1.5

1.5-1

> 证明指数为 2 的子群必为不变子群。（设有限群 G 的阶数为 n_G，其子群 H 的阶数为 n_H，n_G/n_H 称为子群 H 的阶数）

设子群 H 是群 G 的指数为 2 的子群，即 $n_H = n_G/2$

$\forall h_\alpha \in H$，群的重排定理给出：

$$h_\alpha H = H h_\alpha = H$$

对任意 $g_\alpha \in G$ 且 $g_\alpha \notin H$，可分别构造左右陪集 $g_\alpha H$ 和 $H g_\alpha$，且 $g_\alpha H$ 与 H 无公共元素，$H g_\alpha$ 与 H 也无公共元素。

这两个陪集的阶数都等于子群 H 的阶数 $n_H = n_G/2$，

于是 $g_\alpha H$ 和 $H g_\alpha$ 都是由 G 中除去 H 剩下的群元组成的集合，即：

$$g_\alpha H = H g_\alpha$$

这就证明了 H 必定是 G 的不变子群。

1.5-2

> 证明商群满足群的定义中的结合律。

设 H 为群 G 的不变子群，则群 G 关于其不变子群 H 的商群 G/H 定义为 H 及其陪集串：

$$G/H = \{\phi_0 = H, \phi_1 = s_1 H, \cdots \phi_{k-1} = s_{k-1} H\}, \ \ s_i \in G$$

$$\begin{aligned}
(\phi_i \phi_j)\phi_k &= (s_i H s_j H) s_k H \\
&= \{[(s_i h_\alpha)(s_j h_\beta)]\,(s_k h_\gamma) | h_\alpha, h_\beta, h_\gamma \in H\} \\
&= \{(s_i h_\alpha)[(s_j h_\beta)(s_k h_\gamma)] | h_\alpha, h_\beta, h_\gamma \in H\} \\
&= s_i H (s_j H s_k H) \\
&= \phi_i (\phi_j \phi_k)
\end{aligned}$$

这就是说，商群满足群的定义中的结合律。

1.5-3

> 求商群 $\mathrm{C}_6/\mathrm{C}_2$ 的乘法表。

$$\mathrm{C}_6/\mathrm{C}_2=\{\{e,C_6^3\},\{C_6^1,C_6^4\},\{C_6^2,C_6^5\}\}$$

乘法表:

	$\{e,C_6^3\}$	$\{C_6^1,C_6^4\}$	$\{C_6^2,C_6^5\}$
$\{e,C_6^3\}$	$\{e,C_6^3\}$	$\{C_6^1,C_6^4\}$	$\{C_6^2,C_6^5\}$
$\{C_6^1,C_6^4\}$	$\{C_6^1,C_6^4\}$	$\{C_6^2,C_6^5\}$	$\{e,C_6^3\}$
$\{C_6^2,C_6^5\}$	$\{C_6^2,C_6^5\}$	$\{e,C_6^3\}$	$\{C_6^1,C_6^4\}$

1.5-4

> 求 $\mathrm{D}_3,\mathrm{D}_4$ 群的所有非平庸不变子群，以及关于这些不变子群的陪集、商群以及商群的乘法表。

D_3 群

D_3 群的所有非平庸不变子群:

$$H=\phi_0=\{e,d,f\}$$

陪集:

$$\phi_1=\{a,b,c\}$$

商群:

$$G/H=\{\phi_0,\phi_1\}=\{\{e,d,f\},\{a,b,c\}\}$$

商群的乘法表:

	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_0	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_0

D_4 群

D_4 群的所有非平庸不变子群：

$$\begin{cases} H=\phi_0=\{e,C_4^1,C_4^2,C_4^3\} \\ H'=\phi_0'=\{e,C_4^2,\sigma_x,\sigma_y\} \\ H''=\phi_0''=\{e,C_4^2,\sigma_1,\sigma_2\} \\ H'''=\phi_0'''=\{e,C_4^2\} \end{cases}$$

陪集：

$$\begin{cases} \phi_1=\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2\} \\ \phi_1'=\{C_4^1,C_4^3,\sigma_1,\sigma_2\} \\ \phi_1''=\{C_4^1,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y\} \\ \phi_1'''=\{C_4^1,C_4^3\},\phi_2'''=\{\sigma_x,\sigma_y\},\phi_3'''=\{\sigma_1,\sigma_2\} \end{cases}$$

商群：

$$\begin{cases} G/H=\{\phi_0,\phi_1\}=\{\{e,C_4^1,C_4^2,C_4^3\},\{\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2\}\} \\ G/H'=\{\phi_0',\phi_1'\}=\{\{e,C_4^2,\sigma_x,\sigma_y\},\{C_4^1,C_4^3,\sigma_1,\sigma_2\}\} \\ G/H''=\{\phi_0'',\phi_1''\}=\{\{e,C_4^2,\sigma_1,\sigma_2\},\{C_4^1,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y\}\} \\ G/H'''=\{\phi_0''',\phi_1''',\phi_2''',\phi_3'''\}=\{\{e,C_4^2\},\{C_4^1,C_4^3\},\{\sigma_x,\sigma_y\},\{\sigma_1,\sigma_2\}\} \end{cases}$$

商群的乘法表：

	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_0	ϕ_0	ϕ_1
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_0

	ϕ_0'	ϕ_1'
ϕ_0'	ϕ_0'	ϕ_1'
ϕ_1'	ϕ_1'	ϕ_0'

	ϕ_0''	ϕ_1''
ϕ_0''	ϕ_0''	ϕ_1''

	ϕ_0''	ϕ_1''
ϕ_1''	ϕ_1''	ϕ_0''

	ϕ_0'''	ϕ_1'''	ϕ_2'''	ϕ_3'''
ϕ_0'''	ϕ_0'''	ϕ_1'''	ϕ_2'''	ϕ_3'''
ϕ_1'''	ϕ_1'''	ϕ_0'''	ϕ_3'''	ϕ_2'''
ϕ_2'''	ϕ_2'''	ϕ_3'''	ϕ_0'''	ϕ_1'''
ϕ_3'''	ϕ_3'''	ϕ_2'''	ϕ_1'''	ϕ_0'''

1.6&1.7

1.6&1.7-1

> 证明 $\mathrm{C}_6 \simeq \mathrm{C}_2, \mathrm{D}_3 \simeq \mathrm{C}_2$

证明 $\mathrm{C}_6 \simeq \mathrm{C}_2$

定义映射 $f: \mathrm{C}_6 \to \mathrm{C}_2$ 为:

$$C_6^1, C_6^3, C_6^5 \mapsto C_2^1,\ \ C_6^2, C_6^4, C_6^6 \mapsto C_2^2$$

显然，f 是良定义的，且是单射，也是满射。

$$f\left(C_6^i\right)=\begin{cases} C_2^1 & ,i\text{为奇数} \\ C_2^2 & ,i\text{为偶数} \end{cases}$$

当 i 为奇数，j 为奇数，$f\left(C_6^i C_6^j\right)=f\left(C_6^{i+j}\right)=C_2^2=f\left(C_6^i\right) f\left(C_6^j\right)$

当 i 为奇数，j 为偶数，$f\left(C_6^i C_6^j\right)=f\left(C_6^{i+j}\right)=C_2^1=f\left(C_6^i\right) f\left(C_6^j\right)$

当 i 为偶数，j 为奇数，$f\left(C_6^i C_6^j\right)=f\left(C_6^{i+j}\right)=C_2^1=f\left(C_6^i\right) f\left(C_6^j\right)$

当 i 为偶数，j 为偶数，$f\left(C_6^i C_6^j\right)=f\left(C_6^{i+j}\right)=C_2^2=f\left(C_6^i\right) f\left(C_6^j\right)$

综上，

$$f\left(C_6^i C_6^j\right)=f\left(C_6^i\right) f\left(C_6^j\right)$$

于是：

$$\mathrm{C}_6 \simeq \mathrm{C}_2$$

证明 $\mathrm{D}_3 \simeq \mathrm{C}_2$

$\mathrm{D}_3=\{e, d, f, a, b, c\}, \mathrm{C}_2=\left\{e^{\prime}, C_2^1\right\}$

从 D_3 到 C_2 的映射 $F: \mathrm{D}_3 \rightarrow \mathrm{C}_2$ 定义为：

$$e, d, f \mapsto e^{\prime}, \quad a, b, c \mapsto C_2^1$$

显然，F 是良定义的，且是单射，也是满射。

映射 F 把 D_3 中的旋转操作 e, d, f 映射为 C_2 中的恒元 $e^{\prime}$，把 D_3 中的反射操作 a, b, c 映射为 C_2 中的 C_2^1

令 $H_1=\{e, d, f\}, H_2=\{a, b, c\}$，则：

$$F(x)=\begin{cases}e^{\prime} & , \quad x \in H_1 \\ C_2^1 & , \quad x \in H_2\end{cases}$$

若 $x \in H_1, y \in H_1$，则 $x y \in H_1$，于是 $F(x y)=e^{\prime}=F(x) F(y)$

若 $x \in H_1, y \in H_2$，则 $x y \in H_2$，于是 $F(x y)=C_2^1=F(x) F(y)$

若 $x \in H_2, y \in H_1$，则 $x y \in H_2$，于是 $F(x y)=C_2^1=F(x) F(y)$

若 $x \in H_2, y \in H_2$，则 $x y \in H_1$，于是 $F(x y)=e^{\prime}=F(x) F(y)$

综上，

$$\mathrm{D}_3 \simeq \mathrm{C}_2$$

1.6&1.7-2

> 证明：设 $G \simeq G^{\prime}$，I 为同态核，则 $G / I \cong G^{\prime}$

定义 $G / I \rightarrow G^{\prime}$ 的映射为：若 $g_{i m} \mapsto g_i^{\prime}$，则 $g_{i m} I \mapsto g_i^{\prime}$

- 首先证明定义的映射是良定义（即一个原像只对应一个像）的。

由 $G \simeq G'$，设 $g_{im} \in G \mapsto g'_i \in G', g_{jn} \in G \mapsto g'_j \in G'$

若 $g_{im}I = g_{jn}I$，则 $\exists i_l \in I$ 使得 $g_{im}g_{jn}^{-1} = i_l$。

一方面，$G \simeq G'$，于是 $g_{im}g_{jn}^{-1} \mapsto g'_i g'^{-1}_j \in G'$；

另一方面，I 是同态核，于是 $i_l \mapsto e' \in G'$。

而从 G 到 G' 的同态是良定义的，于是得到 $g'_i g'^{-1}_j = e'$，即 $g'_i = g'_j$

综上，定义的映射是良定义的。

- 再证明定义的映射是单射。

由 $G \simeq G'$，设 $g_{im} \in G \mapsto g'_i \in G', g_{jn} \in G \mapsto g'_j \in G'$

若 $g'_i = g'_j$，则 $g'_i g'^{-1}_j = e'$，

由于 $G \simeq G'$，于是 $g_{im}g_{jn}^{-1} \mapsto g'_i g'^{-1}_j = e'$，

于是 $g_{im}g_{jn}^{-1} \in I$，因此 $g_{im}I = g_{jm}I$，这就说明定义的映射是单射。

- 再证明定义的映射是满射。

由于 $G \simeq G'$，于是 $\forall g'_i \in G', \exists g_{im} \in G$ 使得 $g_{im} \mapsto g'_i$，于是 $g_{im}I$ 是 g'_i 的原像。这就说明定义的映射是满射。

- 最后证明定义的映射为群同态。

由 $G \simeq G'$，$\forall g_{im}, g_{jn} \in G$，设 $g_{im} \in G \mapsto g'_i \in G', g_{jn} \in G \mapsto g'_j \in G'$，则有：

$$g_{im}I \in G/I \mapsto g'_i \in G', \;\; g_{jn}I \in G/I \mapsto g'_j \in G'$$

由于 $g_{im}g_{jn} \in G \mapsto g'_i g'_j \in G'$，于是：

$$(g_{im}I)(g_{jn}I) = (g_{im}g_{jn})I \mapsto g'_i g'_j$$

于是定义的映射为群同态。

综上，定义的映射为群同构。

1.6&1.7-3

> 结合直积群的定义，谈谈你对 $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ 的理解。

对任意两个群 H,F，它们的外直积定义为：

$$G=H\otimes F=\{(h,f)|h\in H,f\in F\}$$

元素间的乘法定义为：

$$gg'=(h,f)(h',f')=(hh',ff')$$

弱电同一理论（或电弱统一理论）是粒子物理学中的一个重要理论框架，它将弱相互作用和电磁相互作用视为同一种更基本相互作用的两种不同表现。在这一理论下，弱相互作用和电磁相互作用通过共同的规范场和媒介粒子进行传递，从而实现两者的统一。

- **弱相互作用与 $\mathrm{SU}(2)$ 对称性**
  - 弱相互作用主要涉及费米子（如电子、中微子等）之间的相互作用及衰变过程。
  - 在弱电同一理论中，弱相互作用被描述为由 W 及 Z 玻色子（共三种媒介粒子）的交换所引起的。因此，弱相互作用对应的规范场是 $\mathrm{SU}(2)$ 群。
  - $\mathrm{SU}(2)$ 对称性保证了弱相互作用在描述粒子衰变等过程时具有一致的规律。
- **电磁相互作用与 $\mathrm{U}(1)$ 对称性**
  - 电磁相互作用是带电粒子与电磁场的相互作用，以及带电粒子之间通过电磁场传递的相互作用。
  - 参与电磁相互作用的是带电荷的粒子，电荷只有一种（正负只是它的数值），因此自由的带电粒子的拉氏量具有 $\mathrm{U}(1)$ 对称性。
  - $\mathrm{U}(1)$对称性保证了电磁相互作用在描述带电粒子与电磁场的相互作用时具有一致的规律。
- **弱电同一理论与 $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ 对称性**
  - 由于弱电同一理论将弱相互作用和电磁相互作用统一在一个框架内，因此这一理论应具有同时描述这两种相互作用的对称性。
  - $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ 对称性正是这一理论所具备的对称性，它结合了弱相互作用的 $\mathrm{SU}(2)$ 对称性和电磁相互作用的 $\mathrm{U}(1)$ 对称性。
  - 这一对称性不仅体现了弱电同一理论的基本特征，而且为理解弱相互作用和电磁相互作用的统一提供了有力的工具。

$\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$ 对称性的物理意义

$\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$对称性在弱电同一理论中具有重要的物理意义。它不仅保证了理论在描述弱相互作用和电磁相互作用时具有一致的规律。

1.6&1.7-4

> 证明直积群 $K=H\otimes F$ 中无重复元素。

$H=\{h_\alpha\},F=\{f_\beta\},H\otimes F=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$

若 $h_\alpha f_\beta=h_\gamma f_\delta$，则:

$$h_\gamma^{-1}h_\alpha=f_\delta f_\beta^{-1}$$

由于 H,F 都是子群，于是:

$$h_\gamma^{-1}h_\alpha\in H,\ \ f_\delta f_\beta^{-1}\in F$$

由直积的定义，子群 H 和 F 的共同元素为恒元 e，于是:

$$h_\gamma^{-1}h_\alpha=e,\ \ f_\delta f_\beta^{-1}=e$$

即:

$$h_\alpha=h_\gamma,\ \ f_\delta=f_\beta$$

上面证明了如下命题为真:

$$h_\alpha f_\beta=h_\gamma f_\delta\Longrightarrow h_\alpha=h_\gamma,\ \ f_\delta=f_\beta$$

其逆否命题也为真，即:

若 $h_\alpha\neq h_\gamma$ 或 $f_\delta\neq f_\beta$，则 $h_\alpha f_\beta\neq h_\gamma f_\delta$

这就是说直积群 $K=H\otimes F=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$ 中无重复元素。

1.6&1.7-5

> 证明：对于正六边形对称群，有下面结论：$\mathrm{D}_6=\mathrm{D}_3\otimes\mathrm{C}_2$

$\mathrm{D}_6=\{e,C_6^1,C_6^2,C_6^3,C_6^4,C_6^5,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$

$\mathrm{D}_3=\{e,d,f,a,b,c\},\mathrm{C}_2=\{e,C_2^1\}$

下面验证 $\mathrm{D}_6=\mathrm{D}_3\otimes\mathrm{C}_2$:

$$
\begin{cases}
e = ee \\
C_6^1 = fC_2^1 = C_2^1 f \\
C_6^2 = de = ed \\
C_6^3 = eC_2^1 = C_2^1 \\
C_6^4 = fe = ef \\
C_6^5 = dC_2^1 = C_2^1 d \\
\sigma_1 = ae = ea \\
\sigma_2 = bC_2^1 = C_2^1 b \\
\sigma_3 = ce = ec \\
\sigma_4 = aC_2^1 = C_2^1 a \\
\sigma_5 = be = eb \\
\sigma_6 = cC_2^1 = C_2^1 c
\end{cases}
$$

综上，$\forall g_\alpha \in \mathrm{D}_6, g_\alpha \in \mathrm{D}_3 \otimes \mathrm{C}_2; \forall h_\beta \in \mathrm{D}_3 \otimes \mathrm{C}_2, h_\beta \in \mathrm{D}_6$，于是 $\mathrm{D}_6 = \mathrm{D}_3 \otimes \mathrm{C}_2$

1.6&1.7-6

> 证明二阶循环群 $\mathrm{C}_2 = \{e, a\}$ 的外直积群 $\mathrm{C}_2 \otimes \mathrm{C}_2$ 与 D_2 群同构。

$\mathrm{D}_2 = \{e, C_2^1, \sigma_x, \sigma_y\}$

$$
\mathrm{C}_2 \otimes \mathrm{C}_2 = \{(e,e), (a,e), (e,a), (a,a)\}
$$

定义映射为：

$$
\begin{cases}
(e,e) \mapsto e \\
(a,e) \mapsto \sigma_x \\
(e,a) \mapsto C_2^1 \\
(a,a) \mapsto \sigma_y
\end{cases}
$$

下面验证定义的映射为群同构：

$$
\begin{cases}
(e,e)(e,e)=(e,e)\mapsto e=ee \\
(a,e)(e,e)=(a,e)\mapsto \sigma_x=\sigma_x e \\
(e,e)(a,e)=(a,e)\mapsto \sigma_x=e\sigma_x \\
(e,a)(e,e)=(e,a)\mapsto C_2^1=C_2^1 e \\
(e,e)(a,e)=(a,e)\mapsto \sigma_x=e\sigma_x \\
(a,a)(e,e)=(a,a)\mapsto \sigma_y=\sigma_y e \\
(e,e)(a,a)=(a,a)\mapsto \sigma_y=e\sigma_y \\
(a,e)(a,e)=(e,e)\mapsto e=\sigma_x\sigma_x \\
(a,e)(e,a)=(a,a)\mapsto \sigma_y=\sigma_x C_2^1 \\
(e,a)(a,e)=(a,a)\mapsto \sigma_y=C_2^1\sigma_x \\
(a,e)(a,a)=(e,a)\mapsto C_2^1=\sigma_x\sigma_y \\
(a,a)(a,e)=(e,a)\mapsto C_2^1=\sigma_y\sigma_x \\
(e,a)(e,a)=(e,e)\mapsto e=C_2^1C_2^1 \\
(e,a)(a,a)=(a,e)\mapsto \sigma_x=C_2^1\sigma_y \\
(a,a)(e,a)=(a,e)\mapsto \sigma_x=\sigma_y C_2^1 \\
(a,a)(a,a)=(e,e)\mapsto e=\sigma_y\sigma_y
\end{cases}
$$

综上，二阶循环群 $\mathrm{C}_2=\{e,a\}$ 的外直积群 $\mathrm{C}_2\otimes\mathrm{C}_2$ 与 D_2 群同构。

1.6&1.7-7

> 给出半直积群的定义。

设 $H=\{h_\alpha\}$ 为群 G 的不变子群，$F=\{f_\beta\}$ 为群 G 的子群，且满足：

(1) $H\cap G=e$

(2) $G=HF$

则 $G=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$ 构成一个群，称为 H 和 F 的半直积群，记为：

$$
K=H\otimes_{\mathrm{S}}F
$$