第7章 交流电

基本概念

交流电路

在一个电路里,若电源的电动势 e(t) 随时间做周期性变化,则各段电路中的电压 u(t) 和 i(t) 都将随时间做周期性变化,这种电路叫作**交流电路**。

任何非简谐的交流电都可分解为一系列不同频率的简谐成分。 (周期函数展成傅里叶级数)

简谐交流电的任何变量 [电动势 e(t)、电压 u(t)、电流 i(t)]都可以写成时间 t 的正弦或余弦函数的形式,我们采用余弦函数的形式:

$$\left\{egin{aligned} e(t) &= \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + arphi_e) \ u(t) &= U_0 \cos(\omega t + arphi_u) \ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + arphi_i) \end{aligned}
ight.$$

峰值

与机械简谐振动的振幅相对应,每个交变简谐量都有自己的幅值,或称峰值。

 \mathcal{E}_0 : 电动势的峰值

 U_0 : 电压的峰值

 I_0 : 电流的峰值

相位

 $\omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_i$ 称为相位; 其中, $\varphi_e, \varphi_u, \varphi_i$ 称为初相位

交流电路中的元件

交流电路中某个元件的特性用两个物理量,**阻抗** Z 和**相位差** φ 来描述(相位差指电压**与**电流的相位差,其中,"与"是个介词)

阻抗和相位差

设一个元件两端电压和流过这个元件的电流分别为:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$$

 $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$

则这个元件的阻抗,记为Z,定义为:

$$Z\equiv rac{U_0}{I_0}=rac{U_0/\sqrt{2}}{I_0/\sqrt{2}}=rac{U}{I}$$

这个元件的相位差,记为 φ ,定义为:

$$\varphi \equiv \varphi_u - \varphi_i$$

交流电路中的电阻的阻抗和相位差

$$Z_R = R$$

$$\varphi = 0$$

交流电路中的电容的阻抗和相位差

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$arphi \equiv arphi_u - arphi_i = -rac{\pi}{2}$$

电容元件的阻抗 Z_C 也称为**容抗**。从上式可看出,容抗与频率成反比。电容具有高频短路,直流开路的性质。 电容上,电压的相位落后于电流的相位 $\pi/2$

交流电路中的电感的阻抗和相位差

$$Z_L = \omega L$$
 $arphi \equiv arphi_u - arphi_i = rac{\pi}{2}$

电感元件的阻抗 Z_L 也称为**感抗**。电感元件具有阻高频、通低频的性质。

电感上,电压的相位超前电流的相位 $\pi/2$

矢量图解法

交流电路复数解法

复电压、复电流和复阻抗

交流电路中某元件上实际的电压和电流:

$$\left\{ egin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(\omega t + arphi_u) \ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + arphi_i) \end{aligned}
ight.$$

在此基础上可定义复电压和复电流:

$$\left\{ egin{aligned} ilde{U} &\equiv U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + arphi_u)} \ ilde{I} &\equiv I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + arphi_i)} \end{aligned}
ight.$$

其中, $i^2 = -1$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$ 易知,复电压和复电流与实际电压和实际电流的关系为:

$$\begin{cases} u(t) = \Re{\{\tilde{U}\}} \\ i(t) = \Re{\{\tilde{I}\}} \end{cases}$$

一段电路上的复阻抗,记为 \tilde{Z} , 定义为:

$$ilde{Z}\equivrac{ ilde{U}}{ ilde{ ilde{t}}}$$

其中, \tilde{U} 和 \tilde{I} 分别是这段电路上的复电压和复电流。

利用复电压和复电流的定义,复阻抗可进一步表达为:

$$egin{aligned} ilde{Z} &\equiv rac{ ilde{U}}{ ilde{I}} \ &= rac{U_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + arphi_u)}}{I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t + arphi_i)}} \ &= rac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(arphi_u - arphi_i)} \end{aligned}$$

再注意到, 之前定义了阻抗和相位差:

$$Z\equivrac{U_0}{I_0}, \ \ arphi\equivarphi_u-arphi_i$$

于是复阻抗可进一步表达为:

$$egin{aligned} ilde{Z} &= rac{U_0}{I_0} e^{\mathrm{j}(arphi_u - arphi_i)} \ &= Z e^{\mathrm{j}arphi} \end{aligned}$$

从上式可见,一个元件的复阻抗给出了此元件的阻抗和相位信息:

$$Z=| ilde{Z}|$$

$$arphi = rg ilde{Z}$$

电阻元件的复阻抗

$$Z_R = R, \ \varphi = 0$$

$$\tilde{Z}_R = R$$

电容元件的复阻抗

$$Z_C=rac{1}{\omega C}, \;\; arphi=-rac{\pi}{2}$$

$$ilde{Z}_C = rac{1}{\omega C} e^{-\mathrm{j}\pi/2} = rac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

电感元件的复阻抗

$$Z_L=\omega L, \;\; arphi=rac{\pi}{2}$$

$$ilde{Z}_L = \omega L e^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j}\omega L$$

串联电路复数解法

注意到,"取实部"操作 ℜ{·} 是线性操作,即:

$$\Re\{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2\} = \lambda_1 \Re\{z_1\} + \lambda_2 \Re\{z_2\}$$

对于实际电压 $u=U_0\cos(\omega+\varphi_u)$,其对应的复电压定义为 $\tilde{U}\equiv U_0e^{\mathrm{j}(\omega\mathrm{t}+\varphi_\mathrm{u})}$ 是有原因的。对复电压取实部后就能得到实际电压,即:

$$\Re\{\tilde{U}\}=u$$

对于串联电路, 总电压的瞬时值等于各段分电压之和:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

问题是,总电压对应的复电压 \tilde{U} 又如何用分电路的复电压 \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 表达?

类似地,总电压对应的复电压取实部后应得到实际的总电压,即 $ilde{U}$ 应满足

$$\Re\{\tilde{U}\}=u_1(t)+u_2(t)$$

注意到,若 $ilde{U}= ilde{U}_1+ ilde{U}_2$,则:

$$egin{aligned} \Re \{ ilde{U}\} &= \Re \{ ilde{U}_1 + ilde{U}_2 \} \ &= \Re \{ ilde{U}_1 \} + \Re \{ ilde{U}_2 \} \ &= u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

这就说明,我们的猜想:

$$ilde{U} = ilde{U}_1 + ilde{U}_2$$

是正确的。

再同时除以复电流 \tilde{I} 得到:

$$ilde{Z} = ilde{Z}_1 + ilde{Z}_2$$

$$egin{aligned} ilde{U} &= ilde{U}_1 + ilde{U}_2 \ \\ ilde{Z} &= ilde{Z}_1 + ilde{Z}_2 \end{aligned}$$

$$ilde{ ilde{Z}} = ilde{Z}_1 + ilde{Z}_2$$

并联电路复数解法

$$\left[ilde{I} = ilde{I}_1 + ilde{I}_2
ight]$$

$$oxed{rac{1}{ ilde{Z}}=rac{1}{ ilde{Z}_1}+rac{1}{ ilde{Z}_2}}$$