一、

1.试讨论静电平衡下空腔、实心导体的性质

空腔：若腔内无电荷，则在静电平衡下，导体壳的内表面上处处没有电荷，电荷只能分布在外表面，空腔内没有电场，空腔内的电势处处相等；若腔内有其他带电体，在静电平衡状态下，导体壳的内表面所带电荷与腔内电荷的代数和为 0

实心导体：在达到静电平衡时，实心导体内部处处没有未抵消的净电荷，电荷只分布在导体的表面，导体是个等势体，导体表面是个等势面，导体以外靠近其表面地方的场强处处与表面垂直，大小为 $E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$

2.某球形介质球在匀强电场 E 下被均匀极化，该介质的介电常量为 ε，求球心处的电场强度大小

思路：均匀极化，极化电荷只分布在介质球表面，介质球内部没有极化电荷；球坐标下求解

解：

令 z 轴于原电场 $\vec{E}$ 同向平行，

$$\begin{aligned} P &= \chi_e \varepsilon_0 E \\ &= (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_e' &= \vec{P}\cdot\vec{e}_n \\ &= P\cos\theta \\ &= (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q' &= \sigma_e \mathrm{d}S \\ &= \sigma_e R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= (\varepsilon-1)\varepsilon_0 R^2 E\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_z' &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q'}{R^2}\cdot\cos\theta \\ &= -\frac{(\varepsilon-1)E\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{4\pi} \end{aligned}$$

（其中，正负代表方向）

$$
\begin{aligned}
E'_z &= \oiint_S \mathrm{d}E'_z \\
&= -\frac{(\varepsilon-1)E}{4\pi}\oiint_S \cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{(\varepsilon-1)E}{4\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon-1)E}{3}
\end{aligned}
$$

实际电场是E, E'的矢量和:

$$
\begin{aligned}
E_{real} &= E' + E \\
&= -\frac{(\varepsilon-1)E}{3} + E \\
&= \frac{(4-\varepsilon)E}{3}
\end{aligned}
$$

3:

无电流：均无变化(垂直方向磁感应强度为零，故不变化)

有电流：平行方向无变化，垂直方向有变化.

麦克斯韦方程组的两条积分形式:

$$
\oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0
$$
$$
\oint_L \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot\mathrm{d}\vec{S}
$$

微分形式为:

$$
\nabla\cdot\vec{B} = 0
$$
$$
\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial\vec{t}}
$$

注意到，在各向同性线性介质中，$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

于是:

$$
\nabla\cdot\vec{B} = 0
$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu\mu_0}(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{t}})$$

考虑恒定情况，且空间内无电流，则 $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{B} = \vec{0}$，由于磁感应强度为平行线，不妨以磁感应强度方向为 x 轴建右手系，记 $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$，其中，B_x 是场点 (x, y, z) 的函数

$$\nabla \cdot \vec{B} \Longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

于是磁感应强度沿平行方向和垂直方向不变化

若空间内有电流，则 $\nabla \times \vec{B} \neq \vec{0}$，但 $\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$，于是沿平行方向磁感应强度无变化，沿垂直方向有变化

4.

电流连续性方程：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

物理本质：电荷守恒定律

基尔霍夫定律：

基尔霍夫第一方程组：汇于节点的各支路电流的代数和为 0

基尔霍夫第二方程组：绕回路环绕一周，电势降落的代数和为 0

物理意义：不知道

5.直导线两端无电动势，整个回路有电动势，因为直导线处处与涡旋电场垂直

6

磁动势：$\mathscr{E}_m = NI_0$

磁阻：$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_0 \mu S_i}$

磁势下降：$H_i l_i = \varPhi_B \sum\limits_i R_{mi} = \varPhi_B \sum\limits_i \frac{l_i}{\mu_0 \mu_i S_i}$

磁路定理：$\mathscr{E}_m = \sum\limits_i H_i l_i = \varPhi_B \sum\limits_i R_{mi}$

7

电阻的阻抗：$Z_R = R$

电阻的相位：$\varphi = 0$

电容的阻抗：$Z_C = \frac{1}{\omega C}$

电容的相位：$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

电感的阻抗：$Z_L = \omega L$

电感的相位：$\varphi = \frac{\pi}{2}$

例子1：电阻和电容串联

$$\tilde{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \frac{1}{\omega C}\mathrm{j}$$
$$Z = |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$
$$\varphi = \arctan(-\frac{1}{\omega CR})$$

例子2：电阻和电感串联

$$\tilde{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$$
$$Z = |\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

8

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$$
$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$
$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$
$$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

物理本质（我不确定）：电介质中的高斯定理、静电场环路定理+法拉第电磁感应定律、磁场的高斯定理、安培环路定理+麦克斯韦位移电流假说

二、

1.(1):

$$\oiint\limits_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)} q_0$$

$$D=\sigma$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\vec{P}$$

$$\sigma=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-1}P_1=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-2}P_2$$

上极板上缘:

$$\sigma'_{e1}=P_{1n}=-\frac{\sigma(\varepsilon_1-1)}{\varepsilon_1}$$

下极板下缘:

$$\sigma'_{e2}=P_{2n}=\frac{\sigma(\varepsilon_2-1)}{\varepsilon_2}$$

交界处:

$$\sigma'_e=\sigma\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

1.(2):

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma S}{E_1d_1+E_2d_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}$$

2

设单位宽度上的电流强度为 i

答案: $\frac{\mu_0 i}{2}$

由毕奥-萨伐尔定律，无限长电流强度为 I 的载流直导线

$$2\pi rB=\mu_0 I$$

于是:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在无限大平面上：

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 i\sin\theta}{2\pi r_0}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 i}{2\pi r_0}\cdot\frac{r_0}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 i}{2\pi\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$(\mathrm{d}\theta)\sin\theta=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

积分得：

$$B=\int(\mathrm{d}\theta)\sin\theta=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\mu_0 i}{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 i}{2}$$

安培环路定理验证：

$$2\cdot xB=x\mu_0 i$$

解得：

$$B=\frac{\mu_0 i}{2}$$

3

答案：$\frac{\sqrt{2}\mu_0 Iva^2}{4\pi x(x+a)}$

上下两边产生的动生电动势相互抵消，故只用考虑左右两边

左边电动势的大小：

$$\mathscr{E}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}va\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

右边电动势的大小：

$$\mathscr{E}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}va\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}$$

于是：

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2=\frac{\sqrt{2}\mu_0 Iva^2}{4\pi x(x+a)}$$

方向为顺时针

4

答案：$P' \approx 31\mathrm{W}$

$$R = \frac{U^2}{P_{额}} = 1210\,\Omega$$

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C = R - \frac{1}{\omega C}\mathrm{j}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$I' = \frac{U}{Z}$$

$$P' = I'^2 R$$