已知 Kehagias-Sfetsos 黑洞背景时空可以由以下线元表示:

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + rac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d} heta^2 + r^2\sin^2 heta\mathrm{d}\phi^2
onumber$$
 $f(r) = 1 + rac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}
ight)$

其中, M 为黑洞质量, ω 为一参数。求下面的问题:

(1) 写出度规行列式;

度规:

$$g_{\mu
u} = egin{bmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \ 0 & rac{1}{f(r)} & 0 & 0 \ 0 & 0 & r^2 & 0 \ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 heta \end{bmatrix}$$

度规行列式:

$$g=\det(g_{\mu
u})=-r^4\sin^2 heta$$

(2) 黑洞事件视界的位置;

$$\frac{1}{g_{rr}} = f(r) = 0$$

即:

$$1+rac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}
ight)=0$$

方程可化简为:

$$r^2 - 2Mr + \omega^2 = 0$$

解得:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

事件视界半径为:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

(3) 无限红移面的位置;

无限红移面半径记为 r_s , 其满足:

$$g_{tt}|_{r=r_s}=0$$

即:

$$-f(r_s)=0$$

解得:

$$r_{s\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

(4) Hawking 温度;

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

 r_+ 满足:

$$1 + rac{1}{2\omega^2} \left(r_+^2 - \sqrt{r_+^4 + 8M\omega^2 r_+}
ight) = 0$$

因此:

$$\sqrt{r_+^4 + 8M\omega^2 r_+} = r_+^2 + 2\omega^2$$

上式可用于化简。

$$egin{aligned} F_{H} &= G_{H} = \left. rac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} \,
ight|_{r=r_{+}} \ &= \left. rac{r_{+}}{\omega^{2}} - rac{r_{+}^{3} + 2M\omega^{2}}{\omega^{2}\sqrt{r_{+}^{4} + 8M\omega^{2}r_{+}}}
ight. \ &= rac{r_{+}}{\omega^{2}} - rac{r_{+}^{3} + 2M\omega^{2}}{\omega^{2}\left(r_{+}^{2} + 2\omega^{2}
ight)} \ &= rac{M + \sqrt{M^{2} - \omega^{2}}}{\omega^{2}} - rac{\left(M + \sqrt{M^{2} - \omega^{2}}
ight)^{3} + 2M\omega^{2}}{\omega^{2}\left[\left(M + \sqrt{M^{2} - \omega^{2}}
ight)^{2} + 2\omega^{2}
ight]} \end{aligned}$$

Hawking 温度:

$$T=rac{\sqrt{F_HG_H}}{4\pi}=rac{1}{4\pi}\cdot F_H=rac{1}{4\pi}\left[rac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-rac{\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}
ight)^3+2M\omega^2}{\omega^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}
ight)^2+2\omega^2
ight]}
ight]$$

(5) 光球的位置。

选取 $x^\mu=(t,r, heta,arphi)$

光子的拉格朗日量:

$$\mathscr{L} = rac{1}{2} g_{\mu
u} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{
u} = rac{1}{2} igg[-f(r) \dot{t}^2 + rac{1}{f(r)} \dot{r}^2 + r^2 \dot{ heta}^2 + r^2 \sin^2 heta \dot{arphi}^2 igg]$$

考虑光子在赤道面 $\theta=\pi/2$ 上运动,光子的拉格朗日量可简化为:

$$\mathscr{L} = rac{1}{2}igg[-f(r)\dot{t}^2 + rac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{arphi}^2igg]$$

光子的拉格朗日量中不显含广义坐标 t, φ ,因此对应的广义动量是守恒量:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -E, \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = l$$

即:

$$-f(r)\dot{t}=-E,\ r^2\dot{arphi}=l$$

可以解得对应的广义速度:

$$\dot{t}=rac{E}{f(r)},~~\dot{arphi}=rac{l}{r^2}$$

又光子的拉格朗日量为零,即:

$$\mathscr{L}=rac{1}{2}igg[-f(r)\dot{t}^2+rac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{arphi}^2igg]=0$$

将 $\dot{t}=rac{E}{f(r)},\;\; \dot{arphi}=rac{l}{r^2}$ 代入上式可得:

$$\dot{r}=E^2-f(r)rac{l^2}{r^2}$$

其中,
$$f(r)=1+rac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}
ight)$$

或者可写为:

$$\dot{r}+f(r)rac{l^2}{r^2}=E^2$$

定义有效势:

$$egin{align} V_{
m eff} &\equiv f(r)rac{l^2}{r^2} \ &= rac{l^2}{r^2}iggl[1 + rac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}
ight)iggr] \ &= rac{l^2}{r^2} + rac{l^2}{2\omega^2}\left(1 - rac{\sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}}{r^2}
ight) \ & \dot{r}^2 + V_{
m eff} = E^2 \ \end{align}$$

由于 $\dot{r}^2\geqslant 0$,因此光子只能在

$$E^2 - V_{
m eff} \geqslant 0$$

的区域运动。

 $V_{
m eff}(r)$ 的极大值点记为 $r_{
m ps}$

当 $E^2=(V_{
m eff})_{
m max}$ 且光子的初始位置就在 $r_{
m ps}$ 且初速度非零时,有:

$$\dot{r} = 0$$

此时光子的运动轨迹是稳定的圆。

即光球的半径就是 $r_{\rm ps}$,其满足:

$$\left.rac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}
ight|_{r=r_{\mathrm{ps}}}=0$$

解得光球半径:

$$r_{
m ps} = rac{3M^2}{\left(-4M\omega^2 + \sqrt{-27M^6 + 16M^2\omega^4}
ight)^{1/3}} + \left(-4M\omega^2 + \sqrt{-27M^6 + 16M^2\omega^4}
ight)^{1/3}$$