分别写出自由电磁场与一般电磁场的拉格朗日密度,并变分得到场方程。

自由电磁场的拉氏密度为:

$$\mathscr{L}_{0}\left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)=-rac{1}{4\mu_{0}}F_{\mu
u}F_{\mu
u}$$

一般电磁场拉氏密度为:

$$\mathscr{L}\left(A_{\mu},\partial_{\mu}A_{
u}
ight)=\mathscr{L}_{0}+\mathscr{L}_{e}=-rac{1}{4\mu_{0}}F_{\mu
u}F_{\mu
u}+J_{\mu}A_{\mu}$$

用场量表示的最小作用量原理(哈密顿原理):

$$\delta \int \mathscr{L} \left( arphi_{\sigma}(x_{
u}), \partial_{\mu} arphi_{\sigma}(x_{
u}) 
ight) \mathrm{d}\Omega = 0$$

拉式密度的变分  $\delta \mathcal{L}$  为:

$$\begin{split} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L} \left[ \varphi_{\sigma} + \delta \varphi_{\sigma}, \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} + \delta \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right) \right] - \mathcal{L} \left[ \varphi_{\sigma}, \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\sigma}} \delta \varphi_{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \delta \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\sigma}} \delta \varphi_{\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \partial_{\mu} \left( \delta \varphi_{\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\sigma}} \delta \varphi_{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \left( \delta \varphi_{\sigma} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \right) \delta \varphi_{\sigma} \end{split}$$

代入最小作用量原理,可得:

$$\int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\sigma}} \delta \varphi_{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \left( \delta \varphi_{\sigma} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} \varphi_{\sigma} \right)} \right) \delta \varphi_{\sigma} \right\} d\Omega = 0$$

利用矢量散度积分公式,并结合超曲面上  $\delta arphi|_{\partial \Omega} = 0$  有:

$$\int\limits_{\Omega} rac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[ rac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} arphi_{\sigma} 
ight)} \left( \delta arphi_{\sigma} 
ight) 
ight] \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\partial \Omega} rac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} arphi_{\sigma} 
ight)} \delta arphi_{\sigma} \mathrm{d}\Omega_{\mu} = 0$$

于是最小作用量原理给出的方程可化简为:

$$\int \left[ rac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( rac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left( \partial_{\mu} arphi_{\sigma} 
ight)} 
ight) - rac{\partial \mathscr{L}}{\partial arphi_{\sigma}} 
ight] \delta arphi_{\sigma} \mathrm{d}\Omega = 0$$

由  $\delta\varphi_{\sigma}$  的任意性就得到场量表示的拉格朗日方程:

$$\left[rac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(rac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}arphi_{\sigma}
ight)}
ight)-rac{\partial\mathscr{L}}{\partialarphi_{\sigma}}=0
ight]$$

把自由电磁场的拉式密度代入电磁场的拉格朗日方程可得:

$$rac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(rac{\partial\left(F_{lphaeta}F_{lphaeta}
ight)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)}
ight)-rac{\partial\left(F_{lphaeta}F_{lphaeta}
ight)}{\partial A_{
u}}=0$$

由于  $\mathscr{L}_0 = -F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4\mu_0$  仅为  $\partial_\mu A_
u$  的函数,因此:

$$rac{\partial \left(F_{lphaeta}F_{lphaeta}
ight)}{\partial A_{
u}}=0$$

再:

$$egin{aligned} rac{\partial \left(F_{lphaeta}F_{lphaeta}
ight)}{\partial \left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)} &= 2F_{lphaeta}rac{\partial}{\partial \left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)}\left(F_{lphaeta}
ight) \ &= 2F_{lphaeta}rac{\partial}{\partial \left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)}\left(\partial_{lpha}A_{eta} - \partial_{eta}A_{lpha}
ight) \ &= 2F_{lphaeta}\left(\delta_{\mulpha}\delta_{
ueta} - \delta_{\mueta}\delta_{
ulpha}
ight) \ &= 2\left(F_{\mu
u} - F_{
u\mu}
ight) \ &= 2\left(F_{\mu
u} + F_{\mu
u}
ight) \ &= 4F_{\mu
u} \end{aligned}$$

综上, 自由电磁场的场方程为:

$$\partial_{\mu}F_{\mu
u}=0$$

把一般电磁场的拉式密度代入拉格朗日方程,可得:

$$rac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(rac{\partial\left(-F_{lphaeta}F_{lphaeta}/4\mu_{0}+J_{lpha}A_{lpha}
ight)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{
u}
ight)}
ight)-rac{\partial\left(-F_{lphaeta}F_{lphaeta}/4\mu_{0}+J_{lpha}A_{lpha}
ight)}{\partial A_{
u}}=0$$

注意到:

$$\begin{split} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \frac{\partial \left( -F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} / 4\mu_{0} \right)}{\partial \left( \partial_{\mu} A_{\nu} \right)} \right) - \frac{\partial \left( -F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} / 4\mu_{0} \right)}{\partial A_{\nu}} &= -\frac{1}{\mu_{0}} \partial_{\mu} F_{\mu\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left( \frac{\partial \left( J_{\alpha} A_{\alpha} \right)}{\partial \left( \partial_{\mu} A_{\nu} \right)} \right) - \frac{\partial \left( J_{\alpha} A_{\alpha} \right)}{\partial A_{\nu}} &= -J_{\alpha} \delta_{\alpha\nu} = -J_{\nu} \end{split}$$

综上,得到一般电磁场的场方程:

$$\partial_{\mu}F_{\mu
u}=-\mu_{0}J_{
u}$$

写出协变形式的洛伦兹力公式(分别写点电荷与力密度形式的协变洛伦兹公式),并推导四维协变形式的能量守恒与动量守恒。

点电荷协变洛伦兹力公式:

$$K_{\mu}=eF_{\mu
u}U_{
u}$$

力密度协变洛伦兹力公式:

$$f_{\mu}=F_{\mu
u}J_{
u}$$

洛伦兹力密度和它的功率可构成一个四维矢量:

$$f_{\mu}=F_{\mu
u}J_{
u}$$

麦克斯韦方程:

$$\partial_{
u}F_{\mu
u} = \mu_0 J_{\mu}$$

洛伦兹力密度可写为:

$$\mu_0 f_\mu = \mu_0 F_{\mu\nu} J_\nu = F_{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda \left( F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} \right) - F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu}$$

考虑最后一项,  $\nu$ ,  $\lambda$  是求和指标, 于是:

$$F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}=F_{\lambda
u}\partial_{
u}F_{\mu\lambda}=rac{1}{2}\left(F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}+F_{\lambda
u}\partial_{
u}F_{\mu\lambda}
ight)$$

利用  $F_{\mu\nu}$  的反对称性:

$$F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}=rac{1}{2}\left(F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}+F_{\lambda
u}\partial_{
u}F_{\mu\lambda}
ight)=rac{1}{2}\left(F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}+F_{
u\lambda}\partial_{
u}F_{\lambda\mu}
ight)=rac{1}{2}F_{
u\lambda}\left(\partial_{\lambda}F_{\mu
u}+\partial_{
u}F_{\lambda\mu}
ight)$$

把另一条麦克斯韦方程代入可得:

$$F_{
u\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu
u}=rac{1}{2}F_{
u\lambda}\left(\partial_{\lambda}F_{\mu
u}+\partial_{
u}F_{\lambda\mu}
ight)=-rac{1}{2}F_{
u\lambda}\left(\partial_{\mu}F_{
u\lambda}
ight)=-rac{1}{4}\partial_{\mu}\left(F_{
u\lambda}F_{
u\lambda}
ight)$$

于是洛伦兹力密度公式可写为:

$$\mu_{0}f_{\mu} = \partial_{\lambda} \left( F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} \right) - F_{\nu\lambda}\partial_{\lambda}F_{\mu\nu}$$

$$= \partial_{\lambda} \left( F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} \right) + \frac{1}{4}\partial_{\mu} \left( F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda} \right)$$

$$= \partial_{\lambda} \left( F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} \right) + \frac{1}{4}\partial_{\mu} \left( F_{\nu\tau}F_{\nu\tau} \right)$$

$$= \partial_{\lambda} \left( F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} \right) + \frac{1}{4}\partial_{\lambda}\delta_{\mu\lambda} \left( F_{\nu\tau}F_{\nu\tau} \right)$$

$$= \partial_{\lambda} \left( F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau} \right)$$

#### 引入电磁场的能量动量张量 $T_{\mu\lambda}$ :

$$T_{\mu\lambda} = rac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu
u} F_{
u\lambda} + rac{1}{4} \delta_{\mu\lambda} F_{
u au} F_{
u au} 
ight)$$

则四维形式的能量动量守恒为:

$$oxed{f_{\mu} = \partial_{\lambda} T_{\mu\lambda}}$$

带电粒子电荷量为 q, 速度为 0.9c, 在某介质中作匀速直线运动,已知介质中 n=1.3

1

写出带电粒子的电磁势 (即李纳-维谢尔势)

设介质的介电常数为  $\varepsilon$ ,则李纳-维谢尔势为:

$$egin{aligned} arphi(ec{x},t) &= rac{1}{4\piarepsilon} rac{q}{r-ec{r}\cdotec{v}/\left(c/n
ight)} \ &= rac{1}{4\piarepsilon} rac{q}{r-ec{r}\cdot\left(0.9cec{ ext{e}}_q
ight)/\left(c/1.3
ight)} \ &= rac{1}{4\piarepsilon} rac{q}{r-1.17ec{r}\cdotec{ ext{e}}_q} \ &= rac{1}{4\piarepsilon} rac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdotec{ ext{e}}_q
ight)} \end{aligned}$$

$$egin{aligned} ec{A}(ec{x},t) &= rac{\mu}{4\pi} rac{q ec{v}}{r - ec{r} \cdot ec{v}/\left(c/n
ight)} \ &= rac{9 \mu}{40\pi} rac{q c ec{ ext{e}}_q}{r\left(1 - 1.17 \hat{r} \cdot ec{ ext{e}}_q
ight)} \end{aligned}$$

其中, $\vec{\mathrm{e}}_q$  是粒子速度方向上的单位矢量; $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t'),t'=t-r/\left(c/n\right)=t-1.3r/c$ 

2

仅考虑切伦科夫辐射,在哪个方向上有辐射?

只有当粒子运动速度大于介质中光速才会有切伦科夫辐射,这里是满足的。

辐射角  $\theta_c$  满足:

$$\cos \theta_c = \frac{\tilde{c}}{v} = \frac{c}{nv} = \frac{c}{1.3 \cdot 0.9c} = \frac{100}{117}$$

即:

$$\theta_c = \arccos \frac{100}{117}$$

3

t=1s 时,

**(1)** 

写出 t' 的表达式;

在介质中,

$$t'=t-\left|ec{x}-ec{x}_{q}(t')
ight|/\left(c/n
ight)=1-1.3\left|ec{x}-ec{x}_{q}(t')
ight|/c$$

**(2)** 

t'与t哪个大;

(3)

原点处  $\vec{x} = \vec{0}$ ,则 t' 满足:

$$t' = 1 - 1.17 |t'|$$

若 t'>0,可解得:  $t'=100/217\,\mathrm{s}$ ;若 t'<0,可解得:  $t'=-100/17\,\mathrm{s}$ 因此, t'共有 2 种可能的值。

**(4)** 

计算原点处的电势。

设0s时粒子处于原点。

则:

$$\vec{x}_q(t) = 0.9ct\vec{\mathrm{e}}_q$$

当  $\vec{x} = \vec{0}, t = 1 \text{ s 时},$ 

若 t' = 100/217 s,则:

$$ec{r} = ec{x} - ec{x}_q(t') = -rac{90c}{217} ec{
m e}_q \ \hat{r} = -ec{
m e}_q \ r = |ec{x} - ec{x}_q(t')| = rac{90}{217} c \ \hat{r} \cdot ec{
m e}_q = -ec{
m e}_q \cdot ec{
m e}_q = -1$$

原点处的电势为:

$$egin{align} arphi(ec{0},t')igg|_{t'=100/217\,\mathrm{s}} &= rac{1}{4\piarepsilon}rac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdotec{\mathrm{e}}_q
ight)} \ &= rac{5q}{18\piarepsilon c} \end{aligned}$$

若 t' = -100/17 s, 则:

$$ec{r}=ec{x}-ec{x}_q(t')=rac{90c}{17}ec{\mathrm{e}}_q \ \hat{r}=ec{\mathrm{e}}_q \ r=ertec{x}-ec{x}_q(t')ert=rac{90}{17}c$$

$$\hat{r} \cdot \vec{\mathbf{e}_q} = \vec{\mathbf{e}}_q \cdot \vec{\mathbf{e}}_q = 1$$

原点处的电势为:

$$egin{aligned} arphi(ec{0},t')igg|_{t'=-100/17\,\mathrm{s}} &= rac{1}{4\piarepsilon}rac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdotec{\mathrm{e}}_q
ight)} \ &= -rac{5q}{18\piarepsilon c} \end{aligned}$$

我也不知道为啥会是这个奇怪的结果。

## 兀

#### 1

太阳光由太阳光球层发出。从光在等离子体中的传播规律出发,结合太阳光谱性质,判断光球层中的电子密度与金属铜中的自由电子密度哪个大。(金属铜的截止频率在X光频段)。

由于可见光可以在光球层中传播,因此可见光频率  $\omega$  大于光球层截止频率  $\omega_{p1}$  ,即: $\omega>\omega_{p1}$ 

而 X 光频率大于可见光频率,而金属铜的截止频率在X光频段,因此金属铜的截止频率  $\omega_{p2}$  大于光球层的截止频率  $\omega_{p1}$ 。

截止频率  $\omega_p$  与电子密度  $n_0$  的关系为:

$$\omega_p = \sqrt{rac{n_0 e^2}{m_e arepsilon_0}}$$

因此金属铜的自由电子密度大。

### 2

光球层的质量密度  $ho=3 imes10^{-4}~{
m kg\cdot m^{-3}}$ ,假设光球层由等量的质子与电子组成,而质子质量  $m_p=1~{
m GeV}\sim2 imes10^{-27}~{
m kg}$ ,求光球层的电子数密度  $n_e$ .

电子质量远小于质子质量,因此质子数密度  $n_p$  为:

$$n_ppprox
ho/m_p=1.5 imes10^{23}~{
m m}^{-3}$$

由于光球层由等量的质子与电子组成,因此电子数密度  $n_e$  为:

3

在国际单位制下,精细结构常数  $\alpha=e^2/\left(4\pi\varepsilon_0\hbar c\right)=1/137$  是无量纲常数。自然单位制允许选择  $e,\varepsilon_0,\hbar,c$  中的 3 个物理常量进行归一化。在自然单位制下,取  $1=\varepsilon_0=\hbar=c$ ,则  $\alpha=e^2/(4\pi)=1/137$ . 已知自然单位制下  $m_e=0.5$  MeV,197 fm·MeV =1,1 fm  $=10^{-15}$  m,求光球层的截止频率  $\omega_p=\sqrt{\frac{e^2n_0}{m_e}}$ 

自然单位制就是在国际单位制基础上加了几个附加条件。

如规定 c=1, 就等价于国际单位制中如下的附加条件:

$$c=3 imes 10^8 ext{ m/s}=1\Longrightarrow 1 ext{ s}=3 imes 10^8 ext{ m}, \quad 1 ext{ m}=rac{1}{3} imes 10^{-8} ext{ s}$$

自然单位制下,

$$e^2 = \frac{4\pi}{137}$$

由于在国际单位制下光球层截止频率的单位为  $s^{-1}$ ,因此在自然单位制下可如下配凑回到国际单位制:

$$\begin{split} \omega_p &= \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}}{0.5 \text{ MeV}}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}}{0.5 \cdot \frac{1}{197} \text{ (fm)}^{-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot 197 \cdot 3}{137}} \sqrt{10^8 \text{ m}^{-2}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot 197 \cdot 3}{137}} \sqrt{10^8 \left(\frac{1}{3} \times 10^{-8} \text{ s}\right)^{-2}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi \cdot 197 \cdot 3 \cdot 9}{137}} 10^{12} \text{ s}^{-1} \\ &\approx 2.2 \times 10^{13} \text{ s}^{-1} \\ &= 2.2 \times 10^{13} \text{ Hz} \end{split}$$

# 五

**(1)** 

简述电磁AB效应;

见试卷参考答案。

**(2)** 

简述超导体性质特征。

零电阻率、完全抗磁性、磁通量子化、具有临界温度、临界磁场、临界电流。

(3)

根据伦敦方程求出在超导体中的透射深度;

#### 伦敦第二方程:

$$abla imes ec{J}_s = -lpha ec{B}$$

在准静态近似下,

$$abla imes ec{B} = \mu_0 ec{J}_s$$

根据:

$$abla imes \left( 
abla imes ec{B} 
ight) = 
abla \left( 
abla \cdot ec{B} 
ight) - 
abla^2 ec{B}$$
 $abla \cdot ec{B} = 0$ 

以及稳态情形的电荷守恒定律:

$$abla \cdot \vec{J_s} = 0$$

可得:

$$abla^2ec{B} = -
abla imes\left(
abla imesec{B}
ight) = -
abla imes\left(\mu_0ec{J}_s
ight) = \mu_0lphaec{B} \equiv rac{ec{B}}{\lambda_L^2}$$

$$abla^2ec{J}_s=rac{ec{J}_s}{\lambda_L^2}$$

$$oxed{\lambda_L \equiv \sqrt{rac{1}{\mu_0 lpha}} = \sqrt{rac{m}{\mu_0 n_s e^2}}}$$

其中, $\lambda_L$  称为伦敦穿透深度。

考虑无限大平板,解为:

$$ec{B}(x) = ec{B}_0 \exp\left(-x/\lambda_L
ight)$$

**(4)** 

半径为 R 处于理想迈斯纳态的超导球置于均匀磁场中,求外部真空的磁场分布。

半径为  $r_0$  的处于理想迈斯纳态的超导球放置于均匀的外磁场  $\vec{H}_0$  中,求超导球体内外的磁场和超导面电流分布。

采用磁介质观点,认为理想超导体是磁导率  $\mu=0$  的完全抗磁体,超导面电流是磁化电流,因此全空间中自由电流  $\vec{J}_{\mathrm{f}}=\vec{0}$ ,磁场强度  $\vec{H}$  满足方程:

$$abla imes ec{H} = ec{J}_{
m f} = ec{0}$$

引入磁标势  $\varphi$  满足:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi$$

上面定义的磁标势 arphi 自动满足了磁场强度  $ec{H}$  所要满足的方程。

球内区域记为 1,球外区域记为 2.

认为超导球是线性均匀介质,则在球内外磁标势都满足拉普拉斯方程:

$$abla^2 arphi_1 = 0, \quad r < r_0$$

$$abla^2 arphi_2 = 0, \quad r > r_0$$

在分界面  $r=r_0$  处磁标势要满足连续性边界条件:

$$\left.arphi_{1}
ight|_{r=r_{0}}=arphi_{2}
ight|_{r=r_{0}}$$

利用磁高斯定理可得另一个边界条件:

$$\left. \mu rac{\partial arphi_1}{\partial r} 
ight|_{r=r_0} - \mu_0 rac{\partial arphi_2}{\partial r} 
ight|_{r=r_0} = 0$$

超导球内  $\mu = 0$ , 有:

$$\left.rac{\partial arphi_2}{\partial r}
ight|_{r=r_0}=0$$

取外磁场  $\vec{H}_0$  的方向为极轴方向,则体系具有轴对称性。磁标势的形式解可写为:

$$arphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + rac{B_l}{r^{l+1}} 
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta), \quad r < r_0$$

$$arphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l r^l + rac{D_l}{r^{l+1}} 
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta), \quad r > r_0$$

取未放入超导球时球心处磁标势为零,在无穷远处, $ec{H} 
ightarrow ec{H}_0, arphi_2 
ightarrow -H_0 r\cos heta$ ,因此:

$$arphi_2 = -H_0 r \cos heta + \sum_{l=0}^{\infty} rac{D_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos heta), \quad r > r_0$$

考虑边界条件:

$$\left.rac{\partial arphi_2}{\partial r}
ight|_{r=r_0}=0$$

即:

$$-H_0\cos heta+\sum_{l=0}^{\infty}-(l+1)D_lr_0^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos heta)=0$$

即:

$$\left(-H_0 - 2D_1 r_0^{-3}
ight) \mathrm{P}_1(\cos heta) + \sum_{l=0,2,3,\cdots} -(l+1)D_l r_0^{-(l+2)} \mathrm{P}_l(\cos heta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性可得:

$$D_1 = -rac{H_0 r_0^3}{2}, \quad D_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \cdots$$

因此:

$$egin{aligned} arphi_2 &= -H_0 r\cos heta + \sum_{l=0}^\infty rac{D_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos heta) \ &= -H_0 r\cos heta - rac{H_0}{2} rac{r_0^3}{r^2}\cos heta, \quad r > r_0 \end{aligned}$$

球心处的磁标势不应发散,因此:

$$arphi_1 = \sum_{l=0}^\infty \left(A_l r^l + rac{B_l}{r^{l+1}}
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta) = \sum_{l=0}^\infty A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos heta), \quad B_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

考虑分界面  $r=r_0$  处磁标势要满足边界条件:

$$\left.arphi_{1}
ight|_{r=r_{0}}=arphi_{2}
ight|_{r=r_{0}}$$

代入可得:

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_lr_0^l\mathrm{P}_l(\cos heta)=-H_0r_0\cos heta-rac{H_0r_0}{2}\cos heta=-rac{3}{2}H_0r_0\cos heta$$

注意到  $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ ,将上式整理成各阶勒让德多项式线性叠加的形式:

$$\left(A_1r_0+rac{3}{2}H_0r_0
ight)\mathrm{P}_1(\cos heta)+\sum_{l=0,2,3,\cdots}A_lr_0^l\mathrm{P}_l(\cos heta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性,可得:

$$A_1 = -rac{3}{2}H_0, \quad A_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \cdots$$

因此:

$$arphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos heta) = -rac{3}{2} H_0 r \cos heta$$

综上,整个空间的磁标势分布分:

$$egin{cases} arphi_1 = -rac{3}{2}H_0r\cos heta &, \quad r < r_0 \ arphi_2 = -H_0r\cos heta - rac{H_0}{2}rac{r_0^3}{r^2}\cos heta &, \quad r > r_0 \end{cases}$$

球内磁场强度:

$$egin{aligned} ec{H}_1 &= -
abla arphi_1 \ &= rac{3}{2} H_0 
abla (r\cos heta) \ &= rac{3}{2} H_0 
abla (z) \ &= rac{3}{2} H_0 ec{\mathbf{e}}_z \ &= rac{3}{2} ec{H}_0 \end{aligned}$$

球内磁化强度:

$$egin{aligned} ec{M}_1 &= -ec{H}_1 \ &= -rac{3}{2}ec{H}_0 \end{aligned}$$

超导面电流分布:

$$ec{lpha}_M = \left(ec{M}_1 - ec{M}_2
ight) imes ec{n}_{1 
ightarrow 2} = \left(-rac{3}{2}ec{H}_0 - ec{0}
ight) imes ec{ ext{e}}_r = -rac{3}{2}ec{H}_0 imes ec{ ext{e}}_r = -rac{3}{2}H_0 \sin heta ec{ ext{e}}_arphi$$

球外磁场强度:

$$egin{aligned} ec{H}_2 &= -
abla arphi_2 \ &= 
abla \left( H_0 r \cos heta + rac{H_0}{2} rac{r_0^3}{r^2} \cos heta 
ight) \ &= 
abla \left( ec{H}_0 \cdot ec{r} + rac{r_0^3}{2} rac{ec{H}_0 \cdot ec{r}}{r^3} 
ight) \ &= ec{H}_0 + rac{r_0^3}{2} rac{\left[ ec{H}_0 - 3 \left( ec{H}_0 \cdot \hat{r} 
ight) \hat{r} 
ight]}{r^3} \end{aligned}$$