小课题1

问题描述

一维弦振动的的运动方程为：

$$\rho U_{tt} - T\nabla^2 U = 0$$

其中，$U(x,t)$ 是 t 时刻弦上 x 处的质点偏离平衡位置的位移。

设 $U(x,t)$ 可写成空间部分 $u(x)$ 与时间部分 $\tilde{T}(t)$ 的乘积：

$$U(x,t) = u(x)\tilde{T}(t)$$

分离变量可得空间部分 $u(x)$ 满足方程：

$$\frac{T}{\rho}\nabla^2 u + \mu^2 u = 0$$

已知条件 $T = T_0 = 1, \rho = \rho_0 + \rho_1, \rho_0 = 1, \rho_1 = 0.3\sin\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$，分别用**谱方法**和**有限差分法**在边界条件 $u\big|_{\partial D} = 0$ 下求解本征值和本征向量。

问题重述

令 $f(x) = \dfrac{1}{1 + 0.3\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}}$，则问题化为：

在边界条件 $u\big|_{\partial D}=0$ 下求解方程

$$f(x)\nabla^2u+\mu^2u=0$$

的本征值和本征向量。

谱方法求解

理论推导

已知方程

$$\nabla^2u+\mu^2u=0,\ \ u\in D=[a,b],\ \ u\big|_{\partial D}=0$$

的本征解为：

$$\left\{\varphi_n=\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a),\ \ \mu_n=\frac{n\pi}{b-a},\ \ n=1,2,\cdots\right\}$$

则 $\{\varphi_n\}$ 可作为正交完备基。

回到方程

$$f(x)\nabla^2u+\mu^2u=0$$

其解可在 $\{\varphi_n\}$ 上展开为：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n$$

计算 ∇^2u：

$$\begin{aligned}
\nabla^2u&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n\\
&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}-C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\varphi_n
\end{aligned}$$

将上面两式代回方程 $f(x)\nabla^2 u+\mu^2 u=0$ 得:

$$f(x)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\varphi_n=\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n$$

上式两边同乘 φ_m^*，并对 x 在 $[a,b]$ 上积分:

$$\int_a^b\varphi_m^*\left[f(x)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\varphi_n\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi_m^*\left[\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n\right]\mathrm{d}x$$

先化简左边:

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\int_a^b\varphi_m^*\left[f(x)\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\varphi_n\right]\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2\int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\&\equiv\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2M_{mn}\end{aligned}$$

其中,

$$M_{mn}\equiv\int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

再化简右边:

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\int_a^b\varphi_m^*\left[\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n\right]\mathrm{d}x\\&=\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_a^b\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x\\&=\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}C_n\delta_{mn}N_m\\&=\mu^2C_mN_m\end{aligned}$$

其中,

$$N_m\equiv\int_a^b\varphi_m^*(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$$

于是：

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 M_{mn} = \mu^2 C_m N_m$$

即：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \frac{M_{mn}}{N_m} \cdot C_n = \mu^2 C_m$$

令 $\tilde{M}_{mn} = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \frac{M_{mn}}{N_m}$，则：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{M}_{mn} C_n = \mu^2 C_m$$

上式等价于矩阵方程：

$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{C} = \mu^2 \mathbf{C}}$$

其中，矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}$ 的矩阵元 $\tilde{\mathbf{M}}_{mn}$ 为：

$$\tilde{\mathbf{M}}_{mn} = \tilde{M}_{mn} = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \frac{M_{mn}}{N_m} = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 \frac{\int_a^b f(x)\varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 0.3\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}}, \quad \varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)$$

向量 $\mathbf{C}$ 的元素 $\mathbf{C}_m$ 为：

$$\mathbf{C}_m = C_m$$

矩阵方程

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{C} = \mu^2 \mathbf{C}$$

是矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}$ 的特征方程。可以解出一系列本征值和本征向量。

只要求出本征向量 $\mathbf{C}$，代回 $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n\varphi_n$ 就能得到弦的本征振动模式。

数值求解

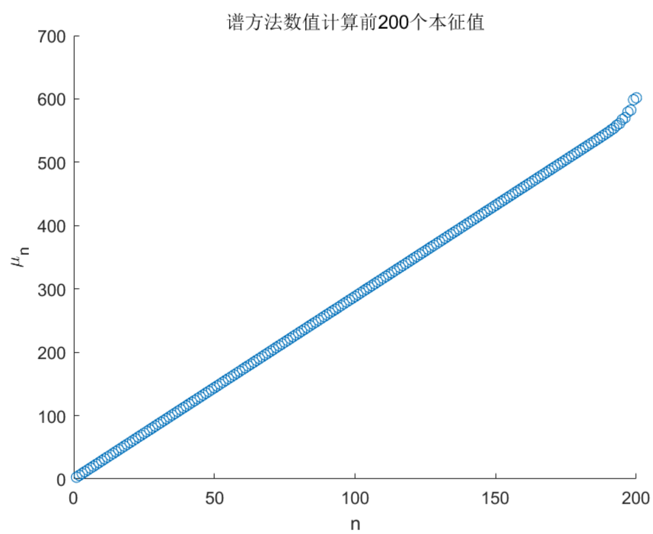
设置弦的端点分别为 $a=0, b=0$；对于无穷多项求和 $u=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n$，取前 200 项，最终画出前 200 个本征值以及前 12 个本征函数。

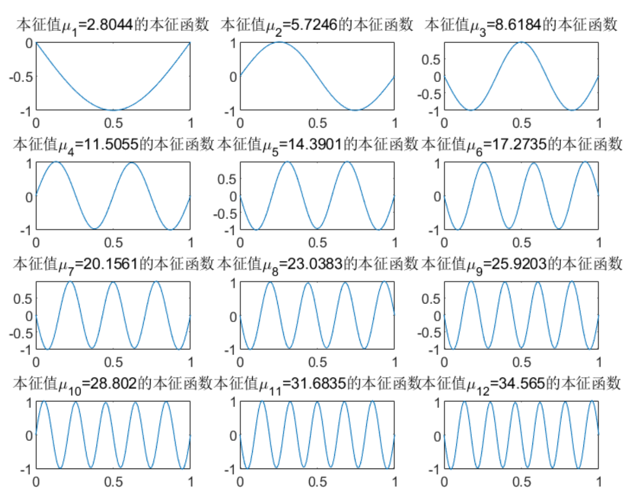
Matlab 代码如下：

```
a = 0;
b = 1;
f = @(x) 1./(1+0.3.*sin(pi.*(x-a)./(b-a)));
phi = @(n, x) sin(n.*pi./(b-a).*(x-a));
n = 200;

M = zeros(n, n);

for i = 1:n
    for j = 1:n
        int_func = @(x) f(x).*phi(i, x).*phi(j, x);
        tmp_1 = integral(int_func, a, b);
        tmp_2 = integral(@(x) phi(i, x).^2, a, b);
        M(i, j) = (j.*pi./(b-a)).^2 * tmp_1 ./ tmp_2;
    end
end

[V, D] = eig(M);

[mu, index] = sort(sqrt(diag(D)));
V = V(:,index);

x = 1:n;
y = zeros(1, n);

for i = 1:n
    y(i) = mu(i);
end

figure(1);
scatter(x, y);
xlabel('n');
ylabel('\mu_n');
title('谱方法数值计算前200个本征值');

func_arr = cell(n, 1);

for i = 1:n
    func_arr{i} = @(x) phi(i, x);
end

figure(2);
```

```
for i = 1:12
    subplot(4, 3, i);
    u = @(x) 0;
    for j =1:n
        u = @(x) u(x) + func_arr{j}(x) * V(j, i);
    end
    x = a:0.01:b;
    y = u(x);
    plot(x, y);
    title(['本征值\mu_{',num2str(i), '}=',num2str(mu(i)), '的本征函数']);
    hold on;
end
```

绘图如下：





可以看到，谱方法给出的 200 个本征值中，前面绝大多数本征值呈线性分布，而末尾几个本征值出现了明显偏差。前 12 个本征函数具有明显的周期性。

有限差分法求解

差分原理

区间 $x \in [a,b]$ 可均匀离散为 $N+1$ 个格点 x_i，$i=0,1,2,\cdots,N$，相邻两个格点的间距为

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

于是：

$$x_i = a + i\Delta x$$

设第 i 个格点处的质点偏离平衡位置的位移为 u_i，则：

$$\begin{aligned}\nabla^2 u\Big|_i &= \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\Big|_i \\ &\approx \frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+0.3\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}} \Longrightarrow f(x)\Big|_i = \frac{1}{1+0.3\sin\frac{\pi(x_i-a)}{b-a}} \equiv f_i$$

于是方程 $f(x)\nabla^2 u + \mu^2 u = 0$ 可离散化为：

$$-f_i \cdot \frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i}{(\Delta x)^2} = \mu^2 u_i,\quad (i=1,2,\cdots,N-1)$$

边界条件 $u\Big|_{\partial D} = 0$ 的离散化形式为：

$$u_0 = u_N = 0$$

改写为矩阵形式：

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix} f_1 & & & \\ & f_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1}\end{bmatrix} = \mu^2\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1}\end{bmatrix}$$

这恰是一个矩阵的特征方程，可以解出本征值和本征向量。

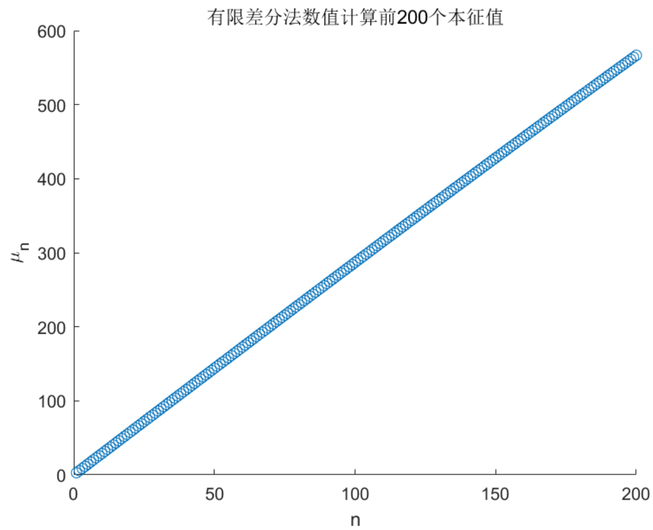
数值求解

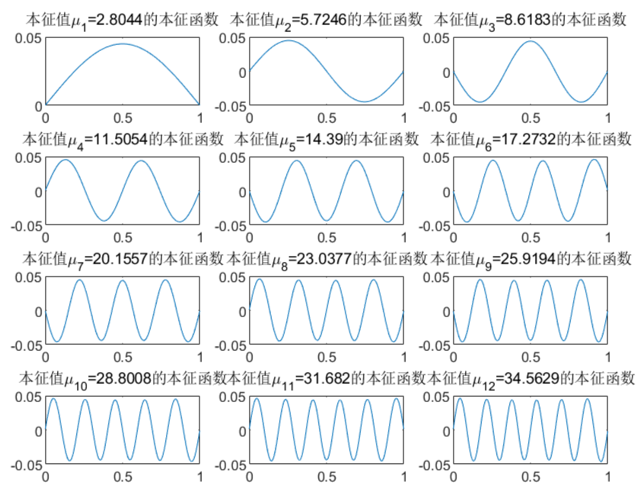
设置弦的端点分别为 $a = 0, b = 0$，将长度为 $b - a = 1$ 的弦均匀离散成 $N = 1000$ 份，共 $N + 1 = 1001$ 个格点进行求解。最后画出前 200 个本征值以及前 12 个本征函数。

Matlab 代码如下：

```
N = 1000;
a = 0;
b = 1;
delta_x = (b-a)./N;

x = linspace(a, b, N+1);
x = x(2:N);
y = 1 ./ (1+0.3.*sin(pi.*(x-a)./(b-a)));

m_1 = diag(y, 0);
m_2 = diag( -2.*ones(N-1, 1), 0 ) + diag( ones(N-2, 1), -1 ) + diag( ones(N-2, 1), 1 );

M = -1./delta_x^2.*m_1*m_2;

[V, D] = eig(M);

[mu, index] = sort(sqrt(diag(D)));
V = V(:,index);

n = 200;

x_1 = 1:n;
y_1 = mu(1:n);

figure(1);
scatter(x_1, y_1);
xlabel('n');
ylabel('\mu_n');
title('有限差分法数值计算前200个本征值');

figure(2);
for i =1:12
    subplot(4, 3, i);
    plot(x, V(:,i));
    title(['本征值\mu_{', num2str(i), '}=', num2str(mu(i)), '的本征函数']);
end
```

绘图如下：

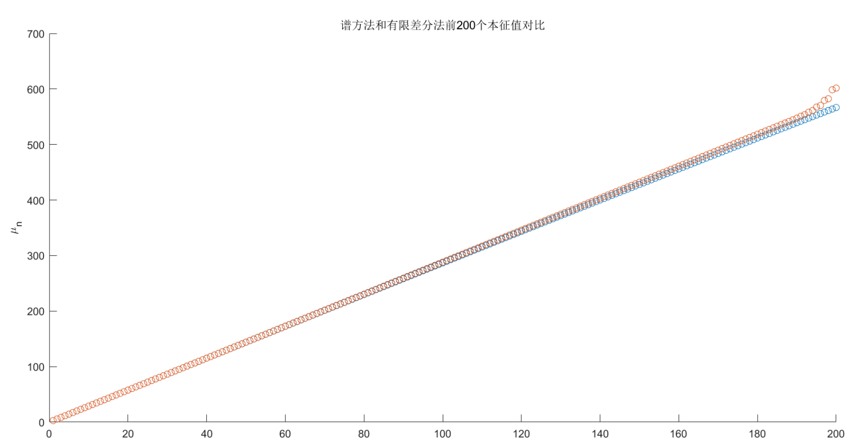




可以看到，有限差分法给出的前 200 个本征值大致呈线性分布；给出的前 12 个本征值具有较为明显的周期性。

谱方法与有限差分法的对比

将谱方法和有限差分法求得的前 200 个本征值在同一张图中对比，绘图如下：



可以看到，两种方法分别求解的本征值中，只有大约前 40% 的本征值是几乎相同的，后面的本征值就开始出现偏差，到最后两种方法求出的本征值出现明显偏差。谱方法给出的最后几个本征值出现了相当明显的偏差，而有限差分法给出的本征值总体呈线性分布。

总结

本文分别用谱方法和有限差分法计算了方程

$$f(x)\nabla^2 u+\mu^2 u=0,\ \ f(x)=\frac{1}{1+0.3\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a}}$$

在第一类齐次边界条件下的前 200 个本征值和前 12 个本征函数。

谱方法将解 u 表示为基函数 $\left\{\varphi_n=\sin\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a),\ \ n=1,2,\cdots\right\}$ 的线性组合 $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n$ ，通过求出系数 C_n 来求出本征函数。

然而在实际求解过程中，由于算力不足，n 并不能取到无穷大，因此不可避免地舍去了高频基函数，这是谱方法的主要误差来源。这种舍弃导致了求解的 200 个本征值中，后几个本征值出现明显偏差。谱方法得到的本征函数更加光滑，周期性也更明显。

有限差分法将连续的问题离散化，将连续的函数或导数转化为离散的点和有限差分近似。我们先将连续的一维区域划分为离散的一维网格，然后在网格上建立差分方程，将微分方程转化为代数方程组。最后，通过数值方法求解这个代数方程组，得到问题的数值解。

有限差分法的误差主要来源于离散步长 $\Delta x=(b-a)/N$ 并不能做到无穷小，因此利用差分来近似导数以及二阶导数存在误差。正是这种误差导致有限差分法计算得到的前 200 个本征值中，大约只有前 40% 是准确的，后 60% 存在明显偏差。有限差分法得到的本征函数光滑性略差，周期性较明显。

总的来说，谱方法可以提供高精度的解，但当基函数的数量很大时，计算量也会很大，程序运行速度较慢；有限差分法简单直观，计算量小，但精度稍差。