

▼ 第1章 电磁现象的普遍规律

▪ 库仑定律

▪ 电场

▼ 高斯定理

▪ 高斯定理积分形式

▪ 高斯定理微分形式

▼ 静电场的旋度

▪ 积分形式

▪ 微分形式

▼ 电荷守恒定律

▪ 积分形式

▪ 微分形式

▪ 磁感应强度

▪ 毕奥-萨伐尔定律

▪ 安培环路定理

▪ 磁场的散度

▪ 电极化强度

▼ 电介质内部束缚电荷体密度

▪ 积分形式

▪ 微分形式

▪ 两电介质界面束缚电荷面密度

▪ 电位移矢量和介质中的高斯定理

▪ 各向同性线性介质中电位移矢量和电场的关系

▪ 磁化强度

▼ 磁化电流密度

▪ 积分形式

▪ 微分形式

▪ 磁场强度

▪ 磁感应强度和磁场强度的关系

▼ 介质中的麦克斯韦方程组

▪ 微分形式

▪ 积分形式

▪ 电磁场边值关系

▼ 场和电荷系统的能量守恒定律

▪ 能量密度和能流密度

▪ 能量守恒定律积分形式

▪ 能量守恒定律微分形式

▪ 全空间能量守恒定律

▼ 电磁场能量密度和能流密度表达式

▪ 能流密度（坡印廷矢量）

▪ 能量密度变化率

▪ 介质内（线性介质）电磁场能量密度

▼ 第1章例题

▪ 例1

▪ 例2

▼ 第2章 静电场

▪ 电势的引入

▪ 电势满足的方程

▪ 电势边值关系

▪ 静电场的能量

▪ 唯一性定理

▪ 分离变量法

▪ 镜像法

▪ 电多极矩

▼ 第2章例题

- 几种类型的边界条件
- 例1
- 例2
- ▼ 第3章 静磁场
 - 磁矢势的引入
 - 库仑规范
 - 库仑规范下矢势微分方程
 - 矢势的形式解
 - 矢势边值关系
 - 静磁场的能量
 - ▼ 磁标势
 - 能够引入磁标势的条件
 - 磁标势
 - 假想磁荷密度
 - 静电场和静磁场的对比
 - 磁标势解题SOP
 - 拉普拉斯方程的解
 - 磁标势边值关系
- ▼ 第3章例题
 - 例1
 - 例2
- ▼ 第4章 电磁波的传播
 - 波动方程
 - ▼ 平面电磁波
 - 时谐电磁波
 - ▼ 平面电磁波
 - 利用两个结论快速推导平面电磁波性质
 - ▼ 波导管
 - ▼ 矩形波导中的电磁波
 - 截止频率
 - TE_{10} 波的电磁场和管壁电流
- 第4章例题
- 例1
- ▼ 第5章 电磁波的辐射
 - 电磁场的矢势和标势
 - ▼ 规范变换和规范不变性
 - 库仑规范
 - 洛伦兹规范
 - 达朗贝尔方程
 - 推迟势
 - 计算辐射场的一般公式
 - 矢势的展开式
 - ▼ 电偶极辐射
 - 辐射能流 角分布 辐射功率
 - 磁偶极辐射
- ▼ 第5章例题
 - 例1
 - 例2
 - 例3
 - 例4
- ▼ 第6章 狭义相对论
 - 狭义相对论基本原理
 - 间隔不变性
 - ▼ 洛伦兹变换
 - 运动尺度的缩短
 - 洛伦兹变换四维形式

- [四维协变量](#)
- ▼ [电动力学的相对论不变性](#)
 - ▼ [四维电流密度矢量](#)
 - [四维势矢量](#)
 - [电磁场张量](#)

第1章 麦克斯韦方程组 边界条件

第2章 镜像法、分离变量法

第3章 镜像法、分离变量法

第4章 电磁波传播、平面电磁波、驻波、波导管

第5章 偶极辐射、计算

第6章 洛伦兹变换、运动学、四维形式

第1章 电磁现象的普遍规律

库仑定律

真空中静止点电荷 Q 对另一个静止点电荷 Q' 的作用力 \vec{F} 为:

$$\vec{F} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

其中 \vec{r} 是 Q 到 Q' 的矢径, ϵ_0 是真空电容率 (真空介电常量)

电场

电场, 记为 \vec{E} , 定义为单位检验电荷在场中所受的力:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中, \vec{F} 是检验电荷 Q' 在电场中所受的力。

高斯定理

高斯定理积分形式

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

其中, Q 是闭合曲面 S 内的总电荷 (包括自由电荷和极化电荷)

高斯定理微分形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

其中, ρ 是总电荷密度 (包括自由电荷和束缚电荷)。

静电场的旋度

积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

上式可以表述为：静电场是无旋的。

电荷守恒定律

积分形式

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_{\partial V^+} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

特别地，在**恒定电流**的情况下，一切物理量不随时间改变，于是 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，结合电流连续性方程得到：

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

上式表示**恒定电流的连续性**。

磁感应强度

实验指出，一个电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中所受的力 $d\vec{F}$ 可以表示为：

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

其中， \vec{B} 称为磁感应强度。

毕奥-萨伐尔定律

恒定电流激发磁场的规律由毕奥-萨伐尔定律给出：设 $\vec{J}(\vec{x}')$ 为源点 \vec{x}' 处的电流密度， \vec{r} 为源点 \vec{x}' 到场点 \vec{x} 的矢径，则场点 \vec{x} 的磁感应强度为：

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

特别地，若电流集中于细导线上，用 $d\vec{l}$ 表示闭合回路 L 上的线元

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{x}') dV' &= J(\vec{x}') dS_n dl \\ &= J(\vec{x}') dS_n d\vec{l} \end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times \vec{r}}{r^3} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{J}(\vec{x}') dV'] \times \vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\vec{x}') dS_n (\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \int_S J(\vec{x}') S_n \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L^+} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

安培环路定理

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

其中, ∂S 的正方向和 I 的正方向满足右手法则。

磁场的散度

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

\vec{B} 的无源性可由毕奥-萨伐尔定律证明。

电极化强度

电极化强度, 记为 \vec{P} , 用于描述宏观电偶极矩分布, 定义为:

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0^+} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

其中, \vec{p}_i 表示 ΔV 内第 i 个分子的电偶极矩, 求和符号表示对 ΔV 内所有分子求和。

电介质内部束缚电荷体密度

积分形式

用 ρ_P 表示束缚电荷密度, 有:

$$\int_V \rho_P dV = - \oint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

上式适用于**电介质内部**。

两电介质界面束缚电荷面密度

对于两电介质的分界面，可以认为束缚电荷分布在交界面上，可以用束缚电荷面密度来描述。

对于两介质分界面上的面束缚电荷，用 σ_P 表示束缚电荷面密度，用 $\vec{n}_{1\rightarrow 2}$ 表示从介质 1 指向介质 2 的单位法向量。

$$\sigma_P = \vec{n}_{1\rightarrow 2} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

电位移矢量和介质中的高斯定理

将电荷密度分为自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_P ，介质内部：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \implies \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f + \rho_P$$

其中， $\rho = \rho_f + \rho_P$ 是电介质内部总体电荷密度

利用 $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ 消去 ρ_P ，得：

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

引入电位移矢量 \vec{D} ，定义为：

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

这就是介质中的高斯定理（微分形式），其积分形式为：

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_f dV$$

各向同性线性介质中电位移矢量和电场的关系

对于一般各向同性线性介质，极化强度 \vec{P} 和 \vec{E} 之间有简单的线性关系：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

其中， χ_e 称为介质的**极化率**。

对于各向同性线性介质：

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

定义相对电容率 $\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ ，介质的电容率 $\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0$ ，上式可写为：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

磁化强度

把分子电流看成载有电流 i 的小线圈，线圈面积矢量记为 \vec{a} ，分子电流的磁矩 \vec{m} 为：

$$\vec{m} = i \vec{a}$$

磁化强度，记为 \vec{M} ，定义为：

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

磁化电流密度

积分形式

用 \vec{J}_M 表示磁化电流密度，有：

$$\int_S \vec{J}_M \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

微分形式

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

磁场强度

磁场强度，记为 \vec{H} ，定义为：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

磁感应强度和磁场强度的关系

对于各向同性非铁磁物质，

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

χ_M 称为磁化率

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_M)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

其中， $\mu_r \equiv 1 + \chi_M$ 称为相对磁导率， $\mu \equiv \mu_r\mu_0$ 称为磁导率。

介质中的麦克斯韦方程组

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

其中， \vec{J} 是自由电流密度， ρ 是自由电荷密度。

积分形式

$$\left\{\begin{array}{l}\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial S}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_S\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V\rho\mathrm{d}V\\\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\end{array}\right.$$

其中， \vec{J} 是自由电流密度， ρ 是自由电荷密度。

麦克斯韦方程组积分形式也可写为：

$$\left\{\begin{array}{l}\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial S}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Q_{\mathrm{f}}\\\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\end{array}\right.$$

其中， I_{f} 为通过曲面 S 的总自由电流， Q_{f} 是闭合曲面 ∂V 内的总自由电荷。

电磁场边值关系

将麦克斯韦方程组积分形式

$$\left\{\begin{array}{l}\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial S}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_{\mathrm{f}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\\oint_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=Q_{\mathrm{f}}\\\oint_{\partial V}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\end{array}\right.$$

用在两介质界面上，可以得到：

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{n}_{1\rightarrow2}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\vec{0}\\\vec{n}_{1\rightarrow2}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}_{\mathrm{f}}\\\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_{\mathrm{f}}\\\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\end{array}\right.$$

其中， $\vec{n}_{1\rightarrow2}$ 是从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量； $\vec{\alpha}_{\mathrm{f}}$ 是界面自由电流线密度； σ_{f} 是界面自由电荷面密度。

将

$$\left\{\begin{array}{l}Q_P=-\oint_{\partial V}\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\I_M=\oint_{\partial S}\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\end{array}\right.$$

用在两介质界面上，可得：

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma_P=\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)\\\vec{\alpha}_M=\vec{n}_{1\rightarrow2}\times(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\end{array}\right.$$

场和电荷系统的能量守恒定律

能量密度和能流密度

场的**能量密度**，记为 w ，定义为单位体积内场的能量，是空间位置 \vec{x} 和时间 t 的函数。

场的**能流密度**，记为 \vec{S} ，其方向定义为能量传输方向，其大小定义为单位时间内流过单位横截面积的能量。

用 \vec{f} 表示场对电荷作用力密度， \vec{v} 表示电荷运动速度。

能量守恒定律积分形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_Vw\mathrm{d}V=-\oint_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}-\int_V\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V$$

能量守恒定律微分形式

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{S}-\vec{f}\cdot\vec{v}$$

全空间能量守恒定律

V 包括整个空间

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\infty}w\mathrm{d}V=-\int_{\infty}\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V$$

电磁场能量密度和能流密度表达式

能流密度（坡印廷矢量）

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

能量密度变化率

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

介质内（线性介质）电磁场能量密度

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$$

第1章例题

例1

一个半径为 R 的无限长圆柱内通有恒定电流，电流密度为 j_0 ，求空间内的磁感应强度与磁能量密度。

解：

安培环路定理：

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

当 $r > R$

$$2\pi r B = \mu_0 \pi R^2 j_0 \implies B = \frac{\mu_0 R^2 j_0}{2r}$$

当 $r < R$

$$2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j_0 \implies B = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}$$

于是：

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \vec{e}_\varphi & , r < R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r} \vec{e}_\varphi & , r > R \end{cases}$$

磁场能量密度：

$$w = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k_0^2 r^2}{8} & , r < R \\ \frac{\mu_0 j_0^2 R^4}{8r^2} & , r > R \end{cases}$$

例2

无穷大平行板电容器内有两层介质，极板上电荷面密度为 $\pm\sigma_f$ ，求电场和束缚电荷分布。

解：

设下板电荷面密度为 σ_f ，下面的电介质记为 1，上面的电介质记为 2

$$D_1 = \sigma_f, \quad D_2 = \sigma_f$$

由线性介质中，电场和电位移矢量的关系 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ，得：

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

由电极化强度和电场的关系 $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$ ，得：

$$P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1}$$

$$P_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2}$$

由界面处束缚电荷面密度公式 $\sigma_P = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$ ，

两电介质分界处：

$$\sigma_P = P_1 - P_2 = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \right) \sigma_f$$

介质 1 与下板分界处：

$$\sigma_{\text{P}}' = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_{\text{f}}}{\varepsilon_1}$$

介质 2 与上板分界处：

$$\sigma_{\text{P}}'' = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_{\text{f}}}{\varepsilon_2}$$

第2章 静电场

电势的引入

静止情况下，电场与磁场无关：

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{f}}$$

因为静电场无旋，于是可以引入一个标势 φ 来描述静电场：

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

选取无穷远点作为参考点，规定参考点的电势为零，即 $\varphi(\infty) = 0$ ，则：

$$\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \text{d}\vec{l}$$

电荷连续分布：

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')\text{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电势满足的方程

在均匀各向同性线性介质中， $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{f}} \implies \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{f}}}{\varepsilon} \implies \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{f}}}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{f}}}{\varepsilon}$$

其中， ρ 是自由电荷密度， ε 是电介质的介电常数。

电势边值关系

电场边值关系：

$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{1\rightarrow 2} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{\text{f}}$$

电场边值关系可化为电势边值关系：

$$\varphi_1|_{\partial\Omega} = \varphi_2|_{\partial\Omega}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1\rightarrow 2}} \bigg|_{\partial\Omega} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1\rightarrow 2}} \bigg|_{\partial\Omega} = \sigma_{\text{f}}$$

其中， $\partial\Omega$ 是两电介质界面； $\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\rightarrow2}}\right|_{\partial\Omega}$ 是标量场 φ_1 在两电介质界面处 $\partial\Omega$ 从电介质 1 指向电介质 2 方向上的方向导数， σ_{f} 是界面上自由电荷面密度。

静电场的能量

第1章给出，在线性介质中静电场能量为：

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}\text{d}V$$

其中， $w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$ 是电场能量密度。

在静电情况下， W 可由电势和电荷分布给出：

$$W=\frac{1}{2}\int_V\rho_{\text{f}}\varphi\text{d}V$$

注意，不能把 $\frac{1}{2}\rho\varphi$ 看作能量密度

若全空间充满均匀介质，电容率为 ε ，则：

$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int\text{d}V\int\text{d}V'\frac{\rho_{\text{f}}(\vec{x})\rho_{\text{f}}(\vec{x}')}{r}$$

唯一性定理

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho_{\text{f}}(\vec{x})$ ，在 V 的边界 ∂V 给定：

(1) 电势 $\varphi\Big|_{\partial V}$

或

(2) 电势的外法线法向 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial V}$

则 V 内电场唯一确定。

分离变量法

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 在球坐标中的通解为：

$$\varphi(R,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^n\left(a_{nm}R^n+\frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)\text{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\phi+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^n\left(c_{nm}R^n+\frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)\text{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（ z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 ϕ ，此情形下通解为：

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\text{P}_n(\cos\theta)$$

其中， P_n 为勒让德函数， a_n,b_n 是待定系数，由边界条件确定。

镜像法

例 2.9：接地无限大平面导体板附近有一点电荷 Q ，求空间中的电场。

解：

设无限大接地平面导体板的位置为 $z=0$ ，点电荷 Q 处在 $z>0$ 的区域。

要求解 $z > 0$ 空间的电场，则镜像点电荷只能放在 $z < 0$ 空间，否则会改变泊松方程的源，唯一性定理也就失效。

不妨设点电荷 Q 的位置为 $(0, 0, a)$ ，其中 $a > 0$

此问题的边界条件为：

$$\varphi \Big|_{z=0} = 0$$

也就是说 $z = 0$ 平面是等相面， $z = 0$ 处电场强度垂直于 $z = 0$ 平面。

考虑在 $(0, 0, -a)$ 处再放置一个带电量 $Q' = -Q$ 的点电荷，则两个对称的点电荷在 $z = 0$ 处产生的场强处处处于 $z = 0$ 平面垂直。

于是待求解问题的电场分布与两个对称点电荷产生的电场分布一致。

于是：

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right]$$

电多极矩

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

r 远大于区域 V 的线度 l ，这种情况下，可以把上面电势的精确表达式表达为 l/r 的展开式，由此得出电势的各级近似解。

在区域 V 内取一点 O 作为坐标原点，用 R 表示坐标原点到场点的距离，

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \left[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right] dV'$$

令：

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

$$\vec{p} = \int_V \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

\vec{p} 称为体系的电偶极矩

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\vec{x}') dV'$$

张量 \mathcal{D}_{ij} 称为体系的电四极矩。

电四极矩可用并矢形式写为：

$$\vec{\vec{\mathcal{D}}} = \int_V 3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

则电势可写为：

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{R} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} - \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{6} \vec{\vec{\mathcal{D}}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} + \cdots \right) \end{aligned}$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad Q = \int_V \rho(\vec{x}') dV'$$

零级近似 $\varphi^{(0)}$ 是在原点的点电荷 Q 激发的电势。把电荷体系看作集中于原点处的点电荷，其激发的电势就是零级近似。

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \vec{p} = \int_V \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

一级近似是电偶极矩 \vec{p} 产生的电势。

只有对原点不对称的电荷分布才有电偶极矩。

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \vec{\mathcal{D}} : \nabla \nabla \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} \frac{1}{R}, \quad \vec{\mathcal{D}} = \int_V 3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') dV'$$

电四极矩张量 \mathcal{D}_{ij} 是对称张量，它有 6 个分量 $\mathcal{D}_{11}, \mathcal{D}_{22}, \mathcal{D}_{33}, \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}, \mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{32}, \mathcal{D}_{31} = \mathcal{D}_{13}$ ，只有 5 个独立分量。

第2章例题

几种类型的边界条件

(1)

$$\left. \varphi_1 \right|_{\partial\Omega} = \left. \varphi_2 \right|_{\partial\Omega}$$

$$\left. \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{\partial\Omega} - \left. \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{\partial\Omega} = \sigma_f$$

(2)

给出导体上的电势，导体面上的边界条件为：

$$\varphi = \varphi_0 (\text{常量})$$

(3)

给出导体所带总电荷 Q ，在导体面上的边界条件为（导体记为 1，导体外电介质记为 2）：

$$\varphi = \text{常量 (待定)}$$

$$-\oint_{\partial V} \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} dS = Q$$

可以用

$$\sigma_f = -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}}$$

求出导体面上的自由电荷面密度 σ_f

例1

真空中有一个半径为 R_0 的导体球，在距球心为 $a (a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，已知导体球电势为 0，求：（1）空间内的电势（2）点电荷 Q 受到的静电力。

解：

(1)

由相似：

$$\frac{b}{R_0} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

可得：

$$b = \frac{R_0^2}{a}, \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{R_0}{a}$$

导体球边界电势为零，即：

$$\frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 0$$

$$\frac{Q'}{r_2} + \frac{Q}{r_1} = 0$$

得到：

$$Q' = -Q \frac{r_2}{r_1} = -\frac{R_0}{a} Q$$

余弦定理：

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2br \cos \theta} = \sqrt{r^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2\frac{R_0^2}{a} r \cos \theta}$$

空间内电势分为球外和球内两个区域的电势。

球外电势：

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{R_0}{a} Q}{\sqrt{r^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2\frac{R_0^2}{a} r \cos \theta}} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-R_0}{\sqrt{a^2 r^2 + R_0^4 - 2aR_0^2 r \cos \theta}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} \right], \quad (r > R_0) \end{aligned}$$

其中， θ 是位矢 \vec{r} 与 x 轴的连线。

由于是导体球，于是球内电势为零。

(2)

点电荷 Q 受到的力等于与像电荷 Q' 给的力：

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{(a-b)^2} \vec{e}_x = \frac{-Q^2 R_0 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)^2} \vec{e}_x$$

例2

真空中有一个半径为 R_0 的导体球，导体球**不接地**且带电荷 Q_0 ，在距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求：（1）空间内的电势（2）点电荷 Q 受到的静电力。

由例 1 可知，若在球内放置第一个像电荷 Q' ，其位置和大小如前，即

$$b = \frac{R_0^2}{a}, \quad Q' = -\frac{R_0}{a} Q$$

则能让球面电势为零。

本题中要满足的条件为：

（1）球面为等势面（电势待定）

(2) 从球面出发的总电场强度通量为 Q_0/ε_0

若再往球心处放一个电荷为 $Q_0 - Q'$ 的像电荷，则能满足上面两个条件。

于是，球外电势为：

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_0 - Q'}{r} + \frac{Q'}{r_2} + \frac{Q}{r_1} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q_0 + \frac{R_0}{a}Q}{r} + \frac{-R_0Q}{\sqrt{a^2r^2 + R_0^4 - 2aR_0^2r\cos\theta}} + \frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} \right]\end{aligned}$$

(2)

电荷 Q 受到力等于 Q' 和球心处 $Q_0 - Q'$ 处的电荷对它的作用力：

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q(Q_0 - Q')}{a^2} + \frac{QQ'}{(a - b)^2} \right] \\ &= \frac{QQ_0}{a^2} - \frac{Q^2R_0^3(2a^2 - R_0^2)}{a^3(a^2 - R_0^2)^2}\end{aligned}$$

第3章 静磁场

磁矢势的引入

恒定电流产生的磁场：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

由矢量分析，从 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入一个矢量 \vec{A}

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

\vec{A} 称为磁场的矢势。

库仑规范

由矢势 \vec{A} 可以唯一确定 \vec{B} ，反过来则不行，这是因为：

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \vec{A}$$

若 \vec{A} 满足 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，则 $\vec{A} + \nabla\psi$ 也满足 $\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi)$ ，因此由磁场 \vec{B} 无法唯一确定 \vec{A}

\vec{A} 具有任意性，因此可以对它加上一定限制，如：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

称为库仑规范。

库仑规范下的矢势 \vec{A} 是无源有旋场。

库仑规范下矢势微分方程

线性均匀介质：

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f \\ \implies \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \mu \vec{J}_f \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}\end{aligned}$$

结合库仑规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

得到库仑规范下矢势微分方程：

$$\begin{aligned}\implies \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f} \\ (\nabla \cdot \vec{A} = 0)\end{aligned}$$

矢势满足的微分方程的直角坐标分量形式为：

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_{fi}$$

矢势的形式解

电势（均匀线性介质中）：

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \implies \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{r}$$

上式可用格林函数推导。 ∇^2 算子的基本解为： $G_0(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$

类似应有：

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_f \implies \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')}{r} dV'$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')dV}{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}_f(\vec{x}')dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f \times \vec{r}}{r^3} dV'\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{x}')}{r} dV'}$$

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f \times \vec{r}}{r^3} dV'}$$

矢势边值关系

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}$$

对于非铁磁性均匀介质，

$$\vec{e}_n \cdot (\nabla \times \vec{A}_2 - \nabla \times \vec{A}_1) = 0$$

$$\vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 - \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 \right) = \vec{\alpha}$$

在两介质分界面上（采用库仑规范）

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1$$

静磁场的能量

第一章给出磁场的总能量：

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V$$

静磁场情况下，可以用矢势和电流表示总能量。

静磁场中，

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V \end{aligned}$$

积分仅需遍及电流分布区域 V

此式仅对总能量有意义，且不能把 $\frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$ 看作能量密度。

磁标势

能够引入磁标势的条件

恒定电流，且目标区域内的任何回路都不被自由电流所链环。

磁标势

在 $\vec{J} = \vec{0}$ 的区域内：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ_m ，使得：

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

假想磁荷密度

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$$

静电场和静磁场的对比

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{p}}}{\varepsilon_0} \\ \rho_{\mathrm{p}} &= -\nabla \cdot \vec{P} \\ \vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi \end{aligned}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_{\text{f}}+\rho_{\text{p}}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{0}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=\frac{\rho_{\text{m}}}{\mu_0}$$

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$$

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H},\text{ 好介质}$$

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

磁标势解题SOP

(1)

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$$

通常这一步会发现全空间的 $\rho_m=0$

(2)

$$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

若所求解区域 $\rho_m=0$ ，则磁标势满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi_m=0$ ，若体系具有极轴（ z 轴对称性），则形式解可写为：

$$\varphi_m=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\text{P}_n(\cos\theta)$$

(3)

边界条件：

$$\varphi_{m1}\Big|_{\partial\Omega}=\varphi_{m2}\Big|_{\partial\Omega}$$

$$\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\Big|_{\partial\Omega}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\sigma_m}{\mu_0}=\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)$$

$$\sigma_m=\mu_0\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)$$

若是线性介质（注意，**铁球不是线性介质**，只能用上面的边值关系），则：

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\Big|_{\partial\Omega}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\Big|_{\partial\Omega}$$

再加上**自然边界条件**。

根据边界条件，确定 φ_m

(4)

求出磁场

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

拉普拉斯方程的解

拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi=0$ 在球坐标中的通解为：

$$\varphi(R,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^n\left(a_{nm}R^n+\frac{b_{nm}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^n\left(c_{nm}R^n+\frac{d_{nm}}{R^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$$

若问题中具有对称轴，取此轴为极轴（ z 轴），则电势 φ 不依赖于方位角 φ ，此情形下通解为：

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

其中， P_n 为勒让德函数， a_n,b_n 是待定系数，由边界条件确定。

磁标势边值关系

$$\varphi_{m1}|_{\partial\Omega}=\varphi_{m2}|_{\partial\Omega}$$

$$\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\bigg|_{\partial\Omega}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{\sigma_m}{\mu_0}=\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)$$

若是线性介质（注意，**铁球不是线性介质**，只能用上面的边值关系），则：

$$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\bigg|_{\partial\Omega}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n_{1\rightarrow2}}\bigg|_{\partial\Omega}$$

$$\sigma_m=\mu_0\vec{n}_{1\rightarrow2}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)$$

第3章例题

例1

求磁化强度为 \vec{M}_0 的均匀磁化**铁球**产生的磁场。

解：

注意，铁球不是线性介质

取 z 轴与 \vec{M}_0 同向，则问题有 z 轴对称性。

界面为球面

在球内部，即 $R < R_0$ 区域（记为区域 1），磁化强度 $\vec{M}=\vec{M}_0$ ，则磁荷密度为：

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}_0=0,\;R<R_0$$

区域 1 内无自由电流，于是磁标势 φ_1 满足方程：

$$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2\varphi_1=0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_1 的形式解为：

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

由于球心处磁标势有限，即 $\varphi_1|_{R=0}<\infty$ ，则：

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta)$$

在球外部，即 $R > R_0$ 区域（记为区域 2），磁化强度 $\vec{M} = \vec{0}$ ，则磁荷密度为：

$$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0, \quad R > R_0$$

区域 2 内无自由电流，于是磁标势 φ_2 满足方程：

$$\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_2 的形式解为：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

由于无穷远处磁标势为零，即 $\varphi_2|_{R=\infty} = 0$ ，则：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) \\ \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

第一条边值关系：

$$\varphi_1|_{R=R_0} = \varphi_2|_{R=R_0} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

于是得到：

$$a_n R_0^n = \frac{b_n}{R_0^{n+1}}$$

即：

$$\boxed{b_n = a_n R_0^{2n+1}}$$

第二条边值关系：

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{\partial \Omega} - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{\partial \Omega} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2),$$

计算方向导数在界面处的取值：

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{R=R_0} &= \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) \Big|_{R=R_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_{1 \rightarrow 2}} \right|_{R=R_0} &= \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right|_{R=R_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) \Big|_{R=R_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta)
\end{aligned}$$

代入边值关系第二条：

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

即：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n a_n R_0^{n-1} + \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

将第一条边值关系得到的结论 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 代入上式，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) = M_0 \cos \theta$$

对比等式两边 $\cos \theta$ 的各级系数，可得：

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{3} M_0, \quad a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

代回关系 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 得：

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3} M_0 R_0^3, \quad b_2 = b_3 = \cdots = 0$$

于是得到磁标势：

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{3} M_0 R \cos \theta \\
&= \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \\
&= \frac{1}{3} M_0 R_0^3 \frac{1}{R^2} \cos \theta \\
&= \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3}
\end{aligned}$$

球内磁场：

$$\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{1}{3} \vec{M}_0, \quad R < R_0$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{H}_1 + \vec{M}_1) = \mu_0 \left(-\frac{1}{3} \vec{M}_0 + \vec{M}_0 \right) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}_0$$

球外磁场：

$$\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{R_0^3}{3} \left(\frac{\vec{M}_0}{R^3} - \frac{3(\vec{M}_0 \cdot \vec{R})}{R^4} \vec{e}_R \right)$$

例2

将一磁导率为 μ , 半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 \vec{H}_0 内, 求总磁感应强度 \vec{B} 和诱导磁矩 \vec{m}

解:

这里的球体是线性介质

将 z 轴取为与 \vec{H}_0 同向, 则体系具有 z 轴对称性。

由自然边界条件, 球内:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0 & , R < R_0 \\ \mu_0 \vec{H}_0 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 R_0^3 \left[\frac{3(\vec{H}_0 \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{H}_0}{R^3} \right] & , R > R_0 \end{cases}$$

球体的诱导磁矩:

$$\vec{m} = 4\pi \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R_0^3 \vec{H}_0$$

第4章 电磁波的传播

波动方程

一般情况:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

没有电荷电流分布的自由空间或均匀绝缘介质 ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$) :

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

真空 ($\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$) :

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

可以得到:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

令：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

具有上面方程形式的方程称为**波动方程**。

平面电磁波

时谐电磁波

以一定频率作正弦振荡的波称为**时谐电磁波**。

时谐电磁波的复数表示：

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

对线性均匀介质，有 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ，代入无源麦克斯韦方程组，得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{x},t) = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0 \end{cases}$$

用 \vec{E} 表示抽出时间因子后的电场强度 $\vec{E}(\vec{x})$ ，将时谐电磁波解 $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$, $\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}(\vec{x})e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 代入上面方程组，得场量**空间部分**满足的方程：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = \mathrm{i}\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} = -\mathrm{i}\omega \varepsilon \mu \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

对于时谐电磁波， $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$

上面这组方程是**不独立**的，由第一式可以推出第四式，由第二式可以推出第三式（两边取散度，而任意矢量场旋度的散度为零）

对第一式两边取旋度，并利用公式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$ ，得：

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{E} = \vec{0}$$

令：

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

则得到时谐电场**空间部分**满足的方程（称为**亥姆霍兹方程**）：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

在一定频率 ω 下，均匀线性介质中的无源麦克斯韦方程组空间部分化为：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{B} &= \frac{1}{i\omega} \nabla \times \vec{E} = -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} \nabla \times \vec{E} \end{aligned}$$

或：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} &= \vec{0}, \quad k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{E} &= \frac{\nabla \times \vec{B}}{-i\omega \varepsilon \mu} = \frac{i}{k \sqrt{\mu \varepsilon}} \nabla \times \vec{B} \end{aligned}$$

平面电磁波

平面波是亥姆霍兹方程的基本解之一。

亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) + k^2 \vec{E}(\vec{x}) = \vec{0}$$

的平面波解为：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 要求 $\vec{E} \perp \vec{k}$ ，即 \vec{E} 可以在垂直于 \vec{k} 的任意方向上振荡。 \vec{E} 的取向称为电磁波的**偏振方向**。可以选取与 \vec{k} 垂直的任意两个相互正交的方向作为 \vec{E} 的两个独立的偏振方向。

等相位面满足：

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}$$

线性均匀绝缘介质中单色波相速度：

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

计算平面波电场旋度：

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \nabla \times (\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}) \\ &= [\nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}] \times \vec{E}_0 \\ &= i\vec{k} \times \vec{E} \end{aligned}$$

对于平面波， $\nabla \longleftrightarrow i\vec{k}$

对于时谐电磁波， $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$

$$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}$$

于是可以得出磁场：

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} \nabla \times \vec{E} \\ &= -\frac{i}{k} \sqrt{\mu \varepsilon} (i\vec{k} \times \vec{E}) \\ &= \sqrt{\mu \varepsilon} \vec{e}_k \times \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\vec{e}_k \times \vec{E}$$

由上式可得

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

介质中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$$

真空中平面电磁波电场与磁场振幅比：

$$\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$$

(1) 电磁波为横波， \vec{E} 和 \vec{B} 都与传播方向垂直

(2) \vec{E} 和 \vec{B} 互相垂直， $\vec{E} \times \vec{B}$ 沿 \vec{k} 方向

(3) \vec{E} 和 \vec{B} 同相，振幅比为 v

利用两个结论快速推导平面电磁波性质

对于时谐平面电磁波，有：

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$$

$$\nabla \longleftrightarrow i\vec{k}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

对于无源且线性介质情况，即 $\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}, \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \vec{H} = \vec{B}/\mu$ ，有：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

利用两个结论 $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega, \nabla \longleftrightarrow i\vec{k}$ 可以得到：

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

即：

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon}\vec{e}_k \times \vec{E}$$

$$\left| \frac{E}{B} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

平面电磁波能量密度：

线性均匀介质中电磁场能量密度：

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2\right)$$

平面电磁波情形, $\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$, 于是:

$$w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2$$

$$w=\varepsilon E_0^2\cos^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2[1+\cos2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)]$$

由 $\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}$ 可得**平面电磁波能流密度**:

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\vec{e}_k$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}w\vec{e}_k=vw\vec{e}_k$$

平面电磁波能量密度平均值:

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2$$

平面电磁波能流密度平均值:

$$\bar{\vec{S}}=\frac{1}{2}\Re\{\vec{E}^*\times\vec{H}\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k$$

波导管

矩形波导中的电磁波

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

再加上电场在管壁上的切向分量为零作为边界条件。

电磁波沿 z 轴传播, 电场应有如下形式:

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{\mathrm{i}k_zz}$$

代入亥姆霍兹方程, 得:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x,y)+(k^2-k_z^2)\vec{E}(x,y)=\vec{0}$$

设 $u(x,y)$ 为 $\vec{E}(x,y)$ 的任一直角坐标分量,

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

分离变量法可得:

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y=0$$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

特解：

$$u(x,y)=(C_1\cos k_x x+D_1\sin k_x x)(C_2\cos k_y y+D_2\sin k_y y)$$

考虑边界条件 $x=0,y=0$ 面上的边界条件，

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\left.E_y\right|_{x=0}=0,\left.E_z\right|_{x=0}=0,$$
$$\left.E_x\right|_{y=0}=0,\left.\frac{\partial E_y}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\left.E_z\right|_{y=0}=0,$$

可得：

$$\begin{cases} E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y ye^{ik_z z}\\ E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y ye^{ik_z z}\\ E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y ye^{ik_z z} \end{cases}$$

再考虑 $x=a,y=b$ 面上的边界条件，可得：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b},\quad m,n=0,1,2,\cdots$$

再考虑波导中电场应满足 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ ，得：

$k_xA_1+k_yA_2-ik_zA_3=0$

也就是说， A_1,A_2,A_3 中只有两个是独立的。

对于每一组 (m,n) 值，有两种独立波模，有两种独立波模。

解出 \vec{E} 后，磁场为：

$$\vec{H}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$$

对一组确定的 (m,n) ，若选一种波模具有 $E_z=0$ ，则该波模的 $A_1/A_2=-k_y/k_x$ 就完全确定，因而另一种波模必须有 $E_z\neq 0$

对 $E_z=0$ 的波模， $H_z\neq 0$

在波导内传播的波的特点：

电场 \vec{E} 和磁场 \vec{H} 不能同时为横波。

通常选一种波模为 $E_z=0$ 的波，称为横电波（TE）；另一种波模为 $H_z=0$ 的波，称为横磁波（TM）。

TE 波和 TM 波又按 (m,n) 的值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 波，一般情况下，在波导中可以存在这些波的叠加。

截止频率

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

若激发频率 $k<\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ ，则 k_z 变为虚数，此时传播因子 $\text{e}^{\text{i}k_z z}$ 变为衰减因子。此时电磁场是沿 z 轴方向振幅不断衰减的电磁振荡。

能够在波导内传播的波的**最低频率** ω_c 称为该波模的**截止频率**。

由：

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b},\quad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

得到 (m,n) 型的**截止角频率**为：

$$\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

若 $a>b$ ，则 TE_{10} 波有最低截止频率：

$$\frac{\omega_{c,10}}{2\pi} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

若管内为真空，此时最低截止频率为 $\frac{c}{2a}$ ，相应的截止波长为：

$$\lambda_{c,10} = 2a$$

因此，在波导内能够通过的最大波长为 $2a$

最常用的是 TE_{10} 波，它具有最低的截止频率。总可以选择适当尺寸的波导使其中只通过 TE_{10} 波。

TE₁₀ 波的电磁场和管壁电流

当 $m = 1, n = 0$ 时, $k_x = m\pi/a = \pi/a, k_y = n\pi/b = 0$, 且对 TE 波有 $E_z = 0$, 因此 $A_3 = 0$

由 $k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0$ 得 $A_1 = 0$, 把 A_2 写为:

$$A_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0$$

由

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}, \quad \vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

得 TE_{10} 波的电磁场:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \\ E_y &= \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ H_x &= -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi x}{a} \\ E_x &= E_z = H_y = 0 \end{aligned}$$

式中只有一个待定常数 H_0

由边界条件 $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times \vec{H} = \vec{\alpha}$ 可得出管壁上的电流分布。

管壁上电流和边界上的磁感线正交。波导窄边上没有纵向电流。

第4章例题

例1

已知在长宽分别为 a, b 的矩形波导内，磁场强度的 z 分量大小为：

$$H_z = H_0 \cos \left[\frac{\pi}{a} y \right] e^{i(k_z z - \omega t)}$$

(1) 求波导内电场强度、磁感应强度大小 (2) 求平均能流密度功率

解：

(1)

时谐电磁波：

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$$

波导内：

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0(x,y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{H}(x,y,z) = \vec{H}_0(x,y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

考虑波导内真空且无源，有 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ， $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ，再结合时谐电磁波 $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\omega$ 可得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

对第一式两边同时取 x, y 分量：

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 H_x &= \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ &= \partial_y E_z - ik_z E_y \\ i\omega\mu_0 H_y &= \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ &= ik_z E_x - \partial_x E_z \end{aligned}$$

对第二式两边同时取 x, y 分量：

$$\begin{aligned} -i\omega\varepsilon_0 E_x &= \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ &= \partial_y H_z - ik_z H_y \\ -i\omega\varepsilon_0 E_y &= \partial_z H_x - \partial_x H_z \\ &= ik_z H_x - \partial_x H_z \end{aligned}$$

于是：

$$\begin{cases} i\omega\mu_0 H_x = \partial_y E_z - ik_z E_y \\ -i\omega\varepsilon_0 E_y = ik_z H_x - \partial_x H_z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i\omega\mu_0 H_x + ik_z E_y = \partial_y E_z \\ ik_z H_x + i\omega\varepsilon_0 E_y = \partial_x H_z \end{cases}$$

解得：

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i}{k^2 - k_z^2} \left(-\omega\varepsilon_0 \partial_y E_z + k_z \partial_x H_z \right) \\ E_y &= \frac{i}{k^2 - k_z^2} \left(-\omega\mu_0 \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z \right) \end{aligned}$$

其中， $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$

$$\begin{cases} i\omega\mu_0 H_y = ik_z E_x - \partial_x E_z \\ -i\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z - ik_z H_y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i\omega\mu_0 H_y - ik_z E_x = -\partial_x E_z \\ ik_z H_y - i\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z \end{cases}$$

解得：

$$H_y = \frac{i}{k^2 - k_z^2} \left(\omega\varepsilon_0 \partial_x E_z + k_z \partial_y H_z \right)$$

$$E_x = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2} \left(\omega \mu_0 \partial_y H_z + k_z \partial_x E_z \right)$$

本题中, $H_z = H_0 \cos \left[\frac{\pi}{a} y \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$, $E_z = 0$, 于是:

$$E_x = \frac{-\mathrm{i} \pi \omega \mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$E_y = 0$$

$$H_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i} \pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$B_y = \mu_0 H_y = \frac{-\mathrm{i} \pi \mu_0 k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

(2) 求平均能流密度功率

解:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E}^* \times \vec{H} \} \\ &= \frac{1}{2} \Re \{ -E_x^* H_z \vec{e}_y + E_x^* H_y \vec{e}_z \} \\ &= \frac{1}{2} \Re \left\{ -\frac{\mathrm{i} \pi \omega \mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot H_0 \cos \left[\frac{\pi}{a} y \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_y + \frac{\mathrm{i} \pi \omega \mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot \frac{-\mathrm{i} \pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_z \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \omega \mu_0 k_z H_0^2}{a^2 (k^2 - k_z^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} y\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

第5章 电磁波的辐射

电磁场的矢势和标势

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_f \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

由一般情况下 \vec{B} 的无散性 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 可引入矢势 \vec{A} , 使得:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

于是:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是:

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$$

这就是说， $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 是无旋场，于是可引入标势 φ ，使得：

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

于是：

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

场量 \vec{B}, \vec{E} 可由矢势 \vec{A} 和 φ 表达为：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

规范变换和规范不变性

设 ψ 为任意时空函数，作变换（势的规范变换）：

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

有：

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{E}' &= -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla (\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) - \frac{\partial (\vec{A} + \nabla \psi)}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned}$$

即 (\vec{A}', φ') 与 (\vec{A}, φ) 描述同一电磁场

每种限制 ψ 的任意性的条件称为一种**规范**。

当势作规范变换时，所有的物理量和物理规律都保持不变，这种不变性称为**规范不变性**。

库仑规范

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

注意是对时间的一阶偏导。

达朗贝尔方程

麦克斯韦方程组是关于 \vec{E}, \vec{B} 的方程，可化为关于势 \vec{A}, φ 的方程。

真空中：

$$\begin{cases} \nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0}) = \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

可以得到达朗贝尔方程（真空中）：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

其中, $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$

库仑规范下的达朗贝尔方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

推迟势

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程（真空中）

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

的解有推迟势的形式：

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' \end{aligned}$$

它反映了电磁作用具有一定的传播速度。源点 \vec{x}' 对场点 \vec{x} 的电磁作用需要的传播时间为 $\frac{r}{c} = \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$

当 ρ 和 \vec{J} 给定后，就可以算出势 \vec{A}, φ ，再由

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

求电磁场。

计算辐射场的一般公式

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

若 $\vec{J}(\vec{x}')$ 是交变电流，即：

$$\vec{J}(\vec{x}',t)=\vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t}$$

其中， $\vec{J}(\vec{x}')$ 是 $t=0$ 时的电流密度分布。

交变电流情况下：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{i(kr-\omega t)}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中， $k=\omega/c$

令：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

其中：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V'$$

其中， $\vec{A}(\vec{x})$ 是 $t=0$ 时刻的矢势分布。

其中， e^{ikr} 是推迟作用因子，其表示电磁波传至场点有相位滞后 kr

在一定频率的交变电流情形，电荷守恒定律为：

$$i\omega\rho=\nabla\cdot\vec{J}$$

若知道了矢势 \vec{A} ，则可求磁场 \vec{B} ：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

知道了 \vec{B} ，可根据麦克斯韦方程组求电场 \vec{E} ：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B}&=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}\\\vec{E}&=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B}\end{aligned}$$

矢势的展开式

电荷分布区域的线度 l ，波长 λ ，电荷到场点的距离 r

小区域：

$$l\ll\lambda,\ l\ll r$$

近区： $r\ll\lambda$

感应区： $r\sim\lambda$

远区（辐射区）： $r\gg\lambda$

$$r\approx R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'$$

矢势精确表达式：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}\mathrm{d}V'$$

矢势近似表达式：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ik(R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}\mathrm{d}V' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{e^{ikR}\cdot\vec{J}(\vec{x}')e^{-ik\vec{e}_R\cdot\vec{x}'}}{R}\mathrm{d}V' \\ &\approx \frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\int_V\vec{J}(\vec{x}')(1-\mathrm{i}k\vec{e}_R\cdot\vec{x}'+\cdots)\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

电偶极辐射

展开式第一项：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\int_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

设单位体积内有 n_i 个带电荷量为 q_i ，速度为 v_i 的粒子，则：

$$\vec{J}=\sum_in_iq_i\vec{v}_i$$

$$\vec{J}(\vec{r})=\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$$

$$\int_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=\sum q\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\sum q\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum q\vec{x} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &\equiv \dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

其中， \vec{p} 是电荷系统的电偶极矩

$$\int_V\vec{J}(\vec{x}')\mathrm{d}V'=\dot{\vec{p}}$$

于是：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\vec{p}}$$

这一项代表振荡电偶极矩产生的辐射。

作用效果：

$$\begin{aligned}\nabla &\longleftrightarrow \mathrm{i}k\vec{e}_R \\ \frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega\end{aligned}$$

辐射场：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{i}\mu_0 k}{4\pi R} e^{\mathrm{i}kR} \vec{e}_R \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\mathrm{i}c}{k} \nabla \times \vec{B} \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R$$

$$\vec{E} = \frac{e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R$$

取球坐标原点在电荷分布区内，并以 \vec{p} 方向为极轴，

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin\theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \ddot{p} e^{\mathrm{i}kR} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

辐射能流 角分布 辐射功率

电偶极辐射平均能流密度：

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{H}\} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \sin^2\theta \vec{e}_R\end{aligned}$$

辐射功率：

$$\begin{aligned}P &= \oint |\vec{S}| R^2 \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \oint \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}\end{aligned}$$

磁偶极辐射

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{i}k\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R} \vec{e}_R \times \vec{m}$$

其中， \vec{m} 是体系的磁矩。

辐射区电磁场为：

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ &= \mathrm{i}k\vec{e}_R \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi c^2 R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R) \times \vec{e}_R\end{aligned}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{e}_R = -\frac{\mu_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi c R} (\ddot{\vec{m}} \times \vec{e}_R)$$

对比电偶极辐射场和磁偶极辐射场可发现，由电偶极辐射场作以下代换：

$$\begin{aligned}\vec{p} &\rightarrow \frac{\vec{m}}{c} \\ \vec{E} &\rightarrow c\vec{B} \\ c\vec{B} &\rightarrow -\vec{E}\end{aligned}$$

就能得到磁偶极辐射场。

磁偶极辐射的平均能流密度：

$$\vec{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3 R^2} \sin^2 \theta \vec{e}_R$$

其中， $|\vec{m}|$ 是磁矩的**振幅**。

磁偶极辐射总辐射功率：

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

第5章例题

例1

一电流线圈半径为 a ，激发电流振幅为 I_0 ，角频率为 ω ，求辐射功率。

解：

电流线圈磁矩的**振幅**为：

$$m = I_0 \pi a^2$$

于是磁偶极辐射总辐射功率为：

$$\begin{aligned}P &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3} \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 (I_0 \pi a^2)^2}{12\pi c^3} \\ &= \frac{\pi^2 \mu_0 \omega^4 I_0^2 a^4}{12\pi c^3}\end{aligned}$$

例2

两个质量、电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

思路：要证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生，只要证明电偶极矩和磁偶极矩都为零即可。

解：

取两粒子的碰撞点为原点，则：

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= -\vec{x}_2 \\ \vec{v}_1 &= -\vec{v}_2\end{aligned}$$

体系电偶极矩：

$$\vec{p} = q\vec{x}_1 + q\vec{x}_2 = q(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) = \vec{0}$$

于是不会发生电偶极辐射。

体系磁偶极矩：

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2}(\vec{x}_1 \times q\vec{v}_1 + \vec{x}_2 \times q\vec{v}_2) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

于是不会发生磁偶极辐射。

例3

半径为 R_0 的均匀永磁体小球，磁化强度为 \vec{M}_0 ，球以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 \vec{M}_0 的轴旋转，设 $R_0\omega \ll c$ ，求辐射场和能流。

主要是磁偶极辐射。

解：

磁矩振幅：

$$\vec{m}_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3}\vec{M}_0$$

例4

带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω ，求远处的辐射电磁场和能流。

解：

主要是电偶极辐射。

体系电偶极矩：

$$\begin{aligned}\vec{p} &= ea\vec{e}_r \\ &= ea(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)\end{aligned}$$

复数形式为：

$$\vec{p} = ea(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega t}$$

第6章 狭义相对论

狭义相对论基本原理

- 相对性原理：所有惯性参考系是等价的。物理规律对于所有惯性参考系都可以表示为相同的形式。
- 光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c ，且与光源运动无关。

间隔不变性

用四个坐标 (x, y, z, t) 表示一个事件

从 (\vec{x}, t) 到 (\vec{x}', t) 的变换式必须是线性的。

设两事件在惯性系 Σ 的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)$

设这两事件在在惯性系 Σ' 的坐标分别为 $(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1), (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)$

间隔 s^2, s'^2 定义为：

$$\begin{aligned}s^2 &\equiv c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ s'^2 &\equiv c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2\end{aligned}$$

根据光速不变原理可以推出间隔不变性，即：

$$s^2 = s'^2$$

两事件的间隔可以取任何数值。

$s^2 = 0$ ，类光间隔

$s^2 > 0$ ，类时间隔

$s^2 < 0$ ，类空间隔

洛伦兹变换

同一事件在两个不同参考系中观察的时空坐标关系为：

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

运动尺度的缩短

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

其中， l_0 是静止长度

推导：

设 Σ' 系相对 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，则任何事件在两个系中的时空坐标满足洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

其中， $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

只考虑尺子两端的两个端点。

左边的质点记为 1，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_1, t_1) ，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_1, t'_1) ，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 - vt) \\ t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 1 在 Σ 中运动的速度也是 v ，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$x_1 = a + vt_1$$

右边的质点记为 2，其在 Σ 系的时空坐标记为 (x_2, t_2) ，其在 Σ' 的时空坐标记为 (x'_2, t'_2) ，由 Σ' 相对 Σ 的运动，有洛伦兹变换：

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - vt) \\ t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) \end{cases}$$

设尺子相对 Σ 系以速度 v 沿 x 轴运动，则质点 2 在 Σ 中运动的速度也是 v ，于是其在 Σ 系中的时空坐标满足：

$$x_2=b+vt_2$$

尺子在 Σ 系中的长度，记为 l_Σ ，定义为：

$$\begin{aligned} l_\Sigma &\equiv (x_2-x_1)\Big|_{t_1=t_2} \\ &= [(b+vt_2)-(a+vt_1)]\Big|_{t_1=t_2} \\ &= b-a \end{aligned}$$

尺子在 Σ' 系中的长度（也就是静止长度），记为 $l_{\Sigma'}$ ，定义为：

$$\begin{aligned} l_{\Sigma'} &\equiv (x'_2-x'_1)\Big|_{t'_1=t'_2} \\ &= \left[\gamma(x_2-vt_2)-\gamma(x_1-vt_1)\right]\Big|_{t'_1=t'_2} \\ &= \gamma\left[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)\right]\Big|_{t'_1=t'_2} \\ &= \gamma\left[(b+vt_2)-(a+vt_1)-v(t_2-t_1)\right]\Big|_{t'_1=t'_2} \\ &= \gamma(b-a) \end{aligned}$$

可以看到，

$$l_\Sigma=\frac{1}{\gamma}l_{\Sigma'}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l_{\Sigma'}<l_{\Sigma'}$$

洛伦兹变换四维形式

$x_4\equiv ict$ ，间隔不变式可写为：

$$x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu = \text{不变量}$$

一般洛伦兹变换是满足间隔不变性的四维线性变换：

$$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$$

沿 x 轴方向的特殊洛伦兹变换的变换矩阵：

$$a=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

其中，

$$\beta=\frac{v}{c},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

四维协变量

在洛伦兹变换下不变的物理量称为洛伦兹标量或不变量。

间隔

$$ds^2=-dx_\mu dx_\mu$$

和固有~~固~~有时

$$d\tau=\frac{1}{c}ds$$

都是洛伦兹标量。

四维速度矢量：

$$U_\mu=\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

四维空间矢量：

$$x_\mu=(\vec{x},\mathrm{i}ct)$$

电动力学的相对论不变性

四维电流密度矢量

四维空间矢量：

$$x_\mu=(\vec{x},\mathrm{i}ct)$$

电流密度第四分量：

$$J_4=\mathrm{i}c\rho$$

$$J_\mu=\rho_0U_\mu$$

$$J_\mu=(\vec{J},\mathrm{i}c\rho)$$

电荷守恒定律四维形式：

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Longrightarrow\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0$$

四维势矢量

$$\square\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

\square 是洛伦兹标量算符

洛伦兹规范下， \vec{A} 满足的方程：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\Longrightarrow\square\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Longrightarrow\square\varphi=-\mu_0c^2\rho$$

$$A_\mu=\left(\vec{A},\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$$

合写为：

$$\square A_\mu=-\mu_0J_\mu$$

洛伦兹条件的四维形式：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$$

电磁场张量

反对称四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

电磁场构成一个四维张量：

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0J_\mu$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以合写为：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

麦克斯韦方程组协变形式：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0J_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$