1 哈密顿力学

最小作用量原理

任何一个力学系统可以用拉格朗日函数

$$L(q_1,\cdots,q_s,\dot q_1,\cdots,\dot q_2,t)$$

来描述，这个函数可以简记为：

$$L(q,\dot q,t)$$

设系统在 $t=t_1$ 时刻的位置为 $q^{(1)}$，在 $t=t_2$ 时刻的位置为 $q^{(2)}$

作用量，记为 S，定义为拉格朗日函数对时间的积分：

$$S[q(t)]\equiv\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)\mathrm{d}t$$

作用量 S 的值与 $q(t)$ 这一函数有关，一旦 $q(t)$ 这一函数确定，S 的值也就确定。因此，S 是一个泛函。

最小作用量原理就是说，使得作用量 S 取平稳值的路径 $q(t)$ 是系统的真实运动路径。

运动方程的导出

考虑一个自由度为 1 的系统，系统的真实运动路径由广义坐标 $q(t)$ 描述。设函数 $q(t)$ 有一小变动 $(\delta q)(t)$，且函数 $(\delta q)(t)$ 满足：

$$(\delta q)(t_1)=0,\quad(\delta q)(t_2)=0$$

作用量变为：

$$
\begin{aligned}
S[q(t)+(\delta q)(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t)+(\delta q)(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[q(t)+(\delta q)(t)\Big], t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t)+(\delta q)(t), \dot{q}(t)+(\dot{\delta q})(t), t\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

将函数 $L\left(q+\delta q, \dot{q}+(\dot{\delta q}), t\right)$ 在 $(q,\dot{q},t)$ 处展开，忽略高阶小量：

$$
L\left(q+\delta q, \dot{q}+(\dot{\delta q}), t\right) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\delta q})
$$

作用量的变化为：

$$
\begin{aligned}
S[q(t)+(\delta q)(t)] - S[q(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t)+(\delta q)(t), \dot{q}(t)+(\dot{\delta q})(t), t\right)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\delta q})\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}(\delta q)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{d}t + \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}(\delta q) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \delta q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\mathrm{d}t + 0 - \int_{t=t_1}^{t=t_2} \delta q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

最小作用量原理说，系统的真实路径 $q(t)$ 使得作用量 S 取平稳值。

这就是说，若 $q(t)$ 是系统的真实运动路径，则其上加一个任意的小变动 $(\delta q)(t)$ 导致的作用量的改变应为零，即系统的真实运动路径 $q(t)$ 应满足：

$$
S[q(t)+(\delta q)(t)] - S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q\mathrm{d}t = 0
$$

由于 $(\delta q)(t)$ 的任意性，上式为零当且仅当：

$$
\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0
$$

这就是运动方程（拉格朗日方程），其解 $q(t)$ 就是系统的真实运动路径。

对于有 s 个自由度的系统，类似可得到 s 个方程：

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s
$$

勒让德变换

单变量

设 $y=f(x)$ 是凸函数，$f''(x)>0$

函数 $f(x)$ 的勒让德变换，记为 $f^\star(p)$，定义为：

$$f^\star(p)=\Big[px-f(x)\Big]\Big|_{\frac{\partial[px-f(x)]}{\partial x}=0}$$

几何意义

在 x,y 平面上作 $f(x)$ 的图像。给定一个 p，考虑直线 $y=px$，可以找到 x 轴上唯一一点 $x(p)$，其使得直线 $y=px$ 到凸曲线 $y=f(x)$ 的距离最远。

对于固定的 p，二元函数 $F(x,p)=px-f(x)$ 在 $x=x(p)$ 处对 x 取最大值，将 $x=x(p)$ 代入二元函数，则二元函数退化成一元函数 $F(x(p),p)$，这个一元函数就称为 $f(x)$ 的勒让德变换。

多变量

多元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的勒让德变换 $f^\star(u_1,\cdots,u_n)$ 定义为：

$$f^\star(u_1,\cdots,u_n)=\left(\sum_{i=1}^n u_ix_i\right)-f(x_1,\cdots,x_n),\;\; u_i=\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f^\star&=\sum_{i=1}^n(u_i\mathrm{d}x_i+x_i\mathrm{d}u_i)-\mathrm{d}f\\&=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}u_i-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i=1}^n x_i\mathrm{d}u_i\end{aligned}$$

$f(x_1,\cdots,x_n)$ 的勒让德变换的构造思路：

- 计算 $u_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i},\;\; i=1,\cdots,n$
- 勒让德变换 $f^\star$ 以 f 对各变量的导函数为变量，$f^\star(u_1,\cdots,u_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^n u_ix_i-f(x_1,\cdots,x_n)$

哈密顿方程组

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$$

拉氏量对 $\dot{q}_i$ 的偏导记为广义动量 $\dot{p}_i$：

$$p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$$

于是从 E-L 方程 $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0$ 可得：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

定义了拉氏量对各广义速度的偏导后可写出其勒让德变换（哈密顿量） $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$:

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$$

一方面，对上式微分:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \sum_i p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_i p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_i \left(\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_i \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_i \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

另一方面，直接对 $H = H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ 微分可得:

$$\mathrm{d}H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$$

对比可得:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

刘维尔定理

相空间

坐标为 $p_1,\cdots,p_n;q_1,\cdots,q_n$ 的 $2n$ 维空间称为相空间。

相流

相流即相空间中的单参数变换群:

$$g^t : (\vec{p}(0),\vec{q}(0)) \mapsto (\vec{p}(t),\vec{q}(t))$$

其中，$\vec{p}(t),\vec{q}(t)$ 是哈密顿方程的解。

刘维尔定理

相流保持体积不变。

用 $D(0)$ 表示相空间中的一个区域:

$$D(t) \equiv g^t D(0)$$

用 $V(t)$ 表示 $D(t)$ 的体积:

$$V(0) = V(t)$$

庞加莱回归定理

令 g 是保持体积的连续的一对一映射，它将欧式空间的有界区域 D 映到其自身上：

$$gD = D$$

则 D 的任一点的任一邻域 U 中都有 $\vec{x} \in U$ 在有限次 g 的作用下会回到 U 中，即存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得：

$$g^n \vec{x} \in D$$

证明：

用反证法。考虑邻域 U 在映射 g 作用下的像 $U, gU, g^2U, \cdots$，若它们不相交，D 将有无限体积。

例题

例1

> 已知作用量
>
> $$S[p,x,A] = S_0 + S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t[p\dot{x} - H(p,x) - A(t)H(p,x)] + k\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tA(t)$$
>
> 求系统的运动方程。

$$\begin{aligned}
\delta S\left[p,x,A\right] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\delta[p\dot{x} - H(p,x) - A(t)H(p,x)] + \int_{t_1}^{t_2} k\mathrm{d}t\delta A \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left\{\dot{x}\delta p + p\delta\dot{x} - H(p,x)\delta A - [1+A]\left[\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right]\right\} + \int_{t_1}^{t_2} k\mathrm{d}t\delta A
\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tp\delta\dot{x} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tp\frac{\mathrm{d}\left(\delta x\right)}{\mathrm{d}t} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\delta x\right) - \dot{p}\delta x\right] \\
&= p\delta x\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\dot{p}\delta x \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\dot{p}\delta x
\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}
\delta S\left[p,x,A\right] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left\{\dot{x}\delta p + p\delta\dot{x} - H(p,x)\delta A - [1+A]\left[\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right]\right\} + \int_{t_1}^{t_2} k\mathrm{d}t\delta A \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\dot{p}\delta x + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left\{\dot{x}\delta p - H(p,x)\delta A - [1+A]\left[\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right]\right\} + \int_{t_1}^{t_2} k\mathrm{d}t\delta A \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left\{\delta p\left[\dot{x} - (1+A)\frac{\partial H}{\partial p}\right] + \delta x\left[-\dot{p} - (1+A)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + \delta A\left[-H+k\right]\right\}
\end{aligned}$$

$\delta S = 0$ 给出系统的运动方程：

$$\dot{x}-(1+A)\frac{\partial H}{\partial p}=0$$

$$-\dot{p}-(1+A)\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

$$-H+k=0$$

或者：

$$\dot{x}=[1+A(t)]\frac{\partial H(p,x)}{\partial p}$$

$$\dot{p}=-[1+A(t)]\frac{\partial H(p,x)}{\partial x}$$

$$H(p,x)=k$$

例2

> 一维谐振子，其拉格朗日量为
>
> $$L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2$$
>
> 其中 x 为偏离平衡位的位移，$\dot{x}$ 为速度。求解系统的作用量 S，确定其与初末时刻及位置的关系。

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\omega^2x,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}$$

代入 E-L 方程，得：

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

解得：

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

设 $x(0)=x_0$，则：

$$A\cos\varphi_0=x_0$$

$$\dot{x}(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

作用量为：

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x})\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \int_{t_1}^{t_2} [\sin^2(\omega t+\varphi_0) - \cos^2(\omega t+\varphi_0)]\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\omega^2 A^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos(2\omega t+2\varphi_0)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4}\omega A^2 \int_{t=t_1}^{t=t_2} \cos(2\omega t+2\varphi_0)\mathrm{d}(2\omega t+2\varphi_0) \\
&= -\frac{1}{4}\omega A^2 \sin(2\omega t+2\varphi_0)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \\
&= -\frac{1}{4}\omega A^2 \Big[\sin(2\omega t_2+2\varphi_0) - \sin(2\omega t_1+2\varphi_0)\Big]
\end{aligned}
$$

其中，$A\cos\varphi_0 = x_0$，x_0 是初始位置。

2 黑洞

线元和度规

$$
\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \begin{bmatrix} c\mathrm{d}t & \mathrm{d}x_1 & \mathrm{d}x_2 & \mathrm{d}x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\mathrm{d}t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

闵氏时空线元（时空间隔）：

$$
\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2
$$

欧式时空线元：

$$
\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2
$$

考虑因果结构用闵氏时空。考虑守恒量用欧氏时空。二者可通过 $t \to \mathrm{i}t$ 转换

$\mathrm{d}s^2 < 0$，类时

$\mathrm{d}s^2 > 0$，类空

$\mathrm{d}s^2 = 0$，类光

- 可取 $c = 1$

球坐标系：

$$
\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2
$$

度规：

$$
g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}
$$

度规是对称的：

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

稳态时空：

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$$

静态时空：

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0, \quad g_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

静态、球对称：

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

黑洞物理学量

事件视界

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

$$g(r_h) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{g_{rr}} = 0$$

无限红移面

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

$$f(r_s) = 0 \quad \text{or} \quad g_{tt} = 0$$

霍金温度

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{g(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

$$f(r_h) = g(r_h) = 0$$

$$F_H \equiv \left.\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_h}, \quad G_H \equiv \left.\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_h}$$

$$T = \frac{\sqrt{F_H G_H}}{4\pi}$$

事件视界面积

$$A = \iint \sqrt{-g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

其中，$g \equiv \det\left(g_{\mu\nu}\right)$ 是度规行列式；面积分在视界面上进行。

特别地，若线元：

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

则度规行列式：

$$g\equiv\det\left(g_{\mu\nu}\right)=-r^4\sin^2\theta$$

面积：

$$A=\iint\sqrt{-g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\iint r_h^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=4\pi r_h^2$$

熵

$$S=\frac{A}{4}$$

热容

热力学基本关系：

$$\mathrm{d}E=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V$$

E,T,S,p,V 中只有两个独立变量。

$$C_V\equiv\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

选取 T,V 作为独立变量，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E&=T\mathrm{d}S-p\mathrm{d}V\\&=T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\mathrm{d}V\right]-p\mathrm{d}V\\&=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\mathrm{d}T+\left[T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T-p\right]\mathrm{d}V\end{aligned}$$

从上式可得：

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

因此：

$$C_V\equiv\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

$C_V>0$ 稳定；$C_V<0$ 不稳定。

黑洞质量 M 相当于热力学中的 E，黑洞热容：

$$C\equiv\frac{\partial M}{\partial T}$$

黑洞合并

设两个史瓦西黑洞合并为一个史瓦西黑洞（只有当 $\Delta A>0$ 才可合并）：

$$M_1+M_2\to M+\Delta M,\quad \Delta A>0$$

$$A=16\pi M^2,\quad A_1=16\pi M_1^2,\quad A_2=16\pi M_2^2$$

$$A>A_1+A_2\Longrightarrow 16\pi\left(M_1+M_2-\Delta M\right)^2>16\pi M_1^2+16\pi M_2^2$$

效率：

$$\eta\equiv\frac{\Delta M}{M_1+M_2}\leqslant 1-\frac{\sqrt{M_1^2+M_2^2}}{M_1+M_2}$$

当 $M_1=M_2$ 时最大效率最大。

$$\eta_{\max}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 30\%$$

特殊黑洞

施瓦西黑洞

线元

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}$$

视界

$$\frac{1}{g_{rr}}=0\Longrightarrow f(r_h)=0\Longrightarrow r_h=2M$$

无限红移面

$$g_{tt}=0\Longrightarrow f(r_s)=0\Longrightarrow r_s=2M$$

温度

$$F_h=\left.\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_h}=\left.\frac{2M}{r^2}\right|_{r=2M}=\frac{1}{2M}$$

$$G_h=\frac{1}{2M}$$

$$T=\frac{\sqrt{F_hG_h}}{4\pi}=\frac{1}{8\pi M}$$

面积

$$A=4\pi r_h^2=16\pi M^2$$

熵

$$S=\frac{A}{4}=4\pi M^2$$

热力学基本关系

$$r_h = 2M$$

$$\mathrm{d}M = \frac{1}{2}\mathrm{d}r_h$$

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\left(4\pi M^2\right) = 8\pi M \mathrm{d}M$$

$$\mathrm{d}M = \frac{1}{8\pi M}\mathrm{d}S = T\mathrm{d}S$$

Smarr 公式

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{8\pi M} \\ S = 4\pi M^2 \end{cases} \Longrightarrow M = 2TS$$

热容

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \quad M = \frac{1}{8\pi T}$$

$$C \equiv \frac{\partial M}{\partial T} = \left(\frac{\partial T}{\partial M}\right)^{-1} = -8\pi M^2 < 0$$

孤立史瓦西黑洞不稳定。

RN 黑洞

线元

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

视界

$$\frac{1}{g_{rr}} = 0 \Longrightarrow f(r_h) = 0 \Longrightarrow r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ 就是视界半径。

当 $M > |Q|$，黑洞

当 $M = |Q|$，极端黑洞

当 $M < |Q|$，裸奇点

无限红移面

$$g_{tt} = 0 \Longrightarrow f(r_s) = 0 \Longrightarrow r_{s\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

温度

$$F_H = G_H = f'(r_+) = \frac{2M}{r_+^2} - \frac{2Q^2}{r_+^3}$$

$$T=\frac{\sqrt{F_H G_H}}{4\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{M}{r_+^2}-\frac{Q^2}{r_+^3}\right)=\frac{M^2-Q^2+M\sqrt{M^2-Q^2}}{2\pi\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^3}$$

面积

$$A=4\pi r_+^2=4\pi\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^2$$

熵

$$S=\frac{A}{4}=\pi r_+^2=\pi\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^2$$

电势

$$\phi=\frac{Q}{r_+},\quad r_+=M+\sqrt{M^2-Q^2}$$

热力学基本关系

$$\mathrm{d}M=T\mathrm{d}S+\phi\mathrm{d}Q$$

Smarr 公式

$$M=2TS+\phi Q$$

$$M=\frac{2\pi}{S}+\frac{\pi Q^4}{4S}+\frac{Q^2}{2}$$

热容

$$C_Q=\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_Q=\frac{2\pi\sqrt{M^2-Q^2}\left(-M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^3}{2Q^2-M\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)}$$

Kerr 黑洞

线元

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\frac{2Mr}{\rho^2}\left(\mathrm{d}t^2-a^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)+\frac{\rho^2}{\varDelta}\mathrm{d}r^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2+\left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

$$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta,\quad \varDelta=r^2+a^2-2Mr,\quad a=\frac{J}{M}$$

其中，J 是角动量。

视界

$$\frac{1}{g_{rr}}=0\Longrightarrow\varDelta=0\Longrightarrow r_\pm=M\pm\sqrt{M^2-a^2}$$

当 $M>|a|$，黑洞；

当 $M=|a|$，极端黑洞；

当 $M<|a|$，裸奇点。

外 r_+ 称为事件视界。

无限红移面

$$g_{tt}=0\Longrightarrow r^2-2Mr+a^2\cos^2\theta=0\Longrightarrow r_{s\pm}=M\pm\sqrt{M^2-a^2\cos^2\theta}$$

温度

$$T=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{r_+}{r_+^2+a^2}-\frac{1}{2r_+}\right)$$

面积

$$t=\text{const},r=r_+,\quad \mathrm{d}t=\mathrm{d}r=0$$

代入线元得:

$$\mathrm{d}s^2=\rho_+^2\mathrm{d}\theta^2+\frac{\left(r_+^2+a^2\right)^2\sin^2\theta}{\rho_+^2}\mathrm{d}\phi^2$$

$$\sqrt{g}=\left(r_+^2+a^2\right)\sin\theta$$

$$A=\iint\sqrt{g}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=2\pi\int_0^{\pi}\left(r_+^2+a^2\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta=4\pi\left(r_+^2+a^2\right)$$

熵

$$S=\frac{A}{4}=\pi\left(r_+^2+a^2\right)$$

角速度

$$\Omega=\lim_{r\to r_+}\left(-\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)=\frac{a}{r_+^2+a^2}$$

热力学基本关系

$$\mathrm{d}M=T\mathrm{d}S+\Omega\mathrm{d}J$$

$$T=\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_J,\quad \Omega=\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right)_S$$

Smarr 公式

$$M=2TS+2\Omega J,\quad M^2=\frac{S}{2\pi}+\frac{\pi J^2}{S}$$

热容

$$C_J=\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_J=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_J=\frac{2\pi\left(r_+^2-a^2\right)\left(r_+^2+a^2\right)^2}{3a^4+6r_+^2a^2-r_+^4}=C_J(M,J)$$

黑洞背景下自由光子的运动

史瓦西黑洞线元:

$$
\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\left(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)
$$

其中，

$$
f(r)=1-\frac{2M}{r}
$$

标记坐标：

$$
x^\mu\equiv(t,r,\theta,\phi)
$$

史瓦西黑洞视界：

$$
r_+=2M
$$

若光子的径向坐标 $r\leqslant r_+$，则认为光子被黑洞吸收。

度规：

$$
g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-f(r) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}
$$

此背景下自由光子的运动轨迹为一大圆，取大圆为赤道面，即：

$$
\theta=\frac{\pi}{2}
$$

此黑洞背景下自由光子拉格朗日量：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}&=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\\
&=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2\right]
\end{aligned}
$$

其中，$\dot{x}^\mu$ 是坐标对仿射联络参数求导。

相应广义动量：

$$
p_\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^\mu}=g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu
$$

分量：

$$
p_1=-f(r)\dot{t}
$$

$$
p_2=\frac{\dot{r}}{f(r)}
$$

$$
p_3=r^2\dot{\theta}=0
$$

$$
p_4=r^2\sin\theta\dot{\phi}=r^2\dot{\phi}
$$

注意到拉格朗日量中不显含 $x^1=t,x^4=\phi$，因此对应的广义动量是守恒量：

$$p_1 = -f(r)\dot{t} = -E \Longrightarrow \dot{t} = \frac{E}{f(r)}$$

$$p_4 = r^2\dot{\phi} = l \Longrightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{r^2}$$

其中，E 是光子的能量，l 是角动量。

且光子的拉格朗日量为零：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0, \quad -f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = 0 \Longrightarrow \dot{r} = \pm\sqrt{f(r)\left(\frac{E^2}{f(r)} - \frac{l^2}{r^2}\right)}$$

光子 4 速度为：

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)}$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{f(r)\left[\frac{E^2}{f(r)} - \frac{l^2}{r^2}\right]}$$

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = \frac{l^2}{r^2}$$

径向运动和有效势

径向运动方程：

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{l^2 f(r)}{r^2} = E^2 - \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2$$

引入有效势 V_{eff}：

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = E^2$$

$$V_{\text{eff}} \equiv \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$V_{\text{eff}}\Big|_{r=2M} = V_{\text{eff}}\Big|_{r\to+\infty} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0 \Longrightarrow r = 3M$$

$$(V_{\text{eff}})_{\max} = (V_{\text{eff}})\Big|_{r=3M} = \frac{l^2}{27M^2}$$

可以画出 V_{eff} 关系 r 的图像。

动能非负，因此允许光子运动区域满足：

$$E^2 \geqslant V_{\text{eff}}$$

当 $E=E_2=\frac{l}{3\sqrt{3}M},E^2=(V_{\mathrm{eff}})_{\max}$，此时光子能量恰等于有效势的最大值。若光子最初位于 $r=3M$，则光子径向速度 $\dot{r}=0$，即光子在半径 $r=3M$ 的圆上做圆周运动。考虑的是球对称黑洞，因此不同的光子可能在不同的大圆轨道上。所有这些轨道都在半径 $r=3M$ 的球上，这个球称为黑洞的**光球**。

例题

已知 Kehagias-Sfetsos 黑洞背景时空可以由以下线元表示：

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+\frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

$$f(r)=1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}\right)$$

其中，M 为黑洞质量，ω 为一参数。求下面的问题：

(1)

> 写出度规行列式；

度规：

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-f(r) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

度规行列式：

$$g=\det(g_{\mu\nu})=-r^4\sin^2\theta$$

(2)

> 黑洞事件视界的位置；

$$\frac{1}{g_{rr}}=f(r)=0$$

即：

$$1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}\right)=0$$

方程可化简为：

$$r^2-2Mr+\omega^2=0$$

解得：

$$r_{\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

事件视界半径为：

$$r_+=M+\sqrt{M^2-\omega^2}$$

(3)

> 无限红移面的位置；

无限红移面半径记为 r_s，其满足：

$$g_{tt}|_{r=r_s}=0$$

即：

$$-f(r_s)=0$$

解得：

$$r_{s\pm}=M\pm\sqrt{M^2-\omega^2}$$

(4)

> Hawking 温度；

$$r_+=M+\sqrt{M^2-\omega^2}$$

r_+ 满足：

$$1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r_+^2-\sqrt{r_+^4+8M\omega^2r_+}\right)=0$$

因此：

$$\sqrt{r_+^4+8M\omega^2r_+}=r_+^2+2\omega^2$$

上式可用于化简。

$$\begin{aligned}F_H=G_H&=\left.\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_+}\\&=\frac{r_+}{\omega^2}-\frac{r_+^3+2M\omega^2}{\omega^2\sqrt{r_+^4+8M\omega^2r_+}}\\&=\frac{r_+}{\omega^2}-\frac{r_+^3+2M\omega^2}{\omega^2\left(r_+^2+2\omega^2\right)}\\&=\frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-\frac{\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3+2M\omega^2}{\omega^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^2+2\omega^2\right]}\end{aligned}$$

Hawking 温度：

$$T=\frac{\sqrt{F_HG_H}}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot F_H=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2}-\frac{\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3+2M\omega^2}{\omega^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^2+2\omega^2\right]}\right]$$

(5)

> 光球的位置。

选取 $x^\mu=(t,r,\theta,\varphi)$

光子的拉格朗日量：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]$$

考虑光子在赤道面 $\theta=\pi/2$ 上运动，光子的拉格朗日量可简化为：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right]$$

光子的拉格朗日量中不显含广义坐标 t,φ，因此对应的广义动量是守恒量：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{t}}=-E,\ \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=l$$

即：

$$-f(r)\dot{t}=-E,\ \ r^2\dot{\varphi}=l$$

可以解得对应的广义速度：

$$\dot{t}=\frac{E}{f(r)},\ \ \dot{\varphi}=\frac{l}{r^2}$$

又光子的拉格朗日量为零，即：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2+\frac{1}{f(r)}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right]=0$$

将 $\dot{t}=\dfrac{E}{f(r)},\ \ \dot{\varphi}=\dfrac{l}{r^2}$ 代入上式可得：

$$\dot{r}=E^2-f(r)\frac{l^2}{r^2}$$

其中，$f(r)=1+\dfrac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}\right)$

或者可写为：

$$\dot{r}+f(r)\frac{l^2}{r^2}=E^2$$

定义有效势：

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}&\equiv f(r)\frac{l^2}{r^2}\\&=\frac{l^2}{r^2}\left[1+\frac{1}{2\omega^2}\left(r^2-\sqrt{r^4+8M\omega^2r}\right)\right]\\&=\frac{l^2}{r^2}+\frac{l^2}{2\omega^2}\left(1-\frac{\sqrt{r^4+8M\omega^2r}}{r^2}\right)\end{aligned}$$

$$\dot{r}^2+V_{\text{eff}}=E^2$$

由于 $\dot{r}^2\geqslant0$，因此光子只能在

$$E^2-V_{\text{eff}}\geqslant0$$

的区域运动。

$V_{\text{eff}}(r)$ 的极大值点记为 r_{ps}

当 $E^2=(V_{\text{eff}})_{\max}$ 且光子的初始位置就在 r_{ps} 且初速度非零时，有：

$$\dot{r}=0$$

此时光子的运动轨迹是稳定的圆。

即光球的半径就是 r_{ps}，其满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_{\text{ps}}}=0$$

解得光球半径：

$$r_{\text{ps}}=\frac{3M^2}{\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}}+\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}$$

3 李-杨定理

李-杨定理

Theorem 1

当 $y\in\mathbb{R}$ 时，$\displaystyle\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi$ 存在，且该极限是 y 的连续单调递增函数。

$$Q_N\equiv\int\limits_{\tau_1}\cdots\int\limits_{\tau_N}\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right)$$

Theorem 2

设有 zero-free region R（含有一段正实轴），则 $\displaystyle\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi,\frac{1}{V}\frac{\partial^k}{\partial\ln y^k}\ln\Xi$ 存在、解析，且 $\displaystyle\lim_{V\to+\infty}$ 与 $\dfrac{\partial}{\partial\ln y}$ 在 R 中可交换顺序。

Theorem 3

若格气模型中原子间相互作用满足：

$$u=\begin{cases}+\infty & ,\text{两个原子占据同一格点}\\ u\leqslant 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

则多项式 $\displaystyle\sum_n z^n p_n\equiv P$ 的所有零点均位于 z 复平面的单位圆上。

巨正则系综

热源与粒子源接触而达到平衡的状态，系统与热源可以交换能量，也可以交换粒子。因此，在系统的各个可能的微观状态中，粒子数和能量可能不同。

考虑很大的热源，因此交换能量和粒子不改变热源的温度 T 和化学势 μ.

巨正则分布就是具有确定的体积 V、温度 T 和化学势 μ 的系统的分布函数。

考虑系统的宏观热力学量，它们满足热力学方程：

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

系统具有粒子数 N，处在微观状态 s 的概率 $\rho_{N,s}$：

$$\rho_{N,s} = \frac{1}{\Xi}\mathrm{e}^{-\alpha N - \beta E_s}$$

巨配分函数 Ξ：

$$\boxed{\Xi = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s}\mathrm{e}^{-\alpha N - \beta E_s}}$$

巨配分函数经典表达式：

$$\boxed{\Xi = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha N}}{N!h^{rN}}\int \mathrm{e}^{-\beta E(q,p)}\mathrm{d}\Omega}$$

巨势 Ω：

$$\Omega \equiv U - TS - \mu N$$

$$\mathrm{d}\Omega = -S\mathrm{d}T - N\mathrm{d}\mu - p\mathrm{d}V$$

均相系的巨势：

$$\Omega = -pV$$

理想气体的巨势：

$$\Omega = -kT\ln\Xi$$

巨正则系综理论的热力学公式

平均粒子数 $\bar{N}$ 是粒子数 N 的统计平均值：

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s}N\rho_{N,s} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s}N\cdot\frac{1}{\Xi}\mathrm{e}^{-\alpha N - \beta E_s} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi
\end{aligned}$$

内能 U 是能量 E 的统计平均值：

$$
\begin{aligned}
U &= \bar{E} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s} E_s \rho_{N,s} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s} E_s \cdot \frac{1}{\Xi}\mathrm{e}^{-\alpha N-\beta E_s} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln \Xi
\end{aligned}
$$

广义力 Y 是 $\partial E/\partial y$ 的统计平均值:

$$
\begin{aligned}
Y &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s} \frac{\partial E_s}{\partial y}\rho_{N,s} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s} \frac{\partial E_s}{\partial y} \cdot \frac{1}{\Xi}\mathrm{e}^{-\alpha N-\beta E_s} \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\ln \Xi
\end{aligned}
$$

一个重要例子:

$$
p = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi
$$

$$
S = k\left(\ln \Xi - \alpha\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right)
$$

理想气体的巨势:

$$
\Omega = -kT\ln \Xi
$$

例题

1

在半经典近似下，一个热力学系统的巨配分函数可以写成:

$$
\Xi = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{y^N}{N!}Q_N
$$

其中，$y = \mathrm{e}^{\mu/kT}/\lambda^3$，$\mu$ 为化学势，k 为玻尔兹曼常数，热波长 $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}}\hbar$

$$
Q_N = \int\limits_V \cdots \int\limits_V \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_N \exp\left(-U/kT\right)
$$

U 为粒子间的相互作用势。

(a)

> 试从半经典近似出发，简要推导出上述 Ξ 的表达式。

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s}\exp\left(-\alpha N-\beta E_s\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\sum_{s}\exp\left(-\frac{E_s}{kT}\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\frac{1}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}}\int \mathrm{d}q_1\cdots \mathrm{d}q_{3N}\mathrm{d}p_1\cdots \mathrm{d}p_{3N}\exp\left[-\frac{1}{kT}\left(U+\sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m}\right)\right]\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\frac{1}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}}\int \mathrm{d}q_1\cdots \mathrm{d}q_{3N}\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)\int\exp\left(-\frac{p_1^2}{2mkT}\right)\mathrm{d}p_1\int\cdots\int\exp\left(-\frac{p_{3N}^2}{2mkT}\right)\mathrm{d}p_{3N}\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\frac{1}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\sqrt{2\pi mkT}\right)^{3N}\int\limits_V\cdots\int\limits_V \mathrm{d}\tau_1\cdots \mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\frac{1}{N!}\left(\frac{\sqrt{mkT}}{\hbar\sqrt{2\pi}}\right)^{3N}\int\limits_V\cdots\int\limits_V \mathrm{d}\tau_1\cdots \mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mu N}{kT}\right)\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3N}\int\limits_V\cdots\int\limits_V \mathrm{d}\tau_1\cdots \mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(\frac{\exp\left(\mu/kT\right)}{\lambda^3}\right)^{N}\int\limits_V\cdots\int\limits_V \mathrm{d}\tau_1\cdots \mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right)\\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{y^N}{N!}Q_N
\end{aligned}
$$

(b)

> 从基本的热力学关系出发，证明系统的压强和密度满足：
>
> $$\frac{p}{kT}=\frac{1}{V}\ln\Xi,\quad \rho=\frac{\partial}{\partial\ln y}\frac{1}{V}\ln\Xi$$

方法1

巨势 Ω：

$$\Omega\equiv U-TS-\mu N$$

$$\mathrm{d}\Omega=-S\mathrm{d}T-N\mathrm{d}\mu-p\mathrm{d}V$$

均相系的巨势：

$$\Omega=-pV$$

理想气体的巨势：

$$\Omega=-kT\ln\Xi$$

联立可得：

$$\frac{p}{kT}=\frac{1}{V}\ln\Xi$$

$$\mathrm{d}\Omega = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V - \mu\mathrm{d}N$$

$$\begin{aligned} N &= -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} \\ &= \left(\frac{\partial (pV)}{\partial \mu}\right)_{T,V} \\ &= V\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V} \end{aligned}$$

$$y = \mathrm{e}^{\mu/kT}/\lambda^3, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_T = \frac{1}{kT}y$$

密度:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{N}{V} \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V} \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{T,V} \\ &= \frac{1}{kT}y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{T,V} \\ &= y\left(\frac{\partial (p/kT)}{\partial y}\right)_{T,V} \\ &= y\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{V}\ln \Xi\right)_{T,V} \\ &= \frac{\partial}{\partial \ln y}\frac{1}{V}\ln \Xi \end{aligned}$$

方法2

当相互作用势 $U \to 0$，有:

$$\begin{aligned} Q_N &= \int \cdots \int_V \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_N \exp(-U/kT) \\ &= V^N \end{aligned}$$

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y^N}{N!} Q_N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y^N V^N}{N!} = \mathrm{e}^{yV}$$

由 $p = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi$ 可得:

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{kT} &= \frac{\partial}{\partial V}\ln\Xi \\
&= \frac{\partial}{\partial V}\ln\left(\mathrm{e}^{yV}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial V}(yV) \\
&= y \\
&= \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{yV}\right)}{V} \\
&= \frac{1}{V}\ln\Xi
\end{aligned}
$$

注意到 $y=\mathrm{e}^{\mu/kT}/\lambda^3=\mathrm{e}^{-\alpha}/\lambda^3$，于是:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{-\mathrm{e}^{-\alpha}}{\lambda^3}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\ln y}
\end{aligned}
$$

巨正则系综平均粒子数:

$$
\begin{aligned}
\bar{N} &= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi \\
&= \frac{\partial}{\partial\ln y}\ln\Xi
\end{aligned}
$$

巨正则系综密度:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{\bar{N}}{V} \\
&= \frac{\partial}{\partial\ln y}\frac{1}{V}\ln\Xi
\end{aligned}
$$

(c)

> 证明无相互作用时，系统满足理想气体状态方程:
>
> $$\frac{p}{kT}=\rho$$

无相互作用时 $U=0$，则:

$$
\begin{aligned}
Q_N &= \int\limits_V\cdots\int\limits_V \mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_N\exp\left(-U/kT\right) \\
&= V^N
\end{aligned}
$$

$$
\Xi=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{y^N}{N!}Q_N=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{y^N V^N}{N!}=\mathrm{e}^{yV}
$$

因此：

$$\begin{aligned}\frac{p}{kT}&=\frac{1}{V}\ln\Xi\\&=\frac{1}{V}(yV)\\&=y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{\partial}{\partial\ln y}\frac{1}{V}\ln\Xi\\&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\ln y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{V}\ln\Xi\\&=y\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{V}(yV)\\&=y\end{aligned}$$

对比可得：

$$\frac{p}{kT}=\rho$$

2

考虑一个系统，其巨配分函数满足：

$$\Xi(z)=\frac{(1+z)^V\left(1-z^V\right)}{1-z}$$

其中，体积 V 是正整数。

(a)

> 试对该巨配分函数的零点分布进行讨论，证明其零点均分布在单位圆上。

考虑 $(1+z)^V$，其根为 $z=-1$，是 V 重根，在单位圆上；

考虑 $\dfrac{1-z^V}{1-z}$，由于 $1-z^V$ 的零点为：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0\cdot2\pi/V}=1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}1\cdot2\pi/V},\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\cdot2\pi/V},\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}(V-1)\cdot2\pi/V}$$

共 V 个不同零点。

因此，$1-z^V$ 可拆分为：

$$1-z^V=-(z-1)\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/V}\right)\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/V}\right)\cdots\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(V-1)2\pi/V}\right)$$

因此：

$$\frac{1-z^V}{1-z}=\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/V}\right)\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/V}\right)\cdots\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(V-1)2\pi/V}\right)$$

综上，

$$
\begin{aligned}
\Xi(z) &= \frac{(1+z)^V\left(1-z^V\right)}{1-z} \\
&= -(1+z)^V\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/V}\right)\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/V}\right)\cdots\left(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(V-1)2\pi/V}\right)
\end{aligned}
$$

其零点为：

$$
-1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}1\cdot 2\pi/V}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\cdot 2\pi/V}, \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}(V-1)\cdot 2\pi/V}
$$

显然，这些零点都在单位圆上。

(b)

> 试确定其零点密度函数 $g(\theta)$，$Vg(\theta)\mathrm{d}\theta$ 等于落在区间 $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\mathrm{d}\theta)}\right)$ 内的根的数目。

由于根在单位圆上分立分布，因此 $g(\theta)$ 应为多个 δ 函数的叠加（重根只计算一次）

当 V 为奇数，有：

$$
g(\theta)=C_1\left[\delta(\theta-\pi)+\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)\right]
$$

其中，C_1 是归一化系数。

零点密度函数应满足：

$$
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} Vg(\theta)\mathrm{d}\theta = V
$$

即：

$$
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} V\cdot C_1\left[\delta(\theta-\pi)+\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)\right]\mathrm{d}\theta = V
$$

解得：

$$
C_1=\frac{1}{V}
$$

于是当 V 为奇数，零点密度函数为：

$$
g(\theta)=\frac{1}{V}\left[\delta(\theta-\pi)+\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)\right]
$$

当 V 为偶数，有：

$$
g(\theta)=C_2\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)
$$

其中，C_2 是归一化系数。

零点密度函数应满足：

$$
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} Vg(\theta)\mathrm{d}\theta = V-1
$$

即：

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} V\cdot C_2\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)\mathrm{d}\theta=V-1$$

解得：

$$C_2=\frac{1}{V}$$

综上，若 V 为奇数，则零点密度函数为：

$$g(\theta)=\frac{1}{V}\left[\delta(\theta-\pi)+\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)\right]$$

若 V 为偶数，则零点密度函数为：

$$g(\theta)=\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{V-1}\delta\left(\theta-2\pi j/V\right)$$

(c)

> 从该巨配分函数出发，计算在热力学极限 $V\to+\infty$ 下，p/kT 及 ρ 的表达式，并对其函数行为进行讨论。

$$\begin{aligned}\Xi(z)&=\frac{(1+z)^V\left(1-z^V\right)}{1-z}\\ \frac{1}{V}\ln\Xi&=\frac{1}{V}\left[V\ln(1+z)+\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)\right]\\ &=\ln(1+z)+\frac{1}{V}\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)\end{aligned}$$

当 $z<1$ 时，

$$\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)=0$$

因此：

$$\begin{aligned}\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi&=\lim_{V\to+\infty}\left[\ln(1+z)+\frac{1}{V}\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)\right]\\ &=\ln(1+z)\end{aligned}$$

当 $z>1$ 时，

$$\begin{aligned}\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)&=\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\left(\frac{z^V\left(z^{-V}-1\right)}{1-z}\right)\\ &=\lim_{V\to+\infty}\left[\ln z+\frac{1}{V}\ln\left(\frac{z^{-V}-1}{1-z}\right)\right]\\ &=\ln z\end{aligned}$$

因此：

$$
\begin{aligned}
\lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi &= \lim_{V\to+\infty}\left[\ln(1+z)+\frac{1}{V}\ln\left(\frac{1-z^V}{1-z}\right)\right] \\
&= \ln(1+z)+\ln z
\end{aligned}
$$

于是，热力学极限下：

$$
\left.\frac{p}{kT}\right|_{V\to+\infty} = \lim_{V\to+\infty}\frac{1}{V}\ln\Xi = \begin{cases}\ln(1+z) & ,z<1 \\ \ln(1+z)+\ln z & ,z>1\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\rho\right|_{V\to+\infty} &= \lim_{V\to+\infty}\frac{\partial}{\partial\ln z}\frac{p}{kT} \\
&= \begin{cases}\dfrac{z}{1+z} & ,z<1 \\ \dfrac{z}{1+z}+1 & ,z>1\end{cases}
\end{aligned}
$$

热力学极限下，p/kT 关于 z 连续单调递增，但在 $z=1$ 不可导。

热力学极限下，ρ 关于 z 在 $z=1$ 处不连续，在 $z\in(0,1)$, $z\in(1,+\infty)$ 区域分别单调递增，$\lim\limits_{z\to+\infty}\rho=2$

(d)

> 画出 $p\sim v$ 的示意图，其中比体积 $v=1/\rho$，确定相变点的位置。

热力学极限下，

$$
\frac{p}{kT} = \begin{cases}\ln(1+z) & ,z<1 \\ \ln(1+z)+\ln z & ,z>1\end{cases}
$$

$$
v=\frac{1}{\rho}=\begin{cases}\dfrac{1+z}{z} & ,z<1 \\ \dfrac{1+z}{2z+1} & ,z>1\end{cases}
$$

$$
\left.\frac{p}{kT}\right|_{z\to0}=0,\quad v|_{z\to0}=\infty
$$

$$
z\in(0,1)\,,\text{当}v\uparrow\text{时},\frac{p}{kT}\uparrow,v\downarrow,
$$

$$
z=1,\frac{p}{kT}\text{连续},\left.\frac{p}{kT}\right|_{z=1}=\ln2;v\text{不连续},\lim_{z\to1^-}v=2,\quad\lim_{z\to1^+}v=\frac{2}{3}
$$

$$
z\in(1,+\infty)\,,\text{当}v\uparrow\text{时},\frac{p}{kT}\uparrow,v\downarrow
$$

通过以上分析，可画出 $p/kT\sim v$ 示意图。

在图中 $v\in(2/3,2)$, $p/kT=\ln2$ 区域出现相变。

3

假设一个热力学系统配分函数的零点分布在单位圆上，形如 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta_2},\cdots$. 其中 $\theta_{j\pm}$ 满足：

$$
\cos\theta_{j\pm}=-x^2+\left(1-x^2\right)\cos\alpha_j
$$

其中 $\alpha_j=(2j-1)\,\pi/N,j=1,2,\cdots,[(N+1)/2]$，常数 $x\in(0,1)$

$$\theta_{j+} = -\theta_{j-}, \quad \theta_{j\pm} \in (-\pi, \pi)$$

(a)

> 试对该零点分布进行描述。

由于 $\cos\alpha_j \in [-1,1]$，因此 $\cos\theta_{j\pm} \in \left[-1, 1-2x^2\right]$，设临界角 $\theta_c \in [0,\pi]$ 满足：

$$\cos\theta_c = 1 - 2x^2$$

则零点 $\theta_{j\pm}$ 只能分布在单位圆 $[\theta_c, 2\pi - \theta_c]$ 的范围内。

(b)

> 在 $N \to \infty$ 时，零点能否落在正实轴上？是否有相变发生？

由于零点 $\theta_{j\pm}$ 只能分布在单位圆 $[\theta_c, 2\pi - \theta_c]$ 的范围内，而当 $x \in (0,1)$：

$$\cos\theta_c = 1 - 2x^2 \in (-1, 1)$$

因此：

$$\theta_c \in (0, 2\pi)$$

所以 $\forall j, \theta_{j\pm} \neq 0$，所以在 $N \to \infty$ 时零点不能落在正实轴上，也就没有相变发生。

(c)

> 证明零点密度函数 $g(\theta)$ 满足：
>
> $$g(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - x^2}} & ,\cos\theta < 1 - 2x^2 \\ 0 & ,\cos\theta > 1 - 2x^2 \end{cases}$$

$\cos\theta > 1 - 2x^2$ 范围

由 (b) 可知，零点 $\theta_{j\pm}$ 只能分布在单位圆 $[\theta_c, 2\pi - \theta_c]$ 的范围内，而

$$\cos\theta_c = 1 - 2x^2$$

因此，当 $\cos\theta > 1 - 2x^2$ 时没有零点分布，即：

$$g(\theta) = 0, \quad \cos\theta > 1 - 2x^2$$

$\cos\theta < 1 - 2x^2$ 范围

令：

$$\cos\theta = -x^2 + \left(1 - x^2\right)\cos\alpha, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad \theta \in (-\pi, \pi)$$

其中，α, θ 是连续变量。

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + \cos\theta}{1 - x^2}\right)^2}$$

由于：

$$\alpha_j = (2j-1)\pi/N, \quad j = 1, 2, \cdots, [(N+1)/2]$$

因此在 $\alpha \in (0,\pi)$ 的区域内，$[(N+1)/2]$ 个 $\{\alpha_j\}$ 均匀分布。

平均每 $2\pi/N$ 角度内就有一个 α_j，因此在 $\alpha \sim \alpha + \mathrm{d}\alpha$ 的范围内 α_j 的个数为:

$$\mathrm{d}\alpha/\left(2\pi/N\right) = \frac{N\mathrm{d}\alpha}{2\pi}$$

对 $\cos\theta = -x^2 + \left(1-x^2\right)\cos\alpha$ 两边微分，得:

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta = \left(1-x^2\right)\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

于是:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\sin\theta}{(1-x^2)\sin\alpha} \\
&= \frac{\sin\theta}{(1-x^2)\sqrt{1-\left(\frac{x^2+\cos\theta}{1-x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(1-x^2)^2-(x^2+\cos\theta)^2}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{-2x^2\left(1+\cos\theta\right)+\left(1-\cos\theta\right)\left(1+\cos\theta\right)}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{-2x^2+1-\cos\theta}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\sqrt{-2x^2+2\sin^2\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}-x^2}}
\end{aligned}$$

由于:

$$\cos\theta_{j\pm} = -x^2 + \left(1-x^2\right)\cos\alpha_j$$

因此一个 α_j 对应两个 $\theta_{j\pm}$ ，共有 $2\cdot[(N+1)/2]$ 个 $\theta_{j\pm}$

设 α,θ 满足 $\cos\theta = -x^2 + \left(1-x^2\right)\cos\alpha$，设 α 有小增量 $\mathrm{d}\alpha$，对应 θ 有小增量 $\mathrm{d}\theta$，$\alpha \sim \alpha+\mathrm{d}\alpha$ 区域对应 $\theta \sim \theta+\mathrm{d}\theta$ 区域和 $-\theta-\mathrm{d}\theta \sim -\theta$ 区域，此时 $\theta \sim \theta+\mathrm{d}\theta$ 内的 $\theta_{j\pm}$ 数量等于 $\alpha+\mathrm{d}\alpha$ 区域内 α_j 的数量，即:

$$\frac{N\mathrm{d}\alpha}{2\pi} = 2\cdot[(N+1)/2]g(\theta)\mathrm{d}\theta$$

考虑到 N 很大，$N/2 \approx [(N+1)/2]$，于是:

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\theta/2\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}-x^2}}
\end{aligned}$$

综上，零点密度函数 $g(\theta)$ 满足:

$$g(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}-x^2}} & ,\cos\theta<1-2x^2\\ 0 & ,\cos\theta>1-2x^2\end{cases}$$

4 非线性动力学简介

相轨迹行为

小角度线性单摆

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\gamma^2\theta=0$$

$$\theta=A\cos\gamma t,\quad \omega=\dot{\theta}=A\sin\gamma t$$

或取 $\gamma=1$

单摆一般运动

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

无量纲化：

$$\ddot{\theta}+\sin\theta=0$$

$\omega\equiv\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

相空间 θ,ω 轨道微分方程：

$$\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}+\sin\theta=0$$

积分：

$$\frac{1}{2}\omega^2+1-\cos\theta=E$$

定义：

$$k\equiv\sqrt{E/2}$$

$$\frac{1}{2}\omega^2+1-\cos\theta=2k^2$$

阻尼单摆：

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

阻尼和驱动：

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\omega^2\theta=f\cos(\Omega t)$$

奇点类型与稳定性

一般力学系统运动方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y)\\ \dot{y}=Q(x,y)\end{cases}$$

x 广义坐标，y 广义动量。

若 P,Q 不含时间 t，则系统称为**自治系统**。

相轨迹微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

右边可看作相平面上的一个方向场。

当 $P(x,y)=Q(x,y)=0$，切线斜率具有不定值，此时相点 (x,y) 称为奇点。

系统奇点处 $\dot{x}=\dot{y}=0$，广义速度和广义加速度均为零，相点是一个力学平衡点，对应力学系统的一种平衡态。

除平衡点外的任意相点，相轨迹切线斜率确定。除奇点外，自治系统不存在两条相轨线相交形成的相点。

奇点类型

设 (x_0,y_0) 奇点，在奇点邻域中展开 $P(x,y),Q(x,y)$：

$$P(x,y)=P(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_*(x-x_0)+\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_*(y-y_0)$$

$$Q(x,y)=Q(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_*(x-x_0)+\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_*(y-y_0)$$

$$\delta_x\equiv x-x_0,\quad \delta_y\equiv y-y_0$$

奇点处 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$，代入系统的运动方程，得：

$$\dot{\delta}_x=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_*\delta_x+\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_*\delta_y$$

$$\dot{\delta}_y=\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_*\delta_x+\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_*\delta_y$$

定义雅可比矩阵：

$$\mathcal{J}\equiv\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

其中，

$$a_{11}\equiv\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_*,\quad a_{12}\equiv\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_*,\quad a_{21}\equiv\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_*,\quad a_{22}\equiv\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_*$$

则有：

$$\begin{bmatrix}\dot{\delta}_x\\\dot{\delta}_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x\\\delta_y\end{bmatrix}$$

上面方程组对 δ_x,δ_y 是线性得，可设形式解：

$$\delta_x=c_1\mathrm{e}^{\lambda t},\quad \delta_y=c_2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

方程化为：

$$\lambda\begin{bmatrix}\delta_x\\\delta_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_x\\\delta_y\end{bmatrix}$$

这是一个特征方程，待定系数存在非平庸解的条件：

$$|\mathcal{J}-\lambda I|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

即：

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\,\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$$

雅可比矩阵的迹：

$$p\equiv\mathrm{Tr}\,(\mathcal{J})=a_{11}+a_{22}=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_*+\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_*$$

雅可比矩阵行列式：

$$q\equiv\det\,(\mathcal{J})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_*\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_*-\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_*\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_*$$

特征方程可写为：

$$\lambda^2-p\lambda+q=0$$

可解出：

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)$$

通解为：

$$\begin{cases}\delta_x=d_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+d_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\\delta_y=d_3\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+d_4\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{cases}$$

其中，d_1,d_2,d_3,d_4 为常数，由初始条件确定。

雅可比矩阵元不同，方程的解也有不同的性质，奇点附近力学系统有不同的行为。

考虑方程

$$\lambda^2-p\lambda+q=0,\quad \lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)$$

$$\begin{cases}\delta_x=d_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+d_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\\delta_y=d_3\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+d_4\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{cases}$$

可根据根的分布对奇点进行分类。

结点（不稳定结点、稳定结点）

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$\begin{cases} \delta_x = d_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \delta_y = d_3 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_4 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$q > 0, \Delta = p^2 - 4q > 0$，方程有两个不相等实根 λ_1, λ_2。这种情况下的奇点称为**结点**。

当 $p > 0$，两根都正，扰动随时间以指数形式无限增长，解将远离奇点（平衡点），**不稳定结点**；

当 $p < 0$，两根都负，扰动随时间以指数形式趋于零，平衡点是稳定的，**稳定结点**。

鞍点

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$\begin{cases} \delta_x = d_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \delta_y = d_3 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_4 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$\Delta = p^2 - 4q > 0, q < 0$，方程有两异号实根。解有两个分支，负实根相应的解趋向平衡点，正实根相应的解远离平衡点，此时的奇点称为**鞍点**。

焦点（不稳定焦点、稳定焦点）

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$\begin{cases} \delta_x = d_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \delta_y = d_3 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_4 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$p \neq 0, \Delta = p^2 - 4q < 0$，此时方程的两根有非零实部，$\lambda_1, \lambda_2$ 互为共轭复根，解为振荡形式，可取为 $\mathrm{e}^{\alpha} \cos \beta t, \alpha \equiv \Re\{\lambda\}, \beta \equiv \Im\{\lambda\}$；

当 $p > 0$，α 为正，振幅不断增大，称为**不稳定焦点**。

当 $p < 0$，α 为负，振幅不断减小，称为**稳定焦点**。

中心点

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

$$\begin{cases} \delta_x = d_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \delta_y = d_3 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + d_4 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$p = 0, q > 0$，方程的根纯虚数，解具有周期振荡形式 $\cos \beta t$；相平面上的轨迹是一些围绕平衡点的闭合曲线，此时奇点称为**中心点**。

由于中心点附近的曲线只围绕中心而不渐进趋于中心，故称**中心点是临界稳定的**。

单摆相图

单摆哈密顿量：

$$
H=\frac{J^2}{2ml^2}-mgl\cos\theta
$$

平衡点:

$$
\left.\frac{\partial H}{\partial J}\right|_{J_*}=\frac{J_*}{ml^2}=0\Longrightarrow J_*=0
$$

$$
\left.\frac{\partial H}{\partial \theta}\right|_{\theta_*}=mgl\sin\theta_*=0\Longrightarrow \theta_*=k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots
$$

$$
\theta_*=k\pi,\quad J_*=0
$$

运动方程:

$$
\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial J}=P(\theta,J)
$$

$$
\dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=Q(\theta,J)
$$

于是:

$$
P\left(\theta,J\right)=\frac{\partial H}{\partial \theta}=\frac{J}{ml^2},\quad Q\left(\theta,J\right)=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=-mgl\sin\theta
$$

雅可比矩阵元:

$$
a_{11}=\left.\frac{\partial P}{\partial \theta}\right|_*=0
$$

$$
a_{12}=\left.\frac{\partial P}{\partial J}\right|_*=\frac{1}{ml^2}
$$

$$
a_{21}=\left.\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right|_*=-mgl\cos\theta_*
$$

$$
a_{22}=\left.\frac{\partial Q}{\partial J}\right|_*=0
$$

雅可比矩阵:

$$
\mathcal{J}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{ml^2}\\ -mgl\cos\theta_* & 0\end{bmatrix}
$$

$$
p=a_{11}+a_{22}=0
$$

$$
q=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\frac{g\cos\theta_*}{l}
$$

$$
\Delta=p^2-4q=-\frac{4g\cos\theta_*}{l}
$$

在平衡点 $(\theta,J)=(2k\pi,0)$ 处，有:

$$
p=0,\quad q=\frac{g}{l},\quad \Delta=-\frac{4g}{l}<0
$$

相应的本征值为纯虚数，平衡点是中心点。

在平衡点 $(\theta,J)=((2k+1)\pi,0)$ 处，有:

$$p=0, \quad q=-\frac{g}{l}, \quad \Delta=\frac{4g}{l}>0$$

相应本征值为一正一负的实数，平衡点是鞍点。

动力学系统常见分岔类型

鞍结点分岔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a-x^2$$

当 $a>0$ 时，求平衡点:

$$\dot{x}=0 \Longrightarrow x_{+}^{*}=+\sqrt{a}, \quad x_{-}^{*}=-\sqrt{a}, \quad a>0$$

以 a 为横坐标，x^* 为纵坐标绘图。

当 $x>\sqrt{a}, \dot{x}<0$；当 $x\in[-\sqrt{a}, \sqrt{a}], \dot{x}>0$；当 $x<-\sqrt{a}, \dot{x}>0$.

设:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x)$$

则:

$$U(x)=-ax+\frac{1}{3}x^3$$

以 x 为横坐标，$U(x)$ 为纵坐标绘图，则 $U(x)$ 的极小值点对应稳定平衡点，$U(x)$ 的极大值点对应不稳定平衡点。

随着控制参量 a 的变化，平衡点稳定性质发生变化。

跨临界分岔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-x^2$$

$$x_0^*=0, \quad x_a^*=a, \quad \forall a$$

$$U(x)=-\frac{a}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

分岔就是系统参数变化引起了相空间拓扑结构的变化，此时参数点就叫做**分岔点**。

叉式分岔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-x^3$$

$$x_0^*=0, \quad x_{+}^{*}=+\sqrt{a}, \quad x_{-}^{*}=-\sqrt{a}$$

$$U(x)=-\frac{a}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$$

霍普夫分岔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu x-y-x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu y + x - y\left(x^2 + y^2\right)$$

采用极坐标，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \rho\left(\mu - \rho^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 1$$

极坐标下的解：

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{(1 + C\mathrm{e}^{-2\mu t})}}, \quad \mu \neq 0$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{(2t + C)}}, \quad \mu = 0$$

$$\phi = t - t_0$$

吸引子及其类别

保守系统：机械能守恒

耗散系统：受推力、摩擦力等耗散力

一维保守系统：

$$\ddot{x} = F(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\dot{y} = F(x) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

系统哈密顿量：

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$$

把 $\dot{x}, \dot{y}$ 看作相平面 (x, y) 上相速度 $\vec{v}$ 的两个分量，则相速度的散度：

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0$$

上式说明，保守系统中相空间的体积是守恒的（刘维尔定理）。

连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho\right) + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

刘维尔定理：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0$$

耗散力，如阻尼单摆：

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+x=0$$

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-\alpha y-x\end{cases}$$

相速度散度：

$$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}=-\alpha<0$$

表明相空间体积将随时间不断收缩，最后趋于零。

对于耗散系统，相空间体积不断收缩。从不同的初始条件出发，最终会趋于同一个结果或少数几个不同的结果。耗散系统相空间中这样的极限集合称为**吸引子**。（保守系统中不存在吸引子）

常见吸引子类型

极限环

力学系统做周期运动时，其相应的相轨道是封闭的。相平面上的孤立封闭轨道称为**极限环**。孤立指在封闭相轨迹附近无其他的封闭相轨道。

Balthasar van der Pol 振子：

$$\ddot{x}=-\alpha\left(x^2-1\right)\dot{x}-\omega^2x,\quad \alpha>0$$

$|x|<1,-\alpha\left(x^2-1\right)>0$，阻尼力与速度同向，负阻尼，对系统供能，振幅逐渐增大，最终将大于 $1.$

$|x|>1,-\alpha\left(x^2-1\right)<0$，阻尼力与速度反向，正阻尼，消耗能量，振幅逐渐减小，振幅只能等于 $1.$

- 稳定极限环：从包含极限环 L 的环形域（L 的内侧和外侧）出发的任何相轨线在 $t\to\infty$ 时都渐进地趋于该极限环，则称极限环 L 是稳定极限环。
- 不稳定极限环
- 半稳定极限环

极限环的特点：

- 非线性系统周期振荡独有的特征。
- 极限环在相空间中是孤立的。
- 由系统的固有性质（运动方程和参数）决定，与初始状态无关。
- 包围不稳定奇点的极限环一定是稳定的，而包围稳定奇点的极限环一定是不稳定的。
- 极限环只能包围结点和焦点，不能包围鞍点。

吸引子可分为两大类：**平庸吸引子**和**奇怪吸引子**。**平庸吸引子**可分为**定常吸引子**（如稳定结点与稳定焦点）、**周期吸引子**（如极限环）和**准周期吸引子**（不变环面）。

平庸吸引子：定常吸引子（如稳定结点与稳点焦点）、周期吸引子（如极限环）和准周期吸引子（不变环面）

奇怪吸引子：奇怪吸引子上的运动对初始条件非常敏感。吸引子结构随参数变化可能发生突变。奇怪吸引子具有无穷嵌套的自相似结构。作为相空间的子集，奇怪吸引子一般具有非整数的维数。

混沌

确定性的非线性动态系统中出现的貌似随机的、不能预测的运动，对初始条件极其敏感。

Lorenz 系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sigma\left(y-x\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\rho x-y-xz$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-\beta z$$

Henon-Heiles 问题

$$V(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+x^2y-\frac{1}{3}y^3$$

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{3}r^3\sin 3\theta$$

机械能守恒：

$$H=\frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}y^3=E$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=-x(1+2y)$$

$$\dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=y(y-1)-x^2$$

考虑 $(\dot{y},y)$ 上的庞加莱截面，令 $x=0$

$$E=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3$$

$$\dot{x}=\sqrt{2E-\dot{y}^2-y^2+\frac{2}{3}y^3}$$

Logistic equation

$$\dot{x}=\alpha x-\beta x^2$$

$$x=\frac{\alpha}{\beta+c\mathrm{e}^{-\alpha t}}$$

$$x_{n+1}=rx_n\left(1-x_n\right)$$

混沌的演化

$$y=1-\mu x^2$$

$$y=x_{n+1},\quad x=x_n$$

得到迭代方程：

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2, \quad \mu \in [0, 2], \quad x_n \in [-1, 1]$$

倍周期分岔序列：

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to \cdots \to 2^n \to \cdots \to \infty$$

当 $n \to \infty$，解的数目 $\to \infty$，意味着系统已经进入混沌状态。

将混沌开始时对应的 μ 记为 μ_∞，

$$\mu_\infty = 1.401155\cdots$$

混沌区的结构

窗口：在混沌取中重复出现的周期性运动。窗口中包含着与整体完全相似的结构。

任何局部的小区域都包含整体的信息，具有与整体完全相似的规律。

在混沌内部包含的这种在不同尺度上的相似结构称为**自相似性**。

普适性

若将第 n 倍周期分岔（或混沌带合并）时对应的参数 μ 记为 μ_n，则相邻两次分岔（或合并）的间隔之比趋于同一个常数：

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.6692\cdots$$

δ 称为费根鲍姆常数。

对所有同一类的变换，δ 值都相同。

普适常数

在倍周期分岔序列图中，同次周期分岔中上下的各对周期点之间的距离之比，以及相邻两次周期分岔中的各对周期点之间的距离之比趋于另一个常数：

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 2.5029\cdots$$

Mandelbrot 集

取 $z_0 = 0$，

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

使得上面方程在复平面上经过无穷次迭代后不会逃逸到无穷远处的所有 c 的取值的集合构成 Mandelbrot 集。

Julia set

取 $c = \text{const}$，

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

使得上面方程在复平面上经过无穷次迭代后不会逃逸到无穷远处的所有 z_0 的取值的集合构成 Julia 集。