4.1 李群的定义和线性表示

李群的定义

李群 G 是一种特殊的连续群,群元 $g\in G$ 可以用 r 个独立实参数 $\alpha\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 来标记:

$$g(\alpha) \equiv g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$

参数 α 可在有限或无限范围内连续变化。 α 的所有取值构成一个参数空间,称为群参数空间。

若 $g(\alpha)$ 满足以下 5 个条件,则称群 $G = \{g(\alpha)\}$ 为 r 阶李群:

(1) 封闭性: 对于任意给定的参数 α 和 β , 总可以在群参数空间中找到 γ , 使得:

$$g(\gamma) = g(\alpha)g(\beta)$$

参数 γ 为实参数 α , β 的实函数:

$$\gamma = f(\alpha, \beta)$$

即:

$$\gamma_i = f_i(lpha_1, \cdots, lpha_r; eta_1, \cdots, eta_r)$$

称为李群的结构函数。

(2) 结合律:

$$[g(\alpha)g(\beta)]g(\gamma) = g(\alpha)[g(\beta)g(\gamma)]$$

也即:

$$f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f(\beta, \gamma))$$

(3) 存在恒元 $g(\alpha_0)$: 群参数空间中存在参数 α_0 ,使得对任意群参数 α 都有:

$$g(\alpha) = g(\alpha_0)g(\alpha) = g(\alpha)g(\alpha_0)$$

也即:

$$lpha = f(lpha_0, lpha) = f(lpha, lpha_0)$$

(4) 存在逆元: 对任意群参数 α , 存在群参数 $\bar{\alpha}$, 使得:

$$g(\alpha)g(\bar{lpha})=g(\bar{lpha})g(lpha)=g(lpha_0)$$

也即:

$$\alpha_0 = f(\alpha, \bar{\alpha}) = f(\bar{\alpha}, \alpha)$$

- (5) 结构函数 $\gamma = f(\alpha, \beta)$ 是解析函数。
- 通常选择 $lpha_0=0$,即 $(lpha_{01},lpha_{02},\cdots,lpha_{0r})=(0,0,\cdots,0)$ 作为恒元对应的群参数的取值。
- $\Xi \alpha$ 的取值范围有界,则称李群 G 为紧致李群。
- 上面的描述中, 所有的希腊字母均代表一组参数。
- 当 α , β 是小量时, $f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$
- 当 α 是小量时, $\bar{\alpha}=-\alpha$,其中 $g(\bar{\alpha})=g^{-1}(\alpha)$
- 连通性:一个李群如果具有如下性质,则称为单连通的:任意群元都能连续地变到恒元。/任意群元 所对应地群参数都能连续地经过群参数允许区域变到零。

n 维空间中带 r 个实参数的线性坐标变换

$$x_i'=arphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;lpha_1,lpha_2,\cdots,lpha_r),\ \ i=1,2,\cdots,n$$

简写为:

$$x_i' = \varphi_i(x; \alpha)$$

矩阵形式:

$$egin{bmatrix} x_1' \ x_2' \ dots \ x_n' \end{bmatrix} = g(lpha) egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{bmatrix}$$

满足前面 5 个条件的 $g(\alpha)$ 构成 r 阶李群 $G=\{g(\alpha)\}$

李群的线性表示

李群的线性表示是一种将群元映射到表示矩阵的同态关系:

$$G = \{g(lpha)\} o D(G) = \{D(g_lpha) \equiv D(lpha)\}$$

其中 $D(\alpha)$ 称为 α 的函数矩阵,满足李群的法则:

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\gamma), \ \ \gamma = f(\alpha, \beta)$$

$$D(lpha_0)D(lpha)=ED(lpha)=D(lpha)$$
 $D(lpha)D(arlpha)=D(lpha_0)=E,\ \ D(arlpha)=D^{-1}(lpha)$

还要求 $D(\alpha)$ 是 2 阶光滑的。

结构函数不依赖于表示。只要两个群同构,它们的结构函数就是一致的。李群的结构函数只有李群的结构决定。

李群的线性表示的生成元

若在恒元附近(群参数 α 在 α_0 附近), α 与恒元附近的群元的矩阵表示存在——对应关系,则可以将 $D(\alpha)$ 在 α_0 附近展开:

$$D(lpha) = D(lpha_0) + rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_k}igg|_{lpha = lpha_0} (lpha_k - lpha_{0k}) = E + (lpha_k - lpha_{0k})I_k$$

其中,

$$I_k \equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_k}igg|_{lpha=lpha_0}$$

为李群的线性表示的生成元。

若 $\alpha_0 = 0$,则上式化简为:

$$D(lpha) = E + rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_k}igg|_{lpha=0} lpha_k \equiv E + lpha_k I_k$$

引入:

$$ilde{I}_k \equiv \mathrm{i} I_k$$

则:

$$D(lpha) = E - \mathrm{i}lpha_k ilde{I}_k$$

生成元的线性无关性

r 阶李群的生成元是线性无关的。

证明:

假设 $r \cap I_k$ 是线性相关的,则存在一组不全为零的系数 $\{C_k\}$ 使得:

$$C_k I_k = 0$$

引入一个小量 $\lambda \ll 1$, 有:

$$\lambda C_k I_k = 0$$

记 $\alpha_k = \lambda C_k \ll 1$, 即 $\alpha = \lambda C \neq 0$

$$D(\alpha) = D(\lambda C) = E + \lambda C_k I_k = E = D(0)$$

于是 $\alpha = 0$, 即 $\lambda C = 0$, 于是

$$C_k = 0$$

这与假设 C_k 不全为零矛盾。

几个例子

SO(2) 群

SO(2) 群只有一个独立的群参数,因此是**一阶**李群。

表示矩阵为:

$$D(\omega) = egin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}, \ \ \omega \in [0, 2\pi]$$

群参数 ω 有界,因此 SO(2) 是**紧致**的。

当 $\omega=0$,D(0)=E,因此 $\omega_0=0$ 是恒元对应的群参数的取值。

生成元的定义:

$$I \equiv rac{\partial D(\omega)}{\partial \omega}igg|_{\omega=0} = egin{bmatrix} -\sin\omega & -\cos\omega \ \cos\omega & -\sin\omega \end{bmatrix}igg|_{\omega=0} = egin{bmatrix} 0 & -1 \ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\omega \ll 1$,

$$D(\omega) = E + \omega I = egin{bmatrix} 1 & -\omega \ \omega & 1 \end{bmatrix}$$

 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 群: 2 维空间实线性变换群

表示矩阵为:

$$D(lpha) = egin{bmatrix} lpha_1 & lpha_2 \ lpha_3 & lpha_4 \end{bmatrix}, \ \det\! D(lpha)
eq 0$$

确定恒元对应的群参数 α_0 的取值:

$$\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}, \alpha_{04}) = (1, 0, 0, 1)$$

生成元:

$$egin{aligned} I_k \equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_k}igg|_{lpha=lpha_0} \ I_1 = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ I_2 = egin{bmatrix} 0 & 1 \ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ I_3 = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ I_4 = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 α 接近 $\alpha_0 = (1,0,0,1)$ 时,

$$D(lpha) = E + (lpha_k - lpha_{0k})I_k = egin{bmatrix} lpha_1 & lpha_2 \ lpha_3 & lpha_4 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$: n 维空间实线性变换群

表示矩阵为:

$$D(lpha) = egin{bmatrix} lpha_{11} & \cdots & a_{1n} \ dots & \ddots & dots \ lpha_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \det D(lpha)
eq 0$$

共 n^2 个群参数。

恒元对应的群参数的取值为:

$$lpha_0 = egin{bmatrix} 1 & & & \ & \ddots & \ & & 1 \end{bmatrix}$$
 或 $lpha_{0ij} = \delta_{ij}$

生成元:

$$I_{ij} \equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_{ij}}igg|_{lpha=lpha_0}$$
 $[I_{ij}]_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$

生成元 I_{ij} 的 i 行 j 列为 1,其他矩阵元为零。

二维实特殊线性变换群: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (3 阶非紧致李群)

表示矩阵为:

$$D(lpha) = egin{bmatrix} lpha_1 & lpha_2 \ lpha_3 & lpha_4 \end{bmatrix}, \ \det\! D(lpha) = 1 \Longrightarrow lpha_4 = rac{1 + lpha_2 lpha_3}{lpha_4}$$

恒元对应的群参数:

$$D(lpha_0)=E=egin{bmatrix}1&0\0&1\end{bmatrix}\Longrightarrowlpha_0=(lpha_{01},lpha_{02},lpha_{03})=(1,0,0)$$

生成元:

$$egin{align} I_1 &\equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_1}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & -1 \end{bmatrix} \ I_2 &\equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_2}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} 0 & 1 \ 0 & 0 \end{bmatrix} \ I_3 &\equiv rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_3}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \end{aligned}$$

SO(3) 群 (3) 阶紧致李群)

SO(3) 群元可用三个参数 φ, θ, ω 表示:

$$C_{\hat{n}(heta,arphi)}(\omega) = S(arphi, heta)C_{ec{k}}(\omega)S^{-1}(arphi, heta)$$

对于上式,当 $\omega=0$,任意的 θ,φ 都对应着李群表示矩阵的恒元。也就是说,在恒元 E 附近,参数 $\alpha=(\theta,\varphi,\omega)$ 与群元不是一一对应的。因此,这组参数不能用于求李群线性表示的生成元。

指数表示:

$$D(\omega) = C_{\hat{n}(\theta,\varphi)}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_i T_i}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \ T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ T_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_3 = \omega \cos \theta \end{cases}$$

只有当 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(0,0,0)$ 时, $D(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{i}\mathrm{T_i}}=E$ 。因此可选择群参数 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 对应的指数表示来求生成元。

生成元:

$$I_1 \equiv rac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_1}igg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_1 = egin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & -1 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2\equiv rac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_2}igg|_{\omega=\omega_0}=-\mathrm{i}T_2=egin{bmatrix}0&0&1\0&0&0\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$I_3 \equiv rac{\partial D(\omega)}{\partial \omega_3}igg|_{\omega=\omega_0} = -\mathrm{i}T_3 = egin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \ 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对易关系:

$$[I_i,I_j]=arepsilon_{ijk}I_k$$

二维特殊幺正变换群 SU(2) 群

$$D(lpha) = egin{bmatrix} a & b \ c & d \end{bmatrix}, \ \ D^\dagger D = E, \ \ {
m det} D(lpha) = 1$$

每个矩阵均有实部与虚部, 共8个实参数。

幺正条件和行列式条件分别给出 2^2 和 1 个约束方程。

SU(2) 只有3个独立实参数,是三阶李群。

$$D^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$$
$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$$
$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

若令

$$egin{aligned} a &= \cos lpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_2}, \ \ b &= \sin lpha_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_3} \ \ D(lpha) &= egin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_2} \cos lpha_1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_3} \sin lpha_1 \ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lpha_3} \sin lpha_1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lpha_2} \cos lpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

然而, $\alpha_1=0, \alpha_2=0$ 时 $D(\alpha)=E$, 而对 α_3 无任何要求。这样无法求生成元。

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 \\ &= \cos^2 \alpha_1 \left(\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 \right) + \sin^2 \alpha_1 \left(\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 \right) \\ &= \left(\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 \right) + \left(\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \right) \\ &= |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

令:

$$\left\{ egin{aligned} a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_3} \left(\coslpha_1\coslpha_2 + \mathrm{i}\sinlpha_1\sinlpha_2
ight) \ b = \coslpha_1\sinlpha_2 + \mathrm{i}\sinlpha_1\coslpha_2 \end{aligned}
ight.$$

$$D(lpha) = egin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lpha_3} \left(\coslpha_1\coslpha_2 + \mathrm{i}\sinlpha_1\sinlpha_2
ight) & \coslpha_1\sinlpha_2 + \mathrm{i}\sinlpha_1\coslpha_2 \ -\coslpha_1\sinlpha_2 + \mathrm{i}\sinlpha_1\coslpha_2 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lpha_3} \left(\coslpha_1\coslpha_2 - \mathrm{i}\sinlpha_1\sinlpha_2
ight) \end{bmatrix}$$

这样定义下,只有当 $\alpha=(0,0,0)$ 时, $D(\alpha)=E$,因此这样定义的 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可作为群参数。 生成元:

$$egin{aligned} I_1 &= rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_1}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_1 \ I_2 &= rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_2}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} 0 & 1 \ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_2 \ I_3 &= rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_3}igg|_{lpha=lpha_0} = egin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i}\sigma_3 \end{aligned}$$

对易关系:

$$[I_i,I_j]=-2arepsilon_{ijk}I_k$$

有限群元的生成

SO(2) 群

 $\mathrm{SO}(2)$ 群只有一个独立的群参数 heta ,与恒元对应的参数的取值为 heta=0 当 $\delta heta o 0$,

$$D(\delta heta) = E + I\delta heta$$

$$\delta heta = rac{ heta}{N}, \;\; N \gg 1$$

$$D(heta) = D^N(\delta heta) pprox (E + I\delta heta)^N$$

$$D(heta) = \lim_{N o \infty} \left(E + rac{ heta I}{N}
ight)^N = \mathrm{e}^{ heta I}$$

当李群有多个独立的群参数时,

$$D(lpha)=\mathrm{e}^{lpha_i I_i}$$

对于 SO(2) 群,有限转动 $D(\theta)$ 可由无穷小转动变换生成:

$$D(\theta) = e^{\theta I} = \exp\left(\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

SO(3) 群

$$D(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\mathrm{e}^{\omega_1 I_1+\omega_2 I_2+\omega_3 I_3}$$

O(3) 群的生成元与 SO(3), 只不过对 O(3) 群中行列式为 -1 的群元, 还需要乘上空间反演矩阵:

$$D(\omega) = egin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \ 0 & -1 & 0 \ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\omega_i I_i}$$

4.2 李群三定理

定理一

李群的线性表示完全由生成元决定。

证明:

设李群的表示矩阵为 $D(\alpha)$, 乘法法则:

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\gamma), \ \gamma = f(\alpha, \beta)$$

上式两端右乘 $D^{-1}(\beta)$:

$$D(\alpha) = D(\gamma)D^{-1}(\beta)$$

上式两端对 α_i 求导:

$$rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_i} = rac{\partial D(\gamma)}{\partial \gamma_j} rac{\partial f_j(lpha,eta)}{\partial a_i} D^{-1}(eta)$$

取 $eta=ar{lpha}$,此时 $\gamma=f(lpha,ar{lpha})=lpha_0, D^{-1}(eta)=D^{-1}(ar{lpha})=D(lpha)$

$$\left.rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_i} = rac{\partial D(\gamma)}{\partial \gamma_j}
ight|_{\gamma=lpha_0} rac{\partial f_j(lpha,eta)}{\partial a_i}
ight|_{eta=arlpha} D(lpha)$$

令:

$$S_{ji}(lpha) = \left. rac{\partial f_j(lpha,eta)}{\partial lpha_i}
ight|_{eta = ar{lpha}}$$

则:

$$\left\{ egin{aligned} rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_i} &= I_j S_{ji}(lpha) D(lpha) \ D(lpha_0) &= E \end{aligned}
ight.$$

因此 $D(\alpha)$ 完全由生成元 I_j 决定。

若令 $\alpha = \alpha_0$, 可得:

$$I_i = I_j S_{ji}(lpha_0) E = I_j S_{ji}(lpha_0)$$

另一方面,

$$I_i = I_j \delta_{ji}$$

对比可得:

$$S_{ji}(lpha_0) = \delta_{ji}$$

定理二

李群的线性表示的生成元满足如下关系:

$$\left[I_{j},I_{k}
ight]=C_{jk}^{i}I_{i}$$

其中, C_{ik}^i 为结构常数:

$$C^i_{jk} \equiv \left(rac{\partial S_{ik}(lpha)}{\partial lpha_j} - rac{\partial S_{ij}(lpha)}{\partial lpha_k}
ight)igg|_{lpha=lpha_0}$$

一种证明方法

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_i} = I_j S_{ji}(\alpha) D(\alpha)$$

上式两端对 α_k 求导, 再令 $\alpha = \alpha_0$:

$$egin{aligned} \left. rac{\partial^2 D(lpha)}{\partial lpha_k \partial lpha_i}
ight|_{lpha = lpha_0} &= I_j rac{\partial S_{ji}}{\partial lpha_k}
ight|_{lpha = lpha_0} D(lpha_0) + I_j S_{ji}(lpha_0) rac{\partial D(lpha)}{\partial lpha_k}
ight|_{lpha = lpha_0} \ &= I_j rac{\partial S_{ji}}{\partial lpha_k}
ight|_{lpha = lpha_0} + I_j \delta_{ji} I_k \ &= I_j rac{\partial S_{ji}}{\partial lpha_k}
ight|_{lpha = lpha_0} + I_i I_k \end{aligned}$$

交换 i, k, 得:

$$\left. rac{\partial^2 D(lpha)}{\partial lpha_i \partial lpha_k}
ight|_{lpha = lpha_0} = I_j rac{\partial S_{jk}}{\partial lpha_i}
ight|_{lpha = lpha_0} + I_k I_i$$

相减可得:

$$I_iI_k-I_kI_i=\left(rac{\partial S_{jk}(lpha)}{\partial lpha_i}-rac{\partial S_{ji}(lpha)}{\partial lpha_k}
ight)igg|_{lpha=lpha_0}I_j$$

令:

$$C_{ik}^{j} = \left(rac{\partial S_{jk}(lpha)}{\partial lpha_{i}} - rac{\partial S_{ji}(lpha)}{\partial lpha_{k}}
ight)igg|_{lpha=lpha_{0}}$$

则得到:

$$[I_i, I_k] = C^j_{ik} I_j$$

从上式可看出:

$$C_{ik}^j = -C_{ki}^j$$

定理3

李群的结构常数满足如下关系:

$$C_{ij}^{m}C_{km}^{n} + C_{jk}^{m}C_{im}^{n} + C_{ki}^{m}C_{im}^{n} = 0$$

也记为:

$$C^m_{\{ij}C^n_{k\}}=0$$