HHL算法及其应用

林照翔

2022级理论物理2班

(Dated: 2025 年 1 月 22 日)

1. 引言

HHL算法是由 Harrow, Hassidim 和 Lloyd 提出的一种求解量子线性系统的量子算法，其利用量子态的相干叠加与纠缠等特性实现稀疏线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的快速求解，与经典的线性方程组求解算法相比在特定情况下可以达到指数级加速。求解线性方程组是解决很多量子应用相关问题的基础，因此 HHL 算法是许多复杂量子算法的基本组成部分，且广泛应用于量子支持向量机、量子判别分析、量子线性回归、量子无监督学习、量子神经网络等量子机器学习算法中。在大数据时代，HHL 算法带来的加速收益相当可观。

2. HHL算法基本原理

A. 定义

一个线性系统问题(linear system problem, LSP)可以表述为

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

其中 A 是 $N_b\times N_b$ 厄米矩阵，$\vec{x},\vec{b}$ 是归一化的 N_b 维矢量，$N_b=2^{n_b}$。A 和 $\vec{b}$ 是已知的，而 $\vec{x}$ 待求解。

HHL 算法包含五个主要组成部分：初态制备、量子相位估计(quantum phase estimation, QPE)、辅助量子比特旋转、逆量子相位估计(inverse quantum phase estimation, IQPE) 和测量。

HHL 算法中，$\vec{b},\vec{x}$ 的 N_b 个分量编码为 n_b 个量子比特的振幅。这些量子比特称为 b-寄存器 $\left|\right\rangle_b$。

除此之外还有 c-寄存器 $\left|\right\rangle_c$，用于储存矩阵 A 在量子相位估计后得到的本征值。

最后一部分是辅助量子比特 $\left|\right\rangle_a$。

设厄米矩阵 A 的本征态和本征值分别为 $\{|u_i\rangle\}$ 和 $\{\lambda_i\}$，则 A 可进行谱分解

$$A=\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\lambda_i\left|u_i\right\rangle\left\langle u_i\right|$$

A 是对角的，因此容易得到 A^{-1}

$$A^{-1}=\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\lambda_i^{-1}\left|u_i\right\rangle\left\langle u_i\right|$$

$|b\rangle$ 可以表达为

$$|b\rangle=\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1}b_j\left|u_j\right\rangle$$

因此，由方程 $A\left|x\right\rangle=\left|b\right\rangle$ 有

$$|x\rangle=A^{-1}\left|b\right\rangle=\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\lambda_i^{-1}b_i\left|u_i\right\rangle$$

由于 $\left|x\right\rangle,\left|b\right\rangle$ 是归一的，因此有

$$\sum_{j=0}^{2^{n_b}-1}\left|b_j\right|^2=1$$

$$\sum_{i=0}^{2^{n_b}-1}\left|\lambda_i^{-1}b_i\right|^2=1$$

B. 初态制备

共有 n_b+n+1 个量子比特，初始化为

$$\left|\Psi_0\right\rangle=\left|0\cdots0\right\rangle_b\left|0\cdots0\right\rangle_c\left|0\right\rangle_a=\left|0\right\rangle^{\otimes n_b}\left|0\right\rangle^{\otimes n}\left|0\right\rangle$$

设 $\vec{b}=(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{N_b-1})^{\mathrm{T}}$则 b-寄存器 $\left|0\cdots0\right\rangle_b$ 需要制备为

$$|b\rangle=\beta_0\left|0\right\rangle+\beta_1\left|1\right\rangle+\cdots\beta_{N_b-1}\left|N_b-1\right\rangle$$

总态变为

$$\left|\Psi_1\right\rangle=\left|b\right\rangle_b\left|0\cdots0\right\rangle_c\left|0\right\rangle_a$$

C. 量子相位估计

3. HHL算法的简单应用