1

(A) 柯西-黎曼条件

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)**

(B) 留数定理

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即:

$$\oint\limits_{C^+}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}f(z_j)$$

(C) 泰勒级数和洛朗级数的区别

泰勒级数:

设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，展开系数为:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

洛朗级数:

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1,R_2 的两个圆周 C_1,C_2 所包围的环形区域，$R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线

区别:

泰勒级数要求 $f(z)$ 在整个圆周 C 内解析，而洛朗级数只要求在圆周 C_1,C_2 间的环形区域解析;

洛朗级数的幂项的次数从 $-\infty$ 到 ∞，而泰勒级数的幂项次数从 0 到 ∞;

泰勒级数的系数可以由求导数求得，也可以由回路积分求得，但洛朗级数的系数只能由回路积分求得。

(D) 傅里叶变换

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv C(k)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其中，$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv C(k)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换

(E) 拉普拉斯变换

对于定义在实变数 $t \in [0, +\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) \equiv F(p) \equiv \int_{t=0}^{t=+\infty} f(t) e^{-pt} \mathrm{d}t$$

其中，$p = s + \mathrm{i}\sigma, s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$

(F) 自然边界条件

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即：

$$|u| < +\infty$$

2

已知解析函数的实部为 $u = x^3 - 3xy^2$，求该解析函数

解：

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \\ \mathrm{d}v = 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \end{gathered} \tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0) \to (x,0)}_{C_1}, \underbrace{(x,0) \to (x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned} v(x,y) - v(0,0) &= \int_{C_1} 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y + \int_{C_2} 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 0 + \int_{y=0}^{y=y} (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3x^2 y - y^3 \end{aligned}$$

令 $v(0,0) = C$，

$$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + C$$

于是：

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2 y - y^3 + C) \end{aligned}$$

ps：从 (1) 开始还有令另一种做法（类似于热统里导出熵的统计表达式）：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= 6xy\mathrm{d}x + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3y\mathrm{d}(x^2) + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3[\mathrm{d}(x^2 y) - x^2\mathrm{d}y] + (3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}y \\ &= 3\mathrm{d}(x^2 y) - 3y^2\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}(3x^2 y) - \mathrm{d}(y^3) \\ &= \mathrm{d}(3x^2 y - y^3) \end{aligned}$$

于是：

$$v = 3x^2 y - y^3 + C$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u + \mathrm{i}v \\ &= x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2 y - y^3 + C) \end{aligned}$$

3

> 思路：利用已知级数

在 $z_0=0$ 附近的展开式：

注意到已知级数：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ |x|<1$$

于是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)}&=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\\&=-\frac{1}{1-z}-(z-0)^{-1}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n-z^{-1}\\&=-\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\end{aligned}$$

$z_0=1$ 附近的展开式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)}&=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\\&=(z-1)^{-1}-\frac{1}{1-(1-z)}\\&=(z-1)^{-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n\\&=(z-1)^{-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\\&=(z-1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\\&=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\end{aligned}$$

4

计算回路积分 $\oint\limits_{l^+}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

> 思路：要计算回路积分，想到留数定理

回路包围的奇点：$z_1=\mathrm{i}$ 一阶极点，$z_2=1$ 二阶极点

计算回路包围的奇点处的留数：

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)^1f(z)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-z_2)^2f(z)\\&=\frac{-1}{2}\end{aligned}$$

留数定理：

$$
\begin{aligned}
\oint_{l^+} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2} &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{Res}f(z_j) \\
&= 2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

5

计算定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

> 思路：$\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 类型的实积分，通过变量替换 $z=e^{\mathrm{i}\theta}$，将 θ 看作幅角，转化为复平面上的单位圆周回路积分

解：

设 C 是以原点为圆心的单位圆周

令 $z=e^{\mathrm{i}\theta}, z^{-1}=e^{-\mathrm{i}\theta}$

$$
\cos\theta=\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}
$$

$$
\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}
$$

全部代入积分中：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta &= \oint_{C^+}\frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}}{3-(z+z^{-1})+\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}} \\
&= \oint_{C^+}\frac{2\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2z}
\end{aligned}
$$

令：

$$
f(z)=\frac{2}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}
$$

在单位圆周内的奇点为（一阶极点）：

$$
z_1=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}
$$

不在单位圆周内的奇点为：

$$
z_2=2-\mathrm{i}
$$

$f(z)$ 在 z_1 处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)f(z) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

留数定理：

$$
\begin{aligned}
\oint_{C^+}\frac{2\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2z} &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_1) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

6

用拉普拉斯变换求解下列 LR 串联电路方程$\begin{cases}L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E \\ i(0)=0\end{cases}$，其中，$L,R,E$ 为常数

解:

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p},\ \ \mathrm{Re}\, p > 0$$

微分定理:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(p) = p^n \mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - 1 \cdot f^{(n-1)}(0)$$

设 $\mathcal{L}\{i(t)\}(p) = F(p)$

由微分定理:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{i^{(1)}(t)\}(p) &= p^1 \mathcal{L}\{i(t)\}(p) - p^0 i^{(0)}(0) \\ &= pF(p)\end{aligned}$$

$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$ 两边同时作拉普拉斯变换:

$$LpF(p) + RF(p) = E \cdot \frac{1}{p}$$

解出 $F(p)$:

$$\begin{aligned}F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

$$1 \fallingdotseq \frac{1}{p}$$

位移定理:

若 $f(t) \fallingdotseq F(p)$, 则:

$$e^{-\lambda t} f(t) \fallingdotseq F(p + \lambda)$$

由位移定理:

$$e^{-\frac{R}{L}t} \fallingdotseq \frac{1}{p + \frac{R}{L}}$$

(1) 两边同时作拉普拉斯逆变换, 得:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

7

8

9

10