可约表示的约化

约化后的每个准对角元构成的矩阵群都分别构成群 G 的线性表示。若这些准对角元是可约表示，则可以继续约化，最后得到一个准对角元都是不可约表示的表示。

设 $\tilde{D}_k(G)$ 是 G 的第 k 个不等价，不可约表示（$k=1,2,\cdots,r$），将 $D(G)$ 的约化记为：

$$X^{-1}D(G)X=\bigoplus_{k=1}^{r}n_k\tilde{D}_k(G)$$

其中，

$$A\oplus B\equiv\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}$$

写成矩阵的形式，即：

$$X^{-1}D(G)X=\begin{bmatrix}\tilde{D}_1(G) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{D}_1(G) & \\ & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$\mathrm{SO}(2)$ 群的表示

一维表示：

$$D_1(g(\theta))\equiv D_1(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

这是一维表示，所以这是不可约表示。

二维表示：

$$D_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

三维表示：

$$R_{\vec{\mathrm{k}}}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$
R_{\vec{\mathrm{j}}}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}
$$

$$
R_{\vec{\mathrm{i}}}(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}
$$

这三个表示都是可约的。

平移群 $\mathrm{T}(a)$

一维表示:

$D_1(a)=1$

$D_2(a)=\mathrm{e}^a$

$D_3(a)=\mathrm{e}^{ca}$

二维表示:

$$
D_5(a)=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}
$$

n 维表示:

$$
D_6(a)
=\begin{bmatrix}

\end{bmatrix}
$$

n 阶循环群 $\mathrm{C}_n=\{a,a^2,\cdots,a^n=e\}$

一维表示:

$D_0(a)=1$，恒等表示

$D_1(a)=\exp(\mathrm{i}2\pi/n)$，真实表示

$D_k(a)=\exp(\mathrm{i}k(2\pi/n))$，一般表示

n 维表示：

循环群还可以对应到坐标的循环。

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-2} \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

表示1：

$$\bar{D}_1(a) = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_1(a^i) = \bar{D}_1^i(a)$$

表示2：

$$\bar{D}_2(a) = \bar{D}_1^2(a)$$

$$\bar{D}_2\left(a^i\right) = \bar{D}_2^i(a)$$

表示k：

$$\bar{D}_k(a) = \bar{D}_1^k(a) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times(n-k)} & E_{k\times k} \\ E_{(n-k)\times(n-k)} & \mathbf{0}_{(n-k)\times k} \end{bmatrix}$$

$D_k(\mathrm{C}_n)$ 与 $\bar{D}_k(\mathrm{C}_n)$ 同构，但不等价。

$D_k(\mathrm{C}_n)$ 是不可约表示，$\bar{D}_k(\mathrm{C}_n)$ 是可约表示。$D_1(\mathrm{C}_n), \cdots, D_n(\mathrm{C}_n)$ 是 C_n 群的所有（n）个不等价不可约表示。

标量函数的变换算符与表示的构造

标量函数

不随坐标的变换而改变。标量函数用于描述标量场。

- 它是空间坐标的函数。

- 在空间每一个坐标点处，标量函数 $\phi(x)$ 的值都是标量。

标量函数的变换算符

都物理系统（标量场）发生改变，有两种理解方式：

- 保持坐标轴不变而改变系统本身。
- 保持系统本身不变而改变坐标轴。

考虑标量函数的形式不随坐标的变换而改变，即：

$$\psi'\left(x'\right)=\psi(x)$$

从坐标 x 变换到 x' 的变换记为R，即：

$$R: x \mapsto x'$$

$$x'=Rx \quad \text{or} \quad x=R^{-1}x'$$

考虑到 $\psi'(x')=\psi(x)$，有：

$$P_R\psi \equiv \psi', \ \ P_R\psi(x')=\psi'(x')$$

其中，P_R 是由 R 诱导出来的一个算符。

又 $\psi'(x')=\psi(x)=\psi(R^{-1}x')$

因此：

$$\psi'(x')=P_R\psi(x')=\psi(x)=\psi(R^{-1}x')$$

或：

$$\psi'(x)=P_R\psi(x)=\psi\left(R^{-1}x\right)$$

只要把原函数 $\psi(x)$ 的自变量 x 换成 $R^{-1}x$，再将 ψ 作用于 $R^{-1}x$ 就得到了 ψ 对 x 的作用。

例子：

$$\psi(\vec{r})=xy$$

考虑如下的坐标变换：

$$R: x \mapsto x'=-x, \ \ y \mapsto y'=y, \ \ z \mapsto z'=z$$

容易求得其逆变换：

$$R: x \mapsto x' = -x,\ \ y \mapsto y' = y,\ \ z \mapsto z' = z$$

求 ψ':

$$\psi'(\vec{r}) = \psi\left(R^{-1}\vec{r}\right) = -xy$$

$\{R\}$ 和 $\{P_R\}$ 同构

证明:

先证 P_R 是线性算符:

设

$$\eta(x) = a\psi(x) + b\phi(x)$$

则:

$$P_R\eta(x) = P_R\left[a\psi(x) + b\phi(x)\right]$$

$$P_R\eta(x) = \eta\left(R^{-1}x\right) = a\psi\left(R^{-1}x\right) + b\phi\left(R^{-1}x\right) = aP_R\psi(x) + bP_R\phi(x)$$

于是:

$$P_R\left[a\psi(x) + b\phi(x)\right] = aP_R\psi(x) + bP_R\phi(x)$$

再证 $P_{SR} = P_S P_R$:

考虑两个坐标变换 R, S，对应的标量函数变换分别是 P_R, P_S

$$R: x \mapsto x' = Rx,\ \ \psi'(x') = P_R\psi(x') = \psi(x)$$

$$S: x' \mapsto x'' = Sx',\ \ P_S\psi'(x'') = \psi'(x') = \psi(x)$$

$$SR: x \mapsto x'' = SRx,\ \ P_{SR}\psi(x'') = \psi(x)$$

注意到:

$$P_{SR}\psi(x'') = P_S\psi'(x'') = P_S P_R\psi(x'')$$

比较可得:

$$P_{SR} = P_S P_R$$

再证 $\{R\} \simeq \{P_R\}$

建立对应关系：$R \mapsto P_R, \psi\left(R^{-1} x\right)=P_R \psi(x)$

设 $S \mapsto P_S, R \mapsto P_R$，则:

$$SR \mapsto P_{SR}$$

又 $P_{SR}=P_S P_R$，于是:

$$SR \mapsto P_S P_R$$

因此

$$\{R\} \simeq\left\{P_R\right\}$$

最后证这种对应关系是一一对应。

设 $R \neq S, R \mapsto P_R, S \mapsto P_S$，但 $P_R=P_S$

$$\psi\left(R^{-1} x\right)=P_R \psi(x)=P_S \psi(x)=\psi\left(S^{-1} x\right)$$

于是:

$$R=S$$

与假设矛盾，所以这种对应是一一对应。