4-1

4-1-1

> 求 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 群的生成元及其对易关系。

表示矩阵为：

$$D(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix},\ \det D(\alpha)\neq 0$$

其中，群参数矩阵：

$$\alpha\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{bmatrix}$$

共 n^2 个群参数。

恒元对应的群参数的取值为：

$$\alpha_0=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}或\alpha_{0ij}=\delta_{ij}$$

生成元：

$$I_{ij}\equiv\left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial\alpha_{ij}}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

$$\boxed{[I_{ij}]_{pq}=\delta_{ip}\delta_{jq}}$$

即生成元 I_{ij} 的 i 行 j 列矩阵元为 1，其他矩阵元为零。

生成元对易关系：

$$[I_{ij},I_{kl}]=I_{ij}I_{kl}-I_{kl}I_{ij}$$

$$\begin{aligned}[][I_{ij},I_{kl}]_{pq}&=(I_{ij}I_{kl})_{pq}-(I_{kl}I_{ij})_{pq}\\ &=\sum_m(I_{ij})_{pm}(I_{kl})_{mq}-\sum_n(I_{kl})_{pn}(I_{ij})_{nq}\\ &=\sum_m\left(\delta_{ip}\delta_{jm}\cdot\delta_{km}\delta_{lq}\right)-\sum_n\left(\delta_{kp}\delta_{ln}\cdot\delta_{in}\delta_{jq}\right)\\ &=\delta_{ip}\delta_{jk}\delta_{lq}-\delta_{kp}\delta_{li}\delta_{jq}\\ &=\delta_{jk}(\delta_{ip}\delta_{lq})-\delta_{li}(\delta_{kp}\delta_{jq})\\ &=\delta_{jk}(I_{il})_{pq}-\delta_{li}(I_{kj})_{pq}\end{aligned}$$

因此：

$$\boxed{[I_{ij},I_{kl}]=\delta_{jk}I_{il}-\delta_{li}I_{kj}}$$

4-1-2

> 求 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 群的生成元及其对易关系。

表示矩阵为：

$$D(a,b)=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}+\mathrm{i}\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix},\ \ \det D(a,b)\neq 0$$

其中，群参数矩阵：

$$a\equiv\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\ \ b\equiv\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}$$

共 $2n^2$ 个群参数。

恒元对应的群参数的取值为：

$$a_0=\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix},\ \ b_0=\mathbf{0}\ \ 或\ \ a_{0ij}=\delta_{ij},\ \ b_{0ij}=0$$

生成元（用英文字母下标表示 a 中的参数，用希腊字母下标表示 b 中参数）：

$$I_{ij}\equiv\left.\frac{\partial D(a,b)}{\partial a_{ij}}\right|_{a=a_0,b=b_0}$$

$$\boxed{[I_{ij}]_{pq}=\delta_{ip}\delta_{jq}}$$

$$I_{\alpha\beta}\equiv\left.\frac{\partial D(a,b)}{\partial b_{\alpha\beta}}\right|_{a=a_0,b=b_0}$$

$$\boxed{[I_{\alpha\beta}]_{pq}=\mathrm{i}\delta_{kp}\delta_{lq}}$$

参考 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 生成元对易关系，可得 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 生成元对易关系：

$$\boxed{[I_{ij},I_{kl}]=\delta_{jk}I_{il}-\delta_{li}I_{kj}}$$

$$
\begin{aligned}
[I_{\alpha\beta}, I_{\gamma\rho}]_{pq} &= (I_{\alpha\beta}I_{\gamma\rho})_{pq} - (I_{\gamma\rho}I_{\alpha\beta})_{pq} \\
&= \sum_m (I_{\alpha\beta})_{pm}(I_{\gamma\rho})_{mq} - \sum_n (I_{\gamma\rho})_{pn}(I_{\alpha\beta})_{nq} \\
&= \sum_m \left(\mathrm{i}\delta_{\alpha p}\delta_{\beta m} \cdot \mathrm{i}\delta_{\gamma m}\delta_{\rho q}\right) - \sum_n \left(\mathrm{i}\delta_{\gamma p}\delta_{\rho n} \cdot \mathrm{i}\delta_{\alpha n}\delta_{\beta q}\right) \\
&= -\delta_{\alpha p}\delta_{\beta k}\delta_{\rho q} + \delta_{\gamma p}\delta_{\rho i}\delta_{\beta q} \\
&= -\delta_{\beta k}(\delta_{\alpha p}\delta_{\rho q}) + \delta_{\rho i}(\delta_{\gamma p}\delta_{\beta q}) \\
&= -\delta_{\beta\gamma}(I_{\alpha\rho})_{pq} + \delta_{\rho\alpha}(I_{\gamma\beta})_{pq} \\
&= \delta_{\rho\alpha}(I_{\gamma\beta})_{pq} - \delta_{\beta\gamma}(I_{\alpha\rho})_{pq}
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\boxed{[I_{\alpha\beta}, I_{\gamma\rho}] = \delta_{\rho\alpha}I_{\gamma\beta} - \delta_{\beta\gamma}I_{\alpha\rho}}
$$

$$
\begin{aligned}
[I_{ij}, I_{\alpha\beta}]_{pq} &= (I_{ij}I_{\alpha\beta})_{pq} - (I_{\alpha\beta}I_{ij})_{pq} \\
&= \sum_m (I_{ij})_{pm}(I_{\alpha\beta})_{mq} - \sum_n (I_{\alpha\beta})_{pn}(I_{ij})_{nq} \\
&= \sum_m \left(\delta_{ip}\delta_{jm} \cdot \mathrm{i}\delta_{\alpha m}\delta_{\beta q}\right) - \sum_n \left(\mathrm{i}\delta_{\alpha p}\delta_{\beta n} \cdot \delta_{in}\delta_{jq}\right) \\
&= \mathrm{i}\left(\delta_{ip}\delta_{j\alpha}\delta_{\beta q} - \delta_{\alpha p}\delta_{\beta i}\delta_{jq}\right) \\
&= \mathrm{i}\left[\delta_{j\alpha}\left(\delta_{ip}\delta_{\beta q}\right) - \delta_{\beta i}\left(\delta_{\alpha p}\delta_{jq}\right)\right] \\
&= \mathrm{i}\left[\delta_{j\alpha}(\delta_{i\beta})_{pq} - \delta_{\beta i}(\delta_{\alpha j})_{pq}\right]
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\boxed{[I_{ij}, I_{\alpha\beta}] = \mathrm{i}\left(\delta_{j\alpha}I_{i\beta} - \delta_{\beta i}I_{\alpha j}\right)}
$$

4-1-3

> 求 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 群的生成元及其对易关系。

表示矩阵为:

$$
D(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, \ \det D(\alpha) = 1 \Longrightarrow \alpha_4 = \frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}
$$

$$
D(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} \end{bmatrix}
$$

恒元对应的群参数:

$$
D(\alpha_0) = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}) = (1, 0, 0)
$$

生成元:

$$
I_1 \equiv \left.\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \left.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-(1+\alpha_2\alpha_3)}{\alpha_1^2} \end{bmatrix}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$I_2 \equiv \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_2}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \end{bmatrix}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 \equiv \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_3}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{bmatrix}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

生成元对易关系：

$$\begin{aligned} [I_1, I_2] &= I_1 I_2 - I_2 I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I_2, I_3] &= I_2 I_3 - I_3 I_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I_3, I_1] &= I_3 I_1 - I_1 I_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2I_3 \end{aligned}$$

4-1-4

> 求 $\mathrm{SO}(3)$ 群的生成元及其对易关系。

指数表示：

$$D(\omega) = C_{\hat{n}(\theta,\varphi)}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases}\omega_1 = \omega\sin\theta\cos\varphi \\ \omega_2 = \omega\sin\theta\sin\varphi \\ \omega_3 = \omega\cos\theta\end{cases}$$

只有当 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0,0,0)$ 时，$D(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}\mathrm{T}_\mathrm{i}} = E$。因此可选择群参数 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 对应的指数表示来求生成元。

生成元：

$$I_1 \equiv \frac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_1}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$I_2 \equiv \frac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_2}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$I_3 \equiv \frac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_3}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}\bigg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_3 = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

对易关系：

$$\begin{aligned}[I_1, I_2] &= I_1 I_2 - I_2 I_1 \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= I_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[I_2, I_3] &= I_2 I_3 - I_3 I_2 \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \\ &= I_1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[I_3, I_1] &= I_3 I_1 - I_1 I_3 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned}
$$

综上，生成元对易关系可统一写为：

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$$

4-1-5（选做）

> 求 $\mathrm{SU}(3)$ 群的生成元及其对易关系。

4-1-6

> 求 $\mathrm{SU}(n)$ 群和 $\mathrm{SO}(n)$ 群的阶。

$\mathrm{SU}(n)$ 群的阶

$$\mathrm{SU}(n) = \left\{ A | A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \det A = 1, A^\dagger A = I \right\}$$

每一个矩阵元都是复数，需要 1 个自由度描述，而 $\det A = 1$ 给出 1 个约束方程，$A^\dagger A = I$ 给出 n^2 个独立约束方程，于是 $\mathrm{SU}(n)$ 群的阶为：

$$2n^2 - 1 - n^2 = n^2 - 1$$

$\mathrm{SO}(n)$ 群的阶

$$\mathrm{SO}(n) = \left\{ A | A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \det A = 1, A^\mathrm{T} A = I \right\}$$

每一个矩阵元都是实数，需要 1 个自由度描述，$A^\mathrm{T} A = I$ 给出 $(n+1)n/2$ 个独立的约束方程，而当 $A^\mathrm{T} A = I$ 时，$\det A$ 不独立，于是 $\mathrm{SU}(n)$ 群的阶为：

$$n^2 - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

4-1-7

> 给出四维时空中洛伦兹群和庞加莱群的描述，并分别求这两个群的阶。

洛伦兹群

洛伦兹群是所有保持闵氏度规不变的线性变换的集合：

$$\mathrm{O}(1,3)=\left\{\Lambda|\lambda\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{R}),g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=g_{\rho\sigma}\right\}$$

洛伦兹群有 3 个绕 x,y,z 轴转动和 3 个沿 x,y,z 轴 boost，因此其阶为 6

庞加莱群

庞加莱群是平移群与洛伦兹群的半直积。等距同构是一种事物在事件间的时空轨迹上的移动方式，而这样做是不会影响原时的。庞加莱群描述了这种在闵可夫斯基时空中的等距同构，包括时间上的平移、在三维空间中任一维上的平移、在三条空间轴上任一条的（定角）旋转，或三维任一方向上的直线性洛伦兹变换，共 10 种移动方式。

因此，庞加莱群的群阶为 10

4-1-8

> 给出 $2n$ 维复/实辛群，即 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$/$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 群的描述（必做），并求这两个群的阶（选做）。

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 群

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ 群是由所有满足如下条件的 $2n\times 2n$ 复矩阵 A 组成的群：

$$A^{\mathrm{T}}JA=J$$

其中，

$$J=\begin{vmatrix}\mathbf{0} & I_{n\times n}\\ -I_{n\times n} & \mathbf{0}\end{vmatrix}$$

$I_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 的单位矩阵。

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 群

$\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 群是由所有满足如下条件的 $2n\times 2n$ 实矩阵 A 组成的群：

$$A^{\mathrm{T}}JA=J$$

其中，

$$J=\begin{vmatrix}\mathbf{0} & I_{n\times n}\\ -I_{n\times n} & \mathbf{0}\end{vmatrix}$$

$I_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 的单位矩阵。

4-1-9

> 给出 $\mathrm{U}(n,m)$ 群和 $\mathrm{O}(n,m)$ 群的描述（必做），并求两个群的阶（选做）

$\mathrm{U}(n,m)$ 群

定义 $n+m$ 维复空间中向量长度的平方为：

$$\|z\|^2\equiv|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2-|z_{n+1}|^2-\cdots-|z_{n+m}|^2$$

引入度规张量 g_{ij}，其定义为：

$$g_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & , i=j=1,2,\cdots,n \\ -1 & , i=j=n+1,n+2,\cdots,n+m \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

则：

$$\|z\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+m} g_{ij} z_i^* z_j$$

所有保持 $\|z\|^2$ 不变的变换的全体构成的群称为 $\mathrm{U}(n,m)$ 群。

$\mathrm{O}(n,m)$ 群

定义 $n+m$ 维实空间中向量长度的平方为：

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 - \cdots - x_{n+m}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n+m} g_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

所有保持 $\|x\|^2$ 不变的变换的全体构成的群称为 $\mathrm{O}(n,m)$ 群。

4-2

4-2-1

> 证明李群的结构常数满足如下的关系：$C_{ij}^m C_{km}^n + C_{jk}^m C_{im}^n + C_{ki}^m C_{jm}^n = 0$

一方面，

$$\begin{aligned} &[[I_i,I_j],I_k] + [[I_j,I_k],I_i] + [[I_k,I_i],I_j] \\ =&[I_iI_j - I_jI_i, I_k] + [I_jI_k - I_kI_j, I_i] + [I_kI_i - I_iI_k, I_j] \\ =&(I_iI_jI_k - I_jI_iI_k - I_kI_iI_j + I_kI_jI_i) + (I_jI_kI_i - I_kI_jI_i - I_iI_jI_k + I_iI_kI_j) + (I_kI_iI_j - I_iI_kI_j - I_jI_kI_i + I_jI_iI_k) \\ =&0 \end{aligned}$$

另一方面，由 $[I_i,I_j] = C_{ij}^k I_k$ 可得：

$$\begin{aligned} [[I_i,I_j],I_k] + [[I_j,I_k],I_i] + [[I_k,I_i],I_j] &= [C_{ij}^m I_m, I_k] + [C_{jk}^m I_m, I_i] + [C_{ki}^m I_m, I_j] \\ &= C_{ij}^m C_{mk}^n I_n + C_{jk}^m C_{mi}^n I_n + C_{ki}^m C_{mj}^n I_n \\ &= (C_{ij}^m C_{mk}^n + C_{jk}^m C_{mi}^n + C_{ki}^m C_{mj}^n) I_n \end{aligned}$$

因此：

$$(C_{ij}^m C_{mk}^n + C_{jk}^m C_{mi}^n + C_{ki}^m C_{mj}^n) I_n = 0$$

由于I_n 是线性无关的，因此：

$$C_{ij}^m C_{mk}^n + C_{jk}^m C_{mi}^n + C_{ki}^m C_{mj}^n = 0$$

又 $C_{mk}^n = -C_{km}^n$，于是：

$$C_{ij}^m C_{km}^n + C_{jk}^m C_{im}^n + C_{ki}^m C_{jm}^n = 0$$