1 狭义相对论点动力学

1.1 相对论力学

四维位矢

$$x_\mu \equiv (x_1, x_2, x_3, \mathrm{i}ct) \equiv (\vec{x}, \mathrm{i}ct)$$

四维速度

$$U_\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \mathrm{d}\tau, \quad \gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \vec{v} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \\ v_i \equiv \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}, \ \ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$U_\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{i}c\right) \equiv \gamma\left(\vec{v}, \mathrm{i}c\right), \ \ \vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

四维动量

$$p_\mu \equiv m_0 U_\mu = m_0 \gamma \left(\vec{v}, \mathrm{i}c\right)$$

$$p_i \equiv \gamma m_0 v_i, \ \ i = 1, 2, 3, \ \ p_4 \equiv \mathrm{i}c\gamma m_0 = \frac{\mathrm{i}cm_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\vec{p} \equiv \gamma m_0 \vec{v}$$

物体在固有参考系（物体相对此参考系静止）的质量 m_0 是不变量。

四维动量，记为 p_μ，定义为：

$$p_\mu \equiv m_0 U_\mu$$

利用坐标时 $\mathrm{d}t$ 与固有时 $\mathrm{d}\tau$ 的关系：

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \ \ \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

以及四维速度的表达式：

$$U_\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\gamma\vec{v}, \mathrm{i}\gamma c\right), \ \ \vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \ \ \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

可以得到四维动量的表达式：

$$p_\mu \equiv m_0 U_\mu = m_0\left(\gamma\vec{v}, \mathrm{i}\gamma c\right) = (\gamma m_0 \vec{v}, \mathrm{i}\gamma m_0 c), \ \ \vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \ \ \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

定义三维动量 $\vec{p}$：

$$\vec{p} \equiv \gamma m_0 \vec{v}, \ \ \vec{v} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}, \ \ \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

可将四维动量表达为：

$$p_\mu \equiv m_0 U_\mu = (\vec{p}, \mathrm{i}\gamma m_0 c), \ \ \vec{p} \equiv \gamma m_0 \vec{v}$$

另一方面，引入运动质量 m：

$$m \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

物体的能量：

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

四维动量第四分量 p_4 可用能量 W 表达：

$$p_4 = \mathrm{i}\gamma m_0 c = \mathrm{i}\frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mathrm{i}}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\mathrm{i}}{c}W$$

因此四维动量 p_μ 也可表达为：

$$p_\mu = \left(\vec{p}, \frac{\mathrm{i}}{c}W\right)$$

静止能量与动能

当 $v=0$，物体的能量 W_0 定义为静止能量：

$$W_0 \equiv m_0 c^2$$

当 $n \neq 0$，物体的能量 W 与静止能量 W_0 之差定义为动能 T：

$$T \equiv W - W_0 = (m - m_0)\, c^2$$

能量、动量和质量之间的关系

$$p_\mu p_\mu = \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2}$$

$$p^2 = (m\vec{v})^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2\left(v^2/c^2-1\right) + m_0^2 c^2}{1-v^2/c^2} = -m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 c^2}{1-v^2/c^2}$$

$$W^2 = \left(mc^2\right)^2 = \frac{m_0^2}{1-v^2/c^2}c^4$$

从上面两式中约去 $1-v^2/c^2$ 因子可得：

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

四维力

四维力，记为 k_μ，定义为：

$$k_\mu \equiv \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

利用坐标时 $\mathrm{d}t$ 与固有时 $\mathrm{d}\tau$ 的关系：

$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \ \ \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

四维动量的表达式：

$$p_\mu \equiv m_0 U_\mu = (\vec{p}, \mathrm{i}\gamma m_0 c), \ \ \vec{p} \equiv \gamma m_0 \vec{v}$$

以及 γ 因子对坐标时的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{c^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}(\vec{v}\cdot\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

可以将四维力表达为：

$$k_\mu\equiv\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}t}=\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p},\mathrm{i}\gamma m_0c\right)=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\mathrm{i}m_0c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{i}m_0\gamma^3}{c}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)=\left(\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{i}m_0\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)$$

定义三维力：

$$\vec{F}\equiv\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\gamma m_0\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m_0\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v}+\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)=m_0\left[\frac{\gamma^3}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{v}+\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right]$$

并注意到：

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=m_0\left[\frac{\gamma^3}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)v^2+\gamma\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)\right]=m_0\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\gamma^3}{c^2}v^2+\gamma\right)=m_0\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)\gamma\left(\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{1}{1-v^2/c^2}+1\right)=\gamma^3m_0\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

于是可将四维力改写为：

$$k_\mu\equiv\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\left(\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{i}m_0\gamma^4}{c}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)=\left(\gamma\vec{F},\frac{\mathrm{i}\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}\right)$$

四维力 k_μ 的前三个分量 $\vec{k}$：

$$\vec{k}\equiv\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\gamma\vec{F}$$

因此四维力 p_μ 也可写为：

$$p_\mu=\left(\vec{k},\frac{\mathrm{i}}{c}\vec{k}\cdot\vec{v}\right)$$

功率方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{\vec{p}^2c^2+m_0^2c^4}=\frac{1}{2}\frac{c^22\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau}}{W}=\frac{m\vec{v}\cdot\vec{k}}{mc^2}=\vec{v}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{v}$$

利用四维力前三分量 $\vec{k}\equiv\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}\tau$ 三维力 $\vec{F}\equiv\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 的关系：

$$\vec{k}=\gamma\vec{F},\quad \mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{\gamma}$$

功率方也可写为：

$$\vec{k}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

1.2 电动力学的协变形式

四维电流密度

电荷密度的可变性

电荷是不变量，电荷密度不是不变量。

设某一时刻，带电体以速度 $\vec{u}=u\vec{e}_x$ 相对实验室参考系 Σ 运动。若在固有参考系（与带电体固连的参考系）Σ 测得其电荷密度为 ρ_0，则有：

$$\mathrm{d}Q=\rho_0\mathrm{d}V_0=\rho\mathrm{d}V$$

尺缩效应给出：

$$\mathrm{d}V=\sqrt{1-u^2/c^2}\mathrm{d}V_0$$

可得:

$$\rho=\rho_0\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V_0}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\rho_0=\gamma_u\rho_0$$

四维电流密度矢量

实验室系 Σ 中，三维电流密度:

$$\vec{J}=\rho\vec{u}=\gamma_u\rho_0\vec{u}$$

四维速度:

$$U_\mu=\gamma_u\left(\vec{u},\mathrm{i}c\right)$$

四维电流密度矢量:

$$J_\mu\equiv\rho_0U_\mu$$

ρ_0 是不变量，U_μ 是协变量，因此如上定义的四维电流密度矢量是协变量:

$$J'_\mu=a_{\mu\nu}J_\nu$$

四维电流密度矢量 J_μ 与三维电流密度矢量 $\vec{J}$ 和电荷密度 ρ 的关系:

$$J_\mu\equiv\rho_0U_\mu=\rho_0\gamma_u\left(\vec{u},\mathrm{i}c\right)=\rho\left(\vec{u},\mathrm{i}c\right)=\left(\rho\vec{u},\mathrm{i}c\rho\right)=\left(\vec{J},\mathrm{i}c\rho\right)$$

$$J_4=\mathrm{i}c\rho$$

电荷守恒定律

电荷守恒定律三维形式:

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

即:

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

即:

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\left(\mathrm{i}c\rho\right)}{\partial\left(\mathrm{i}ct\right)}=0$$

结合 $J_4=\mathrm{i}c\rho,x_4=\mathrm{i}ct$，得到:

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4}=0$$

电荷守恒定律四维形式:

$$\partial_\mu J_\mu=0$$

达朗贝尔波动方程

洛伦兹规范下，矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 满足达朗贝尔波动方程:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

引入达朗贝尔算符：

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu \partial_\mu$$

达朗贝尔波动方程可写为：

$$\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

四维电磁势

引入：

$$A_4 \equiv \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi$$

四维电磁势 A_μ：

$$A_\mu \equiv \left(\vec{A}, \frac{\mathrm{i}}{c}\varphi\right)$$

A_μ 满足：

$$A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu$$

洛伦兹变换下的具体形式：

$$\begin{cases} A'_x = \gamma\left(A_x - \dfrac{v}{c^2}\varphi\right) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = Z_z \\ \varphi' = \gamma\left(\varphi - v A_x\right) \end{cases}$$

达朗贝尔方程的四维形式

四维达朗贝尔方程可写为：

$$\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$$

洛伦兹规范条件的四维形式

洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\left(\mathrm{i}\varphi/c\right)}{\partial\left(\mathrm{i}ct\right)} = 0$$

洛伦兹规范的四维形式：

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

电磁场张量（麦克斯韦张量）

$\vec{J}, \rho$ 统一为 J_μ

$\vec{A}, \varphi$ 统一为 A_μ

电磁场可用电磁势表示：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

引入一个反对称四维张量：

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=-F_{\nu\mu}$$

电磁场构成一个四维张量：

$$F_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0 & B_3 & -B_2 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_1\\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_2\\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3\\ \frac{\mathrm{i}}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}\Longrightarrow\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\nu$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Longrightarrow\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}=0$$

电磁场张量变换关系：

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau}$$

电磁场变换关系：

$$\begin{gathered}E'_1=E_1,\quad B'_1=B_1\\ E'_2=\gamma\left(E_2-vB_3\right),\quad B'_2=\gamma\left(B_2+\frac{v}{c^2}E_3\right)\\ E'_3=\gamma\left(E_3+vB_2\right),\quad B'_3=\gamma\left(B_3-\frac{v}{c^2}E_2\right)\end{gathered}$$

或：

$$\begin{gathered}E'_\parallel=E_\parallel,\quad B'_\parallel=B_\parallel\\ E'_\perp=\gamma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)_\perp,\quad \vec{B}'_\perp=\gamma\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)_\perp\end{gathered}$$

洛伦兹力公式

点电荷形式洛伦兹力

$$K_\mu=eF_{\mu\nu}U_\nu$$

前三分量：

$$\vec{K}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{F}=\sqrt{1-v^2/c^2}\vec{K}=e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

带电粒子在电磁场中的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

此运动方程适用于任意惯性系，可以描述高速粒子的运动。

相对论协变力密度形式洛伦兹力

$$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu$$

其中，$J_\mu=\left(\vec{J},\mathrm{i}c\rho\right)$ 为四维电流密度矢量。

电磁场张量构成的洛伦兹不变量

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=B^2-\frac{1}{c^2}E^2$$
$$\frac{\mathrm{i}}{8}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau}F_{\mu\nu}F_{\lambda\tau}=\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\vec{E}$$

1.3 电磁场能动张量的协变形式

电磁场对运动带电体系所做的功

源分布与场量共同表达的洛伦兹力密度：

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}=\rho\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$\mathrm{d}t$ 时间间隔内，力对体元 $\mathrm{d}V$ 所做元功：

$$\vec{f}\mathrm{d}V\cdot\vec{v}\mathrm{d}t=\rho\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right]\cdot\vec{v}\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\rho\vec{E}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V\mathrm{d}t=\vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

电磁场对整个带电体单位时间所做功：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V$$

功与场量的关系

麦克斯韦方程：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Longrightarrow\vec{J}=\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

于是：

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

注意到：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)$$
$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)&=\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\\&=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\end{aligned}$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \int\limits_V \vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_V \left[\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right]\mathrm{d}V \\
&= \int\limits_V \left[-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right]\mathrm{d}V \\
&= -\int\limits_V \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V-\int\limits_V \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}V \\
&= -\int\limits_V \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V-\oint\limits_{\partial V}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}
\end{aligned}
$$

令：

$$
\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}
$$

$$
\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}
$$

其中，$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 称为能流密度矢量。

则：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= -\int\limits_V \left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V-\oint\limits_{\partial V}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} \\
&= -\int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}V-\oint\limits_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V w\mathrm{d}V-\oint\limits_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} \\
&= -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}-\oint\limits_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}
\end{aligned}
$$

其中，

$$
W\equiv\int\limits_V w\mathrm{d}V
$$

均匀各项同性线性介质中的能流密度 w：

$$
w=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right),\quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E},\quad \vec{B}=\mu\vec{H}
$$

电磁场能量守恒公式

积分形式：

$$
\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\oint\limits_{\partial V}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}
$$

微分形式：

$$
\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{S}=-\vec{f}\cdot\vec{v}=-\vec{J}\cdot\vec{E}
$$

若积分区域为全空间，则有：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

即全空间电磁场对带电体做功的功率恒等于电磁场能量的减少率。

用场量表示洛伦兹力

利用麦克斯韦方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho,\quad \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

并注意到，均匀线性介质中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{H}$，于是有：

$$\begin{aligned}\nabla\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)&=\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{D}+\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{D}\right)+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\\&=2\varepsilon\left[\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]\\&=2\left[\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\right]&=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\cdot\left[\vec{\mathrm{e}}_jD_j\vec{\mathrm{e}}_kE_k-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_j\vec{\mathrm{e}}_jD_kE_k\right]\\&=\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_k\partial_i\left(D_jE_k\right)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_j\partial_i\left(E_kD_k\right)\\&=\vec{\mathrm{e}}_k\partial_j\left(D_jE_k\right)-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\left(D_kE_k\right)\\&=\vec{\mathrm{e}}_kE_k\partial_jD_j+\vec{\mathrm{e}}_kD_j\partial_jE_k-\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\\&=\vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)+\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}-\frac{1}{2}\cdot2\left[\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]\\&=\vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)-\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\\&=\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)&=\left(\vec{H}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{H}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\\&=2\varepsilon\left[\left(\vec{H}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{H}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]\\&=2\left[\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left[\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right]&=\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\cdot\left[\vec{\mathrm{e}}_jB_j\vec{\mathrm{e}}_kH_k-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_j\vec{\mathrm{e}}_jB_kH_k\right]\\&=\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_k\partial_i\left(B_jH_k\right)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_j\partial_i\left(B_kH_k\right)\\&=\vec{\mathrm{e}}_k\partial_j\left(B_jH_k\right)-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\left(B_kH_k\right)\\&=\vec{\mathrm{e}}_kH_k\partial_jB_j+\vec{\mathrm{e}}_kB_j\partial_jH_k-\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\\&=\vec{H}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}-\frac{1}{2}\cdot2\left[\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]\\&=\vec{H}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\\&=\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H}+\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}\end{aligned}$$

可得：

$$
\begin{aligned}
\vec{f} &= \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B} \\
&= \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E} + \left(\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B} + 0\vec{H} + \vec{0}\times\vec{D} \\
&= \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E} + \left(\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B} + \left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H} + \left(\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\times\vec{D} \\
&= \left[\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E} + \left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{D}\right] + \left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H} + \left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}\right] - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{D} \\
&= \nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\right] + \nabla\cdot\left[\vec{B}\vec{H} - \frac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right] - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} - \vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
&= \nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H} - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}
$$

动量密度与动量流密度张量

令：

$$
\overleftrightarrow{T} = -\left(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}\right) + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)
$$

$$
\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B}
$$

其中，$\overleftrightarrow{T}$ 称为电磁场的**动量流密度张量**；$\vec{g}$ 称为电磁场的**动量密度**。

则洛伦兹力密度可写为：

$$
\boxed{\vec{f} = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial t}}
$$

这就是**动量守恒**的微分形式。

体积分，并利用高斯公式：

$$
\begin{aligned}
\int\limits_V \vec{f}\mathrm{d}V' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \vec{g}\mathrm{d}V' &= -\int\limits_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\mathrm{d}V' \\
&= -\oint\limits_{\partial V}\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\int\limits_V \vec{f}\mathrm{d}V' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \vec{g}\mathrm{d}V' = -\oint\limits_{\partial V}\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}
$$

这就是**动量守恒**的积分形式。

结合带电物体的牛顿第二定律 $\frac{\mathrm{d}\vec{G}_m}{\mathrm{d}t} = \int\limits_V \vec{f}\mathrm{d}V$，其中 $\vec{G}_m$ 是带电物体的动量，

以及若考虑有限区域 V，电磁场通过界面发生动量转移。单位时间内流入界面的动量等于区域内总动量的变化率。

可知，$-\oint\limits_{\partial V}\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 是单位时间内通过界面 ∂V **流入**区域 V 的动量，$\vec{G}_e \equiv \int\limits_V \vec{g}\mathrm{d}V'$ 代表电磁场的动量，$\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B}$ 是电磁场的动量密度。

当 $V\to\infty$ 时，$\oint\limits_{\partial V}\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\to\vec{0}$，因此有全空间的动量守恒定律：

$$
\int\limits_V \vec{f}\mathrm{d}V' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \vec{g}\mathrm{d}V' = \vec{0}
$$

辐射压力

电磁场有动量，电磁波入射到物体上，必然对物体有作用力，这种力称为辐射压力。

取物体表面上一有向面元 $\mathrm{d}\vec{S}$，则单位时间入射 $\mathrm{d}\vec{S}$ 上的动量为 $\overleftrightarrow{T}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\mathrm{d}S$

辐射压力：

$$\vec{P}=\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

电磁场的能量守恒和动量守恒方程

电磁场能量守恒方程：

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=-\vec{J}\cdot\vec{E}$$

电磁场动量守恒方程：

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}+\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}=-\vec{f}$$

洛伦兹力密度和它的功率可构成一个四维矢量：

$$f_\mu=F_{\mu\nu}J_\nu$$

麦克斯韦方程：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}=\mu_0J_\mu$$

洛伦兹力密度可写为：

$$\mu_0f_\mu=\mu_0F_{\mu\nu}J_\nu=F_{\mu\nu}\partial_\lambda F_{\nu\lambda}=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right)-F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}$$

考虑最后一项，ν,λ 是求和指标，于是：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}=F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}+F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right)$$

利用 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}+F_{\lambda\nu}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right)=\frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}+F_{\nu\lambda}\partial_\nu F_{\lambda\mu}\right)=\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}\right)$$

把另一条麦克斯韦方程代入可得：

$$F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}=\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}\right)=-\frac{1}{2}F_{\nu\lambda}\left(\partial_\mu F_{\nu\lambda}\right)=-\frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right)$$

于是洛伦兹力密度公式可写为：

$$\begin{aligned}\mu_0f_\mu&=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right)-F_{\nu\lambda}\partial_\lambda F_{\mu\nu}\\&=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right)+\frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right)\\&=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right)+\frac{1}{4}\partial_\mu\left(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)\\&=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right)+\frac{1}{4}\partial_\lambda\delta_{\mu\lambda}\left(F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)\\&=\partial_\lambda\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)\end{aligned}$$

引入**电磁场的能量动量张量** $T_{\mu\lambda}$：

$$T_{\mu\lambda}=\frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}+\frac{1}{4}\delta_{\mu\lambda}F_{\nu\tau}F_{\nu\tau}\right)$$

则洛伦兹力密度公式（或四维形式的能量动量守恒）为：

$$f_\mu = \partial_\lambda T_{\mu\lambda}$$

$T_{\mu\lambda}$ 是一个无迹对称张量，即：

$$T_{\mu\lambda} = T_{\lambda\mu}, \quad T_{\mu\mu} = 0$$

$T_{\mu\lambda}$ 的矩阵形式为：

$$T_{\mu\lambda} = \begin{bmatrix} \mathscr{T}_{11} & \mathscr{T}_{12} & \mathscr{T}_{13} & -\mathrm{i}cg_1 \\ \mathscr{T}_{21} & \mathscr{T}_{22} & \mathscr{T}_{23} & -\mathrm{i}cg_2 \\ \mathscr{T}_{31} & \mathscr{T}_{32} & \mathscr{T}_{33} & -\mathrm{i}cg_3 \\ -\mathrm{i}cg_1 & -\mathrm{i}cg_2 & -\mathrm{i}cg_3 & w \end{bmatrix}$$

其中，w 是电磁场的能量密度；

g_1, g_2, g_3 是电磁场动量密度 $\vec{g}$ 的三个分量；

$\mathscr{T}_{ij}$ 是麦克斯韦应力张量的各个分量。麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{\mathscr{T}}$ 等于负动量流密度张量：$\overleftrightarrow{\mathscr{T}} = -\overleftrightarrow{T}$

$T_{\mu\lambda}$ 称为电磁场的能量动量张量。

1.4 带电粒子及电磁场的拉格朗日方程和哈密顿正则方程

带电粒子非相对论情形

拉氏量

非相对论情形下带电粒子在电磁场中运动的拉氏量：

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\left(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right)$$

验证构造的拉氏量的正确性

下面验证这个拉氏量的正确性。如果这个拉氏量是对的，那么 E-L 方程应当能给出成牛顿第二定律。

取广义坐标和广义速度：

$$q_i = x_i, \quad \dot{q}_i = v_i$$

计算：

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -e\partial_i \phi + e v_j \partial_i A_j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m v_i + e A_i\right] = m\dot{v}_i + e\frac{\partial A_i}{\partial t} + e v_j \left(\partial_j A_i\right)$$

E-L 方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

可得运动方程：

$$m\dot{v}_i = -e\partial_i \phi - e\frac{\partial A_i}{\partial t} + e v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i$$

注意到：

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$E_i=-\partial_i\phi-\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{B}&=\vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\\
&=\varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_i v_j\left(\nabla\times\vec{A}\right)_k\\
&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i v_j\partial_l A_m\\
&=-\varepsilon_{kji}\varepsilon_{klm}\vec{\mathrm{e}}_i v_j\partial_l A_m\\
&=-\left(\delta_{jl}\delta_{im}-\delta_{jm}\delta_{il}\right)\vec{\mathrm{e}}_i v_j\partial_l A_m\\
&=\left(\delta_{jm}\delta_{il}-\delta_{jl}\delta_{im}\right)\vec{\mathrm{e}}_i v_j\partial_l A_m\\
&=\vec{\mathrm{e}}_l v_m\partial_l A_m-\vec{\mathrm{e}}_m v_l\partial_l A_m
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_i=v_j\partial_i A_j-v_j\partial_j A_i$$

代入运动方程，得：

$$m\dot{v}_i=eE_i+e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_i$$

矢量形式为：

$$m\dot{\vec{v}}=e\vec{E}+e\vec{v}\times\vec{B}$$

这就验证了我们构造的拉氏量的正确性。

哈密顿正则方程

非相对论情形下带电粒子在电磁场中运动拉氏量：

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-e\left(\phi-\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

计算正则动量：

$$P_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\frac{\partial L}{\partial v_i}=mv_i+eA_i$$

$$\vec{P}=m\vec{v}+e\vec{A}$$

可以看到，正则动量 $\vec{P}$ 不同于力学动量 $\vec{p}=m\vec{v}$

哈密顿量：

$$\begin{aligned}
H\left(\vec{x},\vec{P},t\right)&=P_i\dot{q}_i-L\\
&=\vec{P}\cdot\vec{v}-\left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2-e\left(\phi-\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]\\
&=\vec{P}\cdot\vec{v}-\frac{1}{2}m\vec{v}^2-e\vec{v}\cdot\vec{A}+e\phi\\
&=\vec{P}\cdot\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)/m-\frac{1}{2}m\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2/m^2-e\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)\cdot\vec{A}/m+e\phi\\
&=\frac{\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2}{2m}+e\phi
\end{aligned}$$

要注意，$\vec{P}$ 是粒子的正则动量。

带电粒子相对论情形

相对论情形下带电粒子在电磁场中运动的拉氏量：

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e\left(\phi-\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

正则动量：

$$\vec{P}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}+e\vec{A}=\vec{p}(m)+e\vec{A}$$

其中，$\vec{p}(m)$ 是相对论情形下粒子的力学动量。

注意到：

$$\begin{aligned}\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2&=\frac{m_0^2v^2}{1-v^2/c^2}\\&=\frac{m_0^2c^2\left(v^2/c^2-1+1\right)}{1-v^2/c^2}\\&=-m_0^2c^2+\frac{m_0^2c^2}{1-v^2/c^2}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\sqrt{\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2}}{m_0c}$$

哈密顿量：

$$\begin{aligned}H\left(\vec{x},\vec{P},t\right)&=P_i\dot{x}_i-L\\&=\vec{P}\cdot\vec{v}-\left[-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e\left(\phi-\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]\\&=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\phi\\&=c\sqrt{\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2+m_0^2c^2}+e\phi\\&=\sqrt{c^2\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2+m_0^2c^4}+e\phi\end{aligned}$$

令体系的正则动量第四分量

$$P_4\equiv\mathrm{i}\frac{H}{c}$$

四维正则动量：

$$P_\mu\equiv\left(\vec{P},\frac{\mathrm{i}}{c}H\right)$$

又

$$A_4\equiv\frac{\mathrm{i}}{c}\phi$$

可得：

$$(H-e\phi)^2=(-\mathrm{i}c)^2\left(P_4-eA_4\right)^2=-\left(P_4-eA_4\right)^2c^2$$

将哈密顿量代入：

$$-\left(P_4-eA_4\right)c^2-\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2c^2=m_0^2c^4$$

四维正则动量：

$$P_\mu=\left(\vec{P},\frac{\mathrm{i}H}{c}\right)$$

$$A_\mu=\left(\vec{A},\frac{\mathrm{i}\phi}{c}\right)$$

可写出四维正则动量与四维电磁势的关系：

$$\left(P_\mu - eA_\mu\right)^2 = -m_0^2c^2$$

四维力学动量与四维正则动量之间的关系为：

$$p_\mu(m) = P_\mu - eA_\mu$$

场方程的拉格朗日表述

	质点系统	场系统
态空间	$x_\mu, \dot{x}_\mu$	$\varphi_\sigma, \partial_\mu\varphi_\sigma$
最小作用量原理	$\delta\int L\left(x_\mu, \dot{x}_\mu\right)\mathrm{d}\tau = 0$	$\delta\int \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma, \partial_\mu\varphi_\sigma\right)\mathrm{d}\Omega = 0$
拉格朗日方程	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_\mu} = 0\right)$	$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma} = 0$
相空间	$x_\mu, P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu}$	$\varphi_\sigma, \pi_{\mu\sigma} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\sigma)}$
哈密顿量	$H\left(x_\mu, P_\mu\right) = \dot{x}_\mu P_\mu - L$	$\mathscr{H} = \left(\varphi_\sigma, \pi_{\mu\sigma}\right) = \partial_\mu\varphi_\sigma\pi_{\mu\sigma} - \mathscr{L}$
哈密顿正则方程	$\frac{\partial H}{\partial x_\mu} = -\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\partial H}{\partial P_\mu} = \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$	$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\varphi_\sigma} = -\partial_\mu\pi_{\mu\sigma}, \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial\pi_{\mu\sigma}} = \partial_\mu\varphi_\sigma$

自由电磁场的场方程

拉格朗日密度，记为 $\mathscr{L}$，表示单位固有体元 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ 内的拉式函数。（$\mathrm{d}x_4 = \mathrm{i}ct$）

对于连续的场分布，不同时空点的识别用连续变量 x_μ 来表示。

场的状态由场量 φ_σ 及其变化 $\partial_\mu\varphi_\sigma$ 来表示。

对于电磁场，$\varphi_\sigma = A_\sigma(\sigma = 1, 2, 3, 4)$

给出空间各点的电磁势 A_σ 及其时空变化 $\partial_\mu A_\sigma$，也就确定了电磁场分布。

对于场系统，拉式密度是场量及其一阶导数的函数：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x_\nu), \partial_\mu\varphi_\sigma(x_\nu)\right)$$

用场量表示的最小作用量原理（哈密顿原理）：

$$\delta\int \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma(x_\nu), \partial_\mu\varphi_\sigma(x_\nu)\right)\mathrm{d}\Omega = 0$$

当场量 φ_σ 发生变化 $\delta\varphi_\sigma$ 时，场量一阶导数发生的变化 $\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)$ 为：

$$\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right) = \partial_\mu\left(\varphi_\sigma + \delta\varphi_\sigma\right) - \partial_\mu\varphi_\sigma = \partial_\mu\left(\delta\varphi_\sigma\right)$$

拉式密度的变分 $\delta\mathscr{L}$ 为：

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \mathscr{L}\left[\varphi_\sigma + \delta\varphi_\sigma, \partial_\mu\varphi_\sigma + \delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)\right] - \mathscr{L}\left[\varphi_\sigma, \partial_\mu\varphi_\sigma\right] \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\delta\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right) \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\partial_\mu\left(\delta\varphi_\sigma\right) \\
&= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma
\end{aligned}$$

代入最小作用量原理，可得：

$$\int\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\delta\varphi_\sigma + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)\delta\varphi_\sigma\right\}\mathrm{d}\Omega = 0$$

利用矢量散度积分公式，并结合超曲面上 $\delta\varphi|_{\partial\Omega}=0$ 有：

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\left(\delta\varphi_\sigma\right)\right]\mathrm{d}\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\delta\varphi_\sigma\mathrm{d}\Omega_\mu=0$$

于是最小作用量原理给出的方程可化简为：

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}\right]\delta\varphi_\sigma\mathrm{d}\Omega=0$$

由 $\delta\varphi_\sigma$ 的任意性就得到场量表示的拉格朗日方程：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\varphi_\sigma\right)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\sigma}=0$$

电磁场的场量是四维电磁势 $A_\nu(x_\mu)$，其分量为：

$$A_\nu(x_\mu)=\left(\vec{A}(x_\mu),\frac{\mathrm{i}}{c}\varphi(x_\mu)\right)$$

考虑到自由电磁场的拉氏密度具有能量量纲，再结合电磁场中的不变量 $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，且这个不变量是 $\partial_\mu A_\nu$ 的函数，取自由电磁场的拉氏密度为：

$$\mathscr{L}_0\left(\partial_\mu A_\nu\right)=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

代入电磁场的拉格朗日方程可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_\nu}=0$$

由于 $\mathscr{L}_0=-F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4\mu_0$ 仅为 $\partial_\mu A_\nu$ 的函数，因此：

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_\nu}=0$$

再：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}&=2F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left(F_{\alpha\beta}\right)\\&=2F_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha\right)\\&=2F_{\alpha\beta}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\right)\\&=2\left(F_{\mu\nu}-F_{\nu\mu}\right)\\&=2\left(F_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right)\\&=4F_{\mu\nu}\end{aligned}$$

综上，自由电磁场的场方程为：

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$$

一般电磁场的场方程

考虑电荷和电流作用下，一般电磁场的拉氏密度可分为两部分：

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_e$$

其中，$\mathscr{L}_0$ 是自由电磁场的拉氏密度，$\mathscr{L}_e$ 与电荷和电流有关。

$$\mathscr{L}_e\left(A_\mu\right)=J_\mu A_\mu$$

取一般电磁场拉氏密度为：

$$\mathscr{L}\left(A_\mu, \partial_\mu A_\nu\right)=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_e=-\frac{1}{4 \mu_0} F_{\mu \nu} F_{\mu \nu}+J_\mu A_\mu$$

代入拉格朗日方程，可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha \beta} F_{\alpha \beta} / 4 \mu_0+J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha \beta} F_{\alpha \beta} / 4 \mu_0+J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial A_\nu}=0$$

注意到：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha \beta} F_{\alpha \beta} / 4 \mu_0\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha \beta} F_{\alpha \beta} / 4 \mu_0\right)}{\partial A_\nu}=-\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F_{\mu \nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial A_\nu}=-J_\alpha \delta_{\alpha \nu}=-J_\nu$$

综上，得到一般电磁场的场方程：

$$\partial_\mu F_{\mu \nu}=-\mu_0 J_\nu$$

1.5 例题

例1

> 分别写出自由电磁场与一般电磁场的拉格朗日密度，并变分得到场方程。

自由电磁场的拉氏密度为：

$$\boxed{\mathscr{L}_0\left(\partial_\mu A_\nu\right)=-\frac{1}{4 \mu_0} F_{\mu \nu} F_{\mu \nu}}$$

一般电磁场拉氏密度为：

$$\boxed{\mathscr{L}\left(A_\mu, \partial_\mu A_\nu\right)=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_e=-\frac{1}{4 \mu_0} F_{\mu \nu} F_{\mu \nu}+J_\mu A_\mu}$$

用场量表示的最小作用量原理（哈密顿原理）：

$$\delta \int \mathscr{L}\left(\varphi_\sigma\left(x_\nu\right), \partial_\mu \varphi_\sigma\left(x_\nu\right)\right) \mathrm{d} \Omega=0$$

拉式密度的变分 $\delta \mathscr{L}$ 为：

$$\begin{aligned}
\delta \mathscr{L} & =\mathscr{L}\left[\varphi_\sigma+\delta \varphi_\sigma, \partial_\mu \varphi_\sigma+\delta\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)\right]-\mathscr{L}\left[\varphi_\sigma, \partial_\mu \varphi_\sigma\right] \\
& =\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} \delta \varphi_\sigma+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)} \delta\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right) \\
& =\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} \delta \varphi_\sigma+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)} \partial_\mu\left(\delta \varphi_\sigma\right) \\
& =\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} \delta \varphi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\left(\delta \varphi_\sigma\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\right) \delta \varphi_\sigma
\end{aligned}$$

代入最小作用量原理，可得：

$$\int\left\{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma} \delta \varphi_\sigma+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\left(\delta \varphi_\sigma\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\right) \delta \varphi_\sigma\right\} \mathrm{d} \Omega=0$$

利用矢量散度积分公式，并结合超曲面上 $\left.\delta \varphi\right|_{\partial \Omega}=0$ 有：

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\left(\delta \varphi_\sigma\right)\right] \mathrm{d} \Omega=\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)} \delta \varphi_\sigma \mathrm{d} \Omega_\mu=0$$

于是最小作用量原理给出的方程可化简为：

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}\right] \delta \varphi_\sigma \mathrm{d} \Omega=0$$

由 $\delta\varphi_\sigma$ 的任意性就得到场量表示的拉格朗日方程：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi_\sigma\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_\sigma}=0}$$

把自由电磁场的拉式密度代入电磁场的拉格朗日方程可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_\nu}=0$$

由于 $\mathscr{L}_0=-F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}/4\mu_0$ 仅为 $\partial_\mu A_\nu$ 的函数，因此：

$$\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right)}{\partial A_\nu}=0$$

再：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} &=2 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left(F_{\alpha\beta}\right) \\
&=2 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha\right) \\
&=2 F_{\alpha\beta}\left(\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}\right) \\
&=2\left(F_{\mu\nu}-F_{\nu\mu}\right) \\
&=2\left(F_{\mu\nu}+F_{\mu\nu}\right) \\
&=4 F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

综上，自由电磁场的场方程为：

$$\boxed{\partial_\mu F_{\mu\nu}=0}$$

把一般电磁场的拉式密度代入拉格朗日方程，可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/4\mu_0+J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/4\mu_0+J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial A_\nu}=0$$

注意到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/4\mu_0\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(-F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}/4\mu_0\right)}{\partial A_\nu}=-\frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F_{\mu\nu} \\
\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\left(J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)-\frac{\partial\left(J_\alpha A_\alpha\right)}{\partial A_\nu}=-J_\alpha \delta_{\alpha\nu}=-J_\nu
\end{aligned}$$

综上，得到一般电磁场的场方程：

$$\boxed{\partial_\mu F_{\mu\nu}=-\mu_0 J_\nu}$$

例2

> 写出协变形式的洛伦兹力公式（分别写点电荷与力密度形式的协变洛伦兹公式），并推导四维协变形式的能量守恒与动量守恒。

点电荷协变洛伦兹力公式：

$$K_\mu=e F_{\mu\nu} U_\nu$$

力密度协变洛伦兹力公式：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu$$

洛伦兹力密度和它的功率可构成一个四维矢量：

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J_\nu$$

麦克斯韦方程：

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\mu$$

洛伦兹力密度可写为：

$$\mu_0 f_\mu = \mu_0 F_{\mu\nu} J_\nu = F_{\mu\nu} \partial_\lambda F_{\nu\lambda} = \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}\right) - F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu}$$

考虑最后一项，ν, λ 是求和指标，于是：

$$F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = F_{\lambda\nu} \partial_\nu F_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \partial_\nu F_{\mu\lambda}\right)$$

利用 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性：

$$F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \partial_\nu F_{\mu\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\nu\lambda} \partial_\nu F_{\lambda\mu}\right) = \frac{1}{2} F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}\right)$$

把另一条麦克斯韦方程代入可得：

$$F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\nu\lambda}\left(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}\right) = -\frac{1}{2} F_{\nu\lambda}\left(\partial_\mu F_{\nu\lambda}\right) = -\frac{1}{4} \partial_\mu\left(F_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\right)$$

于是洛伦兹力密度公式可写为：

$$\begin{aligned}
\mu_0 f_\mu &= \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}\right) - F_{\nu\lambda} \partial_\lambda F_{\mu\nu} \\
&= \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4} \partial_\mu \left(F_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\right) \\
&= \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4} \partial_\mu \left(F_{\nu\tau} F_{\nu\tau}\right) \\
&= \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda}\right) + \frac{1}{4} \partial_\lambda \delta_{\mu\lambda} \left(F_{\nu\tau} F_{\nu\tau}\right) \\
&= \partial_\lambda \left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\lambda} F_{\nu\tau} F_{\nu\tau}\right)
\end{aligned}$$

引入**电磁场的能量动量张量** $T_{\mu\lambda}$：

$$T_{\mu\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\left(F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\lambda} F_{\nu\tau} F_{\nu\tau}\right)$$

则四维形式的能量动量守恒为：

$$\boxed{f_\mu = \partial_\lambda T_{\mu\lambda}}$$

例3

> 用电磁场动量流密度和动量密度表示洛伦兹力密度。

利用麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

并注意到，均匀线性介质中 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}$，于是有：

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right) &= \left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{D}+\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{D}\right)+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\\
&= 2\varepsilon\left[\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\right] &= \vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\cdot\left[\vec{\mathrm{e}}_jD_j\vec{\mathrm{e}}_kE_k-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_j\vec{\mathrm{e}}_jD_kE_k\right]\\
&= \delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_k\partial_i\left(D_jE_k\right)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_j\partial_i\left(E_kD_k\right)\\
&= \vec{\mathrm{e}}_k\partial_j\left(D_jE_k\right)-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\left(D_kE_k\right)\\
&= \vec{\mathrm{e}}_kE_k\partial_jD_j+\vec{\mathrm{e}}_kD_j\partial_jE_k-\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\\
&= \vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)+\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}-\frac{1}{2}\cdot2\left[\left(\vec{D}\cdot\nabla\right)\vec{E}+\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\right]\\
&= \vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)-\vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)\\
&= \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{D}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right) &= \left(\vec{H}\cdot\nabla\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{H}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\\
&= 2\varepsilon\left[\left(\vec{H}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{H}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left[\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right] &= \vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\cdot\left[\vec{\mathrm{e}}_jB_j\vec{\mathrm{e}}_kH_k-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_j\vec{\mathrm{e}}_jB_kH_k\right]\\
&= \delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_k\partial_i\left(B_jH_k\right)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\vec{\mathrm{e}}_j\partial_i\left(B_kH_k\right)\\
&= \vec{\mathrm{e}}_k\partial_j\left(B_jH_k\right)-\frac{1}{2}\vec{\mathrm{e}}_i\partial_i\left(B_kH_k\right)\\
&= \vec{\mathrm{e}}_kH_k\partial_jB_j+\vec{\mathrm{e}}_kB_j\partial_jH_k-\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\\
&= \vec{H}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)+\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}-\frac{1}{2}\cdot2\left[\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{H}+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]\\
&= \vec{H}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)\\
&= \left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H}+\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}
\end{aligned}
$$

可得:

$$
\begin{aligned}
\vec{f} &= \rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\\
&= \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B}+0\vec{H}+\vec{0}\times\vec{D}\\
&= \left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\times\vec{B}+\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H}+\left(\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\times\vec{D}\\
&= \left[\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)\vec{E}+\left(\nabla\times\vec{E}\right)\times\vec{D}\right]+\left[\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)\vec{H}+\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{B}\right]-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{D}\\
&= \nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right]-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}-\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&= \nabla\cdot\left[\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}
$$

令:

$$
\overleftrightarrow{T}=-\left(\vec{D}\vec{E}+\vec{B}\vec{H}\right)+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right)
$$

$$\vec{g}=\vec{D}\times\vec{B}$$

其中，$\overleftrightarrow{T}$ 称为电磁场的**动量流密度张量**；$\vec{g}$ 称为电磁场的**动量密度。**

则洛伦兹力密度可写为：

$$\boxed{\vec{f}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}}$$

这就是**动量守恒**的微分形式。

2 带电粒子和电磁场的相互作用

2.1 带电粒子运动产生的电磁势

设带电粒子的运动轨迹为 $\vec{x}_q=\vec{x}_q(t)$，则 t 时刻电荷分布为：

$$\rho(\vec{x},t)=q\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_q(t)]$$

设带电粒子 t 时刻的速度为 $\vec{v}_q(t)=\dot{\vec{x}}_q(t)$，则 t 时刻电流密度分布：

$$\vec{J}(\vec{x},t)=\rho(\vec{x},t)\vec{v}_q(t)=q\delta^3[\vec{x}-\vec{x}_q(t)]\dot{\vec{x}}_q(t)$$

t 时刻推迟势分布：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t-r/c)}{r}\mathrm{d}^3\vec{x}',\ \ \vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$$

令 $t'=t-r/c$

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}',t')}{r}\mathrm{d}^3\vec{x}',\ \ \vec{r}=\vec{x}-\vec{x}',\ \ t'=t-r/c$$

代入电荷分布可得：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\delta^3[\vec{x}'-\vec{x}_q(t')]}{r}\mathrm{d}^3\vec{x}',\ \ \vec{r}=\vec{x}-\vec{x}',\ \ t'=t-r/c$$

通过计算，真空中带电粒子产生的势可简写为：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r-\vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r-\vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t'),\quad \vec{v}=\vec{v}_q(t')\quad t'=t-|\vec{x}-\vec{x}_q(t')|/c$$

只要作替换：

$$\mu_0\to\mu,\quad c\to\tilde{c}=c/n,\quad t'=t-r/c\to t'=t-r/\tilde{c}=t-nr/c,$$

就能得各向同性均匀线性介质中带电粒子产生的势：

$$\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r-n\vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r-n\vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t'),\quad \vec{v}=\vec{v}_q(t')\quad t'=t-n|\vec{x}-\vec{x}_q(t')|/c$$

2.2 带电粒子运动产生的电磁场

真空中带电粒子运动产生的电磁场：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)\left(\hat{r}-\vec{v}/c\right)}{\left(1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\right)^3}+\frac{1}{r}\frac{\hat{r}\times\left[\left(\hat{r}-\vec{v}/c\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{c^2\left(1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\right)^3}\right\}$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{r}}{c}\times\vec{E}$$

自带场 $\vec{E}_{\mathrm{self}}$（与加速度无关）：

$$\vec{E}_{\mathrm{self}}\equiv\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\left(1-v^2/c^2\right)\left(\hat{r}-\vec{v}/c\right)}{\left(1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\right)^3}$$

辐射场 $\vec{E}_{\mathrm{rad}}$（与加速度有关）：

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}}\equiv\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\frac{\hat{r}\times\left[\left(\hat{r}-\vec{v}/c\right)\times\dot{\vec{v}}\right]}{c^2\left(1-\hat{r}\cdot\vec{v}/c\right)^3}$$

$$\vec{B}\perp\vec{E},\quad\vec{B}\perp\vec{r},\quad\vec{E}_{\mathrm{rad}}\perp\vec{r},\quad\vec{E}_{\mathrm{self}}\not\perp\vec{r}$$

沿某一固定传播方向看，带电粒子在某一时刻产生的电磁场，沿一固定方向以光速传播。在这个方向上，电磁场的方向不变，大小以 $1/r^2$ 或 $1/r$ 衰减。

低速近似 $v\ll c$，

$$\vec{E}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{r}}{r^2}+\frac{\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)}{rc^2}\right]$$

$$\vec{B}=\frac{\hat{r}}{c}\times\vec{E}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left\{\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{cr^2}+\frac{\hat{r}\times\left[\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)\right]}{rc^2}\right\}$$

2.3 带电粒子的辐射

辐射能流与辐射功率

辐射能流与电磁场的关系：

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

大距离，自带场 $\vec{E}_{\mathrm{self}}$ 可忽略，只考虑辐射场 $\vec{E}_{\mathrm{rad}}$ ：

$$\vec{S}\approx\frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{\mathrm{rad}}\times\left(\frac{\hat{r}}{c}\times\vec{E}_{\mathrm{rad}}\right)$$

由于 $\vec{E}_{\mathrm{rad}}\perp\hat{r}$，结合 $c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，有：

$$\boxed{\vec{S}\approx\varepsilon_0 cE_{\mathrm{rad}}^2\hat{r}=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{r^2}\frac{\left|\hat{r}\times\left[\left(\hat{r}-\vec{v}/c\right)\times\dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{\left(1-\vec{v}\cdot\hat{r}/c\right)^6}\hat{r}}$$

在 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间间隔内，从闭合曲面 ∂V 辐射出的能量 $\mathrm{d}W$：

$$\mathrm{d}W=\oint_{\partial V}\vec{S}\cdot\hat{r}r^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t=\oint_{\partial V}\varepsilon_0 cE_{\mathrm{rad}}^2r^2\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$$

考虑 t 与 t' 的关系

$$\mathrm{d}t = \frac{s}{r}\mathrm{d}t'$$

积分转化为:

$$\mathrm{d}W = \oint_{\partial V} \varepsilon_0 c E_{\mathrm{rad}}^2 r^2 \frac{s}{r} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t'$$

定义粒子运动单位时间内辐射的电磁能:

$$\boxed{P(t') = \oint \varepsilon_0 c E^2 r^2 \frac{s}{r} \mathrm{d}\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1 - \vec{v}\cdot\hat{r}/c)^5} \mathrm{d}\Omega}$$

从 $t' = t - \left|\vec{x} - \vec{x}_q(t')\right|/c$ 可得到 t' 与 t 的关系。$t' \sim t' + \mathrm{d}t'$ 对应着 $t \sim t + \mathrm{d}t$，$P(t')\mathrm{d}t' = \mathrm{d}W$，即 $P(t')\mathrm{d}t'$ 给出了 $t \sim t + \mathrm{d}t$ 时间间隔内从闭合曲面 ∂V 辐射出的电磁能。

几种特殊情况下的辐射能流与辐射功率

低速运动

考虑粒子速度很低的情况时的能流:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1 - \vec{v}\cdot\hat{r}/c)^6} \hat{r} \\ &\approx \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \dot{\vec{v}}^2 \sin^2\Theta \hat{r}\end{aligned}$$

其中，Θ 为 $\vec{r}$ 与 $\dot{\vec{v}}$ 的夹角。

- 垂直于粒子加速度方向的辐射最强。沿加速度的方向没有辐射。

辐射功率:

$$\begin{aligned}P(t') &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \vec{v}\right]\right|^2}{\left(1 - \dot{\vec{v}}\cdot\hat{r}/c\right)^5} \mathrm{d}\Omega \\ &\approx \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\dot{\vec{v}}^2 \sin^2\Theta}{1^5} \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^2\Theta \cdot \sin\Theta \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{8\pi}{3} \\ &= \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\end{aligned}$$

- 低速粒子的辐射功率 $P(t')$ 与速度和能量无关，只取决于加速度 $\dot{\vec{v}}$。

高速运动

考虑高速运动的粒子辐射的能流:

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{r^2} \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1 - \vec{v}\cdot\hat{r}/c)^6} \hat{r}$$

令 θ 为 $\vec{r}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角。当 $\theta \to 0$，辐射能流分母趋于 0，因此粒子速度接近光速时，它产生的电磁辐射主要沿其速度方向。速度越接近光速，辐射方向也就越集中。

直线运动

考虑直线运动的粒子：

$\dot{\vec{v}} \parallel \vec{v}, \dot{\vec{v}} \times \vec{v} = \vec{0}$

加速度 $\dot{\vec{v}}$ 与位矢的家夹角 Θ 等于速度 $\vec{v}$ 与位矢 $\vec{r}$ 的夹角 θ，即 $\Theta = \theta$

$$\begin{aligned}
P(t') &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1 - \vec{v}\cdot\hat{r}/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \dot{\vec{v}}\right)\right|^2}{(1 - \vec{v}\cdot\hat{r}/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\dot{\vec{v}}^2 \sin^2\theta}{(1 - v\cos\theta/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin^2\theta}{(1 - v\cos\theta/c)^5} \mathrm{d}(\cos\theta) \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3}
\end{aligned}$$

上式是一般速度下直线运动粒子辐射功率的公式，未做近似。

记：

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

则直线运动粒子辐射功率的公式可写为：

$$P(t') = \frac{q^2\dot{\vec{v}}^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

力与加速度关系：

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\left(\gamma m_0 \vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}\right) \\
&= \frac{m_0\dot{\vec{v}}\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - m_0\vec{v}\cdot 1/2 \cdot \left(1 - \vec{v}^2/c^2\right)^{-1/2} \cdot \left(-2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}/c^2\right)}{1 - \vec{v}^2/c^2/c^2} \\
&= \gamma m_0 \dot{\vec{v}} + \frac{m_0\gamma^3\left(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right)}{c^2}\vec{v}
\end{aligned}$$

粒子直线运动时，可化简为：

$$
\begin{aligned}
F &= \gamma m_0 \dot{v} + \frac{m_0 \gamma^3 v \dot{v}}{c^2} v \\
&= \gamma m_0 \dot{v} \left(1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\right) \\
&= \gamma m_0 \dot{v} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}\right) \\
&= \gamma m_0 \dot{v} \cdot \frac{c^2}{c^2 - v^2} \\
&= \gamma m_0 \dot{v} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} \\
&= m_0 \gamma^3 \dot{v}
\end{aligned}
$$

受恒定大小作用力的运动带电粒子的辐射功率：

$$
\begin{aligned}
P(t') &= \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2 \gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \\
&= \frac{q^2 \left(m_0 \gamma^3 \dot{v}\right)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_0^2} \\
&= \frac{q^2 F^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_0^2}
\end{aligned}
$$

粒子的能量为 $\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2$，$\gamma$ 越大，粒子的能量越高。在一定作用力下，运动带电粒子的辐射功率与粒子的能量无关，只取决于作用力 F 的大小。

匀速圆周运动

匀速圆周运动的粒子辐射：

$\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}, \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$

以 $\vec{v}$ 方向为 z 轴，$\dot{\vec{v}}$ 方向为 x 轴建立直角坐标系。

$$
\vec{v} = (0, 0, v), \quad \dot{\vec{v}} = \left(\left|\dot{\vec{v}}\right|, 0, 0\right), \quad \hat{r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)
$$

$$

$$

$$
\begin{aligned}
P(t') &= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]\right|^2}{(1 - \vec{v} \cdot \hat{r}/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi) \times \left[(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi - v/c) \times \left(\left|\dot{\vec{v}}\right|, 0, 0\right)\right]\right|^2}{(1 - v\cos\theta/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \oint \frac{\left|\left(-\sin^2\theta\sin^2\phi - \cos\phi\left(\cos\phi - v/c\right), \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi, \sin\theta\cos\phi\left(\cos\phi - v/c\right)\right)\right|^2}{(1 - v\cos\theta/c)^5} \mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2 \gamma^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}
\end{aligned}
$$

力与加速度的一般关系：

$$
\vec{F} = \gamma m_0 \dot{\vec{v}} + \frac{m_0 \gamma^3 \left(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}\right)}{c^2} \vec{v}
$$

对于匀速圆周运动的粒子，由于 $\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$，因此有：

$$
\vec{F} = \gamma m_0 \dot{\vec{v}}
$$

以及能量：

$$\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2$$

于是匀速圆周运动的带电粒子的辐射功率可写为：

$$\begin{aligned} P(t') &= \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2 \gamma^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \\ &= \frac{q^2 \left(\gamma m_0 \dot{\vec{v}}\right)^2 \left(\gamma m_0 c^2\right)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^7 m_0^4} \\ &= \frac{q^2 F^2 \mathcal{E}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^7 m_0^4} \end{aligned}$$

对于圆形粒子加速器，维持粒子高能运转，电磁辐射造成的能量损失与粒子能量 $\mathcal{E}^2$ 成正比。

2.4 带电粒子辐射的频谱分析

设时域信号 $\vec{E}(\vec{x}, t)$ 可按圆频率 ω 进行傅里叶分解：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \vec{E}_\omega(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

对于辐射场 $\vec{E}(\vec{x}, t)$，其中圆频率 ω 的电磁波强度为 $\vec{E}_\omega(\vec{x})$

$$\vec{E}_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{x}, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

辐射总能量 W：

$$W = \oint \mathrm{d}\Omega \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\omega \left(4\pi\varepsilon_0 c r^2\right) \left|\vec{E}_\omega(\vec{x})\right|^2$$

圆频率 $\omega \sim \omega + \mathrm{d}\omega$ 的电磁波贡献的辐射能量 $\mathrm{d}W$：

$$\mathrm{d}W = \oint \mathrm{d}\Omega \left(4\pi\varepsilon_0 c r^2\right) \left|\vec{E}_\omega(\vec{x})\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

圆频率为 ω 的电磁波贡献的辐射能量密度 W_ω：

$$W_\omega \equiv \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\omega} = \oint \mathrm{d}\Omega \left(4\pi\varepsilon_0 c r^2\right) \left|\vec{E}_\omega(\vec{x})\right|^2$$

辐射微分能量密度 $\mathrm{d}W_\omega / \mathrm{d}\Omega$：

$$\frac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}\Omega} = \left(4\pi\varepsilon_0 c r^2\right) \left|\vec{E}_\omega(\vec{x})\right|^2$$

轫致辐射

低速带电粒子入射到靶核上，瞬间减速而引起的辐射。

低速 $v \ll c$，则辐射场 $\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{x}, t)$ 可近似为：

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{x}, t) &\equiv \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \frac{\hat{r} \times \left[(\hat{r} - \vec{v}/c) \times \dot{\vec{v}}\right]}{c^2 \left(1 - \hat{r} \cdot \vec{v}/c\right)^3} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \dot{\vec{v}}\right) \end{aligned}$$

上式右边 $\dot{\vec{v}}$ 是实验室系中 t' 时刻粒子的加速度，而 t' 由方程 $t' = t - \left|\vec{x} - \vec{x}_q(t')\right| / c$ 确定，即 $t' = t'(\vec{x}, t), \vec{r} = \vec{r}(\vec{x}, t)$，也可以看成 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{x}, t') = \vec{x} - \vec{x}_q(t')$

低速运动，$\mathrm{d}t' = \frac{r}{s}\mathrm{d}t - \frac{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{x}}{cs}$，求 $\vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{x},t)$ 时要对 t 积分，积分过程中场点 $\vec{x}$ 保持不变，取 $\mathrm{d}\vec{x}=\vec{0}$，因此低速近似下 $\mathrm{d}t = \frac{r}{s}\mathrm{d}t' \approx \mathrm{d}t', t' = t - r/c, \dot{\vec{v}}\mathrm{d}t' = \mathrm{d}\vec{v}$

$\dot{\vec{v}}(t')$ 只有在一小段时间 $t_1' \sim t_2'$ 内不约等于零，而考虑辐射场场点 $\vec{x}$ 与源点 $\vec{x}_q(t')$ 很远，r 很大，因此这小段时间内 $\vec{r}, r, \hat{r}$ 几乎没变，因此可提到积分号外，并取 $\xi \in (t_1', t_2')$ 时刻的值作为近似。

若只考虑频谱的低频 $\omega \ll 1$ 部分，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'} \approx 1$

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_\omega(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{\mathrm{rad}}(\vec{x},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\hat{r}\times\left(\hat{r}\times\dot{\vec{v}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega (t'+r/c)}\mathrm{d}t' \\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\left.\hat{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\times\left(\left.\hat{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t'\right) \\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2 r}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\left.\hat{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\times\left(\left.\hat{r}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{\vec{v}}\mathrm{d}t'\right) \\
&\approx \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/c}}{r}\hat{r}\times(\hat{r}\times\Delta\vec{v})\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(\xi)}
\end{aligned}
$$

低频辐射的能量密度角分布：

$$
\frac{\mathrm{d}W_\omega}{\mathrm{d}\Omega} = 4\pi\varepsilon_0 c\left|\vec{E}_\omega(\vec{x})\right|^2 r^2 = 4\pi\varepsilon_0 c\left(\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 c^2}\right)^2\left|\hat{r}\times(\hat{r}\times\Delta\vec{v})\right|^2, \quad \vec{r} = \vec{x}-\vec{x}_q(\xi)
$$

上式右边与 ω 无关，即轫致辐射的低频部分电磁波强度相等，W_ω在低频时是一个与频率无关的常数。

然而实验发现，存在一截止波长 λ_c，轫致辐射中没有低于截止波长的电磁波。

2.5 切伦科夫辐射

在真空中，带电粒子匀速运动不会发生辐射。辐射场与 $\dot{\vec{v}}$ 紧密相关。

但在介质中，匀速运动的带电粒子可以发生辐射，称为切伦科夫辐射。

- 发生条件：只要带电粒子的速度 v 大于介质中的光速 $\tilde{c} = c/n$，即：

$$
v > \tilde{c} = c/n
$$

- 辐射方向：切伦科夫辐射只在特定方向上辐射电磁波。这些方向与速度 $\vec{v}$ 的夹角 θ_c 满足 $\cos\theta_c = \tilde{c}/v$（这些方向构成一个圆锥面）。

$$
\cos\theta_c = \frac{\tilde{c}}{v}
$$

通过推导可以证明，只有

$$
v > \tilde{c} = c/n, \quad \text{and} \quad \cos\theta = \frac{c}{nv}
$$

时，匀速运动的粒子才会在介质中造成辐射。

只要作替换：

$$
\mu_0 \to \mu, \quad c \to \tilde{c} = c/n, \quad t' = t - r/c \to t' = t - r/\tilde{c} = t - nr/c,
$$

$$
\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r - n\vec{r}\cdot\vec{v}/c}
$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r-n\vec{r}\cdot\vec{v}/c}$$

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t'),\quad \vec{v}=\vec{v}_q(t')\quad t'=t-n\left|\vec{x}-\vec{x}_q(t')\right|/c$$

2.6 电磁波的散射与介质的色散

2.7 例题

例1

> 带电粒子电荷量为 q，速度为 $0.9c$，在某介质中作匀速直线运动，已知介质中 $n=1.3$

1

> 写出带电粒子的电磁势（即李纳-维谢尔势）

设介质的介电常数为 ε，则李纳-维谢尔势为：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r-\vec{r}\cdot\vec{v}/\left(c/n\right)}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r-\vec{r}\cdot\left(0.9c\vec{\mathrm{e}}_q\right)/\left(c/1.3\right)}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r-1.17\vec{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x},t)&=\frac{\mu}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{r-\vec{r}\cdot\vec{v}/\left(c/n\right)}\\&=\frac{9\mu}{40\pi}\frac{qc\vec{\mathrm{e}}_q}{r\left(1-1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q\right)}\end{aligned}$$

其中，$\vec{\mathrm{e}}_q$ 是粒子速度方向上的单位矢量；$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}_q(t'),t'=t-r/\left(c/n\right)=t-1.3r/c$

2

> 仅考虑切伦科夫辐射，在哪个方向上有辐射？

只有当粒子运动速度大于介质中光速才会有切伦科夫辐射，这里是满足的。

辐射角 θ_c 满足：

$$\cos\theta_c=\frac{\tilde{c}}{v}=\frac{c}{nv}=\frac{c}{1.3\cdot0.9c}=\frac{100}{117}$$

即：

$$\theta_c=\arccos\frac{100}{117}$$

3

> $t=1\mathrm{s}$ 时，

(1)

> 写出 t' 的表达式；

在介质中，

$$t'=t-\left|\vec{x}-\vec{x}_q(t')\right|/\left(c/n\right)=1-1.3\left|\vec{x}-\vec{x}_q(t')\right|/c$$

(2)

> t' 与 t 哪个大;

$$t > t'$$

(3)

> 在原点处计算 t'，有几种可能的值?

原点处 $\vec{x} = \vec{0}$，则 t' 满足:

$$t' = 1 - 1.17\,|t'|$$

若 $t' > 0$，可解得: $t' = 100/217\,\mathrm{s}$; 若 $t' < 0$，可解得: $t' = -100/17\,\mathrm{s}$

因此，t' 共有 2 种可能的值。

(4)

> 计算原点处的电势。

设 0 s 时粒子处于原点。

则:

$$\vec{x}_q(t) = 0.9ct\vec{\mathrm{e}}_q$$

当 $\vec{x} = \vec{0}, t = 1\,\mathrm{s}$ 时,

若 $t' = 100/217\,\mathrm{s}$，则:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_q(t') = -\frac{90c}{217}\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$\hat{r} = -\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_q(t')| = \frac{90}{217}c$$

$$\hat{r} \cdot \vec{\mathrm{e}}_q = -\vec{\mathrm{e}}_q \cdot \vec{\mathrm{e}}_q = -1$$

原点处的电势为:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{0}, t')\Big|_{t'=100/217\,\mathrm{s}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\,(1 - 1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q)} \\ &= \frac{5q}{18\pi\varepsilon c} \end{aligned}$$

若 $t' = -100/17\,\mathrm{s}$，则:

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_q(t') = \frac{90c}{17}\vec{\mathrm{e}}_q$$

$$\hat{r} = \vec{\mathrm{e}}_q$$

$$r = |\vec{x} - \vec{x}_q(t')| = \frac{90}{17}c$$

$$\hat{r} \cdot \vec{\mathrm{e}}_q = \vec{\mathrm{e}}_q \cdot \vec{\mathrm{e}}_q = 1$$

原点处的电势为:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{0}, t')\Big|_{t'=-100/17\,\mathrm{s}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r\,(1 - 1.17\hat{r}\cdot\vec{\mathrm{e}}_q)} \\ &= -\frac{5q}{18\pi\varepsilon c} \end{aligned}$$

> 我也不知道为啥会是这个奇怪的结果。

3 麦克斯韦方程与 LLG 方程和等离子体的耦合

3.1 麦克斯韦方程与 LLG 方程的耦合

磁化强度 $\vec{M}$ 运动方程

铁磁物质的磁化强度 $\vec{M}$ 来源于组成铁磁物质的磁性离子中未被抵消的电子自旋磁矩和轨道磁矩。磁化强度 $\vec{M}$ 与角动量 $\vec{G}$ 的关系为：

$$\mu_0\vec{M} = -\gamma\vec{G}$$

其中，

$$\gamma \equiv \frac{\mu_0 e}{2m_e}g, \quad g = 2,$$

γ 称为旋磁比，g 是朗德因子。

在总有效磁场 $\vec{H}_{\text{eff}}$ 的作用下，磁化强度 $\vec{M}$ 受到的力矩为：

$$\vec{L} = \mu_0\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}$$

在力矩 $\vec{L}$ 的作用下，角动量 $\vec{G}$ 发生变化，其随时间的演化方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t} = \vec{L}$$

将 $\mu_0\vec{M} = -\gamma\vec{G}, \quad \vec{L} = \mu_0\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}$ 代入上式就得到磁矩 $\vec{M}$ 的运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}}$$

LLG 方程

Landau–Lifshitz 方程：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{M} \times \vec{H} - \frac{\alpha\gamma}{M}\vec{M} \times \left(\vec{M} \times \vec{H}\right)$$

Landau–Lifshitz–Gilbert 方程：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{H} \times \vec{M} + \frac{\alpha}{M}\vec{M} \times \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$$

其中，

$$\gamma \equiv \frac{\mu_0 e}{2m_e}g, \quad g = 2,$$

可以证明，在采用 LL 形式或 LLG 形式的阻尼项时，$\vec{M}$ 的绝对值不随时间改变。

若采用 LLG 形式的阻尼项，磁化强度的运动方程（LLG 方程）为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{H} \times \vec{M} + \frac{\alpha}{M}\vec{M} \times \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$$

其中，

$$\gamma \equiv \frac{\mu_0 e}{2m_e}g, \quad g = 2,$$

若把旋磁比 γ 定义为：

$$\gamma \equiv \frac{-\mu_0 e}{2m_e} g, \quad g=2,$$

则 LLG 方程改写为：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \gamma \vec{H} \times \vec{M} + \frac{\alpha}{M} \vec{M} \times \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}}, \quad \gamma \equiv \frac{-\mu_0 e}{2m_e} g, \quad g=2,$$

LLG 形式阻尼的张量磁化率 χ 和张量磁导率 μ

若采用 LLG 形式的阻尼项，磁化强度的运动方程（LLG 方程）为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \gamma \vec{H} \times \vec{M} + \frac{\alpha}{M} \vec{M} \times \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}, \quad \gamma \equiv \frac{-\mu_0 e}{2m_e} g, \quad g=2,$$

考虑各项同性均匀无穷大样品，设 $\vec{H}, \vec{M}$ 可写为：

$$\vec{H} = h_x \hat{x} + h_y \hat{y} + \left(H_e + h_z\right) \hat{z}$$

$$\vec{M} = m_x \hat{x} + m_y \hat{y} + \left(M_0 + m_z\right) \hat{z}$$

其中，$h_x, h_y, h_z, m_x, m_y, m_z$ 是与时间有关的小量，H_e, M_0 是与时间无关的大量。

考虑交变磁场，即：$\vec{h} \equiv h_x \hat{x} + h_y \hat{y} + h_z \hat{z} = \vec{h}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，$\vec{h}_0$ 为常矢量；$\vec{M}$ 作为对 $\vec{H}$ 的相应，也应当是交变的，即：$\vec{m} \equiv m_x \hat{x} + m_y \hat{y} + m_z \hat{z} = \vec{m}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，$\vec{m}_0$ 为常矢量。

代入 LLG 方程可得：

$$\mathrm{j}\omega \left(m_x \hat{x} + m_y \hat{y} + m_z \hat{z}\right) = \gamma \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ m_x & m_y & M_0 + m_z \\ h_x & h_y & H_e + h_z \end{vmatrix} + \frac{\alpha}{M} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ m_x & m_y & M_0 + m_z \\ \mathrm{j}\omega m_x & \mathrm{j}\omega m_y & \mathrm{j}\omega m_z \end{vmatrix}$$

即：

$$\mathrm{j}\omega \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} m_y \left(H_e + h_z\right) - \left(M_0 + m_z\right) h_y \\ \left(M_0 + m_z\right) h_x - m_x \left(H_e + h_z\right) \\ m_x h_y - m_y h_x \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{M} \begin{bmatrix} m_y \mathrm{j}\omega m_z - \left(M_0 + m_z\right) \mathrm{j}\omega m_y \\ \left(M_0 + m_z\right) \mathrm{j}\omega m_x - m_x \mathrm{j}\omega m_z \\ m_x \mathrm{j}\omega m_y - m_y \mathrm{j}\omega m_x \end{bmatrix}$$

设 $\left|\vec{h}\right| \ll \left|\vec{H}_e\right|, |\vec{m}| \ll \left|\vec{M}\right|$，忽略二阶小量得到：

$$\mathrm{j}\omega \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} m_y H_e - M_0 h_y \\ M_0 h_x - m_x H_e \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{M} \begin{bmatrix} -\mathrm{j}\omega M_0 m_y \\ \mathrm{j}\omega M_0 m_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

令：

$$\omega_0 \equiv -\gamma H_e,$$

$$\omega_0' \equiv \omega_0 + \mathrm{j}\alpha\omega = -\gamma H_e + \mathrm{j}\alpha\omega,$$

$$\omega_m \equiv -\gamma M_s \approx -\gamma M_0 \approx -\gamma M$$

其中 M_s 为饱和磁化强度。由于 $M_0 \approx M \approx M_s$，则：

$$\begin{cases} \mathrm{j}\omega m_x + \omega_0' m_y = \omega_m h_y \\ -\omega_0' m_x + \mathrm{j}\omega m_y = -\omega_m h_x \\ m_z = 0 \end{cases}$$

可以解出：

$$m_x = \frac{\omega_0'\omega_m}{\omega_0'^2 - \omega^2}h_x + \frac{\mathrm{j}\omega\omega_m}{\omega'^2 - \omega^2}h_y$$

$$m_y = -\frac{\mathrm{j}\omega\omega_m}{\omega_0'^2 - \omega^2}h_x + \frac{\omega_0'\omega_m}{\omega_0'^2 - \omega^2}h_y$$

$$\vec{m} = \chi \cdot \vec{h} = (\mu - 1) \cdot \vec{h}$$

$$m_z = 0$$

令:

$$\chi \equiv \frac{\omega_0'\omega_m}{\omega_0'^2 - \omega^2} \quad , \kappa \equiv -\frac{\omega\omega_m}{\omega_0'^2 - \omega^2},$$

则:

$$m_x = \chi h_x - \mathrm{j}\kappa h_y$$

$$m_y = \mathrm{j}\kappa h_x + \chi h_y$$

$$m_z = 0$$

写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi & -\mathrm{j}\kappa & 0 \\ \mathrm{j}\kappa & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$$

定义张量磁化率 χ:

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} \chi & -\mathrm{j}\kappa & 0 \\ \mathrm{j}\kappa & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设:

$$\chi = \chi' - \mathrm{j}\chi'', \quad \kappa = \kappa' - \mathrm{j}\kappa'', \quad \chi', \chi'', \kappa', \kappa'' \in \mathbb{R}$$

有:

$$\chi' = \frac{\omega_m\omega_0\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 - \alpha^2\right)\right]}{\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]^2 + 4\omega_0^2\omega^2\alpha^2}$$

$$\chi'' = \frac{\omega_m\omega\alpha\left[\omega_0^2 + \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]}{\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]^2 + 4\omega_0^2\omega^2\alpha^2}$$

$$\kappa' = \frac{-\omega_m\omega\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]}{\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]^2 + 4\omega_0^2\omega^2\alpha^2}$$

$$\kappa'' = \frac{-2\omega_m\omega_0\omega^2\alpha}{\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1 + \alpha^2\right)\right]^2 + 4\omega_0^2\omega^2\alpha^2}$$

微波在无线各向异性介质中的传播

考虑波矢 $\vec{k}$ 与磁场（沿 z 轴方向）的夹角为 θ 的波在无限各向异性介质中传播。该场依赖于 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t - \gamma\hat{k}\cdot\vec{r}}$

麦克斯韦方程:

$$\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\vec{E} \times \hat{k} = -\vec{b}$$

$$\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\vec{h} \times \hat{k} = \vec{D}$$

又 $\vec{E}=\vec{D}/\varepsilon$，于是有：

$$\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\vec{h}\times\hat{k}\right)$$

$$\vec{b}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\right)^2\left[\hat{h}-\left(\vec{h}\cdot\hat{k}\right)\hat{k}\right]$$

另一方面，$\vec{b}$ 也可以通过张量磁导率 写为：

$$\vec{b}=\mu_0\begin{bmatrix}\mu & -\mathrm{j}\kappa & 0\\ \mathrm{j}\kappa & \mu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}$$

联立上面两式得三个分量方程：

$$\mu_0\left(\mu h_x-\mathrm{j}\kappa h_y\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\right)^2\left[h_x-\left(\sin\theta\cos\phi h_x+\sin\theta\sin\phi h_y+\cos\theta h_z\right)\sin\theta\cos\phi\right]$$

$$\mu\left(\mathrm{j}\kappa h_x+\mu h_y\right)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\right)^2\left[h_y-\left(\sin\theta\cos\phi h_x+\sin\theta\sin\phi h_y+\cos\theta h_z\right)\sin\theta\sin\phi\right]$$

$$\mu_0 h_z=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\right)^2\left[h_z-\left(\sin\theta\cos\phi h_x+\sin\theta\sin\phi h_y+\cos\theta h_z\right)\cos\theta\right]$$

行列式等于给出 γ 的本征值 $\gamma_\pm$：

$$\gamma_\pm=\mathrm{j}\omega\left(\mu_0\varepsilon\right)^{1/2}\left\{\frac{\left(\mu^2-\mu-\kappa^2\right)\sin^2\theta+2\mu\mp\left[\left(\mu^2-\mu-\kappa^2\right)^2\sin^4\theta+4\kappa^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}{2\left[(\mu-1)\sin^2\theta+1\right]}\right\}$$

本征值 $\gamma_\pm$ 不依赖 ϕ；与 γ_+ 和 γ_- 对应的解表示在 z 方向传播的两个速度不同的椭圆偏振波。

法拉第旋转

法拉第旋转效应是指，在纵向磁化的铁氧体中，线偏振电磁波的偏振面（电场矢量或磁场矢量与传播轴组成的平面）具有绕传播轴旋转的现象。

在磁场中，法拉第旋转角 θ 可表示为：

$$\theta=HLV$$

H 为 外加磁场的强度，L 为磁光材料的有效长度，V 为 Verdet 常数。

3.2 麦克斯韦方程与 等离子体的耦合

等离子体的准电中性屏蔽库仑场

热平衡时在等离子体内 $\vec{x}=\vec{0}$ 处放置一个静止点电荷 q，则电荷密度为：

$$\rho(\vec{x})=q\delta(\vec{x})$$

热平衡时等离子体内有一定的正离子密度分布 $n_i(\vec{x})$ 和负离子（电子）密度分为 $n_e(\vec{x})$，设正离子带电荷 $Ze.$ 总电场强度 $\vec{E}$ 是所有电荷所产生的场。电势满足泊松方程：

$$\varepsilon_0\nabla^2\varphi=-Zn_ie+n_ee-q\delta(\vec{x})$$

可以忽略正离子的运动，只考虑电子的运动。在电势 φ 作用下，热平衡时电子分布服从玻尔兹曼分布：

$$n_e(\vec{x})=n_{e0}\mathrm{e}^{e\varphi(\vec{x})/kT}$$

其中，n_{e0} 是 $\varphi=0$ 时的电子密度，T 为电子气体的温度。

若 $kT \gg e\varphi$，则有：

$$n_e \approx n_{e0}\left(1+\frac{e\varphi}{kT}\right)$$

因此泊松方程化为：

$$\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi = -\left(Zn_i - n_{e0}\right)e + n_{e0}\frac{e^2\varphi}{kT} - q\delta(\vec{x})$$

等离子体整体上电中性，有：

$$Zn_i = n_{e0}$$

则：

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\varphi(\vec{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x}), \quad \lambda^2 = \frac{kT\varepsilon_0}{n_{e0}e^2}$$

其解为：

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-r/\lambda}$$

当 $r \ll \lambda$ 时，φ 与库伦势相同；当 $r \gg \lambda$ 时，$\varphi \to 0$。因此，上式称为库仑屏蔽势，λ 称为屏蔽长度。

等离子体内任意外电荷分布 $\rho_e(\vec{x})$ 产生的电势为：

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{\rho_e(\vec{x}')}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\mathrm{e}^{-\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|/\lambda}\mathrm{d}^3\vec{x}'$$

在线度 $l \gg \lambda$ 范围内，可以把等离子体看作电中性的。这种性质称为准电中性。

德拜屏蔽

忽略正离子的运动，只考虑电子流体的运动。

设电子密度为 n，速度为 $\vec{v}$，电子流体的运动满足：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\vec{v}) = 0$$

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\right) = -e\vec{E}$$

设平衡时电子密度为 n_0，在平衡态时电子的电荷密度被离子的电荷密度完全抵消，因此产生电场的电荷密度是偏离平衡的值 $-\left(n-n_0\right)e$

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\left(n-n_0\right)e/\varepsilon_0$$

只考虑平衡态附近的微小振荡。

设 $n' = n - n_0$ 及 $\vec{v}$ 都是小量，方程线性化后得：

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0}n'$$

可以得到：

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0}n' = 0$$

解得：

$$n'(t) = n'(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}$$

其中，$\omega_p \equiv \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$ 称为等离子体频率。

电磁波在等离子体中的传播

考虑电磁波在等离子体中传播，等离子体收自身产生的电场 $\vec{E}_i$ 和电磁波电场 $\vec{E}_e$ 的作用。

同样近似下，等离子体运动方程为：

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\left(\vec{E}_i + \vec{E}_e\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0} n'$$

由于电磁波电场满足 $\nabla \cdot \vec{E}_e = 0$，因此：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{v}) = -\frac{e}{m}\nabla \cdot \vec{E}_i$$

把等离子体振荡部分分离出来后，电子受电磁波电场作用的运动方程：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\vec{E}_e$$

对电流密度 $\vec{J} = -n_0 e \vec{v}$，有：

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m}\vec{E}_e$$

对频率为 ω 的电磁波，令：

$$\vec{E}_e(\vec{x}, t) = \vec{E}_e(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega \vec{J}$$

若形式上写为欧姆定律的形式：

$$\vec{J}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}_e(\omega)$$

则电导率 $\sigma(\omega)$ 为一纯虚数：

$$\sigma(\omega) = \mathrm{i}\frac{n_0 e^2}{m\omega}$$

纯虚数的电导率表示电流与电场有 $\pi/2$ 相位差，因而没有欧姆能量损耗。

把复电容率 $\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\sigma/\omega$ 中的 σ 代入，得有效电容率：

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2}$$

等离子体内电磁波的波数：

$$k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon'} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

式中取 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

若 $\omega < \omega_p$，则 k 为纯虚数，电磁波不能在等离子体内传播。等离子体 频率 ω_p 也是电磁波在等离子体内传播的截止频率。

等离子体折射率：

$$n=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

在等离子体内，$n<1$，当电磁波从空气入射到电离层上时，折射角大于入射角。当入射角 $\theta>\theta_c, \sin\theta_c=n$ 时，出现全反射现象。

例题

例1

1

> 太阳光由太阳光球层发出。从光在等离子体中的传播规律出发，结合太阳光谱性质，判断光球层中的电子密度与金属铜中的自由电子密度哪个大。（金属铜的截止频率在X光频段）。

由于可见光可以在光球层中传播，因此可见光频率 ω 大于光球层截止频率 ω_{p1} ，即：$\omega>\omega_{p1}$

而 X 光频率大于可见光频率，而金属铜的截止频率在X光频段，因此金属铜的截止频率 ω_{p2} 大于光球层的截止频率 ω_{p1}。

截止频率 ω_p 与电子密度 n_0 的关系为：

$$\omega_p=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m_e\varepsilon_0}}$$

因此金属铜的自由电子密度大。

2

> 光球层的质量密度 $\rho=3\times10^{-4}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$，假设光球层由等量的质子与电子组成，而质子质量 $m_p=1\ \mathrm{GeV}\sim2\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$，求光球层的电子数密度 n_e.

电子质量远小于质子质量，因此质子数密度 n_p 为：

$$n_p\approx\rho/m_p=1.5\times10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$$

由于光球层由等量的质子与电子组成，因此电子数密度 n_e 为:

$$n_e=n_p=1.5\times10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$$

3

> 在国际单位制下，精细结构常数 $\alpha=e^2/\left(4\pi\varepsilon_0\hbar c\right)=1/137$ 是无量纲常数。自然单位制允许选择 $e,\varepsilon_0,\hbar,c$ 中的 3 个物理常量进行归一化。在自然单位制下，取 $1=\varepsilon_0=\hbar=c$，则 $\alpha=e^2/(4\pi)=1/137$. 已知自然单位制下 $m_e=0.5\ \mathrm{MeV}, 197\ \mathrm{fm}\cdot\mathrm{MeV}=1, 1\ \mathrm{fm}=10^{-15}\ \mathrm{m}$，求光球层的截止频率 $\omega_p=\sqrt{\frac{e^2n_0}{m_e}}$

自然单位制就是在国际单位制基础上加了几个**附加条件**。

如规定 $c=1$，就等价于国际单位制中如下的附加条件：

$$c=3\times10^8\ \mathrm{m/s}=1\Longrightarrow 1\ \mathrm{s}=3\times10^8\ \mathrm{m},\quad 1\ \mathrm{m}=\frac{1}{3}\times10^{-8}\ \mathrm{s}$$

自然单位制下，

$$e^2=\frac{4\pi}{137}$$

由于在国际单位制下光球层截止频率的单位为 s^{-1}，因此在自然单位制下可如下配凑回到国际单位制：

$$
\begin{aligned}
\omega_p &= \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{137}}\sqrt{\frac{1.5\times 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}}{0.5\ \mathrm{MeV}}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{137}}\sqrt{\frac{1.5\times 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}}{0.5\cdot\frac{1}{197}\,(\mathrm{fm})^{-1}}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3}{137}}\sqrt{10^8\ \mathrm{m}^{-2}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3}{137}}\sqrt{10^8\left(\frac{1}{3}\times 10^{-8}\ \mathrm{s}\right)^{-2}} \\
&= \sqrt{\frac{4\pi\cdot 197\cdot 3\cdot 9}{137}}10^{12}\ \mathrm{s}^{-1} \\
&\approx 2.2\times 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1} \\
&= 2.2\times 10^{13}\ \mathrm{Hz}
\end{aligned}
$$

4 AB 效应和超导的电磁效应

AB 效应

电磁场中电子的哈密顿量：

$$
\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[-\mathrm{i}\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})\right]^2 - eA_0(\vec{x})
$$

$A_0(\vec{x})$ 是标势，$\vec{A}(\vec{x})$ 是矢势。

磁 AB 效应

电子双缝干涉实验中，在双缝后放一个无限长通电螺线管。

通电前，管外 $\vec{B}=\vec{0},\vec{A}=\vec{0}$；通电后，管外 $\vec{B}=\vec{0},\vec{A}\neq\vec{0}$

管外区域的磁矢势对电子产生作用，使得两束电子有一个附加相位差，从而使得干涉条纹的极值位置发生移动。

实验测得干涉条纹的移动值为：

$$
\Delta y = \frac{e\Phi}{mv}\frac{f}{b}
$$

其中，Φ 为螺线管内磁通量，v 为电子速度，b 为双缝间距，f 为双缝到屏的距离。

定量解释

量子力学中，电子的状态用波函数描述。波函数的相位 ϕ：

$$
\phi = \int \vec{k}\cdot\mathrm{d}\vec{r}
$$

螺线管通电前，通过两条狭缝的电子到达屏上 y 处时，波函数的相位差：

$$
\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot b\sin\theta = kb\sin\theta
$$

若相位差满足 $\phi_1-\phi_2=(2n+1)\,\pi$，即：

$$
kb\sin\theta = (2n+1)\,\pi
$$

则两束电子波在屏上该处干涉相消。屏上干涉条纹强度极小值位置：

$$y \approx f \sin\theta = \frac{(2n+1)\,\pi}{k}\frac{f}{b}$$

电子具有波动性。德布罗意关系：

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

螺线管通电前，每条路径上电子波的相位：

$$\phi = \int \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{\hbar}\int \vec{p}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

相位差可表示为：

$$\phi_1 - \phi_2 = \int\limits_{C_1} \frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_2} \frac{m\vec{v}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

电子在矢势作用下，其正则动量为：

$$\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A} = m\vec{v} - e\vec{A}$$

螺线管通电，管外存在磁矢势时，两电子束的相位差：

$$\begin{aligned}
\phi_1 - \phi_2 &= \int\limits_{C_1} \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_2} \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int\limits_{C_1} \frac{\vec{P}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_2} \frac{\vec{P}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int\limits_{C_1} \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_2} \vec{k}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \left(\int\limits_{C_1} \frac{-e\vec{A}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{C_2} \frac{-e\vec{A}}{\hbar}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \right) \\
&= kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\oint\limits_{C_1+C_2} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\iint \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\Phi
\end{aligned}$$

可以看到，与螺线管通电时相比，相位差多了 δ：

$$\delta = -\frac{e\Phi}{\hbar}$$

若相位差满足：

$$kb\sin\theta - \frac{e}{\hbar}\Phi = (2n+1)\,\pi$$

则两束电子波干涉相消，形成干涉极小。

屏上干涉条纹极小值的位置：

$$y' \approx f\sin\theta = \frac{(2n+1)\,\pi}{k}\frac{f}{b} + \frac{ef}{\hbar kb}\Phi$$

电 AB 效应

$$\delta = \frac{e}{\hbar}\int \left[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right]\mathrm{d}t$$

超导体的电磁性质

- 零电阻
- 完全抗磁性（迈斯纳效应）
- 磁通量子化
- 具有临界温度、临界磁场、临界电流

迈斯纳效应

对于处在正常态的样品，加上磁场后磁场能进入样品的内部；当温度降低到临界温度 T_c 以下时，磁场立即被排斥在样品外，样品内部的磁感应强度为零。

在外磁场作用下，临界温度 T_c 随磁场的增加而降低。

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1-(T/T_c)^2\right]$$

完全抗磁性与零电阻特性是超导体的两个独立的特性。

$T_c, H_c, \vec{J}_c$

唯象理论

磁介质观点

认为超导体是一种完全抗磁体。

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$$

超导体中

$$\vec{B} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{M} = -\vec{H}$$

把超导体看作一种完全抗磁体，认为超导体是线性均匀介质，则磁化强度 $\vec{M}$ 与磁场强度 $\vec{H}$ 成正比：

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{M}}\vec{H}$$

结合 $\vec{M} = -\vec{H}$ 可得：

$$\chi_{\mathrm{M}} = -1$$

超导体的磁导率：

$$\mu = \mu_0\left(1+\chi_{\mathrm{M}}\right) = 0$$

认为超导电流是磁化电流，磁化电流以面电流的形式分布在超导体表面。

超导环的磁通俘获和磁通量子化现象

磁通俘获现象

在 $T > T_c$ 时，将一个处于正常态的超导环放置于外磁场中。降低温度，使得 $T < T_c$，该环转变为超导态。实验发现，撤去外场后，超导环的磁通仍然保持。

用麦克斯韦方程解释在磁场撤去前后，超导环中间的磁通不变。

麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

积分形式：

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

将积分回路选为超导环内部离超导体表面足够远处。

由于撤去磁场前后金属环始终处于超导态，所以环内部电场始终为零，从而有：

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=0$$

即磁通为与时间无关的常数。

超导环中间的磁通是量子化的

磁通是某个磁通量子 Φ_0 的整数倍。

$$\Phi=n\Phi_0,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\Phi_0\equiv\frac{h}{2e}$$

绕积分回路一周，电子波函数相位变化：

$$\Delta\phi=\frac{1}{\hbar}\oint\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

其中，$\vec{P}=\vec{p}-e\vec{A}$ 是电子的正则动量。

超导电子是库伯电子对，正则动量为：

$$\vec{P}=2m\vec{v}_s-2e\vec{A}=-\frac{2m}{n_se}\vec{J}_s-2e\vec{A}$$

$$\Delta\phi=\frac{1}{\hbar}\oint\left(-\frac{2m}{n_se}\vec{J}_s-2e\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

考虑电子波函数的单值性，对于闭合回路，其相位变化只能是 2π 的整数倍：

$$\Delta\phi=\frac{1}{\hbar}\oint\left(-\frac{2m}{n_se}\vec{J}_s-2e\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

超导态下，超导体内部 $\vec{J}_s=\vec{0}$

$$\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{n\pi\hbar}{e}=\frac{nh}{2e}$$

$$\Phi=\oint\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=n\frac{h}{2e}=n\Phi_0$$

二流体模型

正常电子 n_n 和超导电子 n_s 共存于超导态中，单位体积内总电子数 n：

$$n=n_n+n_s$$

正常流体受到晶格振动或杂质的散射，电阻率不为零。超导流体不受晶格振动或杂志的散射，电阻率为零。两种电子流体在超导体的超导态中相互渗透，独立运动，总电流密度 $\vec{J}$：

$$\vec{J}=\vec{J}_s+\vec{J}_n,\quad \vec{J}_s=\rho_s\vec{v}_s=n_se_s\vec{v}_s,\quad \vec{J}_n=n_ne_n\vec{v}_n$$

在超导态引入序参量 ω，

$$\omega(T)=\frac{n_s(T)}{n}$$

当 $T>T_c$ 时，$n_s=0$，对应 $\omega=0$；当 $T=0\ \mathrm{K}$ 时，$n_s=n$，对应于 $\omega=1$.

理想导体理论

把超导体看成理想导体（并不准确）。

理想导体中，超流电子的运动方程（牛二定律）：

$$q_e\vec{E}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

电流密度：

$$\vec{J}_s(\vec{r},t)=n_sq_e\vec{v}_s(\vec{r},t)$$

电流密度 $\vec{J}_s(\vec{r},t)$ 对时间求偏导，结合超流电子的运动方程可得：

$$\frac{\partial\vec{J}_s(\vec{r},t)}{\partial t}=n_sq_e\frac{\partial\vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{n_sq_e}{m}\cdot m\frac{\partial\vec{v}_s(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{n_sq_e^2\vec{E}}{m}=\frac{n_se^2\vec{E}}{m}=\alpha\vec{E},\quad \alpha\equiv\frac{n_se^2}{m}$$

利用 $\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$，上式两边同时求旋度可得：

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{J}_s(\vec{r},t)}{\partial t}=-\alpha\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

简写为：

$$\nabla\times\dot{\vec{J}}_s=-\alpha\dot{\vec{B}}$$

假设理想导体非磁性，磁导率 $\mu=\mu_0$，且位移电流 $\partial\vec{D}/\partial t$ 与超导电流 $\vec{J}_S$ 相比可以忽略，则理想导体内部麦克斯韦方程可写为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_s$$

对 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_s$ 两边求旋度，并利用 $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B},\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可得：

$$\nabla^2\dot{\vec{B}}-\mu_0\alpha\dot{\vec{B}}=\vec{0}$$

定义：

$$\lambda\equiv\sqrt{\frac{1}{\mu_0\alpha}}$$

则：

$$\nabla^2\dot{\vec{B}}-\frac{\dot{\vec{B}}}{\lambda^2}=\vec{0}$$

考虑一个平面界面的半无限的理想导体，垂直于平面的方向为 x 方向 $x>0$ 区域为理想导体内部，上式的物理解（不发散解）为：

$$\dot{\vec{B}}=\dot{\vec{B}}_0\exp\left(-x/\lambda\right)$$

这就是说，在深入到样品内部一定距离后，磁感应强度不随时间变化。

伦敦第一方程

伦敦第一方程是描述超导电子的电流与电场的关系：

$$\boxed{\frac{\partial\vec{J}_s}{\partial t}=\frac{n_se^2}{m}\vec{E}}$$

这是超导电流密度的演化方程。

稳恒情形，$\vec{J}_s$ 与时间无关，$\partial\vec{J}_s/\partial t=\vec{0}$，则由伦敦第一方程可知此时超导体内电场 $\vec{E}=\vec{0}$

非稳恒情况，$\partial\vec{J}_s/\partial t\neq\vec{0}$，因此 $\vec{E}\neq\vec{0},\vec{J}_n=\sigma\vec{E}\neq\vec{0}$. 对低频交流电，$J_n\ll J_s$，损耗很小。

伦敦第二方程

一般迈斯纳态下的超导体，磁场和超导电流主要存在于其表面一定厚度的薄层中，超导电流不能看成理想的面电流。

对伦敦第一方程求旋度，结合麦克斯韦方程，可得：

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{J}_s(\vec{r},t)}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

即：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{J}_s + \alpha \vec{B}\right) = \vec{0}$$

可见 $\nabla \times \vec{J}_s + \alpha \vec{B}$ 与时间无关。

伦敦理论进一步假设这个量为零，于是：

$$\boxed{\nabla \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}}$$

这就是**伦敦第二方程**。

在准静态近似下，

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s$$

根据：

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

以及稳态情形的电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = 0$$

可得：

$$\nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla \times \left(\mu_0 \vec{J}_s\right) = \mu_0 \alpha \vec{B} \equiv \frac{\vec{B}}{\lambda_L^2}$$

$$\nabla^2 \vec{J}_s = \frac{\vec{J}_s}{\lambda_L^2}$$

$$\lambda_L \equiv \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \alpha}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

其中，λ_L 称为伦敦穿透深度。

考虑无限大平板，解为：

$$\vec{B}(x) = \vec{B}_0 \exp\left(-x/\lambda_L\right)$$

伦敦方程预言，在 x 深入超导体内部若干个 λ_L 处，$\vec{B}$ 显著趋于零。对于大尺度超导体，可认为 $\lambda_L \to 0$，磁场完全被排出体外，这就是理想迈斯纳态。此时其内部 $\vec{B}(x) = \vec{0}, \vec{J}_s(x) = \vec{0}$，超导电流可视为分布于超导体表面。

伦敦规范下的伦敦方程

将 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 代入伦敦第二方程可得：

$$\nabla \times \left(\vec{J}_s + \alpha \vec{A}\right) = \vec{0}$$

可以引入 $\chi(\vec{r},t)$ 满足：

$$\vec{J}_s + \alpha\vec{A} = \nabla\chi(\vec{r}, t)$$

伦敦规范为：

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0, \quad \vec{A}\cdot\vec{n}\Big|_S = 0$$

在伦敦规范下，矢势 $\vec{A}$ 可以唯一确定。

单连通超导体

对于单连通超导体，在其内部取任一闭合曲线 C，围成的曲面 S 完全处在超导体内部，斯托克斯定理：

$$\oint_C \mathrm{d}\chi = \int_S \nabla\times\left(\vec{J}_s + \alpha\vec{A}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

由伦敦方程，上式右边为零。χ 必为单值函数。

在恒定情形下，$\nabla\cdot\vec{J}_s = 0, \vec{n}\cdot\vec{J}_s\Big|_S = 0$，结合伦敦规范，可得 χ 要满足：

$$\nabla^2\chi = 0, \quad \vec{n}\cdot(\nabla\chi)\Big|_S = 0$$

可知 χ 只能是常量。于是：

$$\vec{J}_s(\vec{x}) = -\alpha\vec{A}(\vec{x})$$

这就是恒定情形下，单连通超导体内超导电流与矢势的局域关系。

复连通超导体

C 围成的曲面 S 会有不为零的磁通量通过，因此 χ 可能是多值函数，无法得到 $\vec{J}_s$ 与 $\vec{A}$ 的局域关系。

非局域 Pippard 方程

类比反常趋肤效应，

$$\vec{J}(\vec{r}) = -\frac{3\alpha}{4\pi\xi_0}\iiint \mathrm{d}^3\vec{r}'\,\frac{\vec{R}\left[\vec{R} - \vec{A}\left(\vec{r}'\right)\right]}{R^4}\exp\left(-R/\xi_p\right)$$

其中，$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$，$\xi_0$ 为 Pippard 相干长度，ξ_p 为有效相干长度。

$$\frac{1}{\xi_p} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{dl}$$

其中，l 是正常态下纯金属的电子平均自由程，d 是与材料有关的系数。

若 $dl \ll \xi_0$，则 $\xi_p \ll \lambda_p$，在 ξ_p 范围内 $\vec{A}\left(\vec{r}'\right)$ 变化缓慢，$\vec{J}_s$ 的分量 J_{si} 可近似为：

$$J_{si}(\vec{r}) = -\frac{3\alpha}{4\pi\xi_0}\sum_{j=1}^{3} A_j(\vec{r})\int_V \frac{R_iR_j}{R^4}\exp\left(-R/\xi_p\right)\mathrm{d}^3\vec{r}' = -\frac{\alpha}{\xi_0}\xi_p A_i(\vec{r})$$

即当 $\xi_p \ll \lambda_p$，才有：

$$\vec{J}_s = -\frac{\alpha}{\xi_0}\xi_p\vec{A}$$

这就是 Pippard 方程的局域近似。

局域近似下 Pippard 有效穿透深度：

$$\lambda_p = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\xi_p}\right)^{1/2} = \lambda_L \left(\frac{\xi_0 + dl}{dl}\right)^{1/2}$$

满足 $dl \gg \xi_0, \xi_p \gg \lambda_p$ 的超导体属于第一类超导体，应用 Pippard 非局域理论处理问题。

满足 $dl \ll \xi_0, \xi_p \ll \lambda_p$ 的超导体属于第二类超导体，可以用局域近似理论处理问题。

例题

例1

> 证明 AB 效应中的相位差 δ 是规范不变量。

国际单位制下，

$$\delta = -\frac{e}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}'$$

设：

$$\vec{A}(\vec{r}') \to \vec{A}'(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}') + \nabla' \chi(\vec{r}')$$

则：

$$\begin{aligned}
\delta' &= -\frac{e}{\hbar} \oint \vec{A}'(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}' \\
&= -\frac{e}{\hbar} \oint \left[\vec{A}(\vec{r}') + \nabla' \chi(\vec{r}')\right] \cdot \mathrm{d}\vec{r}' \\
&= \delta - \frac{e}{\hbar} \oint \nabla' \chi(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}' \\
&= \delta - \frac{e}{\hbar} \iint \nabla' \times [\nabla' \chi(\vec{r}')] \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \delta - \frac{e}{\hbar} \iint \vec{0} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \delta
\end{aligned}$$

即 δ 是规范不变量。

例2

> 半径为 r_0 的处于理想迈斯纳态的超导球放置于均匀的外磁场 $\vec{H}_0$ 中，求超导球体内外的磁场和超导面电流分布。

采用磁介质观点，认为理想超导体是磁导率 $\mu = 0$ 的完全抗磁体，超导面电流是磁化电流，因此全空间中自由电流 $\vec{J}_\mathrm{f} = \vec{0}$，磁场强度 $\vec{H}$ 满足方程：

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\mathrm{f} = \vec{0}$$

引入磁标势 φ 满足：

$$\vec{H} = -\nabla \varphi$$

上面定义的磁标势 φ 自动满足了磁场强度 $\vec{H}$ 所要满足的方程。

球内区域记为 1，球外区域记为 2.

认为超导球是线性均匀介质，则在球内外磁标势都满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad r < r_0$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad r > r_0$$

在分界面 $r=r_0$ 处磁标势要满足连续性边界条件:

$$\varphi_1\big|_{r=r_0}=\varphi_2\big|_{r=r_0}$$

利用磁高斯定理可得另一个边界条件:

$$\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}-\mu_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=0$$

超导球内 $\mu=0$，有:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=0$$

取外磁场 $\vec{H}_0$ 的方向为极轴方向，则体系具有轴对称性。磁标势的形式解可写为:

$$\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad r<r_0$$

$$\varphi_2=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_lr^l+\frac{D_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad r>r_0$$

取未放入超导球时球心处磁标势为零，在无穷远处，$\vec{H}\to\vec{H}_0,\varphi_2\to-H_0r\cos\theta$，因此:

$$\varphi_2=-H_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad r>r_0$$

考虑边界条件:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=0$$

即:

$$-H_0\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}-(l+1)D_lr_0^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

即:

$$\left(-H_0-2D_1r_0^{-3}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\sum_{l=0,2,3,\cdots}-(l+1)D_lr_0^{-(l+2)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=0$$

由各阶勒让德多项式的正交性可得:

$$D_1=-\frac{H_0r_0^3}{2},\quad D_l=0,\quad l=0,2,3,\cdots$$

因此:

$$\begin{aligned}\varphi_2&=-H_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\&=-H_0r\cos\theta-\frac{H_0}{2}\frac{r_0^3}{r^2}\cos\theta,\quad r>r_0\end{aligned}$$

球心处的磁标势不应发散，因此:

$$\varphi_1=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta),\quad B_l=0,\quad l=0,1,2,\cdots$$

考虑分界面 $r=r_0$ 处磁标势要满足边界条件:

$$\varphi_1\big|_{r=r_0}=\varphi_2\big|_{r=r_0}$$

代入可得:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = -H_0 r_0 \cos\theta - \frac{H_0 r_0}{2}\cos\theta = -\frac{3}{2}H_0 r_0 \cos\theta$$

注意到 $\cos\theta = \mathrm{P}_1(\cos\theta)$，将上式整理成各阶勒让德多项式线性叠加的形式:

$$\left(A_1 r_0 + \frac{3}{2}H_0 r_0\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0,2,3,\cdots} A_l r_0^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性，可得:

$$A_1 = -\frac{3}{2}H_0, \quad A_l = 0, \quad l = 0, 2, 3, \cdots$$

因此:

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = -\frac{3}{2}H_0 r \cos\theta$$

综上，整个空间的磁标势分布分:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{3}{2}H_0 r\cos\theta & , \quad r < r_0 \\ \varphi_2 = -H_0 r\cos\theta - \dfrac{H_0}{2}\dfrac{r_0^3}{r^2}\cos\theta & , \quad r > r_0 \end{cases}$$

球内磁场强度:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\nabla\varphi_1 \\ &= \frac{3}{2}H_0\nabla(r\cos\theta) \\ &= \frac{3}{2}H_0\nabla(z) \\ &= \frac{3}{2}H_0\vec{\mathrm{e}}_z \\ &= \frac{3}{2}\vec{H}_0 \end{aligned}$$

球内磁化强度:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 &= -\vec{H}_1 \\ &= -\frac{3}{2}\vec{H}_0 \end{aligned}$$

超导面电流分布:

$$\vec{\alpha}_M = \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right)\times\vec{n}_{1\to2} = \left(-\frac{3}{2}\vec{H}_0 - \vec{0}\right)\times\vec{\mathrm{e}}_r = -\frac{3}{2}\vec{H}_0\times\vec{\mathrm{e}}_r = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta\vec{\mathrm{e}}_\varphi$$

球外磁场强度:

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 &= -\nabla\varphi_2 \\ &= \nabla\left(H_0 r\cos\theta + \frac{H_0}{2}\frac{r_0^3}{r^2}\cos\theta\right) \\ &= \nabla\left(\vec{H}_0\cdot\vec{r} + \frac{r_0^3}{2}\frac{\vec{H}_0\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \\ &= \vec{H}_0 + \frac{r_0^3}{2}\frac{\left[\vec{H}_0 - 3\left(\vec{H}_0\cdot\hat{r}\right)\hat{r}\right]}{r^3} \end{aligned}$$