> 分别写出自由电磁场与一般电磁场的拉格朗日密度，并变分得到场方程。

自由电磁场的拉氏密度为：

$$\boxed{\mathscr{L}_0\left(\partial_\mu A_\nu\right)=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

一般电磁场拉氏密度为：

$$\boxed{\mathscr{L}\left(A_\mu,\partial_\mu A_\nu\right)=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_e=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+J_\mu A_\mu}$$

用场量表示的最小作用量原理（哈密顿原理）：

$$\delta\int\mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x_\nu),\partial_\mu\varphi_\sigma(x_\nu)\right)\mathrm{d}\Omega=0$$

拉式密度的变分 $\delta\mathscr{L}$ 为：

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}&=\mathscr{L}\left[\varphi_\sigma+\delta\varphi_\sigma,\partial_\mu\varphi_\sigma+\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)\right]-\mathscr{L}\left[\varphi_\sigma,\partial_\mu\varphi_\sigma\right]\\
&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)\\
&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\partial_\mu\left(\delta\varphi_\sigma\right)\\
&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma
\end{aligned}$$

代入最小作用量原理，可得：

$$\int\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma\right\}\mathrm{d}\Omega=0$$

利用矢量散度积分公式，并结合超曲面上 $\delta\varphi|_{\partial\Omega}=0$ 有：

$$\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right]\mathrm{d}\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\delta\varphi_\sigma\mathrm{d}\Omega_\mu=0$$

于是最小作用量原理给出的方程可化简为：

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\varphi_{\sigma}\right)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\sigma}}\right]\delta\varphi_{\sigma}\mathrm{d}\Omega=0$$

由 $\delta\varphi_{\sigma}$ 的任意性就得到场量表示的拉格朗日方程：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\varphi_{\sigma}\right)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{\sigma}}=0}$$

把自由电磁场的拉式密度代入电磁场的拉格朗日方程可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right)-\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_{\nu}}=0$$

由于 $\mathscr{L}_0=-F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4\mu_0$ 仅为 $\partial_{\mu}A_{\nu}$ 的函数，因此：

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_{\nu}}=0$$

再：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}&=2F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\left(F_{\alpha\beta}\right)\\&=2F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\left(\partial_{\alpha}A_{\beta}-\partial_{\beta}A_{\alpha}\right)\\&=2F_{\alpha\beta}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\right)\\&=2\left(F_{\mu\nu}-F_{\nu\mu}\right)\\&=2\left(F_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right)\\&=4F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

综上，自由电磁场的场方程为：

$$\boxed{\partial_{\mu}F_{\mu\nu}=0}$$

把一般电磁场的拉式密度代入拉格朗日方程，可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/4\mu_0+J_{\alpha}A_{\alpha}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/4\mu_0+J_{\alpha}A_{\alpha}\right)}{\partial A_{\nu}}=0$$

注意到：

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/4\mu_0\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/4\mu_0\right)}{\partial A_{\nu}}=-\frac{1}{\mu_0}\partial_{\mu}F_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\left(J_{\alpha}A_{\alpha}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right)-\frac{\partial\left(J_{\alpha}A_{\alpha}\right)}{\partial A_{\nu}}=-J_{\alpha}\delta_{\alpha\nu}=-J_{\nu}$$

综上，得到一般电磁场的场方程：

$$\boxed{\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\nu}$$

二

> 写出协变形式的洛伦兹力公式（分别写点电荷与力密度形式的协变洛伦兹公式），并推导四维协变形式的能量守恒与动量守恒。

点电荷协变洛伦兹力公式：

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu$$

力密度协变洛伦兹力公式：

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu$$

洛伦兹力密度和它的功率可构成一个四维矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu}J_\nu$$

麦克斯韦方程：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu$$

洛伦兹力密度可写为：

$$\mu_0 f_\mu = \mu_0 F_{\mu\nu}J_\nu = F_{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) - F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}$$

考虑最后一项，ν, λ 是求和指标，于是：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right)$$

利用 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\nu\lambda}\partial_\nu F_{\lambda\mu}\right) = \frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}\right)$$

把另一条麦克斯韦方程代入可得：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}\right) = -\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\mu F_{\nu\lambda}\right) = -\frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right)$$

于是洛伦兹力密度公式可写为：

$$
\begin{aligned}
\mu_0 f_\mu &= \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) - F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu} \\
&= \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right) \\
&= \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right) \\
&= \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4}\partial_\lambda\delta_{\mu\lambda}\left(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right) \\
&= \partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)
\end{aligned}
$$

引入**电磁场的能量动量张量** $T_{\mu\lambda}$:

$$
T_{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)
$$

则四维形式的能量动量守恒为:

$$
\boxed{f_\mu = \partial_\lambda T_{\mu\lambda}}
$$

三

> 带电粒子电荷量为 q，速度为 $0.9c$，在某介质中作匀速直线运动，已知介质中 $n = 1.3$

1

> 写出带电粒子的电磁势（即李纳-维谢尔势）

设介质的介电常数为 ε，则李纳-维谢尔势为:

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r - \vec{r}\cdot\vec{v}/\left(c/n\right)} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r - \vec{r}\cdot\left(0.9c\vec{\mathrm{e}}_q\right)/\left(c/1.3\right)} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r - 1.17\vec{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\left(1 - 1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r - \vec{r} \cdot \vec{v}/\left(c/n\right)} \\
&= \frac{9\mu}{40\pi} \frac{qc\vec{\mathrm{e}}_q}{r\left(1 - 1.17\hat{r} \cdot \vec{\mathrm{e}}_q\right)}
\end{aligned}
$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_q$ 是粒子速度方向上的单位矢量；$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_q(t'), t' = t - r/\left(c/n\right) = t - 1.3r/c$

2

> 仅考虑切伦科夫辐射，在哪个方向上有辐射？

只有当粒子运动速度大于介质中光速才会有切伦科夫辐射，这里是满足的。

辐射角 θ_c 满足：

$$
\cos\theta_c = \frac{\tilde{c}}{v} = \frac{c}{nv} = \frac{c}{1.3 \cdot 0.9c} = \frac{100}{117}
$$

即：

$$
\theta_c = \arccos\frac{100}{117}
$$

3

> $t = 1\mathrm{s}$ 时，

(1)

> 写出 t' 的表达式；

在介质中，

$$
t' = t - \left|\vec{x} - \vec{x}_q(t')\right| / \left(c/n\right) = 1 - 1.3\left|\vec{x} - \vec{x}_q(t')\right|/c
$$

(2)

> t' 与 t 哪个大；

$$
t > t'
$$

(3)

> 在原点处计算 t'，有几种可能的值？

原点处 $\vec{x}=\vec{0}$，则 t' 满足：

$$t'=1-1.17\left|t'\right|$$

若 $t'>0$，可解得：$t'=100/217\ \mathrm{s}$；若 $t'<0$，可解得：$t'=-100/17\ \mathrm{s}$

因此，t' 共有 2 种可能的值。

(4)

> 计算原点处的电势。

设 $0\ \mathrm{s}$ 时粒子处于原点。

则：

$$\vec{x}_q(t)=0.9ct\vec{\mathrm{e}}_q$$

当 $\vec{x}=\vec{0},t=1\ \mathrm{s}$ 时，

若 $t'=100/217\ \mathrm{s}$，则：

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t')=-\frac{90c}{217}\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$\hat{r}=-\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}_q(t')\right|=\frac{90}{217}c$$

$$\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q=-\vec{\mathrm{e}}_q\cdot\vec{\mathrm{e}}_q=-1$$

原点处的电势为：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{0},t')\Big|_{t'=100/217\ \mathrm{s}}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q\right)}\\&=\frac{5q}{18\pi\varepsilon c}\end{aligned}$$

若 $t'=-100/17\ \mathrm{s}$，则：

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t')=\frac{90c}{17}\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$\hat{r}=\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$r=\left|\vec{x}-\vec{x}_q(t')\right|=\frac{90}{17}c$$

$$\hat{r}\cdot\vec{e}_q=\vec{e}_q\cdot\vec{e}_q=1$$

原点处的电势为:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{0},t')\Big|_{t'=-100/17\ \mathrm{s}}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdot\vec{e}_q\right)}\\&=-\frac{5q}{18\pi\varepsilon c}\end{aligned}$$

> 我也不知道为啥会是这个奇怪的结果。

四

1

> 太阳光由太阳光球层发出。从光在等离子体中的传播规律出发，结合太阳光谱性质，判断光球层中的电子密度与金属铜中的自由电子密度哪个大。（金属铜的截止频率在X光频段）。

由于可见光可以在光球层中传播，因此可见光频率 ω 大于光球层截止频率 ω_{p1} ，即：$\omega>\omega_{p1}$

而 X 光频率大于可见光频率，而金属铜的截止频率在X光频段，因此金属铜的截止频率 ω_{p2} 大于光球层的截止频率 ω_{p1}。

截止频率 ω_p 与电子密度 n_0 的关系为:

$$\omega_p=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m_e\varepsilon_0}}$$

因此金属铜的自由电子密度大。

2

> 光球层的质量密度 $\rho=3\times10^{-4}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$，假设光球层由等量的质子与电子组成，而质子质量 $m_p=1\ \mathrm{GeV}\sim2\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$，求光球层的电子数密度 n_e.

电子质量远小于质子质量，因此质子数密度 n_p 为:

$$n_p\approx\rho/m_p=1.5\times10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$$

由于光球层由等量的质子与电子组成，因此电子数密度 n_e 为:

$$n_e = n_p = 1.5 \times 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$$

3

> 在国际单位制下，精细结构常数 $\alpha = e^2/\left(4\pi\varepsilon_0\hbar c\right) = 1/137$ 是无量纲常数。自然单位制允许选择 $e, \varepsilon_0, \hbar, c$ 中的 3 个物理常量进行归一化。在自然单位制下，取 $1 = \varepsilon_0 = \hbar = c$，则 $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137$. 已知自然单位制下 $m_e = 0.5\ \mathrm{MeV}, 197\ \mathrm{fm}\cdot\mathrm{MeV} = 1, 1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}$，求光球层的截止频率 $\omega_p = \sqrt{\dfrac{e^2 n_0}{m_e}}$

自然单位制就是在国际单位制基础上加了几个**附加条件**。

如规定 $c = 1$，就等价于国际单位制中如下的附加条件：

$$c = 3\times 10^8\ \mathrm{m/s} = 1 \Longrightarrow 1\ \mathrm{s} = 3\times 10^8\ \mathrm{m}, \quad 1\ \mathrm{m} = \frac{1}{3}\times 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

自然单位制下，

$$e^2 = \frac{4\pi}{137}$$

由于在国际单位制下光球层截止频率的单位为 s^{-1}，因此在自然单位制下可如下配凑回到国际单位制：

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{137}}\sqrt{\frac{1.5\times 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}}{0.5\ \mathrm{MeV}}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{137}}\sqrt{\frac{1.5\times 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}}{0.5\cdot \frac{1}{197}\,(\mathrm{fm})^{-1}}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3}{137}}\sqrt{10^8\ \mathrm{m}^{-2}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3}{137}}\sqrt{10^8\left(\frac{1}{3}\times 10^{-8}\ \mathrm{s}\right)^{-2}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3\cdot 9}{137}}10^{12}\ \mathrm{s}^{-1} \\
&\approx 2.2\times 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1} \\
&= 2.2\times 10^{13}\ \mathrm{Hz}
\end{aligned}$$

五

(1)

> 简述电磁AB效应；

见试卷参考答案。

(2)

> 简述超导体性质特征。

零电阻率、完全抗磁性、磁通量子化、具有临界温度、临界磁场、临界电流。

(3)

> 根据伦敦方程求出在超导体中的透射深度；

伦敦第二方程：

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}$$

在准静态近似下，

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s$$

根据：

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

以及稳态情形的电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = 0$$

可得：

$$\nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla \times \left(\mu_0 \vec{J}_s\right) = \mu_0 \alpha \vec{B} \equiv \frac{\vec{B}}{\lambda_L^2}$$

$$\nabla^2 \vec{J}_s = \frac{\vec{J}_s}{\lambda_L^2}$$

$$\boxed{\lambda_L \equiv \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \alpha}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}}$$

其中，λ_L 称为伦敦穿透深度。

考虑无限大平板，解为：

$$\vec{B}(x) = \vec{B}_0 \exp\left(-x/\lambda_L\right)$$

(4)

> 半径为 R 处于理想迈斯纳态的超导球置于均匀磁场中，求外部真空的磁场分布。

> 半径为 r_0 的处于理想迈斯纳态的超导球放置于均匀的外磁场 $\vec{H}_0$ 中，求超导球体内外的磁场和超导面电流分布。

采用磁介质观点，认为理想超导体是磁导率 $\mu = 0$ 的完全抗磁体，超导面电流是磁化电流，因此全空间中自由电流 $\vec{J}_\mathrm{f} = \vec{0}$，磁场强度 $\vec{H}$ 满足方程：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\mathrm{f} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ 满足：

$$\vec{H} = -\nabla\varphi$$

上面定义的磁标势 φ 自动满足了磁场强度 $\vec{H}$ 所要满足的方程。

球内区域记为 1，球外区域记为 2.

认为超导球是线性均匀介质，则在球内外磁标势都满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad r < r_0$$

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, \quad r > r_0$$

在分界面 $r = r_0$ 处磁标势要满足连续性边界条件：

$$\varphi_1\big|_{r=r_0} = \varphi_2\big|_{r=r_0}$$

利用磁高斯定理可得另一个边界条件：

$$\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0$$

超导球内 $\mu = 0$，有:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0$$

取外磁场 $\vec{H}_0$ 的方向为极轴方向，则体系具有轴对称性。磁标势的形式解可写为:

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r < r_0$$

$$\varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r > r_0$$

取未放入超导球时球心处磁标势为零，在无穷远处，$\vec{H} \to \vec{H}_0, \varphi_2 \to -H_0 r\cos\theta$，因此:

$$\varphi_2 = -H_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad r > r_0$$

考虑边界条件:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0$$

即:

$$-H_0\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} -(l+1)D_l r_0^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

即:

$$\left(-H_0 - 2D_1 r_0^{-3}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0,2,3,\cdots} -(l+1)D_l r_0^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性可得:

$$D_1 = -\frac{H_0 r_0^3}{2}, \quad D_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \cdots$$

因此:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= -H_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= -H_0 r\cos\theta - \frac{H_0}{2}\frac{r_0^3}{r^2}\cos\theta, \quad r > r_0
\end{aligned}
$$

球心处的磁标势不应发散，因此:

$$
\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), \quad B_l = 0, \quad l = 0,1,2,\cdots
$$

考虑分界面 $r = r_0$ 处磁标势要满足边界条件:

$$
\varphi_1\big|_{r=r_0} = \varphi_2\big|_{r=r_0}
$$

代入可得:

$$
\sum_{l=0}^{\infty}A_l r_0^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -H_0 r_0\cos\theta - \frac{H_0 r_0}{2}\cos\theta = -\frac{3}{2}H_0 r_0\cos\theta
$$

注意到 $\cos\theta = \mathrm{P}_1(\cos\theta)$，将上式整理成各阶勒让德多项式线性叠加的形式:

$$
\left(A_1 r_0 + \frac{3}{2}H_0 r_0\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0,2,3,\cdots}A_l r_0^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0
$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得:

$$
A_1 = -\frac{3}{2}H_0, \quad A_l = 0, \quad l = 0,2,3,\cdots
$$

因此:

$$
\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -\frac{3}{2}H_0 r\cos\theta
$$

综上，整个空间的磁标势分布分:

$$
\begin{cases}
\varphi_1 = -\dfrac{3}{2}H_0 r\cos\theta & , \quad r < r_0 \\
\varphi_2 = -H_0 r\cos\theta - \dfrac{H_0}{2}\dfrac{r_0^3}{r^2}\cos\theta & , \quad r > r_0
\end{cases}
$$

球内磁场强度:

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_1 &= -\nabla\varphi_1 \\
&= \frac{3}{2}H_0\nabla(r\cos\theta) \\
&= \frac{3}{2}H_0\nabla(z) \\
&= \frac{3}{2}H_0\vec{\mathrm{e}}_z \\
&= \frac{3}{2}\vec{H}_0
\end{aligned}
$$

球内磁化强度：

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_1 &= -\vec{H}_1 \\
&= -\frac{3}{2}\vec{H}_0
\end{aligned}
$$

超导面电流分布：

$$
\vec{\alpha}_M = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) \times \vec{n}_{1\to 2} = \left(-\frac{3}{2}\vec{H}_0 - \vec{0}\right) \times \vec{\mathrm{e}}_r = -\frac{3}{2}\vec{H}_0 \times \vec{\mathrm{e}}_r = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi
$$

球外磁场强度：

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_2 &= -\nabla\varphi_2 \\
&= \nabla\left(H_0 r\cos\theta + \frac{H_0}{2}\frac{r_0^3}{r^2}\cos\theta\right) \\
&= \nabla\left(\vec{H}_0\cdot\vec{r} + \frac{r_0^3}{2}\frac{\vec{H}_0\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \\
&= \vec{H}_0 + \frac{r_0^3}{2}\frac{\left[\vec{H}_0 - 3\left(\vec{H}_0\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right]}{r^3}
\end{aligned}
$$