设一粒子沿 z 轴运动，其速度 $\vec{v}=v\vec{\mathrm{e}}_z, v\ll c$,

$$v=v(t)=\begin{cases}\Delta v & ,t<0\\ \Delta v(1+\omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t} & ,t\geqslant 0\end{cases}$$

求其 $\dfrac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}\Omega}$

$$\dot{\vec{v}}(t)=\begin{cases}\vec{0} & ,\ \ t<0\\ \vec{\mathrm{e}}_z\left[-\omega_0^2\left(\Delta v\right)t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right] & ,\ \ t\geqslant 0\end{cases}$$

带电粒子产生的辐射场为：

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\frac{\hat{r}\times\left[(\hat{r}-\vec{v}/c)\times\dot{\vec{v}}\right]}{c^2\left(1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\right)^3}$$

这里粒子沿直线运动，$\vec{v}\parallel\dot{\vec{v}}$，因此：

$$\vec{v}\times\dot{\vec{v}}=\vec{0}$$

且粒子低速运动，因此：

$$1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\approx 1$$

于是，带电粒子的辐射场为：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)$$

粒子低速运动，$t=t'+r/c, \mathrm{d}t/\mathrm{d}t'\approx 1$，$\mathrm{d}t\approx\mathrm{d}t'$

其频谱为：

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{t=-\infty}^{t=+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right)\\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t'+r/c\right)}\mathrm{d}t'\right)\\
&\approx \frac{q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{t'=-\infty}^{t'=+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\right)\\
&= \frac{q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\int_{t'=0}^{t'=+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\right)\\
&= \frac{q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\int_{t'=0}^{t'=+\infty}-\omega_0^2\left(\Delta v\right)t'\mathrm{e}^{-\omega_0 t'}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\int_{t'=0}^{t'=+\infty}t'\mathrm{e}^{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)t'}\mathrm{d}t'\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\int_{t'=0}^{t'=+\infty}\frac{\partial}{\partial\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)}\mathrm{e}^{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)t'}\mathrm{d}t'\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)}\int_{t'=0}^{t'=+\infty}\mathrm{e}^{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)t'}\mathrm{d}t'\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)}\left[\frac{1}{-\omega_0+\mathrm{i}\omega}\cdot\mathrm{e}^{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)t'}\Big|_{t'=0}^{t'=+\infty}\right]\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)}\left[\frac{-1}{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)}\right]\\
&= \frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\frac{1}{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)^2}
\end{aligned}
$$

设 $\hat{r}$ 与 $\vec{\mathrm{e}}_z$ 的夹角为 θ，辐射能量密度角分布为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}\Omega} &= 4\pi\varepsilon_0 c\left|\vec{E}_\omega\right|^2 r^2 \\
&= 4\pi\varepsilon_0 c r^2 \times \left|\frac{-\omega_0^2\left(\Delta v\right)q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\vec{\mathrm{e}}_z\right)\frac{1}{\left(-\omega_0+\mathrm{i}\omega\right)^2}\right|^2 \\
&= 4\pi\varepsilon_0 c\cdot\left|\frac{\omega_0^2\left(\Delta v\right)q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\right|^2\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\omega_0^2\omega^2}
\end{aligned}
$$