狭义相对论

基本概念

洛伦兹变换

设某个事件在 K 系下的坐标和时间为 x, y, z, t，在 K' 系下的坐标和时间为 x', y', z', t'

设 K' 惯性系和 K 惯性系坐标轴指向一致，K' 系相对 K 系以 $\vec{v}=v\vec{e}_x$ 运动，且当 $t=0$ 且 $t'=0$ 时刻两坐标轴的原点重合，则这个事件在 K 系和 K' 系之间的变换关系为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

质量、能量、动量和动量

静质量：m_0

设粒子的速度为 v，动质量 m：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

总能量 E：

$$E = mc^2$$

动量 p：

$$p = mv$$

动能 E_k：

$$E_k = E - E_0$$

相对论能量-动量关系：

$$\begin{cases} E = mc^2 \\ p = mv \end{cases} \Longrightarrow E^2 - (pc)^2 = (m_0c^2)^2$$

拉格朗日分析力学

基本概念

约束：对力学体系中质点的坐标的限制称为约束

完全约束：可以表达为质点坐标方程的约束。其应具有如下形式：$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, t) = 0$

不可变约束（稳定约束）：约束方程不显含时间

可变约束：约束方程显含时间

非完全约束：不可以表示为质点坐标方程的约束。

微分约束：约束方程中还包含有对时间求导的变量，如：$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots)$

自由度：能完全描述一个力学体系运动所需要的独立变量的个数

广义坐标：用于完全描述力学体系中所有质点的位置所选取的一组（独立）变量

虚位移：质点在约束许可的情况下可能发生的无穷小位移 $\delta\vec{r}$ 称为虚位移

实位移：质点实际运动产生的位移。实位移是所有虚位移中的一条

虚功：质点作虚位移时作用在质点上的力所做的功称为虚功

理想约束：若作用在力学体系上的所有约束力 $\vec{F}^{(C)}$ 在任意虚位移 $\delta\vec{r}$ 中所做的虚功之和为零，则称这种约束为理想约束

虚功原理：受理想约束的力学体系平衡的充要条件是此力学体系的所有主动力在任意虚位移中所做的虚功之和等于零，即：$\sum\limits_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

系统受理想约束，$\delta\vec{r}_i$ 不独立，，设自由度为 s，可将 $\delta\vec{r}_i$ 用广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 表达：

$$\delta\vec{r}_i = \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

于是：

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta\vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \\ &= \sum_i \sum_\alpha \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \\ &= \sum_\alpha \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\end{aligned}$$

广义坐标 q_α 对应的广义力，记为 Q_α，定义为：

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

则 $\sum\limits_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ 等价于：

$$\sum_\alpha Q_\alpha \delta q_\alpha = 0$$

若广义坐标是相互独立的，则上面的等式要求所有广义力均为零，即：

$$Q_\alpha = 0$$

于是虚功原理还可以表达为：受理想约束的力学体系平衡的充要条件是此力学体系的所有广义力均为零（前提是广义坐标的定义包括了“相互独立”这一前提）

达朗贝尔原理：N 质点理想约束体系处在加速运动状态，按牛顿第二定律，$\vec{F}_i^{(A)} + \vec{F}_i^{(C)} - m_i\ddot{\vec{r}}_i = 0$，可将该体系视作在主动力、约束力和加速度产生的有效力下的一个平衡体系，按照虚功原理可得：

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(A)} - m_i\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

这就是达朗贝尔原理

达朗贝尔原理可进一步表示成广义坐标的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,\ \ Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

达朗贝尔原理成立的前提：

1）完全约束：约束可以表示成坐标的方程：$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, t) = 0$

2）理想约束：$\sum\limits_i \vec{F}_i^{(C)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

保守约束系统的动力学方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_\alpha} = 0$$

令 $L = T - V$，L 称为拉格朗日量

成立条件：

1）完全约束：约束可以表示成坐标的方程：$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, t) = 0$

2）理想约束：$\sum\limits_i \vec{F}_i^{(C)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

3）保守系统：$\vec{F}_i^{(A)} = -\nabla_i V$

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

p_α 称为广义动量

欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

循环坐标：若拉格朗日量中不显含某个广义坐标，则这个广义坐标称为循环变量（循环坐标对应的广义动量是个守恒量，或者说运动积分）

例题

例1：均质杆长 L，上端 A 点靠在铅直墙壁上，欲使杆在任意位置都能平衡，求杆的下端点 B 所在约束面的形状，不计摩擦

解：

选取质心坐标 x_c,y_c 作为广义坐标（注意，此时 x_c,y_c 不独立，因为在曲线方程确定的情况下，体系只有一个自由度，此时绝对不能用"广义坐标对应的广义力为零"来做题，因为这个论断的前提是所选取的所有广义坐标都是相互独立的，而这里选取的广义坐标 x_c,y_c 显然不独立）

$$\vec{r}_c=x_c\vec{e}_x+y_c\vec{e}_y$$

$$\delta\vec{r}_c=\delta x_c\vec{e}_x+\delta y_c\vec{e}_y$$

主动力：

$$\vec{F}^{(A)}=-mg\vec{e}_y$$

理想约束下的虚功：

$$\delta W=\vec{F}^{(A)}\cdot\delta\vec{r}_c=-mg\delta y_c$$

虚功原理要求：

$$\delta W=0$$

即：

$$-mg\delta y_c=0$$

得到：

$$y_c=\mathrm{const}$$

由初始状态杆贴墙知：

$$y_c=\frac{L}{2}$$

设 $B(x,y)$，由几何关系知：

$$\begin{cases}x=L\sin\theta\\ y=\dfrac{L}{2}-\dfrac{L}{2}\cos\theta\end{cases}$$

利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 消去 θ 得：

$$(\frac{x}{L})^2+(\frac{2y}{L}-1)^2=1$$

这就是杆下端 B 点所在约束面的形状

例2：长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，其上端固定，棒与铅直方向成 θ 角进行匀速转动，试用达朗贝尔原理求转动周期

答案：$t=2\pi\sqrt{\frac{2l\cos\theta}{3g}}$

解：

> 这个系统的自由度为 2，但解这个题只需要关注棒与铅直方向的夹角 θ 就行

线密度：$\lambda=\frac{l}{m}$

对于广义坐标 θ，对应的广义力：

棒上离原点距离为 $r\sim r+\mathrm{d}r$ 的质元，所受主动力为 $-g\lambda\mathrm{d}r\vec{e}_z$，$z$ 方向坐标为 $-r\cos\theta\vec{e}_z$

$$\mathrm{d}Q_\theta=-g\lambda\mathrm{d}r\cdot\frac{\partial(-r\cos\theta)}{\partial\theta}=-g\lambda\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$Q_\theta = \int \mathrm{d}Q_\theta = \int_{r=0}^{r=l} -g\lambda\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}g\lambda\sin\theta\cdot l^2$$

计算动能：

设棒角速度为 ω

$$T = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}m\cdot\omega^2 r^2\sin^2\theta = \int_{r=0}^{r=l}\frac{1}{2}\lambda\omega^2\sin^2\theta\cdot r^2\mathrm{d}r = \frac{1}{6}\lambda\omega^2\sin^2\theta\cdot l^3$$

达朗贝尔原理：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta$$

即：

$$-\frac{1}{6}\lambda\omega^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot l^3 = -\frac{1}{2}g\lambda\sin\theta\cdot l^2$$

解得：

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$$

于是周期为：

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2l\cos\theta}{3g}}$$

例3：

最小作用量原理

基本概念

作用量

任意力学系统的运动由函数 $L(q_1,q_2,\cdots,q_s,\dot q_1,\dot q_2,\cdots,\dot q_s,t)$（记为 $L(q,\dot q,t)$） 描述，其对时间的积分：

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot q,t)\mathrm{d}t$$

称为作用量

该系统由时空点 (t_0,q_0) 至 (t_1,q_1) 的运动方程定义为使得 S 取极小的路径

哈密顿正则力学

基本概念

勒让德变换

给定一个实单自变量函数 $f(t)$，假设它是一个凸函数，即其导函数 $f'(t)$ 严格单调。将 $f'(t)$ 重新命名为一个新的实变量 s，若存在一个实函数 $g(s)$，使得 $g'(s)=t$，则称 $g(s)$ 是 $f(t)$ 的勒让德变换

说白了，$f'(t)=s, g'(s)=t$，则 $f(t)$ 是 $g(s)$ 的勒让德变换，$g(s)$ 是 $f(t)$ 的勒让德变换

哈密顿量

$$H \equiv -L + \sum_\alpha p_\alpha \dot q_\alpha$$

哈密顿正则运动方程

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

泊松括号

$$\{f, g\} \equiv \sum_\alpha (\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha})$$

$$\{f, H\} \equiv \sum_\alpha (\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha})$$

设 $f = f(q, p, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha (\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha (\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha})\end{aligned}$$

利用泊松括号，可改写为：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

若 f 为运动积分，则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$；若进一步 f 不显含时间，则 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$，于是可得到：

$$\{f, H\} = 0$$

泊松定理：若力学量 f 和 g 是运动积分，则它们的泊松括号 $\{f, g\}$ 也是运动积分

泊松括号的性质

（1）

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\{f, f\} = 0$$

$$\{f, c\} = 0$$

$$\{c_1 f, c_2 g\} = c_1 c_2 \{f, g\}$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$$

$$\begin{aligned}\{f_1 f_2, g\} &= f_1\{f_2, g\} + \{f_1, g\}f_2 \\ &= f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$

（2）

$$\{f, q_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$$

$$\{f, p_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

（3）

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = 0$$

$$\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$$

$$\{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$$

（4）雅可比恒等式：

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

注意到：

$$\{q_\alpha,H\}\equiv\sum_\beta(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta})=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\{p_\alpha,H\}\equiv\sum_\beta(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}-\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\beta})=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

用泊松括号表示的哈密顿正则运动方程

$$\dot{q}_\alpha=\{q_\alpha,H\}$$

$$\dot{p}_\alpha=\{p_\alpha,H\}$$

设力学系统的哈密顿量不显含时间，即 $H=H(p,q)$，则：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}=0$$

即 H 是系统的一个运动积分

又设另一运动积分为 $\varphi(q,p,t)$，即 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$，而：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\{\varphi,H\}$$

于是：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\{\varphi,H\}$$

φ 是运动积分，H 是运动积分，由泊松定理，$\{\varphi,H\}$ 也是运动积分，于是 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\{\varphi,H\}$ 也是运动积分

$\{\varphi,H\}$ 是运动积分，于是 $\frac{\mathrm{d}\{\varphi,H\}}{\mathrm{d}t}=0$，而：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\{\varphi,H\}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\{\varphi,H\}}{\partial t}+\{\{\varphi,H\},H\}\\&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\{\{\varphi,H\},H\}\end{aligned}$$

$\{\varphi,H\}$ 是运动积分，H 是运动积分，由泊松定理，$\{\{\varphi,H\},H\}$ 也是运动积分

于是 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\{\{\varphi,H\},H\}$ 也是运动积分

以此类推，$\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}$ 都是运动积分

例题

例1：求直角坐标系动量各分量与角动量各分量的泊松括号

$$\{f,p_\alpha\}=\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\Longrightarrow\begin{cases}\{J_x,p_y\}=\dfrac{\partial J_x}{\partial y}\\\qquad\qquad=\dfrac{\partial(yp_z-zp_y)}{\partial y}\\\qquad\qquad=p_z\\\{J_x,p_x\}=\dfrac{\partial J_x}{\partial x}\\\qquad\qquad=\dfrac{\partial(yp_z-zp_y)}{\partial x}\\\qquad\qquad=0\end{cases}$$

一般地，

$$\{J_i,p_j\}=\sum_k\varepsilon_{ijk}p_k$$

例2：求直角坐标系矢径各分量与角动量各分量的泊松括号

$$\{J_i, x_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k$$

3）求角动量各分量的泊松括号

$$\{J_i, J_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k$$

两体问题

基本概念

约化质量：对于两个质量分别为 m_1, m_2 的质点所组成的系统，它们的约化质量，记为 μ，定义为：$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$（约化质量具有质量量纲）

有效势：有效势，记为 $V_{\text{eff}}(r)$，定义为：$V_{\text{eff}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$，其中 $V(r)$ 是粒子实际所处的势场，l 是角动量

圆形轨道条件：

（1）质点有效势具有**极值**

（2）质点能量恰好等于有效势的极值

圆形闭合轨道的稳定条件：

（1）质点等效势能具有**极小值**

（2）质点能量恰好等于有效势的极小值

中心力场运动

若运动质点所受的力的作用线始终通过某个定点，则称该质点受中心力作用，定点为力心

中心力场运动质点角动量守恒、能量守恒

拉格朗日理论：体系势能 U 只取决于 $\vec{r}$ 的大小，故 L 具有空间旋转不变性，故角动量守恒

体系拉格朗日量：

$$L = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} - V(r)$$

由E-L方程，可得体系运动方程为：

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{r^2\dot{\theta}}{2}) = 0$$

利用运动积分 E, l 求周期和轨道方程

角动量、能量是两个运动积分：

$$\begin{cases} mr^2\dot{\theta} = l \\ E = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \end{cases}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \tag{1}$$

代入 E：

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \tag{2}$$

由 (2)，一方面可得：

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{l^2}{2mr^2} - V(r)]}}$$

周期：

$$\Delta T=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-\frac{l^2}{2mr^2}-V(r)]}}$$

> 其中，$r_{\max},r_{\min}$ 可通过 $V_{\mathrm{eff}}(r)=E$ 得到

由 (1)，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$，再结合 (2)，于是另一方面：

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-V(r)]-\frac{l^2}{r^2}}}$$

积分得轨道方程积分形式：

$$\theta=\int_{r_0}^{r}\frac{l\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{2m[E-V(r)]-(\frac{l}{r})^2}}+\theta_0$$

标准积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{-(b+2ax)}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

有效势分析法

有效势：有效势，记为 $V_{\mathrm{eff}}(r)$，定义为：$V_{\mathrm{eff}}(r)\equiv V(r)+\frac{l^2}{2mr^2}$，其中 $V(r)$ 是粒子实际所处的势场，l 是角动量

画出 $V_{\mathrm{eff}}(r)$ 关于 r 的图像，对于确定的 E，由于 $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+V_{\mathrm{eff}}(r)$，于是质点只可能在 $V_{\mathrm{eff}}(r)\leqslant E$ 的区域内运动。对于束缚轨道，解方程 $V_{\mathrm{eff}}(r)=E$ 可得 $r_{\min},r_{\max}$

$V(r)=-\frac{k}{r},k>0$ 势场

> 质点受万有引力

轨道分析

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta&=\frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-V(r)]-\frac{l^2}{r^2}}}\\&=\frac{\frac{l}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E+\frac{k}{r}]-\frac{l^2}{r^2}}}\end{aligned}$$

令 $u=\frac{1}{r},r=\frac{1}{u},\mathrm{d}r=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{-u^2+\frac{2mk}{l^2}u+\frac{2mE}{l^2}}}$$

利用标准积分公式：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\frac{-(b+2ax)}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$$

得：

$$\theta-\theta_0=-\arccos\frac{\frac{l^2u}{mk}-1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}}$$

于是：

$$r=\frac{\frac{l^2}{mk}}{1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta_0)}$$

令 $p=\frac{l^2}{mk},e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}$，轨道方程方程可写为：

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

可以看出，轨道方程具有圆锥曲线的形式

e 不同，圆锥曲线可以分为椭圆、抛物线和双曲线，而 e 又取决于体系的能量，故：

（1）当 $E=-\frac{mk^2}{2l^2}$ 时，$e=0$，轨迹为圆

（2） 当 $E<0$ 时，$e<1$，轨迹为椭圆，此时可证：

椭圆的半长轴 a 只与能量有关：$a=\frac{r_{\min}+r_{\max}}{2}=\frac{p}{1-e^2}=-\frac{k}{2E}$

给定能量 E 后，椭圆的偏心率 e 由角动量 l 决定：$e=\sqrt{1-\frac{l^2}{mka}}$

（3）当 $E=0$ 时，$e=1$，轨迹为抛物线

（4）当 $E>0$ 时，$e>1$，轨迹为双曲线

椭圆轨道周期分析

在一般中心吸引力场的作用下，束缚运动的轨道不一定是闭合的。椭圆运动周期，记为 τ，定义为质点从近日点出发到再次返回近日点所需的时间。可以求出：

$$\tau=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$V(r)=kr^2,k>0$ 势场

轨道分析

> 可以证明，束缚轨道是闭合的

例题

刚体

基础知识

刚体：刚体是一种特殊的质点组，其任何两个质点间的距离不因力的作用而发生改变。刚体在运动过程中大小、形状不变。

刚体运动分类

平动：运动过程中刚体上任意两点连线始终平行；可看作单质点运动；3 个独立变量

定轴转动：刚体中两质点不动的运动叫定轴转动；由该两点确定的直线叫转动轴；1 个独立变量

平面平行运动：运动中任一点始终在平行于某固定平面的平面运动；运动可分解为平面内任意一点的平动（2 个自由变量）和绕此点且垂直于该平面的转动（1 个自由变量）

定点转动：运动中仅一点不动，3 个自由变量

一般运动：刚体在空间任意运动，可分解为质心平动（3 个自由变量）和绕质心的定点转动（3 个自由度）

刚体的任意运动可分解为其上某点的平动和绕该点的转动两种模式的合成。选定的点称为基点。

基点的选取具有任意性。

欧拉角

为了描述刚体的转动，选取一个静止坐标系 XYZ 和一个固定在刚体上的运动坐标系 xyz，用运动坐标系 xyz 各轴相对固定坐标系 XYZ 各轴方向角度的变化来描述

取初始时刻静止系 XYZ 和运动系 xyz 重合

- 将 xyz 系绕 z 轴旋转 $\phi(0\leqslant\phi\leqslant2\pi)$ 得 $x'y'z$ 系；ϕ 称为进动角
- 将 $x'y'z$ 绕 x' 轴旋转 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 得 $x'y''z'$ 系；θ 称为章动角
- 将 $x'y''z'$ 绕 z' 轴旋转 $\psi(0\leqslant\psi\leqslant2\pi)$ 得 $x''y'''z'$ 系；ψ 称为自转角

(θ, ϕ, ψ) 称为欧拉角

各欧拉角相应变化率为：

- $\angle XON = \phi$，$\dot{\phi}\vec{e}_Z$ 在 xyz 系中的坐标为 $\dot{\phi}(\sin\theta\sin\psi, \sin\theta\cos\psi, \cos\theta)$
- $\angle zOZ = \theta$，$\dot{\theta}\vec{e}_{ON}$ 在 xyz 系坐标为 $\dot{\theta}(\cos\psi, -\sin\psi, 0)$
- $\angle xON = \psi$，$\dot{\psi}\vec{e}_z$ 在 xyz 系的坐标为 $\dot{\psi}(0, 0, 1)$

欧拉运动方程

$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_y &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_z &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{aligned}
$$

或写成矩阵乘法的形式：

$$
\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
$$

瞬心

某一时刻，刚体上速度为零的质点称为转动瞬心

刚体的角动量和惯量张量

设刚体绕定点 O 做角速度为 $\vec{\omega}$ 的转动，其内质点 P 速度为 $\vec{v}_i$，位矢 $\vec{r}_i$，则 P 对 O 的角动量为：

$$
\vec{J}_i \equiv \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = m_i\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)
$$

整个刚体对 O 的角动量为：

$$
\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i = \sum_i m_i[\vec{\omega}r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)]
$$

分量形式为：

$$
\begin{aligned}
J_x &= \sum_i m_i[\omega_x(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\
&= \omega_x \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_y &= \sum_i m_i[\omega_y(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - y_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\
&= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_z &= \sum_i m_i[\omega_z(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - z_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] \\
&= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)
\end{aligned}
$$

角动量可以写成矩阵乘法的形式的形式：

$$
\vec{J} = \mathbf{I}\vec{\omega}
$$

$$
\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} \sum\limits_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum\limits_i m_i x_i y_i & -\sum\limits_i m_i x_i z_i \\ -\sum\limits_i m_i y_i x_i & \sum\limits_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum\limits_i m_i y_i z_i \\ -\sum\limits_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum\limits_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}
$$

$\mathbf{I}$ 称为**惯量张量**，其对角元 $I_{\alpha\alpha}$ 为转动惯量，非对角元 $I_{\alpha\beta}$ 为惯量积

若组成刚体的质点是连续的，则惯量张量中的求和变为积分：

$$
I_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r})(r^2\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta)\mathrm{d}V
$$

其中，$\rho(\vec{r})$ 是刚体的体密度

刚体的动能：

$$\begin{aligned}
T &\equiv \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^2 \\
&\equiv \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{v}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_i \vec{r}_i\times(m_i\vec{v}_i) \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{J} \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbf{I}\vec{\omega}) \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2+2I_{xy}\omega_x\omega_y+2I_{yz}\omega_y\omega_z+2I_{zx}\omega_z\omega_x)
\end{aligned}$$

惯量张量的取值与参考点 O 的选择有关

主转动惯量和惯量主轴

适当选择坐标系可以使得惯量张量为对角的，此时的转动惯量称为**主转动惯量**，$I_1=I_{11},I_2=I_{22},I_3=I_{33}$，相应的坐标轴称为**惯量主轴**，此时：

$$\vec{J}=I_1\omega_x\vec{e}_x+I_2\omega_y\vec{e}_y+I_3\omega_z\vec{e}_z$$

$$T=\frac{1}{2}(I_1\omega_x^2+I_2\omega_y^2+I_3\omega_z^2)$$

惯量主轴的选择：

坐标原点选在质心上

坐标轴选在对称性高的轴上

欧拉动力学方程

$$\begin{cases}
I_x\dot{\omega}_x-(I_y-I_z)\omega_y\omega_z=M_x \\
I_y\dot{\omega}_y-(I_z-I_x)\omega_z\omega_x=M_y \\
I_z\dot{\omega}_z-(I_x-I_y)\omega_x\omega_y=M_z
\end{cases}$$

欧拉陀螺

刚体不受任何净力或净力矩

$$\begin{cases}
I_x\dot{\omega}_x=(I_y-I_z)\omega_y\omega_z \\
I_y\dot{\omega}_y=(I_z-I_x)\omega_z\omega_x \\
I_z\dot{\omega}_z=(I_x-I_y)\omega_x\omega_y
\end{cases}$$

若刚体对称，将对称轴选为 z 轴，$I_x=I_y=I_1$

$$\begin{cases}
I_1\dot{\omega}_x=(I_1-I_z)\omega_y\omega_z \\
I_1\dot{\omega}_y=-(I_1-I_z)\omega_z\omega_x \\
I_z\dot{\omega}_z=0
\end{cases}$$

Ω_z 是一个常数

$$\begin{cases}
\dot{\omega}_x=-\Omega\omega_y \\
\dot{\omega}_y=\Omega\omega_x
\end{cases},\quad \Omega\equiv\frac{I_z-I_1}{I_1}\omega_z$$

$$\omega_x=A\cos\Omega t,\quad \omega_y=A\sin\Omega t$$

$$\vec{\omega}=A\cos\Omega t\vec{e}_x+A\sin\Omega t\vec{e}_y+\omega_z\vec{e}_z$$

总角速度大小为 $\sqrt{\omega_z^2+a^2}$ 为常数

角动量和动能守恒

微振动

非惯性参考系