已知 Kehagias-Sfetsos 黑洞背景时空可以由以下线元表示：

$$
\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2
$$

$$
f(r) = 1 + \frac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}\right)
$$

其中，M 为黑洞质量，ω 为一参数。求下面的问题：

（1）写出度规行列式；

度规：

$$
g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}
$$

度规行列式：

$$
g = \det(g_{\mu\nu}) = -r^4\sin^2\theta
$$

（2）黑洞事件视界的位置；

$$
\frac{1}{g_{rr}} = f(r) = 0
$$

即：

$$
1 + \frac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}\right) = 0
$$

方程可化简为：

$$
r^2 - 2Mr + \omega^2 = 0
$$

解得：

$$
r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \omega^2}
$$

事件视界半径为：

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

（3）无限红移面的位置；

无限红移面半径记为 r_s，其满足：

$$g_{tt}|_{r=r_s} = 0$$

即：

$$-f(r_s) = 0$$

解得：

$$r_{s\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

（4）Hawking 温度；

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - \omega^2}$$

r_+ 满足：

$$1 + \frac{1}{2\omega^2}\left(r_+^2 - \sqrt{r_+^4 + 8M\omega^2 r_+}\right) = 0$$

因此：

$$\sqrt{r_+^4 + 8M\omega^2 r_+} = r_+^2 + 2\omega^2$$

上式可用于化简。

$$
\begin{aligned}
F_H = G_H &= \left.\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_+} \\
&= \frac{r_+}{\omega^2} - \frac{r_+^3 + 2M\omega^2}{\omega^2\sqrt{r_+^4 + 8M\omega^2 r_+}} \\
&= \frac{r_+}{\omega^2} - \frac{r_+^3 + 2M\omega^2}{\omega^2\left(r_+^2 + 2\omega^2\right)} \\
&= \frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2} - \frac{\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3 + 2M\omega^2}{\omega^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^2 + 2\omega^2\right]}
\end{aligned}
$$

Hawking 温度:

$$
T = \frac{\sqrt{F_H G_H}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot F_H = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{M+\sqrt{M^2-\omega^2}}{\omega^2} - \frac{\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^3 + 2M\omega^2}{\omega^2\left[\left(M+\sqrt{M^2-\omega^2}\right)^2 + 2\omega^2\right]}\right]
$$

（5）光球的位置。

选取 $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$

光子的拉格朗日量:

$$
\mathscr{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right]
$$

考虑光子在赤道面 $\theta = \pi/2$ 上运动，光子的拉格朗日量可简化为:

$$
\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[-f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right]
$$

光子的拉格朗日量中不显含广义坐标 t, φ，因此对应的广义动量是守恒量:

$$
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{t}} = -E,\ \ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = l
$$

即:

$$
-f(r)\dot{t} = -E,\ \ r^2\dot{\varphi} = l
$$

可以解得对应的广义速度:

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)}, \ \ \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}$$

又光子的拉格朗日量为零，即：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[- f(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \right] = 0$$

将 $\dot{t} = \dfrac{E}{f(r)}$，$\dot{\varphi} = \dfrac{l}{r^2}$ 代入上式可得：

$$\dot{r} = E^2 - f(r)\frac{l^2}{r^2}$$

其中，$f(r) = 1 + \dfrac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}\right)$

或者可写为：

$$\dot{r} + f(r)\frac{l^2}{r^2} = E^2$$

定义有效势：

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &\equiv f(r)\frac{l^2}{r^2} \\ &= \frac{l^2}{r^2}\left[1 + \frac{1}{2\omega^2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}\right)\right] \\ &= \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^2}{2\omega^2}\left(1 - \frac{\sqrt{r^4 + 8M\omega^2 r}}{r^2}\right) \end{aligned}$$

$$\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = E^2$$

由于 $\dot{r}^2 \geqslant 0$，因此光子只能在

$$E^2 - V_{\text{eff}} \geqslant 0$$

的区域运动。

$V_{\text{eff}}(r)$ 的极大值点记为 r_{ps}

当 $E^2 = (V_{\text{eff}})_{\text{max}}$ 且光子的初始位置就在 r_{ps} 且初速度非零时，有：

$$\dot{r} = 0$$

此时光子的运动轨迹是稳定的圆。

即光球的半径就是 r_{ps}，其满足：

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_{\mathrm{ps}}}=0$$

解得光球半径：

$$r_{\mathrm{ps}}=\frac{3M^2}{\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}}+\left(-4M\omega^2+\sqrt{-27M^6+16M^2\omega^4}\right)^{1/3}$$