一、概念题

1（1）腔内不是等势空间；腔体内壁有电荷；高斯定理可证

1（2）腔内是等势空间；腔体内壁无电荷；证明参看书P80

1（3）腔内是等势空间；腔体内壁无电荷

2

若 Q 不变：

$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_r S}{d}$，于是

$$Q=\mathrm{const}=\frac{\varepsilon_r SU}{d}$$

相对介电常量：$1\rightarrow\varepsilon_r$，$\varepsilon_r>1$，于是 U 减小，$U=Ed$，于是 E 减小；

利用电介质中的高斯公式，$D=\sigma_{e0}$ 不变

$w_e=\frac{1}{2}DE$减小，于是极板间电场总能量减小

若 U 不变：

$$U=\mathrm{const}=\frac{Qd}{\varepsilon_r S}$$

相对介电常量：$1\rightarrow\varepsilon_r$，$\varepsilon_r>1$，于是 Q 增大，$U=Ed$，E不变，$D=\sigma_{e0}$ 增大，$w_e=\frac{1}{2}DE$ 增大

3

电流连续性方程：

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

物理意义：单位时间内流出 S 面的电荷量等于单位时间内 S 面内电荷量的减少量

稳恒电流条件：

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

焦耳定律的微分形式：

$$p=\frac{j^2}{\sigma}=\sigma E^2$$

4

基尔霍夫定律的表达形式：

基尔霍夫第一方程组：汇于节点的各支路电流的代数为 0；物理规律：电流的恒定条件

基尔霍夫第二方程组：沿回路环绕一周，电势降落的代数和为 0；其中，电阻上的电势降落的正负号要看绕行方向与电流方向的关系：沿电流方向看去，电势降落为正，逆电流方向看去，电势降落为负；电源上电势降落的正负号要看绕行方向与电源极性的关系，从正极向负极看去电势降落为正，从负极向正极看去，电势降落为负；物理规律：静电场的环路定理

5不会

6

抗磁性、顺磁性、铁磁性、亚铁磁性、反铁磁性

7

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q_0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\iint (\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

8

（1）电磁波是横波

（2）$\vec{E}\perp\vec{H}$

（3）$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 同相位，$\vec{E}\times\vec{H}$ 的方向总是沿着传播方向 $\vec{k}$

（4）$\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 的幅值成比例：

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu\mu_0}H_0$$

（5）电磁波的传播速度：

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

二、计算题

1

答案：$\vec{E}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{i}$

解：

为方便起见，把题目中的 ϕ 替换成 θ

$$\mathrm{d}q=R(\mathrm{d}\theta)\lambda_0\cos\theta=\lambda_0 R\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}=\frac{\lambda_0\cos\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\mathrm{d}E_x=(\mathrm{d}E)\cos\theta=\frac{\lambda_0\cos^2\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E=\int \mathrm{d}E_x=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

考虑方向，有：

$$\vec{E}=-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{i}$$

2

答案：$\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2}$；最终位置：线圈平面与 x 轴垂直

解：

极坐标变换：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

在极坐标变换下，圆的方程为：$r = 2R\sin\theta$，于是圆上任意一点 (x, y) 满足：$\begin{cases} x = 2R\sin\theta\cos\theta \\ y = 2R\sin^2\theta \end{cases}$，取微分得：

$\begin{cases} \mathrm{d}x = 2R(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = 2R(2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta \end{cases}$，于是圆上的一段微弧长：

$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = 2R\mathrm{d}\theta$

由 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$，在这段电流元所处位置的磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R\sin\theta}$$

这段电流元所受元力为：

$$\mathrm{d}F = I_1(\mathrm{d}l)B\sin <\mathrm{d}\vec{l}, \vec{B}>= I_1 \cdot 2R\mathrm{d}\theta \cdot \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R\sin\theta} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cos\theta}{2\pi\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

这段电流元相对 y 轴所受的元力矩为：

$$\mathrm{d}L = r\cos\theta \cdot \mathrm{d}F = 2R\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cos\theta}{2\pi\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

积分得：

$$L = \int \mathrm{d}L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2}$$

3

答案：总阻抗为：$Z = \frac{5\sqrt{34}}{17}\ \Omega$；电感性

解：

R_1, L 串联的总复阻抗 $\tilde{Z}_1$：

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{Z}_{R_1} + \tilde{Z}_L = R_1 + \mathrm{j}\omega L$$

R_2, C 串联的总复阻抗 $\tilde{Z}_2$：

$$\tilde{Z}_2 = \tilde{Z}_{R_2} + \tilde{Z}_C = R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

两条支路并联的总复阻抗 $\tilde{Z}$：

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} + \frac{\mathrm{j}\omega C}{\mathrm{j}R_2\omega C + 1}} \\ &= \frac{(R_1 + \mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}R_2\omega C + 1)}{\mathrm{j}R_2\omega C + 1 + \mathrm{j}\omega C(R_1 + \mathrm{j}\omega L)} \end{aligned}$$

注意到：

$$\omega L = 2\pi f L = 2\pi \times 1000\ \mathrm{Hz} \times \frac{1}{\pi}\ \mathrm{mH} = 2\ \mathrm{H/s}$$

$$\omega C = 2\pi f C = 2\pi \times 1000\ \mathrm{Hz} \times \frac{500}{\pi}\ \mu\mathrm{F} = 1\ \mathrm{F/s}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \frac{(R_1+\mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}R_2\omega C+1)}{\mathrm{j}R_2\omega C+1+\mathrm{j}\omega C(R_1+\mathrm{j}\omega L)} \\
&= \frac{(1+2\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})}{1+3\mathrm{j}+\mathrm{j}(1+2\mathrm{j})} \\
&= \frac{-5+5\mathrm{j}}{-1+4\mathrm{j}} \\
&= 5\frac{(-1+\mathrm{j})(-1-4\mathrm{j})}{(-1+4\mathrm{j})(-1-4\mathrm{j})} \\
&= 5\times\frac{5+3\mathrm{j}}{17} \\
&= \frac{25}{17}+\frac{15}{17}\mathrm{j}
\end{aligned}
$$

$$
Z = |\tilde{Z}| = \frac{5\sqrt{34}}{17}\ \Omega
$$

$$
\tan\varphi = \frac{15}{17}\Big/\frac{25}{17} > 0
$$

于是：

$$
\varphi > 0
$$

所以电路是电感性。

4

答案：（1）QN, PM 边的感应电动势为 0，PQ 边的感应电动势**大小**为 $\mathscr{E}_1=\frac{\sqrt{3}aR^2}{4}$，$NM$ 边的 感应电动势大小为 $\mathscr{E}_2=\frac{\sqrt{3}aR^2}{16}$；（2）$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=\frac{3\sqrt{3}aR^2}{16}$

解：

$$
\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\iint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

于是：

$$
E = \frac{1}{2}ar
$$

先算 $\mathscr{E}_1$：

在 $\mathrm{Rt}\triangle$ 中，有：

$$
x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{\cos\theta}
$$

$$
l = \frac{R}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}R\tan\theta
$$

两边取微分：

$$
\mathrm{d}l = \frac{\sqrt{3}}{2}R\mathrm{d}(\tan\theta)
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_1 &= \int_P^Q \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_{l=0}^{l=R} \frac{1}{2} a x \cos\theta \mathrm{d}l \\
&= \int_{\theta=-\pi/6}^{\theta=\pi/6} \frac{1}{2} a \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R \mathrm{d}(\tan\theta) \\
&= \frac{3aR^2}{8} \int_{\tan\theta=-\sqrt{3}/3}^{\tan\theta=\sqrt{3}/3} \mathrm{d}(\tan\theta) \\
&= \frac{3aR^2}{8} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}aR^2}{4}
\end{aligned}
$$

求 $\mathscr{E}_2$ 的过程和上面完全一样。与上面相比，只需要替换：

$$
R \to \frac{R}{2}
$$

得到：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_2 &= \frac{\sqrt{3}a(\frac{R}{2})^2}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}aR^2}{16}
\end{aligned}
$$

两个感应电动势的方向相反，总感应电动势 $\mathscr{E}$ 应是二者之差：

$$
\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = \frac{3\sqrt{3}aR^2}{16}
$$