2022-2023 学年第一学期兰州大学物理学院期末考试

量子基础 I

一、简答题（50 分，1-6 题每题 5 分，7-8 题每题 10 分）

1.简述量子力学五大公设。

2.简述哥本哈根学派的三大支柱。

3.写出薛定谔方程并给出形式解。

4.简述塞曼效应，并说明正常塞曼效应与反常塞曼效应的成因及结果。

5.解释通过举例说明力学量完全集及其物理意义 。

6.在 $\hat{\sigma}_z$ 表象下写出三个泡利矩阵并写出它们的对易关系。

7.简述下列实验，从结果与以及经典无法解释的实验现象说明。

（1）康普顿散射实验（2）戴维孙—革末实验（3）施特恩—盖拉赫实验

8.已知波函数 $\psi(\vec{r},t_0)$，对于某力学量 $\hat{A}$，写出可能的测量值及其概率、不确定度、平均值以及随时间演化的波函数。

二、（10 分）已知某体系哈密顿量为 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}+\alpha\hat{p}$，其中是 α 小量。

（1）求出能量本征值的精确解；（2）利用微扰法近似到能量的二级修正

三、（20 分）已知电子处于态 $\psi(\vec{r})=R_{32}(r)Y_{21}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(S_z)$

（1）对力学量 L^2 能观测到什么值？概率分别是多少？

（2）对力学量 L_z 能观测到什么值？概率分别是多少？

（3）对力学量 S^2 能观测到什么值？概率分别是多少？

（4）对力学量 S_z 能观测到什么值？概率分别是多少？

（5）对总角动量 z 分量 J_z 能观测到什么值？概率分别是多少？

（6）对力学量 J^2 能观测到什么值？概率分别是多少？

已知：$\psi_{l,l\pm\frac{1}{2},m_j}=\pm\sqrt{\dfrac{l\pm m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(S_z)+\sqrt{\dfrac{l\mp m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(S_z)$

四、（20 分）已知处于一维无限深势阱（$0<x<a$）的粒子的初始时刻波函数为 $\psi(x,0)=C(1+\cos\dfrac{\pi x}{a})\sin\dfrac{\pi x}{a}$

（1）求 C；

（2）求能量的不确定度；

（3）求观测到粒子处于势阱左半侧的概率。

提示与参考解答

一、

2. （1）波恩的概率解释（2）海森堡不确定性原理（3）玻尔互补原理

4.讲义 P78

6. $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$

7.讲义 P8、P14、P69

二、

（1）将哈密顿量改写为

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}+m\alpha)^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} - \frac{m\alpha^2}{2} = \hat{H}_0 - \frac{m\alpha^2}{2}$$

先讨论 $\hat{H}_0$ 的本征能量，类似一维谐振子，定义

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}(\hat{p}+m\alpha) + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}\right]$$
$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}(\hat{p}+m\alpha) + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}\right]$$

可得

$$\hat{b}\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{H}_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$$
$$\hat{b}^\dagger\hat{b} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\hat{H}_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$$
$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$$

这与一维谐振子升降算符的性质完全相同，因此可以知道，这对算符也是升降算符，且基态波函数满足

$$\hat{b}u_0(x) = 0$$

则可计算基态能量

$$\hat{H}_0 u_0(x) = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right)u_0(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega u_0(x)$$

因此 $\hat{H}_0$ 的本征能量与一维谐振子相同，

$$E_{n0} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

故整体的本征能量为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{m\alpha^2}{2}$$

（2）记 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$，其中 $\hat{H}_0=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$， $\hat{H}_1=\alpha\hat{p}$。则 $\hat{H}_0$ 的本征函数为一维谐振子 $u_n(x)$。且满足

$$\hat{H}_1u_n(x)=\alpha i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)u_n(x)=\alpha i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n+1}u_{n+1}(x)-\sqrt{n}u_{n-1}(x)\right)$$

则利用定态非简并微扰有

$$E_n^{(1)}=\left\langle u_n\middle|\hat{H}_1\middle|u_n\right\rangle=0$$

$$E_n^{(2)}=\sum_{i\neq n}\frac{|\left\langle u_i\middle|\hat{H}_1\middle|u_n\right\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_i^{(0)}}$$

$$E_n^{(2)}=\frac{|\left\langle u_{n-1}\middle|\hat{H}_1\middle|u_n\right\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-1}^{(0)}}+\frac{|\left\langle u_{n+1}\middle|\hat{H}_1\middle|u_n\right\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+1}^{(0)}}=\frac{m\omega\hbar\alpha^2}{2}\left(\frac{n}{h\omega}-\frac{n+1}{h\omega}\right)=-\frac{m\alpha^2}{2}$$

则能量本征值为

$$E_n=E_n^{(0)}+E_n^{(1)}+E_n^{(2)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{m\alpha^2}{2}$$

这与（1）所得完全相同。

三、本题中：$l=2,m=1,S_z=\frac{1}{2}$

（1） L^2 的本征值为 $l(l+1)\hbar^2$,则可观测到 $6\hbar^2$，概率为 1

（2） L_z 的本征值为 $m\hbar$,则可观测到 $\hbar$，概率为 1

（3） S^2 是常算符，其本征值为 $\frac{3}{4}\hbar^2$,则可观测到 $\frac{3}{4}\hbar^2$，概率为 1

（4）本题中 S_z 的本征值为 $\frac{1}{2}\hbar$,则可观测到 $\frac{1}{2}\hbar$，概率为 1

（5） J_z 的本征值为 $\left(m+\frac{1}{2}\right)\hbar$,则可观测到 $\frac{3}{2}\hbar$，概率为 1

（6）利用已知可得 $Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(S_z)=\sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\psi_{l,l+\frac{1}{2},m_j}-\sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\psi_{l,l-\frac{1}{2},m_j}$，则代入可知 $Y_{21}(\theta,\varphi)\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(S_z)=\sqrt{\frac{4}{5}}\psi_{2,\frac{5}{2},\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{5}}\psi_{2,\frac{3}{2},\frac{3}{2}}$，故可知：

J^2 的本征值为 $j(j+1)\hbar^2$,则可观测到 $\frac{35}{4}\hbar^2,\frac{15}{4}\hbar^2$，概率分别为 $\frac{4}{5},\frac{1}{5}$

四、一维无限深势阱的本征波函数为$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$，则本题中波函数可展开为

$$\psi(x,0)=C\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\right)=C\sqrt{\frac{a}{2}}\left[u_1(x)+\frac{1}{2}u_2(x)\right]$$

（1）利用归一化条件与正交性$\langle\psi|\psi\rangle=1,\langle u_i|u_j\rangle=\delta_{ij}$可知

$$C^2\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)=1$$

$$C=\pm\sqrt{\frac{8}{5a}}$$

（2）根据（1）中结果可将波函数写为$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{4}{5}}u_1(x)+\sqrt{\frac{1}{5}}u_2(x)$，根据一维无限深势阱的本征能量

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

可知

$$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2},E_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$$

则分别计算：

$$\bar{\hat{H}}=\langle\psi|\hat{H}_1|\psi\rangle=\frac{4}{5}E_1+\frac{1}{5}E_2=\frac{4\pi^2\hbar^2}{5ma^2}$$

$$\bar{\hat{H}}^2=\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle=\frac{4}{5}E_1^2+\frac{1}{5}E_2^2=\frac{\pi^4\hbar^4}{m^2a^4}$$

故能量的不确定度为

$$\Delta H=\sqrt{\bar{\hat{H}}^2-\left(\bar{\hat{H}}\right)^2}=\frac{3\pi^2\hbar^2}{5ma^2}$$

（3）由于波函数是对称的，即

$$\psi(x,0)=\psi(a-x,0)$$

即在无限深势阱左半侧观测到这个事件为 A，则有

$$P(A)=\int_0^{\frac{a}{2}}|\psi(x,0)|^2\,dx=\frac{1}{2}\langle\psi|\psi\rangle=\frac{1}{2}$$