2.3-2.5

1

> 求 C_n 群的所有不等价不可约表示及特征标表。

C_n 群每个群元自成一类，因此 C_n 群共有 n 个不等价不可约表示。

又:

$$n=\underbrace{1^2+1^2+\cdot+1^2}_{n\text{个}1^2\text{相加}}$$

因此 C_n 群共有 n 个不等价不可约一维表示。

C_n 群第 u 个不等价不可约一维表示为:

$$D^{(u)}(C_n^m)=\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}um\right),\quad u=1,2,\cdots,n;\quad m=1,2,\cdots,n$$

特征标表:

	C_n^1	C_n^2	$\cdots$	$C_n^n=e$
$D^{(1)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$	$\cdots$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)=1$
$D^{(2)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 2\cdot 2\right)$	$\cdots$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot 2\cdot n\right)=1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$D^{(n)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)=1$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot n\cdot 2\right)=1$	$\cdots$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}\cdot n\cdot n\right)=1$

由于 C_n 群的所有不等价不可约表示都是一维的，因此 $\forall g_\alpha\in\mathrm{C}_n,\chi^{(u)}(g_\alpha)=D^{(u)}(g_\alpha)$，即特征标表就直接给出了 C_n 群的所有不等价不可约表示。

2

> 求 4 阶群的所有不等价不可约表示及特征标表。

4 阶群有两种结构，4 阶循环群和克莱因四元群。

四阶循环群

对于四阶循环群 C_4，由第一题可知:

C_4 群第 u 个不等价不可约一维表示为：

$$D^{(u)}\left(C_4^1\right)=\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}u\right),\quad u=1,2,3,4$$

特征标表：

	C_4^1	C_4^2	C_4^3	$C_4^4=e$
$D^{(1)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 2\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 3\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 4\right)=1$
$D^{(2)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 2\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 2\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 3\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 2\cdot 4\right)=1$
$D^{(3)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 3\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 2\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 3\right)$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 3\cdot 4\right)=1$
$D^{(4)}$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 4\right)=1$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 4\cdot 2\right)=1$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 4\cdot 3\right)=1$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{4}\cdot 4\cdot 4\right)=1$

由于 C_4 群的所有不等价不可约表示都是一维的，因此 $\forall g_\alpha\in\mathrm{C}_4,\chi^{(u)}(g_\alpha)=D^{(u)}(g_\alpha)$，即特征标表就直接给出了 C_4 群的所有不等价不可约表示。

克莱因四元群

乘法表为：

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_1	g_4	g_3
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_3	g_2	g_1

每个元素自成一类，共有 4 个类，因此共有 4 个不等价不可约表示。

由于：

$$n_G=4=1^2+1^2+1^2+1^2$$

因此共有 4 个一维不等价不可约表示。

$\{g_1=e,g_2\},\{g_1=e,g_3\},\{g_1=e,g_4\}$ 是克莱因四元群的三个指数为 2 的不变子群，因此可以找到 3 个非恒等一维不等价不可约表示，加上一维恒等表示，可以写出特征标表：

	$g_1=e$	g_2	g_3	g_4
$D^{(1)}$	1	1	1	1

	$g_1=e$	g_2	g_3	g_4
$D^{(2)}$	1	1	-1	-1
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1
$D^{(4)}$	1	-1	-1	1

由于克莱因四元群 G 的所有不等价不可约表示都是一维的，因此 $\forall g_\alpha \in G, \chi^{(u)}(g_\alpha) = D^{(u)}(g_\alpha)$，即特征标表就直接给出了克莱因四元群的所有不等价不可约表示。

3

> 谈谈你对正交定理的理解：
>
> $$\sum_\alpha D^{(u)*}_{\gamma\eta}(g_\alpha) D^{(v)}_{\lambda\rho}(g_\alpha) = \frac{n_G}{n_u}\delta^{uv}\delta_{\gamma\lambda}\delta_{\eta\rho}$$

求和是对 α 求和，即对所有群元求和，结合 $D^{(u)*}_{\gamma\eta}(g_\alpha)$ 中的复共轭，可以认为正交定理等号左侧是两个矢量的内积，这两个矢量分别为：

$$\begin{bmatrix} D^{(u)}_{\gamma\eta}(g_1) \\ D^{(u)}_{\gamma\eta}(g_2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D^{(v)}_{\lambda\rho}(g_1) \\ D^{(v)}_{\lambda\rho}(g_2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

等号右边有 3 个 δ 符号 $\delta^{uv}, \delta_{\gamma\lambda}, \delta_{\eta\rho}$，左边的内积不为零，当且仅当 $u=v, \gamma=\lambda, \eta=\rho$，这就是说，当表示不同、表示中矩阵元的位置不同时，两个矢量内积为零，即正交。

4

> 求 D_3 群和 D_4 群的所有不等价不可约表示及特征标表。

D_3 群

D_3 群有 $\{e\},\{d,f\},\{a,b,c\}$ 共 3 个类，因此共有 3 个不等价不可约表示。

由于：

$$n_G = 6 = 1^1 + 1^2 + 2^2$$

因此 D_3 群有 2 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

由于 $\{e,d,f\}$ 是 D_3 群的一个指数为 2 的不变子群，最后利用以类为表头的特征标表列向量的正交性可得：

	e	d	f	a	b	c
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	-1	0	0	0

容易求出 D_3 群的两个一维不等价不可约表示:

$$D^{(1)}(g_\alpha)=1, g_\alpha \in \{e,d,f,a,b,c,\}$$

$$D^{(2)}(g_\alpha)=1, g_\alpha \in \{e,d,f\}\,; \quad D^{(2)}(g_\beta)=-1, g_\beta \in \{a,b,c\}$$

对于 D_3 群的二维不等价不可约表示 $D^{(3)}$，考虑 $\mathbb{R}^2$ 表示空间，选取等边三角形的中心作为坐标原点，x 轴为 a 轴，容易得到:

$$D^{(3)}(e)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(d)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(f)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(a)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

对于 b 轴，考虑:

$$D^{(3)}(b)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(b)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因此:

$$D^{(3)}(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

对于 c 轴，考虑:

$$D^{(3)}(c)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}, \quad D^{(3)}(c)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因此:

$$D^{(3)}(b)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

D_4 群

D_4 群有 $\{e\}, \{C_4^2\}, \{C_4^1, C_4^3\}, \{\sigma_x, \sigma_y\}, \{\sigma_1, \sigma_2\}$ 共 5 个类，因此共有 5 个不等价不可约表示。

由于:

$$n_G = 8 = 1^2+1^2+1^2+1^2+2^2$$

因此 D_4 群有 4 个一维不等价不可约表示，1 个二维不等价不可约表示。

由于 $\left\{e, C_4^1, C_4^2, C_4^3\right\}, \left\{e, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\right\}, \left\{e, C_4^2, \sigma_1, \sigma_2\right\}$ 都是 D_4 群的指数为 2 的不变子群，最后利用以类为表头的特征标表列向量的正交性可得：

	e	C_4^1	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_y	σ_1	σ_2
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
$D^{(4)}$	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
$D^{(5)}$	2	0	-2	0	0	0	0	0

容易求出 D_4 群的四个不等价不可约一维表示：

$$D^{(1)}(g_\alpha) = 1, \quad g_\alpha \in \mathrm{D}_4$$

$$D^{(2)}(g_\alpha) = 1, \quad g_\alpha \in \left\{e, C_4^1, C_4^2, C_4^3\right\}; \quad D^{(2)}(g_\beta) = -1, \quad g_\beta \in \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_1, \sigma_2\}$$

$$D^{(3)}(g_\alpha) = 1, \quad g_\alpha \in \left\{e, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\right\}; \quad D^{(3)}(g_\beta) = -1, \quad g_\beta \in \left\{C_4^1, C_4^3, \sigma_1, \sigma_2\right\}$$

$$D^{(4)}(g_\alpha) = 1, \quad g_\alpha \in \left\{e, C_4^2, \sigma_1, \sigma_2\right\}; \quad D^{(4)}(g_\beta) = -1, \quad g_\beta \in \left\{C_4^1, C_4^3, \sigma_x, \sigma_y\right\}$$

对于 D_4 群的二维不等价不可约表示 $D^{(5)}$，考虑 $\mathbb{R}^2$ 表示空间，容易得到：

$$D^{(5)}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}\left(C_4^1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}\left(C_4^2\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}\left(C_4^3\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{(5)}(\sigma_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}(\sigma_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{(5)}(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

5

> 求 D_3 群的正则表示，并把该表示约化为不可约表示的直和。

$\mathrm{D}_3 = \{e, d, f, a, b, c\}$

设：

$$y = x_1 e + x_2 d + x_3 f + x_4 a + x_5 b + x_6 c$$

对于恒元 e，

$$D_{\mathrm{reg}}(e) = E_{6\times 6}$$

对于 d,

$$
\begin{aligned}
y' &= dy \\
&= x_1 de + x_2 dd + x_3 df + x_4 da + x_5 db + x_6 dc \\
&= x_1 d + x_2 f + x_3 e + x_4 c + x_5 a + x_6 b \\
&= \begin{bmatrix} d & f & e & c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e & d & f & a & b & c \end{bmatrix} D_{\text{reg}}(d) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此可得:

$$
D_{\text{reg}}(d) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

类似可得其他群元的正则表示矩阵:

$$
D_{\text{reg}}(f) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
D_{\text{reg}}(a) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$D_{\text{reg}}(b)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$D_{\text{reg}}(c)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

将 D_3 群的特征标表:

	e	d	f	a	b	c
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	1	-1	-1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	-1	0	0	0

	e	d	f	a	b	c
D_{reg}	6	0	0	0	0	0

由唯一分解定理，存在 X 使得:

$$X^{-1}D_{\text{reg}}(g_\alpha)X=\bigoplus_{u=1}^{r}a_uD^{(u)}(g_\alpha),\quad g_\alpha\in\mathrm{D}_3$$

其中，

$$a_u=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*_{\text{reg}}(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

计算 a_u:

$$a_1=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*_{\text{reg}}(g_\alpha)\chi^{(1)}(g_\alpha)=1$$

$$a_2=\frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*_{\text{reg}}(g_\alpha)\chi^{(2)}(g_\alpha)=1$$

$$a_3 = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*_{\mathrm{reg}}(g_\alpha)\chi^{(3)}(g_\alpha) = 2$$

因此 D_3 群的正则表示 D_{reg} 可约化为：

$$X^{-1}D(g_\alpha)X = D^{(1)}(g_\alpha)\oplus D^{(2)}(g_\alpha)\oplus 2D^{(3)}(g_\alpha)$$

其中，$D^{(1)}, D^{(2)}$ 是 D_3 群的两个一维不等价不可约表示，$D^{(3)}$ 是 D_3 的二维不等价不可约表示。

6

> 证明可约表示特征标矢量的内积满足：
>
> $$\sum_\alpha \chi^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha) \geqslant 2n_G$$

由唯一分解定理可知，可约表示 $D(G)$ 可以约化：

$$X^{-1}D(g_\beta)X = \bigoplus_{u=1}^{r} a_u D^{(u)}(g_\beta),\quad a_u = \frac{1}{n_G}\sum_{\alpha=1}^{n_G}\chi^*(g_\alpha)\chi^{(u)}(g_\alpha)$$

两边同时求迹：

$$\chi(g_\beta) = \sum_{u=1}^{r} a_u\chi^{(u)}(g_\beta)$$

因此可约表示特征标矢量的模方为：

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^{n_G}\chi^*(g_\beta)\chi(g_\beta) &= \sum_{\beta=1}^{n_G}\left(\sum_{u=1}^{r} a_u\chi^{(u)*}(g_\beta)\right)\left(\sum_{v=1}^{r} a_v\chi^{(v)}(g_\beta)\right)\\
&= \sum_{u=1}^{r}\sum_{v=1}^{r} a_u a_v \sum_{\beta=1}^{n_G}\chi^{(u)*}(g_\beta)\chi^{(v)}(g_\beta)\\
&= \sum_{u=1}^{r}\sum_{v=1}^{r} a_u a_v\cdot n_G\delta_{uv}\\
&= n_G\sum_{u=1}^{r} a_u\sum_{v=1}^{r} a_v\delta_{uv}\\
&= n_G\sum_{u=1}^{r} a_u^2\\
&\geqslant 2n_G
\end{aligned}$$

其中，最后一步的导出是因为 $a_u \geqslant 1$，且 $r \geqslant 2$

7

> 计算说明 n 阶群的 $[(n+1)/2]$ 维表示是否可能为不可约表示。（$[x]$ 代表 x 的整数部分）

当 $n=1$，1 阶群的 $[(1+1)/2]=1$ 维表示必定为不可约表示。

当 $n=2$，2 阶群的 $[(2+1)/2]=1$ 维表示必定为不可约表示。

当 $n=3$，3 阶群的 $[(3+1)/2]=2$ 维表示必定为可约表示，这是因为 3 阶群只有循环群一种结构，而循环群的所有不等价不可约表示都是一维的。

当 $n=4$，3 阶群的 $[(4+1)/2]=2$ 维表示必定为不可约表示，这是因为 4 阶群只有循环群和克莱因四元群这两种结构，而这两种群的所有不等价不可约表示都是一维的。

当 $n=2k+1, k\geqslant 2$，$n=2k+1$ 阶群的 $[(2k+1+1)/2]=k+1$ 维表示，

$$\sum_{\alpha=1}^{2k+1}\chi^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha)\geqslant|\chi(e)|^2=(k+1)^2$$

注意到，当 $k\geqslant 2$，

$$(k+1)^2-(2k+1)=k^2>0$$

因此：

$$\sum_{\alpha=1}^{2k+1}\chi^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha)>2k+1=n$$

当 $n=2k, k\geqslant 3$，$n=2k$ 阶群的 $[(2k+1)/2]=k$ 维表示，

$$\sum_{\alpha=1}^{2k}\chi^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha)\geqslant|\chi(e)|^2=k^2$$

注意到，当 $k\geqslant 3$，

$$k^2-2k>0$$

因此：

$$\sum_{\alpha=1}^{2k+1}\chi^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha)>2k=n$$

综上，当 $n\geqslant 5$ 时，n 阶群的 $[(n+1)/2]$ 维表示**不可能**为不可约表示。

8*

> 证明群 G 的一维非恒等表示和高维不可约表示相乘，还是 G 的不可约表示。

设 $D'(G)$ 是 G 的一维非恒等表示，$D''(G)$ 是 G 的高维不可约表示，$D(G)=D'(G)D''(G)$ 是它们相乘之后的表示，则有：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi'(g_\alpha)\right|^2=n_G,\quad \left|\chi'(g_\alpha)\right|^2=1,\quad \alpha=1,2,\cdots n_G$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi''(g_\alpha)\right|^2=n_G$$

注意到 $D'(g_\alpha)$ 是个数，因此：

$$\begin{aligned}\chi(g_\alpha)&\equiv\mathrm{Tr}\left(D(g_\alpha)\right)\\&=\mathrm{Tr}\left(D'(g_\alpha)D''(g_\alpha)\right)\\&=D'(g_\alpha)\mathrm{Tr}\left(D''(g_\alpha)\right)\\&=\chi'(g_\alpha)\chi''(g_\alpha)\end{aligned}$$

于是：

$$\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi(g_\alpha)\right|^2=\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi'(g_\alpha)\chi''(g_\alpha)\right|^2\quad=\sum_{\alpha=1}^{n_G}\left|\chi''(g_\alpha)\right|^2=n_G$$

因此，$D(G)=D'(G)D''(G)$ 还是 G 的不可约表示。

9*

> 证明 $\mathrm{D}_6=\mathrm{D}_3\otimes\mathrm{C}_2$

$\mathrm{D}_3=\{e,d,f,a,b,c\},\mathrm{C}_2=\left\{e,C_2^1\right\},\mathrm{D}_6=\left\{e,C_6^1,C_6^2,C_6^3,C_6^4,C_6^5,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\right\}$

由于 D_3 和 C_2 是 D_6 的子群，二者除恒元外无公共元素且两个子群的元素可对易，因此 D_3 可与 C_2 作内直积。

$$
\begin{aligned}
ee &= e \\
de &= C_6^2 \\
fe &= C_6^4 \\
ae &= \sigma_4 \\
be &= \sigma_2 \\
ce &= \sigma_6 \\
eC_2^1 &= C_6^3 \\
dC_2^1 &= C_6^5 \\
fC_2^1 &= C_6^1 \\
aC_2^1 &= \sigma_1 \\
bC_2^1 &= \sigma_5 \\
cC_2^1 &= \sigma_3
\end{aligned}
$$

综上，$\mathrm{D}_6 = \mathrm{D}_3 \otimes \mathrm{C}_2$