1.1

1.1-1

> 叙述诺特定理，并谈谈你的理解。

诺特定理：每个连续对称性都对应着相应的守恒律。

诺特定理的意义在于它揭示了自然界中对称性和守恒量之间的深刻联系，使得物理学家能够用对称性原理来推导和理解守恒定律。比如，牛顿力学中的动量守恒可以通过空间平移对称性得到解释，而在爱因斯坦的相对论中，时间平移对称性与能量守恒的关系也可以通过诺特定理来阐明。

1.1-2

> 从哈密顿量 $H(x)$ 及其本征能级的角度叙述函数空间（或线性空间）、函数基（或矢量基）的概念。

在量子力学中，微观体系的状态可以用波函数来表示。波函数所在的集合可以被视作一个函数空间。这个空间包含所有可能的波函数（态矢量）。函数空间是一个希尔伯特空间，即完备的内积空间。

在函数空间中，我们通常需要选择一组基函数来表示其他函数。基函数是一组可以用来线性组合表示空间中任意函数的函数。

以哈密顿量为例，设其本征方程为

$$H\left|\psi_n\right\rangle=E_n\left|\psi_n\right\rangle$$

哈密顿量 H 的本征态矢的集合 $\{\left|\psi_n\right\rangle\}$ 可作为希尔伯特空间中的一组正交完备基，它们可以张成整个函数空间。其他态矢可表达为这组基的线性组合。

1.1-3

> 解释以下概念：线性变换、线性算符

线性变换

线性变换是一个将一个向量空间映射到另一个（可能是相同的）向量空间的映射，并且保持向量加法和标量乘法的线性结构。如果 V 和 W 是两个向量空间，一个从 V 到 W 的映射 T 是线性的，当且仅当对于 V 中的任意向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，以及标量 a 满足以下两个条件：

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$$

线性算符

线性算符是一个特殊的线性变换，其定义域和陪域是相同的向量空间。因此，线性算符可以被看作是一个将一个向量空间映射到自身的线性变换。如果 V 是一个向量空间，那么一个线性算符 T 是一个映射 $T : V \to V$，并且它满足以下两个条件：

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u})$$

1.1-4

> 解释以下概念：幺正矩阵、厄米矩阵、实正交矩阵

幺正矩阵（Unitary Matrix）

幺正矩阵是一个复矩阵 U，满足以下条件：

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

其中 $U^\dagger$ 是 U 的**共轭转置**（Hermitian transpose），即将矩阵的每个元素取复共轭后再进行转置，I 是单位矩阵。

特点：

1. **保长度性**：幺正矩阵保持向量的长度和角度不变。如果 $\mathbf{x}$ 是一个向量，幺正矩阵 U 使得 $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$。
2. **保内积性**：对任意向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，幺正矩阵保持它们的内积，即 $\langle U\mathbf{x}|U\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$。
3. **逆矩阵**：幺正矩阵的逆矩阵等于它的共轭转置，即 $U^{-1} = U^\dagger$。

厄米矩阵（Hermitian Matrix）

厄米矩阵是一个复矩阵 H，满足以下条件：

$$H^\dagger = H$$

即矩阵 H 等于其共轭转置。

特点：

1. **实特征值**：厄米矩阵的所有特征值都是实数。
2. **正交对角化**：厄米矩阵可以通过一个幺正矩阵对角化。即存在一个幺正矩阵 U 和对角矩阵 D，使得 $H = UDU^\dagger$。
3. **实对角元素**：厄米矩阵的对角元素是实数。

实正交矩阵（Orthogonal Matrix）

实正交矩阵是一个实矩阵 O，满足以下条件：

$$O^\mathrm{T} O = O O^\mathrm{T} = I$$

其中 O^T 是 O 的转置，I 是单位矩阵。

特点：

1. **保长度性**：实正交矩阵保持向量的长度，即 $||O\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$。
2. **保内积性**：实正交矩阵保持向量之间的内积，即 $\langle O\mathbf{x}|O\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$。
3. **逆矩阵**：实正交矩阵的逆矩阵等于它的转置，即 $O^{-1} = O^\mathrm{T}$。

1.1-5

> 证明：$(gf\cdots h)^{-1} = h^{-1}\cdots f^{-1}g^{-1}$

证明：

$$(gf\cdots h)(gf\cdots h)^{-1} = e$$

依次左乘 $g^{-1}, f^{-1}, \cdots, h^{-1}$ 得：

$$(gf\cdots h)^{-1} = h^{-1}\cdots f^{-1}g^{-1}$$

1.1-6

> 计算正方形对称群 D_4 的乘法表及生成元。

$$\mathrm{D}_4=\{e,C_4^1,C_4^2,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2\}$$

$e(ABCD)=(ABCD)$

$C_4^1(ABCD)=(DABC)$

$C_4^2(ABCD)=(CDAB)$

$C_4^3(ABCD)=(BCDA)$

$\sigma_x(ABCD)=(DCBA)$

$\sigma_y(ABCD)=(BADC)$

$\sigma_1(ABCD)=(ADCB)$

$\sigma_2(ABCD)=(CBAD)$

	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_y	σ_1	σ_2
e	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_y	σ_1	σ_2
C_4^1	C_4^1	C_4^2	C_4^3	e	σ_1	σ_2	σ_y	σ_x
C_4^2	C_4^2	C_4^3	e	C_4^1	σ_y	σ_x	σ_2	σ_1
C_4^3	C_4^3	e	C_4^1	C_4^2	σ_2	σ_1	σ_x	σ_y
σ_x	σ_x	σ_2	σ_y	σ_1	e	C_4^2	C_4^3	C_4^1
σ_y	σ_y	σ_1	σ_x	σ_2	C_4^2	e	C_4^1	C_4^3
σ_1	σ_1	σ_x	σ_2	σ_y	C_4^1	C_4^3	e	C_4^2
σ_2	σ_2	σ_y	σ_1	σ_x	C_4^3	C_4^1	C_4^2	e

生成元:

$$\{C_4^1,\sigma_x\}$$

1.1-7

> 构造 $1,2,3,4,5,6$ 阶群

$$
\begin{gathered}
\{e\} \\
\{e, C_2^1\} \\
\{e, C_3^1, C_3^2\} \\
\{e, C_4^1, C_4^2, C_4^3\} \\
\{e, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4\} \\
\{e, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5\}
\end{gathered}
$$

乘法定义为：

$$
C_n^p C_n^q = C_n^{p+q}
$$

1.1-8

> 证明当群 G 的阶数为 $5,6,7$ 时，除恒元外，不可能所有元素的阶数都是 2。

证明：

$n_G = 5$ 的情况

假设除恒元外，所有元素的阶数都是 2，则这些元素生成的循环子群的阶数为 2。而根据拉格朗日定理，子群的阶数为群阶数的因子，这里 $n_G = 5 = 1 \times 5$，于是子群的阶数只可能是 1 或 5，这与假设矛盾。

$n_G = 6$ 的情况

假设除恒元外，所有元素的阶数都是 2。设 $\forall g_\alpha, g_\beta \in G$，则有：

$$
g_\alpha^2 = e,\ \ g_\beta^2 = e
$$

一方面：

$$
g_\alpha^2 g_\beta^2 = g_\alpha g_\alpha g_\beta g_\beta = e^2 = e
$$

另一方面，$g_\alpha g_\beta \in G$，于是：

$$
(g_\alpha g_\beta)^2 = g_\alpha g_\beta g_\alpha g_\beta = e
$$

对比得：

$$g_\alpha g_\alpha g_\beta g_\beta = g_\alpha g_\beta g_\alpha g_\beta$$

两边左乘 g_α^{-1}，再右乘 g_β^{-1} 得：

$$g_\alpha g_\beta = g_\beta g_\alpha$$

这就是说，从假设出发可得，群 G 必定为阿贝尔群。

然而，阶为 6 的非阿贝尔群是存在的，如 D_3 群，这与假设矛盾。

$n_G = 7$ 的情况

假设除恒元外，所有元素的阶数都是 2，则这些元素生成的循环子群的阶数为 2。而根据拉格朗日定理，子群的阶数为群阶数的因子，这里 $n_G = 7 = 1 \times 7$，于是子群的阶数只可能是 1 或 7，这与假设矛盾。

1.3

1.3-1

> 由重排定理写出：$2, 3, 4, 5$ 阶群的乘法表。

2 阶群乘法表：

	e	C_2^1
e	e	C_2^1
C_2^1	C_2^1	e

3 阶群乘法表：

	e	C_3^1	C_3^2
e	e	C_3^1	C_3^2
C_3^1	C_3^1	C_3^2	e
C_3^2	C_3^2	e	C_3^1

4 阶群乘法表：

	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3
e	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3
C_4^1	C_4^1	C_4^2	C_4^3	e
C_4^2	C_4^2	C_4^3	e	C_4^1
C_4^3	C_4^3	e	C_4^1	C_4^2

	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	e	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	e	g_2
g_4	g_4	g_3	g_2	e

5 阶群乘法表：

	e	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4
e	e	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4
C_5^1	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	e
C_5^2	C_5^2	C_5^3	C_5^4	e	C_5^1
C_5^3	C_5^3	C_5^4	e	C_5^1	C_5^2
C_5^4	C_5^4	e	C_5^1	C_5^2	C_5^3

1.3-2

> 证明：（1）子群 H 的恒元就是群 G 的恒元；（2）$HH = H$

（1）证明：

设子群 H 的恒元为 e'，群 G 的恒元为 e，设 $h_\alpha \in H$，则：

$$h_\alpha = h_\alpha e' = h_\alpha e$$

两边左乘 h_α^{-1} 得：

$$e' = e$$

（2）

一方面，由群的封闭性，$\forall h_\alpha, h_\beta \in H, h_\alpha h_\beta \in H \Longrightarrow HH \subseteq H$

另一方面，$\forall h_\gamma, h_\alpha \in H, \exists h_\beta \in H$，使得 $h_\gamma h_\alpha = h_\beta$，右乘 h_α^{-1} 得 $h_\gamma = h_\beta h_\alpha^{-1} \Longrightarrow H \subseteq HH$

综上，$HH = H$

1.3-3

> 求 D_3 群和 D_4 群的所有子群。

D_3 群的所有子群：

$$\begin{gathered}\{e\}\\ \mathrm{D}_3\\ \{e, d, f\}\\ \{e, a\}\\ \{e, b\}\\ \{e, c\}\end{gathered}$$

D_4 群的所有子群：

$$\begin{gathered}\{e\}\\ \mathrm{D}_4\\ \{e, C_4^2\}\\ \{e, C_4^1, C_4^2, C_4^3\}\\ \{e, \sigma_x\}\\ \{e, \sigma_y\}\\ \{e, \sigma_1\}\\ \{e, \sigma_2\}\\ \{e, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\}\\ \{e, C_4^2, \sigma_1, \sigma_2\}\end{gathered}$$

1.3-4

> 证明：阶为素数的群没有非平庸子群，这种群只能是循环群。

证明：

由拉格朗日定理，子群的阶为群阶的因子。对于阶为素数 n_G 的群 G ，其阶的因子为 1 和 n_G，因此其子群的阶只可能取 1 或 n_G，1 对应 $\{e\}$，n_G 对应 G 本身，二者皆为平庸子群。因此阶为素数的群没有非平庸子群。

设 $g \in G$ 且 $g \neq e$ 且 $g^m = e, m > 1$，则

$$\{g, \cdots, g^m = e\}$$

是一个 m 阶子群。

拉格朗日定理给出，m 必定是 n_G 的因数，而 $m > 1$，于是 $m = n_G$。这就是说，群 G 中任何非单位元生成了整个群，于是群 G 是循环群。

1.3-5

> 证明：合数阶的有限群必有非平庸的循环子群。

证明：

假设阶为合数 n_G 的群 G 没有非平庸的循环子群，设 $g \in G$ 是非单位元，则以 g 为生成元可张成一个循环子群。由拉格朗日定理，这个子群的阶数只能是 n_G：

$$\{g, g^2, \cdots, g^{n_G}\}$$

由于 n_G 为合数，其必定可分解为：

$$n_G = m \times n,\ \ 1 < m, n < n_G$$

考虑集合：

$$\{g^n, g^{2n}, g^{3n}, \cdots, g^{m\times n} = g^{n_G} = e\}$$

可以验证，这个集合是个 m 阶循环子群，这与假设中群 G 没有非平庸的循环子群矛盾。

综上，合数阶的有限群必有非平庸的循环子群。

1.3-6

> 证明群 G 的两个子群 H_1 和 H_2 的交 $H=H_1\bigcap H_2$ 为群 G 的子群。

证明：

封闭性：$\forall h_\alpha,h_\beta\in H=H_1\bigcap H_2,h_\alpha,h_\beta\in H_1,h_\alpha,h_\beta\in H_2\Longrightarrow h_\alpha h_\beta\in H_1,h_\alpha h_\beta\in H_2\Longrightarrow h_\alpha h_\beta\in H=H_1\bigcap H_2$

结合律：自动满足。

存在恒元：$e\in H_1,e\in H_2\Longrightarrow e\in H=H_1\bigcap H_2$

存在逆元：

$$
\begin{aligned}
&\forall h_\alpha\in H=H_1\bigcap H_2,h_\alpha\in H_1,h_\alpha\in H_2\\
\Longrightarrow&h_\alpha^{-1}\in H_1,h_\alpha^{-1}\in H_2\\
\Longrightarrow&h_\alpha^{-1}\in H=H_1\bigcap H_2
\end{aligned}
$$

1.4

1.4-1

> 证明除了 $\{e\}$ 以外，类不是子群。

假设 $a\neq e$，且设 $C_a=\{g_\alpha a g_\alpha^{-1}|g_\alpha\in G\}\neq\{e\}$ 是子群，则：

$$
e\in C_a\Longrightarrow\exists g_\alpha\in G,g_\alpha a g_\alpha^{-1}=e\Longrightarrow a=g_\alpha^{-1}g_\alpha=e
$$

这与假设 $a\neq e$ 矛盾。

综上，证明除了 $\{e\}$ 以外，类不是子群。

1.4-2

> 证明：两个不同的类没有公共元素。

假设两个不同的类 $C_a\neq C_b$ 有一个公共元素 g，即 $g\in C_a,g\in C_b$，则：

$$g\sim a,g\sim b$$

$$\forall g_\alpha\in C_a,g_\alpha\sim g\sim b\Longrightarrow g_\alpha\sim b\Longrightarrow g_\alpha\in C_b\Longrightarrow C_a\subseteq C_b$$

$$\forall g_\beta\in C_b,g_\beta\sim g\sim a\Longrightarrow g_\beta\sim a\Longrightarrow g_\beta\in C_a\Longrightarrow C_b\subseteq C_a$$

于是 $C_a=C_b$，这与假设 $C_a\neq C_b$ 矛盾。

综上，两个不同的类没有公共元素。

1.4-3

> 分别求 D_3 群和 D_4 群的类。

D_3 群的类：

e 自成一类：$\{e\}$

类中元素的个数必为群阶的因数。D_3 群阶为 $6=2\times3$，由对称性，a,b,c 必成一类：

$$\{a,b,c\}$$

剩下只有 d,f 成一类：

$$\{d,f\}$$

综上，D_3 群的类为：

$$\begin{gathered}\{e\}\\\{d,f\}\\\{a,b,c\}\end{gathered}$$

D_4 群的类：

$$\mathrm{D}_4=\{e,C_4^1,C_4^2,C_4^3,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_1,\sigma_2\}$$

$e(ABCD)=(ABCD),\ \ e^{-1}=e$

$C_4^1(ABCD)=(DABC),\left(C_4^1\right)^{-1}=C_4^3$

$C_4^2(ABCD)=(CDAB),\ \ \left(C_4^2\right)^{-1}=C_4^2$

$C_4^3(ABCD)=(BCDA),\ \ \left(C_4^3\right)^{-1}=C_4^1$

$\sigma_x(ABCD)=(DCBA),\ \ (\sigma_x)^{-1}=\sigma_x$

$\sigma_y(ABCD) = (BADC),\ \ (\sigma_y)^{-1} = \sigma_y$

$\sigma_1(ABCD) = (ADCB),\ \ (\sigma_1)^{-1} = \sigma_1$

$\sigma_2(ABCD) = (CBAD),\ \ (\sigma_2)^{-1} = \sigma_2$

	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_y	σ_1	σ_2
e	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_y	σ_1	σ_2
C_4^1	C_4^1	C_4^2	C_4^3	e	σ_1	σ_2	σ_y	σ_x
C_4^2	C_4^2	C_4^3	e	C_4^1	σ_y	σ_x	σ_2	σ_1
C_4^3	C_4^3	e	C_4^1	C_4^2	σ_2	σ_1	σ_x	σ_y
σ_x	σ_x	σ_2	σ_y	σ_1	e	C_4^2	C_4^3	C_4^1
σ_y	σ_y	σ_1	σ_x	σ_2	C_4^2	e	C_4^1	C_4^3
σ_1	σ_1	σ_x	σ_2	σ_y	C_4^1	C_4^3	e	C_4^2
σ_2	σ_2	σ_y	σ_1	σ_x	C_4^3	C_4^1	C_4^2	e

e 的共轭类：$\{e\}$

$$\sigma_x C_4^1 \left(\sigma_x\right)^{-1} = C_4^3$$

$$\sigma_y C_4^1 \left(\sigma_y\right)^{-1} = C_4^3$$

$$\sigma_1 C_4^1 \left(\sigma_1\right)^{-1} = C_4^3$$

$$\sigma_2 C_4^1 \left(\sigma_2\right)^{-1} = C_4^3$$

C_4^1 的共轭类：$\{C_4^1, C_4^3\}$

$$\sigma_x C_4^2 \left(\sigma_x\right)^{-1} = C_4^2$$

$$\sigma_y C_4^2 \left(\sigma_y\right)^{-1} = C_4^2$$

$$\sigma_1 C_4^2 \left(\sigma_1\right)^{-1} = C_4^2$$

$$\sigma_2 C_4^2 \left(\sigma_2\right)^{-1} = C_4^2$$

C_4^2 的共轭类：$\{C_4^2\}$

$$C_4^1 \sigma_x \left(C_4^1\right)^{-1} = \sigma_y$$

$$C_4^2\sigma_x\left(C_4^2\right)^{-1}=\sigma_x$$

$$C_4^3\sigma_x\left(C_4^3\right)^{-1}=\sigma_y$$

$$\sigma_y\sigma_x\left(\sigma_y\right)^{-1}=\sigma_x$$

$$\sigma_1\sigma_x\left(\sigma_1\right)^{-1}=\sigma_y$$

$$\sigma_2\sigma_x\left(\sigma_2\right)^{-1}=\sigma_y$$

σ_x 的共轭类：$\{\sigma_x,\sigma_y\}$

$$C_4^1\sigma_1\left(C_4^1\right)^{-1}=\sigma_2$$

$$C_4^2\sigma_1\left(C_4^2\right)^{-1}=\sigma_1$$

$$C_4^3\sigma_1\left(C_4^3\right)^{-1}=\sigma_2$$

$$\sigma_x\sigma_1\left(\sigma_x\right)^{-1}=\sigma_2$$

$$\sigma_y\sigma_1\left(\sigma_y\right)^{-1}=\sigma_2$$

$$\sigma_2\sigma_1\left(\sigma_2\right)^{-1}=\sigma_1$$

σ_1 的共轭类：$\{\sigma_1,\sigma_2\}$

综上，所有的类为：

$$\begin{gathered}\{e\}\\\{C_4^1,C_4^3\}\\\{C_4^2\}\\\{\sigma_x,\sigma_y\}\\\{\sigma_1,\sigma_2\}\end{gathered}$$

1.4-4

> 证明所有 n 阶 Abel 群都有 n 个不同类。

证明：

设 G 是 Abel 群，则

$$\forall g,g_\alpha\in G,g_\alpha g g_\alpha^{-1}=(g_\alpha g_\alpha^{-1})g=g$$

于是：

$$C_g=\{g_\alpha g g_\alpha^{-1}|g_\alpha\in G\}=\{g\}$$

即每个元素自成一类。

综上，所有 n 阶 Abel 群都有 n 个不同类。