兰州大学 2023～2024 学年第 一 学期

期末考试试卷

课程名称：电磁学基础 IIIA 任课教师：杨捷、刘占伟、李峰、赵力

学院：________ 专业：________ 年级：________

姓名：________ 校园卡号：________

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

一、（10 分）分别写出自由电磁场与一般电磁场的拉格朗日密度，并变分得到场方程。

二**（20 分）**写出协变形式的洛伦兹力公式（分别写点电荷与力密度形式的协变洛伦兹公式），并推导四维协变形式的能量守恒与动量守恒。

三、（30 分）带电粒子电荷量为 q，速度为 0.9c，在某介质中作匀速直线运动，已知介质中 n=1.3.

1.写出带电粒子的电磁势（即李娜——维谢尔势）

2.仅考虑切伦科夫辐射，在哪个方向上有辐射？

3.t=1s 时：

（1）写出 t' 的表达式；

（2）t' 比 t 哪个大；

（3）在原点处计算 t'，有几种可能的值？

（4）计算原点处的电势。

四、（20 分）等离子体

1. 我们日常接受到的太阳光都由太阳的光球层发出。从光在等离子体中的传播规律出发，结合太阳光谱性质，判断光球层中的电子密度与金属铜中的自由电子密度比，哪个大？（金属铜的截止频率在 X 光频段）。

2. 光球层的质量密度约 $3\times10^{-4}kg/m^3$。假设光球层由等量的质子与电子组成，而质子质量约 $1GeV\sim2\times10^{-27}kg$，求光球层的电子数密度。

3. 给定精细结构常数 $\alpha=e^2/4\pi=1/137$，电子质量 $m_e\sim0.5MeV$，且在自然单位制下 $1=\hbar c\sim197\,fm\cdot MeV=c\sim3\times10^8m/s$，$1\,fm=10^{-15}m$，求光球层的截止频率 $\omega_p=\sqrt{\dfrac{n_0e^2}{m_e}}$

五、（20 分）AB 效应与超导体的电磁性质

（1）简述电磁 AB 效应；

（2）简述超导体性质特征。

（3）根据伦敦方程求出在超导体中的透射深度；

（4）半径为 R、处于理想 Meissner 态的超导球置于均匀磁场中，求外部真空的磁场分布。

参考提示与电磁 3A 期末备考建议

期末考试是四位老师一起出题。

杨捷老师的题目大多来自 PPT 与作业的类似思路或原题，因此复习时要认真做一遍作业，自己推导 PPT 的公式和例题。

刘占伟老师教的是带电粒子电磁势与辐射方面的内容，这部分要细心推导公式，课后习题要尽量自己写，今年考察内容非常放水，但以后的考试不一定会还是这个难度。

李峰老师的等离子体难度不小，但今年也特别放水，以往考察过 Drude 模型，对数学有一定要求，这门课经常用到傅里叶变换求色散关系，这部分内容要重点看。

赵力老师考察的内容大部分为讲义上的例题和思考题，课上认真听讲，自己做一遍经典例题就问题不大。

一、（10 分）

自由电磁场的拉格朗日量密度：$L=-\dfrac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$

一般电磁场的拉格朗日量密度：$L'=-\dfrac{1}{4\mu_0}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}+J_\alpha A_\alpha$

计算偏微分：

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu}=-\frac{1}{4\mu_0}\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})}{\partial A_\mu}=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial A_\mu}$$

因为$F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$，则$\dfrac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial A_\mu}=0$，故$\dfrac{\partial L}{\partial A_\mu}=0$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)}{(\partial_\mu A_\nu)}$$

$$=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}-\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu})=-\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}$$

故代入自由电磁场的拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=0$$

得

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$$

接下来计算

$$\frac{\partial L'}{\partial A_\mu}=\frac{\partial(J_\alpha A_\alpha)}{\partial A_\mu}=J_\mu$$

$$\frac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}+0=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)}{(\partial_\mu A_\nu)}$$

$$=-\frac{1}{2\mu_0}F_{\alpha\beta}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}-\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu})=-\frac{1}{\mu_0}F_{\mu\nu}$$

故由$\dfrac{\partial L'}{\partial A_\nu}-\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial L'}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}=0$得

$$J_\nu+\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$$

整理得

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\nu$$

二、（20 分）

点电荷：$K_\mu=eF_{\mu\nu}u_\nu$

电磁场：$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu$

能动张量表达式$T_{\mu\nu}=\dfrac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}+\dfrac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)$

则

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left[\partial_\mu(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu})+\frac{1}{4}\partial_\nu(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})\right]$$

单独计算

$$\partial_\mu(F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu})=F_{\alpha\nu}\partial_\mu F_{\mu\alpha}+F_{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\alpha\nu}=-\mu_0 F_{\alpha\nu}J_\alpha+F_{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\alpha\nu}$$

而

$$\begin{aligned}F_{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\alpha\nu}&=F_{\alpha\mu}\partial_\alpha F_{\mu\nu}=F_{\mu\alpha}\partial_\alpha F_{\nu\mu}\\&=\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}(\partial_\alpha F_{\nu\mu}+\partial_\mu F_{\alpha\nu})\\&=-\frac{1}{2}F_{\mu\alpha}\partial_\nu F_{\mu\alpha}\\&=-\frac{1}{4}\partial_\nu(F_{\mu\alpha}F_{\mu\alpha})\end{aligned}$$

前式用到了

$$\partial_\alpha F_{\nu\mu}+\partial_\mu F_{\alpha\nu}+\partial_\nu F_{\mu\alpha}=0$$

故

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=-F_{\alpha\nu}J_\alpha$$

利用四维洛伦兹力公式则有

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=f_\nu$$

此即四维形式的能量动量守恒。

三、（30 分）

1.根据李娜—维谢尔势，粒子的电磁势为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\left(1-\frac{n\vec{R}\cdot\vec{v}}{Rc}\right)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\left(1-1.17\vec{e}_R\cdot\vec{e}_q\right)}$$

$$\vec{A}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{v}}{R\left(1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{Rc}\right)}=\frac{9}{40\pi\varepsilon_0}\frac{qc\vec{e}_q}{R\left(1-1.17\vec{e}_R\cdot\vec{e}_q\right)}$$

2.切连科夫辐射需满足条件

$$v>\frac{c}{n}$$

可验证此题条件满足，故辐射角满足方程

$$1-\frac{nv}{c}\cos\theta=0$$

解得

$$\theta=\arccos\frac{100}{117}$$

此为与速度方向的夹角

3.（1）在介质中，推迟量为

$$t'=t-\frac{nR}{c}$$

其中

$$R=|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|$$

（2）由表达式易知，$R>0$，故

$$t'<t$$

（3）此题中，在原点处

$$\vec{r}=0$$

$$\vec{r}_q(t')=0.9ct'$$

则有方程

$$t'=t-\frac{117}{100}|t'|$$

此时分别考虑

$$t'\geq 0,t<0$$

可得

$$t_1' = \frac{100}{217}s, t_2' = -\frac{100}{17}s$$

可知此时有两种可能的值，这是因为粒子速度比介质中的光速传播地快，导致在负半轴的信息与正半轴某点传播的信息同时到达原点。

（4）分别将两种情况代入式子可得

（i）$t_1' = \frac{100}{217}s$:

$$R(t') = |0.9ct'| = \frac{90}{217}cs$$

而考虑方向问题有 $\vec{e}_R \cdot \vec{e}_q = -1$，则

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R(t')\left(1-1.17\vec{e}_R\cdot\vec{e}_q\right)} = \frac{5q}{18\pi\varepsilon_0}cs^{-1}$$

此即 t=1s 时原点处电势。

（ii）$t_2' = -\frac{100}{17}s$:

$$R(t') = |0.9ct'| = \frac{90}{17}cs$$

此时粒子当时在负半轴，因此 $\vec{e}_R \cdot \vec{e}_q = 1$，则

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R(t')\left(1-1.17\vec{e}_R\cdot\vec{e}_q\right)} = \frac{5q}{18\pi\varepsilon_0}cs^{-1}$$

可以看到，虽然 t' 不同，但结果是相同的，两者并不矛盾。

四、（20 分）

- [10'] 我们日常接受到的太阳光都由太阳的光球层发出。从光在等离子体中的传播规律出发，结合太阳光谱性质，判断光球层中的电子密度与金属铜中的自由电子密度比，哪个大？（金属铜的截止频率在X光频段）。

  光球层内侧的阳光可以穿透光球层向宇宙传播，可见光球层的截止频率在可见光频段以下。而金属铜的截止频率在X光频段。由于截止频率与自由电子密度正相关，因此光球层的电子密度要小于金属铜的自由电子密度。

- [6'] 光球层的质量密度约$3 \times 10^{-4}\ kg \cdot m^{-3}$。假设光球层由等量的质子与电子组成，而质子质量约1 GeV $\sim 2 \times 10^{-27}\ kg$，求光球层的电子数密度。

  假设光球层由等量的质子与电子组成，则电子数密度与质子数密度相等。另一方面，由于质子与电子间巨大的质量差异（1GeV vs 0.5 MeV，两千倍的差距），我们可以忽略电子对光球层质量的贡献。因此质子数密度为质量密度与质子质量之比，约$1.5 \times 10^{23} m^{-3}$

- [4'] 给定精细结构常数 $\alpha \equiv e^2/4\pi = 1/137$，电子质量$m_e \sim 0.5\ MeV$，且在自然单位制下$1 = \hbar c \sim 197\ fm \cdot MeV = c \sim 3 \times 10^8 m/s$，$1 fm = 10^{-15} m$，求光球层的截止频率$\omega_P = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m_e}}$

  $$\omega_P^2 = \frac{e^2 n_0}{m_e} = \frac{4\pi n_0}{137 m_e} \sim \frac{12 \times 1.5 \times 10^{23} m^{-3}}{137 \times 0.5\ MeV} \sim \frac{3 \times 10^{23} \times 10^{-45} fm^{-3}}{10\ MeV}$$
  $$\sim \frac{3 \times 10^{23} \times 10^{-45} fm^{-3}}{10\ MeV} \times 200\ fm \cdot MeV$$
  $$\sim 60 \times 10^{-22} fm^{-2}$$

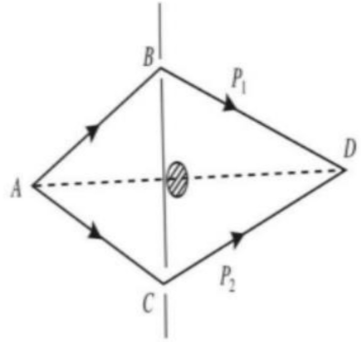
  $$\omega_P \sim 8 \times 10^{-11}\ fm^{-1} = 8 \times 10^{-11} \times 10^{15}\ m^{-1} \sim 8 \times 10^{-11} \times 10^{15}\ m^{-1} \times 3 \times 10^8\ m/s$$
  $$= 2.4 \times 10^{13} Hz$$

  这个截止频率在远红外波段

  （本题只要数量级估算正确即算对）

五、（20 分）

（1）（i）磁 AB 效应：

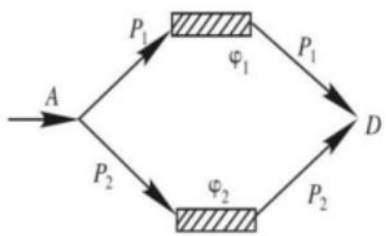


如图所示两束粒子在 A 点分别经过两条路径，于 D 点相交。中间有磁场，从而有磁通量但粒子经过区域无磁场，可推导得角度

$$\delta=-\frac{e}{\hbar c}\oint\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-\frac{e\phi}{\hbar c}$$

是一个可观测量，这个实验可证明磁矢势也是具有可观测效应的。

（ii）电 AB 效应：



如图所示两束粒子在 A 点分别经过两条路径，于 D 点相交。中间圆柱内有电势而无电场，可推导得角度

$$\delta=\frac{e}{\hbar}\int[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]dt$$

是一个可观测量，这个实验可证明电标势也是具有可观测效应的。

（这两个量都是规范不变量）

（2）零电阻率、磁通量子化、完全抗磁性、具有临界温度、临界磁场、临界电流等。

（3）根据伦敦方程

$$\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}=\alpha\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{J}=-\alpha\vec{B}$$

根据静场的麦克斯韦方程组

$$\vec{J}=\nabla\times\vec{B}$$

代入 2 式得

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=-\alpha\vec{B}$$

因为

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

故

$$\nabla^2\vec{B}-\mu_0\alpha\vec{B}=0$$

代入$\alpha=\dfrac{n_s e^2}{m}$则

$$\vec{B}=\vec{B}_0e^{-x\sqrt{\frac{\mu_0 n_s e^2}{m}}}$$

则投射深度为

$$\lambda_L=\sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

（4）由于空间中没有自由电流，可定义磁标势满足

$$\nabla^2\varphi=0$$

$$-\nabla\varphi=\vec{H}$$

故边界条件为

$$\varphi|_{r\to+\infty} = -\vec{H} r\cos\theta$$

$$\varphi|_{r=0}\text{有限}$$

故

$$\varphi = \begin{cases} \sum_{l=0} A_l r^l P_l(\cos\theta) & r \le R \\ -H_0 r\cos\theta + \sum_{l=0} B_l \dfrac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & r > R \end{cases}$$

处于理想 Meissner 态的超导球内部无磁场，因此

$$-\mu_0 \partial_r \varphi|_{r=0} = 0$$

此即

$$H_0 \cos\theta + \sum_{l=0} B_l \frac{l+1}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta) = 0$$

解得

$$B_l = -\frac{1}{2} H_0 R^3 \delta_{l1}$$

再根据在 $B_l = -\dfrac{1}{2} R^3 \delta_{l1}$ 时磁标势连续，则

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} H_0 r\cos\theta & r \le R \\ -H_0 r\cos\theta - \dfrac{H_0 R^3}{2r^2}\cos\theta & r > R \end{cases}$$

整理得

$$\varphi = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \vec{H}_0 \cdot \vec{r} & r \le R \\ -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} - \dfrac{\vec{H}_0 \cdot \vec{r}}{2r^3} R^3 & r > R \end{cases}$$

这样有

$$\vec{H} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \vec{H}_0 & r \le R \\ \vec{H}_0 + \dfrac{\vec{H}_0 - 3(\vec{H}_0 \cdot \hat{r})\hat{r}}{2r^3} R^3 & r > R \end{cases}$$

故球外磁场为

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{H}_0 + \mu_0 R^3 \frac{\vec{H}_0 - 3(\vec{H}_0 \cdot \hat{r})\hat{r}}{2r^3}$$