> 本文档的 .md 源文件请见：

> https://github.com/BeiHai0/Surviving-LZU-Physics/tree/master/小班讲义/光学基础1小班讲义

第0章 随便唠唠

找电子书

zlib

https://zh.zlibrary-global.se/

> 很遗憾，上面的网站被 FBI 干掉了。下面的网站目前还能用：

https://zh.1lib.sk/?ref=www.tboxn.com

小心盗版网站！凡要你先交钱后下载的都是盗版网站！

libgen

https://libgen.is/

annas

https://annas-archive.org/

算计物理群文件

电子笔记

markdown 记笔记

软件（vscode）

> 不同软件的 markdown 标准可能不同。如果你想接着我的 md 文件继续写，还是用 vscode 吧！

https://code.visualstudio.com/

markdown 基本语法

https://markdown.com.cn/

https://www.markdownguide.org/basic-syntax/

数学公式

https://www.cmor-faculty.rice.edu/~heinken/latex/symbols.pdf

https://katex.org/docs/supported

vscode 效率工具——snippets

https://www.freecodecamp.org/news/definitive-guide-to-snippets-visual-studio-code/

欢迎关注 my github：

https://github.com/BeiHai0/Surviving-LZU-Physics

README.md 里有自己配置的 snippets 供参考

github——用于备份

https://github.com/

廖雪峰老师的 git 教程：

https://www.liaoxuefeng.com/wiki/896043488029600

问问题

知乎

Stack Exchange

https://stackexchange.com/

英语要好

google

维基百科

小时百科也还行

AI

ChatGPT

Gemini

文心一言之类的

第1章 几何光学

惠更斯原理

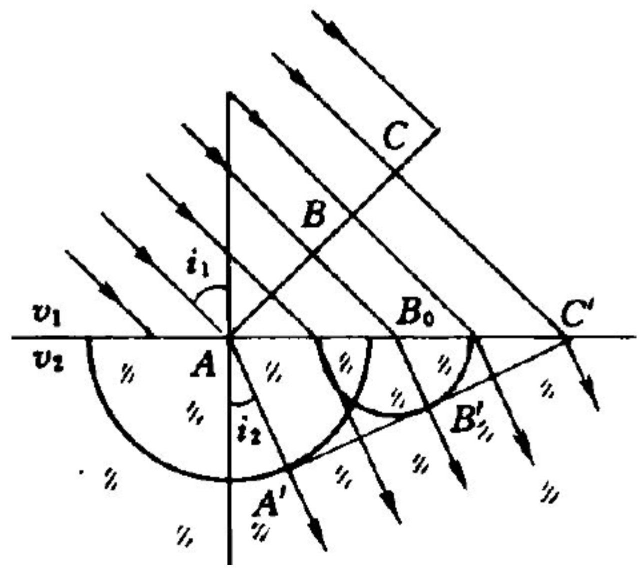
惠更斯原理

光扰动同时到达的空间曲面被称为波面或波前，波前上的每一点可以被看作一个新的扰动中心，称其为子波源或次波源，次波源向四周激发次波；**下一时刻的波前**应当是这些大量次波面的公共切面，也称其为包络面；次波中心与其次波面上的那个切点的连线方向，给出了**该处光传播方向**，亦即光射线方向。

惠更斯原理导出折射定律

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

其中，i_1 与 v_1 对应，i_2 与 v_2 对应



折射率

折射率的定义

介质的折射率，记为 n，定义为真空中的光速与光在介质中的传播速度之比，即：

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

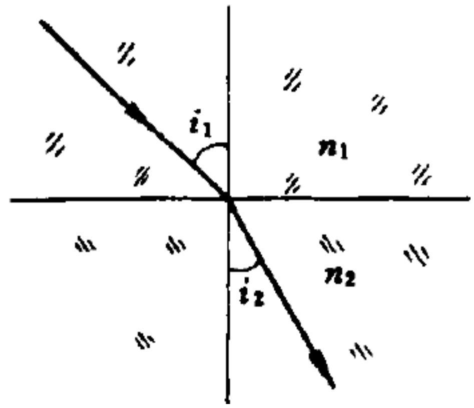
其中，v 是光在介质中的传播速度

显然，真空的折射率为 1；非真空介质的折射率 $n > 1$

折射率表述的折射定律

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

其中，n_1 与 i_1 对应，n_2 与 i_2 对应



色散

色散的定义

一种介质对不同波长的光具有不同的折射率，这被称作色散

介质中的波长

对于波，其波速 v 时间频率 f 和波长 λ 有如下关系：

$$v = f\lambda$$

在真空中：

$$c = f_0\lambda_0$$

其中，c 是真空中的光速，f_0 是真空中的光频，λ_0 是真空中的光波长

在介质中：

$$v = f\lambda$$

其中，v 是介质中的光速，f 是介质中的光频，λ 是介质中的光波长

两式相除，结合折射率的定义 $n \equiv \frac{c}{v}$ 可得：

$$n = \frac{f_0}{f} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

特别地，在**线性介质的光场中**，光扰动的**时间频率仅由光源决定**，**与介质无关**，于是 $f_0 = f$，这时得到：

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

而之前提到，所有非真空介质的折射率 $n > 1$，则上式说明**在介质中光波长变短了**（相较于真空中的光波长）。

光程

光程的定义

光程定义为**光线路径的几何长度与所经过的介质折射率的乘积**

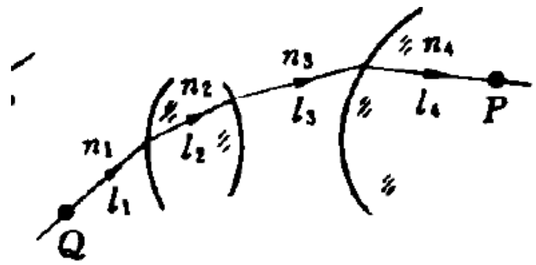
设光沿路径 l 从空间中的 P 点传播到 Q 点，光程，记为 $L_l(PQ)$，定义为：

$$L_l(PQ) \equiv \int_{\substack{P \\ (l)}}^{Q} n(\vec{r})|\mathrm{d}\vec{r}|$$

光程的离散化表达式：

$$L_l(PQ) \equiv \sum_i n_i l_i$$

其中，n_i 是第 i 小段的折射率，l_i 是第 i 小段的长度



(b)

光程与相位差

> 注意，这里定点振动的相位按照 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 的方式线性增加

设光沿路径 l 从空间中的 P 点传播到 Q 点。考虑路径 l 上的一点 $\vec{r}$，设 t 时刻 $\vec{r}$ 处的波动在 $\mathrm{d}t$ 时间后传播到路径上的 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 处。在无穷小传播过程中，光可看作沿直线传播，且这段线元内的介质的折射率是均匀的，即：

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\vec{r}| &= v(\vec{r})\mathrm{d}t \\ &= \frac{c}{n(\vec{r})}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{0}$$

其中，$n(\vec{r})$ 是 $\vec{r}$ 处介质的折射率。（注意，这里 $\mathrm{d}\vec{r}$ 一定是与 $\mathrm{d}t$ 有关的，从表述可以看出，是 $\mathrm{d}t$ 决定了 $\mathrm{d}\vec{r}$ ）

t 时刻 $\vec{r}$ 处扰动的相位记为 $\varphi(\vec{r},t)$；类似地，$t+\mathrm{d}t$ 时刻 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 处扰动的相位记为 $\varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r},t+\mathrm{d}t)$

光的传播可以看作定点振动的传播，自然而然地，光的传播必定意味着相位信息的传播。**由于 t 时刻 $\vec{r}$ 处的振动在 $\mathrm{d}t$ 时间后传播到路径上的 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 处，于是 t 时刻 $\vec{r}$ 处的相位信息在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻传播到了 $\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}$ 处**，于是有：

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r},t+\mathrm{d}t) \tag{1}$$

在 $t \sim t+\mathrm{d}t$ 时间内，$\vec{r}$ 处的相位从 $\varphi(\vec{r},t)$ 线性地增加到 $\varphi(\vec{r},t)+\omega\mathrm{d}t$，即：

$$\varphi(\vec{r},t+\mathrm{d}t) = \varphi(\vec{r},t)+\omega\mathrm{d}t \tag{2}$$

联立 $(1)(2)$，消去 $\varphi(\vec{r},t)$ 得：

$$\varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r},t+\mathrm{d}t) - \varphi(\vec{r},t+\mathrm{d}t) = -\omega\mathrm{d}t$$

再用前面推导得到的式子消去 $\mathrm{d}t$ 得：

$$\varphi(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r},t+\mathrm{d}t) - \varphi(\vec{r},t+\mathrm{d}t) = -\omega\frac{n(\vec{r})}{c}|\mathrm{d}\vec{r}|$$

在同一时刻 $t+\mathrm{d}t$，对 $\vec{r}$ 从 P 到 Q 沿路径 l 积分得：

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}_Q,t+\mathrm{d}t) - \varphi(\vec{r}_P,t+\mathrm{d}t) &= \int_{\substack{P\\(l)}}^{Q} -\omega\frac{n(\vec{r})}{c}|\mathrm{d}\vec{r}| \\ &= \int_{\substack{P\\(l)}}^{Q} -\frac{2\pi}{T}\frac{n(\vec{r})}{c}|\mathrm{d}\vec{r}| \\ &= \int_{\substack{P\\(l)}}^{Q} -\frac{2\pi}{T_0}\frac{n(\vec{r})}{c}|\mathrm{d}\vec{r}| \\ &= -\frac{2\pi}{T_0 c}\int_{\substack{P\\(l)}}^{Q} n(\vec{r})|\mathrm{d}\vec{r}| \\ &\equiv -\frac{2\pi}{\lambda_0}L_l(PQ) \end{aligned}$$

可以看到，同一时刻 P,Q 两点间的相位差与时间无关，所有上式可以简写为：

$$\varphi(\vec{r}_Q,t) - \varphi(\vec{r}_P,t) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}L_l(PQ)$$

这就是说，同一时刻空间中同一光线上两点 P,Q 处光振动的相位差由光从 P 出发沿光线 l 到 Q 的光程差决定

光程与时差

设某一振动在 t_P 时刻传播到 P 点，在 t_Q 时刻传播到 Q 点，则：

$$
\begin{aligned}
t_Q - t_P &= \sum_i \frac{l_i}{v_i} \\
&= \sum_i n_i l_i / c \\
&= \frac{1}{c} \sum_i n_i l_i \\
&= \frac{L_l(PQ)}{c}
\end{aligned}
$$

反射光束、折射光束的等光程性

反射定律、折射定律给出的反射光束或折射光束的方向，与等光程性的要求一致。人们可以从等光程要求出发，导出反射定律和折射定律。

费马原理

费马原理的表述

光线/沿/光程为平稳值的路径/传播

光程为平稳值有四种情况：极小值、极大值和常数

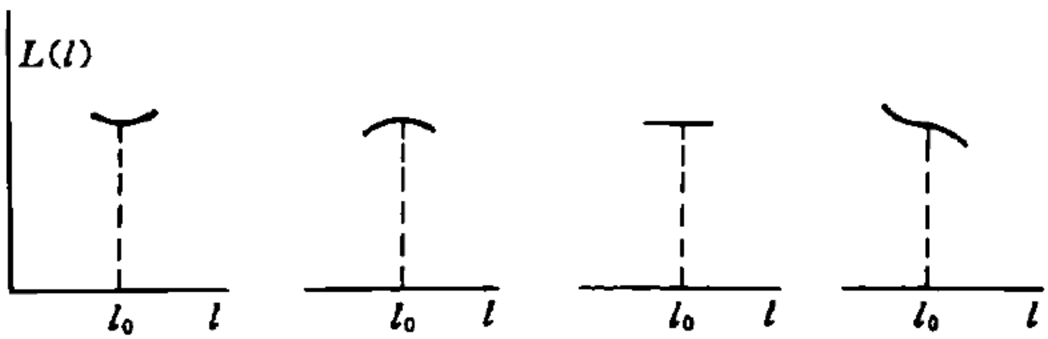


图 1.14　光程为平稳值的典型情形

在 P, Q 确定的情况下，光程 L 仅由路径 l 这一**函数**决定。 光程 L 是泛函，而**泛函为平稳值要求其变分为**零，于是根据费马原理，光线的真实传播路径应该满足：

$$\delta L[l] = 0$$

其中，δ 是变分算符

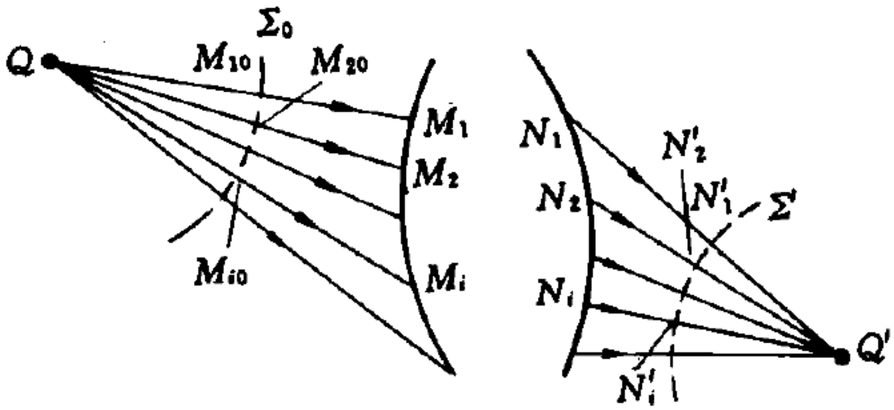
费马原理与成像

物像等光程性

由物点 P 发出一列球面波（或称之为同心光束），经系统变换为另一列球面波或另一个同心光束，则出射同心光束的中心称为**像点**。

成像过程是一个对同心光束实现共轭变换的过程。

从费马原理出发可以推得：从物点到像点的各光线的光程是彼此相等的。

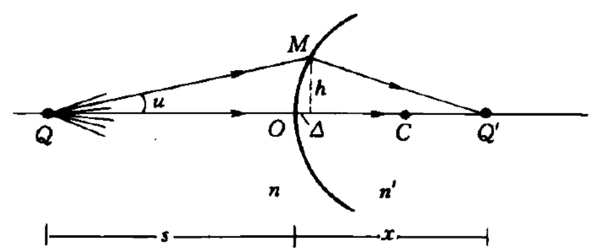


球面折射傍轴成像公式

$$L(QOQ') = ns + n'x$$

> $h^2 \approx 2r\Delta$ 是这么来的：
>
> 考虑三角形 由 $h, r-\Delta, r$ 构成的直角三角形，勾股定理给出：
>
> $$h^2 + (r-\Delta)^2 = r^2 \Longrightarrow h^2 - 2r\Delta + \Delta^2 = 0$$
>
> Δ 是小量，Δ^2 是二阶小量，约去二阶小量得：
>
> $$h^2 \approx 2r\Delta$$

$$\begin{aligned}
L(QMQ') &= n\sqrt{(s+\mathit{\Delta})^2+h^2} + n'\sqrt{(x-\mathit{\Delta})^2+h^2} \\
&= n\sqrt{s^2+h^2+2s\mathit{\Delta}+\mathit{\Delta}^2} + n'\sqrt{x^2+h^2-2x\mathit{\Delta}+\mathit{\Delta}^2} \\
&\approx n\sqrt{s^2+h^2+2s\mathit{\Delta}} + n'\sqrt{x^2+h^2-2x\mathit{\Delta}} \\
(\mathrm{ps}: h^2 \approx 2r\Delta) &= n\sqrt{s^2+(2r+2s)\mathit{\Delta}} + n'\sqrt{x^2+(2r-2x)\mathit{\Delta}} \\
&= ns\sqrt{1+\frac{(2r+2s)\mathit{\Delta}}{s^2}} + n'x\sqrt{1+\frac{(2r-2x)\mathit{\Delta}}{x^2}} \\
&\approx ns(1+\frac{(r+s)\mathit{\Delta}}{s^2}) + n'x(1+\frac{(r-x)\mathit{\Delta}}{x^2}) \\
&= ns + n'x + \left[\frac{(r+s)}{s}n + \frac{r-x}{x}n'\right]\mathit{\Delta}
\end{aligned}$$



光程差：

$$\begin{aligned}
\Delta L &\equiv L(QMQ') - L(QOQ') \\
&\approx \left[\frac{(r+s)}{s}n + \frac{r-x}{x}n'\right]\mathit{\Delta}
\end{aligned}$$

当 $\mathit{\Delta}$ 前的系数为零，可近似认为满足物像等光程，此时可近似成像，并且得到球面折射傍轴成像公式：

$$\frac{(r+s)}{s}n + \frac{r-x}{x}n' = 0$$

或者改写为：

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{x} = \frac{n'-n}{r}$$

这里，s 是物距，x 是像距，r 是球面半径

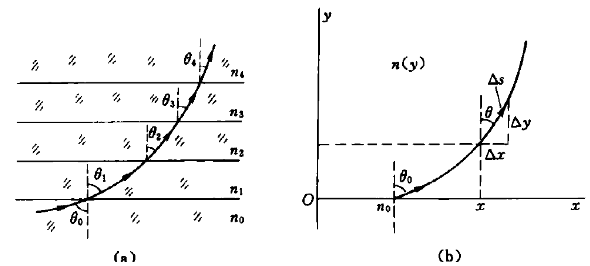
若把像距记为 s'，则球面折射傍轴成像公式为：

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r}$$

光线方程

折射率分层均匀的情形

考虑折射率只与 y 有关，而与 x 无关的情况，$n=n(y)$



由折射定律，得：

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = \cdots n\sin\theta = \cdots$$

几何关系：

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \Longrightarrow (\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x})^2 = 1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\begin{cases} n_0\sin\theta_0 = n\sin\theta \\ (\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x})^2 = 1 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sin\theta} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{n_0^2\sin^2\theta_0} - 1}$$

第1章 习题选解

1.7

1.8

期末考题

光在各向同性介质中的传播规律

麦克斯韦方程组

微分形式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

积分形式

$$\begin{cases} \displaystyle\oiint_{\partial V} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \displaystyle\oiint_{\partial V} \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q \\ \displaystyle\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\ \displaystyle\oint_{\partial S} \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = I + \iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

光的电磁性质

（1）光扰动是一种电磁扰动。光扰动随时间变化和在空间的分布遵从麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

其中，$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P},\vec{H}\equiv\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$；$\vec{P}$ 是电位移矢量，$\vec{M}$ 是磁化强度，ρ 是自由电荷体密度，$\vec{j}$ 是传导电流

若光在各向同性线性非铁磁介质中传播，则有：

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{M}=\chi_{\mathrm{M}}\vec{H}$$

（2）光波是一种电磁波

由矢量分析可得，光在各向同性线性非铁磁介质中传播时，$\vec{E},\vec{H}$ 满足波动方程：

$$\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

其中，ε 是介质的电容率（或介电常数），μ 是介质的磁导率

从中可知，光在介质中的传播速度 v 为：

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

其中，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0,\mu=\mu_r\mu_0$，$\varepsilon_r$ 是相对电容率（或相对介电常数），μ_r 是相对磁导率。

特别地，在真空中，$\varepsilon_r=1,\mu_r=1$，于是得到真空中的光速 c：

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

在后面我们会定义某种介质的折射率 n：

$$n\equiv\frac{c}{v}$$

可得：

$$n\equiv\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

（3）平面电磁波是自由空间电磁波的一基元成分

可以验证，平面电磁波函数：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_E)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_H)$$

满足波动方程。其中，$\vec{k}$ 称为波矢，其方向与波的传播方向一致，也与平面等相面正交，其大小 k 与波长（或称为空间周期）的关系为：

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

（4）光是横波

$$\vec{E}\perp\vec{k},\ \ \vec{H}\perp\vec{k}$$

（5）电场与磁场之间具有正交性和同步性

振荡着的电场与磁场，彼此在方向上是时时正交的，$\vec{E},\vec{H},\vec{k}$ 三者方向构成一个右手螺旋，即：

$$(\vec{E}\times\vec{H})\parallel\vec{k}$$

（6）电磁波能流密度——坡印廷矢量

电磁波能流密度矢量：

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$$

称为坡印廷矢量

光强

对于光波，平均能流密度为：

$$\begin{aligned}\bar{S}&=\frac{1}{T}\int_0^T|\vec{E}\times\vec{H}|\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2\end{aligned}$$

在光频段，$\mu_r\approx1$，于是 $n\equiv\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\approx\sqrt{\varepsilon_r}$，于是：

$$\begin{aligned}\bar{S}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2\\&\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}nE_0^2\\&\propto nE_0^2\end{aligned}$$

光强，记为 I，定义为：

$$I\equiv nE_0^2$$

可见，光强度量的是平均电磁能流密度，但和平均电磁能流密度差一个系数

定态波场

（1）空间各点的扰动是同频率的振动

（2）波场中各点扰动的振幅不随时间变化

定态光波的标量表示

$\vec{E}$ 在直角坐标系下的三个分量遵从同一形式的波动方程，这就允许我们用标量 U 来代表 E_x,E_y,E_z 中的任意一个量，它们都遵从如下的波动方程：

$$\nabla^2U-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=0$$

U 可以理解为 E_x,E_y,E_z 中的任意一个

对于某一确定场点 $\vec{r}$ 上的定态光扰动 $E_i(\vec{r},t),(i=x,y,z)$ ，其是关于时间的周期函数，在满足狄利克雷条件的情况下，此光扰动可以展开为余弦傅里叶级数，于是我们可以选取余弦函数作为定态光波的基元，定态光波可由无数不同频率的余弦波线性组合而成。这种选定的基元成分的一般形式为：

$$U(P,t)=A(P)\cos(\omega t+\varphi(P))$$

其中，$A(P)$ 是振幅，$\varphi(P)$ 是初相位

波函数的复数表示

简谐波函数的实数形式：

$$U(P,t)=A(P)\cos(\omega t+\varphi(P))$$

其中，$\varphi(P)$ 是场点 P 处光扰动的初相位

复数形式：

$$\tilde{U}(P,t) = A(P)e^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi(P))}$$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，可得二者的关系为：

$$\Re\{\tilde{U}(P,t)\} = U(P,t)$$

其中，$\Re\{\cdot\}$ 表示“取实部”操作

> 比如：
>
> $$\Re\{1+2\mathrm{i}\} = 1$$

平面简谐波

$$U(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

其中，A 是平面波的振幅；$\vec{r}$ 是坐标原点指向场点的位矢；$\vec{k}$ 是平面波的波矢，其方向与平面波的传播方向同向平行，大小为 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$；φ_0 是坐标原点的初相位，也就是坐标原点在 $t=0$ 时刻的相位；

$$\tilde{U}(\vec{r},t) = Ae^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\varphi_0)}$$

发散球面简谐波

$$U(\vec{r},t) = \frac{a_1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

其中，r 是点源到场点 $\vec{r}$ 的距离；φ_0 是点源的初相位

$$\tilde{U}(\vec{r},t) = \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\omega t-\varphi_0)}$$

柱面简谐波

$$U(r,t) = \frac{b_1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\tilde{U}(r,t) = \frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{\mathrm{i}(kr-\omega t-\varphi_0)}$$

复振幅

设 $U(P,t) = A(P)\cos(\omega t + \varphi(P))$，其中，$\varphi(P)$ 是 P 点的初相位，则 P 点的复振幅，记为 $\tilde{U}(P)$，定义为：

$$\tilde{U}(P) \equiv A(P)e^{-\mathrm{i}\varphi(P)}$$

复振幅与时间无关，其关注的是光扰动在空间中的分布规律。

平面简谐波复振幅

$$U(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}) &\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})} \\ &= Ae^{-\mathrm{i}(-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0)} \\ &= Ae^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\varphi_0)}\end{aligned}$$

球面发散简谐波复振幅

$$U(\vec{r},t) = \frac{a_1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -kr + \varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}) &\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})} \\ &= \frac{a_1}{r}e^{-\mathrm{i}(-kr+\varphi_0)} \\ &= \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\end{aligned}$$

柱面简谐波复振幅

$$U(r,t)=\frac{b_1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t-kr+\varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r})=-kr+\varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r})&\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})}\\&=\frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{-\mathrm{i}(-kr+\varphi_0)}\\&=\frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\end{aligned}$$

波前函数

观察平面上某点的复振幅称为波前函数。

一般用 $z=\mathrm{const}$ 来表示这个观察平面。由于 z 坐标是个常数，于是波前函数只是观察平面上的两个直角坐标分量 x,y 的函数，用 $\tilde{U}(x,y)$ 来表示（波前函数）。

球面波向平面波的转化

傍轴条件（振幅条件）—— $z^2\gg\rho^2$

源面 x_0-y_0 平面上有一点源 (x_0,y_0) 发射球面波，场面 $x-y$ 平面距源面的距离为 z，则场面上 (x,y) 场点的波前函数精确表达是：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y)&\equiv\frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\\&=\frac{a_1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}e^{\mathrm{i}(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}-\varphi_0)}\end{aligned}$$

傍轴条件下，波前函数的近似表达是：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y)&\approx\frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}(kz+k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}-\varphi_0)}\\&=\frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{\mathrm{i}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}\end{aligned}$$

远场条件（相位条件）—— $z\lambda\gg\rho^2$

> 做题的话，远场条件可认为是 $z\lambda\approx 50\rho^2$

源面 x_0-y_0 平面上有一点源 (x_0,y_0) 发射球面波，场面 $x-y$ 平面距源面的距离为 z，则场面上 (x,y) 场点的波前函数精确表达是：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y)&\equiv\frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\\&=\frac{a_1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}e^{\mathrm{i}(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}-\varphi_0)}\end{aligned}$$

仅远场条件下，波前函数的近似表达是：

$$\tilde{U}(x,y)\approx\frac{a_1}{z+\frac{x^2+y^2}{2z}}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}$$

对于光波，远场条件更加苛刻。若满足了远场条件，则傍轴条件也必定满足。

于是对于光波，波前函数可进一步近似为：

$$\tilde{U}(x,y)\approx\frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}$$

由此可见，对于光波，在远场条件下，球面波可近似为平面波。

波叠加原理

在通常介质与通常光强条件下，波叠加原理成立，即总扰动等于各分扰动的叠加。

波叠加的两种情况

在波叠加原理成立的情况下，考察交叠区中的光强分布，存在两种情况：

非相干叠加

在观测时间中，总光强是各分光强的直接相加：

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P)$$

相干叠加

在观测时间中，总光强**不等于**各分光强的直接相加：

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + \Delta I(P)$$

光波叠加的相干条件

（1）光振动方向一致或有方向一致的平行振动分量。

（2）两列波的频率相同。

证明：

设交叠区中场点 P 处的两个扰动的实值表示分别为：

$$U_1(P,t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1(P))$$

$$U_2(P,t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1(P))$$

总扰动 $U(P,t)$ 遵从波叠加原理：

$$U(P,t) = U_1(P,t) + U_2(P,t)$$

在光的矢量理论中，光强正比于平均电磁能流密度。这里我们讨论的是光的标量理论，用标量 U 代表电场 $\vec{E}$ 在直角坐标系下的任一分量。

类比矢量理论，可定义标量理论中的“光强”：

$$I(P) \equiv \langle U^2(P,t)\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T U^2(P,t)\mathrm{d}t$$

其中，T 是观察时间，$\langle\cdot\rangle$ 表示对尖括号内的物理量取观察时间的平均值。

基于此，总扰动的“光强”为：

$$\begin{aligned}
I(P) &\equiv \langle U^2(P,t)\rangle \\
&= \left\langle \Big(U_1(P,t) + U_2(P,t)\Big)^2 \right\rangle \\
&= \langle U_1^2(P,t) + U_2^2(P,t) + 2U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= \langle U_1^2(P)\rangle + \langle U_2^2(P,t)\rangle + 2\,\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= I_1(P) + I_2(P) + 2\,\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle
\end{aligned}$$

观察交叉项：

$$\begin{aligned}
\Delta I(P) &\equiv 2\,\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= 2\,\langle A_1A_2\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\rangle \\
&= A_1A_2\,\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]\rangle + A_1A_2\,\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\rangle
\end{aligned}$$

注意到，光的频率很大，时间周期很短，因此在相对很长的观察时间 T 内，有：

$$\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]\rangle \approx 0$$

于是进一步有：

$$\begin{aligned}
\Delta I(P) &= A_1A_2\,\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]\rangle + A_1A_2\,\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\rangle \\
&\approx A_1A_2\,\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]\rangle
\end{aligned}$$

当 $\omega_1 \neq \omega_2$，且 ω_1 和 ω_2 相差不太小时，同样有：

$$\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle \approx 0$$

此时，

$$\Delta I(P) \approx 0$$

也就是说，当 $\omega_1 \neq \omega_2$，且 ω_1 和 ω_2 相差不太小时， 交叉项为零，不发生干涉。

当 $\omega_1 = \omega_2$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta I(P) &\approx A_1A_2\left\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\right\rangle \\ &\neq 0,\ (\mathrm{ps}:\varphi_1-\varphi_2\ \text{的值合适的情况下})\end{aligned}$$

此时，干涉项不为零。也就是说，当满足同频条件 $\omega_1 = \omega_2$ 时，才能发生干涉。

（3）场点有稳定的相位差。

双光束干涉强度公式

注意到：

$$\begin{aligned}I_1(P) &\equiv \langle U_1(P,t)\rangle \\ &\approx \frac{1}{2}A_1^2\end{aligned}$$

$$I_2(P) \approx \frac{1}{2}A_2^2$$

上面推导给出，当 $\omega_1 = \omega_2$ 时，有：

$$\begin{aligned}\Delta I(P) &\approx A_1A_2\left\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\right\rangle \\ &= A_1A_2\left\langle\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right\rangle \\ &= A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\end{aligned}$$

令：

$$\delta(P) = \varphi_1-\varphi_2$$

则得到双光束干涉强度公式：

$$\begin{aligned}I(P) &= I_1+I_2+A_1A_2\cos\delta(P) \\ &= I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)\end{aligned}$$

或者：

$$I(P) = \frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}A_2^2+\sqrt{A_1A_2}\cos\delta(P)$$

由于上式中很多 $\frac{1}{2}$，不好看，而光强又只是一“相对度量手段”，不妨将光强写为：

$$I(P) = A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta(P)$$

再注意到复振幅：

$$\tilde{U}_1(P) = A_1e^{-\mathrm{i}\varphi_1(P)}$$

$$\tilde{U}_2(P) = A_2e^{-\mathrm{i}\varphi_2(P)}$$

注意到：

$$\begin{aligned}[\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)][\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)]^* &= [A_1e^{-\mathrm{i}\varphi_1(P)}+A_2e^{-\mathrm{i}\varphi_2(P)}][A_1e^{\mathrm{i}\varphi_1(P)}+A_2e^{\mathrm{i}\varphi_2(P)}] \\ &= A_1^2+A_2^2+A_1A_2e^{\mathrm{i}(\varphi_2(P)-\varphi_1(P))}+A_1A_2e^{\mathrm{i}(\varphi_1(P)-\varphi_2(P))} \\ &= A_1^2+A_2^2+A_1A_2\cos\left[\varphi_2(P)-\varphi_1(P)\right]+\mathrm{i}\sin\left[\varphi_2(P)-\varphi_1(P)\right]+A_1A_2\cos\left[\varphi_1(P)-\varphi_2(P)\right]+\mathrm{i} \\ &= A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta(P)\end{aligned}$$

干涉场的衬比度

$$\gamma \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

衬比度越大，干涉条纹清晰度越好。

当衬比度 $\gamma = 0$，即 $I_{\max} = I_{\min}$，此时干涉场中光强处处相等，不出现干涉条纹。

对于双光束干涉，

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta(P)$$

得到：

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

于是：

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \\ &= \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} \\ &= \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \end{aligned}$$

考虑到 $I_1 / I_2 = (A_1 / A_2)^2$

于是双光束干涉的衬比度也可以用振幅比表达：

$$\gamma = \frac{2\frac{A_1}{A_2}}{1 + (\frac{A_1}{A_2})^2}$$

利用衬比度表达双光束干涉强度公式

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta(P) \\ &= (I_1 + I_2)(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cos \delta(P)) \\ &= (I_1 + I_2)(1 + \gamma \cos \delta(P)) \\ &= I_0(1 + \gamma \cos \delta(P)), \quad I_0 = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

两束自然光交叠场中衬比度 γ 与光束夹角 α 的关系

$$\gamma = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

相干叠加的五个条件

（1）光振动方向一致或有方向一致的平行振动分量。

（2）两列波的频率相同。

（3）场点有稳定的相位差。

（4）参与相干叠加的两束光的振幅尽可能接近。

（5）参与相干叠加的两束光的传播方向的夹角不要太大。

双光束干涉强度公式汇总

$$\boxed{I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta(P)}$$

$$\boxed{I(P) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta(P)}$$

$$\boxed{I(P) = (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)^*}$$

$$\boxed{I(P) = I_0(1 + \gamma\cos\delta(P))},\ \ I_0 = I_1 + I_2$$

光的干涉

杨氏双孔干涉

杨氏双孔干涉强度分布公式

$$I(x,y) = I_0[1 + \cos(k\frac{d}{D}x)]$$

其中，k 是波矢大小，d 是双孔间距，D 是双孔到屏幕的距离

杨氏双孔干涉干涉条纹间距公式

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$$

其中，Δx 是条纹间距，λ 是光波长，D 是双孔到接收屏距离，d 是双孔间距

杨氏双孔干涉点源位移导致条纹移动

$$\delta x = \frac{D}{R}x_0$$

其中，δx 是零级条纹的位移，D 是双孔到接收面的距离，R 是源面到双孔的距离，x_0 是点源相对中心轴的位移

两个分离点源照明时的部分相干场

$$I(x,y) = 2I_0[1 + \cos\frac{\varphi_0}{2}\cdot\cos(2\pi fx + \frac{\varphi_0}{2})]$$

$$\varphi_0 = 2\pi f_0x_0,\ \ f_0 = \frac{d}{R\lambda}$$

衬比度：

$$\gamma = |\cos\frac{\varphi_0}{2}|,\ \ \varphi_0 = 2\pi f_0x_0$$

线光源照明时的部分相干场

$$I(x,y) = I_0\left(1 + \frac{\sin\pi f_0b}{\pi f_0b}\cdot\cos(2\pi fx)\right)$$

衬比度：

$$\gamma = \left|\frac{\sin\pi f_0b}{\pi f_0b}\right|,\ \ f_0 = \frac{d}{R\lambda}$$

其中，b 是线光源的宽度，R 是源面到双孔的距离，d 是双孔间距，λ 是单色线光源的波长。

注意，接收屏上各场点处的衬比度都相等。

整套干涉条纹的衬比度由实验装置的参数决定，具体来说，γ 由双孔间距 d，源面到双孔的距离 R，线光源的宽度 b，单色线光源的波长 λ 决定。

衬比度 γ 与双孔到接收屏的距离无关。

光源极限宽度或双孔极限间隔

光源极限宽度，记为 b_0，定义为使得衬比度 γ 第一次降为 0 时 b 的取值。

注意到，杨氏双孔模型中，若采用线光源照明，有：

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \left|\frac{\sin\pi f_0 b}{\pi f_0 b}\right|,\ \ f_0 = \frac{d}{R\lambda} \\
&= \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd)}{\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd}\right|
\end{aligned}
$$

让线光源宽度 b 改变，而保持其他量不变，则由光源极限宽度的定义，有：

$$
\frac{\pi}{R\lambda}\cdot b_0 d = \pi \Longrightarrow b_0 = \frac{R\lambda}{d}
$$

$$
\boxed{b_0 = \frac{R\lambda}{d}}
$$

若线光源的宽度大于光源极限宽度 b_0，则认为接收屏上的干涉条纹的衬比度为零。

双孔极限间隔，记为 d_0，定义为使得衬比度 γ 第一次降为 0 时 d 的取值。

让双孔间隔 d 改变，而保持其他量不变，则由双孔极限间隔的定义，有：

$$
\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd_0 = \pi \Longrightarrow d_0 = \frac{R\lambda}{b}
$$

$$
\boxed{d_0 = \frac{R\lambda}{b}}
$$

若双孔的间隔 d 大于双孔极限间隔 d_0，则认为接收屏上的干涉条纹的衬比度为零。

三种光源的光源极限宽度

$$
b_0 = K\frac{R\lambda}{d}
$$

线光源，$K = 1.0$

环状光源，$K = 0.78$

圆盘光源，$K = 1.2$

任何形状的面光源均可被压缩为沿 x 轴的一个等效线光源。相应地，等效线光源有一个非均匀的亮度分布 $B(x_0)$

光场的空间相干性

光场的空间相干性是指，在非相干扩展光源照明空间中，横向两点光扰动之间一般是部分相干的，或者说，这两个光扰动相位随机量之间是部分相关的，部分相干程度由观测平面上干涉场的衬比度 γ 来反映。

空间相干性反比公式——相干孔径角和相干面积

上面给出了当光源宽度 b 给定时，双孔的极限间隔：

$$
d_0 = \frac{R\lambda}{b}
$$

其中，R 是源面到双孔面的间距，λ 是光波长

上式可改写为：

$$
b\cdot\frac{d_0}{R} = \lambda
$$

注意到，当 $R \gg d_0$ 时，有：

$$
\frac{d_0}{R} \approx \Delta\theta_0
$$

其中，$\Delta\theta_0$ 是双孔间隔等于双孔极限间隔 d_0 时双孔对**线光源**中心张开的孔径角，称为**相干孔径角**，于是进一步有：

$$
b\cdot\Delta\theta_0 \approx \lambda
$$

上式就是**空间相干性反比公式**。

若双孔对线光源中心所张开的孔径角 $\Delta\theta$ 大于相干孔径角 $\Delta\theta_0$，则认为接收屏上干涉条纹的衬比度为零。

$\Delta\theta_0$ 的物理意义是，若两点源 S_1, S_2 对线光源中心的实际张角 $\Delta\theta \approx \Delta\theta_0$，则这两个点源几乎非相干；若 $\Delta\theta < \Delta\theta_0$，则 $\gamma > 0$，两点源部分相干；比值 $\Delta\theta/\Delta\theta_0$ 越小，两点源的相干程度越高。

前面给出了杨氏双孔干涉在线光源照明时的衬比度公式：

$$\gamma = \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd)}{\frac{\pi}{R\lambda}\cdot bd}\right|$$

也给出了空间相干性反比公式：

$$b\cdot\Delta\theta_0 \approx \lambda \Longrightarrow \frac{b}{\lambda} \approx \frac{1}{\Delta\theta_0}$$

而双孔对线光源中心的实际张角 $\Delta\theta$ 可近似为：

$$\Delta\theta \approx \frac{d}{R}$$

于是杨氏双孔干涉在线光源照明时的衬比度可改写为关于 $\Delta\theta/\Delta\theta_0$ 的函数：

$$\gamma(\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}) = \left|\frac{\sin\pi\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}{\pi\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_0}}\right|$$

若面光源在相互垂直的两个方向上均有宽度 b，则空间相干范围应该是一个由 $\Delta\theta_0$ 旋转而成的立体角 $\Delta\Omega_0$，与光源距离 R 处的相应面积 ΔS_0 称为相干面积。在相干面积之内的两个点源之间是部分相干的。

在球面上 $\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta, \varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 范围内的立体角微元为

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{R\mathrm{d}\theta\cdot R\sin\theta\mathrm{d}\varphi}{R^2} = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

建立球坐标，使得 z 轴穿过相干面积的中心，积分得：

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_0 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\Delta\theta_0/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi(1-\cos\frac{\Delta\theta_0}{2}) \\ &= 4\pi\sin^2\frac{\Delta\theta_0}{4} \\ &\approx 4\pi(\frac{\Delta\theta_0}{4})^2 \\ &= \frac{\pi}{4}(\Delta\theta_0)^2\end{aligned}$$

于是相干面积为：

$$\begin{aligned}\Delta S_0 &\approx R^2\Delta\Omega_0 \\ &\approx \frac{\pi}{4}(R\Delta\theta_0)^2\end{aligned}$$

利用空间相干性反比公式 $b\cdot\Delta\theta_0 \approx \lambda$ 以及极限间隔 $d_0 = \frac{R\lambda}{b}$ 得到：

$$\begin{aligned}\Delta S_0 &\approx \frac{\pi}{4}(R\Delta\theta_0)^2 \\ &\approx \frac{\pi}{4}(\frac{R\lambda}{b})^2 \\ &\approx \frac{\pi}{4}d_0^2\end{aligned}$$

其中，d_0 是光源宽度 b 对应的 S_1, S_2 极限间隔。

光场的时间相干性

非单色性对干涉衬比度的影响

光谱双线结构导致衬比度周期性变化

$$\gamma = \left| \cos(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta L) \right|$$

干涉场中衬比度随光程差作周期性变化，半周期为：

$$\Delta L_0 = \frac{\pi}{\Delta k} \approx \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}$$

准单色线宽导致衬比度$\gamma(\Delta L)$ 下降

采用方垒形谱函数，可以得到：

$$\gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin(\frac{\Delta k}{2}\Delta L)}{\frac{\Delta k}{2}\Delta L} \right|$$

最大光程差 ΔL_M

最大光程差，记为 ΔL_M，定义为使得 γ 第一次等于 0 的光程差 ΔL 的取值

$$\frac{\Delta k}{2}\Delta L_M = \pi \Longrightarrow L_M = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

借助公式 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta k}{k}$，也可将上式写为：

$$\Delta L_M = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

上面两式可写成反比形式：

$$\Delta L_M \cdot \Delta k = 2\pi,\ \ \Delta L_M \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \lambda$$

利用最大光程差 ΔL_M，可将衬比度函数改写为：

$$\gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin(\pi\frac{\Delta L}{\Delta L_M})}{\pi\frac{\Delta L}{\Delta L_M}} \right|$$

时间相干性的突出表现——长程差干涉

可以证明，由谱线宽度 $\Delta\lambda$ 决定的最大光程差 ΔL_M 与由波列长度 L_0 决定的最大光程差 $\Delta L'_M$ 是一致的。

时间相干性反比公式

$$L_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \lambda$$

利用 $\Delta\nu/\nu \approx \Delta\lambda/\lambda$，可将上式改写为：

$$\tau_0 \cdot \Delta\nu \approx 1$$

其中，τ_0 是相干时间。

两种典型薄膜干涉

等倾干涉

膜层厚度均匀、点光源照明条件下**无穷远处的干涉场**（借助透镜来实现）

表观光程差公式

$$\Delta L_0(P) = 2nh\cos i$$

其中，n 是薄膜折射率，h 是薄膜厚度，i 是入射角

表观光程差唯一地确定于倾角 i，于是等倾角的场点轨迹就是条纹形状。等倾干涉的干涉条纹是一系列**圆环**。

等倾干涉条纹的性质

（1）扩展光源有利于观察等倾干涉条纹

（2）等倾干涉条纹为一系列圆环

（3）中心处的级次最高（中心，$i=0$，表观光程差最大，级次最高），外围的级次逐渐降低。

（4）中心条纹稀疏，外围条纹密集

（5）膜厚度改变半个波长时，从中心冒出或缩进一个条纹。

考虑中心条纹，$i=0, \cos i = 1$，假设原来薄膜厚度为 h 时中心处是亮条纹/暗条纹，有：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2nh = \Delta\varphi_0$$

当薄膜厚度从 h 增加到 $h+\Delta h$ 时（$\Delta h > 0$）恰好冒出一个亮条纹/暗条纹，有：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2n(h+\Delta h) = \Delta\varphi_0 + 2\pi$$

作差得：

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot 2n\Delta h = 2\pi$$

得到：

$$\Delta h = \frac{\lambda_0}{2n} = \frac{\lambda}{2}$$

其中，λ 是介质中的波长

根据冒出的条纹数，可以测定长度的微小变化。

> 一般地，设膜厚度改变 Δx 的过程中冒出或缩进了 N 个条纹，则有：
>
> $$\Delta x = N\frac{\lambda}{2}$$

等厚干涉

定域在薄膜表面上的干涉条纹

厚度相同的地方，是同一级亮条纹，故称等厚干涉。

光的衍射

衍射现象

波在传播传播过程中遇到障碍物，能够绕过障碍物的边缘前进。这种偏离直线传播的现象成文衍射现象。

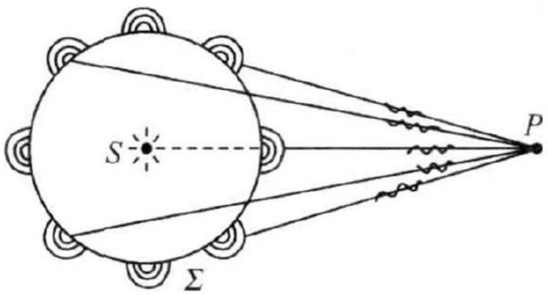
波长越大，障碍物越小，衍射越明显。

惠更斯-菲涅耳原理

波前上的每个面元可以看为次波源，它们向四周发射次波；波场中任一场点的扰动，是所有次波源所贡献的次级扰动的**相干叠加**。

设波前 Σ 上任一面元 $\mathrm{d}S$ 对场点 P 贡献的刺激扰动复振幅为 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$，则按惠更斯-菲涅耳原理，总扰动 $\tilde{U}(P)$ 应表达为：

$$\tilde{U}(P)=\oiint_{(\Sigma)}\mathrm{d}\tilde{U}(P)$$

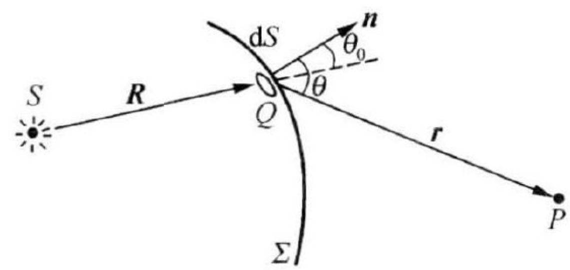


(b)

菲涅耳衍射积分式

决定 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$ 的因素：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{U}(P)&\propto \mathrm{d}S\ \text{ 波前上作为次波源的微分面元}\\&\propto \tilde{U}_0(Q)\ \text{ 次波源自身的复振幅}\\&\propto \frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\ \text{ 次波源发射球面波到达场点}\\&\propto f(\theta_0,\theta)\ \text{ 倾斜因子用以表明次波面源的发射并非各向同性}\end{aligned}$$



综合以上因素，$\tilde{U}(P)=\oiint_{(\Sigma)}\mathrm{d}\tilde{U}(P)$ 可以进一步表达为：

$$\boxed{\tilde{U}(P)=K\oiint_{(\Sigma)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S}$$

其中，Q 是次波源，$\mathrm{d}S$ 是波前 Σ 上 Q 点处的一个小面元，$\tilde{U}_0(Q)$ 是 Q 点复振幅，r 是次波源 Q 到场点 P 的距离，$f(\theta_0,\theta)$ 是倾斜因子。

基尔霍夫衍射积分式

基尔霍夫从定态波场的亥姆霍兹方程出发，利用矢量场论中的格林公式，在 $kr\gg 1$，即 $r\gg\lambda$ 的条件下，导出了无源空间边值定解的表达式：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\oiint_{(\Sigma)}\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S$$

凡是隔离实在的点光源与场点的任意闭合曲面，都可以作为衍射积分式中的积分面。

基尔霍夫边界条件

取闭合面：

$$(\Sigma)=\Sigma_0+\Sigma_1+\Sigma_2$$

其中，Σ_0 是光孔面，Σ_1 是光屏面，Σ_2 是无穷远半球面。

基尔霍夫边界条件认为：

（1）无穷远面Σ_2 上的波前对场点的贡献为零

（2）光屏面 Σ_1 上波前函数为零，对场点也没有贡献

（3）只有光孔面 Σ_0 的波前对场点有贡献，且其波前函数 $\tilde{U}_0'(Q)$ 等于无屏障时自由传播的光场 $\tilde{U}_0(Q)$，即 $\tilde{U}_0'(Q)=\tilde{U}_0(Q)$

基于此，基尔霍夫衍射积分式简化为：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma_0}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

其中，倾斜因子为 $f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$

傍轴条件衍射积分式

傍轴条件下，

倾斜因子 $f(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)\approx 1$

球面次波函数 $\frac{1}{r}e^{ikr}\approx\frac{1}{r_0}e^{ikr}$

得到傍轴条件衍射积分公式：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint_{\Sigma_0}\tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

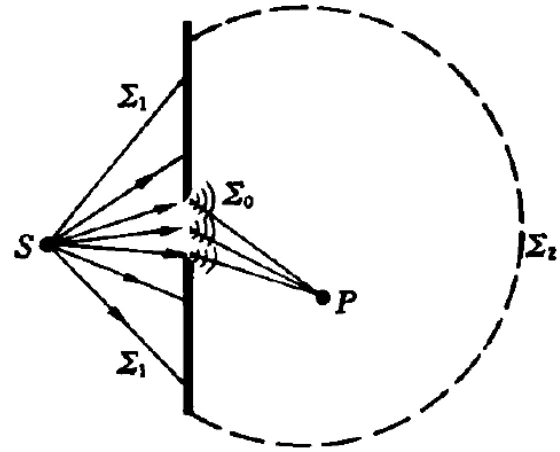
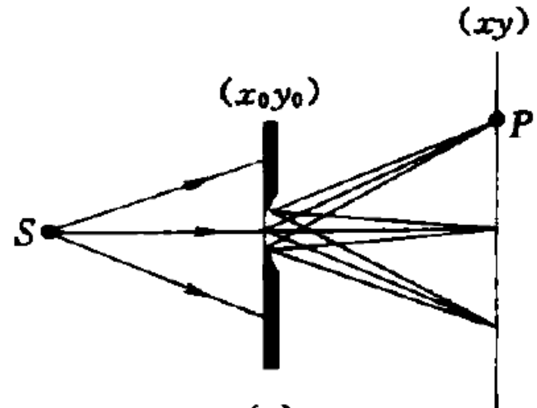


图 2.29　说明基尔霍夫边界条件

衍射系统及其分类——菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射

菲涅耳衍射

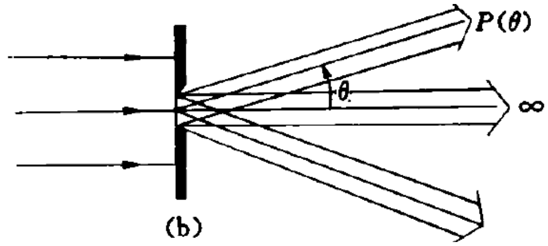
光源到衍射屏、衍射屏到接收屏之间的距离均为有限远，或其中之一是有限远的场合；或者说，**球面波照明**时在**有限远处接收**的是菲涅耳衍射场。



(a)

夫琅禾费衍射

光源到衍射屏、衍射屏到接收屏的距离都是无限远；或者说。**平面波照明**时在**无穷远处接收**的是夫琅禾费衍射场。



(b)

衍射巴比涅原理

设 Σ_a,Σ_b 是一对透光率互补的屏面，现将它们作为衍射屏先后插置于衍射系统中，设 Σ_a 单独存在时形成的衍射场为 $\tilde{U}_a(P)$，Σ_b 单独存在时形成的衍射场为 $\tilde{U}_b(P)$，光波通行无阻时全波前 Σ_0 形成的自由光场为 $\tilde{U}_0(P)$，由于：

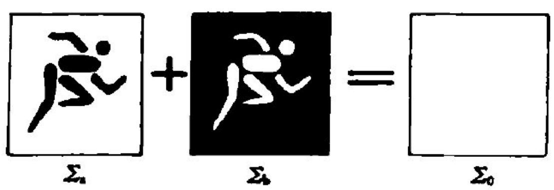


图 2.34　巴比涅原理中的一对互补屏

$$\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma_0$$

根据基尔霍夫衍射积分公式，结合二重积分的区域可加性，有：

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0(P)&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{(\Sigma_0)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{(\Sigma_a)+(\Sigma_b)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{(\Sigma_a)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S+\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{(\Sigma_b)}f(\theta_0,\theta)\tilde{U}_0(Q)\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S\\&=\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)\end{aligned}$$

最终结果是：

$$\tilde{U}_0(P)=\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)$$

这一反映两个孔型互补屏产生的两个衍射场关系的方程，称为**巴比涅原理**(Babinet principle)

巴比涅原理的应用

由于自由光场是容易知道的，故我们可以由单缝衍射场，直接导出细丝衍射场；由圆孔衍射场，直接导出圆屏衍射场

圆孔和圆屏菲涅耳衍射

半波带法

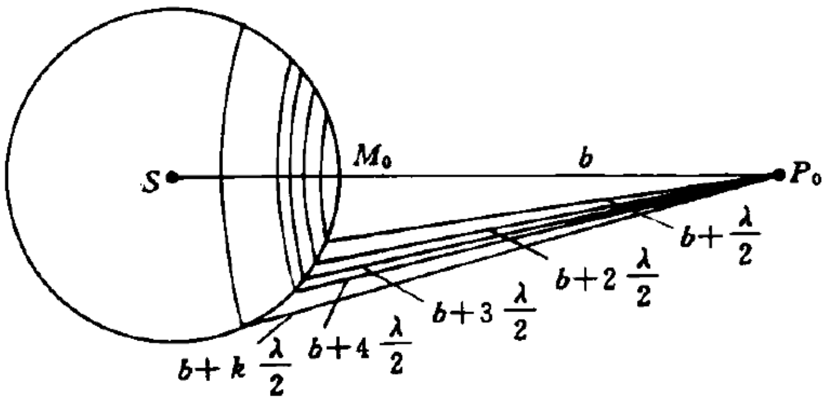


图 2.39　分割波前的半波带方法

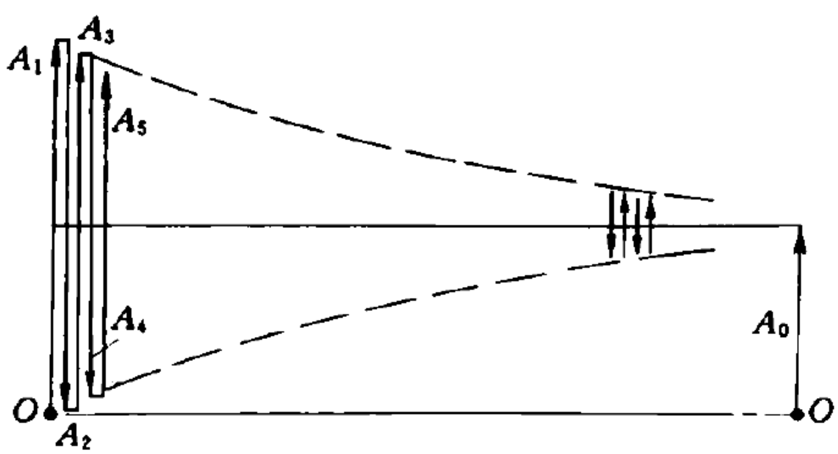


图 2.41　采取半波带方法时的相干叠加矢量图解

螺旋式曲线

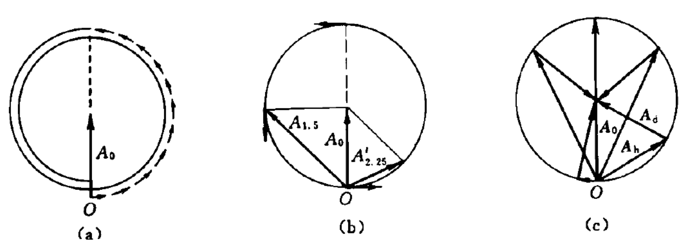
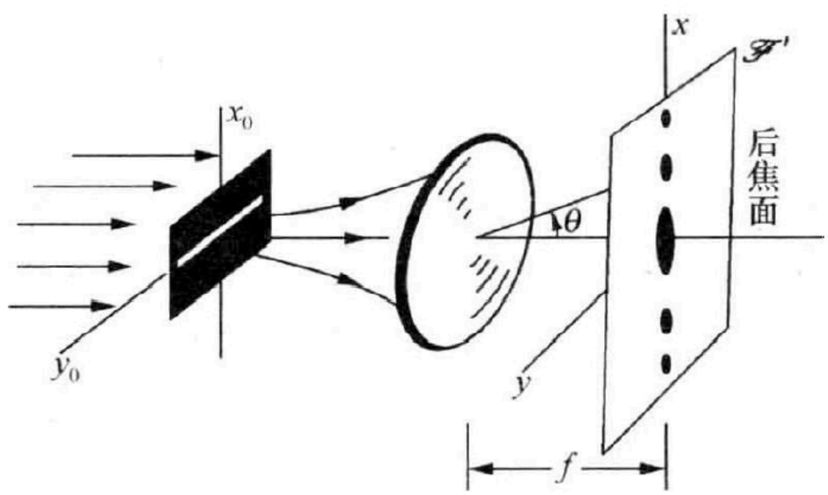


图 2.43　圆孔衍射轴上光场的矢量图解(a),用于圆孔包含非整数个半波带(b),用于说明圆屏衍射(c)

效仿半波带方法，将每个半波带再细分为 N 个环带；每个细环带上的次波源对场点贡献的小扰动，可由一个小矢量表示；这 N 个小矢量长度相等，取向渐变以反映彼此间的相位差。这些小矢量头尾相接，形成半个正多边形，其极限过渡为半圆。于是，波前上全部次波源在轴上场点 P_0 贡献地扰动小矢量，形成一个个半径及其缓慢收缩地螺旋式曲线。借此，可以求得 k 为非整数时的衍射强度 $I(P_0)$

单缝夫琅禾费衍射



(b)

平行光照射单缝，在透镜后焦面 $\mathscr{F}'$ 上接收夫琅禾费衍射场。

单狭缝的宽度 $\Delta x_0 = a \ll$ 长度 $\Delta y_0 = b$，其衍射强度显著地沿 x 轴扩展。

矢量图解法

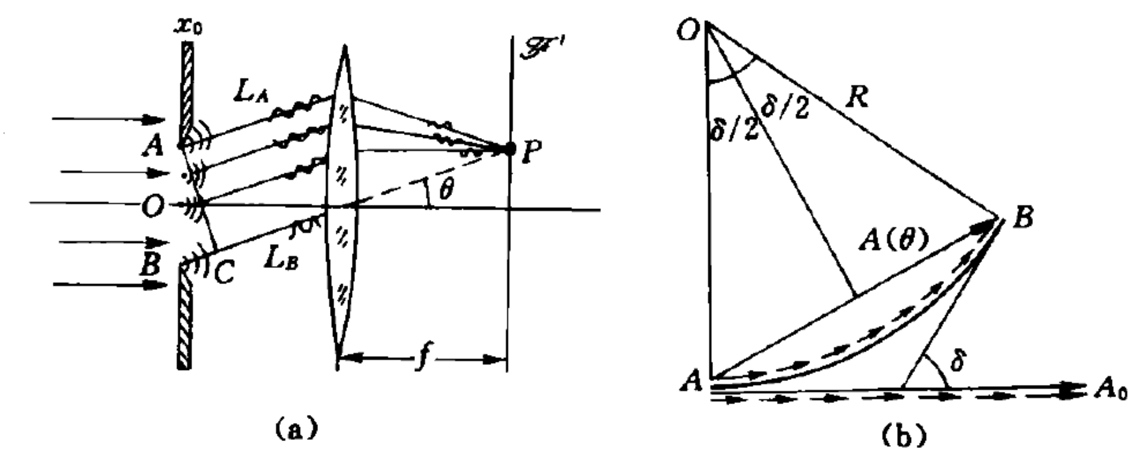


图 2.49　单缝夫琅禾费衍射.(a) 光程差分析,(b) 矢量图解法.

θ 是衍射角，用于标定场点 P 的位置，现在分析后焦面上的衍射强度分布 $I(\theta)$：

由透镜的性质，像空间后焦面上的一个点对应于物空间的一个方向，即从单缝出发衍射角为 θ 的一系列次波线才能会聚在后焦面上的一点 P，发生相干叠加，从而决定了衍射强度。

为此，将单缝的宽度 $\Delta x_0 = a$ 继续细分（尽管已经很细了）为一系列更细的细缝，每个细缝作为次波源对场点贡献一个小扰动，用一个小矢量；这一系列小矢量长度相等，但取向依次变动，首位相接，形成一段圆弧。

这段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 起点 A 与终点 B 的两条切线的夹角 δ 是确定的，因为它代表了 A 边与 B 边贡献的两个小扰动之间的相位差 δ_{AB}，而相位差 δ_{AB} 又取决于光程差。

光程差为：

$$\begin{aligned}\Delta &= L(BP) - L(AP) \\ &= n\overline{BC} \\ &= na\sin\theta\end{aligned}$$

由光程差和相位差的关系，可得：

$$
\begin{aligned}
\delta_{AB} &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta \\
&= \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta
\end{aligned}
$$

$\overset{\frown}{AB} = A_0$，$\angle AOB = \delta$，$R = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\delta}$，于是可以求得相干叠加的合成振幅：

$$
\begin{aligned}
A(\theta) &= 2R\sin\frac{\delta}{2} \\
&= 2\cdot\frac{\overset{\frown}{AB}}{\delta}\cdot\sin\frac{\delta}{2} \\
&= A_0\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{(\frac{\delta}{2})}
\end{aligned}
$$

引入宗量：

$$
\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

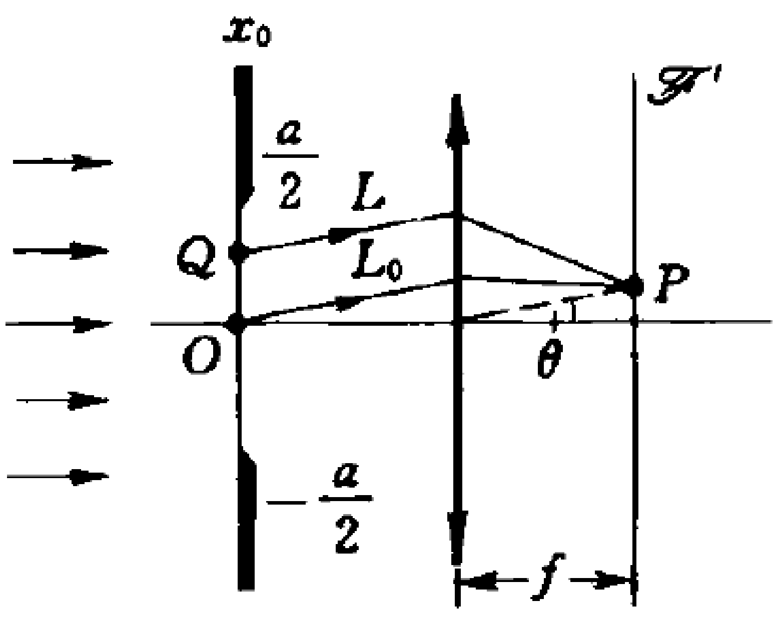
得到单缝夫琅禾费衍射场的振幅分布和强度分布：

$$
A(\theta) = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

$$
I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,\ \ I_0 = A_0^2, \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}
$$

其中，A_0 代表一系列振动小矢量取向一致时的合成振幅。

衍射积分法



(c)

：.(c) 衍射积分法

单缝夫琅禾费衍射场也可以由傍轴衍射积分公式求得：

$$\tilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint\tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S$$

经透镜变换，振幅系数：

$$\frac{1}{r_0}\to\frac{1}{f}$$

平行光正入射：

$$\tilde{U}_0(x_0)=A$$

积分面元：

$$\mathrm{d}S=b\mathrm{d}x_0$$

相位因子 $e^{\mathrm{i}kr}$：

$$\begin{aligned}kr&=\frac{k}{n}\cdot nr\\&=k_0L\\&=k_0(L-L_0)+k_0L_0\\&=-k_0nx_0\sin\theta+k_0L_0\\&=-kx_0\sin\theta+k_0L_0\end{aligned}$$

其中，L_0 是坐标原点 O 出发沿 θ 方向到达场点 P 的光程 $L_0(OP)$，作为参考光程。

综上，衍射积分式可以表示为：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta)&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda r_0}\iint\tilde{U}_0(Q)e^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}S\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}\int_{x_0=-a/2}^{x_0=a/2}A\cdot e^{\mathrm{i}(-kx_0\sin\theta+k_0L_0)}\cdot b\mathrm{d}x_0\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}Abe^{\mathrm{i}k_0L_0}\int_{x_0=-a/2}^{x_0=a/2}e^{-\mathrm{i}kx_0\sin\theta}\mathrm{d}x_0\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}Abe^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{2\sin(\frac{a}{2}k\sin\theta)}{k\sin\theta}\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{a}{2}k\sin\theta)}{\frac{a}{2}k\sin\theta}\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{a}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{a}{2}\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta}\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)Ae^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\\&=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\\&=\boxed{\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}},\ \ \tilde{c}=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A,\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\end{aligned}$$

光强分布为：

$$\begin{aligned}I(\theta)&=\tilde{U}\tilde{U}^*\\&=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\end{aligned}$$

其中，

$$\tilde{c}=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda f}(ab)A,\ \ I_0=\tilde{c}\tilde{c}^*=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2,\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$A(\theta)=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ \ \alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

单缝夫琅禾费衍射的主要特征

（1）**最大值**

$$I(\theta)=I_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$$

当 $\theta=0$ 时，$I(\theta)$ 取最大值 $I(0)=I_0$，称为零级衍射峰。可以看出，I_0 的物理就是零级衍射峰的光强。

（2）**零点位置**

$$I(\theta)=I_0\frac{\sin(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda})}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$$

当：

$$\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}=j\pi,\ \ j=\pm1,\pm2,\cdots$$

时，即：

$$a\sin\theta=j\lambda,\ \ j=\pm1,\pm2,\cdots$$

时，$I(\theta)=0$，出现暗点。上式称为单缝衍射零点条件。

（3）**次极大**

在相邻两个零点之间存在一个极大值

（4）**半角宽度** $\Delta\theta_0$

零级衍射峰的半角宽度，记为 $\Delta\theta_0$，定义为由零级衍射峰与其邻近暗点之间的角方位之差，即：

$$\Delta\theta_0\equiv\theta_1-\theta_0$$

其中，$\theta_0=0$，θ 满足单缝衍射零点条件：

$$a\sin\theta_1=1\cdot\lambda\Longrightarrow\theta_1\approx\sin\theta_1=\frac{\lambda}{a}$$

于是：

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

半角宽度也叫衍射发散角。

（5）**单缝宽度的影响**

单缝宽度 a 影响半角宽度 $\Delta\theta_0$，也影响零级衍射峰光强 I_0

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

单缝宽度 a 越小，半角宽度 $\Delta\theta_0$ 越大，这意味着衍射波更加发散。

$$I_0=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

单缝宽度 a 越小，零级衍射峰光强 I_0 也越小。

（6）**波长的影响**

波长 λ 影响半角宽度 $\Delta\theta_0$，也影响零级衍射峰光强 I_0

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{a}$$

波长 λ 越大，半角宽度 $\Delta\theta_0$ 也越大，这就是说长波衍射效应更强烈。

$$I_0=\frac{(ab)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

波长 λ 越大，零级衍射峰光强 I_0 越小。

（7）**关于参考光程决定的相因子**

参考光程相因子 $e^{\mathrm{i}k_0L_0}$ 是场点 P 的函数，应当明确表示为 $e^{\mathrm{i}k_0L_0(P)}$

衍射反比律

$$\rho\cdot\Delta\theta\approx\lambda$$

其中，ρ 是限制波前的光孔在某方向的几何线度，$\Delta\theta$ 是衍射发散角。

圆孔夫琅禾费衍射

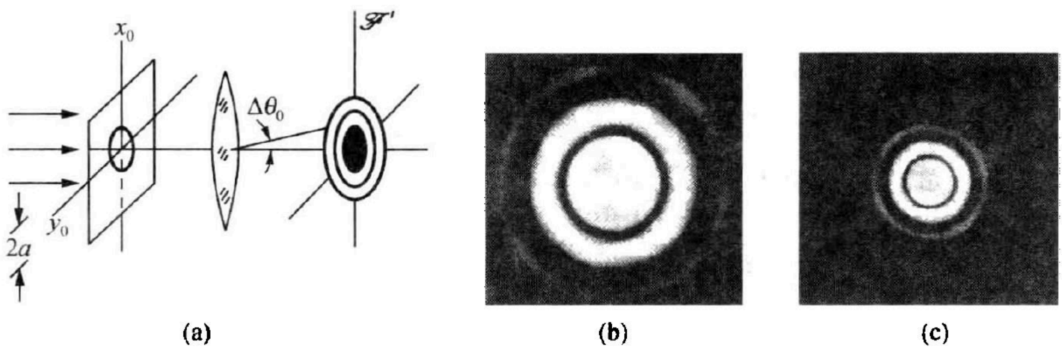


图 2.56　圆孔夫琅禾费衍射.(a) 实验装置,(b) 艾里斑(孔径 0.5 mm),(c) 艾里斑(孔径 1.0 mm)

$$\tilde{U}(\theta)=\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot 2\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x}$$

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{2\mathrm{J}_1(x)}{x}\right)^2$$

其中，

$$x=\frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda},\ \ I_0=\frac{(\pi a^2)^2}{(\lambda f)^2}A^2$$

其中，a 是圆孔半径，$\mathrm{J}_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数。

中心的那个亮斑称为**艾里斑**，I_0 是艾里斑中心强度。

一阶贝塞尔函数的第一个零点 x_0 的位置为：

$$x_0=1.22\pi$$

于是第一个暗环的角方位 θ_{10} 应满足：

$$\frac{2\pi a\sin\theta_{10}}{\lambda}=1.22\pi$$

圆孔直径记为 D，$D=2a$，于是：

$$\sin\theta_{10}=1.22\frac{\lambda}{D}$$

艾里斑的半角宽度：

$$\Delta\theta_0=\theta_{10}\approx1.22\frac{\lambda}{D}$$

或写为：

$$\boxed{D\Delta\theta_0 \approx 1.22\lambda}$$

瑞利判据

两个物点反映在像面上有两个艾里斑，设这两个艾里斑中心之角间隔为 $\delta\theta$, 每个艾里斑自身有个半角宽度 $\Delta\theta_0$, 瑞利提出的判据为：

$$\begin{gathered}\delta\theta > \Delta\theta_0\text{时，可分辨;}\\ \delta\theta < \Delta\theta_0\text{时，不可分辨}\\ \delta = \Delta\theta_0\text{时，给出可分辨的最小角间隔}\delta_m\end{gathered}$$

瑞利判据规定，当一个像斑中心恰好落在另一像斑边缘暗环时，确认两个像斑刚好可以分辨。

位移-相移定理

在一个夫琅禾费衍射系统中，当一图像位移时，其夫琅禾费衍射场将响应一个相移，两者的定量关系为：

$$\text{位移}(x_0, y_0) \leftrightharpoons \text{相移}(\delta_1, \delta_2)$$

$$\begin{gathered}\delta_1 = -kx_0\sin\theta_1\\ \delta_2 = -ky_0\sin\theta_2\end{gathered}$$

其中，θ_1, θ_2 标定了夫琅禾费衍射场点的位置。

有序结构的夫琅禾费衍射场

设一衍射屏含 N 个全同单元，它们取向有序但不一定规则排列，设其中心单元产生的夫琅禾费场为 $\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2)$, 其他单元相对中心单元的位移矢量分别为 $\vec{r}_j = (x_j, y_j)$，由位移-相移定理，相应的夫琅禾费场的相移量分别为：

$$\delta_{1j} = -kx_j\sin\theta_1$$

$$\delta_{2j} = -ky_j\sin\theta_2$$

于是这有序结构产生的夫琅禾费场的组成为：

$$\begin{cases}\tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2),\\ \tilde{u}_1(\theta_1, \theta_2) = \tilde{u}_0 \cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{11}+\delta_{21})},\\ \tilde{u}_2(\theta_1, \theta_2) = \tilde{u}_0 \cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{12}+\delta_{22})},\\ \tilde{u}_3(\theta_1, \theta_2) = \tilde{u}_0 \cdot e^{\mathrm{i}(\delta_{13}+\delta_{23})},\\ \qquad\qquad\vdots\end{cases}$$

根据波叠加原理，我们得到 N 个全同单元的有序结构产生的夫琅禾费衍射场的一般表达式为：

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=0}^{(N-1)} \tilde{u}_i = \tilde{u}_0 \sum_{i=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}(\delta_{1i}+\delta_{2i})}$$

上式中规定，$\delta_{10} = \delta_{20} = 0$

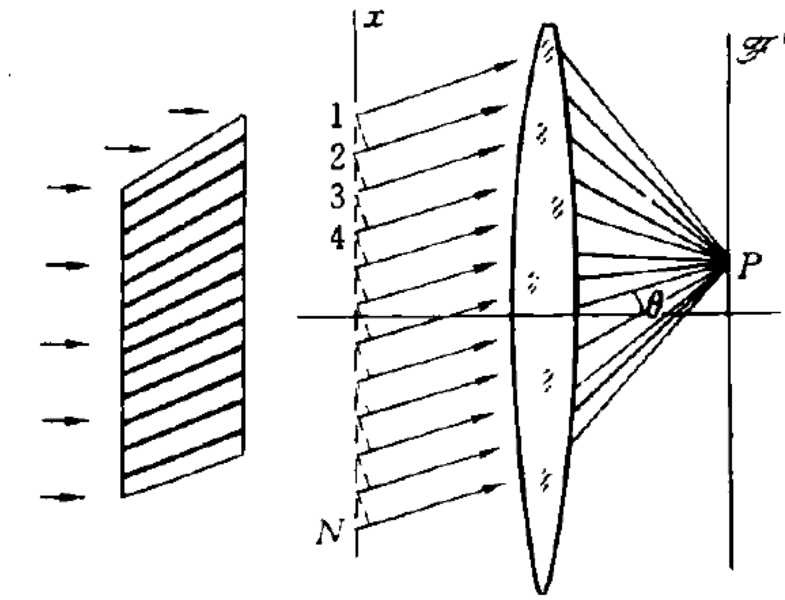
上式可以改写为：

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = \tilde{u}_0(\theta_1, \theta_2) \cdot \tilde{S}(\theta_1, \theta_2)$$

$$\tilde{S}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=0}^{N-1} e^{\mathrm{i}(\delta_{1i}+\delta_{2i})}$$

其中，$\tilde{u}_0$ 为单元衍射因子，简称其为**单元因子**或**形状因子**；$\tilde{S}(\theta_1, \theta_2)$ 为单元之间的干涉因子，简称为**结构因子**或**分布因子。**

一维光栅衍射



（a）多缝光栅　　（b）光程递增 $\Delta r=d\sin\theta$

光栅定义：凡含众多全同单元，且排列规则、取向有序的周期结构，统称为光栅（grating）

设一个一维多缝光栅透光的缝宽为 a，挡光的缝宽为 b，光栅的空间周期 d 定义为 $a+b$，亦称为**光栅常数**。单元密度定义为 $\frac{1}{d}$，光栅的有效长度记为 D，则这块光栅含单元总数为：

$$N=\frac{D}{d}$$

一维光栅的单元因子

一维光栅的基本单元就是宽度为 a，长度为 b 的狭缝，其单元因子为：

$$\tilde{u}_0=\tilde{c}e^{\mathrm{i}k_0L_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

一维光栅的结构因子

自上而下将 N 个单元依次编号为 $1,2,\cdots,N$. 对于一位光栅，单元的位移仅沿 x 方向，相邻单元之间的位移量恒为 d，相应的夫琅禾费场的相移量依次为 $\delta=kd\sin\theta$，于是，一位光栅夫琅禾费衍射场的结构因子为：

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\theta)&=\sum_{i=1}^{N}(1+e^{\mathrm{i}\delta}+e^{\mathrm{i}(2\delta)}+e^{\mathrm{i}(3\delta)}+\cdots+e^{\mathrm{i}(N-1)\delta})\\&=\frac{1-e^{\mathrm{i}N\delta}}{1-e^{\mathrm{i}\delta}},\ \ \delta=kd\sin\theta\end{aligned}$$

利用公式：

$$1-e^{\mathrm{i}\varphi}=-2\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{\varphi}{2})}$$

结构因子可进一步表达为：

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\theta)&=\frac{1-e^{\mathrm{i}N\delta}}{1-e^{\mathrm{i}\delta}}\\&=-2\mathrm{i}\sin(\frac{N\delta}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{N\delta}{2})}\Big/-2\mathrm{i}\sin(\frac{\delta}{2})\cdot e^{\mathrm{i}(\frac{\delta}{2})}\\&=e^{\mathrm{i}(N-1)\beta}\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right),\ \ \beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\end{aligned}$$

于是一维光栅的夫琅禾费场为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\theta) &= \tilde{u}_0(\theta) \cdot \tilde{S}(\theta) \\
&= \tilde{c} e^{\mathrm{i} k_0 L_0} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot e^{\mathrm{i}(N-1)\beta} \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)
\end{aligned}
$$

把 $e^{\mathrm{i} k_0 L_0}$ 吸收到 $\tilde{c}$ 中，得：

$$
\tilde{U}(\theta) = \tilde{c}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right) e^{\mathrm{i}(N-1)\beta}
$$

其中，

$$
\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}
$$

衍射强度分布为：

$$
I(\theta) = \tilde{U}\tilde{U}^* = i_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2
$$

上式中，i_0 是单缝衍射零级中心即几何像点处的衍射光强，$(\sin\alpha/\alpha)^2$ 称为**强度单元因子**，$(\sin N\beta/\sin\beta)^2$ 称为**强度结构因子。**

一维光栅结构因子的主要特征

（1）主峰（主极强位置）

$$
\beta = j\pi \Longrightarrow d\sin\theta_j = j\lambda, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots
$$

此时：

$$
\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = N^2
$$

$$
I(\theta_j) = N^2 \cdot (\theta_j)
$$

（2）主峰的半角宽度

第 j 级主峰，其左右相邻的两个暗点的位置满足：

$$
d\sin(\theta_j \pm \Delta\theta) = (k \pm \frac{1}{N})\lambda \Longrightarrow d\cos\theta_j \cdot \Delta\theta = \frac{\lambda}{N}
$$

第 j 级主峰的半角宽度：

$$
\Delta\theta_j = \frac{\lambda}{N d \cos\theta_j}
$$

（3）两个主峰之间

（4）单元因子作用

$$
d\sin\theta_j = j\lambda
$$

$$
a\sin\theta_{j'} = j'\lambda
$$

$$
\frac{j}{j'} = \frac{d}{a}
$$

出现缺级现象

第5章 光的偏振

基本概念

光的宏观偏振态

光的宏观偏振态分为五种：线偏振光、自然光、部分偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光

线偏振光

光矢量 $\vec{E}(t)=\vec{A}\cos\omega t$

分量表示为：

$$E_x=A_x\cos\omega t,\ \ E_y=A_y\sin\omega t$$

若两个正交振动之间的相位差 $\delta=0$，则线偏振于一、三象限；

若两个正交振动之间的相位差 $\delta=\pm\pi$，则线偏振于二、四象限

自然光

自然光是大量的、不同取向的、彼此无关的、无特殊优越取向的线偏振光的集合。

部分偏振光

部分偏振光与自然光的区别仅在于部分偏振光不具有轴对称性，存在一优越方向。

圆偏振光

圆偏振光的光矢量 $\vec{E}(t)$ 随时间仅改变方向而不改变大小，即光矢量端点的轨迹是一圆周。

圆偏振光可表示为：

$$\vec{E}(t)=E_x(t)\vec{e}_x+E_y(t)\vec{e}_y$$

其中，

$$E_x(t)=A\cos\omega t,\ \ E_y(t)=A\cos(\omega t\pm\frac{\pi}{2})$$

当相位差 $\delta=\frac{\pi}{2}$，合成结果为右旋偏振光（顺时针）；

当相位差 $\delta=-\frac{\pi}{2}$，合成结果为左旋偏振光（逆时针）；

正椭圆偏振光

正椭圆偏振光与圆偏振光的区别在于，椭圆偏振光光矢量的两个正交振动分量的振幅不同。

$$\vec{E}(t)=E_x(t)\vec{e}_x+E_y(t)\vec{e}_y$$

其中，

$$E_x(t)=A_x\cos\omega t,\ \ E_y(t)=A_y\cos(\omega t\pm\frac{\pi}{2}),\ \ A_x\neq A_y$$

斜椭圆偏振光

斜椭圆偏振光与正椭圆偏振光的区别在于，斜椭圆偏振光两个正交振动的相位差 $\delta\neq\pm\frac{\pi}{2}$

$$\vec{E}(t)=E_x(t)\vec{e}_x+E_y(t)\vec{e}_y$$

其中，

$$E_x(t)=A_x\cos\omega t,\ \ E_y(t)=A_y\cos(\omega t+\delta),\ \ A_x\neq A_y,\ \ \delta\neq\pm\frac{\pi}{2}$$

一条公式概括三种偏振光

设光矢量的两个正交振动为：

$$\begin{cases}E_x(t)=A_x\cos\omega t\\E_y(t)=A_y\cos(\omega t\pm\delta)\end{cases}$$

当 $\delta=0,\pi$ 时，$\rightarrow$ 线偏振光

当 $\delta=\pm\frac{\pi}{2},A_x=A_y$ 时，$\rightarrow$ 圆偏振光

当 $\delta=\pm\frac{\pi}{2},A_x\neq A_y$，$\rightarrow$ 正椭圆偏振光

马吕斯定律

$$I_P(\alpha) = I_0 \cos^2 \alpha$$

其中，$I_0 = A_0^2$ 为入射光强，α 是入射线偏振光的偏振方向与偏振片透振方向的夹角，$I_p(\alpha)$ 是透射光强。

偏振度

偏振态	直接通过偏振片，旋转偏振片观察光强	先通过1/4波片，再通过偏振片，旋转偏振片观察光强
自然光	光强不变	光强不变
圆偏振光	圆偏振光	光强改变，出现消光
线偏振光	光强改变，出现消光	
部分偏振光	光强改变，不消光	光强改变，不消光
椭圆偏振光	光强改变，不消光	光强改变，出现消光

菲涅耳公式

菲涅尔公式成立条件

绝缘介质、各向同性介质、弱场或线性介质、光频段

菲涅尔公式

p 振动：平行入射面

s 振动：垂直入射面

$$\begin{aligned}
\tilde{E}'_{1p} &= \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \tilde{E}_{1p} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \tilde{E}_{1p} \\
\tilde{E}_{2p} &= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \tilde{E}_{1p} \\
\tilde{E}'_{1s} &= \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \tilde{E}_{1s} = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)} \tilde{E}_{1s} \\
\tilde{E}_{2s} &= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \tilde{E}_{1s} = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)} \tilde{E}_{1s}
\end{aligned}$$

布儒斯特角

布儒斯特角：使 p 光的光强反射率 $R_p = 0$ 的特殊角入射 i_B 称为布儒斯特角。此时反射光只有 s 分量，是线偏振光。

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

光在晶体中的传播

晶体的分类

若按光学性质分类，晶体可分为：

（1）单轴晶体：只有一个光轴方向

（2）双轴晶体：有两个光轴方向

（3）立方晶系：各向同性

双折射基本物理量

满足通常各向同性介质中折射定律的光称为**寻常光**，简称为 o 光。

不服从通常折射定律的光称为**非常光**，简称为 e 光。

若入射光为自然光，则两束透射光是线偏振光，且偏振方向不同。

光轴：晶体中存在一个特殊方向，光沿这个方向在晶体中传播时不发生双折射，此特殊方向称为晶体的**光轴**.

主截面：由晶体表面的法线 $\vec{N}_s$ 和晶体内部的光轴 $\vec{z}$ 组成的平面称为晶体**主截面**

入射面：由入射光线方向 $\vec{r}_1$ 和晶体表面法线 $\vec{N}_s$ 组成的平面称为入射面

主平面：晶体中**光线**与**光轴**组成的平面称为**主平面**.

实验发现，当入射面与主截面重合时，e 光偏折仍在入射面内；当入射面与主截面不重合时，e 光射线就可能不在入射面内。

o 光和 e 光的判断方法

o 振动的光矢量 $\vec{E}_o(t) \perp$ 主平面$(\vec{r}, \vec{z})$;

e 振动的光矢量 $\vec{E}_e(t) \parallel$ 主平面 $(\vec{r}, \vec{z})$

o 光和 e 光波面的传播性质

o 振动的传播具有各向同性，o 光波面为球面 $\Sigma_o(t)$，传播速度为 v_o, 与传播角度无关。

e 振动的传播具有各向异性，e 光波面为旋转椭球面，其转轴为光轴。

o 光和 e 光的波面相切于光轴

传播方向角：光在晶体中的传播方向与光轴的夹角，常记为 ξ

e 光波面传播速度 $v_e(\xi)$ 与方向角 ξ 有关：

$$v_e(\xi) = \begin{cases} v_o & ,当\xi = 0 \\ v_e & ,当\xi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$n_o = \frac{c}{v_o},\ \ n_e = \frac{c}{v_e}$$

对于其他传播方向，e 光速度介于 v_o 和 v_e 之间，即 e 光的折射率介于 n_o 和 n_e 之间.

负晶体：$v_o \leqslant v_e(\xi) \leqslant v_e, \quad n_e \leqslant n_e(\xi) \leqslant n_o$

正晶体：$v_e \leqslant v_e(\xi) \leqslant v_o, \quad n_o \leqslant n_e(\xi) \leqslant n_e$

负晶体，e 光为快光，o 光为慢光

正晶体，e 光为慢光，o 光为快光

晶体中的惠更斯作图法

见教材

三个棱镜双折射作图

尼科尔棱镜、罗雄棱镜、沃拉斯顿棱镜和期末双折射那道题

波晶片

波晶片：厚度均匀且光轴平行入射表面的薄片，用于产生和检验圆偏振光或椭圆偏振光

设一束平行光正入射，表观上不出现双折射，但两个特征振动 $\vec{E}_o(t)$ 和 $\vec{E}_e(t)$ 的传播速度分别为 v_o 和 v_e，相应的折射率分别为 n_o 和 n_e。虽然两者通过的路程相等，但光程却不等，$\vec{E}_o(t)$ 与 $\vec{E}_e(t)$ 之间将产生一附加相位差 δ'

若入射的是一束偏振光，其真空中的波长为 λ_0，设在波晶片入射点 A 处 $\vec{E}_o(t), \vec{E}_e(t)$ 的相位分别为 $\varphi_o(A)$ 和 $\varphi_e(A)$，而到达出射点 B 处这两个正交振动的相位为：

$$\varphi_o(B) = \varphi_o(A) - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o d$$

$$\varphi_e(B) = \varphi_e(A) - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_e d$$

这两个正交振动在波晶片出射点 B 处的相位差为：

$$\varphi_o(B)-\varphi_e(B)=\varphi_o(A)-\varphi_e(A)+\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e-n_o)d$$

简写为：

$$\delta_{oe}(B)=\delta_{oe}(A)+\delta'_{oe}$$

其中，$\delta'_{oe}=\frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e-n_o)d$

（1）四分之一波晶片

$$\delta'_{oe}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad k=0,1,2\cdots$$

对于正晶体制成的 $\frac{\lambda}{4}$ 片，因为 $n_e>n_o$，故有：

$$\delta'_{oe}=\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi,\cdots$$

对于负晶体制成的 $\frac{\lambda}{4}$ 片，因为 $n_e<n_o$，故有：

$$\delta'_{oe}=-\frac{1}{2}\pi,-\frac{3}{2}\pi,-\frac{5}{2}\pi,\cdots$$

$\frac{\lambda}{4}$ 片所提供的有效相位差为：

$$\delta'_{oe}=\pm\frac{\pi}{2}$$

$\frac{\lambda}{4}$ 片的厚度应该满足以下条件：

$$d=(2k+1)\frac{\lambda_0}{4\Delta n}$$

其中，$\Delta n=|n_e-n_o|$

其厚度最小值为：

$$d_m=\frac{\lambda_0}{4\Delta n}$$

（2）二分之一波晶片

产生的附加相位差满足：

$$\delta'_{oe}=\pm(2k+1)\pi$$

有效相位差为：

$$\delta'_{oe}=\pi$$

对正负晶体均为此值

$\frac{\lambda}{2}$ 片的厚度 d 满足：

$$d=(2k+1)\frac{\lambda_0}{2\Delta n}$$

其中，$\Delta n=|n_e-n_o|$

厚度最小值为：

$$d_m=\frac{\lambda_0}{2\Delta n}$$

（3）全波晶片（λ 片）：

附加相位差满足：

$$\delta'_{oe}=\pm 2k\pi,\quad k=1,2,3,\cdots$$

厚度满足：

$$d = k\frac{\lambda_0}{\Delta n}$$

其中，$\Delta n = |n_e - n_o|$

厚度最小值为：

$$d_m = \frac{\lambda_0}{\Delta n}$$

通过波晶片后的偏振态分析程序

（1）以波晶片光轴方向为基准，在光束的横平面上取定坐标架(xy)，x 轴表示 e 振动而 y 轴表示 o 振动

（2）以此坐标架为参考，确定光束在晶片入射点的相位差 $\delta_{oe}(A)$，并根据波晶片的种类确定附加相位差 $\delta'_{oe} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_e - n_o)d$

（3）根据 $\delta_{oe}(B) = \delta_{oe}(A) + \delta'_{oe}$ 计算出光在波晶片出射点的相位差 $\delta_{oe}(B)$，再借助解析几何知识判定出射光的偏振态

线偏振光入射于 $\frac{\lambda}{4}$ 片时，其出射光一般为正椭圆偏振光

当入射光的线偏振方位与 $\frac{\lambda}{4}$ 片光轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 时，出射光为圆偏振光，因为此时两个正交振动的振幅相等。

当入射光的线偏振方位平行或垂直波晶片光轴时，出射光依然为线偏振光且偏振方向不变，这时波晶片提。供的附加相位差不起作用，因为两个正交振动之一的振幅为零

第6章 吸收、色散和散射

介质对光的吸收：光的强度随传播距离而减少的现象

光的散射：介质的不均匀性将导致光的散射

色散：介质中光速与光频或光波长有关

吸收

色散

散射