第0章

关于平时分

小班分数的组成部分如下：

出勤

原则上出勤率不作为平时分组成部分。

不想来的话最好还是QQ上跟我请个假（随便找个理由）

作业

占大头

$80\% \sim 100\%$

关于换班

跟我说一声即可，不需要说明理由。

讲什么

三不讲

简单的不讲（太简单了没必要讲）

不会的不讲（自己都不会咋讲）

不考的不讲（不考还讲啥）

答疑

我说的每一句话都可能是错的。（我水平不高）

讲义内容之外的我很可能答不上来（虽然讲义内容之内的可能也一样答不上来）

立体角

任意有向曲面的立体角

微分形式

有向面元的微元立体角：

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^3}$$

积分形式

$$\Omega = \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{r^3}$$

球坐标下球面微元立体角

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

两个重要公式

高斯公式

$$\oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{V} (\nabla \cdot \vec{A}) \mathrm{d}V$$

斯托克斯公式

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

第1章 静电场

基本概念

库仑定律

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

式中，$\vec{F}_{12}$ 是**真空中**电荷 q_1 对电荷 q_2 的静电力，$\vec{e}_{12}$ 是从 q_1 到 q_2 的单位矢量，其中：

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

上式中，ε_0 称为真空介电常量或真空电容率，其数值为：

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$$

对应的k值为：

$$k = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$$

库仑定律又可以写为：

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

电场强度

电场强度，记为 $\vec{E}$，定义为：

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

其中，q_0 是试探电荷的电荷量，$\vec{F}$ 是试探电荷所受电场力

特别地，若产生电场的源是点电荷 q，则有：

$$\begin{aligned} \vec{E} &\equiv \frac{\vec{F}}{q_0} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \end{aligned}$$

其中，r 是场点到源点的位矢大小，$\vec{e}_r$ 是源点指向场点的单位矢量

电场叠加原理

点电荷组产生的电场在某点的电场强度等于各点电荷单独存在时所产生的电场在该点电场强度的矢量叠加。

例：半径为 R 的带电细圆环，电荷线密度为 $\lambda = \lambda_0 \sin\varphi, \lambda_0$ 是一个正的常数， φ 是半径 R 和 x 轴正方向所成的角，求环心 O 处的电场强度 $\vec{E}$

答案:

$$\vec{E}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{e}_y$$

解:

$\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 范围内的电荷:

$$\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\varphi=\lambda_0 R\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$\mathrm{d}q$ 产生的电场大小:

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

由对称性，原点处电场的 x 分量 $E_x=0$，y 分量为:

$$\begin{aligned}E_y&=2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\mathrm{d}E\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\end{aligned}$$

考虑方向，得:

$$\vec{E}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{e}_y$$

电偶极子

由一对等量异号点电荷组成的带电体系叫做**电偶极子。**两电荷间的距离 l 远比场点到它们的距离小

电偶极矩

$$\vec{p}=q\vec{l}$$

其中，$\vec{l}$ 的方向：从负电荷指向正电荷；$\vec{l}$ 的大小 l：正负电荷间的距离

电场线

在电场中作出许多曲线，使这些曲线上每一点的切线方向和该点场强方向一致，那么所有这样作出的曲线叫做电场的**电场线**

静电场电场线性质:

(1)电场线自正电荷(或自无穷远)，止于负电荷(或伸向无穷远)，但不会在没有电荷的地方中断

(2)若带电体系中正、负电荷一样多，则由正电荷出发的全部电场线都集中到负电荷上去

(3)两条电场线不会相交

(4)静电场中的电场线不会形成闭合线

电场强度通量

通过某一曲面 S 的电场强度通量，记为 Φ_E，定义为:

$$\mathit{\Phi}_E\equiv\iint\limits_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

其中，θ 是 $\vec{E}$ 与 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的夹角

高斯定理

通过任意闭合曲面 S 的电场强度通量等于该面所包围的**所有电荷量**的代数和 $\sum q$ 除以 ε_0, 与闭合曲面外的电荷无关.

$$\oiint\limits_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i$$

例：求半径为 R，带电量为 Q 的，**均匀带电球壳**内外场强

解：

$r>R$:

由对称性，球壳外某点的电场强度方向与球壳中心和此点连线平行

取高斯面为球面，则由高斯定理：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

于是：

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

$0<r<R$:

同样由对称性，取高斯面为球面，则由高斯定理：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 0$$

于是：

$$E=0$$

综上，结合电场强度的方向：

$$E=\begin{cases}0,\ 0\leqslant r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2},\ r>R\end{cases}$$

例：求均匀带电球体内外的电场分布，球体半径为 R，球体总带电量为 Q

解：

由对称性，球体内外某点P的电场方向与P和球心O的连线共线

$r>R$，取高斯面为球面，则由高斯定理：

$$\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i$$

分别计算上式等号两端表达式，有：

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

于是：

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2},\ r>R$$

$r<R$，取高斯面为球面，则由高斯定理：

$$4\pi r^2E=Q(\frac{r}{R})^3$$

于是：

$$E=\frac{Qr}{4\pi R^3},\ r<R$$

静电场力做功与路径无关

证明：

考虑点电荷 q 产生的电场 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ ，电场力对试探电荷 q_0 所做的功为：

$$
\begin{aligned}
\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}E\cos\theta\mathrm{d}l\\
&=q_0\int_{\substack{P\\(L)}}^{Q}E\mathrm{d}r\\
&=q_0\int_{r_P}^{r_Q}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r\\
&=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q})
\end{aligned}
$$

显然，此功与路径无关

静电场的环路定理：

$$
\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0
$$

利用高斯公式：

$$
\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

得：

$$
\iint_S(\nabla\times\vec{E})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0\Longrightarrow\nabla\times\vec{E}=\vec{0}
$$

这就是说，**静电场**是**无旋场。**

电势能的改变量/增量

在电场中把一个试探电荷 q_0 从 P 点移到 Q 点，此过程中**试探电荷电势能的改变量**(或称之为增量)，记为 ΔE_p，定义为此过程中**静电场力对试探电荷做功的负值**$-A_{PQ}$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_p\equiv-A_{PQ}
&=-\int_P^Q q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\
&=-q_0\int_P^Q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}
$$

电势差

P,Q 两点之间的电势差，记为 U_{PQ}，定义为从 P 到 Q 移动单位正电荷时电场力所做的功，并可被进一步表达为从 P 到 Q 电场沿任意路径的路径积分：

$$
\begin{aligned}
U_{PQ}\equiv\frac{-\Delta E_p}{q_0}
&=\frac{A_0}{q_0}\\
&=\int_P^Q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}
$$

电势

空间中某点 P 的电势 $U(P)$ 就是 P 点对人为选定的电势零点的电势差

若以选取无穷远处为电势零点，则**点电荷**产生的电场中某一点电势：

$$
\begin{aligned}
U(P) &= \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_{r_p}^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_P}
\end{aligned}
$$

电势叠加原理

点电荷组的电场中某点的电势，等于各个点电荷单独存在时的电场在该点电势的代数和

等势面的性质:

等势面与电场线处处正交

等势面较密集的地方场强大，较稀疏的地方场强小

电势的梯度:

电场强度和电势的关系

$$
\vec{E} = -\nabla U
$$

带电体系的静电能

带电体系的静电能 W_e 等于把各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时抵抗静电力所做的功 A'

两个点电荷的情形

设两个点电荷q_1, q_2原本处在位置P_1, P_2

由电势能差的定义(电势能的改变量等于电场力做功的负值):

先把 q_1 移动到它应该在的位置，此过程还没有已经存在的电场，电场力为零，静电能改变量为零.

再把 q_2 移动到它应该在的位置，由于已经存在由 q_1 产生的电场，故此过程电场力做功的负值即为 q_2 电势能的改变量

$$
\begin{aligned}
E_p &= -\int_\infty^{P_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q_2\int_{P_2}^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= q_2 U_{12}
\end{aligned}
$$

多个点电荷的情形

$$
\begin{cases}
E_{p1} = 0 \\
E_{p2} = q_2 U_{12} \\
E_{p3} = q_3(U_{13}+U_{23}) \\
\vdots \\
E_{pn} = q_n(U_{1n}+U_{2n}+\cdots+U_{n-1,n})
\end{cases}
$$

用求和符号表达:

$$
E_{pi} = q_i\sum_{j=1}^{i-1} U_{ji},\ \ (i=1,2,\cdots,n)
$$

总电势能:

$$
\begin{aligned}
E_p &= \sum_{i=1}^{n} E_{pi} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(q_i \sum_{j=1}^{i-1} U_{ji}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} q_i U_{ji} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

由于：

$$
\begin{aligned}
q_i U_{ji} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
q_j U_{ji} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{ij}}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

所以：

$$
q_i U_{ji} = q_j U_{ji}
$$

E_p可进一步表达为：

$$
\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}
\end{aligned}
$$

记 U_i 为除 q_i 外其余电荷在 q_i 位置 P_i 上产生的电势，则电势能又可以写成：

$$
E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i U_i
$$

电荷连续分布情形的静电能

体电荷分布：

$$
W_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho_e U \mathrm{d}V
$$

面电荷分布：

$$
W_e = \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma_e U \mathrm{d}S
$$

线电荷分布：

$$
W_e = \frac{1}{2}\int\limits_l \eta_e U \mathrm{d}l
$$

例：计算均匀带电球壳的静电自能，设球的半径为 R，总带电荷量为 q

$$
\begin{aligned}
\sigma_e &= \frac{q}{4\pi R^2} \\
U &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\iint\limits_S \sigma_e U \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\oiint\limits_{(\text{球面})}\mathrm{d}S \\
&= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

第1章课后习题选解

1.3-6

半径为 R 的无穷长直圆筒面上均匀带电，沿轴线单位长度的电荷量为 λ .求场强分布

答案：

$$
\begin{cases}
E = 0 & ,r < R \\
E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & ,r > R
\end{cases}
$$

解：

$r > R$, 取高斯面为一个高为 h,底面半径为 r 的闭合圆柱，由高斯定理，有：

$$
2\pi r h E = \frac{1}{\varepsilon_0}h\lambda
$$

解得：

$$
E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}
$$

1.3-4

根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 q_e 的原子核(可以看作点电荷)，外面是带负电的电子云.在正常状态(核外电子处在s态)下，电子云的电荷密度分布是球对称的：

$$
\rho_e(r) = -\frac{q_e}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}
$$

其中，a_0是一常量. 求原子内的电场分布

答案：

$$
E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\frac{2}{a_0^2}r^2 + \frac{2}{a_0}r + 1)e^{-\frac{2r}{a_0}}
$$

思路：积分有点难算(可以用待定系数法求此类积分)，不过思路还是明确的

解：

$$
4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_e + \int_0^r 4\pi r^2 \rho_e(r)\mathrm{d}r)
$$

于是：

$$
E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1 - \frac{4}{a_0^3}\int_0^r r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\mathrm{d}r)
$$

为求解积分，由经验，设：

$$
\left((Ar^2 + Br + C)e^{-\frac{2r}{a_0}}\right)' = r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}
$$

即：

$$
\left(-\frac{2A}{a_0}r^2 + (2A - \frac{2B}{a_0})r + B - \frac{2C}{a_0}\right)e^{-\frac{2r}{a_0}} = r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}
$$

对应项系数相等，解方程组：

$$\begin{cases} -\dfrac{2A}{a_0}=1 \\ 2A-\dfrac{2B}{a_0}=0 \\ B-\dfrac{2C}{a_0}=0 \end{cases}$$

解得：

$$A=-\frac{a_0}{2}$$
$$B=-\frac{a_0^2}{2}$$
$$C=-\frac{a_0^3}{4}$$

于是：

$$\begin{aligned} E&=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(1-\frac{4}{a_0^3}\int_0^r r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\mathrm{d}r) \\ &=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1-\frac{4}{a_0^3}(-\frac{a_0}{2}r^2-\frac{a_0^2}{2}r-\frac{a_0^3}{4})e^{-\frac{2r}{a_0}}\Big|_0^r\right) \\ &=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\frac{2}{a_0^2}r^2+\frac{2}{a_0}r+1)e^{-\frac{2r}{a_0}} \end{aligned}$$

一道考试题

一个厚度为 b 的无限大带电平板，其电荷体密度为 : $\rho_e=kx(0\leqslant x\leqslant b),k$为正的常数

(1)求平板外两侧任意点 P_1,P_2 的场强大小

思路：题目可没说是“金属带电平板”；带电平板电荷体密度不均匀，但我们可以用微元法，极薄的平板周围的电场分布我们是清楚的，再积分即可.

解：

厚度为 b 的无限大带电平板可分割成大量薄平板，每个薄平板的电荷体密度可看作是均匀的，由均匀带电平板周围的电场分布及电场叠加原理知，整个厚度为 b 的无限大带电平板左右两侧电场强度大小处处相等，于是由高斯定理：

$$2\Delta SE=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b kx\Delta S\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon_0}k\Delta S\frac{b^2}{2}$$

解得：

$$E=\frac{kb^2}{4\varepsilon_0}$$

(2)求平板内任一点P的电场强度

思路：在第一问的基础上，我们现在可以把高斯面的一部分取在平板内了

解：

$$\begin{aligned} -E_{内}\Delta S+E_{外}\Delta S&=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_x^b kx\Delta S\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{\varepsilon_0}k\Delta S\frac{b^2-x^2}{2} \end{aligned}$$

解得：

$$E_{内}=\frac{k}{2\varepsilon_0}(x^2-\frac{b^2}{2}),\qquad (0\leqslant x\leqslant b)$$

答案：

$$E_{内}=\frac{k}{2\varepsilon_0}(x^2-\frac{b^2}{2}),\qquad (0\leqslant x\leqslant b)$$

(3)求场强为零的点的坐标

答案：$x=\frac{b}{\sqrt{2}}$

解:

令 $E_{内}=0$,解得:

$$x=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

一道小难题

一无限大平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ_e,求通过小孔中心 O 且与平面垂直的直线上某点 P 的场强和电势(设小孔中心O的电势为零)

答案:

$$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\hat{x}$$
$$U=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(R-\sqrt{R^2+x^2})$$

解:

假设有一块完整的无限大均匀带电平面，其可被人为分为两部分：一个实心圆和除圆以外的部分.设完整平板所产生的电场为 $\vec{E}_{total}$,实心圆产生的电场为 $\vec{E}_o$,除实心圆外部分产生的电场为 $\vec{E}$,则由电场叠加原理，有:

$$\vec{E}_{total}=\vec{E}_o+\vec{E}$$

于是:

$$\vec{E}=\vec{E}_{total}-\vec{E}_o$$

这就是说，若想求无限大均匀带电平板除实心圆以外部分产生的电场，只要求出整个平板产生的电场，再减去实心圆产生电场即可.

由高斯定理，有:

$$2\Delta SE_{total}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Delta S\sigma_e$$

解得:

$$E_{total}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$$

下面求实心圆产生的电场 E_o：

$$\begin{aligned}E_o&=\int_{r=0}^{r=R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi r\sigma_e\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}}{r^2+x^2}\mathrm{d}r\\&=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}\frac{\frac{r}{x}}{(1+(\frac{r}{x})^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}(\frac{r}{x})\\&=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r}{x})^2}})\Bigg|_{r=0}^{r=R}\\&=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})\end{aligned}$$

于是:

$$E=E_{total}-E_o=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

由于题目假定小孔中心电势为零，故:

$$\begin{aligned}U&=\int\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\\&=\int_x^0\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(R-\sqrt{R^2+x^2})\end{aligned}$$

1.4-14：

求均匀带电圆环轴线上的电势分布，圆环电荷量为 q

答案：

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$