

# Nonlinear electrodynamics coupled with gravity

林照翔

## 1 Aspects of a novel nonlinear electrodynamics in flat spacetime and in a gravity-coupled scenario

- 非线性电动力学模型和场方程
- 点电荷的能量
- 真空双折射
- 拉格朗日量的因果性和单一性条件
- 新 NLE 与广义相对论的耦合
- 总结

## 2 Nonlinear Electrodynamics in $f(T)$ Gravity and Generalized Second Law of Thermodynamics

- $f(T)$ 引力和NLED基础
- 宇宙学参数和热力学
- $f(T)$ 模型的一个例子
- 总结

## 3 Nonlinear electrodynamics and black holes

- NLED formalism
- NLED 黑洞
- NLED 黑洞热力学
- 孤立视界框架和质量关系
- NLED 黑洞的稳定性

# Index

- 1 Aspects of a novel nonlinear electrodynamics in flat spacetime and in a gravity-coupled scenario
  - 非线性电动力学模型和场方程
  - 点电荷的能量
  - 真空双折射
  - 拉格朗日量的因果性和单一性条件
  - 新 NLE 与广义相对论的耦合
  - 总结
- 2 Nonlinear Electrodynamics in  $f(T)$  Gravity and Generalized Second Law of Thermodynamics
- 3 Nonlinear electrodynamics and black holes

# 麦克斯韦拉氏量和BI模型拉氏量

## 麦克斯韦的拉氏量

$$F = \frac{1}{2}(B^2 - E^2)$$

$$L_{\text{maxwell}} = -F$$

## BI 模型的拉氏量

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta} \left( 1 - \sqrt{1 + \beta F} \right)$$

$\beta$  是任意常数。

弱场极限  $\beta F \ll 1$  下, BI 模型的拉氏量可近似为:

$$L_{\text{BI}} = \frac{2}{\beta} \left( 1 - \sqrt{1 + \beta F} \right) \approx -F + \frac{1}{4}\beta F^2 - \frac{1}{8}\beta^2 F^3 + \mathcal{O}(\beta^3 F^4)$$

当  $\beta \rightarrow 0$ , BI 模型的拉氏量与线性麦克斯韦的拉氏量相同。

## 新 NLE 模型拉氏量

作者提出新 NLE 模型的拉氏量

$$L_{\text{general}}(F) = -\frac{(aF + 1)^m}{\delta(bF + 1)^n} (\beta F)^p$$

$m, n, p$  是无量纲常数,  $a, b, \beta, \delta$  是长度平方量纲的任意常数。  
在弱场极限下, 拉氏量可近似为:

$$L_{\text{general}}(F) = -\frac{(aF + 1)^m}{\delta(bF + 1)^n} (\beta F)^p \approx -c [F^p + c_1 F^{p+1} + c_2 F^{p+2} + \mathcal{O}(c_3 F^{p+3})]$$

$p = 1$  时得到麦克斯韦的拉氏量。

通过分析取  $m = 1, n = m + 1, a = -3b$

得到含有两个参数且遵守麦克斯韦极限的拉氏量:

$$L(F) = \frac{\gamma(3\eta F - 1)F}{(1 + \eta F)^2}$$

其中,  $\gamma = \beta/\delta$  和  $\eta$  是任意参数。

当  $\eta F \ll 1$ , 即弱场极限下, 拉氏量近似为:

$$L(F) = \frac{\gamma(3\eta F - 1)F}{(1 + \eta F)^2} \approx -\gamma F + 5\gamma\eta F^2 - 9\gamma\eta^2 F^3 + \gamma\mathcal{O}(\eta^3 F^4)$$

## 新 NLE 模型的物理对应

利用电位移矢量  $\vec{D}$  与  $\vec{E}$  的关系  $\vec{D} = \partial L / \partial \vec{E}$ , 可由拉氏量式得到:

$$\vec{D} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \vec{E}$$

$$D_i = \varepsilon_i^{\ j} E_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \delta_{ij}$$

磁场  $\vec{H} = -\partial L / \partial \vec{B}$  结合拉氏量有

$$\vec{H} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \vec{B}$$

磁感应强度  $B_i = \mu_i^{\ j} H_j$   
磁导率张量的逆  $(\mu^{-1})_{ij}$

$$(\mu^{-1})_{ij} = \gamma \frac{1 - 7\eta F}{(1 + \eta F)^3} \delta_{ij}$$

可以认为新 NLE 拉氏量由这种特殊的介质生成。

# 点电荷电场

平坦时空中拉氏量给出 E-L 运动方程:

$$\partial_\mu (L_F F^{\mu\nu}) = 0$$

其中,

$$L_F \equiv \frac{\partial L}{\partial F} = \frac{\gamma(-1 + 7\eta F)}{(1 + \eta F)^3}$$

$F^{\mu\nu}$  是麦克斯韦场强张量。

可以回到无源麦克斯韦方程:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

由 Bianchi identity  $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ ,  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  是场强张量的对偶, 可得

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

考虑静电极限(electrostatic limit)  $\vec{B} = \vec{H} = \vec{0}$ , 对点电荷

$$\nabla \cdot \vec{D} = e\delta(\vec{r})$$

解:

$$\vec{D} = \frac{e}{4\pi r^3} \vec{r}$$

结合  $\vec{D}, \vec{E}$  关系和  $F = -E^2/2$  可得

$$E + \frac{7}{2}\eta E^3 = \frac{e}{4\gamma\pi r^2} \left(1 - \frac{\eta}{2}E^2\right)^3$$

上式限制  $F > -1/\eta$ ; 弱场极限  $\eta F \ll 1$ ,  $E(r)$  可按  $\eta$  展开

$$E = E_{(0)} + \eta E_{(1)} + \eta^2 E_{(3)} + \mathcal{O}(\eta^3)$$

$E_{(1)}, E_{(2)}$  分别代表对电场  $E_{(0)}$  的一阶和二阶修正。



比较系数可得

$$E_{(0)} = \frac{e}{4\pi\gamma r^2}$$

$$E_{(1)} = -\frac{7}{2}E_{(0)}^3 - \frac{e}{4\pi\gamma r^2}E_{(0)}^2$$

$$E_{(2)} = -\frac{21}{2}E_{(0)}^2E_{(1)} + \frac{e}{4\pi\gamma r^2}\left(-3E_{(0)}E_{(1)} + \frac{3}{4}E_{(0)}^4\right)$$

弱场极限下

$$E \approx \frac{e}{4\pi\gamma r^2} - 5\eta\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^3 + \frac{273}{4}\eta^2\left(\frac{e}{4\pi\gamma r^2}\right)^5 + \mathcal{O}(\eta^3)$$

对于很小的  $r$  和任意的  $\eta$ , 电场最大值

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\eta}}$$

NLE 模型中电场有限。当  $\eta \rightarrow 0$ , 电场发散。

## 点电荷的能量

希尔伯特应力-能量张量(Hilbert stress-energy tensor)

$$T_{\mu\nu}^H \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial (\sqrt{-g} L(F))}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \bigg|_{g=\eta} = \eta_{\mu\nu} L(F) - L_F F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}$$

电能密度

$$\rho = -T_t^t = -L_F E^2 - L(F) = \frac{\gamma E^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} \eta E^2 \left( 4 + \frac{\eta}{2} E^2 \right) \right]}{2 \left( 1 - \frac{\eta}{2} E^2 \right)^3}$$

总电能

$$\epsilon = 4\pi \int_0^{+\infty} \rho(r) r^2 dr$$

转化为对  $E$  的积分

$$\epsilon = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{4\pi\gamma}} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\eta}}} \frac{\sqrt{(2 - \eta E^2) [4 + 3\eta E^2 (8 + \eta E^2)] [4 + \eta E^2 (52 + 21\eta E^2)]}}{16\sqrt{E} (2 + 7\eta E^2)^{5/2}} dE$$

总能量有限。当  $\eta \rightarrow 0$ , 点电荷自能发散。

## 真空双折射

考虑平面电磁波  $(\vec{e}, \vec{b})$  沿  $z$  轴在两片平行电容板间传播,  $x$  轴方向有匀强电场。外电场  $\vec{E} = (\bar{E}, 0, 0)$ , 总电场  $\vec{E} = \vec{e} + \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \vec{b}$ , 设  $\vec{e}$  远小于  $\vec{E}$ , 拉氏量

$$L(\vec{e} + \vec{E}, \vec{b}) = \gamma \frac{\left\{ \frac{3}{2}\eta \left[ \vec{b}^2 - (\vec{e} + \vec{E})^2 \right] - 1 \right\} \left[ \vec{b}^2 - (\vec{e} + \vec{E})^2 \right]}{2 \left\{ 1 + \frac{\eta}{2} \left[ \vec{b}^2 - (\vec{e} + \vec{E})^2 \right] \right\}^2}$$

忽略高阶项

$$L^{(2)}(\vec{e} + \vec{E}, \vec{b}) = \frac{\gamma\eta \left( 5 + \frac{7}{2}\eta\vec{E}^2 \right)}{\left( 1 - \frac{\eta}{2}\vec{E}^2 \right)^4} (\vec{e} \cdot \vec{E})^2 - \frac{1}{2}\gamma \frac{\left( 1 + \frac{7}{2}\eta\vec{E}^2 \right)}{\left( 1 - \frac{\eta}{2}\vec{E}^2 \right)^3} (\vec{b}^2 - \vec{e}^2)$$

电位移矢量和磁场强度

$$d_i = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial e_i} = \left( \alpha \delta_i^j + \beta \bar{E}_i \bar{E}^j \right) e_j, \quad h_i = -\frac{\partial L^{(2)}}{\partial b_i} = \alpha \delta_i^j b_j$$

$$\beta = \frac{2\gamma\eta \left( 5 + \frac{7}{2}\eta\vec{E}^2 \right)}{\left( 1 - \frac{\eta}{2}\vec{E}^2 \right)^4}, \quad \alpha = \gamma \frac{\left( 1 + \frac{7}{2}\eta\vec{E}^2 \right)}{\left( 1 - \frac{\eta}{2}\vec{E}^2 \right)^3}$$

结合关系  $d_i = \varepsilon_i^j e_j, h_i = (\mu^{-1})_i^j b_j$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \beta \bar{E}_i \bar{E}_j, \quad (\mu^{-1})_{ij} = \alpha \delta_{ij}$$

平面波麦克斯韦方程

$$k_i d^i = k_i b^i = 0, \quad \vec{k} \times \vec{e} = \omega \vec{b}, \quad \vec{k} \times \vec{h} = -\omega \vec{d}$$

$$\left\{ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmn} (\mu^{-1})_k^l k_j k^m + \omega^2 \epsilon_n^i \right\} e^n = 0$$

$\varepsilon_{ijk}$  是反对称张量。矩阵形式

$$\Lambda \vec{e} = 0$$

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} -k^2 \alpha + \omega^2 (\alpha + \beta \bar{E}) & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 \alpha + \omega^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \alpha \end{bmatrix}$$

由  $\det(\Lambda) = 0$  可知电场有两种模式。两种模式定义了色散关系。折射率定义为  $n \equiv k/\omega$ , 因此有两种不同的折射率

$$n_{\parallel} = \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha} \bar{E}^2}, \quad n_{\perp} = 1$$

不同偏振的电磁波有不同的速度  $v_{\parallel} = n_{\parallel}^{-1}, v_{\perp} = 1$

## 拉格朗日量的因果性和单一性条件

若拉氏量满足不等式：

$$L_F \leq 0, L_{FF} \geq 0, L_F + 2FL_{FF} \leq 0$$

则群速度不超过真空光速，且动能非负。电场部分取  $B = 0$ ，拉氏量

$$L(F) = -\frac{(aF + 1)^m}{\delta(bF + 1)^n} (\beta F)^p, \text{ 前两个不等式给出}$$

$$n \geq m + 1, a \leq 0, b \geq 0$$

在此基础上，第三个不等式自动满足。磁场部分取  $E = 0$ ，类似可得

$$n \geq m + 1, a \geq 0, b \leq 0$$

$n = m + 1, a = -3b$  时的因果性和单一性条件

$$L_F = \frac{\gamma(-1 + 7\eta F)}{(1 + \eta F)^3}, L_{FF} = \frac{2\gamma\eta(5 - 7\eta F)}{(1 + \eta F)^4}$$

$$L_F + 2FL_{FF} = \gamma \frac{-\eta F(26 - 21\eta F)}{(1 + \eta F)^4}$$

仅电场部分, 取  $B = 0$ , 因果性和单一性条件三个不等式给出

$$-\frac{2 + 7\eta E^2}{(2 - \eta E^2)^3} \leq 0, \frac{10 + 7\eta E^2}{(2 - \eta E^2)^4} \geq 0, \frac{-4 - \eta E^2 (521\eta E^2)}{(2 - \eta E^2)^4} \leq 0$$

所有情况都有  $E < \sqrt{2/\eta}$ ,  $E_{\max} = \sqrt{\eta/2}$   
分析磁场, 取  $E = 0$ , 前两个不等式给出

$$\left(-1 + \frac{7}{2}\eta B^2\right) \leq 0, \left(5 - \frac{7}{2}\eta B^2\right) \geq 0$$

可以得到  $F < 1/7\eta$   
第三不等式给出

$$-2 + \eta B^2 \left(26 - \frac{21}{2}\eta B^2\right) \leq 0$$

得到  $(13 - 2\sqrt{37})/21 < \eta F < (13 + 2\sqrt{37})/21$

## 新 NLE 与广义相对论的耦合

通过作用量把拉氏量  $L(F)$  与引力进行最小耦合

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{R}{\kappa} + L(F) \right)$$

其中  $R$  为里奇标量。变分可得运动方程

$$\nabla_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial F} F^{\mu\nu} \right) = 0, \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

其中  $R_{\mu\nu}$  为里奇张量,  $T_{\mu\nu}$  为 Hilbert 能量-动量张量, 在弯曲时空表达为

$$T_\mu^\nu = L \delta_\mu^\nu - L_F F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda}$$

考虑球对称静态时空, 线元

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

假设  $F_{tr}, F_{\theta\phi}$  在  $F_{\mu\nu}$  中非零,  $F_{tr} = -F_{rt}$  代表径向电场,  $F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta}$  代表径向磁场。  
应力能动-张量非零分量

$$T_t^t = T_r^r = L(F) - L_F F_{tr} F^{tr}, T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = L(F) - L_F F_{\theta\phi} F^{\theta\phi}$$

下面只关注纯磁场解和纯电场解。

## 磁场正则黑洞解

纯磁场解来自  $F_{tr}=0$ , 非零麦克斯韦张量分量  $F_{\theta\phi} = -q_m \sin\theta$ ,  $q_m$  为常数, 可理解为一个磁单极子的总荷量, 导致径向磁场  $B_r = q_m/r^2$ , 麦克斯韦不变量  $F = q_m^2/2r^4$ ;  $r=0$  处奇异

磁单极子能-动张量

$$T_t^t = T_r^r = \frac{\gamma q_m^2 (3\eta q_m^2 - 2r^4)}{(2r^4 + \eta q_m^2)^2}$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = \frac{\gamma q_m^2 (4r^8 - 2\eta q_m^2 r^4 + 3\eta^2 q_m^4)}{(2r^4 + \eta q_m^2)^3}$$

由线元可得爱因斯坦张量

$$G_\mu^\nu = \text{diag} \left[ \frac{f'}{r} + \frac{f-1}{r^2}, \frac{f'}{r} + \frac{f-1}{r^2}, \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r}, \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} \right]$$

' 代表度规函数  $f(r)$  的径向微分。爱因斯坦非线性麦克斯韦方程  $tt$  或  $rr$  分量简化为

$$\frac{f'}{r} + \frac{f-1}{r^2} = \kappa \frac{\gamma q_m^2 (3\eta q_m^2 - 2r^4)}{(2r^4 + \eta q_m^2)^2}$$

解上面方程可得度规函数



$$f(r) = 1 + \frac{c_0}{r} + \frac{\kappa \gamma q_m^2 r^2}{2r^4 + \eta q_m^2}$$

$c_0$  是积分常数。取

$$c_0 = 0, \gamma = -\frac{2b_0^2}{\kappa q_m^2}, \eta = \frac{2g^4}{q_m^2}$$

$b_0, g$  是长度量纲常数。线元可改写为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{b_0^2 r^2}{r^4 + g^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{b_0^2 r^2}{r^4 + g^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

当  $r$  趋于无穷大, 时空度规渐近平坦

$$g_{tt} \rightarrow -1, g_{rr} \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty$$

对于很小的  $r$ , 其行为与 de-Sitter 时空相似

$$g_{tt} \rightarrow -(1 - c^2 r^2), \quad g^{rr} \rightarrow (1 - c^2 r^2) \quad \text{as} \quad r \rightarrow 0$$

$g_{tt} = 0$  给出无限红移面的位置。若度规参数满足  $0 < g < 0.5b_0^2$ , 则上面几何代表一系列双视界黑洞; 当  $g^2 = 0.5b_0^2$ , 得到单视界黑洞; 若  $g^2 > 0.5b_0^2$ , 则黑洞没有视界。特别地, 当  $g^2 = 0$ , 黑洞有一个视界。

## 曲率张量和不变量的正则性

可通过黎曼和里奇张量各分量是否发散来判断时空的正则性、奇异性。坐标基底，非零黎曼曲率张量分量

$$R^0_{110} = -\frac{b_0^2 (3r^8 - 12g^4 r^4 + g^8)}{(r^4 + g^4)^3}$$

$$R^0_{220} = R^0_{330} = R^2_{112} = R^3_{113} = \frac{b_0^2 (r^4 - g^4)}{(r^4 + g^4)^2}$$

$$R^3_{223} = -\frac{b_0^2}{r^4 + g^4}$$

非零 Ricci 张量分量

$$R_{00} = -R_{11} = -\frac{b_0^2 (r^8 - 12g^4 r^4 + 3g^8)}{(r^4 + g^4)^3}$$

$$R_{22} = R_{33} = \frac{b_0^2 (3g^4 - r^4)}{(r^4 + g^4)^2}$$

当  $r \rightarrow 0$ ，两个张量的分量都有限；当  $r \rightarrow \infty$ ，所有分量趋于零。

三个标量不变量：  
Ricci 标量

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{4b_0^2 (3g^8 - 5g^4 r^4)}{(r^4 + g^4)^3}$$

Ricci contraction

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{4b_0^2 (r^{16} - 14g^4 r^{12} + 74g^8 r^8 - 30g^{12} r^4 + 9g^{16})}{(r^4 + g^4)^6}$$

Kretschmann scalar

$$K = R_{\mu\nu\lambda\delta} R^{\mu\nu\lambda\delta} = \frac{8 (3g^{16} - 10g^{12} r^4 + 74g^8 r^8 - 34g^4 r^{12} + 7r^{16}) b_0^4}{(r^4 + g^4)^6}$$

在  $r \rightarrow 0$  时，三个不变量也都有限。

## 能量条件

定义  $\rho = -T_t^t, \tau = t_r^r, p = T_\theta^\theta = T_\phi^\phi$

$$\rho = -\tau = \frac{b_0^2 (3g^4 - r^4)}{\kappa (r^4 + g^4)^2}$$

$$p = -\frac{b_0^2 (3g^8 - 12g^4 r^4 + r^8)}{\kappa (r^4 + g^4)^3}$$

NEC (Null Energy Condition)  $\rho + \tau \geq 0, \rho + p \geq 0$ , 第一个在  $\rho + \tau = 0$  时自动满足;

$$\rho + p = \frac{2b_0^2 r^4 (r^4 - 7g^4)}{\kappa (r^4 + g^4)^3}$$

第二个满足, 只能  $r^4 \leq 7g^4$

# 裸电奇点解

## Ricci 标量

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \frac{4}{r^2} - \frac{4f(r)}{r^2} - \frac{8f'(r)}{r} - 2f''(r)$$

通过变量替换  $\tilde{E} = E^2$  可以写为

$$R = -8\kappa (L - FL_F) = -\frac{8\gamma\kappa\eta\tilde{E}^2 (10 + 3\eta\tilde{E})}{(-2 + \eta\tilde{E})^3}$$

## Ricci contraction

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= 8 \left[ \frac{f'(r)}{r} + \frac{f(r) - 1}{r^2} \right]^2 + 8 \left[ \frac{f'(r)}{r} + \frac{f''(r)}{2} \right]^2 \\ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= 8\kappa [(L - 2FL_F)^2 + L^2] \\ &= \frac{16\kappa\gamma^2\tilde{E}^2 \left\{ 16 + \eta\tilde{E} \left[ 112 + \eta\tilde{E} (296 + 3\eta\tilde{E} (20 + 3\eta\tilde{E})) \right] \right\}}{(-2 + \eta\tilde{E})^6} \end{aligned}$$

在  $\tilde{E} = 2/\eta$  或  $r = 0$  处标量发散, 或者说  $r = 0$  是个时空奇点。可以计算, Kretschmann 标量  $R_{\mu\nu\lambda\delta} R^{\mu\nu\lambda\delta}$  在  $r = 0$  处也发散。

# 总结

新型非线性电动力学模型的有效性：

- 该NLE模型引入了两个具有维度的参数，能够在弱场极限下表现出类似于Born-Infeld拉格朗日量的行为。
- 模型成功消除了点电荷的自能发散问题，确保了电场在某一最大值下的有限性，从而避免了传统线性电动力学中的问题。
- 在外部均匀电场的影响下，模型展示了真空双折射现象，表明其在电磁现象中的新颖性。

因果性和单一性条件：

- 研究表明，在所有背景电场下，模型满足因果性和单一性条件。然而，对于磁场，因果性和单一性条件仅在有限的磁场范围内成立，这表明模型在某些情况下可能存在局限性。

引力耦合的影响：

- 文章探讨了将NLE拉格朗日量与爱因斯坦广义相对论（GR）最小耦合的可能性，提出了通过引入引力场来寻找不同的时空解。
- 结果显示，耦合后的模型可以产生常规黑洞或裸奇点，具体取决于源是非线性磁单极子还是电荷。

时空和场奇点的挑战：

- 尽管NLE模型在某些情况下能够生成常规解，但仍然存在未解决的奇点问题。文章指出，源场或几何中的奇点问题需要进一步研究，以实现时空和场奇点的同时解决。

# Index

- 1 Aspects of a novel nonlinear electrodynamics in flat spacetime and in a gravity-coupled scenario
- 2 Nonlinear Electrodynamics in  $f(T)$  Gravity and Generalized Second Law of Thermodynamics
  - $f(T)$ 引力和NLED基础
  - 宇宙学参数和热力学
  - $f(T)$ 模型的一个例子
  - 总结
- 3 Nonlinear electrodynamics and black holes

## f(T)引力基础

$f(T)$  引力中的基本元素是四分量场  $h_a(x^\mu)$ ，其中英文字母标记切空间，希腊字母标记时空。 $h_a = h_a^\mu \partial_\mu$ ，分量满足

$$h_\mu^a h_b^\mu = \delta_b^a, \quad h_\mu^a h_a^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

其与度规张量  $g_{\mu\nu}$  的关系为  $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b$ ，其中  $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  是切空间中的闵氏度规。借助魏森博克联络  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = h_a^\lambda \partial_\nu h_\mu^a$ ，扭率张量  $T_{\mu\nu}^\rho$  和张量  $S_\rho^{\mu\nu}$  可定义为

$$T_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = h_a^\lambda (\partial_\nu h_\mu^a - \partial_\mu h_\nu^a),$$

$$S_\rho^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( K_{\rho}^{\mu\nu} + \delta_\rho^\mu T^{\theta\nu}_\theta - \delta_\rho^\nu T^{\theta\mu}_\theta \right),$$

其中， $K_{\rho}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\nu}_\rho - T^{\nu\mu}_\rho - T^{\mu\nu} - T_\rho^{\mu\nu})$

$f(T)$  引力的作用量

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [ef(T) + L_m]$$

其中， $e = \sqrt{-g}$ ,  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $G$  是引力常量， $L_m$  是宇宙中物质拉格朗日密度。



对作用量变分可得场方程

$$\left[ e^{-1} \partial_\mu \left( e S_a^{\mu\nu} + h_a^\lambda T^\rho_{\mu\lambda} S_\rho^{\nu\mu} \right) \right] f_T + S_a^{\mu\nu} \partial_\mu (T) f_{TT} + \frac{1}{4} h_a^\nu f = \frac{1}{2} \kappa^2 h_a^\rho T_\rho^\nu$$

其中,  $f_T = df/dT$ ,  $f_{TT} = d^2f/dT^2$ ,  $T_\rho^\nu$  是理想流体的能-动张量。平坦 FRW 宇宙线元

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

其中,  $a$  是依赖于时间的比例因子, 相应  $h_\mu^a = \text{diag}(1, a, a, a)$   
modified Friedmann equations 描述了宇宙的演化:

$$12H^2 f_T + f = 2\kappa^2 \rho_t,$$

$$48H^2 \dot{H} f_{TT} - \left( 12H^2 + 4\dot{H} \right) f_T - f = 2\kappa^2 p_t,$$

其中,  $H = \dot{a}/a$  是哈勃参数,  $\rho_t, p_t$  是宇宙的总能量密度和压力。

## 非线性电动力学基础

对任意物理量  $Y$ ，体积空间平均值定义为

$$\bar{Y} = \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int Y \sqrt{-g} d^3x,$$

其中,  $g$  是度规行列式,  $V = \int \sqrt{-g} d^3x$ , 电场和磁场的平均值

$$\bar{E}_i = 0, \quad \bar{B}_i = 0, \quad \overline{E_i B_i} = 0, \quad \overline{E_i E_j} = -\frac{1}{3} E^2 g_{ij}, \quad \overline{B_i B_j} = -\frac{1}{3} B^2 g_{ij},$$

利用电磁场不变量  $F, F^*$  来表达拉氏量, 保留至二阶

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F + \omega F^2 + \eta_0 F^{*2},$$

其中,  $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$ ,  $F^* = F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}$ ,  $\omega_0, \eta_0$  是任意常数。  
相应能-动张量

$$T_{\mu\nu} = -4\mathcal{L}_F F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + (F^* \mathcal{L}_{F^*} - \mathcal{L}) g_{\mu\nu},$$

结合电磁场平均值以及理想流体  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$ , 可得能量密度  $\rho$  和压力  $p$

$$\rho = -\mathcal{L} - 4E^2 \mathcal{L}_F,$$

$$p = \mathcal{L} + \frac{4}{3} (E^2 - 2B^2) \mathcal{L}_F,$$

考虑等离子体中迅速衰减至零的电场, 进一步有

$$\rho_B = \frac{1}{2} B^2 (1 - 8\omega B^2),$$

$$p_B = \frac{1}{6} B^2 (1 - 40\omega_0 B^2),$$

当  $\omega_0 = \eta_0 = 0$  时, 拉氏量退化为线性麦克斯韦拉氏量, 能动张量也退化

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F, \quad T_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}F g_{\mu\nu}.$$

对于非线性过程

$$\rho = 3p = \frac{1}{2} (E^2 + B^2),$$

这表明宇宙由普通辐射组成, 具有正压力。

# 宇宙学参数

modified Friedmann equations 场方程可写为

$$\frac{3H^2}{\kappa^2} = \rho_t, \quad -\frac{2\dot{H}}{\kappa^2} = \rho_t + p_t,$$

其中,  $\rho_t = \rho_m + \rho_B + \rho_T, p_t = p_m + p_B + p_T$ , 下标  $m, B, T$  分别代表物质, 磁场和扭率的贡献。

$$\rho_T = \frac{1}{2\kappa^2} (-12H^2 f_T - f + 6H^2),$$

$$p_T = -\frac{1}{2\kappa^2} \left[ 48\dot{H}H^2 f_{TT} - (12H^2 + 4\dot{H}) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H} \right],$$

为了方便, 取  $p_m = 0$ , 能量守恒方程

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0,$$

$$\dot{\rho}_B + 3H(\rho_B + p_B) = 0,$$

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0,$$

## 第一条方程解得

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3},$$

其中,  $a_{m0}$  是任意常量。第二条方程解得

$$B = \frac{B_0}{a^2},$$

其中,  $B_0$  是任意常数。这表明磁场能量密度的演化随宇宙的膨胀而衰减。  
EoS(equation of state)参数

$$\omega_t = \left\{ -\frac{1}{\kappa^2} \left[ 48\dot{H}H^2 f_{TT} - (12H^2 + 4\dot{H}) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H} \right] + \frac{B^2}{6} (1 - 40\omega_0 B^2) \right\} \\ \times \left\{ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{2\kappa^2} [6H^2 - f - 12H^2 f_T] + \frac{B^2}{2} [1 - 8\omega_0 B^2] \right\}^{-1}$$

减速参数  $q$  是宇宙膨胀加速度的度量, 其由下式给出

$$q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}.$$

负的  $q$  意味着加速状态。

当前情况下  $q_t = \frac{1}{2}(1 + 3\omega_t)$ , 于是

$$2q_t = 1 + 3 \left[ -\frac{1}{\kappa^2} \left( 48\dot{H}H^2 f_{TT} - (12H^2 + 4\dot{H}) f_T - f + 6H^2 + 4\dot{H} \right) + \frac{B^2}{6} (1 - 40\omega_0 B^2) \right. \\ \left. \times \left[ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{2} (6H^2 - f - 12H^2 f_T) + \frac{B^2}{2} (1 - 8\omega_0 B^2) \right]^{-1} \right]$$

这是  $f(T)$  的EoS(Equation of State), 可以通过几个  $f(T)$  模型来检查这些宇宙学参数的行为。

## 广义热力学第二定律(GSLT)

GLST说, 在视界里和视界上的总熵不随时间减少。

由热力学第一定律有克劳修斯关系  $-dE = T_X dS_X$ , 其中  $S_X = A/(4G)$  是 Bekenstein 熵,  $A = 4\pi R_X^2$  是视界面积,  $X$  是任意视界,  $T_X = 1/(2\pi R_X)$  是霍金温度。Miao 等人发现在  $f(T)$  引力中热力学第一定律被违背, 这导致额外的熵增项  $S_P$ ; 而在  $f_{TT}$  很小时, 热力学第一定律成立, 这时熵  $S_X = (Af_T)/(4G)$ , 而与  $S_P$  无关。下面采用更一般的方法来研究磁  $f(T)$  场景下的 GSLT。熵对时间微分

$$\frac{dS_X}{dt} + \frac{dS_P}{dt} = \frac{\pi R_X}{G} \left( 2\dot{R}_X f_T + R_X \dot{T} f_{TT} \right).$$

利用吉布斯方程找到视界熵正常熵(normal entropy)  $S_I$  的变化率

$$\frac{dS_I}{dt} = \frac{1}{T_X} \left( \frac{dE_I}{dt} + p_t \frac{dV}{dt} \right),$$

其中,  $E_I = \rho_t V$ ,  $V = 4\pi R_X^3/3$  是视界体积。计算得

$$\frac{dS_I}{dt} = \frac{4\pi R_X^2}{T_X} \left( \dot{R}_X - H R_X \right) (\rho_t + p_t).$$

## 总熵对时间的微分

$$\begin{aligned}
 & \frac{dS_X}{dt} + \frac{dS_P}{dt} + \frac{dS_I}{dt} \\
 &= \frac{\pi R_X}{G} \left\{ 2\dot{R}_X f_T + R_X \dot{T} f_{TT} \right. \\
 & \quad + 8\pi G R_X^2 \left[ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{\kappa^2} \left( 4\dot{H} T f_{TT} + 2\dot{H} (f_T - 1) \right) + \frac{2B_0^2}{3a^4} \left( 1 - \frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4} \right) \right] \\
 & \quad \left. \times [\dot{R}_X - H R_X] \right\}
 \end{aligned}$$

GSLT认为  $(\dot{S}_X + \dot{S}_I + \dot{S}_P) \geq 0$ , 下面讨论两种常用的宇宙学视界: 哈勃视界(Hubble Horizon)和事件视界(Event Horizon)。



## 哈勃视界(Hubble Horizon)

假设FRW宇宙热力学系统的边界被处于平衡状态的表观视界(apparent horizon)占据。对于平坦的 FRW，它退化为半径为  $R_H$  的哈勃视界

$$R_H = \frac{1}{H}, \quad \dot{R}_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

把任意视界  $X$  替换为  $H$  得

$$\begin{aligned} & \frac{dS_X}{dt} + \frac{dS_P}{dt} + \frac{dS_I}{dt} \\ &= -\frac{\pi}{GH} \left\{ \frac{2\dot{H}}{H^2} f_T + 12\dot{H} f_{TT} + \frac{8\pi G}{H^2} \left( 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) \right. \\ & \quad \times \left[ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{\kappa^2} \left( 4\dot{H} T f_{TT} + 2\dot{H} (f_T - 1) \right) + \frac{2B_0^2}{3a^4} \left( 1 - \frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4} \right) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

这是哈勃视界上宇宙中所有流体(dust matter, magnetic and torsion contribution)总熵的变化率。

## 事件视界(Event Horizon)

### 事件视界半径

$$R_E = a \int_0^\infty \frac{dt}{a}, \quad \dot{R}_E = H R_E - 1.$$

把任意视界  $X$  替换为  $E$  得

$$\begin{aligned} & \frac{dS_E}{dt} + \frac{dS_I}{dt} + \frac{dS_P}{dt} \\ &= \frac{\pi}{G} \left( a \int_t^\infty \frac{dt}{a} \right) \left[ 2 \left( \dot{a} \int_t^\infty -1 \right) - 12 H \dot{H} \left( a \int_t^\infty \frac{dt}{a} \right) \right. \\ & \quad \left. + 8\pi G \times \left( a \int_t^\infty \frac{dt}{a} \right)^2 \left( \left( \dot{a} \int_t^\infty \frac{dt}{a} - 1 \right) - H \left( a \int_t^\infty \frac{dt}{a} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left\{ \rho_{m0} a^{-3} + \frac{1}{\kappa^2} \left( 4 \dot{H} T f_{TT} + 2 \dot{H} (f_T - 1) \right) + \frac{2B_0^2}{3a^4} \left( 1 - \frac{16\omega_0 B_0^2}{a^4} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

这代表了平衡态事件视界上宇宙中总熵的变化率。

## $f(T)$ 模型的一个例子

考虑如下形式的比例因子

$$a(t) = a_0 (t_s - t)^{-h}, \quad h > 0, \quad t_s \geq t$$

哈勃参数  $H$ , 扭率(torsion)标量  $T$ ,  $\dot{H}$  分别为

$$H = \frac{h}{t_s - t}, \quad T = -\frac{6h^2}{(t_s - t)^2}, \quad \dot{H} = \frac{h}{(t_s - t)^2}.$$

把上式代入修改 Friedmann 方程的第一条可得

$$\begin{aligned} f(T) = & c_1 \left( -\frac{T}{6h^2} \right)^{1/2} + \frac{2\kappa^2 \rho_{m0}}{a_0^3 (3h+1)} \left( -\frac{6h^2}{T} \right)^{3h/2} + \frac{\kappa^2 B_0^2}{a_0^4 (4h+1)} \left( -\frac{6h^2}{T} \right)^{2h} \\ & - \frac{8\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{a_0^8 (8h+1)} \left( -\frac{6h^2}{T} \right)^{4h}, \end{aligned}$$

其中,  $c_1$  由边界条件确定。

取  $z = a_0/a - 1$ , 两个 EoS 参数

$$\omega_t = \frac{20\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{9h^2 a_0^8} (1+z)^{(8h+2)/h} - \frac{\kappa^2 B_0^2}{18h^2 a_0^4} (1+z)^{(4h+2)/h} - \frac{2(3h+2)}{3h},$$

$$q_t = \frac{10\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{3h^2 a_0^8} (1+z)^{(8h+2)/h} - \frac{\kappa^2 B_0^2}{12h^2 a_0^4} (1+z)^{(4h+2)/h} - \frac{5h+4}{2h},$$

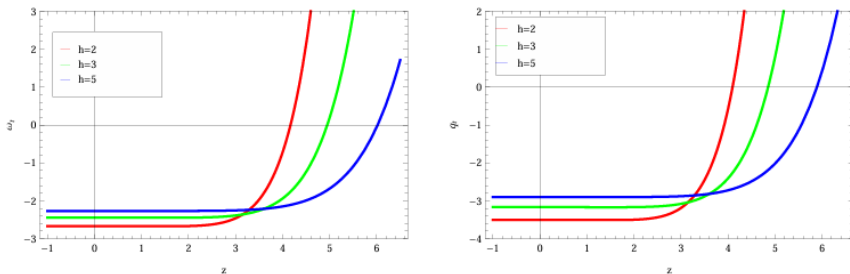


Figure 1: Plot of EoS parameter  $\omega_t$  (left) and deceleration parameter  $q_t$  (right) versus  $z$  for polelike type scale factor.

图 1:  $\omega_t$  和  $q_t$

$$f_{TT} = \frac{(1+z)^{4/h}}{36h^4} \left[ \frac{3h(3h+2)\kappa^2 \rho_{m0}}{2a_0^3(3h+1)} (1+z)^3 + \frac{2h(2h+1)\kappa^2 B_0^2}{a_0^4(4h+1)} (1+z)^4 \right. \\ \left. - \frac{32h(4h+1)\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{a_0^8(8h+1)} (1+z)^8 - \frac{c_1}{4(1+z)^{1/h}} \right].$$

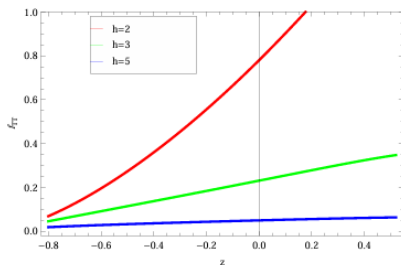


Figure 2: Plot of  $f_{TT}$  versus  $z$  for polelike type scale factor.

图 2:  $f_{TT}$

# Hubble Horizon

$$\begin{aligned}
 & \frac{dS_H}{dt} + \frac{dS_I}{dt} \\
 = & -\frac{\pi(1+z)^{3/h}}{Gh^3} \left[ \frac{3h(3h+4)\kappa^2\rho_{m0}}{2a_0^3(3h+1)}(1+z)^3 + \frac{4(h+1)\kappa^2 B_0^2}{3a_0^4(4h+1)}(1+z)^4 \right. \\
 & \left. - \frac{64h(2h+1)\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{3a_0^8(8h+1)}(1+z)^8 - \frac{c_1}{4h(1+z)^{1/h}} \right] + \frac{2\pi}{Gh^3}(1+h)(1+z)^{1/h}.
 \end{aligned}$$

# Event Horizon

$$\begin{aligned} & \frac{dS_E}{dt} + \frac{dS_I}{dt} \\ = & -\frac{\pi(1+z)^{3/h}}{Gh(1+h)^2} \left[ \frac{(3h+4)\kappa^2 \rho_{m0}}{2a_0^3(3h+1)} (1+z)^3 + \frac{4(h+1)\kappa^2 B_0^2}{3a_0^4(4h+1)} (1+z)^4 \right. \\ & \left. - \frac{64(2h+1)\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{3a_0^8(8h+1)} (1+z)^8 - \frac{c_1}{4h\kappa^2(1+z)^{1/h}} \right] + \frac{2\pi h}{G(1+h)^3} (1+z)^{1/h} \end{aligned}$$

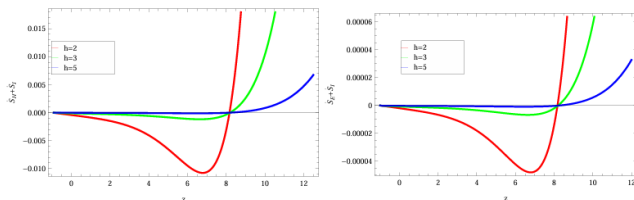


Figure 3: Plot of the rate of change of total entropy versus redshift for polelike type scale factor. The left graph is for  $\dot{S}_H + \dot{S}_I$  versus  $z$  for Hubble horizon and the right graph is for  $\dot{S}_E + \dot{S}_I$  versus  $z$  for event horizon.

图 3:  $\dot{S}_H + \dot{S}_I$ , left for Hubble Horizon, right for Event Horizon

## 另一种形式的比例因子

$a(t) = a_0(t_s - t)^h$ , 与之对应的  $f(T)$  模型

$$f(T) = c_2 \left( -\frac{T}{6h^2} \right)^{1/2} + \frac{2\kappa^2 \rho_{m0}}{a_0^3(1-3h)} \left( -\frac{T}{6h^2} \right)^{3h/2} + \frac{\kappa^2 B_0^2}{a_0^4(1-4h)} \left( -\frac{T}{6h^2} \right)^{2h} - \frac{8\kappa^2 B_0^4 \omega_0}{a_0^8(1-8h)} \left( -\frac{T}{6h^2} \right)^{4h},$$

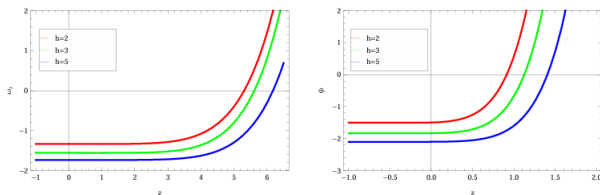


Figure 4: Plot of EoS parameter  $\omega_t$  (left) and deceleration parameter  $q_t$  (right) versus  $z$  for power-law scale factor.

图 4: 另一种比例因子的  $\omega_t$  和  $q_t$



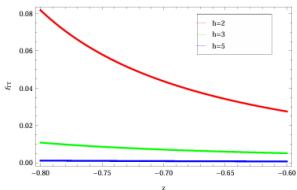


Figure 5: Plot of  $f_{TT}$  versus  $z$  for exact power-law scale factor.

图 5: 另一种比例因子的  $f_{TT}$

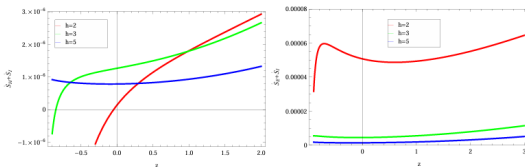


Figure 6: Plot of the rate of change of total entropy versus redshift for exact power-law scale factor. The left graph is for  $\dot{S}_H + \dot{S}_I$  versus  $z$  for Hubble horizon and the right graph is for  $\dot{S}_E + \dot{S}_I$  versus  $z$  for event horizon.

图 6: 另一种比例因子的  $\dot{S}_H + \dot{S}_I$ , left for Hubble Horizon, right for Event Horizon

文章在包含暗能量、尘埃物质和磁场贡献的 FRW 宇宙中，在  $f(T)$  引力框架下研究了 NLED。采用平均手段来保留 NLED 中时空的各向同性。在这种情况下，评估了宇宙总能量密度和压力的 EoS 和减速参数。开发了哈勃和事件视界的总熵的时间导数，以使用视界熵和吉布斯方程来研究 GSLT 的合法性(validity)。使用极点和幂律形式的尺度因子构建了  $f(T)$  模型。讨论了一些特定模型参数的图形行为。文章的结果总结如下：

- 第一个由极点尺度因子构建的  $f(T)$  模型的宇宙学参数代表一个在  $z \leq 5.6$  时加速膨胀的 phantom dominated 的宇宙。对于更高的  $z$  值，膨胀率降低，磁场主导扭率贡献，代表减速膨胀的宇宙。
- 作了哈勃和事件视界的总熵的时间导数关于  $z$  的图，以讨论 GSLT 对满足条件  $f_{TT} \ll 1$  的模型的合法性。对于这两个视界，GSLT 对  $z > 8.2$  和  $z < 0$  都成立。
- 使用精确幂律比例因子构建第二个  $f(T)$  模型。 $\omega_t$  和  $q_t$  关系  $z$  的关系图表明与第一个模型相同的行为。
- 第二个模型也满足条件  $f_{TT} \ll 1$ ，以借助热力学第一定律讨论 GSLT。图6显示了哈勃视界总熵的时间导数在  $h = 2, 3$  时  $z$  的一定范围内的正行为，而  $h = 5$  表示 GSLT 对所有  $z$  值的合法性。对于事件视界，GSLT 对所有  $h$  和  $z$  值都合法。
- 值得一提的是，仅对于磁宇宙，当  $z \geq -0.1$  时，事件视界的总熵的时间变化率保持正值，在此范围之外变为负值。另一方面，在我们的例子中，对于具有幂律比例因子的视界，它对于磁  $f(T)$  框架中的所有  $z$  值都保持在正区域。哈勃视界在两种情况下都表现出总熵的时间导数的相似行为。对于更高的红移值，宇宙学参数表明，与磁场相比，扭转贡献变得微弱。它指向宇宙的早期减速阶段。

# Index

- 1 Aspects of a novel nonlinear electrodynamics in flat spacetime and in a gravity-coupled scenario
- 2 Nonlinear Electrodynamics in  $f(T)$  Gravity and Generalized Second Law of Thermodynamics
- 3 **Nonlinear electrodynamics and black holes**
  - NLED formalism
  - NLED 黑洞
  - NLED 黑洞热力学
  - 孤立视界框架和质量关系
  - NLED 黑洞的稳定性

# 电磁场不变量

假设非线性电磁场可由电磁势  $A_\mu$  描述

$$F_{\mu\nu} = 2A_{[\mu,\nu]}$$

$F_{\mu\nu}$  有一个不变量和一个伪不变量

$$F = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad \tilde{G} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}$$

其中  $\tilde{F}^{\alpha\beta} = (i/2\sqrt{-g}) \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$  是  $F^{\alpha\beta}$  的对偶。

若 NLED 拉氏量在洛伦兹群作用下不变，则它依赖于  $F$  和  $\tilde{G}$ ；同时，在弱场极限下应与线性理论相同。

# $(F, \tilde{G})$ 和 $(P, \tilde{Q})$ 框架

两个框架可通过勒让德变换联系

$$P^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial L}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial L}{\partial F} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{G}} \tilde{F}^{\alpha\beta}$$

$$H = \frac{1}{2} P^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - L(F, G^2)$$

与  $P^{\alpha\beta}$  有关的不变量:

$$P = \frac{1}{4} P_{\alpha\beta} P^{\alpha\beta}, \quad \tilde{Q} = \frac{1}{4} P_{\alpha\beta} \tilde{P}^{\alpha\beta}$$

哈密顿方程

$$F^{\alpha\beta} = 2 \frac{\partial H}{\partial P_{\alpha\beta}} = \frac{\partial H}{\partial P} P^{\alpha\beta} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{Q}} \tilde{P}^{\alpha\beta}$$

NLED 与引力耦合作用量:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ R(16\pi)^{-1} - L \}$$

$R$  是曲率标量;  $g := \det |g_{\mu\nu}|$

$$L = \frac{1}{2} P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} - H(P, \tilde{Q})$$

能动张量和曲率标量

$$4\pi T_{\mu\nu} = H_{,P} P_{\mu\alpha} P_{\nu}^{\alpha} - g_{\mu\nu} \left( 2PH_{,P} + \tilde{Q}H_{,\tilde{Q}} - H \right)$$

$$R = 8 \left( PH_{,P} + \tilde{Q}H_{,\tilde{Q}} - H \right)$$

其中,  $\partial H / \partial P = H_{,P}$

Born-Infeld 非线性电动力学由结构函数  $H(P, \tilde{Q})$  给出:

$$H = b^2 \left( 1 - \sqrt{1 - 2P/b^2 + \tilde{Q}^2/b^4} \right)$$

其中,  $b$  是最大场强, 是 BI 理论中的参数。

# NLED能量条件

类时矢量  $V^\alpha$ ,  $V_\alpha V^\alpha < 1$ , local energy density 非负  $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$ ; local energy flow 矢量是非类空的要求  $T_{\alpha\beta} T_\gamma^\alpha V^\beta V^\gamma \leq 0$

$$H_{,P} > 0, \quad \left( PH_{,P} + \tilde{Q} H_{,\tilde{Q}} - H \right) \geq 0$$

strong energy condition (SEC)  $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$ , 结合爱因斯坦方程得

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 8 \left( T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \frac{T}{2} \right) \geq 0$$

# NLED 黑洞

SSS(静态球对称) 线元

$$ds^2 = -\psi dt^2 + \psi^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

HI发现一种解为

$$\psi = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r \left( \sqrt{r^4 + 1} - r^2 \right) dr$$

上面的解有正则奇点；另一个正则解  $D_{,r} = 1/r$ ,  $E_{,r} = r^2 / (r^4 + 1)$   
度规函数

$$\psi_{HI} = 1 - \frac{k}{r} + \frac{8\pi\gamma}{r} \int_0^r \left[ r^2 \ln \left( \frac{r^4}{1 + r^4} \right) \right] dr$$



对 SSS 线元, PT 发现

$$\psi_{PT} = 1 - \frac{d}{r} + \frac{8\pi}{r} \int_0^r H(x)x^2 dx$$

点电荷电磁场

$$F_{\mu\nu} = -\frac{e}{r^2} \frac{\partial H(P, 0)}{\partial P} 2\delta_\mu^{[0} \delta_\nu^{r]}$$

其中  $P = -e^2/4r^2$ ; 若积分存在且有限, 则当  $r \rightarrow 0$  时电磁场张量是有限的; 此外, 当  $r$  很大时,  $H(P, 0) \approx P$ 。这些条件保证了此解有较好的行为。

## BI 黑洞和 EBlon

SSS 时空的 EBI 解由度规函数  $\psi_{BI}(r)$  给出

$$\Psi_{BI}(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{2}{3}b^2 \left( r^2 - \sqrt{r^4 + a^4} \right) + \frac{4g^2}{3r}G(r)$$

$$G'(r) = - \left( r^4 + a^4 \right)^{-1/2}$$

其中,  $m$  是质量参数,  $g$  是磁荷,  $a^4 = g^2/b^2$ ,  $b$  是 BI 模型参数。电磁场非零分量为

$$F_{rt} = g \left( r^4 + a^4 \right)^{-1/2}, \quad P_{rt} = \frac{g}{r^2}$$

黑洞解为

$$G(r) = \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + a^4}} = \frac{1}{2a} \mathbb{F} \left[ \arccos \left( \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

其中,  $\mathbb{F}$  是第一类椭圆积分。这个解在  $r = 0$  处发散。另一方面, 粒子解为

$$G(r) = \int_0^r \frac{-ds}{\sqrt{s^4 + a^4}} = -\frac{1}{2a} \mathbb{F} \left[ \arccos \left( \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

这个解在  $r = 0$  处有限。

二者的联系为

$$\int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^4 + a^4}} + \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{s^4 + a^4}} = \frac{1}{a} K \left[ \frac{1}{2} \right]$$

其中,  $K \left[ \frac{1}{2} \right]$  是第一类完全椭圆积分。在  $r$  很大时, 解趋于 RN 解; 当 BI 模型参数  $b \rightarrow \infty$ , 得到线性电磁场 RN 解; 在无电荷极限  $b = 0$  下, 得到史瓦西黑洞解。

## BI黑洞中测试粒子的轨迹

测试粒子运动过程中有两个守恒量：能量  $E$  和角动量  $l$ ；若把粒子运动限制在赤道面  $\theta = \pi/2$  上，则可用有效势进行分析。

对于有质量测试粒子，其轨迹由洛伦兹方程给出

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\mu} F_\sigma^\nu dx^\sigma d\tau$$

其中， $\varepsilon$  是电荷量， $\mu$  是质量， $\tau$  是沿轨迹的仿射参数。利用两个守恒量可得

$$\dot{r}^2 + \psi \left( \frac{l^2}{r^2} + 1 \right) - \left\{ E + \frac{\varepsilon g}{\mu} \sqrt{\frac{b}{4g}} \mathbb{F} \left[ \arccos \left( \frac{r^2 - g/b}{r^2 + g/b}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}^2 = 0$$

与  $\dot{r}^2/2 + U_{\text{eff}}(E, l, r) = 0$  比较可得有效势。

对于光子，类似有

$$\dot{r}_{ph} = \sqrt{E^2 - \frac{\Psi_{BI} l^2}{r^2} \left( 1 + \frac{a^4}{r^4} \right)^{-1}}$$

可以发现  $(dr/dt)_{\text{photon}} < (dr/dt)_{\text{grav}}$ ，即非线性效应导致光的传播速度小于引力波的传播速度。这可以解释为光子在电介质中传播导致的。

# NLED 黑洞热力学

考虑静态球对称黑洞，热力学第一定律给出

$$\delta M_{\Delta} = \frac{\kappa}{8\pi} \delta a_{\Delta} + \Phi_{\Delta} \delta Q_{\Delta}$$

其中， $\kappa$  为视界处的表面引力， $M_{\Delta}$  为视界质量， $a$  为视界面积， $Q$  为电荷， $\Phi$  为电势；另一方面，Smarr 公式给出

$$M_{\Delta} = \frac{\kappa a_{\Delta}}{4\pi} + \Phi_{\Delta} Q_{\Delta}$$

Rasheed 发现，对于非线性电动力学，上面公式不适用。但可以认为

$$M_{\Delta} = \frac{\kappa a_{\Delta}}{4\pi} + \Phi_{\Delta} Q_{\Delta} + V(a_{\Delta}, Q_{\Delta}, P_{\Delta})$$

其中， $V$  是由视界参数决定的未知势。

# Bardeen 黑洞 Smarr 公式

Bardeen模型是爱因斯坦场方程与一种特定非线性电动力学耦合的准确解，其拉氏量为

$$\mathcal{L}(F) = \frac{2}{2sg^2} \left( \frac{2g^2 F}{1 + \sqrt{2g^2 F}} \right)^{5/2}$$

其中， $g$  是磁荷， $F$  是电磁场不变量， $s = g/m$ ；对于 SSS 时空，相应度规函数为

$$\psi_B = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{2mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}}$$

Bardeen 解不含电荷，视界质量只依赖于视界面积

$$M_\Delta = \frac{1}{8\pi} \int \kappa da = \int (1 - m') dr$$

视界质量的正号性给出  $m(r) \leq r$ ，且  $\psi_B \geq 0$ ，这导致  $(r^2 + g^2)^3 \geq 4m^2 r^4$ ； $g^2 = 16m^2/27$  对应极端黑洞； $g^2 < 16m^2/27$  时存在内外事件视界。

Bardeen 黑洞的势  $V$  是不确定的，除非把一个积分常数设为零，于是

$$V = mr^3 \frac{2g^2 - r^2}{(g^2 + r^2)^{3/2}}$$

代入 Smarr 公式得到

$$M_{\Delta} = \frac{r}{2} - \frac{mr^3}{(r^2 + g^2)^{3/2}}$$

注意到，Bardeen 黑洞的视界质量只依赖于视界面积，这是因为磁荷被认为是视界的不变量参数。

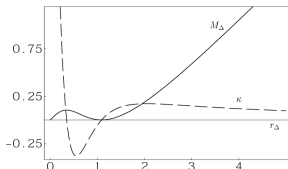


Figure 3: Horizon mass  $M_{\Delta}$  and surface gravity  $\kappa$ , as functions of the horizon radius, for the extreme Bardeen black hole, in this case the magnetic charge has the value  $g^2 = 16m^2/27$ .

图 7:  $M_{\Delta}$  和  $\kappa$

## 孤立视界框架和质量关系

ADM模型中，带毛黑洞(hairy black hole)可以被视为普通黑洞和孤立子的束缚态。下面的公式将有色黑洞解的视界质量与相应理论的孤立子解的ADM质量联系起来

$$M_{\text{sol}}^{(n)} = M_{\text{ADM}}^{(n)} - M_{\Delta}^{(n)}$$

若EBI理论给出两个确定解：黑洞解和孤子解，那么即使 EBI 黑洞是无色的(is not a coloured one)，我们也应当采用 ACS 模型，认为  $b$  是一个自由参数。因此这里  $n$  应该替换为 BI 参数  $b$ (分立或连续)。

EBI 解中，视界质量和 ADM 质量是视界半径  $r_{\Delta}$  的函数，它们分别为

$$M_{\Delta}^{(b)}(r_{\Delta}) = \frac{r_{\Delta}}{2} + \frac{b^2 r_{\Delta}}{3} \left( r_{\Delta}^2 - \sqrt{r_{\Delta}^4 + a^4} \right) - \frac{2g^2}{3} \int_0^{r_{\Delta}} \frac{ds}{\sqrt{a^4 + s^4}}$$

$$M_{\text{ADM}}^{(b)}(r_{\Delta}) = \frac{r_{\Delta}}{2} + \frac{b^2 r_{\Delta}}{3} \left( r_{\Delta}^2 - \sqrt{r_{\Delta}^4 + a^4} \right) + \frac{2g^2}{3} \int_{r_{\Delta}}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{a^4 + s^4}}$$

由于大多数 ACS 特征得到了满足，可以认为，当保持电荷不变而变化 BI 参数  $b$  时，EBI 理论的静态部分可以用 Ashtekar 等人提出的有色黑洞(colored black hole)的启发式(heuristic)模型来描述。



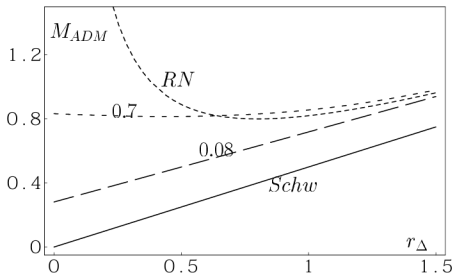


Figure 4: It is shown the ADM mass as function of the horizon radius  $r_{\Delta}$ , for the Schwarzschild (Schw), Reissner-Nordstrom (RN) and for BI black holes with BI parameters  $b = 0.7$  and  $b = 0.08$ .

图 8: ADM mass compared with Schw, RN, and BI black holes

## 稳定性条件

稳定性条件是一些对拉氏量及其微分  $L(F)$ ,  $L_F$ ,  $L_{FF}$  的约束。变量替换  $y = \sqrt{2g^2 F}$  后可表述为

$$L(y) > 0, \quad L(y)_{,y} > 0, \quad L(y)_{,yy} > 0$$

$$f(y) \equiv yL_{,yy}/L_{,y} > 0, \quad f(y)N(y) < 3$$

其中,  $N(y)$  为 SSS 线元度规函数。BI 拉氏量满足稳定性条件。把 BI 拉氏量写作  $y$  的函数, 取  $\tilde{G} = 0$  得

$$L(y) = b^2 \left( \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2 g^2}} - 1 \right) > 0$$

其他不等式

$$L_{,y} = \frac{y}{g^2} \left( 1 + \frac{y^2}{b^2 g^2} \right)^{-1/2} > 0$$

$$L_{,yy} = \frac{1}{g^2} \left( 1 + \frac{y^2}{b^2 g^2} \right)^{-3/2} > 0$$

$$f(y) = y \frac{L_{,yy}}{L_{,y}} = \left( 1 + \frac{y^2}{b^2 g^2} \right)^{-1} > 0$$

对于所有  $y$ , 以上不等式均成立。考虑不等式  $f(y)N(n) < 3$ , 由于  $0 < f(y) \leq 1$ , 则其简化为  $\psi_{BI}(y) < 3$

对于黑洞情况, 度规函数

$$\psi_{BI}(y) = 1 - \frac{2m\sqrt{y}}{g} + \frac{2b^2g^2}{3y} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2g^2}} \right) + \frac{2\sqrt{gby}}{3} \mathbb{F} \left[ \arccos \left( \frac{gb - y}{gb + y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

在  $0 < y < y_\Delta = 8.35$  范围内,  $0 < \psi_{BI}(y) \leq 1$ , 不等式得以满足。

对于 EBI 方程类粒子解, 度规函数

$$\psi_{BI}(y) = 1 - \frac{2m\sqrt{y}}{g} + \frac{2b^2g^2}{3y} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2g^2}} \right) - \frac{2\sqrt{gby}}{3} \mathbb{F} \left[ \arccos \left( \frac{y - gb}{gb + y} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$N(y=0) = 1$ , 而  $N(y)$  单调递减, 因此  $N = \psi < 3$  总能满足。

因此, EBI 的黑洞解和类粒子解都是稳定的。

# Thank You!