

1

(A) 柯西-黎曼条件:

设复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 若 $f(z)$ 在 z 点可导, 则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是柯西-黎曼条件(C-R条件)

(B) 留数定理:

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_k 外解析, 则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 z_1, z_2, \dots, z_k 的留数之和乘 $2\pi i$, 即:

$$\oint_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res} f(z_j)$$

(C) 泰勒级数和洛朗级数的区别:

泰勒级数:

设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点, 以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内, 则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中, 展开系数为:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

洛朗级数:

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心, 半径为 R_1, R_2 的两个圆周 C_1, C_2 所包围的环形区域, $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 上解析, 则在此区域内 $f(z)$ 可展成洛朗级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线

区别:

泰勒级数要求 $f(z)$ 在整个圆周 C 内解析, 而洛朗级数只要求在圆周 C_1, C_2 间的环形区域解析;

洛朗级数的幂项的次数从 $-\infty$ 到 ∞ , 而泰勒级数的幂项次数从 0 到 ∞ ;

泰勒级数的系数可以由求导数求得, 也可以由回路积分求得, 但洛朗级数的系数只能由回路积分求得。

(D) 傅里叶变换:

若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的实函数, 它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件, 且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 则:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{ikx} dk$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \equiv C(k)$$

其中, $\mathcal{F}\{f(x)\}(k) \equiv C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换

(E) 拉普拉斯变换:

对于定义在实变数 $t \in [0, +\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$, 定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) \equiv F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

其中, $p = s + i\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$

(F) 自然边界条件:

所求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上, 都是有界的, 不发散的, 即:

$$|u| < +\infty$$

2

已知解析函数的实部 $u = x^3 - 3xy^2$, 求该解析函数。

方法1（积分法）

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

$$\mathrm{d}v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \quad (1)$$

选择积分路径为： $\underbrace{(0, 0) \rightarrow (x, 0)}_{C_1}, \underbrace{(x, 0) \rightarrow (x, y)}_{C_2}$ ，两边积分：

$$\begin{aligned} v(x, y) - v(0, 0) &= \int_{C_1} 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y + \int_{C_2} 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y} (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3x^2y - y^3 \end{aligned}$$

令 $v(0, 0) = C$ ，则

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + v(0, 0) = 3x^2y - y^3 + C$$

于是：

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C) \end{aligned}$$

方法2（微分法，类似于热统里导出熵的统计表达式）

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3y\mathrm{d}(x^2) + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3[\mathrm{d}(x^2y) - x^2\mathrm{d}y] + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3\mathrm{d}(x^2y) - 3y^2\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(3x^2y) - \mathrm{d}(y^3) \\ &= \mathrm{d}(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

于是：

$$v = 3x^2y - y^3 + C$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u + \mathrm{i}v \\ &= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + C) \end{aligned}$$

3

求 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ 分别在 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = 1$ 附近的展开式。

$f(z)$ 在 $z_1 = 0$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z - 0| < 1$, 于是:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{1}{1-z} - z^{-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n \end{aligned}$$

$f(z)$ 在 $z_2 = 1$ 附近的展开式:

由于 $0 < |z - 1| < 1$, 于是:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\ &= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)} \\ &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \\ &= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\ &= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \end{aligned}$$

计算回路积分 $I = \oint_{l^+} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$ ，其中回路 l 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

$$\text{令 } f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2}$$

在回路 $l: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$ 内的孤立奇点有: $z_1 = i, z_2 = 1$, z_1 为一阶极点, z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned} \text{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^0}{dz^0} (z - i) \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2i(i - 1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^1}{dz^1} (z - 1)^2 \cdot \frac{1}{(z + i)(z - i)(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned} I &= \oint_l \frac{dz}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} \\ &= 2\pi i [\text{Res}f(z_1) + \text{Res}f(z_2)] \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

5

计算定积分: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta$

$$z = e^{i\theta}, \quad z^{-1} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta \implies d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

设 C 是复平面上的单位圆,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} \end{aligned}$$

令 $f(z) = \frac{1}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$, $f(z)$ 有两个一阶极点 $z_1 = 2 - i, z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 只有 z_2 在单位圆 C 内。

由于 z_1, z_2 是 $(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i = 0$ 的两根, 于是 $f(z)$ 可表达为:

$$f(z) = \frac{1}{(1 - 2i)(z - z_1)(z - z_2)}$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d^0}{dz^0} (z - z_2) f(z) \\ &= \frac{1}{(1 - 2i)(z_2 - z_1)} \\ &= \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

于是由留数定理:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} &= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_2) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

于是:

6

用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程, 其中 L, R, E 为常数:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设 $i(t) \doteq F(p)$

微分定理给出:

$$\frac{di(t)}{dt} \doteq p^1 F(p) - p^0 i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \text{or} \quad 1 \doteq \frac{1}{p}$$

对方程 $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换, 得:

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L} \right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演:

$$\frac{1}{p - \alpha} \doteq e^{\alpha t}$$

于是:

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \quad \frac{1}{p + R/L} \doteq e^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L} \right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

7

在半径 $r = r_0$ 的球内求解 $\nabla^2 u = 0$ ，使满足边界条件 $u \Big|_{r=r_0} = \sin^2 \theta$

边界条件与方位角 φ 无关，因此所求应也与 φ 无关：

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

由自然边界条件，球心 $r = 0$ 处场量不应发散：

$$|u(r, \theta)| \Big|_{r=0} < +\infty$$

因此 $-r^{(l+1)}$ 项必须舍弃，即、：

$$B_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

于是：

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

考虑边界条件 $u \Big|_{r=r_0} = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ，注意到：

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta) = 1 \\ P_1(\cos \theta) = \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{cases} \implies 1 - \cos^2 \theta = \frac{2}{3} [P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)]$$

因此：

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = \frac{2}{3} [P_0(\cos \theta) - P_2(\cos \theta)]$$

把边界条件整理成以 $\cos \theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$ 的线性叠加的形式:

$$\left(A_0 - \frac{2}{3}\right) P_0(\cos \theta) + A_1 r_0 P_1(\cos \theta) + \left(A_2 r_0^2 + \frac{2}{3}\right) P_2(\cos \theta) + \sum_{l=3}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性, 它们的线性叠加为零, 当且仅当所有线性叠加系数为零, 即:

$$A_0 - \frac{2}{3} = 0, A_1 = 0, A_2 r_0^2 + \frac{2}{3} = 0, A_3 = A_4 = \cdots = 0$$

解得:

$$A_0 = \frac{2}{3}, A_1 = 0, A_2 = -\frac{2}{3r_0^2}, A_3 = A_4 = \cdots = 0$$

于是:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3r_0^2} r^2 P_2(\cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{r^2}{3r_0^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

8

求定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x \Big|_{x=0} = 0 \\ u_x \Big|_{x=l} = 0 \\ u \Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设:

$$u(x, t) = U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 可得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \implies T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$T'(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0 \implies T'(t) \Big|_{t=0} = 0 \implies B = 0$$

因此:

$$T(t) = A \cos \omega t$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \implies U(x) = C \cos kx + D \sin kx$$

$$U'(x) = -kC \sin kx + kD \cos kx$$

$$u_x \Big|_{x=0} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=0} = 0 \implies D = 0$$

因此:

$$U(x) = C \cos kx, \quad U'(x) = -kC \sin kx$$

$$u_x \Big|_{x=l} = 0 \implies U'(x) \Big|_{x=l} = 0 \implies -kC \sin kl = 0$$

因此, k 的本征值 k_n 为:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$n = 0$ 是平庸解, 不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为:

$$U_n(x) = \cos k_n x = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

由 $k \equiv \omega/a$, 得 ω 的本征值 ω_n 为:

$$\omega_n = ak_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为:

$$T_n(t) = \cos \omega_n t = \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

本征解 $u_n(x, t)$ 为:

$$u_n(x, t) = U_n(t)T_n(t) = \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

定解问题的通解 $u(x, t)$ 为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{n\pi a}{l} t \right)$$

最后结合初始条件

$$u \Big|_{t=0} = \cos \left(\frac{\pi x}{l} \right)$$

得到:

$$E_1 = 1, E_2 = E_3 = \dots = 0$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x, t) = \cos \left(\frac{\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{\pi a}{l} t \right)$$

9

半径为 a 的导体球接地, 在距球心为 b 的地方放置一点电荷, $b > a$, 电荷量为 q , 求导体球外的电势分布。

选取 z 轴使得点电荷的位矢为 $b\vec{e}_z$, 则球外电势 u 具有 z 轴对称性, 即 $u = u(r, \theta)$

点电荷会在接地导体球表面激发出感应电荷。根据电势叠加原理, 导体球外的电势 u 是感应电荷单独存在时产生的电势 u_r 与点电荷单独存在时的电势 u_q 之和:

$$u = u_r + u_q$$

考虑点电荷单独存在时在球外产生的电势 u_q , 由余弦定理, 场点 \vec{r} 到点电荷 q 的距离 r' 满足:

$$r' = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}$$

点电荷 q 在 \vec{r} 处产生的电势 u_q 满足:

$$\begin{aligned}
u_q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{q}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}}, \quad r > a
\end{aligned}$$

根据勒让德多项式的母函数的相关知识,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l & , \quad r/b < 1, \quad r < b \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & , \quad r/b > 1, \quad r > b \end{cases}$$

因此点电荷产生的电势分布 u_q 可展为:

$$\begin{aligned}
u_q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/b)^2 - 2(r/b) \cos \theta}} \\
&= \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l & , \quad a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} & , \quad r > b \end{cases}
\end{aligned}$$

再考虑感应电荷单独存在时在球外产生的电势 u_r , 此时球外没有电荷, 因此球外的电势分布 u_r 满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u_r(r, \theta) = 0, \quad r > a$$

套用结论, 轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为:

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

在无穷远处, 电势 u_r 应趋于零:

$$u_r \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 0$$

可得:

$$A_l = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

因此：

$$u_r(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

考虑点电荷和感应电荷产生的总电势 $u(r, \theta)$ ，形式上可写为：

$$u(r, \theta) = u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & , a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{r}{b}\right)^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) & , r > b \end{cases}$$

导体球接地给出边界条件：

$$u(r, \theta) \Big|_{r=a} = 0$$

即：

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{a}{b}\right)^l + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) = 0$$

整理成以 $\cos \theta$ 为自变量的各阶勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$ 的线性叠加的形式：

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{qa^l}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得：

$$\frac{qa^l}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}} + B_l a^{-(l+1)} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

解得：

$$B_l = -\frac{qa^{2l+1}}{4\pi\epsilon_0 b^{l+1}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

因此：

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)
\end{aligned}$$

注意到, $r > a, b > a$, 于是有:

$$\frac{br}{a^2} > 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2) \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)}, \quad \frac{br}{a^2} > 1$$

ps: 注意不到也没事, 只不过最终答案可能看起来复杂点。

因此, 感应电荷在导体球外产生的电势 $u_r(r, \theta)$ 实际上可写为:

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2) \cos \theta}}, \quad r > a
\end{aligned}$$

最终得到导体球外的电势分布 $u(r, \theta)$:

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= u_q(r, \theta) + u_r(r, \theta) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{\sqrt{1 + (br/a^2)^2 - 2(br/a^2) \cos \theta}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-aq/b}{\sqrt{(a^2/b)^2 + r^2 - 2(a^2/b) r \cos \theta}}
\end{aligned}$$

可以看到, 感应电荷在导体球外产生的电势与一个处于 z 轴正半轴距球心 $b' = a^2/b$ 处电荷量为 $Q' = -aq/b$ 的点电荷相同。

10

求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标, 设 $u(\rho, \varphi, t)$ 是 t 时刻 ρ, φ 处质点偏离平衡位置的位移, 则 $u(\rho, \varphi, t)$ 满足二维波动方程:

$$u_{tt}(\rho, \varphi, t) - a^2 \nabla_{(2)}^2 u(\rho, \varphi, t) = 0$$

其中, $\nabla_{(2)}^2$ 是二维拉普拉斯算子:

$$\nabla_{(2)}^2 \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设 $u(\rho, \varphi, t)$ 可分离变量为:

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得:

$$U(\rho, \varphi)T''(t) - a^2 T(t) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = 0$$

上式两边同时除以 $U(\rho, \varphi)T(t)$, 再移项, 得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$$

注意到, $\frac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关, 而 $\frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi)$ 只与 ρ, φ 有关, 二者相等, 因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{a^2}{U(\rho, \varphi)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho, \varphi) = -\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式, 因此只需要关注空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\frac{U(\rho, \varphi)}{a^2}$ 并移项, 得:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U(\rho, \varphi) = 0$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho, \varphi)$ 满足的方程为:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0$$

由于圆形膜边界固定, 因此得到一个边界条件:

$$U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho, \varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0 \\ U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \\ |U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \\ U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \end{cases}$$

设 $U(\rho, \varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho, \varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\varphi) = 0$$

上式等号两边同乘 $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$ ，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$ ：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = - \left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \implies R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \implies \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

可得：

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 \right] = -m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

令 $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho) \Big|_{\rho=x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$, 则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

$$U(\rho, \varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho) \Phi(\varphi) \Big|_{\rho=b} = 0 \implies R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0$$

$$|U(\rho, \varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho) \Phi(\varphi)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \implies |R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \\ y(x) \equiv R(\rho) \Big|_{\rho=x/k} = R(x/k), \quad R(\rho) = y(x) \Big|_{x=k\rho} = y(k\rho) \\ R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0 \\ |R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty \end{array} \right.$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

其通解为：

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x) + D_m N_m(x)$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)| \Big|_{\rho=0} < +\infty$ ，可得：

$$D_m = 0$$

因此：

$$y^{(m)}(x) = C_m J_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件：

$$y^{(m)}(x) \Big|_{x=k\rho} = C_m J_m(x) \Big|_{x=k\rho}$$

结合 $x = k\rho$, $R(\rho) = y(x) \Big|_{x=k\rho} = y(k\rho)$ 可得：

$$R^{(m)}(\rho) = C_m J_m(k\rho)$$

设 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$ ，即：

$$J_m \left(x_n^{(m)} \right) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

结合边界条件 $R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0$ ，即：

$$C_m J_m(kb) = 0$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为：

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$R_n^{(m)}(\rho) = J_m \left(k_n^{(m)} \rho \right) = J_m \left(\frac{x_n^{(m)}}{b} \rho \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

再根据 $k \equiv \omega/a$, 得到 ω 的本征值, 即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$\omega_n^{(m)} = a k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

综上所述, 边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$R_n^{(m)}(\rho) = J_m \left(\frac{x_n^{(m)}}{b} \rho \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

其中, $x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个正零点。