> 试卷附的参考答案基本上错光了。当然本文档给出的答案也不一定对。

一、概念题

1

名词解释：电场强度与磁感应强度。

电场，记为 $\vec{E}$，定义为单位检验电荷在场中所受的力：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{Q'}$$

其中，$\vec{F}$ 是检验电荷 Q' 在电场中所受的力。

实验指出，一个电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在磁场中所受的力 $\mathrm{d}\vec{F}$ 可以表示为：

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

其中，$\vec{B}$ 称为磁感应强度。

2

写出电磁场能量守恒的微分形式与积分形式。

积分形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V w\mathrm{d}V = -\oint\limits_{\partial V} \vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} - \int\limits_V \vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V$$

微分形式：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{S} - \vec{f}\cdot\vec{v}$$

3

写出库仑规范条件与洛伦兹规范条件。

库仑规范：

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

4

什么是推迟势？写出表达式及其意义。

洛伦兹规范下的达朗贝尔方程（真空中）

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$$

的解有推迟势的形式：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}V'$$

它反映了电磁作用具有一定的传播速度。源点 $\vec{x}'$ 对场点 $\vec{x}$ 的电磁作用需要的传播时间为 $\dfrac{r}{c}=\dfrac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}$

5

牛顿力学与狭义相对论的原理是什么？它们各自的适用范围？

牛顿力学原理：牛顿三定律、绝对时空观、伽利略变换；适用范围：宏观、低速物体

狭义相对论原理：（1）相对性原理：所有惯性参考系是等价的。（2）光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c，且与光源运动无关。适用范围：高速

二、计算题

1

一个半径为 R 的无限长圆柱内通有恒定电流，电流密度为 j_0，求空间内的磁感应强度与磁能量密度。

解：

安培环路定理：

$$\oint\limits_{\partial S}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

当 $r>R$

$$2\pi rB=\mu_0\pi R^2 j_0\Longrightarrow B=\frac{\mu_0R^2j_0}{2r}$$

当 $r<R$

$$2\pi rB=\mu_0\pi r^2 j_0\Longrightarrow B=\frac{\mu_0j_0r}{2}$$

于是：

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0j_0r}{2}\vec{e}_\varphi & ,\ r<R\\ \dfrac{\mu_0j_0R^2}{2r}\vec{e}_\varphi & ,\ r>R\end{cases}$$

磁场能量密度：

$$w=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\frac{B^2}{2\mu_0}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0j_0^2r^2}{8} & ,r<R\\ \dfrac{\mu_0j_0^2R^4}{8r^2} & ,r>R\end{cases}$$

2

真空中有一个半径为 R_0 的导体球，在距球心为 $a(a>R_0)$ 处有一点电荷 Q，已知导体球电势为 0，求：

（1）空间内的电势

（2）点电荷 Q 受到的静电力

解:

（1）

由相似:

$$\frac{b}{R_0}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{R_0}{a}$$

可得:

$$b=\frac{R_0^2}{a},\ \ \frac{r_2}{r_1}=\frac{R_0}{a}$$

导体球边界电势为零:

$$\frac{Q'}{r_2}+\frac{Q}{r_1}=0$$

得到:

$$Q'=-Q\frac{r_2}{r_1}=-\frac{R_0}{a}Q$$

余弦定理:

$$r_1=\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}=\sqrt{r^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2\frac{R_0^2}{a}r\cos\theta}$$
$$r_2=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$$

空间内电势为:

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta)&=\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\frac{R_0}{a}Q}{\sqrt{r^2+\frac{R_0^4}{a^2}-2\frac{R_0^2}{a}r\cos\theta}}+\frac{Q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\right]\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-R_0}{\sqrt{a^2r^2+R_0^4-2aR_0^2r\cos\theta}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}\right]\end{aligned}$$

（2）

点电荷受到的力等于与像电荷给的力:

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{(a-b)^2}\vec{e}_x=\frac{-Q^2R_0a}{4\pi\varepsilon_0(a^2-R^2)^2}\vec{e}_x$$

3

求磁化强度为 $\vec{M}_0$ 的均匀磁化铁球产生的磁场。

解:

取 z 轴与 $\vec{M}_0$ 同向，则问题有 z 轴对称性。

界面为球面

在球内部，即 $R<R_0$ 区域（记为区域 1 ），磁化强度 $\vec{M}=\vec{M}_0$，则磁荷密度为:

$$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}_0=0,\ \ R<R_0$$

区域 1 内无自由电流，于是磁标势 φ_1 满足方程：

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_1 的形式解为：

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

由于球心处磁标势有限，即 $\varphi_1\big|_{R=0} < \infty$，则：

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

在球外部，即 $R > R_0$ 区域（记为区域 2 ），磁化强度 $\vec{M} = \vec{0}$，则磁荷密度为：

$$\rho_m = -\mu_0\nabla\cdot\vec{M} = 0,\ \ R > R_0$$

区域 2 内无自由电流，于是磁标势 φ_2 满足方程：

$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

即：

$$\nabla^2\varphi_2 = 0$$

由于问题有 z 轴对称性，则 φ_2 的形式解为：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

由于无穷远处磁标势为零，即 $\varphi_2\big|_{R=\infty} = 0$，则：

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

$$\begin{cases}\varphi_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{P}_n(\cos\theta)\\ \varphi_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)\end{cases}$$

第一条边值关系：

$$\varphi_1\big|_{R=R_0} = \varphi_2\big|_{R=R_0} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_nR_0^n\mathrm{P}_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

于是得到：

$$a_nR_0^n = \frac{b_n}{R_0^{n+1}}$$

即：

$$\boxed{b_n = a_nR_0^{2n+1}}$$

第二条边值关系：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}} = \vec{n}_{1\to2}\cdot(\vec{M}_1 - \vec{M}_2),\ \text{界面处}$$

计算方向导数在界面处的取值：

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{1\to2}}\right|_{R=R_0} &= \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right|_{R=R_0} \\
&= \left.\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\right|_{R=R_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{1\to2}}\right|_{R=R_0} &= \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right|_{R=R_0} \\
&= \left.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos\theta)\right|_{R=R_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

代入边值关系第二条：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R_0^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = M_0\cos\theta
$$

即：

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(n a_n R_0^{n-1} + \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}}\right)\mathrm{P}(\cos\theta) = M_0\cos\theta
$$

将第一条边值关系得到的结论 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 代入上式，得：

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_n R_0^{n-1}\mathrm{P}_n(\cos\theta) = M_0\cos\theta
$$

对比等式两边 $\cos\theta$ 的各级系数，可得：

$$
a_0 = 0,\ \ a_1 = \frac{1}{3}M_0,\ \ a_2 = a_3 = \cdots = 0
$$

代回关系 $b_n = a_n R_0^{2n+1}$ 得：

$$
b_0 = 0,\ \ b_1 = \frac{1}{3}M_0 R_0^3,\ \ b_2 = b_3 = \cdots = 0
$$

于是得到磁标势：

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \mathrm{P}_n(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{3}M_0 R\cos\theta \\
&= \frac{1}{3}\vec{M}_0\cdot\vec{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{R^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\theta) \\
&= \frac{1}{3}M_0 R_0^3 \frac{1}{R^2}\cos\theta \\
&= \frac{R_0^3}{3}\frac{\vec{M}_0\cdot\vec{R}}{R^3}
\end{aligned}
$$

球内磁场：

$$
\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1 = -\frac{1}{3}\vec{M}_0,\ \ R < R_0
$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_1) = \mu_0(-\frac{1}{3}\vec{M}_0 + \vec{M}_0) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0$$

球外磁场：

$$\vec{H}_2 = -\nabla\varphi_2 = -\frac{R_0^3}{3}\left(\frac{\vec{M}_0}{R^3} - \frac{3(\vec{M}_0 \cdot \vec{R})}{R^4}\vec{e}_R\right)$$

4

已知在长宽分别为 a, b 的矩形波导内，磁场强度的 z 分量大小为：

$$H_z = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a}y\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

（1）求波导内电场强度、磁感应强度大小

时谐电磁波：

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$$

波导内：

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$
$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}_0(x, y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

考虑波导内真空且无源，有 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$， $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$，再结合时谐电磁波 $\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -\mathrm{i}\omega$ 可得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = \mathrm{i}\omega\mu_0\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

对第一式两边同时取 x, y 分量：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x &= \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ &= \partial_y E_z - \mathrm{i}k_z E_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y &= \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ &= \mathrm{i}k_z E_x - \partial_x E_z \end{aligned}$$

对第二式两边同时取 x, y 分量：

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x &= \partial_y H_z - \partial_z H_y \\ &= \partial_y H_z - \mathrm{i}k_z H_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y &= \partial_z H_x - \partial_x H_z \\ &= \mathrm{i}k_z H_x - \partial_x H_z \end{aligned}$$

于是：

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x = \partial_y E_z - \mathrm{i}k_z E_y \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y = \mathrm{i}k_z H_x - \partial_x H_z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_x + \mathrm{i}k_z E_y = \partial_y E_z \\ \mathrm{i}k_z H_x + \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_y = \partial_x H_z \end{cases}$$

解得:

$$H_x = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2}\Big(- \omega\varepsilon_0 \partial_y E_z + k_z \partial_x H_z \Big)$$

$$E_y = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2}\Big(- \omega\mu_0 \partial_x H_z + k_z \partial_y E_z \Big)$$

其中，$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y = \mathrm{i}k_z E_x - \partial_x E_z \\ -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z - \mathrm{i}k_z H_y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{i}\omega\mu_0 H_y - \mathrm{i}k_z E_x = -\partial_x E_z \\ \mathrm{i}k_z H_y - \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_x = \partial_y H_z \end{cases}$$

解得:

$$H_y = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2}\Big(\omega\varepsilon_0 \partial_x E_z + k_z \partial_y H_z \Big)$$

$$E_x = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - k_z^2}\Big(\omega\mu_0 \partial_y H_z + k_z \partial_x E_z \Big)$$

本题中，$H_z = H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a} y\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$， $E_z = 0$，于是:

$$E_x = \frac{-\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$E_y = 0$$

$$H_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$H_y = \frac{-\mathrm{i}\pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

$$B_y = \mu_0 H_y = \frac{-\mathrm{i}\pi\mu_0 k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)}$$

（2）求平均能流密度功率

解:

$$\begin{aligned} \bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}^* \times \vec{H}\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\{-E_x^* H_z \vec{e}_y + E_x^* H_y \vec{e}_z\} \\ &= \frac{1}{2} \Re\Big\{ - \frac{\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot H_0 \cos\left[\frac{\pi}{a} y\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_y + \frac{\mathrm{i}\pi\omega\mu_0 H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \cdot \frac{-\mathrm{i}\pi k_z H_0}{a(k^2 - k_z^2)} \sin(\frac{\pi}{a} y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \vec{e}_z \Big\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \omega\mu_0 k_z H_0^2}{a^2 (k^2 - k_z^2)^2} \sin^2(\frac{\pi}{a} y) \vec{e}_z \end{aligned}$$

5

证明：在相同荷质比 $\frac{q}{m} = C$ 粒子组成的体系中，不可能存在电偶极辐射。

远场电偶极辐射公式:

$$\vec{B} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} \ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_R$$

$$\vec{E}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R)\times\vec{e}_R$$

要证明不存在电偶极辐射，只需要证明 $\ddot{\vec{p}}=\vec{0}$

设第 i 个粒子的质量为 m_i，带电量为 q_i，满足：

$$\frac{q_i}{m_i}=C$$

计算体系电偶极矩：

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\sum_i q_i\vec{r}_i\\&=\sum_i\frac{q_i}{m_i}m_i\vec{r}_i\\&=C\sum_i m_i\vec{r}_i\end{aligned}$$

电偶极矩对时间二阶导数：

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{p}}&=C\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\\&=C\sum_i m_i\vec{a}_i\\&=C\sum_i\vec{F}_i\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

于是得证。

6

（1）狭义相对论中洛伦兹标量有哪些？通过洛伦兹标量、洛伦兹矢量 $\mathrm{d}x_\mu$，构造尽可能多的洛伦兹矢量。

（2）狭义相对论中的绝对量和相对量分别有哪些？

（3）写出 $F_{44},F_{4i},F_{\mu\nu}$，并写出麦克斯韦方程组的协变形式。

解：

（1）

洛伦兹标量：

间隔

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$$

洛伦兹矢量：

$$x_\mu=(\vec{x},\mathrm{i}ct)$$

四维电流密度：

$$J_\mu=(\vec{J},\mathrm{i}ct)$$

（2）

绝对量：真空中的光速 c，间隔 $\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$，固有时

相对量：各惯性参考系中的时间、空间

（3）

$$F_{44}=0$$

$$F_{4i}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{bmatrix}$$

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{bmatrix}$$

麦克斯韦方程组协变形式：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{x_\nu}=\mu_0 J_\mu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0$$