1}，由留数的定义可知：

$$\mathrm{Res}f(z_0) \equiv a_{-1}$$

2）极限法：

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，$f(z)$ 可在其孤立奇点 z_0 点作如下的洛朗展开：

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ \ a_{-m} \neq 0$$

则：

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

3）：

若 $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}, z_0$ 为 $g(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则：

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即：

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}f(z_j)$$

奇异积分（或瑕积分）的柯西主值

设积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的被积函数在 $x_0 \in (a,b)$ 奇异，若极限：

$$\lim_{\delta \to 0^+} (\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x)$$

存在，则称此极限为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记为：

$$P\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \equiv \lim_{\delta \to 0^+} (\int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x)$$

利用留数定理计算无穷限奇异定积分的柯西主值

被积函数在实轴上有一个一阶极点

被积函数在实轴上有有限个单极点

更普遍的情况

对于柯西主值积分 $P\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$，若 $F(z)$ 满足：

（1）$F(z)$ 在**上半复平面**上除有限个孤立奇点外解析

（2）当 $|z| \to +\infty$ 时，对 $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$，满足 $zF(z)$ 一致趋于零

（3）$F(z)$ 在实轴上只有有限个单极点

则：

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}F(z_i)+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}F(\alpha_j)$$

其中，$z_i,(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $F(z)$ 在上半复平面的 m 个孤立奇点，$\alpha_j,(j=1,2,\cdots,k)$ 为 $F(z)$ 在实轴上的 k 个单极点

例：计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

解：

$$

$$

计算形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x,(m>0)$ 的实积分

> 设z_1=a_1+\mathrm{i}b_1,z_2=a_2+\mathrm{i}b_2\Longrightarrow \mathrm{Re} (z_1z_2)=a_1a_2-b_1b_2=\mathrm{Re} z_1\mathrm{Re}z_2-\mathrm{Im}z_1\mathrm{Im}z_2,\mathrm{Im}(z_1z_2)=a_1b_2+a_2b_1=\mathrm{Re}z_1\mathrm{Im}z_2+\mathrm{Re}z_2\mathrm{Im}z_1$

设 $f(z)$ 在除上半复平面上有有限个孤立奇点和在实轴上有有限个单极点外解析，且当 $|z|\to+\infty$ 时，有 $|f(z)|\leqslant M(R)\to 0$，则：

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z_i)e^{\mathrm{i}mz_i}]+\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}[f(x_j)e^{\mathrm{i}mx_j}]$$

根据欧拉公式可得：

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=-2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Im}\ \mathrm{Res}[f(z_i)e^{\mathrm{i}mz_i}]-\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Im}\ \mathrm{Res}[f(x_j)e^{\mathrm{i}mx_j}]$$

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=2\pi\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}\ \mathrm{Res}[f(z_i)e^{\mathrm{i}mz_i}]+\pi\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Re}\ \mathrm{Res}[f(x_j)e^{\mathrm{i}mx_j}]$$

> 实际上这样子有点难记，看下面例题做法

例：计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

解：

令 $f(z)=\frac{z}{z^2+a^2},F(z)=f(z)e^{\mathrm{i}z}=\frac{ze^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}$

$F(z)$ 的奇点：$z_1=-\mathrm{i}a,z_2=\mathrm{i}a$，其中，$z_2$ 在上面复平面上

$$\mathrm{Res}F(z_2)=\frac{e^{-a}}{2}$$

一方面，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}F(z_2)=\pi\mathrm{i}e^{-a}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\cos x\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对比可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin x\mathrm{d}x=\pi e^{-a}$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\sin x\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

第9章 傅里叶变换

傅里叶级数

$$\begin{cases}\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}\mathrm{d}x'=1\\\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=0\\\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}x\mathrm{d}x=0\\\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x'\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{m\pi}{l}x'\mathrm{d}x'=\delta_{n,m},n=1,2,\cdots,m=0,1,2,\cdots\\\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x'\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}x'\mathrm{d}x'=0,n=1,2,\cdots,m=0,1,2,\cdots\\\int_{x'=-l}^{x'=l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{l}x'\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}x'\mathrm{d}x'=\delta_{n,m},n,m=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，其元素是周期为 $2l$ 的函数，$\forall f_1,f_2\in\mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 上的内积定义为：

$$\langle f_1,f_2\rangle\equiv\int_{x=-l}^{x=l}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x$$

则函数系 $\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}x,n,m=1,2,\cdots\}$ 是一个完备的正交归一函数族，它们可作为基张成 $\mathcal{H}$

这个函数系具体写出来是：

$$\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x,\cdots\}$$

于是任意一个周期为 $2l$ 的，满足狄利克雷条件的函数 f 可展成傅里叶级数：

$$f(x)=a_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2l}}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\cdot\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x)$$

其中，

$$a_0=\langle\frac{1}{\sqrt{2l}},f(x)\rangle=\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2l}}\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2l}}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_k=\langle\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x,f(x)\rangle=\int_{x=-l}^{x=l}\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_{x=-l}^{x=l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$b_k=\langle\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x,f(x)\rangle=\int_{x=-l}^{x=l}\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_{x=-l}^{x=l}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

e 指数为基的傅里叶级数

再注意到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x=\delta_{m,n}$$

故函数系 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}mx},m\in Z\}$ 可作为以 2π 为周期的复变函数为元素的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一组正交归一基，以 2π 为周期的复变函数 f 在这组基上的展开式为：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_m\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}$$

其中，

$$x\in\mathbb{R}$$

$$C_m=\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}mx},f(x)\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}mx})^*\cdot f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$$

傅里叶变换

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\equiv C(k)$$

其中，$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换

傅里叶变换的基本性质

线性定理：

$$\mathscr{F}\{\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\}=\alpha_1\mathscr{F}\{f_1\}+\alpha_2\mathscr{F}\{f_2\}$$

延迟定理：

$$\mathscr{F}\{f(x-x_0)\}(k)=e^{-\mathrm{i}kx_0}\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

位移定理：

$$\mathscr{F}\{f(x)e^{\mathrm{i}k_0x}\}(k)=c(k-k_0)$$

标度变换定理：

$$\mathscr{F}\{f(ax)\}(k)=\frac{1}{|a|}c(\frac{k}{a})$$

微分定理：

设当 $|x|\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，则有：

$$\mathscr{F}\{f'(x)\}(k)=\mathrm{i}k\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(x)\}(k)=(\mathrm{i}k)^n\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

卷积定理：

$$(f_1*f_2)(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\mathscr{F}\{f_1*f_2\}(k)=\mathscr{F}\{f_1\}(k)\mathscr{F}\{f_2\}(k)$$

第10章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数 $t\in[0,+\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)\equiv F(p)\equiv\int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中，$p=s+\mathrm{i}\sigma,s\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}$

e^{-pt} 称为拉普拉斯变换核

拉普拉斯变换是一个从函数空间到函数空间的映射

令：

$$F(p)=\int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

$F(p)$ 称为拉普拉斯变换的像函数；$f(t)$ 称为拉普拉斯变换的原函数，记为：

$$F(p)\fallingdotseq f(t)\text{ 或 }f(t)\risingdotseq F(p)$$

拉普拉斯变换的性质（两种记号都写一遍）

线性定理：

若 $a, b \in \mathbb{C}$，则：

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\}(p) = a\mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) + b\mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设 $f_1(t) \risingdotseq F_1(p), f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$，则：

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \risingdotseq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

延迟定理：

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则：

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p) = e^{-\tau p}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设 $f(t) \risingdotseq F_(p), \tau > 0$，则：

$$f(t-\tau)H(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$$

其中，定义了阶跃函数 H:

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leqslant 0 \end{cases}$$

位移定理：

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则：

$$e^{-\lambda t}f(t) \risingdotseq F(p+\lambda)$$

标度变换定理：

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则：

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}), a > 0$$

卷积定理：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中，卷积的定义为：

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_{\tau=0}^{\tau=t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

设 $f_1(t) \risingdotseq F_1(p), f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$，则：

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)F_2(p)$$

微分定理

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n\mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^{n-1}f^{(0)}(0) - p^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - 1 \cdot f^{(n-1)}f(0)$$

设 $f(t) \risingdotseq F(p)$，则：

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f^{(0)}(0) - p^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots - p^1f^{(n-2)}(0) - p^0f^{(n-1)}(0)$$

特别地：

$$f^{(1)}(t) \risingdotseq p^1F(p) - p^0f^{(0)}(0)$$

$$f^{(2)}(t) \risingdotseq p^2F(p) - p^1f^{(0)}(0) - p^0f^{(1)}(0)$$

积分性质：

$$\mathcal{L}\Bigg\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t \mathrm{d}t f(t)}_{n\text{重积分}}\Bigg\}(p)=\frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

周期函数变换定理：

若 $f(t)=f(t+T)$，则:

$$f(t)\fallingdotseq\frac{\int_0^T f(\tau)e^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-e^{-pT}}$$

常用拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\{1\}(p)=\frac{1}{p},\ \ \mathrm{Re}\,p>0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(p)=\frac{1}{p-a},\ \ \mathrm{Re}\,p>a$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p)=\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(p)=\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p)=\frac{a}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(p)=\frac{p}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p)=\frac{a}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p)=\frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin at\}(p)=\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos at\}(p)=\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

拉普拉斯变换的反演

$$\frac{1}{p}\fallingdotseq 1,\frac{1}{p^2}\fallingdotseq t,\frac{n!}{p^{n+1}}\fallingdotseq t^n$$
$$\frac{1}{p-\alpha}\fallingdotseq e^{\alpha t},\frac{n!}{(p-n)^{n+1}}\fallingdotseq t^n e^{\alpha t}$$
$$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\fallingdotseq \sin\alpha t,\frac{p}{p^2+\alpha^2}\fallingdotseq\cos\alpha t$$
$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\fallingdotseq \sinh\alpha t,\frac{p}{p^2-\alpha^2}\fallingdotseq\cosh\alpha t$$

公式

像函数的求导公式：

设 $F(p)\fallingdotseq f(t)$，则有：

$$F^{(n)}(p)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} p^n}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

=\int_{0}^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}pn}(e^{-pt})\mathrm{d}t

$$

像函数的积分公式：

若 $F(p) \risingdotseq f(t)$，积分路线在 $\mathrm{Re}(p) > s_0$ 的区域中，s_0 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的收敛横坐标，该积分收敛，且当 $t \to 0$时，$|\frac{f(t)}{t}|$ 有界，则有：

$$\int_{p}^{+\infty+\mathrm{i}R} F(p)\mathrm{d}p \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

由像函数求逆变换的定理：

第11章 δ 函数

δ 函数的定义

δ 函数是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，其满足：

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & ,x \neq x_0 \\ +\infty & ,x = x_0 \end{cases}, \text{且} \int_{a}^{b} \delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & ,x_0 \in (a,b) \\ 0 & ,x_0 \notin (a,b) \end{cases}$$

δ 函数的性质

（1）设 $f(x)$ 为连续函数，则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)$$

（2）$\delta(x)$ 是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

（3）：

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$$

（4）：

$$x\delta(x) = 0$$

（5）：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x = \delta(x_1-x_2)$$

（6）：设 x_i 为 $\varphi(x)$ 的单根，则：

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_{i} \frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_0)$$

三维 δ 函数

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} 0 & ,\vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ +\infty & ,\vec{r} = \vec{r}_0 \end{cases}, \text{且} \int_{V} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\mathrm{d}^3\vec{r} = 1, \vec{r}_0 \in V$$

三维笛卡尔坐标系：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \equiv \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

三维球坐标系：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

三维柱坐标系：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

结论

$$\delta(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

δ 函数的傅里叶变换及傅里叶级数展开

一维：

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\mathrm{i}(x-x_0)k}\mathrm{d}k$$

三维：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\Omega}e^{-\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}$$

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题

波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

波动方程

$$u_{tt}-a^2\nabla^2u(\vec{r},t)=f(\vec{r},t)$$

输运方程

$$u_t-a^2\nabla^2u(\vec{r},t)=f(\vec{r},t)$$

泊松方程（椭圆方程）

$$\nabla^2u(\vec{r})=f(\vec{r})$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2u(\vec{r})=0$$

波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

定解条件包括**初始条件**和**边界条件**

初始条件

波动方程初始条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布**和**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布：

$$\begin{cases} u(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\nu(\vec{r}) \end{cases}$$

输运方程初始条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布**或**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布：

$$u(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\varphi(\vec{r})$$

或：

$$u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\nu(\vec{r})$$

泊松方程初始条件

泊松方程没有初始条件（稳定场，场量不随时间改变）

边界条件

第一类边界条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在边界 $\partial\Omega$ 处的取值所要满足的条件

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第一类齐次边界条件**:

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0$$

第二类边界条件

场量沿边界的外法线的梯度对时间的依赖关系

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第二类齐次边界条件**:

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0$$

第三类边界条件

$$\left(\alpha u(\vec{r},t)+\beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第三类齐次边界条件**:

$$\left(\alpha u(\vec{r},t)+\beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega}=0$$

自然边界条件

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即:

$$|u|<+\infty$$

周期性边界条件

衔接条件

物理定律导出数理方程

第14章 分离变量法

15 曲线坐标系下的分离变量

球坐标系下的分离变量

柱坐标系下的分离变量

级数法解二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}+q(z)u(z)=0$$

方程的**正常点**（也称为正则点）：若 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，则称 z_0 为方程的正常点

方程的**奇点**：若 z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的孤立奇点，则称 z_0 为方程的奇点

正则奇点：若 z_0 为方程的奇点，且 $(z-z_0)p(z)$ 为解析函数，$(z-z_0)^2q(z)$ 也是解析函数，则称 z_0 为方程的正则奇点

对于二阶线性齐次常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}u(z)}{\mathrm{d}z}+q(z)u(z)=0$$

其解 $u(z)$ 具有如下性质：

（1）对于方程的正常点的邻域，方程有两个线性无关的解析解，他们的形式都为：

$$u_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

（2）对于方程的正则奇点，在正则奇点的邻域内，存在两个线性无关的解析解，其形式为：

$$u_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$u_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

或

$$u_2(z)=Au_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

其中，a_0,b_0 均不为 0

例题

例：在 $x=0$ 的邻域内，用级数展开法求解 Euler-Cauchy 方程：

$$x^2y''+2xy'=0 \tag{0}$$

$x=0$ 是方程的正则奇点，于是设方程的**一个**级数解为：

$$y_1=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\rho+k}$$

$$y_1'=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)a_kx^{\rho+k-1}$$

$$y_1'' = \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)a_k x^{\rho+k-2}$$

代入原方程，得：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k+1)a_k x^{\rho+k} = 0 \tag{1}$$

$k=0$，对应 x^ρ 项的系数为零：

$$\rho(\rho+1)a_0 = 0$$

不考虑 $a_0=0$ 的情况，得到指数方程：

$$\rho(\rho+1) = 0$$

解得：

$$\rho_1 = 0,\ \ \rho_2 = -1$$

不妨取 $\rho=\rho_1=0$，(1) 化为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k+1)a_k x^k = 0$$

$k=0$，

$$0\cdot(0+1)a_0 = 0 \Longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}$$

$k=\mu,(\mu\geqslant 1)$，

$$\mu(\mu+1)a_\mu = 0 \Longrightarrow a_\mu = 0,\ \ (\mu\geqslant 1)$$

于是方程的一个级数解为：

$$y_1 = a_0$$

则方程的另一个形式解为：

$$\begin{aligned} y_2 &= Ay_1\ln(x-0)+(x-0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-0)^k \\ &= Aa_0\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{k-1} \end{aligned}$$

$$y_2' = \frac{Aa_0}{x}+\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_k x^{k-2}$$

$$y_2'' = \frac{-Aa_0}{x^2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_k x^{k-3}$$

将形式解 y_2 代入方程 (0) 得：

$$Aa_0+\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)b_k x^{k-1} = 0$$

首先，$A=0$

$k=0$，

$$0\cdot(0-1)b_0 = 0 \Longrightarrow b_0 \in \mathbb{R}$$

$k=1$，

$$1\cdot(1-1)b_1 = 0 \Longrightarrow b_1 \in \mathbb{R}$$

$k=\mu,(\mu\geqslant 2)$，

$$\mu(\mu-1)b_\mu = 0 \Longrightarrow b_\mu = 0$$

于是：

$$y_2 = \frac{b_0}{x} + b_1$$

综上，

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= a_0 + \frac{b_0}{x} + b_1 \\ &= \frac{b_0}{x} + c \end{aligned}$$

其中，$b_0 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

16 球函数

齐次波动方程分离分离 $r; \theta, \varphi$得到球贝塞尔方程和球函数方程

$k \neq 0$，球贝塞尔方程的通解为 $R(r) = C\mathrm{j}_l(kr) + D\mathrm{n}_l(kr)$

$k = 0$，波动方程退化为拉普拉斯方程，此时球贝塞尔方程退化为径向方程（欧拉型方程），通解 $R(r)$

球函数方程：

轴对称，与 φ 无关：$Y = \Theta(\theta) = y(x)$

球函数成为勒让德方程+自然边界条件，解为**勒让德多项式，形式要记得，微分表达式要记住**

勒让德多项式生成函数 $r \leqslant 1, r > 1$

平面波展开

$$

$$

非轴对称，与 φ 有关 $Y = \Theta\Phi, y(x) = \Theta(\theta)$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

连带勒让德方程+自然边界条件

$$

$$

解为连带勒让德多项式 $P_l^m(x)$

$$P_l^{(-m)}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

$$P_l^0 = P_l$$

球函数 周期性边界条件+自然边界条件

特解：

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

拉普拉斯方程通解：

轴对称：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0 \\ u\Big|_{r=a} = f(\theta) \end{cases}$$

通解：

$$u$$

非轴对称：

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta,\varphi)=0\\ u\Big|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

通解：

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(C_l r^l+)$$

匀强电场接地导体球，均匀介质球

勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0,\ \ |x|<1$$

在 $|x|<1$ 的情况下，勒让德方程的解为勒让德多项式

勒让德多项式

$$P_l(x)\equiv\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

其中，

$$N=\begin{cases}\dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数}\\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数}\end{cases}$$

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$P_l(1)=1$$

$$P_l(-x)=(-1)^l P(x)$$

勒让德多项式 $P_l(x)\equiv\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$ 是勒让德方程 $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$ 在 $|x|<1$ 时，在自然边界条件下对应于本征值为 $l(l+1)$ 的本征解

罗德里格斯公式（勒让德多项式的微分表达式）

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

勒让德多项式的生成函数（母函数）

$$f(r)\equiv\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)r^l,\ \ r<1$$

勒让德多项式的递推公式

$$x(1+2l)P_l(x)-(l+1)P_{l+1}(x)-lP_{l-1}(x)=0$$

$$P_l(x)=P'_{l+1}(x)+P'_{l-1}(x)-2xP'_l(x)$$

$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

$$(l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - xP'_l(x)$$

$$lP_l(x) = xP'_l(x) - P'_{l-1}(x)$$

$$(x^2-1)P'_l(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x)$$

勒让德函数的正交归一性

$$\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x),\ \ l=0,1,2,\cdots\right\}$$

构成 $[-1,1]$ 上的正交归一函数系

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}P_k(x)\cdot\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x)\mathrm{d}x = \delta_{kl}$$

各种方程的形式解

轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件下的形式解

轴对称问题，u 与 φ 无关，$u=u(r,\theta)$

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=0\\ u(r,\theta)\Big|_{r=a}=f(\theta)\\ |u(r,\theta)|<+\infty\end{cases}$$

形式解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(C_l r^l + D_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta)$$

例1：在单位球的北极上放置一电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷，求单位球内任一点 $\vec{r}$ 的电势，并用勒让德多项式表示

解法1：

考虑一个带电量为 q，位于坐标原点的点电荷，设无穷远电势为零，则距点电荷 r 处的电势为：

$$\begin{aligned}u(\vec{r}) &= \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\ &= \int_r^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\end{aligned}$$

回到问题，由余弦定理知，$\vec{r}$ 点离单位球上北极点的距离为：

$$r' = \sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}$$

$\vec{r}$ 点的电势为：

$$\begin{aligned}u(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}\end{aligned}$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数，其可在 $r=0$ 点展开为：

$$
\begin{aligned}
u(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) r^l
\end{aligned}
$$

其中，$x = \cos\theta$

解法2：

例2：在均匀电场 $\vec{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电场

解：

以球心 O 为坐标原点，选取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴正方向，则 电势 u 关于 z 轴轴对称

球外无自由电荷，于是球外电势分布满足拉普拉斯方程。特别地，这里电势场 u 关于 z 轴对称，u 与 φ 无关：

$$
\nabla^2 u(r,\theta) = 0
$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$
u(r,\theta)\Big|_{r=a} = 0
$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r,\theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 $\vec{E}_0$ 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r\to\infty$，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0，则：

$$
u_0 - u(r,\theta)\Big|_{r\to\infty} = E_0 r\cos\theta
$$

定解问题为：

$$
\begin{cases}
\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \\
u(r,\theta)\Big|_{r=a} = 0 \\
u(r,\theta)\Big|_{r\to+\infty} = u_0 - E_0 r\cos\theta
\end{cases}
$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$
u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta)
$$

当 $r\to+\infty$ 时，应满足第二个边界条件，而当 $r\to+\infty$， 有 $r^{-(l+1)}\to 0$，于是：

$$
\begin{aligned}
u_0 - E_0 r\cos\theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \\
&= A_0 + A_1 r\cos\theta
\end{aligned}
$$

对比系数得：

$$
A_0 = u_0,\ \ A_1 = -E_0,\ \ A_2 = A_3 = \cdots = 0
$$

于是形式解可写为：

$$
u(r,\theta) = u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)
$$

把形式解代入第一个边界条件：

$$
u_0 - E_0 a\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = 0
$$

把求和展开：

$$
u_0 - E_0 a\cos\theta + B_0 a^{-1} P_0(\cos\theta) + B_1 a^{-2} P_1(\cos\theta) + \cdots = 0
$$

对比 $\cos\theta$ 各幂次的系数，得：

$$B_0=-au_0,\ \ B_1=a^3E_0,\ \ B_2=B_3=\cdots=0$$

综上，导体球外电势分布为：

$$u(r,\theta)=u_0-E_0r\cos\theta-\frac{u_0a}{r}+E_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2},\ \ r\geqslant a$$

例3：在介电常数为 ε，半径为 a 的**介质**球外，距介质球球心距离 b 处放置一电荷量为 q 的点电荷，求介质球外的电势分布

选取 z 轴，此问题是关于 z 轴的轴对称问题

整个空间的电势分布应分为球内电势 $u_i(r,\theta)$ 和球外电势 $u_e(r,\theta)$

电势在球面上连续：

$$u_i\Big|_{r=a}=u_e\Big|_{r=a}$$

电位移矢量 $\vec{D}\equiv\varepsilon\vec{E}$ 在球面的法向分量连续：

$$\vec{D}_i\cdot\vec{n}=\vec{D}_e\cdot\vec{n}\Longrightarrow\varepsilon\vec{E}_i\cdot\vec{n}=1\cdot\vec{E}_e\cdot\vec{n}\Longrightarrow\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial r}=\frac{\partial u_e}{\partial r}$$

连带勒让德方程

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}]y,=0,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots\\|x|\leqslant1\\|y(x)|<+\infty\end{cases}$$

连带勒让德函数（m 阶 l 次连带勒让德函数）记为 $P_l^m(x)$，定义为：

$$P_l^m(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$$

解 $y(x)$ 的形式为：

$$y(x)=P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^2}P_l(x),\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

关系：

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

正交关系：

当 $l'\neq l$:

$$\int_{-1}^1P_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=0$$

当 $m'\neq m$:

$$\int_{-1}^1P_l^{m'}(x)P_l^m(x)\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=0$$

$P_l^m(x)$ 的模，记为 N_l^m：

$$(N_l^m)^2=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

$$(N_l^{-m})^2=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

正交关系可以写为：

$$\int_{-l}^lP_l^m(x)P_{l'}^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\ \ m>0s$$

归一化的正交形式：

非轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件下的形式解

$u = u(r,\theta,\varphi)$

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = 0 \\ u(r,\theta,\varphi) = 0 \\ |u(r,\theta,\varphi)| < +\infty\end{cases}$$

形式解为：

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} r^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r^{-(l+1)} [C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta)$$

例：

球函数

正交归一球函数：

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$l = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$
$$m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm l$$

$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 称为 l 阶球函数

$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ 的复共轭，记为 $Y_{l,m}^*(\theta,\varphi)$，定义为：

$$Y_{l,m}^*(\theta,\varphi) \equiv (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi)$$

球函数的正交关系：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} Y_{l,m}^*(\theta,\varphi) Y_{l',m'}(\theta,\varphi) \sin\theta \mathrm{d}\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

17 柱函数

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

$$Z'' - \lambda Z = 0$$

贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$$

线性无关解：$\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{N}_\nu(x)$

$\nu = m$ 整数， N 取极限

柱函数定义：

$$\begin{cases} y_{\nu-1} + y_{\nu+1} = \dfrac{2\nu}{x} y_\nu \\ y_{\nu-1} - y_{\nu+1} = 2y_\nu' \end{cases}$$

柱函数一定满足贝塞尔方程

$\mathrm{J}_m(x)$ 生成函数：

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_m(x) z^m$$

加法公式

例:

$\nu \geqslant 0, \lambda$ 待定

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0 \\ y(1) = 0 \\ \text{自然边界条件} \end{cases}$$

$$y = A\mathrm{J}_\nu(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{N}_\nu(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y = A\mathrm{J}_\nu(x_n x)$$

x_n 为 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 零点

例：求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率（固有频率）及本征振动模式

解:

二维波动方程:

$$u_{tt} - a^2\nabla^2 u = 0$$

> 柱坐标二维拉普拉斯算子：$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

a 是波速

时空变量分离：$u(\rho,\varphi,t) = U(\rho,\varphi)T(t)$ 代入二维波动方程，得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2\nabla^2 U(\rho,\varphi)}{U(\rho,\varphi)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \Longrightarrow T(t) = e^{\pm \mathrm{i}\omega t}$$

对于:

$$\nabla^2 U(\rho,\varphi) + k^2 U(\rho,\varphi) = 0,\ \ k = \frac{\omega}{a}$$

设 $U(\rho,\varphi) = R(\rho)\phi(\varphi)$

分离:

$$\frac{1}{\phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}) - k^2\rho^2 = -m^2$$

$$\phi''(\varphi) + m^2\phi(\varphi) = 0 \Longrightarrow \phi_m(\varphi) = e^{\pm \mathrm{i}m\varphi}$$

结合 $\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi)$，知 $m \in \mathbb{Z}$

$R(\rho)$ 满足:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}) + (k^2 - \frac{m^2}{\rho^2})R(\rho) = 0 \\ R(b) = 0 \\ R(0) < +\infty \end{cases}$$

形式解为:

$$R^{(m)}(\rho) = C_m\mathrm{J}_m(k\rho) + D_m N_m(k\rho)$$

自然边界条件要求 $R(0)$ 有限，于是 $D_m = 0$

$$R^{(m)}(\rho) = C_m\mathrm{J}_m(k\rho)$$

由边界条件 $R(b) = 0$ 得:

$$\mathrm{J}_m(kb) = 0$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的零点为 $x_n^{(m)}$，$n = 1, 2, \cdots$，从小到大排列，则:

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}$$

$\omega = ka$，得到圆形膜的本征频率为：

$$\omega_n^{(m)} = k_n^{(m)} \cdot a = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \ \ n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征振动模式为：

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m(\frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot \rho), \ \ n = 1, 2, \cdots$$