第4章 恒定磁场

基本概念

安培定律

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = k\frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$$

其中，$\mathrm{d}\vec{F}_{12}$ 是电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$ 对电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 的作用力

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L_1} \frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times (\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12})}{r_{12^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times \oint\limits_{L_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2}\end{aligned}$$

磁感应强度

$$\mathrm{d}\vec{F}_2 = I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{B}$$

$$\vec{B} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\limits_{L_1} \frac{I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

毕奥-萨伐尔定律

微分形式

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

其中，$I\mathrm{d}\vec{l}$ 是电流元，$\vec{e}_r$ 是从电流元所在位置指向场点位置的单位矢量，r 是电流元与场点的距离

积分形式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

例：求有限长载流直导线产生的磁场

设 l 是以 O 为原点，以竖直向上为正方向，建立一维坐标系后导线上一点 P 相对原点 O 的**位矢。**

先找 l, θ关系：

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{r_0}{l} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{r_0}{-l}$$

$$l = -r_0 \cot\theta$$

两边取微分：

$$\boxed{\mathrm{d}l = r_0 \frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta}$$

再找 r, θ 关系：

$$\sin(\pi-\theta)=\frac{r_0}{r}\Longrightarrow\sin\theta=\frac{r_0}{r}\Longrightarrow\boxed{r=\frac{r_0}{\sin\theta}}$$

于是（消去 $\mathrm{d}l, r$）：

$$\begin{aligned}B&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{A_1}^{A_2}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\end{aligned}$$

无限长载流直导线$(\theta_1=0,\theta_2=\pi)$:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

无限长载流直导线周围的磁感应强度B与距离r_0的一次方成反比

磁感应通量（磁通量）

$$\Phi_B\equiv\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

磁场的“高斯定理”

积分形式

$$\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

微分形式

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

安培环路定理

恒磁场中适用

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_{(L内)}I$$

当穿过回路 L 的电流方向与回路 L 的环绕方向服从右手法则时，$I>0$，反之，$I<0$

安培力

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

平行无限长直导线间的相互作用

作用在**单位长度**导线上的作用力的大小为:

$$f=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

其中，a 是两直导线的间距

载流线圈的磁矩

任意形状的载流平面线圈作为整体，在均匀外场中不受力，但受到一个力矩，这力矩总是力图使这线圈的磁矩 $\vec{m}$ (或者说它的右旋法线矢量 $\vec{e}_n$)转到磁感应强度矢量 $\vec{B}$的方向

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

其中，$\vec{m} = IS\vec{e}_n$

洛伦兹力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

第5章 电磁感应和暂态过程

基本概念

法拉第电磁感应定律

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，$\mathscr{E}$ 是回路内感应电动势，Φ 是穿过回路的磁通量

$\mathscr{E}$ 的正方向与 Φ 的正方向满足右手法则。

楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它(感应电流)所激发的磁场来**阻碍**引起感应电流的磁通量的变化。

动生电动势和感生电动势

法拉第电磁感应定律给出：

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，Φ 可写为：

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

从上式可见，产生感生电动势有两种途径：

（1）回路面积在随时间变化，产生动生电动势。

（2）磁场在随时间变化，产生感生电动势。

动生电动势

动生电动势只可能存在于运动的那一段导体上，而不动的那一段导体上没有动生电动势。

“导体切割磁感线时产生动生电动势”

$$\mathscr{E} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

感生电动势

随时间变化的磁场会在其周围激发一种电场，称为感应电场或涡旋电场。

涡旋电场不是由电荷激发，而是由随时间变化的磁场激发；描述涡旋电场的电场线是闭合的，从而它不是保守场。

数学表达式：

$$\oint \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

感生电动势由涡旋电场产生，即：

$$\mathscr{E} = \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

一般情况下，空间的总电场 $\vec{E}$ 是静电场 $\vec{E}_{静}$ 和涡旋电场 $\vec{E}_{旋}$ 的叠加，即：

$$\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋}$$

由于静电场是无旋场，即：

$$\oint_{\partial S} \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

所以感生电动势可以写为：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint_{\partial S} \vec{E}_{旋} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + 0 \\
&= \oint_{\partial S} (\vec{E}_{旋} + \vec{E}_{静}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}
\end{aligned}$$

另一方面，法拉第电磁感应定律给出：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}$$

两者对比可得：

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

这是电磁学的基本方程之一。