1

推导复变函数可导的柯西-黎曼条件。

设 $f(z)$ 在 z 点可导，则极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

设 $z = x + iy, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，则：

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

特别地

(1) 令：

$$i\Delta y = 0, \Delta x \to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令：

$$\Delta x = 0, i\Delta y \to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内, 在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

$0 < |z| < 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$

由于 $|z| < 1$, 于是有几何级数:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}$$

$|z| > 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$

注意到 $|z| > 1$, 则 $|1/z| < 1$, 于是:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$
$$= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1}$$
$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1}$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}$$

3

计算回路积分 $I = \oint_{l^+} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路 l 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

令 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1 = \mathrm{i}, z_2 = 1$，$z_1$ 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$\mathrm{Res}f(z_1) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i}) \cdot \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$$
$$= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Res}f(z_2) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

于是:

$$I = \oint_l \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}f(z_1) + \mathrm{Res}f(z_2)\right]$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

4

计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$, 其中 $0 < \varepsilon < 1$

令:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$$

于是:

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

$$= \frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z$$

其中, C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z) = \dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$, 被积函数的两个一阶极点为:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数 $f(z)$ 可写为：

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \to z_1} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z - z_1)f(z) \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{1}{\varepsilon(z - z_2)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

由留数定理，有：

$$
\begin{aligned}
\oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \mathrm{d}z &= 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}f(z_1) \\
&= 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\
&= \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

于是积分为：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2}{\mathrm{i}} \oint_{C^+} \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} \mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}
\end{aligned}
$$

5

用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设 $i(t) \fallingdotseq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \fallingdotseq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \ \ \operatorname{Re} p > 0, \ \ \text{or} \ \ 1 \fallingdotseq \frac{1}{p}$$

对方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = +Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$：

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L}\right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p - \alpha} \fallingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \fallingdotseq 1, \ \ \frac{1}{p + R/L} \fallingdotseq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p) = \dfrac{E}{R}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p + R/L}\right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

6

证明 $\nabla \cdot \left(\varphi\vec{A}\right) = \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi\nabla \cdot \vec{A}$, 并据此由 Gauss 公式 $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A}\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 证

明 Green 公式 $\displaystyle\int_{\Omega} \psi\nabla^2\varphi + \varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (\psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) &= \partial_i(\varphi\vec{A})_i \\
&= \partial_i(\varphi A_i) \\
&= A_i\partial_i\varphi + \varphi\partial_i A_i \\
&= A_i(\nabla\varphi)_i + \varphi\partial_i A_i \\
&= \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi\nabla \cdot \vec{A}
\end{aligned}$$

高斯公式给出：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A}\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

令 $\vec{A} = \nabla(\psi\varphi)$，代入高斯公式得：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla(\psi\varphi)\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \nabla(\psi\varphi) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

即：

$$\int_{\Omega} \psi\nabla^2\varphi + \varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (\psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

7

求定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\[2mm] u_x \Big|_{x=0} = 0 \\[2mm] u_x \Big|_{x=l} = 0 \\[2mm] u \Big|_{t=0} = \cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) + 0.3\cos\left(\dfrac{3\pi x}{l}\right) \\[2mm] u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设:

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 可得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \Longrightarrow T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$T'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0 \Longrightarrow T'(t)\Big|_{t=0} = 0 \Longrightarrow B = 0$$

因此:

$$T(t) = A\cos\omega t$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \Longrightarrow U(x) = C\cos kx + D\sin kx$$

$$U'(x) = -kC\sin kx + kD\cos kx$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0 \Longrightarrow U'(x)\Big|_{x=0} = 0 \Longrightarrow D = 0$$

因此:

$$U(x) = C \cos kx, \quad U'(x) = -kC \sin kx$$

$$u_x \bigg|_{x=l} = 0 \implies U'(x) \bigg|_{x=l} = 0 \implies -kC \sin kl = 0$$

因此，k 的本征值 k_n 为：

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n =, 1, 2, \cdots$$

> $n = 0$ 是平庸解，不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为：

$$U_n(x) = \cos k_n x = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

由 $k \equiv \omega/a$，得 ω 的本征值 ω_n 为：

$$\omega_n = ak_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为：

$$T_n(t) = \cos \omega_n t = \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n =, 1, 2, \cdots$$

本征解 $u_n(x, t)$ 为：

$$u_n(x, t) = U_n(t) T_n(t) = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n =, 1, 2, \cdots$$

定解问题的通解 $u(x, t)$ 为：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right)$$

最后结合初始条件

$$u \bigg|_{t=0} = \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) + 0.3 \cos \left(\frac{3\pi x}{l} \right)$$

得到：

$$E_1 = 1, E_2 = 0, E_3 = 0.3, E_4 = E_5 = \cdots = 0$$

最终得到定解问题的解为：

$$u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right) + 0.3\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{3\pi a}{l}t\right)$$

8

在均匀电场 $\vec{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

以球心 O 为坐标原点，选取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴正方向，则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布 $u(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \ \ r > a$$

特别地，这里电势 u 关于 z 轴对称，u 与 φ 无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0, \ \ r > a$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r, \theta)\Big|_{r=a} = 0$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r, \theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 $\vec{E}_0$ 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r \to +\infty$，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0，则：

$$u_0 - u(r, \theta) = E_0 r \cos\theta, \ \ r \to +\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta) = 0 \\ u(r, \theta)\Big|_{r=a} = 0 \\ u(r, \theta) = u_0 - E_0 r \cos\theta, \ \ r \to +\infty \end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u(r, \theta)\Big|_{r \to +\infty} = u_0 - E_0 r \cos\theta$，当 $r \to +\infty$，有 $r^{-(l+1)} \to 0$，于是：

$$u_0 - E_0 r \cos\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$= A_0 + A_1 r \cos\theta + \cdots$$

左右两边都看作关于 r 的多项式，对比系数得：

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = -E_0, \quad A_2 = A_3 = \cdots = 0$$

于是形式解可写为：

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$= u_0 - E_0 r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

再考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r=a} = 0$，将形式解代入边界条件，得：

$$u_0 - E_0 a \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

即：

$$u_0 \mathrm{P}_0(\cos\theta) - E_0 a \mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

整理成以 $\cos\theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的线性叠加的形式：

$$\left(u_0 + B_0 a^{-1} \right) \mathrm{P}_0(\cos\theta) + \left(-E_0 a + B_1 a^{-2} \right) \mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$B_0 = -a u_0, \quad B_1 = a^3 E_0, \quad B_2 = B_3 = \cdots = 0$$

综上，导体球外电势分布为：

$$u(r,\theta) = u_0 - E_0 r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$= u_0 - E_0 r \cos\theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad r \geqslant a$$

其中，u_0 为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取 $u_0 = 0$，则导体球外电势分布为：

$$\boxed{u(r, \theta) = -E_0 r \cos\theta + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}}, \quad r \geqslant a$$

球外电场与电势的关系为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\
&= -\left[\frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\right] \\
&= E_0 \cos\theta\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\vec{e}_r + E_0 \sin\theta\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\vec{e}_\theta, \quad r \geqslant a
\end{aligned}
$$

导体表面电场为：

$$\left.\vec{E}(\vec{r})\right|_{r=a} = 3E_0 \cos\theta\,\vec{e}_r$$

利用高斯定理，导体球表面面电荷密度分布为：

$$\left.\sigma(\vec{r})\right|_{r=a} = \left.\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r})\right|_{r=a} \cdot \vec{e}_r = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

9

求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho, \varphi, t)$ 是 t 时刻 ρ, φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho, \varphi, t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho, \varphi, t) - a^2 \nabla^2_{(2)} u(\rho, \varphi, t) = 0$$

其中，$\nabla^2_{(2)}$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla^2_{(2)} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设 $u(\rho, \varphi, t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho, \varphi)T''(t) - a^2 T(t) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = 0$$

上式两边同时除以 $U(\rho, \varphi)T(t)$，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$$

注意到，$\frac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关，而 $\frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$ 只与 ρ, φ 有关，二者相等，因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = -\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\frac{U(\rho, \varphi)}{a^2}$ 并移项，得：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U(\rho, \varphi) = 0$$

令：

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho, \varphi) \bigg|_{\rho=b} = 0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho, \varphi)| \bigg|_{\rho=0} < +\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho, \varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \dfrac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \dfrac{1}{\rho^2} \dfrac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0 \\[3mm]
U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \\[3mm]
|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \\[3mm]
U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi)
\end{cases}
$$

设 $U(\rho, \varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

上式等号两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \implies R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \implies \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

可得：

$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

令 $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho)\Big|_{\rho=x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$，则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho)\Big|_{\rho=b} = 0$$

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)|\Big|_{\rho=0} < +\infty$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \dfrac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \\[2mm]
y(x) \equiv R(\rho)\bigg|_{\rho = x/k} = R(x/k), \ \ R(\rho) = y(x)\bigg|_{x = k\rho} = y(k\rho) \\[2mm]
R(\rho)\bigg|_{\rho = b} = 0 \\[2mm]
\left|R(\rho)\right|\bigg|_{\rho = 0} < +\infty
\end{cases}
$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0
$$

其通解为：

$$
y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x) + D_m \mathrm{N}_m(x)
$$

考虑自然边界条件 $\left|R(\rho)\right|\bigg|_{\rho = 0} < +\infty$，可得：

$$
D_m = 0
$$

因此：

$$
y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x)
$$

对上面等式两边同取附加条件：

$$
y^{(m)}(x)\bigg|_{x = k\rho} = C_m \mathrm{J}_m(x)\bigg|_{x = k\rho}
$$

结合 $x = k\rho, R(\rho) = y(x)\bigg|_{x = k\rho} = y(k\rho)$ 可得：

$$
R^{(m)}(\rho) = C_m \mathrm{J}_m(k\rho)
$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$，即：

$$
\mathrm{J}_m\left(x_n^{(m)}\right) = 0, \ \ m = 0, 1, 2, \cdots; \ \ n =, 1, 2, \cdots
$$

结合边界条件 $R(\rho)\bigg|_{\rho = b} = 0$，即：

$$C_m \mathrm{J}_m (kb) = 0$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为：

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为：

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m \left(k_n^{(m)} \rho \right) = \mathrm{J}_m \left(\frac{x_n^{(m)}}{b} \rho \right), \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

再根据 $k \equiv \omega/a$，得到 ω 的本征值，即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为：

$$\omega_n^{(m)} = a k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

综上所述，边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为：

$$\boxed{\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m \left(\frac{x_n^{(m)}}{b} \rho \right)}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

其中，$x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。

10

数学物理方程反映了同一类现象的共同规律，各个具体问题所处的特定"环境"(边界条件)决定了其特殊性的一面，试简述你边界条件的认识（从边界条件的分类、边界条件与本征值的关系、自然边界条件等方面阐述）。

大家自由发挥。