兰州大学 2023～2024 学年第 一 学期

**期末考试试卷**

课程名称：　群论　 任课教师：　刘玉孝、魏少文

学院：　物理学院　专业：＿＿＿＿ 年级：　2021

姓名：＿＿＿＿＿＿ 校园卡号：＿＿＿＿＿＿

## 一、基础题（第一题 20 分，其余 10 分，共 60 分）

1.（1）简述群重排定理（2）写出三阶群的群乘法表（3）对于某李群的一维线性表示 $D(\alpha)=e^{\alpha_i B_i}$，且 $B_i$ 为常数矩阵，求该李群的生成元（4）证明在 $\alpha,\beta$ 是小量时，李群的结构因子 $f(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$。

2.给出同态的定义，并证明 $D_3$ 群与 $C_2$ 群同态。

3.给出直积群与半直积群的定义，若群 $H$ 与群 $F$ 可以直积，且 $K=H\otimes F$ 则 $H$ 与 $F$ 是否为 $K$ 的不变子群？若为半直积 $K=H\otimes_S F$，则 $H$ 与 $F$ 是否为 $K$ 的不变子群？

4.写出一个 $C_2$ 群的二维线性表示，这个表示是否是可约的？

5.给出 $SO(3)$ 群中判断元素是否相互共轭的方法，并据此求 $D_6$ 群的共轭类。$D_6$ 群的对称轴如下：

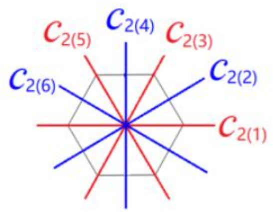


Figure 6: $D_6$群的$c_2$轴

## 二、应用题（第一题 20 分，其余 10 分，共 40 分）

1.已知 $D_2$ 群为正 $n$ 边形对称群，求：（1）该群的乘法表（2）所有共轭类与非平庸不变子群（3）商群与特征标表（4）以标量函数 $\psi_1=x^2$，$\psi_2=xy$，$\psi_3=y^2$ 为基底写出 $D_2$ 群的一个三维表示。

2.求 $SO(3)$ 群的生成元，无穷小算子，李代数，度规与 Casmir 算子。

3.洛伦兹群 $SO(1,3)$ 是满足如下规律的李群

$$-c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2=-c^2t^2+x^2+y^2+z^2$$

（$c$=1）

（1）求 $SO(1,3)$ 群的生成元及其对易关系（提示：洛伦兹变换 $t'=\dfrac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}$，$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$）；

（2）判断 $SO(1,3)$ 群是否为两个 $SO(3)$ 群的直和？

（3）判断 $SO(1,3)$ 群是否是半单纯的？

（4）由此题结论推广至 $SO(1,n)$ 群，求 $SO(1,n)$ 群的生成元及其对易关系。

# 参考解答

一、

1.（1）假设$G=\{g_\alpha\}$是一群，$f$ 为 $G$ 中一个确定的元素，则当$\alpha$ 取遍所可能的取值时，$fg_\alpha$ 给出且仅仅一次给出 $G$ 的所有元素，即

$$G=\{g_\alpha\}=\{fg_\alpha\}$$

（2）3 是素数，因此必为 3 阶循环群。

| G | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

（3）根据生成元定义

$$I_i=\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i}\bigg|_{\alpha=0}=\frac{\partial e^{\alpha_j B_j}}{\partial \alpha_i}\bigg|_{\alpha=0}=B_i$$

（4）将结构函数泰勒展开，因考虑$\alpha,\beta$是小量，仅保留一阶项，则有

$$f(\alpha,\beta)=\alpha\frac{\partial f(\alpha,0)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}+\beta\frac{\partial f(0,\beta)}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=0}$$

因

$$\frac{\partial f(\alpha,0)}{\partial\alpha}=\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha}=1\quad\frac{\partial f(\beta,0)}{\partial\beta}=\frac{\partial\beta}{\partial\beta}=1$$

故

$$f(\alpha,\beta)=\alpha+\beta$$

2.

**设$G=\{g_{im}\}$与$G'=\{g_i'\}$之间有多一对应关系，并且为满射，且群$G$中任意两个元素的乘积也按相同的对应关系对应于$G'$中相应两个元素的乘积，即：**

① $g_{im}\to g_i'$

② **若**$g_{im}\to g_i'$，$g_{jm}\to g_j'$，**则** $g_{im}g_{jm}\to g_i'g_j'$

**则称$G$与$G'$同态，记作：$G\simeq G'$.**

构造映射 $f:D_3\to C_2$

$$f(e)=f(d)=f(f)=1$$

$$f(a)=f(b)=f(c)=c_2$$

可证明这是个同态映射（$\{e,d,f\}$为指数为 2 的不变子群）且为满射，故 $D_3$ 群与 $C_2$ 群同态。

3.

**1. 直积群的定义**

**假设$H=\{h_\alpha\}$，$F=\{f_\beta\}$为G的两个子群，且满足：**

- **除恒元以外$H$和$F$没有公共的元素**
- **两个子群的元素乘积可对易：$h_\alpha f_\beta=f_\beta h_\alpha$**

**则$K=\{h_\alpha f_\beta|h_\alpha\in H,f_\beta\in F\}$构成一个群，称为$H$和$F$的直积**

若 $K=H\otimes F$，则 $H$ 与 $F$ 一定为 $K$ 的不变子群（由 $H$ 与 $F$ 的交换性易得）。

下面给出半直积群的定义. 假设$H=\{h_\alpha\}$为群$G$的不变子群，$F=\{f_\beta\}$为群$G$的子群，且满足：

(1) $H\cap F=e$,

(2) $G=HF$,

则$G=\{h_\alpha f_\beta | h_\alpha\in H, f_\beta\in F\}$构成一个群，称为$H$和$F$的**半直积群**，记为

$$K=H\otimes_S F.$$

下面我们将看到，直积群是半直积群的一种特殊情况.

若为半直积$K=H\otimes_S F$，则$H$与$F$不一定为$K$的不变子群。(特殊到直积群则为不变子群)

4.例：令

$$D(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad D(c_2)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

可证这是一个二维线性表示。因$\chi^2(e)=4>2$，故一定是不可约表示。

5.

**由此可见，$SO(3)$的有限群$G$中两个群元$C_{\mathbf{k}_1}(\omega_1)$和$C_{\mathbf{k}_2}(\omega_2)$共轭的条件是：**

**(1) 转动角度相同：$\omega_1=\omega_2$；**

**(2) $\exists g\in G$，使得：$\mathbf{k}_2=g\mathbf{k}_1$.**

**此时** $gC_{\mathbf{k}_1}(\omega)g^{-1}=C_{\mathbf{k}_2}(\omega)$

对于$c_6^i$，可认为沿$k$轴转$\dfrac{2\pi}{6}i$，这与且仅与沿-$k$轴转$\dfrac{2\pi}{6}(6-i)$等价，而任意的$c_{2(i)}$都可以将$k$轴变为-$k$轴，故$\{c_6^i,c_6^{6-i}\}$成一类。对于$c_{2(i)}$的对称轴，可得按$c_6^1$重复操作依次得到$c_{2(i+2)}$、$c_{2(i+4)}$、$\cdots$的对称轴，而没有操作能变换到相邻对称轴，故易知$\{c_{2(1)},c_{2(3)},c_{2(5)}\}$成一类，$\{c_{2(2)},c_{2(4)},c_{2(6)}\}$成一类。

综上：$D_6$群共有6个共轭类，$\{e\}$为一类，$\{c_6^1,c_6^5\}$为一类，$\{c_6^2,c_6^4\}$为一类，$\{c_6^3\}$为一类，$\{c_{2(1)},c_{2(3)},c_{2(5)}\}$为一类，$\{c_{2(2)},c_{2(4)},c_{2(6)}\}$为一类。

二、

1. $D_2=\{e,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z\}$，除幺元外分别指沿某轴对称旋转。

（1）则乘法表为

| $D_2$ | $e$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ |
| $\sigma_x$ | $\sigma_x$ | $e$ | $\sigma_z$ | $\sigma_y$ |
| $\sigma_y$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ | $e$ | $\sigma_x$ |
| $\sigma_z$ | $\sigma_z$ | $\sigma_y$ | $\sigma_x$ | $e$ |

（2）对于除幺元外的任意的群元，考虑$\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1}$，因

$$\sigma_j^{-1}=\sigma_j$$

故

$$\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1}=\sigma_j\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_k=\sigma_i$$

故每个群元均自成一类，这样每个子群都是不变子群，易知非平庸不变子群分别为

$$A=\{e,\sigma_x\}\quad B=\{e,\sigma_y\}\quad C=\{e,\sigma_z\}$$

（3）分别看有

$$D_2/A=\{A,\sigma_y A\}$$

$$D_2/B=\{B,\sigma_z B\}$$

$$D_2/C=\{A,\sigma_x A\}$$

其中$\sigma_y A=\{\sigma_y,\sigma_z\}$，$\sigma_z B=\{\sigma_x,\sigma_z\}$，$\sigma_x C=\{\sigma_x,\sigma_y\}$。根据

$$1^2+1^2+1^2+1^2=4$$

故共有 4 个一维不等价不可约表示，恰好除了恒等表示外还有 3 个指数为 2 的不变子群，因此特征标表易得

| $D_2$ | $e$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_z$ |
|---|---|---|---|---|
| E | 1 | 1 | 1 | 1 |
| A | 1 | 1 | -1 | -1 |
| B | 1 | -1 | 1 | -1 |
| C | 1 | -1 | -1 | 1 |

（4）根据群元定义，有

$$\sigma_x: y\to -y$$
$$\sigma_y: x\to -x$$
$$\sigma_x: x\to -x, y\to -y$$

而

$$\psi_1=x^2，\quad \psi_2=xy，\quad \psi_3=y^2$$

故

$$\sigma_x\psi_1=\psi_1(\sigma_x^{-1})=x^2=\psi_1$$

$$\sigma_x\psi_2=\psi_2(\sigma_x^{-1})=-xy=-\psi_2$$

$$\sigma_x\psi_3=\psi_3(\sigma_x^{-1})=y^2=\psi_3$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1 & -\psi_2 & \psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{pmatrix}D(\sigma_x)$$

可知

$$D(\sigma_x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

同样操作

$$\sigma_y\psi_1=\psi_1(\sigma_y^{-1})=x^2=\psi_1$$

$$\sigma_y\psi_2=\psi_2(\sigma_y^{-1})=-xy=-\psi_2$$

$$\sigma_y\psi_3=\psi_3(\sigma_y^{-1})=y^2=\psi_3$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1 & -\psi_2 & \psi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2 & \psi_3\end{pmatrix}D(\sigma_y)$$

可知

$$D(\sigma_y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

根据同态性质

$$D(\sigma_z)=D(\sigma_x)D(\sigma_y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故整理得

$$D(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad D(\sigma_x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$D(\sigma_y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad D(\sigma_z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可验证这确实为一个三维线性表示。

2.对于 $SO(3)$ 群，有

$$D(\omega)=e^{-i\omega_i T_i}$$

其中

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\quad T_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故生成元易得

$$I_1=-iT_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad I_2=-iT_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad I_3=-iT_3\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

根据

$$X_i=(I_i)^{\mu}_{\nu}x_{\nu}\partial_{\mu}$$

故

$$X_1=X_{23}=x_2\partial_3-x_3\partial_2$$

$$X_2=X_{31}=x_3\partial_1-x_1\partial_3$$

$$X_3=X_{12}=x_1\partial_2-x_2\partial_1$$

根据生成元对易规则

$$\left[I_i,I_j\right]=\varepsilon_{ijk}I_k=C^k_{ij}I_k$$

可得

$$\varepsilon_{ijk}=C^k_{ij}I_k$$

此即 $SO(3)$ 群李代数。

根据度规定义

$$g_{ij}=C^l_{ik}C^k_{jl}=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jlk}=-2\delta_{ij}$$

故

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&-2\end{pmatrix}$$

而 Casmir 算子为

$$C=g^{\mu\nu}X_{\mu}X_{\nu}=-\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}X_{\mu}X_{\nu}=-\frac{1}{2}X_{\mu}X_{\mu}$$

则

$$C=-\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)$$

3.（1）对于 $SO(1,3)$ 群，分为平动与转动，故转动与 $SO(3)$ 生成元一致，而对于平动有

$$t'=\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}\ ,\quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}$$

则有

$$X_v=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}\right)\Bigg|_{v=0}\partial_t+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\Bigg|_{v=0}\partial_x$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}\right)\Bigg|_{v=0}=-x\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)\Bigg|_{v=0}=-t$$

故可得

$$X_1=-x\partial_t-t\partial_x$$

$$X_2=-y\partial_t-t\partial_y$$

$$X_3 = -z\partial_t - t\partial_z$$

可得生成元为

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

可得

$$\left[M_i, M_j\right] = \varepsilon_{ijk} M_k \quad \left[N_i, N_j\right] = -\varepsilon_{ijk} N_k \quad \left[M_i, N_j\right] = \varepsilon_{ijk} N_k$$

（2）是两个 $SO(3)$ 的直和。（作变换 $P_i = \frac{1}{2}(M_i + iN_i), Q_i = \frac{1}{2}(M_i - iN_i)$）

（3）是半单纯的。（$SO(3)$ 半单纯）

（4）可由 $SO(n)$ 转动与一维平动得到，与前面的类似：

$$X_i = -x_i\partial_t - t\partial_{x_i}$$

故可得生成元为

$$(N_i)_{mn} = -(\delta_{mi}\delta_{n1} + \delta_{ni}\delta_{m1})$$

$M_i$ 为 $SO(n)$ 群生成元，且

$$\left[M_i, M_j\right] = C_{ij}^k M_k \quad \left[N_i, N_j\right] = -C_{ij}^k N_k \quad \left[M_i, N_j\right] = C_{ij}^k N_k$$