第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

向量分析基本知识

爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和（除非特别指出该重复指标不求和），我们称求和指标 i 为“哑标”。

比如，$\mathbb{R}^3$ 空间中的向量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 在直角坐标下可表示为：

$$\vec{A} = A_1\vec{\mathrm{e}}_1 + A_2\vec{\mathrm{e}}_2 + A_3\vec{\mathrm{e}}_3 \equiv \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3$ 分别是 x, y, z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将 $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ 简写为：

$$\vec{A} = \sum_i A_i\vec{\mathrm{e}}_i \to \vec{A} = A_i\vec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

Kronecher delta 符号 δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

三阶单位全反对称张量（三阶 Levi-Citita 符号）ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk = 123, 231, 312, \text{即相邻两指标经过偶次对换能还原到}123 \\ -1 & , ijk = 132, 213, 321, \text{即相邻两指标经过奇次对换能还原到}123 \\ 0 & , ijk\text{中有相同指标} \end{cases}$$

可以利用 ε_{ijk} 表示任何一个三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

一些简单算例

$\vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}$

$A_i \delta_{ij} = A_j$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j \vec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$$

梯度、散度、旋度

梯度（gradient）的定义

设 $\psi(\vec{r})$ 是标量场，$\psi(\vec{r})$ 其梯度，记为 $\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r})$，由下式定义：

$$\mathrm{grad}\ \psi(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\psi(\vec{r})$$

其中，$\mathrm{d}\vec{r}$ 是位矢 $\vec{r}$ 的微小变化，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 是标量场 $\psi(\vec{r})$ 因位矢 $\vec{r}$ 变化 $\mathrm{d}\vec{r}$ 而引起的相应的变化。具体来说，$\mathrm{d}\psi(\vec{r})$ 的定义为：

$$\mathrm{d}\psi(\vec{r}) \equiv \psi(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - \psi(\vec{r})$$

散度（divergence）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的散度，记为 $\mathrm{div}\ \vec{A}$，定义为：

$$\mathrm{div}\ \vec{A} \equiv \lim_{V \to 0^+} \frac{1}{V} \oint_{\partial V^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

旋度（curl）的定义

向量场 $\vec{A}$ 的旋度，记为 $\mathrm{curl}\ \vec{A}$，由下式定义：

$$\left(\mathrm{curl}\ \vec{A}\right) \cdot \vec{n} = \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{1}{\sigma} \oint_{\partial \sigma^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

其中，σ 是与 $\vec{n}$ 垂直的面元。$\vec{n}$ 与面元 σ 的正绕行方向满足右手定则。

直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \partial_i A_i$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k$$

∇ 算子

∇ 算子（nabla 算子，或 del 算子）定义为：

$$\nabla \equiv \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i$$

其中，∂_i 的定义为：

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ∇ 算子，可将梯度、散度、旋度表示为：

$$\mathrm{grad}\ \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi \equiv \nabla \psi$$

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \partial_i A_i \equiv \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\mathrm{curl}\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \equiv \nabla \times \vec{A}$$

为了书写方便，以后用 $\nabla\psi, \nabla \cdot \vec{A}, \nabla \times \vec{A}$ 分别来指代梯度、散度、旋度。

梯度与方向导数的关系

方向导数

标量场 ψ 在 $\vec{r}$ 点处沿 $\vec{v}$ 方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}}$，定义为：

$$\left.\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{v}} \equiv \lim_{v \to 0^+} \frac{\psi(\vec{r}+\vec{v}) - \psi(\vec{r})}{v}$$

特别地，标量场 ψ 在曲面 Σ 上的 $\vec{r}$ 点处沿曲面上 $\vec{r}$ 点的外法向的方向导数简记为：

$$\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial n}$$

梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义：

$$\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\psi$$

设 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{n}\mathrm{d}r$，其中 $\vec{n}$ 是与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 同向的单位向量，则有：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}\mathrm{d}r=\mathrm{d}\psi$$

即：

$$(\nabla\psi)\cdot\vec{n}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=\frac{\psi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r})-\psi(\vec{r})}{\mathrm{d}r}=\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$$

这就是说，标量场 ψ 的梯度 $\nabla\psi$ 在某一方向 $\vec{n}$ 的投影恰等于标量场沿这一方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial l}\right|_{\vec{n}}$。

散度与高斯定理

从散度的定义

$$\nabla\cdot\vec{A}\equiv\lim_{V\to0^+}\frac{1}{V}\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

出发，可以导出高斯定理：

$$\oint_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}=\lim_{\sigma\to0^+}\frac{1}{\sigma}\oint_{\partial\sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

出发，可以导出斯托克斯定理：

$$\oint_{\partial\Sigma^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

分析工具

$$\begin{cases} \vec{\mathrm{e}}_i \cdot \vec{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij} \\ \vec{A} = A_i \vec{\mathrm{e}}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla \psi = \vec{\mathrm{e}}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{\mathrm{e}}_i \\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

与 $\vec{r}$ 有关的公式

> $\nabla \cdot \vec{r} = 3$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \partial_i x_i = 3$$

> $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$

$$\nabla \times \vec{r} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \partial_j x_k = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i \delta_{jk} = \vec{0}$$

从左往右证的公式

> $\nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi\psi) &= \vec{\mathrm{e}}_i\partial_i(\varphi\psi) \\ &= \vec{\mathrm{e}}_i\varphi\partial_i\psi + \vec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_i\varphi \\ &= \varphi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi + \psi\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\varphi \\ &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi\end{aligned}$$

> $\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi\nabla \cdot \vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) &= \partial_i(\varphi\vec{A})_i \\ &= \partial_i(\varphi A_i) \\ &= \varphi\partial_i A_i + A_i\partial_i\varphi \\ &= \varphi\nabla \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\varphi \\ &= (\vec{A} \cdot \nabla)\varphi + \varphi\nabla \cdot \vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla \times (\varphi\vec{A}) = (\nabla\varphi) \times \vec{A} + \varphi\nabla \times \vec{A}$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\varphi\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi\vec{A})_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\varphi A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(A_k\partial_j\varphi + \varphi\partial_j A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i(\nabla\varphi)_j A_k + \varphi\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j A_k \\ &= (\nabla\varphi) \times \vec{A} + \varphi\nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

> $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_i(\vec{A} \times \vec{B})_i \\ &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk}B_k\partial_i A_j + \varepsilon_{ijk}A_j\partial_i B_k \\ &= B_k\varepsilon_{kij}\partial_i A_j - A_j\varepsilon_{jik}\partial_i B_k \\ &= B_k(\nabla \times \vec{A})_k - A_j(\nabla \times \vec{B})_j \\ &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})\end{aligned}$$

> $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\vec{A}\times\vec{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}A_lB_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(A_lB_m) \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i(B_m\partial_jA_l+A_l\partial_jB_m) \\
&= \vec{\mathrm{e}}_lB_j\partial_jA_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-\vec{\mathrm{e}}_mA_j\partial_jB_m \\
&= B_j\partial_jA_l\vec{\mathrm{e}}_l+\vec{\mathrm{e}}_lA_l\partial_mB_m-\vec{\mathrm{e}}_mB_m\partial_lA_l-A_j\partial_jB_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \\
&= (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})
\end{aligned}
$$

> $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\times\vec{A})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_lA_m \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_m\partial_lA_m-\vec{\mathrm{e}}_m\partial_l\partial_lA_m \\
&= \vec{\mathrm{e}}_l\partial_l\partial_mA_m-\partial_l\partial_lA_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
&= \nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}
\end{aligned}
$$

需要注意力的公式

> $\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{0}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\varphi) &= \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_j(\nabla\varphi)_k \\
&= \vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

由于我们只考虑性质比较好的函数，于是 $\partial_j\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$，再结合 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$，有：

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi &= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j\varphi \\
&= -\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi
\end{aligned}
$$

最后一步是因为 j,k 都是用于求和的哑标，因此可以交换。

上式说明：

$$\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}$$

于是：

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\vec{\mathrm{e}}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi=\vec{0}$$

> $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) &= \partial_i(\nabla\times\vec{A})_i \\
&= \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k
\end{aligned}
$$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k &= -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_i A_k \\
&= -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0
$$

这就是说：

$$
\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0
$$

从右往左证的公式

> $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})$

$$
\begin{aligned}
&(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i B_j(\nabla\times\vec{A})_k + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i A_j(\nabla\times\vec{B})_k \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m + \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i B_j\partial_l A_m + \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i A_j\partial_l B_m \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i B_j\partial_l A_m + (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\vec{\mathrm{e}}_i A_j\partial_l B_m \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + \vec{\mathrm{e}}_l B_m\partial_l A_m - \vec{\mathrm{e}}_m B_l\partial_l A_m + \vec{\mathrm{e}}_l A_m\partial_l B_m - \vec{\mathrm{e}}_m A_l\partial_l B_m \\
=&B_i\partial_i A_j\vec{\mathrm{e}}_j + A_i\partial_i B_j\vec{\mathrm{e}}_j + B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l A_m - B_l\partial_l A_m\vec{\mathrm{e}}_m + A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l B_m - A_l\partial_l B_m\vec{\mathrm{e}}_m \\
=&B_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l A_m + A_m\vec{\mathrm{e}}_l\partial_l B_m \\
=&B_m\nabla A_m + A_m\nabla B_m \\
=&\nabla(A_m B_m) \\
=&\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

高斯定理

> $\oint\limits_{\partial V^+}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\limits_V(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$

斯托克斯定理

> $$\oint_{\partial\Sigma^+} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

格林第一恒等式

> $$\oint_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Omega} \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi\right) \mathrm{d}V$$

注意到：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) &= \partial_i(\psi\nabla\phi)_i \\ &= \partial_i(\psi\partial_i\phi) \\ &= (\partial_i\phi)(\partial_i\psi) + \psi\partial_i\partial_i\phi \\ &= (\nabla\phi)_i(\nabla\psi)_i + \psi\nabla^2\phi \\ &= (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi\end{aligned}$$

于是由高斯定理，有：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega^+} \psi\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi\nabla\phi)\mathrm{d}V \\ &= \int_{\Omega} \left[(\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi) + \psi\nabla^2\phi\right] \mathrm{d}V \\ &= \int_{\Omega} \left[\psi\nabla^2\phi + (\nabla\phi) \cdot (\nabla\psi)\right] \mathrm{d}V\end{aligned}$$

格林第二恒等式

> $$\oint_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Omega} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V$$

利用 $\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \vec{A} \cdot (\nabla\varphi) + \varphi\nabla \cdot \vec{A}$ 可得：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) &= \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot (\nabla\phi) - (\nabla\psi \cdot \nabla\phi + \phi\nabla \cdot (\nabla\psi)) \\ &= \psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\end{aligned}$$

于是由高斯定理可得：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial\Omega^+} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \int\limits_{\Omega} \nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\Omega} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

∇ 算子

直角坐标下的 ∇

$$
\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}
$$

球坐标下的 ∇

$$
\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}
$$

柱坐标下的 ∇

$$
\nabla = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}
$$

∇^2 算子

直角坐标下的 ∇^2

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
$$

球坐标下的 ∇^2

$$
\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
$$

柱坐标下的 ∇^2

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

第3章 线性空间

第4章 复变函数的概念

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,\ \ \theta \in \mathbb{C}$$

复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射，即：

$$f(z) : \mathbb{C}^{\mathrm{R}} \to \mathbb{C}$$

常见复变函数

有理函数

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},\ \ a_i, b_i \in \mathbb{C},\ \ m, n \in \mathbb{Z}$$

指数函数

$$f(z) = \mathrm{e}^z$$

对数函数

$$f(z) = \ln z$$

幂函数

$$f(z) = z^a,\ \ a \in \mathbb{C}$$

三角函数

$$\cos z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质：

$$\cos(-z) = \cos(z),\ \ \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z),\ \ \sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$|\cos z|, |\sin z|$ 可以大于 1，这与实三角函数不同。

双曲函数

$$\cosh z \equiv \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \equiv \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}$$

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

双曲函数的性质：

$$\sinh(z + \mathrm{i}2\pi) = \sinh z$$

$$\cosh(z + \mathrm{i}2\pi) = \cosh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

第5章 解析函数

复变函数的导数

复变函数的连续性

复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于 z_0 时，都有:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 Ω 内的所有点都连续，则称 $f(z)$ 在 Ω 内连续。

复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于 z_0 时，即 $\Delta z = z - z_0$ 以任何方式趋于 0 时，若极限:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导，$f(z)$ 在 z_0 点的导数记为 $f'(z_0)$

柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)。**

命题的证明

设 $z = x + \mathrm{i}y, f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$，则:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

由于 $f(z)$ 在 z 点可导，故极限

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

特别地，

（1）令：

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\Delta x\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（2）令：

$$\Delta x=0,\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 $f(z)$ 在 z 点可导的必要条件，但不是充分条件。也就是说，可导必定满足 C-R 条件，但满足 C-R 条件不一定可导。

复变函数的解析性

复变函数的解析性

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点是**解析的。**

若复变函数 $f(z)$ 在 Ω 内每一点都可导，则 $f(z)$ 在 Ω 内是**解析的**，或称为**全纯的。**

相关定理

定理1

复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 Ω 为解析函数 $\Longleftrightarrow$ 在与复平面 Ω 相应的实平面区域内 $u(x,y),v(x,y)$ 可微，且 $u(x,y),v(x,y)$ 满足 C-R 条件。

特别地，若 $f(z)$ 为 Ω 上的连续函数，则 $f(z)$ 是 Ω 上的解析函数 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 满足 C-R 条件。

定理2

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，且 $f(z)$ 为实函数，即 $f(z)=f^*(z)$，则 $f(z)$ 为常数。

定理3

若 $f(z)$ 为区域 Ω 上的解析函数，则在 Ω 上有 $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$，即 $f(z,z^*)$ 不依赖于 z^*

定理4

在复平面区域 Ω 内解析的函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是平面区域 Ω 内的调和函数（即满足二维拉普拉斯方程 $\nabla^2 u(x,y)=0,\nabla^2 v(x,y)=0$ 的函数）。

例题

例1

> 已知解析函数的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$

$$\mathrm{d}v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y \tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)=&\int_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\=&\,0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\=&\,3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$，则：

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+v(0,0)=3x^2y-y^3+C$$

于是：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \\
&= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C)
\end{aligned}
$$

例2

> 请证明：柱坐标系下的解析函数 $f(z) = u(\rho,\varphi) + \mathrm{i}v(\rho,\varphi)$ 满足的 C-R 方程：
>
> $$
> \begin{cases}
> \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\
> \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho}
> \end{cases}
> $$

直角坐标下的 C-R 条件：

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}
$$

$$
\begin{cases}
x = \rho\cos\varphi \\
y = \rho\sin\varphi
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\rho = \sqrt{x^2+y^2} \\
\tan\varphi = \dfrac{y}{x}
\end{cases}
$$

注意到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1}\frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程：

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) \tag{1}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right) = -\left[\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\right] \tag{2}
$$

$(1)\times\cos\varphi + (2)\times\sin\varphi$ 得到：

$$
\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}
$$

$(2)\times\cos\varphi - (1)\times\sin\varphi$ 得到：

$$
\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}
$$

例3

> 已知解析函数的虚部 $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$，求该解析函数。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

函数解析，故满足 C-R 条件，即满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

极坐标变换：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\y=\rho\sin\varphi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\cos\varphi\mathrm{d}\rho-\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\\mathrm{d}y=\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\mathrm{d}\rho+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\sin\varphi\mathrm{d}\rho+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\end{cases}$$

于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}x+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathrm{d}\rho+\frac{\sin\varphi}{\rho}\mathrm{d}\varphi\\&=\mathrm{d}\left(\frac{-\cos\varphi}{\rho}\right)\end{aligned}$$

于是：

$$u=\frac{-\cos\varphi}{\rho}+C=-\frac{x}{x^2+y^2}+C$$

综上，

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+C\right)+\mathrm{i}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

第6章 复变函数积分

复变函数积分

复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 $f(z)$ 在其有定义的区域 Ω 中，沿某一曲线 C 的**有向**的**线积分**，记为 $\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z$，其定义为：

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |z_j - z_{j-1}|\to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

把 C 分成 n 段，ξ_j 是 C 上 z_{j-1} 点到 z_j 点的中的某一点。

复变函数积分的性质

$$\left|\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int\limits_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$$

柯西积分定理

单连通区域柯西积分定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 Ω 上解析，当积分路径为 Ω 内的任一闭合曲线 C 时，有：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

多连通区域的柯西积分定理

设 $f(z)$ 在具有 k 个内边界 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的回路 C 内的复连通区域内解析，规定 $C; C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的正方向为逆时针，则：

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_{C_1^+} f(z)\mathrm{d}z + \oint\limits_{C_2^+} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint\limits_{C_k^+} f(z)\mathrm{d}z$$

柯西积分公式

若 $f(z)$ 在闭合回路 C 所包围的区域上解析，z_0 是此区域中的一点，则：

$$\oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

解析函数高阶导数的积分表达式

设 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析，C 为 Ω 内的任一闭合回路，对于 C 所包围的区域内的任一点 z，有：

$$f^{(n)}(z) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

第7章 复变函数的级数展开

解析函数的泰勒展开

设 z_0 为函数 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中，展开系数为：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

解析函数的洛朗展开

复变函数的零点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点的函数值 $f(z_0) = 0$，则称 z_0 为 复变函数 $f(z)$ 的零点。

复变函数的奇点

若复变函数 $f(z)$ 在 z_0 点**不解析**，即 $f(z)$ 在 z_0 点的导数不存在或不唯一，则称 z_0 为复变函数 $f(z)$ 的奇点。

奇点的分类

孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，函数 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

非孤立奇点

若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，而在 z_0 点任意小的邻域内，除 z_0 点外存在 $f(z)$ 的其他奇点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

孤立奇点的分类

极点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若存在一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k 阶极点。

本性奇点：设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，若**不存在**一个正整数 k，使得 $(z-z_0)^k f(z)$ 为非零的解析函数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点。

可去奇点：设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 点没有定义，但在 z_0 的去心邻域内解析，此时可定义 $f(z_0) \equiv \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 使 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

解析函数的洛朗展开定理

若函数 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线。

例题

例1

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0 < |z| < 1$ 和 $|z| > 1$ 内，在 $z_0 = 0$ 处的展开式。

$0 < |z| < 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$：

由于 $|z| < 1$，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n
\end{aligned}
$$

$|z| > 1$ 区域在 $z_0 = 0$ 处展开 $f(z)$:

注意到 $|z| > 1$，则 $|1/z| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}
$$

例2

> 求 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

$f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-0| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}
$$

$f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z-1| < 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\
&= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n
\end{aligned}
$$

第8章 留数定理及其在实积分中的应用

留数定理

留数的定义

设 z_0 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，设 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n
$$

$f(z)$ 在 z_0 点的留数，记为 $\mathrm{Res} f(z_0)$，定义为:

$$\mathrm{Res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中，a_{-1} 是 $f(z)$ 在 z_0 点的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数

留数的求法

定义法

直接把 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 点作洛朗展开，找到 $(z-z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1}，由留数的定义可知:

$$\mathrm{Res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

极限法

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，$f(z)$ 可在其孤立奇点 z_0 点作如下的洛朗展开:

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ \ a_{-m}\neq 0$$

则:

$$\mathrm{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

特殊情况

若 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}, z_0$ 为 $g(z)$ 的一阶极点，即 $g(z_0)=0$，且 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 点及其邻域内解析，则:

$$\mathrm{Res} f(z_0)=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即:

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res} f(z_j)$$

例1

> 计算回路积分 $I=\oint_{l^+}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

令 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i}, z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
I &= \oint\limits_l \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res} f(z_1)+\mathrm{Res} f(z_2)\right] \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}$$

留数定理在实积分中的应用

计算无穷限奇异积分的柯西主值

利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分：

$$I=\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

其中，$f(\cos\theta,\sin\theta)$ 为不包含有孤立奇点 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的有理函数。

计算此类积分，利用欧拉公式换元，将实积分转换为复平面单位圆上的复积分，最后利用留数定理计算积分。

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，有：

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$$

于是：

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \ \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$$
$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\oint\limits_{C^+} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，C 是以复平面原点为圆心的单位圆周，即 $C:|z|=1$

例1

> 计算定积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$，其中 $0<\varepsilon<1$

令：

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\Longrightarrow\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\ \ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$$

于是：

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$，被积函数的两个一阶极点为：

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},\quad z_2=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数 $f(z)$ 可写为：

$$f(z)=\frac{1}{\varepsilon(z-z_1)(z-z_2)}$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)f(z)\\&=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{\varepsilon(z-z_2)}\\&=\frac{1}{\varepsilon(z_1-z_2)}\\&=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

由留数定理，有：

$$\begin{aligned}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_1)\\&=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\&=\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

于是积分为：

$$\begin{aligned}I&=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\end{aligned}$$

例2

> 计算定积分：$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}\right)$

设 C 是复平面上的单位圆，

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

令 $f(z)=\dfrac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$，$f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1=2-\mathrm{i}, z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$，只有 z_2 在单位圆 C 内。

由于 z_1, z_2 是 $(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}=0$ 的两根，于是 $f(z)$ 可表达为：

$$
f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}
$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_2)f(z)\\
&=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)}\\
&=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z_2-z_1)}\\
&=\frac{1}{4\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

于是由留数定理，有：

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_2)\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
I&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}\\
&=2\cdot\frac{\pi}{2}\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

第9章 傅里叶变换

傅里叶级数

设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，其元素是周期为 $2l$ 的单变量函数，$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{H}$，$\mathcal{H}$ 上两个元素的内积，记为 $\langle f_1, f_2 \rangle$，定义为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x, \;\; x \in \mathbb{R}$$

其中，x 是参数，而内积与参数无关。有时为了指明参数，也将内积写为：

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 是实函数，则内积可简化为：

$$\langle f_1, f_2 \rangle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x) f_2(x) \mathrm{d}x, \;\; x \in \mathbb{R}$$

三角函数基的傅里叶级数

容易验证如下结论：

$$\begin{cases}
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} \mathrm{d}x = 1 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0 \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = \delta_{n,m}, \;\; n = 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = 0, \;\; n = 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots \\
\displaystyle\int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = \delta_{n,m}, \;\; n, m = 0, 1, 2, \cdots
\end{cases}$$

函数系 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \;\; \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \;\; \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x; \;\; n, m = 1, 2, \cdots \right\}$ 是一个完备的正交归一函数族，它们可作为基矢张成 $\mathcal{H}$。

这个函数系具体写出来是：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x, \cdots\right\}$$

任意一个周期为 $2l$ 的，满足狄利克雷条件的函数 $f(x)$ 可写成这些基函数的线性组合，即 $f(x)$ 可展成傅里叶级数：

$$f(x) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\right)$$

为求出线性组合的系数，只需要利用“这组基是正交归一完备的”这一性质，比如：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k'\pi}{l}x, f(x)\right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k'\pi}{l}x, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x\right)\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k'\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x\right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{k',k} \\
&= a_{k'}
\end{aligned}$$

总之：

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x)\right\rangle = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2l}}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x, f(x)\right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi}{l}x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{x=-l}^{x=l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$b_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x, f(x)\right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_{x=-l}^{x=l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

e 指数基的傅里叶级数

注意到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x = \delta_{m,n}$$

函数系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}, m \in \mathbb{Z}\right\}$ 可作为以 2π 为周期的函数为元素的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一组正交完备归一基矢，以 2π 为周期的函数 f 在这组基矢上的展开式为：

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$$

利用正交归一条件：

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)^* \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x}\mathrm{d}x \\
&= \delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

内积可得系数:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, f(x) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \right\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n} \\
&= C_n
\end{aligned}
$$

即系数 C_m 可通过内积求得:

$$
C_m = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}, f(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\right)^* \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x
$$

傅里叶变换(to be continued)

傅里叶分解与傅里叶变换

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f(x)$ 可进行**傅里叶分解**（将 $f(x)$ 分解为无穷多不同频率 k 的基函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的线性叠加）：

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k
$$

其中，系数 $C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换（或频谱）。

为求出系数 $C(k)$ 的表达式，令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}$ 与上式两端内积，等式仍成立:

$$
\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x) \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \right\rangle
$$

根据内积的定义，分别计算内积:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x)\right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\right)^* f(x)\mathrm{d}x \\ &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right\rangle &\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\right)^* \left(\frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}k\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x\mathrm{d}k \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}k \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\delta(k-k')\mathrm{d}k \\ &= C(k')\end{aligned}$$

$$C(k') = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}x$$

将 k' 替换成 k，即:

$$C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

这就得到了 $f(x)$ 的傅里叶分解 $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$ 中系数 $C(k)$ 的表达式。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k,\ \ C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其中，系数 $C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换（或频谱），也记为:

$$C(k) \equiv \mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

也就是说，函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$ 是一个关于 k 的函数，其表达式为:

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

傅里叶变换的基本性质

线性定理

$$\mathscr{F}\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} = \alpha_1\mathscr{F}\{f_1\} + \alpha_2\mathscr{F}\{f_2\}$$

延迟定理

$$\mathscr{F}\{f(x-x_0)\}(k)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

位移定理

设 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)=C(k)$，则:

$$\mathscr{F}\{f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}\}(k)=C(k-k_0)$$

标度变换定理

设 $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)=C(k)$，则:

$$\mathscr{F}\{f(ax)\}(k)=\frac{1}{|a|}C\left(\frac{k}{a}\right)$$

微分定理

设当 $|x|\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，则有:

$$\mathscr{F}\{f'(x)\}(k)=\mathrm{i}k\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(x)\}(k)=(\mathrm{i}k)^n\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

卷积定理

$$f_1(x)*f_2(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-\xi)f_2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\mathscr{F}\{f_1(x)*f_2(x)\}(k)=\mathscr{F}\{f_1(x)\}(k)\mathscr{F}\{f_2(x)\}(k)$$

第10章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数 $t\in[0,+\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)\equiv F(p)\equiv\int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中，$p=s+\mathrm{i}\sigma,s\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}$
，e^{-pt} 称为拉普拉斯变换核，$F(p)$ 称为像函数，也记为:

$$F(p)\risingdotseq f(t),\quad f(t)\fallingdotseq F(p)$$

拉普拉斯变换的性质（两种记号）

线性定理

若 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$，则:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}(p) = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设 $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p), f_2(t) \fallingdotseq F_2(p)$，则:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \fallingdotseq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

延迟定理

设 $\tau > 0$，则:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p) = \mathrm{e}^{-\tau p}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设 $f(t) \fallingdotseq F_(p), \tau > 0$，则:

$$f(t-\tau)H(t-\tau) \fallingdotseq \mathrm{e}^{-p\tau}F(p)$$

其中，定义了阶跃函数 H:

$$H(t) \equiv \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t \leqslant 0 \end{cases}$$

位移定理

设 $\lambda \in \mathbb{C}$，则:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\right\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\lambda)$$

设 $f(t) \fallingdotseq F(p), \lambda \in \mathbb{C}$，则:

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \fallingdotseq F(p+\lambda)$$

标度变换定理

设 $a > 0$，则:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p)=\frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{a}\right)$$

设 $f(t)\risingdotseq F(p)$，则:

$$f(at)\risingdotseq\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),a>0$$

卷积定理

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}(p)=\mathcal{L}\{f_1(t)\}(p)\cdot\mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中，卷积的定义为:

$$f_1(t)*f_2(t)\equiv\int_{\tau=0}^{\tau=t}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

设 $f_1(t)\risingdotseq F_1(p),f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$，则:

$$f_1(t)*f_2(t)\risingdotseq F_1(p)F_2(p)$$

微分定理

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p)=p^n\mathcal{L}\{f(t)\}(p)-p^{n-1}f^{(0)}(0)-p^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-p^1f^{(n-2)}(0)-p^0\cdot f^{(n-1)}(0)$$

设 $f(t)\risingdotseq F(p)$，则:

$$f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f^{(0)}(0)-p^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-p^1f^{(n-2)}(0)-p^0f^{(n-1)}(0)$$

特别地:

$$f^{(1)}(t)\risingdotseq p^1F(p)-p^0f^{(0)}(0)$$

$$f^{(2)}(t)\risingdotseq p^2F(p)-p^1f^{(0)}(0)-p^0f^{(1)}(0)$$

积分性质

$$\mathcal{L}\Bigg\{\underbrace{\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\cdots\int_0^t\mathrm{d}t}_{n\text{重积分}}f(t)\Bigg\}(p)=\frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t}_{n\text{重积分}} f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

周期函数变换定理

若 $f(t) = f(t+T)$，则:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

若 $f(t) = f(t+T)$，则:

$$f(t) \risingdotseq \frac{\int_0^T f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

常用拉普拉斯变换及反演

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(p) = \frac{1}{p-a}, \quad \mathrm{Re}\, p > a$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p) = \frac{a}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p) = \frac{p}{p^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin at\}(p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos at\}(p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{p} \risingdotseq 1,\quad \frac{1}{p^2} \risingdotseq t,\quad \frac{n!}{p^{n+1}} \risingdotseq t^n \\
\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t},\quad \frac{n!}{(p-n)^{n+1}} \risingdotseq t^n \mathrm{e}^{\alpha t} \\
\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \risingdotseq \sin\alpha t,\quad \frac{p}{p^2+\alpha^2} \risingdotseq \cos\alpha t \\
\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \risingdotseq \sinh\alpha t,\quad \frac{p}{p^2-\alpha^2} \risingdotseq \cosh\alpha t
\end{gathered}
$$

拉普拉斯变换的应用

解常微分方程

例1

> 用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：
>
> $$
> \begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}
> $$

设 $i(t) \fallingdotseq F(p)$

微分定理给出：

$$
\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \fallingdotseq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)
$$

常用拉普拉斯变换：

$$
\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p},\quad \operatorname{Re} p > 0,\quad \mathrm{or} 1 \fallingdotseq \frac{1}{p}
$$

对方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = +Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$
LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}
$$

解出 $F(p)$：

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\
&= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L}\right)
\end{aligned}
$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t}$$

于是:

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1, \quad \frac{1}{p+R/L} \risingdotseq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p)=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p+R/L}\right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得:

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

第11章 δ 函数

δ 函数的定义

δ 函数是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的广义函数，其满足:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & ,x\neq x_0\\ +\infty & ,x=x_0\end{cases},\text{且}\int_a^b\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & ,x_0\in(a,b)\\ 0 & ,x_0\notin(a,b)\end{cases}$$

δ 函数的性质

（1）设 $f(x)$ 为连续函数，则:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=f(x_0)$$

（2）$\delta(x)$ 是偶函数:

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

（3）:

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

（4）:

$$x\delta(x)=0$$

（5）:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_2)\delta(x-x_1)\mathrm{d}x=\delta(x_1-x_2)$$

（6）：设 $\{x_i\}$ 为 $\varphi(x)$ 的单根，即 $\varphi(x_i)=0$ 且 $\varphi'(x_i)\neq 0$，则：

$$\delta(\varphi(x))=\sum_i\frac{1}{|\varphi'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

简单例子：

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

三维 δ 函数

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\begin{cases}0 & ,\vec{r}\neq\vec{r}_0\\ +\infty & ,\vec{r}=\vec{r}_0\end{cases},\text{且}\int_V\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\mathrm{d}^3\vec{r}=1,\vec{r}_0\in V$$

三维直角坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

三维球坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

三维柱坐标系

$$\mathrm{d}^3\vec{r}=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)$$

不同形式的 δ 函数

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nx^2}$$

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$$

δ 函数的傅里叶展式和傅里叶变换

一维

设 $\delta(x-x_0)$ 可展为：

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

其中，系数 $C(k)$ 就是 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶变换 $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)$，即：

$$\begin{aligned} C(k) &= \mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k) \\ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \end{aligned}$$

代回 $\delta(x-x_0)$ 的傅里叶展式，可得：

$$\begin{aligned} \delta(x-x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{d}k \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k}\mathrm{d}k}$$

三维

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) &= \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{d}k_x\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{d}k_y\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_z\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x=-\infty}^{k_x=+\infty}\int_{k_y=-\infty}^{k_y=+\infty}\int_{k_z=-\infty}^{k_z=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k_x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y-y_0)k_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z-z_0)k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{k}}\mathrm{d}^3\vec{k}}$$

例题

例1

> 证明：$\delta(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$

当 $\vec{r}\neq\vec{0}$，有:

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\frac{1}{r}&=\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\\&=\nabla\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\\&=-\left(\vec{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}\right)\\&=-\left(\vec{r}\cdot\left(-3r^{-4}\frac{\vec{r}}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\cdot 3\right)\\&=0\end{aligned}$$

$\nabla^2\frac{1}{r}$ 在 $\vec{r}=\vec{0}$ 处无定义，但可人为定义其在 $\vec{0}$ 处的函数值为 $+\infty$

取以坐标原点为球心，半径为 R 的一个球体 V，

$$\begin{aligned}\int\limits_{\vec{r}\in V}-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}^3\vec{r}&=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\vec{r}\in V}\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}\\&=-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V^+}\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\&=-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\partial V^+}-\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{R^2}\oint\limits_{\partial V^+}\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{4\pi R^2}\cdot 4\pi R^2\\&=1\end{aligned}$$

第12章 小波变换初步

第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题

波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

波动方程（双曲方程）

$$u_{tt} - a^2\nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

输运方程（抛物方程）

$$u_t - a^2\nabla^2 u(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

泊松方程（椭圆方程）

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0$$

波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

定解条件包括**初始条件**和**边界条件**。

初始条件

波动方程初始条件

场量 $u(\vec{r}, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的空间分布**和**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r}, t)$ 在 $t = 0$ 时刻的空间分布：

$$\begin{cases} u(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r}, t)\Big|_{t=0} = \nu(\vec{r}) \end{cases}$$

输运方程初始条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布**或**场量对时间的一阶导 $u_t(\vec{r},t)$ 在 $t=0$ 时刻的空间分布：

$$u(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\varphi(\vec{r})$$

或：

$$u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\nu(\vec{r})$$

泊松方程初始条件

泊松方程没有初始条件（稳定场，场量不随时间改变）

边界条件

第一类边界条件

场量 $u(\vec{r},t)$ 在边界 $\partial\Omega$ 处的取值所要满足的条件

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第一类齐次边界条件**：

$$u(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0$$

第二类边界条件

场量沿边界的外法线的梯度对时间的依赖关系

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第二类齐次边界条件**：

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0$$

第三类边界条件

$$\left(\alpha u(\vec{r},t)+\beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\Big|_{\vec{r}\in\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若 $g(\vec{r},t)=0$，则得到**第三类齐次边界条件**：

$$\left(\alpha u(\vec{r},t)+\beta\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right)\bigg|_{\vec{r}\in\Omega}=0$$

自然边界条件

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即：

$$|u|<+\infty$$

周期性边界条件

场函数 $u(\vec{r},t)$ 具有空间周期性。

衔接条件

若研究的区域 Ω 可分成几个性质不同的子区域，则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件。

波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

波动方程定解条件

$$\begin{cases} u_{tt}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2 u=f(\vec{r},t) \\ u(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\varphi(\vec{r}) \\ u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\nu(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r},t)+\beta\dfrac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

输运方程定解条件

$$\begin{cases} u_{t}(\vec{r},t)-a^2\nabla^2 u=f(\vec{r},t) \\ u(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\varphi(\vec{r})\ \text{ or }\ u_t(\vec{r},t)\Big|_{t=0}=\nu(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r},t)+\beta\dfrac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

泊松方程定解条件

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{r})=f(\vec{r}) \\ \left[\alpha u(\vec{r})+\beta\dfrac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]_{\vec{r}\in\partial\Omega}=g(\vec{r}s)\Big|_{\vec{r}\in\partial\Omega} \end{cases}$$

第14章 分离变量法

例1

> 求解四边固定，x, y 方向上边长分别为 l, d 的矩形薄膜的本征振动（即求本征振动频率和本征振动函数）

矩形薄膜的振动满足二维波动方程。这里采用直角坐标，结合“四周固定”这一边界条件，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} - a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = 0 \\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0 \\ u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

设 $u(x,y,t)$ 可分离变量：

$$u(x,y,t) = U(x,y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$$

代入波动方程可得：

$$X(x)Y(y)T''(t) - a^2 \left[Y(y)T(t)X''(x) + X(x)T(t)Y''(y) \right] = 0$$

上式两边同时除以 $X(x)Y(y)T(t)$ 得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0$$

观察可知，必定有：

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2$$

将上式代入上上式，可知 ω, k_x, k_y 满足：

$$\omega^2 = a^2 \left(k_x^2 + k_y^2 \right)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \Longrightarrow X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)$$

结合边界条件 $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0$ 可得：

$$A = 0, \quad k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

因此，$X(x)$ 的本征函数为：

$$X^{(n)} = B^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \Longrightarrow Y(y) = C\cos(k_y y) + D\sin(k_y y)$$

结合边界条件 $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=d} = 0$ 可得:

$$C = 0,\ \ k_y^{(m)} = \frac{m\pi}{d},\ \ m = 1, 2, \cdots$$

因此，$Y(y)$ 的本征函数为:

$$Y^{(m)} = D^{(m)}\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right)$$

由 $U(x, y) = X(x)Y(y)$ 可知，本征振动函数为:

$$\begin{aligned}
U^{(nm)}(x, y) &= X^{(n)}(x)Y^{(m)}(y) \\
&= B^{(n)}D^{(m)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right) \\
&\equiv E^{(nm)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}y\right),\ \ E^{(nm)} \equiv B^{(n)}D^{(m)},\ \ n, m = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

由 $\omega^2 = a^2\left(k_x^2 + k_y^2\right)$ 可知，本征振动频率为:

$$\begin{aligned}
\omega^{(nm)} &= a\sqrt{\left(k_x^{(n)}\right)^2 + \left(k_y^{(m)}\right)^2} \\
&= a\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2},\ \ n, m = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

第15章 曲线坐标系下的分离变量

球坐标系下方程的分离变量

拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量

在球坐标系下，拉普拉斯方程为:

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(r, \theta, \varphi)$ 可分离变量:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到：

径向方程

径向部分 $R(r)$ 满足**径向方程**：

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R(r)=0$$

球函数方程

角度部分 $Y(\theta,\varphi)$ 满足**球函数方程**：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y(\theta,\varphi)=0$$

方位角满足的方程

方位角部分 $\Phi(\varphi)$ 满足：

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$$

结合周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\lambda=m^2,\ \ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

连带勒让德方程

极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

令 $x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x),\theta\in[0,\pi],|x|\leqslant1,\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关：

$$u = u(r, \theta)$$

这对应 $m = 0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0$$

亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 u(r, \theta, \varphi) + k^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

其中，拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设 $u(r, \theta, \varphi)$ 可分离变量：

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算，可以得到：

球贝塞尔方程

径向部分 $R(r)$ 满足球贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

球函数方程

角度部分 $Y(\theta, \varphi)$ 满足**球函数方程**：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0$$

可见，亥姆霍兹方程解的角度部分满足的方程与拉普拉斯一致。

方位角满足的方程

因此方位角部分满足的方程可写为：

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0,\ \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

连带勒让德方程

极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

令 $x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x),\theta\in[0,\pi],|x|\leqslant 1,\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关:

$$u=u(r,\theta)$$

对应 $m=0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

柱坐标系下方程的分离变量

柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为:

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)+k^2u(\rho,\varphi,z)=0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为:

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,z)$ 可分离变量:

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算，可以得到:

$\Phi(\varphi)$ 满足的方程

$\Phi(\varphi)$ 满足:

$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\Phi(\varphi)=0,\ \ \nu\geqslant 0$$

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\nu=m,\quad m=0,1,2,\cdots$$

> ps：这里为了让 ν 和 ν^2 一一对应，约定 ν 取非负实数。

$Z(z)$ 满足的方程

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0$$

$R(\rho)$ 满足的方程及贝塞尔方程

$R(\rho)$ 满足：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2+\lambda-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

令 $x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho,\rho=x/\sqrt{k^2+\lambda},(k^2+\lambda\neq 0),R(\rho)\Big|_{\rho=x/\sqrt{k^2+\lambda}}\equiv y(x),\quad y(x)\Big|_{x=\sqrt{k^2+\lambda}\rho}=R(\rho)$，则上面方程可化为贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0,\quad \nu\geqslant 0$$

或称为 ν 阶贝塞尔方程。

第16章 球函数

勒让德多项式

在球坐标系下，拉普拉斯方程为：

$$\nabla^2u(r,\theta,\varphi)=0$$

设 $u(r,\theta,\varphi)$ 可分离变量：

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入拉普拉斯方程，可得极角部分 $\Theta(\theta)$ 满足：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0$$

令 $x=\cos\theta,\Theta(\theta)=y(x),\theta\in[0,\pi],|x|\leqslant 1,\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为**连带勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

若考虑的问题具有极轴对称性，即场量与方位角 φ 无关：

$$u=u(r,\theta)\ \mathrm{or}\ \Phi(\varphi)=\mathrm{const}$$

对应 $m=0$，则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**：

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0,\ \ l=0,1,2,\cdots$$

利用级数法可以求得，勒让德方程在自变量 $|x|\leqslant 1$ 范围内，在自然边界条件 $|y(x)|<+\infty$ 下，对应于本征值 $l(l+1)$，$l=0,1,2,\cdots$ 的本征解为勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$：

$$\mathrm{P}_l(x)\equiv\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n},\ \ N=\begin{cases}\dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数}\\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数}\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}|x|\leqslant 1\\ (1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y_l(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\dfrac{\mathrm{d}y_l(x)}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y_l(x)=0,\ \ l=0,1,2,\cdots\\ |y_l(x)|<1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow y_l(x)=\mathrm{P}_l(x),\ \ \mathrm{P}_l(x)\equiv\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n},\ \ N=\begin{cases}\dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数}\\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数}\end{cases}$$

前几个勒让德多项式

$$\mathrm{P}_0(x)=1$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x$$

$$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

$$\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

$$\mathrm{P}_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

勒让德多项式的性质

$$\mathrm{P}_l(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n},\quad N = \begin{cases} \dfrac{l}{2} & ,l\text{为偶数} \\ \dfrac{l-1}{2} & ,l\text{为奇数} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}_l(1) = 1$$

$$\mathrm{P}_l(-x) = (-1)^l \mathrm{P}(x)$$

罗德里格斯公式（勒让德多项式的微分表达式）

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

勒让德多项式的生成函数（母函数）

定义勒让德多项式的生成函数 $f(r)$ 为:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}$$

其中，$x = \cos\theta, |x| \leqslant 1$

当 $r < 1$，可将 $f(r)$ 在 $r=0$ 处进行泰勒展开，可得:

$$f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^l,\quad r<1$$

或者:

$$\boxed{f(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos\theta) r^l,\quad r<1}$$

当 $r > 1, \frac{1}{r} < 1$，有:

$$
\begin{aligned}
f(r) &= \frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} \\
&= \frac{1}{r\sqrt{1+(1/r)^2-2\,(1/r)\,x}} \\
&= \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)\left(\frac{1}{r}\right)^l \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^{-(l+1)},\ \ r>1
\end{aligned}
$$

或者：

$$
\boxed{f(r)=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)r^{-(l+1)},\ \ r>1}
$$

勒让德多项式的递推公式

$$
x(1+2l)\mathrm{P}_l(x)-(l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)=0
$$

$$
\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)+\mathrm{P}_{l-1}'(x)-2x\mathrm{P}_l'(x)
$$

$$
(2l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)
$$

$$
(l+1)\mathrm{P}_l(x)=\mathrm{P}_{l+1}'(x)-x\mathrm{P}_l'(x)
$$

$$
l\mathrm{P}_l(x)=x\mathrm{P}_l'(x)-\mathrm{P}_{l-1}'(x)
$$

$$
\left(x^2-1\right)\mathrm{P}_l'(x)=lx\mathrm{P}_l(x)-l\mathrm{P}_{l-1}(x)
$$

勒让德函数的正交归一性

$\left\{\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x),\ \ l=0,1,2,\cdots\right\}$ 构成 $[-1,1]$ 上的正交归一函数系，基函数的正交归一性可表达为：

$$
\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\mathrm{P}_k(x)\cdot\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\delta_{kl},\ \ k,l=0,1,2,c\ldots
$$

具有轴对称的拉普拉斯方程的求解

拉普拉斯方程：

$$
\nabla^2u(r,\theta,\varphi)=0
$$

若求解的问题具有极轴对称性，即场分布与方位角 φ 无关：

$$
u=u(r,\theta)
$$

则拉普拉斯方程简化为:

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0$$

可以证明，在自然边界条件 $|u(r,\theta)|<1$ 下，方程的通解为:

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

例1

> 在单位球的北极点上放置一电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$ 的点电荷，求单位球内任一点 $\vec{r}$ 的电势，并用勒让德多项式表示。

由余弦定理知，单位球内 $\vec{r}$ 点离单位球上北极点的距离为:

$$r'=\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta},\ \ r<1$$

单位球内 $\vec{r}$ 点的电势为:

$$\begin{aligned}u(\vec{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\theta}},\ \ r<1\end{aligned}$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数，其可在 $r=0$ 点展开为:

$$u(\vec{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos\theta)r^l,\ \ r<1$$

例2

> 在均匀电场 $\vec{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电场。

以球心 O 为坐标原点，选取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴正方向，则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布 $u(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u(\vec{r})=0,\ \ r>a$$

特别地，这里电势 u 关于 z 轴对称，u 与 φ 无关，拉普拉斯方程可简化为:

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0,\ \ r>a$$

导体球接地，得到一个边界条件:

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r,\theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 $\vec{E}_0$ 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r\to+\infty$，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0，则：

$$u_0-u(r,\theta)=E_0r\cos\theta,\ \ r\to+\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2u(r,\theta)=0\\ u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0\\ u(r,\theta)\Big|_{r\to+\infty}=u_0-E_0r\cos\theta\end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r\to+\infty}=u_0-E_0r\cos\theta$，当 $r\to+\infty$， 有 $r^{-(l+1)}\to0$，于是：

$$\begin{aligned}u_0-E_0r\cos\theta&=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=A_0+A_1r\cos\theta+\cdots\end{aligned}$$

左右两边都看作关于 r 的多项式，对比系数得：

$$A_0=u_0,\ \ A_1=-E_0,\ \ A_2=A_3=\cdots=0$$

于是形式解可写为：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=u_0-E_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}B_lr^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\end{aligned}$$

再考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$，将形式解代入边界条件，得：

$$u_0-E_0a\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}B_la^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

即：

$$u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta)-E_0a\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}B_la^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$\left(u_0+B_0a^{-1}\right)\mathrm{P}_0(\cos\theta)+\left(-E_0a+B_1a^{-2}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\sum_{l=2}^{\infty}B_la^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当接近当所有线性叠加系数为零，即：

$$B_0=-au_0,\ B_1=a^3E_0,\ B_2=B_3=\cdots=0$$

综上，导体球外电势分布为：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u_0-E_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}B_lr^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=\boxed{u_0-E_0r\cos\theta-\frac{u_0a}{r}+E_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2}},\ r\geqslant a\end{aligned}$$

其中，u_0 为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

第17章 柱函数

贝塞尔函数

在柱坐标系下，亥姆霍兹方程为：

$$\nabla^2u(\rho,\varphi,z)+k^2u(\rho,\varphi,z)=0$$

其中，拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,z)$ 可分离变量：

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算，可以得到：

$\Phi(\varphi)$ 满足：

$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\Phi(\varphi)=0,\ \nu\geqslant 0$$

> ps：这里 $\nu \geqslant 0$ 是约定好的。

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ 可得：

$$\nu = m,\ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

$Z(z)$ 满足：

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

$R(\rho)$ 满足：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

令 $x = \sqrt{k^2+\lambda}\rho, (k^2+\lambda \neq 0), R(\rho) = y(x)$，则上面方程化为贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

或称为 ν 阶贝塞尔方程。

贝塞尔函数（第一类贝塞尔函数）和诺伊曼函数（第二类贝塞尔函数）

ν 阶贝塞尔函数，记为 $\mathrm{J}_\nu(x)$，定义为：

$$\mathrm{J}_\nu(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

> ps：这里的 $\nu \geqslant 0$

将 ν 替换为 $-\nu$，就得到 $-\nu$ 阶贝塞尔函数：

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

对 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 进行如下的线性组合就得到诺伊曼函数 $\mathrm{N}_\nu(x)$：

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

可以看到，若 ν 为整数 m，诺伊曼函数是 $0/0$ 型的函数，此时其定义由洛必达法则给出：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N}_m(x) &\equiv \lim_{\nu\to m}\mathrm{N}_\nu(x)\\
&= \lim_{\nu\to m}\frac{\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}\cos(\nu\pi)-\pi\sin(\nu\pi)\mathrm{J}_\nu(x)-\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\partial \mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=m}-(-1)^m\left.\frac{\partial \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right|_{\nu=m}\right]\\
&= \text{太复杂了不写了}
\end{aligned}
$$

其中 $m=0,1,2,\cdots$

$\mathrm{J}_\nu(x)$ 也称第一类贝塞尔函数，$\mathrm{N}_\nu(x)$ 也称第二类贝塞尔函数。

贝塞尔方程的通解

非整数阶贝塞尔方程的通解

（非整数）ν 阶贝塞尔方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0,\ \ \nu>0,\ \ \nu\text{非整数}
$$

的通解为：

$$
y(x)=C_1\mathrm{J}_\nu(x)+C_2\mathrm{J}_{-\nu}(x)
$$

其中，C_1,C_2 是非零实数，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 分别是（非整数）ν 阶贝塞尔函数：

$$
\mathrm{J}_{-\nu}(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}
$$

$$
\mathrm{J}_{\nu}(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}
$$

整数阶贝塞尔方程的通解

若不限制 φ 的取值范围，而采用周期性边界条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$，可得：

$$
\nu=m,\ \ m=0,1,2,\cdots
$$

此时贝塞尔方程是（正整数）m 阶贝塞尔方程：

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0,\ \ m=0,1,2,\cdots
$$

此时，m 阶贝塞尔方程的通解为：

$$
y(x)=C_1\mathrm{J}_m(x)+C_2\mathrm{N}_m(x)
$$

其中，C_1, C_2 是任意非零常数，$\mathrm{J}_m(x)$ 称为（正整数）m 阶贝塞尔函数，其定义为：

$$\mathrm{J}_m(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\nu+1\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$\mathrm{N}_m(x)$ 是（正整数）m 阶诺伊曼函数，其表达式就不写了。

整数阶贝塞尔函数的简单性质

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-1)^m \mathrm{J}_m(x)$$

$$\mathrm{J}_0(0) = 1$$

$$\mathrm{J}_m(0) = 0, \ \ m = 1, 2, \cdots$$

$$\mathrm{N}_{-m}(x) = (-1)^m \mathrm{N}_m(x)$$

贝塞尔函数的递推关系

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x)$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) - \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{J}_\nu'(x)$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(x) + \mathrm{N}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{N}_\nu(x)$$

$$\mathrm{N}_{\nu-1}(x) - \mathrm{N}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{N}_\nu'(x)$$

$$\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x)$$

柱函数

若函数 $y_\nu(x)$ 满足：

$$\begin{cases} y_{\nu-1}(x) + y_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} y_\nu(x) \\ y_{\nu-1}(x) - y_{\nu+1}(x) = 2y_\nu'(x) \end{cases}$$

或满足与上两式等价的关系：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu y_\nu(x)\right] = x^\nu y_{\nu-1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} y_{\nu+1}(x)\right] = x^{-\nu} y_{\nu+1}(x) \end{cases}$$

则这类函数统称为柱函数。

- 柱函数必定满足贝塞尔方程。

例题

例1

> 求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho,\varphi,t)$ 是 t 时刻 ρ,φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho,\varphi,t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho,\varphi,t)-a^2\nabla^2_{(2)}u(\rho,\varphi,t)=0$$

其中，$\nabla^2_{(2)}$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla^2_{(2)}\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho,\varphi,t)=U(\rho,\varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho,\varphi)T''(t)-a^2T(t)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=0$$

上式两边同时除以 $U(\rho,\varphi)T(t)$，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$$

注意到，$\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关，而 $\dfrac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$ 只与 ρ,φ 有关，二者相等，因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$ ：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2,\quad\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=-\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\dfrac{U(\rho,\varphi)}{a^2}$ 并移项，得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\omega^2}{a^2}U(\rho,\varphi)=0$$

令：

$$k \equiv \frac{\omega}{a},\ \ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho,\varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0\\ U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\\ |U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\\ U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\end{cases}$$

设 $U(\rho,\varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2R(\rho)\Phi(\varphi)=0$$

上式等号两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$：

$$
\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2
$$

因此，角度部分满足方程：

$$
\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0
$$

周期性边界条件：

$$
U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \Longrightarrow \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)
$$

$$
\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}
$$

从

$$
\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0
$$

可以解得：

$$
\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)
$$

结合周期性边界条件

$$
\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)
$$

可得：

$$
m = 0, 1, 2, \cdots
$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$
-\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2
$$

可以整理成：

$$
\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0
$$

令 $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho)\Big|_{\rho = x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$，则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0
$$

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\Longrightarrow R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$$

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\Longrightarrow|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\dfrac{m^2}{x^2}\right)y=0\\ y(x)\equiv R(\rho)\Big|_{\rho=x/k}=R(x/k),\ \ R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho)\\ R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0\\ |R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\end{cases}$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$$

其通解为:

$$y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)+D_m\mathrm{N}_m(x)$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$，可得:

$$D_m=0$$

因此:

$$y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$y^{(m)}(x)\Big|_{x=k\rho}=C_m\mathrm{J}_m(x)\Big|_{x=k\rho}$$

结合 $x=k\rho,R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho)$ 可得:

$$R^{(m)}(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(k\rho)$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$，即:

$$\mathrm{J}_m\left(x_n^{(m)}\right)=0,\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=,1,2,\cdots$$

结合边界条件 $R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$，即:

$$C_m \mathrm{J}_m(kb)=0$$

因此 k 允许的取值 $k_n^{(m)}$ 为:

$$k_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b},\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots$$

再根据 $k\equiv\omega/a$，得到 ω 允许的取值，即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$\omega_n^{(m)}=ak_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot a,\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$R_n^{(m)}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(k_n^{(m)}\rho\right)=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right),\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots$$

综上所述，边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$\boxed{\omega_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{b}\cdot a},\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)},\ \ m=0,1,2,\cdots;\ \ n=1,2,\cdots$$

其中，$x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理