第7章 交流电

基本概念

交流电路

在一个电路里，若电源的电动势 $e(t)$ 随时间做周期性变化，则各段电路中的电压 $u(t)$ 和 $i(t)$ 都将随时间做周期性变化，这种电路叫作**交流电路。**

任何非简谐的交流电都可分解为一系列不同频率的简谐成分。（周期函数展成傅里叶级数）

简谐交流电的任何变量 [电动势 $e(t)$、电压 $u(t)$、电流 $i(t)$] 都可以写成时间 t 的正弦或余弦函数的形式，我们采用余弦函数的形式：

$$\begin{cases} e(t) = \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \\ u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

峰值

与机械简谐振动的振幅相对应，每个交变简谐量都有自己的幅值，或称**峰值。**

$\mathscr{E}_0$：电动势的峰值

U_0：电压的峰值

I_0：电流的峰值

相位

$\omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_i$ 称为相位；其中，$\varphi_e, \varphi_u, \varphi_i$ 称为初相位

交流电路中的元件

交流电路中某个元件的特性用两个物理量，**阻抗** Z 和**相位差** φ 来描述（相位差指电压**与**电流的相位差，其中，“与”是个介词）

阻抗和相位差

设一个元件两端电压和流过这个元件的电流分别为：

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$$

则这个元件的阻抗，记为 Z，定义为：

$$Z \equiv \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0/\sqrt{2}}{I_0/\sqrt{2}} = \frac{U}{I}$$

这个元件的相位差，记为 φ，定义为：

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i$$

交流电路中的电阻的阻抗和相位差

$$Z_R = R$$

$$\varphi = 0$$

交流电路中的电容的阻抗和相位差

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

电容元件的阻抗 Z_C 也称为**容抗**。从上式可看出，容抗与频率成反比。电容具有高频短路，直流开路的性质。

电容上，电压的相位落后于电流的相位 $\pi/2$

交流电路中的电感的阻抗和相位差

$$Z_L = \omega L$$

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

电感元件的阻抗 Z_L 也称为**感抗**。电感元件具有阻高频、通低频的性质。

电感上，电压的相位超前电流的相位 $\pi/2$

矢量图解法

交流电路复数解法

复电压、复电流和复阻抗

交流电路中某元件上实际的电压和电流：

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

在此基础上可定义复电压和复电流：

$$\begin{cases} \tilde{U} \equiv U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \\ \tilde{I} \equiv I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \end{cases}$$

其中，$\mathrm{j}^2 = -1$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$ 易知，复电压和复电流与实际电压和实际电流的关系为：

$$\begin{cases} u(t) = \Re\{\tilde{U}\} \\ i(t) = \Re\{\tilde{I}\} \end{cases}$$

一段电路上的复阻抗，记为 $\tilde{Z}$，定义为：

$$\tilde{Z} \equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}$$

其中，$\tilde{U}$ 和 $\tilde{I}$ 分别是这段电路上的复电压和复电流。

利用复电压和复电流的定义，复阻抗可进一步表达为：

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\equiv \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} \\ &= \frac{U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}}{I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}} \\ &= \frac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} \end{aligned}$$

再注意到，之前定义了阻抗和相位差：

$$Z \equiv \frac{U_0}{I_0},\ \ \varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i$$

于是复阻抗可进一步表达为：

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \frac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= Z e^{\mathrm{j}\varphi}\end{aligned}$$

从上式可见，一个元件的复阻抗给出了此元件的阻抗和相位信息：

$$\boxed{Z = |\tilde{Z}|}$$

$$\boxed{\varphi = \arg \tilde{Z}}$$

电阻元件的复阻抗

$$Z_R = R,\ \ \varphi = 0$$

$$\tilde{Z}_R = R$$

电容元件的复阻抗

$$Z_C = \frac{1}{\omega C},\ \ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-\mathrm{j}\pi/2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

电感元件的复阻抗

$$Z_L = \omega L,\ \ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{Z}_L = \omega L e^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j}\omega L$$

串联电路复数解法

注意到，“取实部”操作 $\Re\{\cdot\}$ 是线性操作，即：

$$\Re\{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\} = \lambda_1 \Re\{z_1\} + \lambda_2 \Re\{z_2\}$$

对于实际电压 $u = U_0 \cos(\omega + \varphi_u)$，其对应的复电压定义为 $\tilde{U} \equiv U_0 e^{\mathrm{j}(\omega \mathrm{t} + \varphi_\mathrm{u})}$ 是有原因的。对复电压取实部后就能得到实际电压，即：

$$\Re\{\tilde{U}\} = u$$

对于串联电路，总电压的瞬时值等于各段分电压之和：

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

问题是，总电压对应的复电压 $\tilde{U}$ 又如何用分电路的复电压 $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ 表达?

类似地，总电压对应的复电压取实部后应得到实际的总电压，即 $\tilde{U}$ 应满足

$$\Re\{\tilde{U}\} = u_1(t) + u_2(t)$$

注意到，若 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$，则：

$$\begin{aligned}\Re\{\tilde{U}\} &= \Re\{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2\} \\ &= \Re\{\tilde{U}_1\} + \Re\{\tilde{U}_2\} \\ &= u_1(t) + u_2(t)\end{aligned}$$

这就说明，我们的猜想：

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$$

是正确的。

再同时除以复电流 $\tilde{I}$ 得到：

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

$$\boxed{\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}$$

$$\boxed{\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2}$$

并联电路复数解法

$$\boxed{\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}}$$