1

(a)

正则方程为:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \frac{p}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -m\omega^2 x\end{aligned}$$

得到:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

解得:

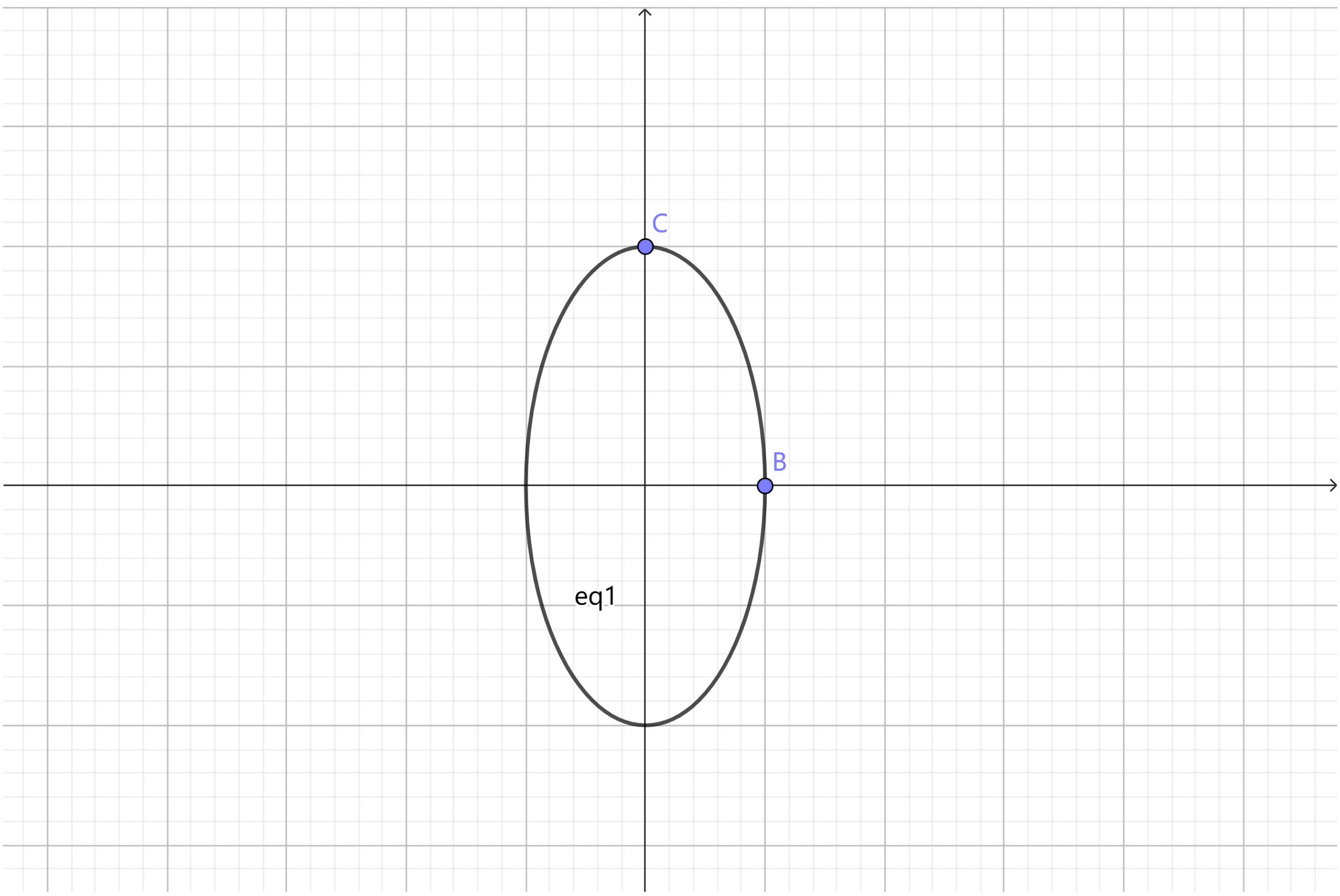
$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = m\dot{x} = mA\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

消去 t 得:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{m^2A^2\omega^2} = 1$$

这是一个 (x, p) 相空间中的椭圆



其中，$B(A, 0), C(0, mA\omega)$

(b)

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
$$

代入 $\ddot{x} = -\sin x$ 中，得到：

$$\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} = -\sin x\mathrm{d}x$$

积分得：

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \cos x + C'$$

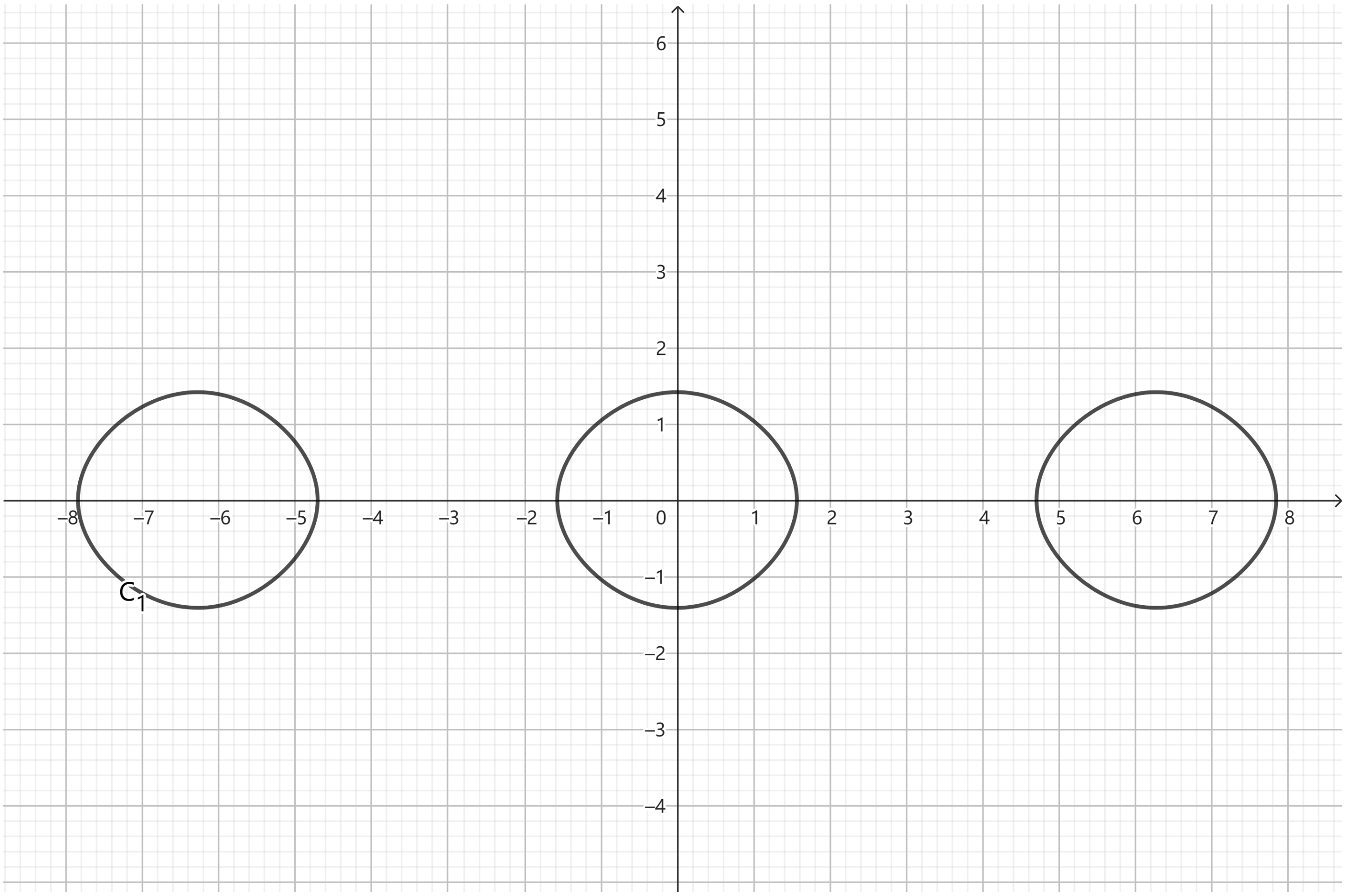
即：

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\cos x + C}$$

当 $C < -2$，无解，没有不动点

当 $C = -2$，则 $x = 2k\pi$，$\dot{x} = 0$，不动点是分布在 x 轴上的点集 $\{(x,0)|x = 2k\pi, k \in Z\}$

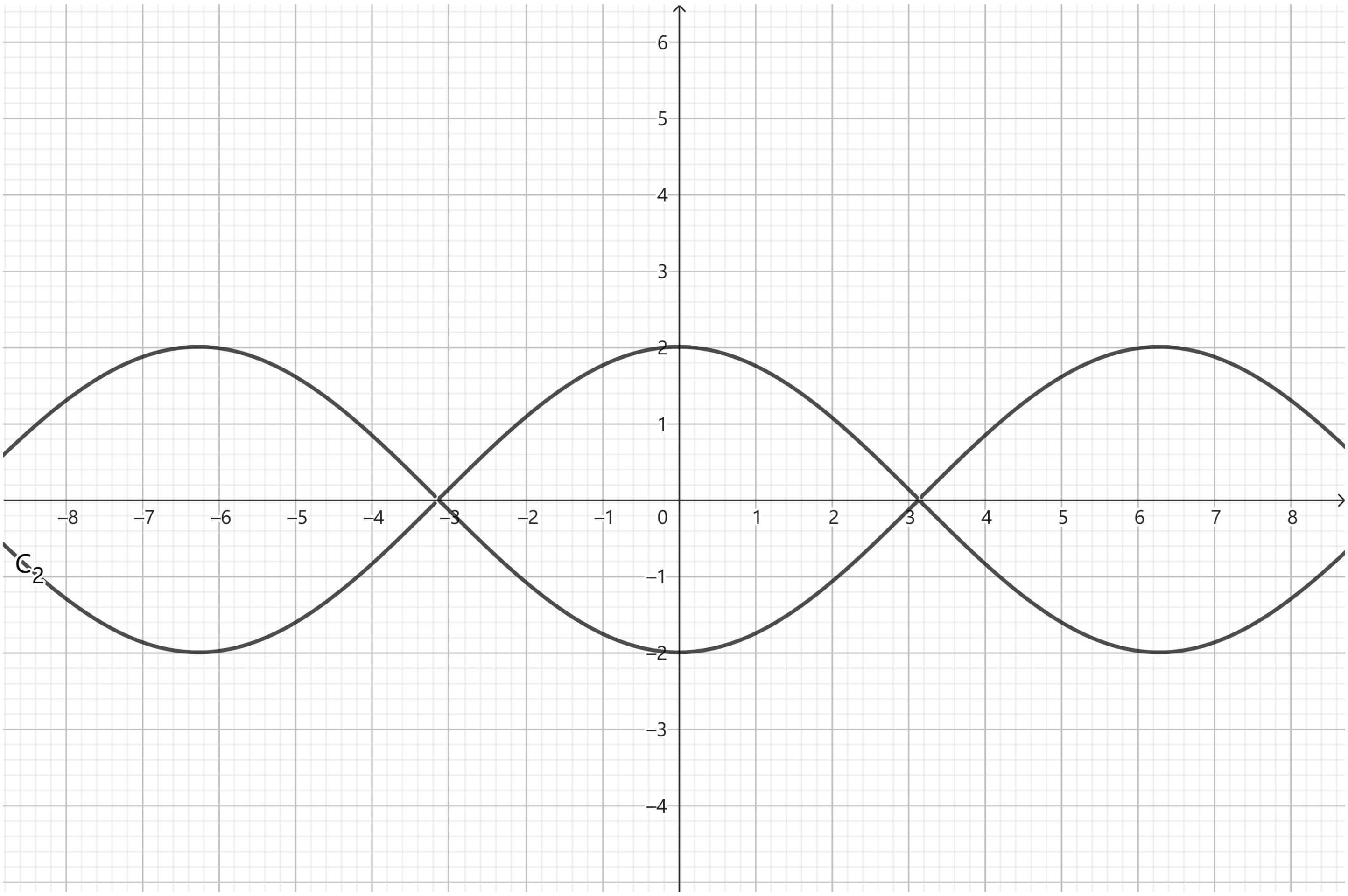
当 $-2 < C < 2$，



第一类不动点为每个封闭曲线与 x 轴的右交点，以封闭曲线上半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴正方向运动，最后停在第一类不动点

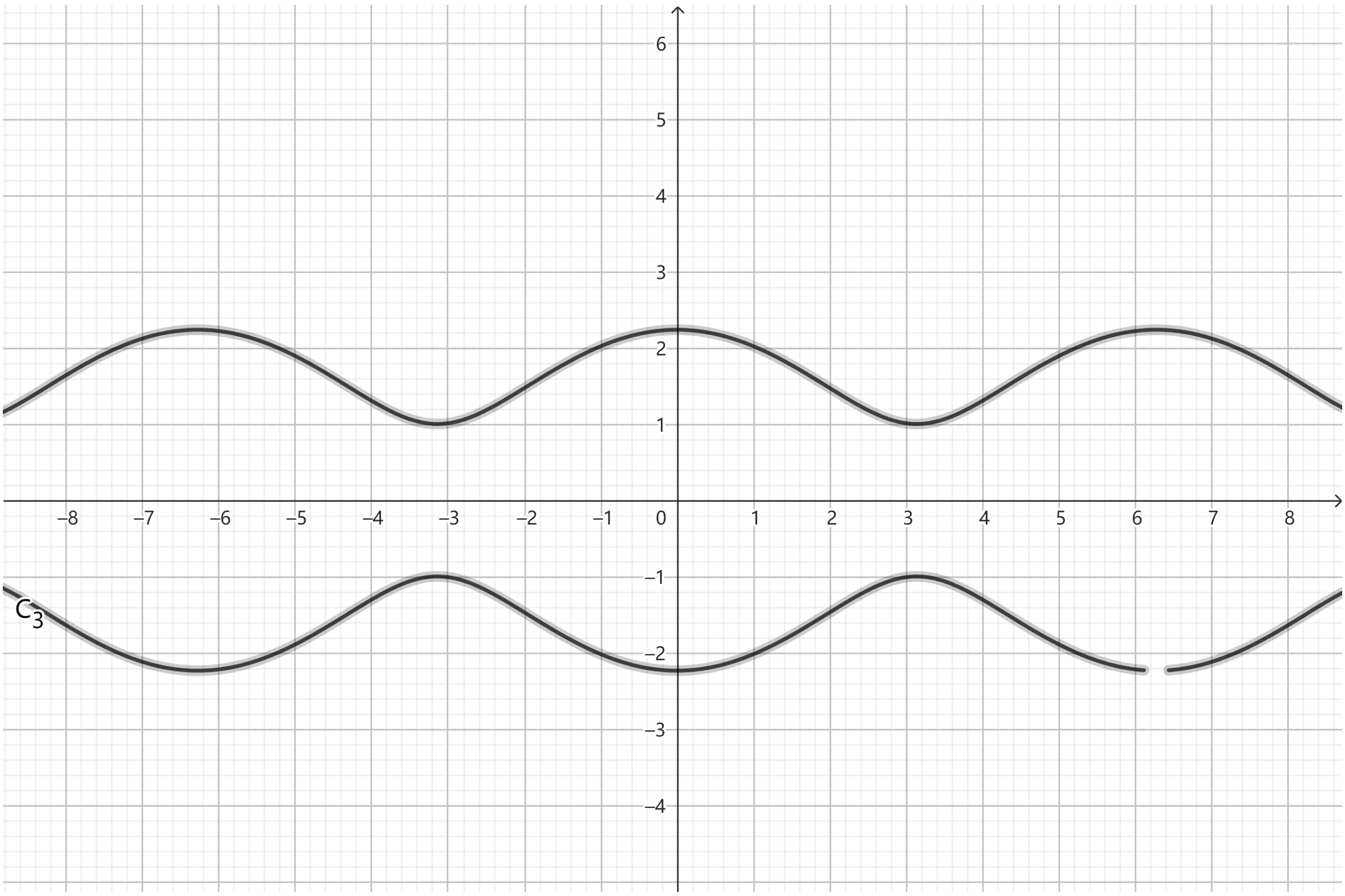
第二类不动点为每个封闭曲线与 x 轴的左交点，以封闭曲线下半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴负方向运动，最后停在第二类不动点

当 $C = 2$，



所有不动点都一样。以曲线上半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴正方向运动，最后停在最近的不动点；以曲线下半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴负方向运动，最后停在最近的不动点

当 $C > 2$，



没有不动点。以曲线上半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴正方向运动，永远不停；以曲线下半支上任何一点为初始状态的质点会向 x 轴负方向运动，永远不停

2

(a)

以 x, y, z 为广义坐标，拉式量为：

$$L=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)-e\phi+\frac{e}{c}(A_xv_x+A_yv_y+A_zv_z)$$

计算广义动量：

$$\begin{cases}p_x=\dfrac{\partial L}{\partial v_x}=mv_x+\dfrac{e}{c}A_x\\ p_y=\dfrac{\partial L}{\partial v_y}=mv_y+\dfrac{e}{c}A_y\\ p_z=\dfrac{\partial L}{\partial v_z}=mv_z+\dfrac{e}{c}A_z\end{cases}$$

矢量形式为：

$$\vec{p}=m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A}$$

用广义动量和广义坐标表示广义速度：

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{m}-\frac{e}{cm}\vec{A}$$

于是得到哈密顿量：

$$\begin{aligned}H&=-L+\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha\\&=-\frac{1}{2}mv^2+e\phi-\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}+(m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A})\cdot\vec{v}\\&=e\phi+\frac{1}{2m}(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2\end{aligned}$$

(b)

正则方程的矢量形式为

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}&=\frac{\partial H}{\partial\vec{p}}\\&=\frac{1}{m}(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}&=-\frac{\partial H}{\partial\vec{r}}\\&=-e\nabla\phi+\frac{e}{mc}(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

两者联立，消去 $\vec{p},\dot{\vec{p}}$ 得：

$$m\ddot{\vec{r}}+e\nabla\phi=\vec{0}\tag{1}$$

原来的欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

矢量形式为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}}-\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=\vec{0}$$

代入 $L=\frac{1}{2}mv^2-e\phi+\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$ 得：

$$m\ddot{\vec{r}}+e\nabla\phi=\vec{0}\tag{2}$$

方程 $(1)(2)$ 完全一样

3

选取直角坐标 x_1, x_2, x_3 为广义坐标

计算广义动量：

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = m_0 \frac{\dot{x}_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \ \alpha = 1,2,3$$

用广义动量和广义坐标表示广义速度：

$$v^2 = \frac{c^2 p^2}{m_0^2 c^2 + p^2}$$

于是得到哈密顿量：

$$\begin{aligned} H &= -L + \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha \dot{q}_\alpha \\ &= m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \\ &= \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} \end{aligned}$$

4

(a)

泊松括号的定义为：

$$\{f, g\} \equiv \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$$

用泊松括号表示的正则方程为：

$$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\}$$

$$\dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\}$$

(b)

采用爱因斯坦求和约定：

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{p} = p_j \vec{e}_j$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \varepsilon_{ijk} x_i p_j \vec{e}_k$$

$$J_k = \varepsilon_{ijk} x_i p_j$$

于是：

$$\begin{aligned} \{J_a, p_b\} &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial J_a}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_b}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_a}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_b}{\partial q_\alpha}\right) \\ &= \frac{\partial J_a}{\partial x_b} \\ &= \frac{\partial(\varepsilon_{ija} x_i p_j)}{\partial x_b} \\ &= \varepsilon_{bja} p_j \\ &= \varepsilon_{abj} p_j \\ &= \varepsilon_{abc} p_c \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{J_a, x_b\} &= \sum_\alpha (\frac{\partial J_a}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_b}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_a}{\partial p_\alpha}\frac{\partial x_b}{\partial q_\alpha}) \\
&= -\frac{\partial J_a}{\partial p_b} \\
&= -\frac{\partial(\varepsilon_{ija}x_i p_j)}{\partial p_b} \\
&= -\varepsilon_{iba}x_i \\
&= \varepsilon_{abi}x_i \\
&= \varepsilon_{abc}x_c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{J_a, J_b\} &= \sum_\alpha (\frac{\partial J_a}{\partial q_\alpha}\frac{\partial J_b}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_a}{\partial p_\alpha}\frac{\partial J_b}{\partial q_\alpha}) \\
&= \frac{\partial(\varepsilon_{ija}x_i p_j)}{\partial x_\alpha}\frac{\partial(\varepsilon_{lmb}x_l p_m)}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial(\varepsilon_{ija}x_i p_j)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial(\varepsilon_{lmb}x_l p_m)}{\partial x_\alpha} \\
&= \varepsilon_{\alpha ja}p_j \cdot \varepsilon_{l\alpha b}x_l - \varepsilon_{i\alpha a}x_i \cdot \varepsilon_{\alpha mb}p_m \\
&= \varepsilon_{\alpha ja}\varepsilon_{\alpha bl}x_l p_j + \varepsilon_{\alpha ia}\varepsilon_{\alpha mb}x_i p_m \\
&= (\delta_{jb}\delta_{al} - \delta_{jl}\delta_{ab})x_l p_j + (\delta_{im}\delta_{ab} - \delta_{ib}\delta_{am})x_i p_m \\
&= x_a p_b - \delta_{ab}x_j p_j + \delta_{ab}x_m p_m - x_b p_a \\
&= x_a p_b - x_b p_a
\end{aligned}
$$

而：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{abc}J_c &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijc}x_i p_j \\
&= \varepsilon_{cba}\varepsilon_{cji}x_i p_j \\
&= (\delta_{bj}\delta_{ai} - \delta_{bi}\delta_{aj})x_i p_j \\
&= x_a p_b - x_b p_a
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\{J_a, J_b\} = \varepsilon_{abc}J_c
$$

(c)

注意到：

$$
\begin{aligned}
\{J_a, J^2\} &= \{J_a, J \cdot J\} \\
&= J\{J_a, J\} + \{J_a, J\}J \\
&= 2J\{J_a, J\}
\end{aligned}
$$

要证明 $\{J_a, J\} = 0$，只需要证明 $\{J_a, J^2\} = 0$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\{J_a, J^2\} &= \{J_a, J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\} \\
&= \{J_a, J_1^2\} + \{J_a, J_2^2\} + \{J_a, J_3^2\} \\
&= 2J_1\{J_a, J_1\} + 2J_2\{J_a, J_2\} + 2J_3\{J_a, J_3\} \\
&= 2J_1\varepsilon_{a1c}J_c + 2J_2\varepsilon_{a2c}J_c + 2J_3\varepsilon_{a3c}J_c \\
&= 2J_c(J_1\varepsilon_{a1c} + J_2\varepsilon_{a2c} + J_3\varepsilon_{a3c}) \\
&= 2\varepsilon_{abc}J_b J_c
\end{aligned}
$$

当 $a = 1$，

$$
\begin{aligned}
\{J_1, J^2\} &= 2\varepsilon_{1bc}J_b J_c \\
&= 2J_2 J_3 - 2J_2 J_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

当 $a = 2$，

$$
\begin{aligned}
\{J_2, J^2\} &= 2\varepsilon_{2bc}J_b J_c \\
&= -2J_1 J_3 + 2J_1 J_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

当 $a = 3$，

$$\begin{aligned}\{J_3,J^2\}&=2\varepsilon_{3bc}J_bJ_c\\&=2J_1J_2-2J_1J_2\\&=0\end{aligned}$$

综上，$\{J_a,J^2\}=0$，于是 $\{J_a,J\}=0$

(d)

设角动量的第一个分量 J_a 和第二个分量 J_b 是守恒量，其中 $a\neq b$，(b)中的结论给出：

$$\{J_a,J_b\}=\varepsilon_{abc}J_c$$

泊松定理说，若 f,g 都是守恒量，则 $\{f,g\}$ 也是守恒量，在这里得到 $\varepsilon_{abc}J_c$ 也是守恒量

当 $a\neq b\neq c$ 时，$\varepsilon_{abc}=1或-1$ 是个常数，于是角动量的第三个分量 J_c 也是个守恒量

(e)

注意到：

$$\begin{aligned}\{J_a,p^2\}&=\{J_a,p_bp_b\}\\&=2p_b\{J_a,p_b\}\\&=2p_b\varepsilon_{abc}p_c\\&=-2\varepsilon_{cba}p_cp_b\\&=-2(\vec{p}\times\vec{p})_a\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{J_a,r^2\}&=\{J_a,x_bx_b\}\\&=2x_b\{J_a,x_b\}\\&=2x_b\varepsilon_{abc}x_c\\&=-2\varepsilon_{cba}x_cx_b\\&=-2(\vec{r}\times\vec{r})_a\\&=0\end{aligned}$$

而 $H=\frac{p^2}{2m}+V(r)=\frac{p^2}{2m}+V(\sqrt{r^2})$

于是：

$$\{J_a,H\}=0$$

于是：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J_a}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial J_a}{\partial t}+\{J_a,H\}\\&=\{J_a,H\}\\&=0\end{aligned}$$

这就是说，J_a 是个守恒量

而：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J_a^2}{\mathrm{d}t}&=2J_a\frac{\mathrm{d}J_a}{\mathrm{d}t}\\&=0\end{aligned}$$

于是：

$$\frac{\mathrm{d}J^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_1^2+J_2^2+J_3^2)=0$$

这就是说，J^2 也是个守恒量

5

$y=ax^2\Longrightarrow\dot{y}=2ax\dot{x}$

动能：

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\omega^2x^2) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+4a^2x^2\dot{x}^2+\omega^2x^2)
\end{aligned}
$$

选取原点所在平面为零势能面，则势能为：

$$
\begin{aligned}
V &= mgy \\
&= mgax^2
\end{aligned}
$$

拉格朗日量为：

$$
\begin{aligned}
L &= T-V \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+4a^2x^2\dot{x}^2+\omega^2x^2)-mgax^2
\end{aligned}
$$

计算广义坐标 x 对应的广义动量 p_x：

$$
\begin{aligned}
p_x &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\
&= m\dot{x}+4ma^2x^2\dot{x}
\end{aligned}
$$

用广义坐标 x 和广义动量 p_x 表示广义速度 $\dot{x}$：

$$
\dot{x} = \frac{p_x}{m+4ma^2x^2}
$$

哈密顿量为：

$$
\begin{aligned}
H &= -L+p_x\dot{x} \\
&= mgax^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2m}\cdot\frac{p_x^2}{1+4a^2x^2}
\end{aligned}
$$

正则方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\
&= \frac{p_x}{m(1+4a^2x^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= -2mgax+m\omega^2x+\frac{4a^2xp_x^2}{m(1+4a^2x^2)^2}
\end{aligned}
$$

消去 p_x 得：

$$
(1+4a^2x^2)\ddot{x}+4a^2x\dot{x}^2+(2ga-\omega^2)x=0
$$

6

(a)

广义坐标的选取为：圆锥内质点的三个球坐标 r,θ,φ 和圆锥表面上的质点的方位角 ϕ 为广义坐标

$$
\vec{r}_1 = r\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x+r\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y+r\cos\theta\vec{e}_z
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_2 &= (L-r)\sin(\pi-\alpha)\cos\phi\vec{e}_x+(L-r)\sin(\pi-\alpha)\sin\phi\vec{e}_y+(L-r)\cos(\pi-\alpha)\vec{e}_z \\
&= (L-r)\sin\alpha\cos\phi\vec{e}_x+(L-r)\sin\alpha\sin\phi\vec{e}_y-(L-r)\cos\alpha\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

动能：

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_2^2 \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(L-r)^2\dot{\phi}^2\sin^2(\pi-\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(L-r)^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha)
\end{aligned}
$$

选取 xOy 平面为零势能面，势能为：

$$
\begin{aligned}
V &= mgr\cos\theta + mg(L-r)\cos(\pi-\alpha) \\
&= mgr\cos\theta - mg(L-r)\cos\alpha
\end{aligned}
$$

拉格朗日函数为：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (L-r)^2\dot{\phi}^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\theta + mg(L-r)\cos\alpha
\end{aligned}
$$

(b)

计算广义动量：

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} \\
&= 2m\dot{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\theta &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} \\
&= mr^2\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\varphi &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} \\
&= mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\phi &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} \\
&= m(L-r)^2\dot{\phi}\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

用广义坐标和广义动量表示广义速度：

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{2m} \\
\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2} \\
\dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \\
\dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{m(L-r)^2\sin^2\alpha}
\end{aligned}
$$

哈密顿量为：

$$
\begin{aligned}
H &= T + V \\
&= \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\phi^2}{2m(L-r)^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\theta - mg(L-r)\cos\alpha
\end{aligned}
$$

(c)

正则方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\
\dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}
\end{aligned}
$$

r 满足的方程：

$$
2\ddot{r} - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\phi}^2\sin^2\alpha)r + L\dot{\phi}^2\sin^2\alpha + g\cos\theta + g\cos\alpha = 0 \tag{1}
$$

θ 满足的方程：

$$
r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - g\sin\theta = 0 \tag{2}
$$

φ 满足的方程：

$$
mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} = C_1
$$

或：

$$r\sin\theta\cdot\ddot{\varphi}+(2\dot{r}\sin\theta+2r\dot{\theta}\cos\theta)\dot{\varphi}=0$$

ϕ 满足的方程：

$$m(L-r)^2\sin^2\alpha\cdot\dot{\phi}=C_2$$

或：

$$(L-r)\ddot{\phi}-2\dot{\phi}=0$$

(d)

H 不显含时间 t，体系具有时间平移不变性，能量守恒

H 不显含 φ，于是 φ 对应的广义动量 p_φ 是守恒量

H 不显含 ϕ，于是 ϕ 对应的广义动量 p_ϕ 是守恒量

(e)

当 $r,\theta,\dot{\varphi}$ 均为常数时，由方程 (2) 得：

$$\dot{\varphi}^2=\frac{-g}{r\cos\theta}$$

代 入方程 (1) 得：

$$\dot{\phi}=\sqrt{\frac{g(1-\cos\alpha)}{(L-r)\sin^2\alpha}}$$