兰州大学 2022-2023 学年第一学期物理学院期末考试

# 理论力学

一、简答题（30 分）

1.简述虚位移，并说明与实位移的区别。

3.说明什么是循环坐标。

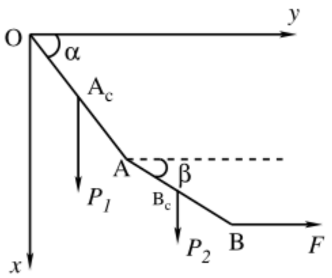
3.简述刚体的瞬心。

4.简述科里奥利力的表达式与原理，并举例说明。

5.分析以下系统的自由度（1）限制在平面上的质点（2）傅科摆（3）水面上作匀速纯滚动的刚体球。

二、（10 分）已知某粒子的速度为$0.9c$，求其总能量、动能及动量

三、（15 分）均匀杆$OA$长$l_1$,重$P_1$;杆$AB$长$l_1$,重$P_2$,$B$受水平力$F$ ,求平衡条件.




四、（10 分）求质量为 $m$，半径为 $R$，高为 $h$ 的圆柱体的主转动惯量。

五、（15 分）（1）写出泊松括号的表达式，并写出某物理量对时间导数满足的关系。

（2）已知 $p_i$ 、 $L_i$ 分别表示动量、角动量的第 $i$ 个分量，证明：

$$\{x,L_x\}=0 \qquad \{x,L_y\}=z \qquad \{x,L_z\}=-y$$

$$\{p_x,L_x\}=0 \qquad \{p_x,L_y\}=p_z \qquad \{p_x,L_z\}=-p_y$$

六、（20 分）已知某质量为$m$的卫星受到引力势$V(r)=-kr^{-\beta}$，其中$k>0$,$0<\beta<2$.

（1）利用有效势分析法证明：当卫星能量$E<0$时，卫星将不能脱离束缚，即$r$将不能趋于无穷大。

（2）记$r_{\min}$为卫星到原点距离的最小值，$r_{\max}$为卫星到原点距离的最大值，$\Delta\Phi$为从$r_{\min}$至$r_{\max}$绕过的角度。已知卫星能量为$E$，角动量为$L$，求$\Delta\Phi$（保留至积分式）。

（3）请证明：当能量$E$从负方向趋于 0 时$\Delta\Phi$的取值与角动量无关，且$\Delta\Phi=\dfrac{\pi}{2-\beta}$

参考解答与提示

一、

1. 适合 $t$=$t_0$ 的约束方程的无限小想象位移，在约束许可情况下所能产生的位移称为“可能位移”。实位移为时间演化后物体的真实位移，为虚位移的其中一条。

2.若拉格朗日量不显含 $q_\alpha$，则 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 为守恒量，此时称这个广义坐标为循环坐标。

3.在刚体的运动中时，若某点的瞬时速度为 0，则刚体瞬时绕该点定点转动，则称该点为刚体的瞬心。

4. $\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$，科里奥利力为在转动坐标系中的一个惯性力。例：地转偏向力。

5.（1）2（2）2（3）1

二、解：

粒子的动质量为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{10\sqrt{19}}{19} m_0$$

则总能量为

$$E = mc^2 = \frac{10\sqrt{19}}{19} m_0 c^2$$

动能为

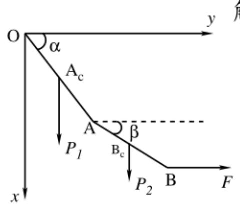
$$E_k = E - E_0$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{10\sqrt{19} - 19}{19} m_0 c^2$$

动量为

$$p = mv = \frac{9\sqrt{19}}{19} m_0 c$$

三、




解：约束系，自由度为2；

- 广义坐标选择为$\alpha$和$\beta$；
- 受力：重力$\vec{F}_1 = P_1\vec{1}_x$和$\vec{F}_2 = P_2\vec{1}_x$，拉力$\vec{F}_3 = F\vec{1}_y$；
- 力作用点坐标：

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{A_C} &= \frac{l_1}{2}\sin\alpha\vec{1}_x + \frac{l_1}{2}\cos\alpha\vec{1}_y, \\
\vec{r}_{B_C} &= (l_1\sin\alpha + \frac{l_2}{2}\sin\beta)\vec{1}_x + (l_1\cos\alpha + \frac{l_2}{2}\cos\beta)\vec{1}_y, \\
\vec{r}_B &= (l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta)\vec{1}_x + (l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta)\vec{1}_y,
\end{aligned}$$

按虚功原理$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$,

$$\begin{cases}
P_1\frac{\partial(\frac{l_1}{2}\sin\alpha)}{\partial\alpha} + P_2\frac{\partial(l_1\sin\alpha+\frac{l_2}{2}\sin\beta)}{\partial\alpha} + F\frac{\partial(l_1\cos\alpha+l_2\cos\beta)}{\partial\alpha} = 0, \\
P_1\frac{\partial(\frac{l_1}{2}\sin\alpha)}{\partial\beta} + P_2\frac{\partial(l_1\sin\alpha+\frac{l_2}{2}\sin\beta)}{\partial\beta} + F\frac{\partial(l_1\cos\alpha+l_2\cos\beta)}{\partial\beta} = 0.
\end{cases}$$

解之可得$\tan\alpha = \frac{P_1+2P_2}{2F}$，$\tan\beta = \frac{P_2}{2F}$.

四、设主转动惯量为$I$

则 $I=\begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}$

设密度为$\rho = \dfrac{m}{\pi R^2 h}$

因为圆柱某点到$z$轴的距离不随$h$的改变发生变化，则可当成平面的圆的转动惯量处理。故

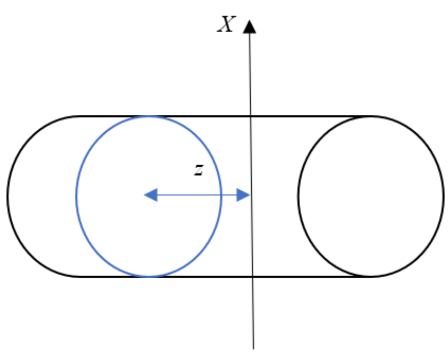
$$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$$

由对称性

$$I_{xx} = I_{yy}$$

取如图所示的微元，则有

$$I_{xx} = \int z^2 dm = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\pi R^2 z^2 dz = \frac{1}{12}\rho\pi R^2 h^3 = \frac{1}{12}mh^2$$



因此，综上所述：

$$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{12}mh^2$$

$$I_{zz}=\frac{1}{2}mR^2$$

五、（1）$\left\{f,g\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)\quad \frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left\{f,H\right\}$

（2）易知 $\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}=\delta_{\alpha 1}$、$\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}=0$、$\frac{\partial p_x}{\partial q_\alpha}=0$、$\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}=\delta_{\alpha 1}$，则

$$\left\{x,L_x\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_x}{\partial p_\alpha}\right)=\frac{\partial L_x}{\partial p_x}=\frac{\partial}{\partial p_x}\left(yp_z-zp_y\right)=0$$

$$\left\{x,L_y\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_y}{\partial p_\alpha}\right)=\frac{\partial L_y}{\partial p_x}=\frac{\partial}{\partial p_x}\left(zp_x-xp_z\right)=z$$

$$\left\{x,L_z\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_z}{\partial p_\alpha}\right)=\frac{\partial L_z}{\partial p_x}=\frac{\partial}{\partial p_x}\left(xp_y-yp_x\right)=-y$$

$$\left\{p_x,L_x\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial p_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_x}{\partial q_\alpha}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_x}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{\partial L_x}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(yp_z-zp_y\right)=0$$

$$\left\{p_x,L_y\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial p_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_y}{\partial q_\alpha}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_y}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{\partial L_y}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(zp_x-xp_z\right)=p_z$$

$$\left\{p_x,L_z\right\}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial p_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial L_z}{\partial q_\alpha}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\delta_{\alpha 1}\frac{\partial L_z}{\partial q_\alpha}\right)=-\frac{\partial L_z}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(xp_y-yp_x\right)=-p_y$$

六、（1）等效势表达式为

$$V_{eff}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-kr^{-\beta}$$

求导得

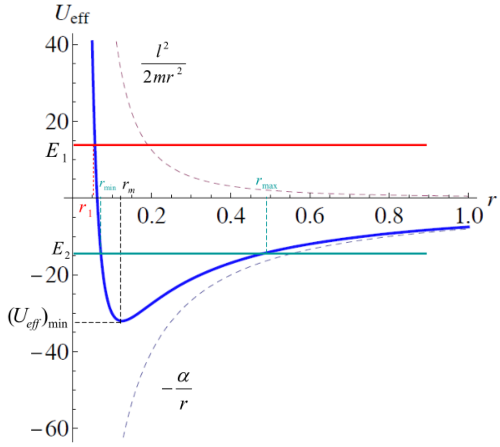
$$V'_{eff}(r)=-\frac{L^2}{m}r^{-3}+k\beta r^{-\beta-1}=k\beta r^{-3}\left(-\frac{L^2}{mk\beta}+r^{2-\beta}\right)$$

则可知，在

$$r=\left(\frac{L^2}{mk\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

处为唯一极值点，又因为 $\lim_{x\to 0}V_{eff}(r)=+\infty$、$\lim_{x\to +\infty}V_{eff}(r)=0^-$

故可画出有效势大致为（蓝线）




则可知，当卫星能量$E<0$时，必有 2 个交点，这意味着半径存在最大值，即$r$将不能趋于无穷大。

（2）在卫星处于$(r,\theta)$位置时，角动量与能量均守恒，则有

$$L=mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2-kr^{-\beta}$$

将动能项改写为

$$E_k=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

再根据角动量守恒有

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{L}{mr^2}$$

联立得

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{L^2}{2mr^2}-kr^{-\beta}$$

则有

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{-\frac{L^2}{m^2r^2}+\frac{2}{m}kr^{-\beta}+\frac{2E}{m}}$$

由微分关系$\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{dr}{dt}\dfrac{mr^2}{L}$得

$$\frac{dr}{d\theta}=r\sqrt{-1+\frac{2m}{L^2}kr^{2-\beta}+\frac{2Emr^2}{L^2}}$$

则有

$$\Delta\Phi=\int d\theta$$

$$\Delta\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{r\sqrt{-1+\frac{2m}{L^2}kr^{2-\beta}+\frac{2Emr^2}{L^2}}}dr$$

（3）当能量$E$从负方向趋于 0 时满足$V_{eff}(r_{\min})=0$、$r_{\max}=+\infty$则可得

$$r_{\min}=\left(\frac{L^2}{2mk}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}，\quad r_{\max}=+\infty$$

现将（2）中结果作换元

$$\rho=\left(\frac{2mk}{L^2}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}r$$

则有$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dr}{r}$，故得

$$\Delta\Phi=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\rho\sqrt{\rho^{2-\beta}-1}}d\rho$$

再令$u=\sqrt{\rho^{2-\beta}-1}$，则有

$$\ln\rho=\frac{1}{2-\beta}\ln\left(u^2+1\right)$$

取微分有

$$d\ln\rho=\frac{1}{2-\beta}\frac{2u}{u^2+1}du$$

故所求为

$$\Delta\Phi=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\rho^{2-\beta}-1}}d\ln\rho$$

$$\Delta\Phi=\frac{2}{2-\beta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=\frac{\pi}{2-\beta}$$

可见，与角动量无关，证毕。