#### ▼ 第1章 ℝ<sup>3</sup> 空间的向量分析

- ▼ 向量分析基本知识
  - 爱因斯坦求和约定
  - Kronecher delta 符号  $\delta_{ij}$
  - 三阶单位全反对称张量 (三阶 Levi-Citita 符号)  $\varepsilon_{iik}$
  - 一些简单算例
  - ▼ 梯度、散度、旋度
    - 梯度 (gradient) 的定义
    - 散度 (divergence) 的定义
    - 旋度 (curl) 的定义
    - 直角坐标系下的梯度、散度、旋度
    - ▼ 算子
  - ▼ 梯度与方向导数的关系
    - 方向导数
    - 梯度和方向导数的关系
  - 散度与高斯定理
  - 旋度与斯托克斯定理
- ▼ ℝ3 空间中向量分析常用公式
  - 分析工具
  - ▼ ℝ3 空间中重要微分恒等式
    - 与  $\vec{r}$  有关的公式
    - 从左往右证的公式
    - 需要注意力的公式
    - 从右往左证的公式
  - - 高斯定理
    - 斯托克斯定理
    - 格林第一恒等式
    - 格林第二恒等式
- ▼ 第2章 ℝ3 空间曲线坐标系中的向量分析
  - ▼ ▽ 算子
    - 直角坐标下的 ▽
    - 球坐标下的 ▽
    - 柱坐标下的 ▽
  - $\nabla^2$  算子
    - 直角坐标下的  $\nabla^2$
    - 球坐标下的  $\nabla^2$
    - 柱坐标下的  $\nabla^2$
- 第3章 线性空间
- ▼ 第4章 复变函数的概念
  - 欧拉公式

#### ▼ 复变函数

- ▼ 常见复变函数
  - 有理函数
  - 指数函数
  - 对数函数
  - 幂函数
  - 三角函数
  - 双曲函数

#### ▼ 第5章 解析函数

- ▼ 复变函数的导数
  - 复变函数的连续性
  - 复变函数的导数
  - 柯西-黎曼条件
  - 命题的证明
- ▼ 复变函数的解析性
  - 复变函数的解析性
  - ▼ 相关定理
    - 定理1
    - 定理2
    - 定理3
    - 定理4

#### ▼ 例题

- ▼ 例1
  - 方法1 (积分法)
- 例2
- 例3

#### ▼ 第6章 复变函数积分

- ▼ 复变函数积分
  - 复变函数积分的定义
  - 复变函数积分的性质
- ▼ 柯西积分定理
  - 单连通区域柯西积分定理
  - 多连通区域的柯西积分定理
- 柯西积分公式
- 解析函数高阶导数的积分表达式
- ▼ 第7章 复变函数的级数展开
  - 解析函数的泰勒展开
  - ▼ 解析函数的洛朗展开
    - 复变函数的零点
    - 复变函数的奇点
    - ▼ 奇点的分类
      - 孤立奇点

- 非孤立奇点
- 孤立奇点的分类
- 解析函数的洛朗展开定理
- ▼ 例题
  - 例1
  - 例2
- ▼ 第8章 留数定理及其在实积分中的应用
  - ▼ 留数定理
    - 留数的定义
    - ▼ 留数的求法
      - 定义法
      - 极限法
      - 特殊情况
    - ▼ 留数定理
      - 例1
  - ▼ 留数定理在实积分中的应用
    - 计算无穷限奇异积分的柯西主值
    - 利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题
    - ▼ 计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分
      - 例1
      - 例2
- ▼ 第9章 傅里叶变换
  - ▼ 傅里叶级数
    - 三角函数基的傅里叶级数
    - e 指数基的傅里叶级数
  - ▼ 傅里叶变换(to be continued)
    - 傅里叶分解与傅里叶变换
    - ▼ 傅里叶变换的基本性质
      - 线性定理
      - 延迟定理
      - 位移定理
      - 标度变换定理
      - 微分定理
      - 卷积定理
- ▼ 第10章 拉普拉斯变换
  - 拉普拉斯变换的定义
  - ▼ 拉普拉斯变换的性质 (两种记号)
    - 线性定理
    - 延迟定理
    - 位移定理
    - 标度变换定理
    - 卷积定理

- 微分定理
- 积分性质
- 周期函数变换定理
- 常用拉普拉斯变换及反演
- ▼ 拉普拉斯变换的应用
  - ▼ 解常微分方程
    - 例1
- ▼ 第11章 δ 函数
  - δ函数的定义
  - δ函数的性质
  - **▼** 三维 δ 函数
    - 三维直角坐标系
    - 三维球坐标系
    - 三维柱坐标系
  - lacktriangleright 不同形式的  $\delta$  函数
  - ▼  $\delta$  函数的傅里叶展式和傅里叶变换
    - 一维
    - 三维
  - ▼ 例题
    - 例1
- 第12章 小波变换初步
- ▼ 第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解问题
  - ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式
    - 波动方程 (双曲方程)
    - 输运方程(抛物方程)
    - 泊松方程 (椭圆方程)
    - 拉普拉斯方程
  - ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件
    - ▼ 初始条件
      - 波动方程初始条件
      - 输运方程初始条件
      - 泊松方程初始条件
    - ▼ 边界条件
      - 第一类边界条件
      - 第二类边界条件
      - 第三类边界条件
      - 自然边界条件
      - 周期性边界条件
      - 衔接条件
  - ▼ 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件
    - 波动方程定解条件
    - 输运方程定解条件

- 泊松方程定解条件
- ▼ 第14章 分离变量法
  - 例1
- ▼ 第15章 曲线坐标系下的分离变量
  - ▼ 球坐标系下方程的分离变量
    - ▼ 拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量
      - 径向方程
      - 球函数方程
      - 方位角满足的方程
      - 连带勒让德方程
      - 勒让德方程
    - ▼ 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量
      - 球贝塞尔方程
      - 球函数方程
      - 方位角满足的方程
      - 连带勒让德方程
      - 勒让德方程
  - ▼ 柱坐标系下方程的分离变量
    - ▼ 柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量
      - $\Phi(\varphi)$  满足的方程
      - Z(z) 满足的方程
      - *R*(*p*) 满足的方程及贝塞尔方程
- ▼ 第16章 球函数
  - ▼ 勒让德多项式
    - 前几个勒让德多项式
    - ▼ 勒让德多项式的性质
      - 罗德里格斯公式(勒让德多项式的微分表达式)
      - 勒让德多项式的生成函数 (母函数)
      - 勒让德多项式的递推公式
      - 勒让德函数的正交归一性
  - ▼ 具有轴对称的拉普拉斯方程的求解
    - 例1
    - 例2
- ▼ 第17章 柱函数
  - ▼ 贝塞尔函数
    - 贝塞尔函数 (第一类贝塞尔函数) 和诺伊曼函数 (第二类贝塞尔函数)
    - ▼ 贝塞尔方程的通解
      - 非整数阶贝塞尔方程的通解
      - 整数阶贝塞尔方程的通解
  - 整数阶贝塞尔函数的简单性质
  - 贝塞尔函数的递推关系
  - 柱函数

#### ▼ 例题

- 例1
- 第18章 格林函数法
- 第19章 其他方程求解
- 第20章 非线性数学物理方程初步
- 第21章 泛函的变分
- 第22章 变分原理

# 第1章 $\mathbb{R}^3$ 空间的向量分析

# 向量分析基本知识

## 爱因斯坦求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标 i 就自动进行求和(除非特别指出该重复指标不求和),我们称求和指标 i 为 "哑标"。

比如, $\mathbb{R}^3$  空间中的向量  $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$  在直角坐标下可表示为:

$$ec{A}=A_1ec{\mathrm{e}}_1+A_2ec{\mathrm{e}}_2+A_3ec{\mathrm{e}}_3\equiv\sum_iA_iec{\mathrm{e}}_i$$

其中, $\vec{\mathbf{e}}_1,\vec{\mathbf{e}}_2,\vec{\mathbf{e}}_3$  分别是 x,y,z 轴正方向上的单位向量。

可利用爱因斯坦求和约定将  $ec{A} \in \mathbb{R}^3$  简写为:

$$ec{A} = \sum_i A_i ec{\mathrm{e}}_i 
ightarrow ec{A} = A_i ec{\mathrm{e}}_i$$

这样就省去了写求和符号的工作。

# Kronecher delta 符号 $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = egin{cases} 1 &, i = j \ 0 &, i 
eq j \end{cases}$$

# 三阶单位全反对称张量(三阶 Levi-Citita 符号) $arepsilon_{ijk}$

$$arepsilon_{ijk} = egin{cases} 1 &, ijk = 123, 231, 312, 即相邻两指标经过偶次对换能还原到123 \ -1 &, ijk = 132, 213, 321, 即相邻两指标经过奇次对换能还原到123 \ 0 &, ijk$$
中有相同指标

可以利用  $\varepsilon_{ijk}$  表示任何一个三阶行列式:

$$egin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ b_1 & b_2 & b_3 \ c_1 & c_2 & c_3 \ \end{bmatrix} = arepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

## 一些简单算例

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_i = \delta_{ij}$$

$$A_i \delta_{ij} = A_j$$

$$ec{A} \cdot ec{B} = A_i B_i$$

$$ec{A} \cdot ec{B} = (A_i ec{\mathrm{e}}_i) \cdot (B_j ec{\mathrm{e}}_j) = A_i B_j ec{\mathrm{e}}_i \cdot ec{\mathrm{e}}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

 $\vec{A} imes \vec{B} = arepsilon_{ijk} \vec{\mathrm{e}}_i A_j B_k$ 

$$ec{A} imesec{B}=egin{array}{ccc} ec{\mathrm{e}}_1 & ec{\mathrm{e}}_2 & ec{\mathrm{e}}_3 \ A_1 & A_2 & A_3 \ B_1 & B_2 & B_3 \ \end{array} = arepsilon_{ijk}ec{\mathrm{e}}_iA_jB_k$$

## 梯度、散度、旋度

### 梯度 (gradient) 的定义

设  $\psi(\vec{r})$  是标量场, $\psi(\vec{r})$  其梯度,记为  $\operatorname{grad} \psi(\vec{r})$ ,由下式定义:

$$\operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = d\psi(\vec{r})$$

其中, $\mathrm{d}\vec{r}$  是位矢  $\vec{r}$  的微小变化, $\mathrm{d}\psi(\vec{r})$  是标量场  $\psi(\vec{r})$  因位矢  $\vec{r}$  变化  $\mathrm{d}\vec{r}$  而引起的相应的变化。具体来说, $\mathrm{d}\psi(\vec{r})$  的定义为:

$$\mathrm{d}\psi(ec{r}) \equiv \psi(ec{r} + \mathrm{d}ec{r}) - \psi(ec{r})$$

### 散度 (divergence) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的散度, 记为  $\operatorname{div} \vec{A}$ , 定义为:

$$\mathrm{div} \; ec{A} \equiv \lim_{V 
ightarrow 0^+} rac{1}{V} \oint \limits_{\partial V^+} ec{A} \cdot \mathrm{d} ec{S}$$

#### 旋度 (curl) 的定义

向量场  $\vec{A}$  的旋度,记为  $\operatorname{curl} \vec{A}$ ,由下式定义:

$$\left(\operatorname{curl}ec{A}
ight)\cdotec{n}=\lim_{\sigma o 0^+}rac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}ec{A}\cdot\mathrm{d}ec{l}$$

其中,  $\sigma$  是与  $\vec{n}$  垂直的面元。 $\vec{n}$  与面元  $\sigma$  的正绕行方向满足右手定则。

#### 直角坐标系下的梯度、散度、旋度

这里直接给出结论。

$$\mathrm{grad}\ \psi = ec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi$$
  $\mathrm{div}\ ec{A} = \partial_i A_i$   $\mathrm{curl}\ ec{A} = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k$ 

#### ▽ 算子

▽ 算子 (nabla 算子, 或 del 算子) 定义为:

$$\nabla \equiv \vec{\mathbf{e}}_i \partial_i$$

其中, $\partial_i$  的定义为:

$$\partial_i \equiv rac{\partial}{\partial x_i}$$

利用 ▽ 算子,可将梯度、散度、旋度表示为:

$$egin{aligned} \operatorname{grad} \psi &= ec{\mathrm{e}}_i \partial_i \psi \equiv 
abla \psi \ &\mathrm{div} \ ec{A} &= \partial_i A_i \equiv 
abla \cdot ec{A} \ &\mathrm{curl} \ ec{A} &= arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j A_k \equiv 
abla imes ec{A} \end{aligned}$$

为了书写方便,以后用  $abla\psi, 
abla\cdot\vec{A}, 
abla imes \vec{A}$  分别来指代梯度、散度、旋度。

## 梯度与方向导数的关系

### 方向导数

标量场  $\psi$  在  $\vec{r}$  点处沿  $\vec{v}$  方向的方向导数,记为  $\left. \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{v}}$ ,定义为:

$$\left.rac{\partial \psi(ec{r})}{\partial l}
ight|_{ec{v}} \equiv \lim_{v o 0^+} rac{\psi(ec{r}+ec{v})-\psi(ec{r})}{v}$$

特别地,标量场  $\psi$  在曲面  $\Sigma$  上的  $\vec{r}$  点处沿曲面上  $\vec{r}$  点的外法向的方向导数简记为:

$$\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial n}$$

#### 梯度和方向导数的关系

标量场的梯度的定义:

$$\nabla \psi \cdot d\vec{r} = d\psi$$

设  $d\vec{r} = \vec{n}dr$ , 其中  $\vec{n}$  是与  $d\vec{r}$  同向的单位向量,则有:

$$(\nabla \psi) \cdot \vec{n} dr = d\psi$$

即:

$$(
abla\psi)\cdotec{n}=rac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=rac{\psi(ec{r}+\mathrm{d}ec{r})-\psi(ec{r})}{\mathrm{d}r}=rac{\partial\psi(ec{r})}{\partial l}igg|_{ec{r}}$$

这就是说,标量场  $\psi$  的梯度  $\nabla \psi$  在某一方向  $\vec{n}$  的投影恰等于标量场沿这一方向  $\vec{n}$  的方向导数  $\left. \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial l} \right|_{\vec{n}}$  .

## 散度与高斯定理

从散度的定义

$$abla \cdot ec{A} \equiv \lim_{V o 0^+} rac{1}{V} \oint\limits_{\partial V^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

出发,可以导出高斯定理:

$$\oint\limits_{\partial V^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{S} = \int\limits_V (
abla \cdot ec{A}) \mathrm{d}V$$

## 旋度与斯托克斯定理

从旋度的定义

$$\left(
abla imesec{A}
ight)\cdotec{n}=\lim_{\sigma o 0^+}rac{1}{\sigma}\oint\limits_{\partial\sigma^+}ec{A}\cdot\mathrm{d}ec{l}$$

出发,可以导出斯托克斯定理:

$$\oint\limits_{\partial \Sigma^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{\Sigma} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

# $\mathbb{R}^3$ 空间中向量分析常用公式

## 分析工具

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \\ \vec{A} = A_i \vec{\mathbf{e}}_i \\ A_i \delta_{ij} = A_j \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i A_j B_k \\ (\vec{A} \times \vec{B})_l = \varepsilon_{ljk} A_j B_k \\ \nabla \psi = \vec{\mathbf{e}}_i \partial_i \\ \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i \\ \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i \partial_j A_k \\ \partial_i \psi = (\nabla \psi)_i \\ \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i \\ \nabla^2 \psi \equiv \nabla \cdot (\nabla \psi) = \partial_i \partial_i \psi \\ \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_i) \vec{\mathbf{e}}_i \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \partial_i x_j = \delta_{ij} \end{cases}$$

# $\mathbb{R}^3$ 空间中重要微分恒等式

### 与 $\vec{r}$ 有关的公式

$$abla \cdot ec{r} = 3$$

$$abla \cdot ec{r} = \partial_i x_i = 3$$

$$abla imesec{r}=ec{0}$$

$$abla imes ec{r} = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \partial_j x_k = arepsilon_{ijk} ec{\mathrm{e}}_i \delta_{jk} = ec{0}$$

### 从左往右证的公式

$$abla(arphi\psi) = arphi
abla\psi + \psi
ablaarphi$$

$$egin{aligned} 
abla(arphi\psi) &= ec{\mathrm{e}}_i\partial_i(arphi\psi) \ &= ec{\mathrm{e}}_iarphi\partial_i\psi + ec{\mathrm{e}}_i\psi\partial_iarphi \ &= arphiec{\mathrm{e}}_i\partial_i\psi + \psiec{\mathrm{e}}_i\partial_iarphi \ &= arphi
abla\psi\psi\psi
ablaarphi \end{aligned}$$

$$abla \cdot (arphi ec{A}) = ec{A} \cdot (
abla arphi) + arphi 
abla \cdot ec{A}$$

$$\begin{split} \nabla \cdot (\varphi \vec{A}) &= \partial_i (\varphi \vec{A})_i \\ &= \partial_i (\varphi A_i) \\ &= \varphi \partial_i A_i + A_i \partial_i \varphi \\ &= \varphi \nabla \cdot \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi \\ &= (\vec{A} \cdot \nabla) \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{A} \end{split}$$

$$abla imes (arphi ec{A}) = (
abla arphi) imes ec{A} + arphi 
abla imes ec{A}$$

$$\begin{split} \nabla \times (\varphi \vec{A}) &= \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i \partial_j (\varphi \vec{A})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i \partial_j (\varphi A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i (A_k \partial_j \varphi + \varphi \partial_j A_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i (\nabla \varphi)_j A_k + \varphi \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_i \partial_j A_k \\ &= (\nabla \varphi) \times \vec{A} + \varphi \nabla \times \vec{A} \end{split}$$

$$abla \cdot (ec{A} imes ec{B}) = ec{B} \cdot (
abla imes ec{A}) - ec{A} \cdot (
abla imes ec{B})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \partial_i (\vec{A} \times \vec{B})_i$$

$$= \partial_i (\varepsilon_{ijk} A_j B_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \varepsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k$$

$$= B_k \varepsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k$$

$$= B_k (\nabla \times \vec{A})_k - A_j (\nabla \times \vec{B})_j$$

$$= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

$$egin{aligned} 
abla imes (ec{A} imes ec{B}) = (ec{B} \cdot 
abla) ec{A} - (ec{A} \cdot 
abla) ec{B} + ec{A} (
abla \cdot ec{B}) - ec{B} (
abla \cdot ec{A}) \end{aligned}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j (\vec{A} \times \vec{B})_k$$

$$= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i \partial_j (A_l B_m)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m)$$

$$= \vec{e}_l B_j \partial_j A_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - \vec{e}_m A_j \partial_j B_m$$

$$= B_j \partial_j A_l \vec{e}_l + \vec{e}_l A_l \partial_m B_m - \vec{e}_m B_m \partial_l A_l - A_j \partial_j B_m \vec{e}_m$$

$$= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$abla imes (
abla imes ec{A}) = 
abla (
abla \cdot ec{A}) - 
abla^2 ec{A}$$

$$egin{aligned} 
abla imes (
abla imes ec{A}) &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j (
abla imes ec{A})_k \ &= arepsilon_{ijk} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j arepsilon_{klm} \partial_l A_m \ &= arepsilon_{kij} arepsilon_{klm} ec{\mathbf{e}}_i \partial_j \partial_l A_m \ &= ec{\mathbf{e}}_l \partial_m \partial_l A_m - ec{\mathbf{e}}_m \partial_l \partial_l A_m \ &= ec{\mathbf{e}}_l \partial_l \partial_m A_m - ec{\mathbf{e}}_l \partial_l A_m ec{\mathbf{e}}_m \ &= 
abla (
abla imes ec{A}) - 
abla^2 ec{A} \end{aligned}$$

#### 需要注意力的公式

$$abla imes (
abla arphi) = ec{0}$$

$$egin{aligned} 
abla imes (
abla arphi) &= arepsilon_{ijk} arepsilon_i \partial_j (
abla arphi)_k \ &= ec{
m e}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi \end{aligned}$$

由于我们只考虑性质比较好的函数,于是  $\partial_j\partial_k\varphi=\partial_k\partial_j\varphi$ ,再结合  $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{ikj}$ ,有:

$$egin{aligned} ec{\mathbf{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi &= -ec{\mathbf{e}}_i arepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j arphi \ &= -ec{\mathbf{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi \end{aligned}$$

最后一步是因为j,k都是用于求和的哑标,因此可以交换。

上式说明:

$$ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k arphi = ec{0}$$

于是:

$$abla imes (
abla arphi) = ec{\mathrm{e}}_i arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_k arphi = ec{0}$$

$$abla \cdot (
abla imes ec{A}) = 0$$

$$egin{aligned} 
abla \cdot (
abla imes ec{A}) &= \partial_i (
abla imes ec{A})_i \ &= \partial_i arepsilon_{ijk} \partial_j A_k \ &= arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

注意到:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k = -\varepsilon_{jik}\partial_j\partial_iA_k$$
$$= -\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k$$

于是:

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_jA_k=0$$

这就是说:

$$abla \cdot (
abla imes ec{A}) = arepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$$

#### 从右往左证的公式

$$\begin{vmatrix} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j (\nabla \times \vec{A})_k + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j (\nabla \times \vec{B})_k \\ = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i B_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m + \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m \\ = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\ = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i B_j \partial_l A_m + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \vec{e}_i A_j \partial_l B_m \\ = B_i \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + \vec{e}_l B_m \partial_l A_m - \vec{e}_m B_l \partial_l A_m + \vec{e}_l A_m \partial_l B_m - \vec{e}_m A_l \partial_l B_m \\ = B_m \partial_i A_j \vec{e}_j + A_i \partial_i B_j \vec{e}_j + B_m \vec{e}_l \partial_l A_m - B_l \partial_l A_m \vec{e}_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m - A_l \partial_l B_m \vec{e}_m \\ = B_m \nabla_l \partial_l A_m + A_m \vec{e}_l \partial_l B_m \\ = B_m \nabla_l A_m + A_m \nabla_l B_m \\ = \nabla_l (A_m B_m) \\ = \nabla_l (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

## $\mathbb{R}^3$ 空间中重要积分恒等式

### 高斯定理

$$\oint\limits_{\partial V^+}ec{A}\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_V(
abla\cdotec{A})\mathrm{d}V$$

### 斯托克斯定理

$$\oint\limits_{\partial \Sigma^+} ec{A} \cdot \mathrm{d}ec{l} = \int\limits_{\Sigma} (
abla imes ec{A}) \cdot \mathrm{d}ec{S}$$

#### 格林第一恒等式

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi
abla\phi\cdot\mathrm{d}ec{S}=\int\limits_{\Omega}\left(\psi
abla^2\phi+
abla\phi\cdot
abla\psi
ight)\mathrm{d}V$$

注意到:

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \partial_i (\psi \nabla \phi)_i$$

$$= \partial_i (\psi \partial_i \phi)$$

$$= (\partial_i \phi)(\partial_i \psi) + \psi \partial_i \partial_i \phi$$

$$= (\nabla \phi)_i (\nabla \psi)_i + \psi \nabla^2 \phi$$

$$= (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi$$

于是由高斯定理,有:

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial\Omega^+}\psi
abla\phi\cdot\mathrm{d}ec{S} &=\int\limits_{\Omega}
abla\cdot(\psi
abla\phi)\mathrm{d}V \ &=\int\limits_{\Omega}\left[(
abla\phi)\cdot(
abla\psi)+\psi
abla^2\phi
ight]\mathrm{d}V \ &=\int\limits_{\Omega}\left[\psi
abla^2\phi+(
abla\phi)\cdot(
abla\psi)\right]\mathrm{d}V \end{aligned}$$

### 格林第二恒等式

$$\int\limits_{\partial\Omega^+} (\psi
abla\phi-\phi
abla\psi)\cdot\mathrm{d}ec{S} = \int\limits_{\Omega} (\psi
abla^2\phi-\phi
abla^2\psi)\mathrm{d}V$$

利用  $abla \cdot (arphi ec{A}) = ec{A} \cdot (
abla arphi) + arphi 
abla \cdot ec{A}$  可得:

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot (\nabla \phi) - (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot (\nabla \psi))$$
$$= \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi$$

于是由高斯定理可得:

$$egin{aligned} \oint\limits_{\partial\Omega^+} \left(\psi
abla\phi-\phi
abla\psi
ight)\cdot\mathrm{d}ec{S} &= \int\limits_{\Omega}
abla\cdot\left(\psi
abla\phi-\phi
abla\psi
ight)\mathrm{d}V \ &= \int\limits_{\Omega}\left(\psi
abla^2\phi-\phi
abla^2\psi
ight)\mathrm{d}V \end{aligned}$$

# 第2章 $\mathbb{R}^3$ 空间曲线坐标系中的向量分析

# ▽ 算子

## 直角坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_x rac{\partial}{\partial x} + ec{e}_y rac{\partial}{\partial y} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}$$

## 球坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_r rac{\partial}{\partial r} + ec{e}_ heta rac{1}{r} rac{\partial}{\partial heta} + ec{e}_arphi rac{1}{r \sin heta} rac{\partial}{\partial arphi}$$

## 柱坐标下的 ▽

$$abla = ec{e}_
ho rac{\partial}{\partial 
ho} + ec{e}_arphi rac{1}{
ho} rac{\partial}{\partial arphi} + ec{e}_z rac{\partial}{\partial z}$$

# $\nabla^2$ 算子

## 直角坐标下的 $abla^2$

$$abla^2 = rac{\partial^2}{\partial x^2} + rac{\partial^2}{\partial y^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# 球坐标下的 $abla^2$

$$abla^2 = rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}\left(r^2rac{\partial}{\partial r}
ight) + rac{1}{r^2\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial}{\partial heta}
ight) + rac{1}{r^2\sin^2 heta}rac{\partial^2}{\partial arphi^2}$$

## 柱坐标下的 $\nabla^2$

$$abla^2 = rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# 第3章 线性空间

# 第4章 复变函数的概念

# 欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \ \ \theta \in \mathbb{C}$$

# 复变函数

复变函数是黎曼面到复平面的映射,即:

$$f(z):\mathbb{C}^{\mathrm{R}}
ightarrow\mathbb{C}$$

## 常见复变函数

### 有理函数

$$f(z)=rac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}, \ \ a_i,b_i\in\mathbb{C}, \ \ m,n\in\mathbb{Z}$$

### 指数函数

$$f(z) = e^z$$

### 对数函数

$$f(z) = \ln z$$

### 幂函数

$$f(z)=z^a, \ \ a\in \mathbb{C}$$

### 三角函数

$$\cos z \equiv rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

$$\sin z \equiv rac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

性质:

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos(z), \ \cos(z+2\pi) = \cos(z) \ \sin(-z) &= -\sin(z), \ \sin(z+2\pi) = \sin(z) \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1 \end{aligned}$$

 $|\cos z|$ ,  $|\sin z|$  可以大于 1, 这与实三角函数不同。

#### 双曲函数

$$\cosh z \equiv rac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$
  $\sinh z \equiv rac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$   $anh z \equiv rac{\sinh z}{\cosh z} = rac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}$ 

双曲函数与三角函数的关系:

$$\sinh z = -i\sin(iz)$$
 $\cosh z = \cos(iz)$ 

双曲函数的性质:

$$\sinh(z + i2\pi) = \sinh z$$
 $\cosh(z + i2\pi) = \cosh z$ 
 $\cosh(-z) = \cosh z$ 
 $\sinh(-z) = -\sinh z$ 
 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ 

# 第5章 解析函数

# 复变函数的导数

## 复变函数的连续性

复变函数 f(z) 在  $z_0$  点及其邻域内有定义。当自变量 z 以任何路径趋于  $z_0$  时,都有:

$$\lim_{z o z_0}f(z)=f(z_0)$$

则称 f(z) 在  $z_0$  点连续。

若 f(z) 在区域  $\Omega$  内的所有点都连续,则称 f(z) 在  $\Omega$  内连续。

## 复变函数的导数

当 z 以任何路径趋于  $z_0$  时,即  $\Delta z=z-z_0$  以任何方式趋于 0 时,若极限:

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一,则称 f(z) 在  $z_0$  点可导,f(z) 在  $z_0$  点的导数记为  $f'(z_0)$ 

## 柯西-黎曼条件

设复变函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y),若 f(z) 在 z 点可导,则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是柯西-黎曼条件(C-R条件)。

## 命题的证明

设 z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y), 则:

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y}$$

由于 f(z) 在 z 点可导, 故极限

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且与  $\Delta z$  趋于 0 的方式无关。

特别地,

(1) 令:

$$i\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y} = \lim_{\Delta x o 0} rac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x} = rac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i} rac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 令:

$$\Delta x = 0, \mathrm{i}\Delta y \to 0$$

此时,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + \mathrm{i} \Delta v}{\Delta x + \mathrm{i} \Delta y} = -\mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 f(z) 在  $z_0$  点可导,则这两个导数值应该相等,于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

C-R 条件是 f(z) 在 z 点可导的必要条件,但不是充分条件。也就是说,可导必定满足 C-R 条件,但满足 C-R 条件不一定可导。

# 复变函数的解析性

## 复变函数的解析性

若复变函数 f(z) 在  $z_0$  的邻域内每一点都可导,则称 f(z) 在  $z_0$  点是解析的。

若复变函数 f(z) 在  $\Omega$  内每一点都可导,则 f(z) 在  $\Omega$  内是解析的,或称为全纯的。

## 相关定理

#### 定理1

复变函数  $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i} v(x,y)$  在区域  $\Omega$  为解析函数  $\Longleftrightarrow$  在与复平面  $\Omega$  相应的实平面区域内 u(x,y),v(x,y) 可微,且 u(x,y),v(x,y) 满足 C-R 条件。

特别地,若 f(z) 为  $\Omega$  上的连续函数,则 f(z) 是  $\Omega$  上的解析函数  $\Longleftrightarrow$  f(z) 满足 C-R 条件。

### 定理2

若 f(z) 为区域  $\Omega$  上的解析函数,且 f(z) 为实函数,即  $f(z)=f^*(z)$ ,则 f(z) 为常数。

#### 定理3

若 f(z) 为区域  $\Omega$  上的解析函数,则在  $\Omega$  上有  $\dfrac{\partial f(z,z^*)}{\partial z}=0$ ,即  $f(z,z^*)$  不依赖于  $z^*$ 

#### 定理4

在复平面区域  $\Omega$  内解析的函数  $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i} v(x,y)$ ,其实部 u(x,y) 和虚部 v(x,y) 都是平面区域  $\Omega$  内的调和函数(即满足二维拉普拉斯方程  $\nabla^2 u(x,y)=0, \nabla^2 v(x,y)=0$  的函数)。

## 例题

### 例1

已知解析函数的实部  $u=x^3-3xy^2$ , 求该解析函数。

### 方法1 (积分法)

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i} v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

$$dv(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy$$
(1)

选择积分路径为:  $\underbrace{(0,0) \to (x,0)}_{C_1}$ ,  $\underbrace{(x,0) \to (x,y)}_{C_2}$ , 两边积分:

$$egin{align} v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\ &=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\ &=3x^2y-y^3 \end{gathered}$$

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + v(0,0) = 3x^2y - y^3 + C$$

于是:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
  
=  $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C)$ 

## 例2

请证明: 柱坐标系下的解析函数  $f(z)=u(\rho,\varphi)+\mathrm{i} v(\rho,\varphi)$  满足的 C-R 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} \end{cases}$$

直角坐标下的 C-R 条件:

$$rac{\partial u}{\partial x} = rac{\partial v}{\partial y}, \ rac{\partial u}{\partial y} = -rac{\partial v}{\partial x}$$
 
$$\begin{cases} x = 
ho\cos\varphi \\ y = 
ho\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 
ho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ an\varphi = rac{y}{x} \end{cases}$$

注意到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \tan \varphi}{\partial \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{-1} \left( -\frac{y}{x^2} \right) 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \tan \varphi}{\partial \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \tan \varphi}{\partial \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \tan \varphi}{\partial \varphi} \right)^{-1} \frac{\partial \tan \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right)$$

\_ \_ \_ \_ \_

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1} \left(-\frac{y}{x^2}\right) 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tan\varphi} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathrm{d}\tan\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1} \frac{\partial \tan\varphi}{\partial y} 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^{-1} \left(\frac{1}{x}\right) 
= \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)$$

全部代入直角坐标下的 C-R 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) = -\left[ \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \right] \tag{2}$$

 $(1) imes \cos \varphi + (2) imes \sin \varphi$  得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

 $(2) \times \cos \varphi - (1) \times \sin \varphi$  得到:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}$$

## 例3

已知解析函数的虚部  $v=rac{y}{x^2+y^2}$  ,求该解析函数。

$$rac{\partial v}{\partial x} = rac{-2xy}{\left(x^2 + y^2
ight)^2}, rac{\partial v}{\partial y} = rac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2
ight)^2}$$

函数解析, 故满足 C-R 条件, 即满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

于是:

$$\mathrm{d}u = rac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x + rac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y$$

$$= rac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \mathrm{d}x + rac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \mathrm{d}y$$

极坐标变换:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial \rho} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi = \cos \varphi \mathrm{d}\rho - \rho \sin \varphi \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \mathrm{d}\varphi = \sin \varphi \mathrm{d}\rho + \rho \cos \varphi \mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

于是:

$$\mathrm{d}u = rac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2
ight)^2} \mathrm{d}x + rac{2xy}{\left(x^2 + y^2
ight)^2} \mathrm{d}y$$

$$= rac{\cos arphi}{
ho^2} \mathrm{d}
ho + rac{\sin arphi}{
ho} \mathrm{d}arphi$$

$$= \mathrm{d}\left(rac{-\cos arphi}{
ho}
ight)$$

于是:

$$u = \frac{-\cos\varphi}{\rho} + C = -\frac{x}{x^2 + y^2} + C$$

综上,

$$f(z) = u + \mathrm{i} v$$
  $= \left(-rac{x}{x^2 + y^2} + C
ight) + \mathrm{i}\left(rac{y}{x^2 + y^2}
ight)$ 

# 第6章 复变函数积分

# 复变函数积分

## 复变函数积分的定义

复变函数的积分是指复变函数 f(z) 在其有定义的区域  $\Omega$  中,沿某一曲线 C 的**有向**的**线积分**,记为  $\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z$ ,其定义为:

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n o \infty \ |z_j-z_{j-1}| o 0}} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$$

把 C 分成 n 段, $\xi_i$  是 C 上  $z_{i-1}$  点到  $z_i$  点的中的某一点。

## 复变函数积分的性质

$$\left|\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z
ight|\leqslant \int\limits_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$$

## 柯西积分定理

## 单连通区域柯西积分定理

设 f(z) 在单连通区域  $\Omega$  上解析,当积分路径为  $\Omega$  内的任一闭合曲线 C 时,有:

$$\oint\limits_{C^+} f(z) \mathrm{d}z = 0$$

## 多连通区域的柯西积分定理

设 f(z) 在具有 k 个内边界  $C_1,C_2,\cdots,C_k$  的回路 C 内的复连通区域内解析,规定  $C;C_1,C_2,\cdots,C_k$  的正方向为逆时针,则:

$$\oint\limits_{C^+} f(z) \mathrm{d}z = \oint\limits_{C_1^+} f(z) \mathrm{d}z + \oint\limits_{C_2^+} f(z) \mathrm{d}z + \cdots + \oint\limits_{C_h^+} f(z) \mathrm{d}z$$

## 柯西积分公式

若 f(z) 在闭合回路 C 所包围的区域上解析, $z_0$  是此区域中的一点,则:

$$\oint\limits_{C_+^+}rac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}f(z_0)$$

## 解析函数高阶导数的积分表达式

设 f(z) 在区域  $\Omega$  内解析, C 为  $\Omega$  内的任一闭合回路, 对于 C 所包围的区域内的任一点 z, 有:

$$f^{(n)}(z) \equiv rac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} f(z) = rac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} rac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

# 第7章 复变函数的级数展开

# 解析函数的泰勒展开

设  $z_0$  为函数 f(z) 解析区域  $\Omega$  内的一点,以  $z_0$  为圆心的圆周 C 在  $\Omega$  内,则 f(z) 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z-z_0)^n$$

其中,展开系数为:

$$a_n = rac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = rac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} rac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

# 解析函数的洛朗展开

## 复变函数的零点

若复变函数 f(z) 在  $z_0$  点的函数值  $f(z_0)=0$ ,则称  $z_0$  为 复变函数 f(z) 的零点。

## 复变函数的奇点

若复变函数 f(z) 在  $z_0$  点**不解析**,即 f(z) 在  $z_0$  点的导数不存在或不唯一,则称  $z_0$  为复变函数 f(z) 的奇点。

## 奇点的分类

### 孤立奇点

若  $z_0$  为函数 f(z) 的奇点,而在  $z_0$  点任意小的邻域内,函数 f(z) 解析,则称  $z_0$  为 f(z) 的孤立奇点。

#### 非孤立奇点

若  $z_0$  为函数 f(z) 的奇点,而在  $z_0$  点任意小的邻域内,除  $z_0$  点外存在 f(z) 的其他奇点,则称  $z_0$  为 f(z) 的非孤立奇点。

#### 孤立奇点的分类

**极点**:设  $z_0$ 是 f(z)的孤立奇点,若存在一个正整数 k,使得  $(z-z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数,则称  $z_0$  为 f(z)的 k 阶极点。

**本性奇点**:设  $z_0$  是 f(z) 的孤立奇点,若**不存在**一个正整数 k,使得  $(z-z_0)^k f(z)$  为非零的解析函数,则称  $z_0$  为 f(z) 的本性奇点。

**可去奇点**:设  $z_0$  为函数 f(z) 的孤立奇点,f(z) 在  $z_0$  点没有定义,但在  $z_0$  的去心邻域内解析,此时可定义  $f(z_0) \equiv \lim_{z \to z_0} f(z)$  使 f(z) 在  $z_0$  点解析,则称  $z_0$  为 f(z) 的可去奇点。

## 解析函数的洛朗展开定理

若函数 f(z) 在以  $z_0$  为圆心,半径为  $R_1, R_2$  的两个圆周  $C_1, C_2$  所包围的环形区域  $R_2 < |z-z_0| < R_1$  上解析,则在此区域内 f(z) 可展成 Laurent 级数:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中,

$$a_n = rac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} rac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把  $C_2$  包围在内的闭曲线。

## 例题

#### 例1

求 
$$f(z)=rac{1}{z(z-1)}$$
 在环形区域  $0<|z|<1$  和  $|z|>1$  内,在  $z_0=0$  处的展开式。

0<|z|<1 区域在  $z_0=0$  处展开 f(z):

由于 |z| < 1,于是有几何级数:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

|z| > 1 区域在  $z_0 = 0$  处展开 f(z):

注意到 |z| > 1,则 |1/z| < 1,于是:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}$$

### 例2

求 
$$f(z)=rac{1}{z(z-1)}$$
 在  $z_1=0$  和  $z_2=1$  附近的展开式。

f(z) 在  $z_1=0$  附近的展开式:

由于 0 < |z - 0| < 1,于是:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$$= -\frac{1}{1-z} - z^{-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n$$

f(z) 在  $z_2=1$  附近的展开式:

由于 0 < |z-1| < 1, 于是:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$$= (z-1)^{-1} - \frac{1}{1-(1-z)}$$

$$= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$$

$$= (z-1)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

$$= (z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n$$

# 第8章 留数定理及其在实积分中的应用

# 留数定理

## 留数的定义

设  $z_0$  是函数 f(z) 的孤立奇点,设 f(z) 在其孤立奇点  $z_0$  附近的环形区域中的洛朗展开式为:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

f(z) 在  $z_0$  点的留数,记为  $\mathrm{Res} f(z_0)$ ,定义为:

$$\operatorname{Res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

其中, $a_{-1}$  是 f(z) 在  $z_0$  点的洛朗展开式中  $(z-z_0)^{-1}$  项的系数

## 留数的求法

#### 定义法

直接把 f(z) 在其孤立奇点  $z_0$  点作洛朗展开,找到  $(z-z_0)^{-1}$  前的系数  $a_{-1}$ ,由留数的定义可知:

$$\mathrm{Res}f(z_0)\equiv a_{-1}$$

### 极限法

当  $z_0$  为 f(z) 的 m 阶极点时,f(z) 可在其孤立奇点  $z_0$  点作如下的洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \;\; a_{-m} 
eq 0$$

则:

$$\mathrm{Res} f(z_0) = rac{1}{(m-1)!} \lim_{z o z_0} rac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

#### 特殊情况

若  $f(z)=rac{h(z)}{g(z)},z_0$  为 g(z) 的一阶极点,即  $g(z_0)=0$ ,且 h(z) 和 g(z) 在  $z_0$  点及其邻域内解析,则:

$$\mathrm{Res} f(z_0) = rac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

## 留数定理

若 f(z) 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点  $z_1,z_2,\cdots,z_k$  外解析,则 f(z) 沿  $C^+$  的回路积分值等于 f(z) 在  $z_1,z_2,\cdots,z_k$  的留数之和乘  $2\pi i$ ,即:

$$\oint\limits_{C^+} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^k \mathrm{Res} f(z_j)$$

### 例1

计算回路积分 
$$I=\oint\limits_{l^+}rac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$$
,其中回路  $l$  的方程为  $x^2+y^2-2x-2y=0$ 

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$$

在回路  $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$  内的孤立奇点有:  $z_1=\mathrm{i}, z_2=1, z_1$  为一阶极点,  $z_2$  为二阶极点。 计算 f(z) 在回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \to i} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} (z - \mathrm{i}) \cdot \frac{1}{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \to i} \frac{1}{(z + \mathrm{i})(z - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i} - 1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1} (z - 1)^2 \cdot \frac{1}{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z - 1)^2} \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left( \frac{1}{z^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

于是:

$$I = \oint\limits_{l} rac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2} 
otag \ = 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{Res}f(z_1) + \mathrm{Res}f(z_2)
ight] 
otag \ = 2\pi\mathrm{i}\left(rac{1}{4} - rac{1}{2}
ight) 
otag \ = -rac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

# 留数定理在实积分中的应用

计算无穷限奇异积分的柯西主值

利用 Jordan 引理计算一类带有三角函数的实积分问题

计算一类被积函数为有理三角函数式的实积分

考虑如下形式的积分:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos heta, \sin heta) \mathrm{d} heta$$

其中,  $f(\cos\theta,\sin\theta)$  为不包含有孤立奇点  $\cos\theta$  和  $\sin\theta$  的有理函数。

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$
,  $z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ 

于是:

$$\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \ \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

于是:

$$egin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(\cos heta,\sin heta)\mathrm{d} heta \ &= \oint\limits_{C^+} f\left(rac{z+z^{-1}}{2},rac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}
ight)rac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

其中,C 是以复平面原点为圆心的单位圆周,即 C:|z|=1

#### 例1

计算定积分 
$$I=\int_0^{2\pi} rac{\mathrm{d} heta}{1+arepsilon \cos heta}$$
,其中  $0$ 

令:

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta},\;\;z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i} heta},\;\;\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta}\mathrm{d} heta\Longrightarrow\mathrm{d} heta=rac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta}}=rac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\;\;\cos heta=rac{1}{2}\left(z+z^{-1}
ight)$$

于是:

$$I = \int_0^{2\pi} rac{\mathrm{d} heta}{1+arepsilon\cos heta} \ = rac{2}{\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} rac{1}{arepsilon z^2 + 2z + arepsilon} \mathrm{d}z$$

其中,C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令  $f(z) = \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}$  , 被积函数的两个一阶极点为:

$$z_1 = rac{-1 + \sqrt{1 - arepsilon^2}}{arepsilon}, \ \ z_2 = rac{-1 - \sqrt{1 - arepsilon^2}}{arepsilon}$$

被积函数 f(z) 可写为:

$$f(z)=rac{1}{arepsilon(z-z_1)(z-z_2)}$$

只有  $z_1$  在积分回路内。

计算 f(z) 在回路内孤立奇点  $z_1$  处的留数:

$$egin{aligned} \operatorname{Res} &f(z_1) = rac{1}{0!} \lim_{z o z_1} rac{\operatorname{d}^0}{\operatorname{d} z^0} (z-z_1) f(z) \ &= \lim_{z o z_1} rac{1}{arepsilon (z-z_2)} \ &= rac{1}{arepsilon (z_1-z_2)} \ &= rac{1}{2\sqrt{1-arepsilon^2}} \end{aligned}$$

由留数定理,有:

$$egin{aligned} \oint\limits_{C^+} rac{1}{arepsilon z^2 + 2z + arepsilon} \mathrm{d}z &= 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res} f(z_1) \ &= 2\pi \mathrm{i} \cdot rac{1}{2\sqrt{1 - arepsilon^2}} \ &= rac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{1 - arepsilon^2}} \end{aligned}$$

于是积分为:

$$egin{aligned} I &= rac{2}{\mathrm{i}} \oint\limits_{C^+} rac{1}{arepsilon z^2 + 2z + arepsilon} \mathrm{d}z \ &= rac{2}{\mathrm{i}} \cdot rac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{1 - arepsilon^2}} \ &= rac{2\pi}{\sqrt{1 - arepsilon^2}} \end{aligned}$$

### 例2

计算定积分: 
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta},\;\;z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i} heta},\;\;\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta}\mathrm{d} heta\Longrightarrow\mathrm{d} heta=rac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i} heta}}=rac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\;\;\cos heta=rac{1}{2}\left(z+z^{-1}
ight),\;\;\sin heta=rac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}
ight)$$

设C是复平面上的单位圆,

$$I = \int_0^{2\pi} rac{1}{3-2\cos heta+\sin heta} \mathrm{d} heta 
onumber \ = 2 \oint\limits_{C^+} rac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$$

令  $f(z)=rac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$ ,f(z) 有两个一阶极点  $z_1=2-\mathrm{i}, z_2=rac25-rac15\mathrm{i}$ ,只有  $z_2$  在单位圆C 内。

由于  $z_1,z_2$  是  $(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}=0$  的两根,于是 f(z) 可表达为:

$$f(z) = rac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}$$

f(z) 在  $z_2$  处的留数:

$$egin{aligned} ext{Res} f(z_2) &= rac{1}{0!} \lim_{z o z_2} rac{ ext{d}^0}{ ext{d}z^0} (z-z_2) f(z) \ &= \lim_{z o z_2} rac{1}{(1-2 ext{i})(z-z_1)} \ &= rac{1}{(1-2 ext{i})(z_2-z_1)} \ &= rac{1}{4 ext{i}} \end{aligned}$$

于是由留数定理,有:

$$egin{aligned} \oint\limits_{C^+}rac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}} &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_2) \ &= rac{\pi}{2} \end{aligned}$$

于是:

$$egin{aligned} I &= 2 \oint\limits_{C^+} rac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}} \ &= 2\cdotrac{\pi}{2} \ &= \pi \end{aligned}$$

# 第9章 傅里叶变换

## 傅里叶级数

设  $\mathcal{H}$  是一个希尔伯特空间,其元素是周期为 2l 的单变量函数, $\forall f_1,f_2\in\mathcal{H}$ , $\mathcal{H}$  上两个元素的内积,记为  $\langle f_1,f_2\rangle$ ,定义为:

$$\langle f_1,f_2
angle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x, \ \ x\in\mathbb{R}$$

其中,x 是参数,而内积与参数无关。有时为了指明参数,也将内积写为:

$$\langle f_1(x),f_2(x)
angle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x$$

若 f(x) 是实函数,则内积可简化为:

$$\langle f_1,f_2
angle \equiv \int_{x=-l}^{x=l} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x, \;\; x\in\mathbb{R}$$

## 三角函数基的傅里叶级数

容易验证如下结论:

$$\begin{cases} \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} dx = 1 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0 \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots \\ \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi}{l} x dx = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

函数系  $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{m\pi}{l}x;\ n,m=1,2,\cdots\right\}$  是一个完备的正交归一函数族,它们可作为基矢张成  $\mathcal{H}$ 。

这个函数系具体写出来是:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x, \cdots\right\}$$

任意一个周期为 2l 的,满足狄利克雷条件的函数 f(x) 可写成这些基函数的线性组合,即 f(x) 可展成傅里叶级数:

$$f(x) = a_0 \cdot rac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot rac{1}{\sqrt{l}} \cos rac{k\pi}{l} x + b_k \cdot rac{1}{\sqrt{l}} \sin rac{k\pi}{l} x 
ight)$$

为求出线性组合的系数,只需要利用"这组基是正交归一完备的"这一性质,比如:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2l}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \cdot \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k'\pi}{l} x, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{k',k}$$

$$= a_{k'}$$

总之:

$$a_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2l}}, f(x) \right\rangle = \int_{-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{2l}} \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x) dx$$

$$a_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$$

$$b_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x, f(x) \right\rangle = \int_{x=-l}^{x=l} \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{x=-l}^{x=l} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

## e 指数基的傅里叶级数

注意到:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}(m-n)x} \mathrm{d}x = \delta_{m,n}$$

函数系  $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imx}, m\in\mathbb{Z}\right\}$  可作为以  $2\pi$  为周期的函数为元素的希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  中的一组正交完备归一基矢,以  $2\pi$  为周期的函数 f 在这组基矢上的展开式为:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m x}$$

利用正交归一条件:

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right)^* \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(m-n)x} dx$$
$$= \delta_{m,n}$$

内积可得系数:

$$\left\langle rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, f(x) 
ight
angle = \left\langle rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \cdot rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} 
ight
angle$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \left\langle rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} 
ight
angle$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta_{m,n}$$

$$= C_n$$

即系数  $C_m$  可通过内积求得:

$$C_m = \left\langle rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m x}, f(x) 
ight
angle = \int_{-\pi}^{\pi} \left( rac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} m x} 
ight)^* \cdot f(x) \mathrm{d} x = rac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} m x} \mathrm{d} x$$

# 傅里叶变换(to be continued)

## 傅里叶分解与傅里叶变换

若 f(x) 是定义在  $\mathbb R$  上的实函数,它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件,且积分  $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$  收敛,则 f(x) 可进行**傅里叶分解**(将 f(x) 分解为无穷多不同频率 k 的基函数  $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$  的线性叠加):

$$f(x) = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i} k x} \mathrm{d} k$$

其中,系数 C(k) 称为 f(x) 的傅里叶变换(或频谱)。

为求出系数 C(k) 的表达式,令  $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}$  与上式两端内积,等式仍成立:

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x) 
ight
angle = \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k 
ight
angle$$

根据内积的定义,分别计算内积:

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, f(x) \right\rangle \equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} \right)^* f(x) \mathrm{d}x$$

$$\equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \mathrm{d}x$$

$$\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}, \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \right\rangle \equiv \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left( \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} \right)^* \left( \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} \mathrm{d}k \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} C(k) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}k$$

$$= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \delta(k-k') \mathrm{d}k$$

$$= C(k')$$

$$C(k') = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} k' x} \mathrm{d} x$$

将 k' 替换成 k, 即:

$$C(k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

这就得到了 f(x) 的傅里叶分解  $f(x)=rac{1}{2\pi}\int_{k}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$  中系数 C(k) 的表达式。

$$f(x)=rac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{k=+\infty}C(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k,\ \ C(k)=\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

其中,系数 C(k) 称为 f(x) 的傅里叶变换(或频谱),也记为:

$$C(k) \equiv \mathscr{F}\{f(x)\}(k)$$

也就是说,函数 f(x) 的傅里叶变换  $\mathscr{F}\{f(x)\}(k)$  是一个关于 k 的函数,其表达式为:

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)=\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

## 傅里叶变换的基本性质

### 线性定理

$$\mathscr{F}\{\alpha_1f_1+\alpha_2f_2\}=\alpha_1\mathscr{F}\{f_1\}+\alpha_2\mathscr{F}\{f_2\}$$

#### 延迟定理

$$\mathscr{F}{f(x-x_0)}(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\mathscr{F}{f(x)}(k)$$

### 位移定理

设 $\mathscr{F}{f(x)}(k) = C(k)$ , 则:

$$\mathscr{F}{f(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}{}(k)=C(k-k_0)$$

### 标度变换定理

设 $\mathscr{F}{f(x)}(k) = C(k)$ ,则:

$$\mathscr{F}{f(ax)}(k) = \frac{1}{|a|}C\left(\frac{k}{a}\right)$$

#### 微分定理

设当  $|x| \to \infty$  时,  $f(x) \to 0$ , 则有:

$$\mathscr{F}{f'(x)}(k) = \mathrm{i}k\mathscr{F}{f(x)}(k)$$
 
$$\mathscr{F}{f^{(n)}(x)}(k) = (\mathrm{i}k)^n\mathscr{F}{f(x)}(k)$$

#### 卷积定理

# 第10章 拉普拉斯变换

# 拉普拉斯变换的定义

对于定义在实变数  $t \in [0, +\infty)$  上的实函数或复函数 f(t),定义 f(t) 的拉普拉斯变换为:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)\equiv F(p)\equiv \int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中, $p=s+\mathrm{i}\sigma,s\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}$ , $\mathrm{e}^{-pt}$  称为拉普拉斯变换核,F(p) 称为像函数,也记为:

$$F(p) \stackrel{.}{=} f(t), \ f(t) \stackrel{.}{=} F(p)$$

# 拉普拉斯变换的性质 (两种记号)

# 线性定理

若  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,则:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\}(p) = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

设  $f_1(t) = F_1(p), f_2(t) = F_2(p)$ , 则:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

### 延迟定理

设 $\tau > 0$ ,则:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)H(t-\tau)\}(p) = e^{-\tau p}\mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

设  $f(t) = F(p), \tau > 0$ , 则:

$$f(t-\tau)H(t-\tau) = e^{-p\tau}F(p)$$

其中, 定义了阶跃函数 H:

$$H(t) \equiv egin{cases} 1 & , t > 0 \ 0 & , t \leqslant 0 \end{cases}$$

## 位移定理

设 $\lambda \in \mathbb{C}$ ,则:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)
ight\}(p)=\mathcal{L}\{f(t)\}(p+\lambda)$$

设 $f(t) = F(p), \lambda \in \mathbb{C}$ , 则:

$$e^{-\lambda t}f(t) = F(p+\lambda)$$

## 标度变换定理

设 a > 0,则:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{a}\right)$$

设f(t) = F(p),则:

$$f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), a > 0$$

## 卷积定理

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}(p) \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\}(p)$$

其中, 卷积的定义为:

$$f_1(t)*f_2(t) \equiv \int_{ au=0}^{ au=t} f_1( au) f_2(t- au) \mathrm{d} au$$

设  $f_1(t) = F_1(p), f_2(t) = F_2(p)$ , 则:

$$f_1(t) * f_2(t) = F_1(p)F_2(p)$$

### 微分定理

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(p) = p^{n}\mathcal{L}\{f(t)\}(p) - p^{n-1}f^{(0)}(0) - p^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - p^{1}f^{(n-2)}(0) - p^{0} \cdot f^{(n-1)}(0)$$

设f(t) = F(p),则:

$$f^{(n)}(t) \coloneqq p^n F(p) - p^{n-1} f^{(0)}(0) - p^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - p^1 f^{(n-2)}(0) - p^0 f^{(n-1)}(0)$$

特别地:

$$f^{(1)}(t) \coloneqq p^1 F(p) - p^0 f^{(0)}(0)$$
  
 $f^{(2)}(t) \coloneqq p^2 F(p) - p^1 f^{(0)}(0) - p^0 f^{(1)}(0)$ 

### 积分性质

$$\mathcal{L}igg\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t}_{n \equiv \mathcal{H} \circlearrowleft} f(t)igg\}(p) = rac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

$$\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t \mathrm{d}t}_{n \equiv \mathbb{R} \mathcal{D}} f(t) \coloneqq \frac{1}{p^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$$

# 周期函数变换定理

若 f(t) = f(t+T), 则:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = rac{\int_0^T f( au) \mathrm{e}^{-p au} \mathrm{d} au}{1 - \mathrm{e}^{-pT}}$$

若 f(t) = f(t+T), 则:

$$f(t) \coloneqq rac{\int_0^T f( au) \mathrm{e}^{-p au} \mathrm{d} au}{1 - \mathrm{e}^{-pT}}$$

# 常用拉普拉斯变换及反演

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p > 0$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(p) = \frac{1}{p-a}, \ \operatorname{Re} p > a$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(p) = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\}(p) = \frac{a}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\}(p) = \frac{p}{p^2 - a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\}(p) = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\}(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\}(p) = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{1}{p} \stackrel{.}{=} 1, \quad \frac{1}{p^2} \stackrel{.}{=} t, \quad \frac{n!}{p^{n+1}} \stackrel{.}{=} t^n$$

$$\frac{1}{p-\alpha} \stackrel{.}{=} e^{\alpha t}, \quad \frac{n!}{(p-n)^{n+1}} \stackrel{.}{=} t^n e^{\alpha t}$$

$$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \stackrel{.}{=} \sin \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \stackrel{.}{=} \cos \alpha t$$

$$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \stackrel{.}{=} \sinh \alpha t, \quad \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \stackrel{.}{=} \cosh \alpha t$$

# 拉普拉斯变换的应用

### 解常微分方程

#### 例1

用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程, 其中 L, R, E 为常数:

$$egin{cases} Lrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=E\ i(0)=0 \end{cases}$$

设i(t) = F(p)

微分定理给出:

$$rac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\coloneqq p^1F(p)-p^0i^{(0)}(0)=pF(p)-i(0)=pF(p)$$

常用拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p > 0, \ \operatorname{or1} \coloneqq \frac{1}{p}$$

对方程  $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=+Ri(t)=E$  两边同时作拉普拉斯变换,得:

$$LpF(p)+RF(p)=rac{E}{p}$$

解出 F(p):

$$egin{aligned} F(p) &= rac{E}{Lp^2 + Rp} \ &= rac{E}{R} \left(rac{1}{p} - rac{p}{p + R/L}
ight) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演:

$$\frac{1}{p-\alpha} = e^{\alpha t}$$

于是:

$$\frac{1}{p} \stackrel{.}{=} 1, \quad \frac{1}{p+R/L} \stackrel{.}{=} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程  $F(p)=rac{E}{R}\left(rac{1}{p}-rac{p}{p+R/L}
ight)$  两边同时作拉普拉斯逆变换,得:

$$i(t) = rac{E}{R} \left( 1 - \mathrm{e}^{-rac{R}{L}t} 
ight)$$

# 第11章 $\delta$ 函数

# $\delta$ 函数的定义

 $\delta$  函数是一个定义在  $\mathbb{R}$  上的广义函数, 其满足:

$$\delta(x-x_0) = egin{cases} 0 &, x 
eq x_0 \ +\infty &, x = x_0 \end{cases}, oxtless \int_a^b \delta(x-x_0) \mathrm{d}x = egin{cases} 1 &, x_0 \in (a,b) \ 0 &, x_0 
otin (a,b) \end{cases}$$

# $\delta$ 函数的性质

(1) 设 f(x) 为连续函数,则:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-x_0) \mathrm{d}x = f(x_0)$$

(2)  $\delta(x)$  是偶函数:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

(3):

$$f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$$

(4) :

$$x\delta(x) = 0$$

(5):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_2) \delta(x-x_1) \mathrm{d}x = \delta(x_1-x_2)$$

(6) :设 $\{x_i\}$ 为 $\varphi(x)$ 的单根,即 $\varphi(x_i)=0$ 且 $\varphi'(x_i)
eq 0$ ,则:

$$\delta(arphi(x)) = \sum_i rac{1}{|arphi'(x_i)|} \delta(x-x_i)$$

简单例子:

$$\delta(ax)=rac{1}{|a|}\delta(x) \ \delta(x^2-a^2)=rac{1}{2|a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)
ight]$$

# 三维 $\delta$ 函数

$$\delta(ec{r}-ec{r}_0) = egin{cases} 0 &, ec{r} 
eq ec{r}_0 \ +\infty &, ec{r} = ec{r}_0 \end{cases}, oxtlus \int\limits_V \delta(ec{r}-ec{r}_0) \mathrm{d}^3 ec{r} = 1, ec{r}_0 \in V$$

# 三维直角坐标系

$$\mathrm{d}^3ec{r}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
  $\delta(ec{r}-ec{r}_0)\equiv\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ 

## 三维球坐标系

$$\mathrm{d}^3 ec{r} = r^2 \sin heta \mathrm{d} r \mathrm{d} heta \mathrm{d} arphi$$
  $\delta(ec{r} - ec{r}_0) = rac{1}{r^2 \sin heta} \delta(r - r_0) \delta( heta - heta_0) \delta(arphi - arphi_0)$ 

## 三维柱坐标系

$$\mathrm{d}^3ec{r} = 
ho \mathrm{d}
ho \mathrm{d}arphi \mathrm{d}z$$
  $\delta(ec{r} - ec{r}_0) = rac{1}{
ho} \delta(
ho - 
ho_0) \delta(arphi - arphi_0) \delta(z - z_0)$ 

# 不同形式的 $\delta$ 函数

$$\delta(x) = \lim_{n o \infty} \sqrt{rac{n}{\pi}} \mathrm{e}^{-nx^2}$$

$$\delta(ec{r}) = -rac{1}{4\pi}
abla^2rac{1}{r}$$

# $\delta$ 函数的傅里叶展式和傅里叶变换

### 一维

设  $\delta(x-x_0)$  可展为:

$$\delta(x-x_0) = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k$$

其中,系数 C(k) 就是  $\delta(x-x_0)$  的傅里叶变换  $\mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k)$ ,即:

$$egin{aligned} C(k) &= \mathscr{F}\{\delta(x-x_0)\}(k) \ &= \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x-x_0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \end{aligned}$$

代回  $\delta(x-x_0)$  的傅里叶展式,可得:

$$\delta(x-x_0) = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} C(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \ = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k \ = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_0)} \mathrm{d}k$$

$$\left| \delta(x-x_0) = rac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-x_0)k} \mathrm{d}k 
ight|$$

### 三维

$$\begin{split} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{k_x = -\infty}^{k_x = +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x - x_0)k_x} \mathrm{d}k_x\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{k_y = -\infty}^{k_y = +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y - y_0)k_y} \mathrm{d}k_y\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{k_z = -\infty}^{k_z = +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z - z_0)k_z} \mathrm{d}k_z\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_x = -\infty}^{k_x = +\infty} \int_{k_y = -\infty}^{k_y = +\infty} \int_{k_z = -\infty}^{k_z = +\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x - x_0)k_x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y - y_0)k_y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z - z_0)k_z} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k}} \mathrm{d}^3 \vec{k} \end{split}$$

$$oxed{\delta(ec{r}-ec{r}_0)=rac{1}{\left(2\pi
ight)^3}\int\limits_{ec{k}\in\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ec{r}-ec{r}_0)\cdotec{k}}\mathrm{d}^3ec{k}}$$

# 例题

## 例1

证明: 
$$\delta(ec{r}) = -rac{1}{4\pi}
abla^2rac{1}{r}$$

当  $\vec{r} \neq \vec{0}$ ,有:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \left( \nabla \frac{1}{r} \right)$$

$$= \nabla \cdot \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$= -\left( \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{r} \right)$$

$$= -\left( \vec{r} \cdot \left( -3r^{-4} \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{1}{r^3} \cdot 3 \right)$$

$$= 0$$

 $abla^2rac{1}{r}$  在  $ec{r}=ec{0}$  处无定义,但可人为定义其在  $ec{0}$  处的函数值为  $+\infty$ 

取以坐标原点为球心,半径为 R 的一个球体 V ,

$$\begin{split} \int\limits_{\vec{r}\in V} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}^3 \vec{r} &= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\vec{r}\in V} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \mathrm{d}^3 \vec{r} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\partial V^+} \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d} \vec{S} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\partial V^+} -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \mathrm{d} \vec{S} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \oint\limits_{\partial V^+} \mathrm{d} S \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 \\ &= 1 \end{split}$$

# 第12章 小波变换初步

# 第13章 波动方程、输运方程、泊松方程及其定解 问题

波动方程、输运方程、泊松方程的标准形式

波动方程 (双曲方程)

$$u_{tt} - a^2 
abla^2 u(ec{r},t) = f(ec{r},t)$$

输运方程 (抛物方程)

$$u_t - a^2 
abla^2 u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$$

泊松方程 (椭圆方程)

$$abla^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

拉普拉斯方程

$$abla^2 u(\vec{r}) = 0$$

# 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

定解条件包括初始条件和边界条件。

### 初始条件

#### 波动方程初始条件

场量  $u(\vec{r},t)$  在 t=0 时刻的空间分布**和**场量对时间的一阶导  $u_t(\vec{r},t)$  在 t=0 时刻的空间分布:

$$egin{cases} u(ec{r},t)igg|_{t=0} = arphi(ec{r}) \ u_t(ec{r},t)igg|_{t=0} = 
u(ec{r}) \end{cases}$$

#### 输运方程初始条件

场量  $u(\vec{r},t)$  在 t=0 时刻的空间分布**或**场量对时间的一阶导  $u_t(\vec{r},t)$  在 t=0 时刻的空间分布:

$$\left. u(ec{r},t) 
ight|_{t=0} = arphi(ec{r})$$

或:

$$\left|u_t(ec{r},t)
ight|_{t=0}=
u(ec{r})$$

### 泊松方程初始条件

泊松方程没有初始条件 (稳定场,场量不随时间改变)

# 边界条件

### 第一类边界条件

场量  $u(\vec{r},t)$  在边界  $\partial\Omega$  处的取值所要满足的条件

$$\left|u(ec{r},t)
ight|_{ec{r}\in\partial\Omega}=g(ec{r},t)$$

若  $g(\vec{r},t)=0$ ,则得到第一类齐次边界条件:

$$u(\vec{r},t)\bigg|_{\vec{r}\in\partial\Omega}=0$$

### 第二类边界条件

场量沿边界的外法线的梯度对时间的依赖关系

$$\left. rac{\partial u(ec{r},t)}{\partial n} 
ight|_{ec{r} \in \partial \Omega} = g(ec{r},t)$$

若  $g(\vec{r},t)=0$ ,则得到**第二类齐次边界条件**:

$$\left. rac{\partial u(ec{r},t)}{\partial n} 
ight|_{ec{r} \in \partial \Omega} = 0$$

#### 第三类边界条件

$$\left.\left(\alpha u(\vec{r},t)+\beta rac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial n}
ight)
ight|_{\vec{r}\in\Omega}=g(\vec{r},t)$$

若  $g(\vec{r},t)=0$ ,则得到**第三类齐次边界条件**:

$$\left.\left( lpha u(ec{r},t) + eta rac{\partial u(ec{r},t)}{\partial n} 
ight)
ight|_{ec{r}\in\Omega} = 0$$

#### 自然边界条件

所要求解的场量 u 在考虑的区域  $\Omega$  及其边界  $\partial\Omega$  上,都是有界的,不发散的,即:

$$|u|<+\infty$$

#### 周期性边界条件

场函数  $u(\vec{r},t)$  具有空间周期性。

#### 衔接条件

若研究的区域  $\Omega$  可分成几个性质不同的子区域,则在相邻子区域的边界上要求用特殊的衔接条件。

# 波动方程、输运方程、泊松方程的定解条件

### 波动方程定解条件

$$egin{cases} u_{tt}(ec{r},t) - a^2 
abla^2 u = f(ec{r},t) \ u(ec{r},t)igg|_{t=0} = arphi(ec{r}) \ u_t(ec{r},t)igg|_{t=0} = 
u(ec{r}) \ \left[ lpha u(ec{r},t) + eta rac{\partial u(ec{r},t)}{\partial n} 
ight]_{ec{r} \in \partial \Omega} = g(ec{r},t)igg|_{ec{r} \in \partial \Omega} \ \end{cases}$$

# 输运方程定解条件

$$egin{cases} \left\{ egin{aligned} u_t(ec{r},t) - a^2 
abla^2 u &= f(ec{r},t) \ u(ec{r},t) igg|_{t=0} &= arphi(ec{r}) \ \left[ lpha u(ec{r},t) + eta rac{\partial u(ec{r},t)}{\partial n} 
ight]_{ec{r} \in \partial \Omega} &= g(ec{r},t) igg|_{ec{r} \in \partial \Omega} \end{aligned}$$

# 泊松方程定解条件

$$egin{cases} 
abla^2 u(ec{r}) = f(ec{r}) \ \left[ lpha u(ec{r}) + eta rac{\partial u(ec{r})}{\partial n} 
ight]_{ec{r} \in \partial \Omega} = g(ec{r}s) igg|_{ec{r} \in \partial \Omega} 
onumber \end{cases}$$

# 第14章 分离变量法

# 例1

求解四边固定, x, y 方向上边长分别为 l, d 的矩形薄膜的本征振动 (即求本征振动频率和本征振动函数)

矩形薄膜的振动满足二维波动方程。这里采用直角坐标,结合"四周固定"这一边界条件,可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = 0\\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0\\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

设 u(x, y, t) 可分离变量:

$$u(x, y, t) = U(x, y)T(t) = X(x)Y(y)T(t)$$

代入波动方程可得:

$$X(x)Y(y)T''(t) - a^{2} [Y(y)T(t)X''(x) + X(x)T(t)Y''(y)] = 0$$

上式两边同时除以 X(x)Y(y)T(t) 得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - a^2 \left[ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0$$

观察可知,必定有:

$$rac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \;\; rac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \;\; rac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2$$

将上式代入上上式,可知 $\omega, k_x, k_y$ 满足:

$$\omega^2=a^2\left(k_x^2+k_y^2
ight)$$

$$rac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \Longrightarrow X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x)$$

结合边界条件  $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0$  可得:

$$A=0, \;\; k_x^{(n)}=rac{n\pi}{l}, \;\; n=1,2,\cdots$$

因此, X(x) 的本征函数为:

$$X^{(n)} = B^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$rac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \Longrightarrow Y(y) = C\cos(k_y y) + D\sin(k_y y)$$

结合边界条件  $u\big|_{u=0} = u\big|_{u=d} = 0$  可得:

$$C=0, \;\; k_y^{(m)}=rac{m\pi}{d}, \;\; m=1,2,\cdots$$

因此, Y(y) 的本征函数为:

$$Y^{(m)} = D^{(m)} \sin\left(rac{m\pi}{d}y
ight)$$

由 U(x,y) = X(x)Y(y) 可知,本征振动函数为:

$$egin{aligned} U^{(nm)}(x,y) &= X^{(n)}(x)Y^{(m)}(y) \ &= B^{(n)}D^{(m)}\sin\left(rac{n\pi}{l}x
ight)\sin\left(rac{m\pi}{d}y
ight) \ &\equiv E^{(nm)}\sin\left(rac{n\pi}{l}x
ight)\sin\left(rac{m\pi}{d}y
ight), \ E^{(nm)} &\equiv B^{(n)}D^{(m)}, \ n,m=1,2,\cdots \end{aligned}$$

由  $\omega^2=a^2\left(k_x^2+k_y^2
ight)$  可知,本征振动频率为:

$$egin{align} \omega^{(nm)} &= a\sqrt{\left(k_x^{(n)}
ight)^2 + \left(k_y^{(m)}
ight)^2} \ &= a\sqrt{\left(rac{n\pi}{l}
ight)^2 + \left(rac{m\pi}{d}
ight)^2}, \ \ n,m=1,2,\cdots \end{split}$$

# 第15章 曲线坐标系下的分离变量

# 球坐标系下方程的分离变量

### 拉普拉斯方程在球坐标系下的分量变量

在球坐标系下,拉普拉斯方程为:

$$abla^2 u(r, heta,arphi)=0$$

其中, 拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为:

$$abla^2 = rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}\left(r^2rac{\partial}{\partial r}
ight) + rac{1}{r^2\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial}{\partial heta}
ight) + rac{1}{r^2\sin^2 heta}rac{\partial^2}{\partial arphi^2}$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算,可以得到:

### 径向方程

径向部分 R(r) 满足**径向方程**:

$$r^2rac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r^2}+2rrac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R(r)=0$$

#### 球函数方程

角度部分  $Y(\theta,\varphi)$  满足**球函数方程**:

$$rac{1}{\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial Y( heta,arphi)}{\partial heta}
ight)+rac{1}{\sin^2 heta}rac{\partial^2 Y( heta,arphi)}{\partialarphi^2}+l(l+1)Y( heta,arphi)=0$$

### 方位角满足的方程

方位角部分  $\Phi(\varphi)$  满足:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0$$

结合周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  可得:

$$\lambda = m^2, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

因此方位角部分满足的方程可写为:

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

### 连带勒让德方程

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left( \sin \theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

 $\Leftrightarrow x = \cos heta, \Theta( heta) = y(x), heta \in [0,\pi], |x| \leqslant 1, \sin heta = \sqrt{1-x^2}$  ,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为连带勒让德方程:

$$(1-x^2)rac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left\lceil l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight
ceil y=0$$

#### 勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性,即场量与方位角  $\varphi$  无关:

$$u = u(r, \theta)$$

这对应 m=0,则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**:

$$(1-x^2)rac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2xrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0$$

# 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系下, 亥姆霍兹方程为:

$$abla^2 u(r, heta,arphi) + k^2 u(r, heta,arphi) = 0$$

其中, 拉普拉斯算子在球坐标系下的表达式为:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

设  $u(r, \theta, \varphi)$  可分离变量:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

经过运算,可以得到:

#### 球贝塞尔方程

径向部分 R(r) 满足球贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0$$

#### 球函数方程

角度部分  $Y(\theta,\varphi)$  满足**球函数方程**:

$$rac{1}{\sin heta}rac{\partial}{\partial heta}\left(\sin hetarac{\partial Y( heta,arphi)}{\partial heta}
ight)+rac{1}{\sin^2 heta}rac{\partial^2 Y( heta,arphi)}{\partialarphi^2}+l(l+1)Y( heta,arphi)=0$$

可见, 亥姆霍兹方程解的角度部分满足的方程与拉普拉斯一致。

#### 方位角满足的方程

因此方位角部分满足的方程可写为:

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

### 连带勒让德方程

极角部分  $\Theta(\theta)$  满足:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left( \sin \theta \frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

 $\Leftrightarrow x = \cos heta, \Theta( heta) = y(x), heta \in [0,\pi], |x| \leqslant 1, \sin heta = \sqrt{1-x^2}$  ,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为连带勒让德方程:

$$(1-x^2)rac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left\lceil l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight
ceil y=0$$

#### 勒让德方程

若考虑的问题具有极轴对称性,即场量与方位角  $\varphi$  无关:

$$u = u(r, \theta)$$

对应 m=0,则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y = 0$$

# 柱坐标系下方程的分离变量

## 柱坐标系下亥姆霍兹方程的分离变量

在柱坐标系下, 亥姆霍兹方程为:

$$abla^2 u(
ho,arphi,z) + k^2 u(
ho,arphi,z) = 0$$

其中, 拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为:

$$abla^2 = rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设  $u(\rho,\varphi,z)$  可分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算,可以得到:

### $\Phi(\varphi)$ 满足的方程

 $\Phi(\varphi)$  满足:

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \nu \geqslant 0$$

若不限制  $\varphi$  的取值范围,而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  可得:

$$\nu = m, \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

ps: 这里为了让  $\nu$  和  $\nu^2$  ——对应,约定  $\nu$  取非负实数。

## Z(z) 满足的方程

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

## R( ho) 满足的方程及贝塞尔方程

 $R(\rho)$  满足:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left( \rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + \left( k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{k^2+\lambda}
ho, 
ho=x/\sqrt{k^2+\lambda}, (k^2+\lambda
eq 0), R(
ho)igg|_{
ho=x/\sqrt{k^2+\lambda}}\equiv y(x), \;\; y(x)igg|_{x=\sqrt{k^2+\lambda}
ho}=R(
ho)$$
 ,

则上面方程可化为贝塞尔方程:

$$rac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + rac{1}{x} rac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \left(1 - rac{
u^2}{x^2}
ight) y(x) = 0, \;\; 
u \geqslant 0$$

或称为 $\nu$ 阶贝塞尔方程。

# 第16章 球函数

# 勒让德多项式

在球坐标系下,拉普拉斯方程为:

$$abla^2 u(r, \theta, \varphi) = 0$$

设  $u(r,\theta,\varphi)$  可分离变量:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入拉普拉斯方程,可得极角部分  $\Theta(\theta)$  满足:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left\lceil l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\rceil\Theta(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow x = \cos heta, \Theta( heta) = y(x), heta \in [0,\pi], |x| \leqslant 1, \sin heta = \sqrt{1-x^2}$$
 ,

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

则方程可化为连带勒让德方程:

$$(1-x^2)rac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2xrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-rac{m^2}{1-x^2}
ight]y=0$$

若考虑的问题具有极轴对称性,即场量与方位角  $\varphi$  无关:

$$u = u(r, \theta)$$
 or  $\Phi(\varphi) = \text{const}$ 

对应 m=0,则连带勒让德方程退化为**勒让德方程**:

$$(1-x^2)rac{{
m d}^2y}{{
m d}x^2}-2xrac{{
m d}y}{{
m d}x}+l(l+1)y=0,\;\;l=0,1,2,\cdots$$

利用级数法可以求得,勒让德方程在自变量  $|x|\leqslant 1$  范围内,在自然边界条件  $|y(x)|<+\infty$  下,对应于本征值  $l(l+1),\ l=0,1,2,\cdots$  的本征解为勒让德多项式  $P_l(x)$ :

$$P_l(x) \equiv \sum_{n=0}^N rac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n)!} x^{l-2n}, \ \ N = egin{cases} rac{l}{2} & , l$$
为偶数  $rac{l}{2} & , l$ 为奇数

即:

$$\left\{egin{aligned} |x| \leqslant 1 \ (1-x^2)rac{\mathrm{d}^2y_l(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2xrac{\mathrm{d}y_l(x)}{\mathrm{d}x} + l(l+1)y_l(x) = 0, \;\; l = 0, 1, 2, \cdots \ |y_l(x)| < 1 \end{aligned}
ight.$$

$$\implies y_l(x) = P_l(x), \ P_l(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n)!} x^{l-2n}, \ N = \begin{cases} \frac{l}{2} & , l 为偶数 \\ \frac{l-1}{2} & , l 为奇数 \end{cases}$$

## 前几个勒让德多项式

$$egin{aligned} ext{P}_0(x) &= 1 \ ext{P}_1(x) &= x \ ext{P}_2(x) &= rac{1}{2} \left( 3x^2 - 1 
ight) \ ext{P}_3(x) &= rac{1}{2} \left( 5x^3 - 3x 
ight) \ ext{P}_4(x) &= rac{1}{8} \left( 35x^4 - 30x^2 + 3 
ight) \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}_5(x) = rac{1}{8} \left( 63 x^5 - 70 x^3 + 15 x 
ight)$$

## 勒让德多项式的性质

$$\mathrm{P}_l(x) \equiv \sum_{n=0}^N rac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!} x^{l-2n}, \;\; N = egin{cases} rac{l}{2} & ,l$$
为偶数 $rac{l-1}{2} & ,l$ 为奇数 $\mathrm{P}_l(1) = 1 & \ \mathrm{P}_l(-x) = (-1)^l \mathrm{P}(x) & \end{cases}$ 

#### 罗德里格斯公式 (勒让德多项式的微分表达式)

$$\mathrm{P}_l(x) = rac{1}{2^l l!} rac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1
ight)^l$$

### 勒让德多项式的生成函数(母函数)

定义勒让德多项式的生成函数 f(r) 为:

$$f(r) \equiv rac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos heta}} = rac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}$$

其中,  $x = \cos \theta, |x| \leqslant 1$ 

当 r < 1,可将 f(r) 在 r = 0 处进行泰勒展开,可得:

$$f(r)\equivrac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)r^l, \ \ r<1$$

或者:

$$f(r) \equiv rac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos heta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos heta)r^l, \;\; r < 1$$

当  $r > 1, \frac{1}{r} < 1$ , 有:

$$egin{aligned} f(r) &= rac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2rx}} \ &= rac{1}{r\sqrt{1 + (1/r)^2 - 2\left(1/r
ight)x}} \ &= rac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) \left(rac{1}{r}
ight)^l \ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) r^{-(l+1)}, \ \ r > 1 \end{aligned}$$

或者:

$$f(r)=rac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos heta}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(\cos heta)r^{-(l+1)}, \ \ r>1$$

#### 勒让德多项式的递推公式

$$egin{aligned} x(1+2l)\mathrm{P}_l(x) - (l+1)\mathrm{P}_{l+1}(x) - l\mathrm{P}_{l-1}(x) &= 0 \ &\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) + \mathrm{P}'_{l-1}(x) - 2x\mathrm{P}'_l(x) \ &\qquad (2l+1)\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) - \mathrm{P}'_{l-1}(x) \ &\qquad (l+1)\mathrm{P}_l(x) = \mathrm{P}'_{l+1}(x) - x\mathrm{P}'_l(x) \ &\qquad l\mathrm{P}_l(x) = x\mathrm{P}'_l(x) - \mathrm{P}'_{l-1}(x) \ &\qquad (x^2-1)\mathrm{P}'_l(x) = lx\mathrm{P}_l(x) - l\mathrm{P}_{l-1}(x) \end{aligned}$$

### 勒让德函数的正交归一性

$$\left\{\sqrt{rac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x),\ l=0,1,2,\cdots
ight\}$$
构成  $[-1,1]$  上的正交归一函数系,基函数的正交归一性可表达为: $\int_{-1}^1\sqrt{rac{2k+1}{2}}\mathrm{P}_k(x)\cdot\sqrt{rac{2l+1}{2}}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\delta_{kl},\ k,l=0,1,2,c\dots$ 

# 具有轴对称的拉普拉斯方程的求解

拉普拉斯方程:

$$abla^2 u(r, heta,arphi)=0$$

若求解的问题具有极轴对称性,即场分布与方位角  $\varphi$  无关:

$$u = u(r, \theta)$$

则拉普拉斯方程简化为:

$$abla^2 u(r, heta) = 0$$

可以证明,在自然边界条件  $|u(r,\theta)|<1$  下,方程的通解为:

$$u(r, heta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} 
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta)$$

### 例1

在单位球的北极点上放置一电荷量为  $4\pi\varepsilon_0$  的点电荷,求单位球内任一点  $\vec{r}$  的电势,并用勒让德多项式表示。

由余弦定理知,单位球内  $\vec{r}$  点离单位球上北极点的距离为:

$$r' = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\theta}, \ \ r < 1$$

单位球内  $\vec{r}$  点的电势为:

$$egin{align} u(ec{r}) &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{q}{r'} \ &= rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{4\piarepsilon_0}{\sqrt{1+r^2-2r\cos heta}} \ &= rac{1}{\sqrt{1+r^2-2r\cos heta}}, \ \ r < 1 \ \end{aligned}$$

这恰好是勒让德多项式的生成函数,其可在 r=0 点展开为:

$$u(ec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(\cos heta) r^l, \;\; r < 1$$

### 例2

在均匀电场  $ec{E}_0$  中放一半径为 a 的接地导体球,求球外电场。

以球心 O 为坐标原点,选取  $\vec{E}_0$  方向为 z 轴正方向,则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷,于是球外电势分布  $u(\vec{r})$  满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = 0, \quad r > a$$

特别地,这里电势 u 关于 z 轴对称, u 与  $\varphi$  无关,拉普拉斯方程可简化为:

$$abla^2 u(r,\theta) = 0, \quad r > a$$

导体球接地,得到一个边界条件:

$$\left. u(r, heta) 
ight|_{r=a} = 0$$

由电势的叠加原理,实际电势  $u(r,\theta)$  是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场  $\vec{E}_0$  导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零,则当  $r\to +\infty$ ,电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为  $u_0$ ,则:

$$u_0 - u(r, \theta) = E_0 r \cos \theta, \ r \to +\infty$$

定解问题为:

$$egin{cases} 
abla^2 u(r, heta) = 0 \ u(r, heta)igg|_{r=a} = 0 \ u(r, heta)igg|_{r
ightarrow +\infty} = u_0 - E_0 r\cos heta \end{cases}$$

套用结论, 轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为:

$$u(r, heta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta)$$

考虑边界条件  $u(r,\theta)igg|_{r o +\infty}=u_0-E_0r\cos heta$ ,当  $r o +\infty$ ,有  $r^{-(l+1)} o 0$ ,于是:

$$egin{aligned} u_0 - E_0 r \cos heta &= \sum_{l=0}^\infty A_l r^l \mathrm{P}_l (\cos heta) \ &= A_0 + A_1 r \cos heta + \cdots \end{aligned}$$

左右两边都看作关于r的多项式,对比系数得:

$$A_0 = u_0, \ A_1 = -E_0, \ A_2 = A_3 = \dots = 0$$

干是形式解可写为:

$$egin{aligned} u(r, heta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}
ight) \mathrm{P}_l(\cos heta) \ &= u_0 - E_0 r\cos heta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos heta) \end{aligned}$$

再考虑边界条件  $u(r,\theta)\bigg|_{r=a}=0$ ,将形式解代入边界条件,得:

$$u_0-E_0a\cos heta+\sum_{l=0}^\infty B_la^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos heta)=0$$

即:

$$u_0\mathrm{P}_0(\cos heta)-E_0a\mathrm{P}_1(\cos heta)+\sum_{l=0}^\infty B_la^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos heta)=0$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式:

$$\left(u_0 + B_0 a^{-1}
ight) \mathrm{P}_0(\cos heta) + \left(-E_0 a + B_1 a^{-2}
ight) \mathrm{P}_1(\cos heta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos heta) = 0$$

由各阶勒让德多项式的正交性,它们的线性叠加为零,当接近当所有线性叠加系数为零,即:

$$B_0 = -au_0, \ B_1 = a^3 E_0, \ B_2 = B_3 = \dots = 0$$

综上,导体球外电势分布为:

$$egin{align} u(r, heta) &= u_0 - E_0 r \cos heta + \sum_{l=0}^\infty B_l r^{-(l+1)} \mathrm{P}_l(\cos heta) \ &= \overline{\left[u_0 - E_0 r \cos heta - rac{u_0 a}{r} + E_0 a^3 rac{\cos heta}{r^2}
ight]}, \ \ r \geqslant a \ \end{aligned}$$

其中, $u_0$  为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

# 第17章 柱函数

# 贝塞尔函数

在柱坐标系下, 亥姆霍兹方程为:

$$abla^2 u(
ho, arphi, z) + k^2 u(
ho, arphi, z) = 0$$

其中, 拉普拉斯算子在柱坐标系下的表达式为:

$$abla^2 = rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2} + rac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设  $u(\rho, \varphi, z)$  可分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

经过运算,可以得到:

 $\Phi(\varphi)$  满足:

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0, \ \nu \geqslant 0$$

ps: 这里  $\nu \geqslant 0$  是约定好的。

若不限制  $\varphi$  的取值范围,而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$  可得:

$$\nu = m, \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

Z(z) 满足:

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0$$

 $R(\rho)$  满足:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left( \rho \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \right) + \left( k^2 + \lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0$$

令  $x=\sqrt{k^2+\lambda}
ho, (k^2+\lambda \neq 0), R(
ho)=y(x)$ ,则上面方程化为贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

或称为 $\nu$ 阶贝塞尔方程。

## 贝塞尔函数 (第一类贝塞尔函数) 和诺伊曼函数 (第二类贝塞尔函数)

 $\nu$  阶贝塞尔函数,记为  $J_{\nu}(x)$ ,定义为:

$$\mathrm{J}_{
u}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k! \Gamma\left(k+
u+1
ight)} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k+
u}$$

ps: 这里的  $u\geqslant 0$ 

将  $\nu$  替换为  $-\nu$ , 就得到  $-\nu$  阶贝塞尔函数:

$$\mathrm{J}_{-
u}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k!\Gamma\left(k-
u+1
ight)} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k-
u}$$

对  $J_{\nu}(x)$  和  $J_{-\nu}(x)$  进行如下的线性组合就得到诺伊曼函数  $N_{\nu}(x)$ :

$$N_{\nu}(x) = \frac{\cos(\nu \pi) J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu \pi)}$$

可以看到,若  $\nu$  为整数 m,诺伊曼函数是 0/0 型的函数,此时其定义由洛必达法则给出:

$$\begin{split} \mathbf{N}_{m}(x) &\equiv \lim_{\nu \to m} \mathbf{N}_{\nu}(x) \\ &= \lim_{\nu \to m} \frac{\frac{\partial \mathbf{J}_{\nu}(x)}{\partial \nu} \cos(\nu \pi) - \pi \sin(\nu \pi) \mathbf{J}_{\nu}(x) - \frac{\partial \mathbf{J}_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos \nu \pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial \mathbf{J}_{\nu}(x)}{\partial \nu} \bigg|_{\nu=m} - (-1)^{m} \frac{\partial \mathbf{J}_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \bigg|_{\nu=m} \right] \\ &= \text{太复杂了不写了} \end{split}$$

其中  $m = 0, 1, 2, \cdots$ 

 $J_{\nu}(x)$  也称第一类贝塞尔函数, $N_{\nu}(x)$  也称第二类贝塞尔函数。

## 贝塞尔方程的通解

#### 非整数阶贝塞尔方程的通解

(非整数)  $\nu$  阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \nu = 0, \quad \nu = 2$$

的通解为:

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_
u(x)+C_2\mathrm{J}_{-
u}(x)$$

其中, $C_1,C_2$  是非零实数, $J_{\nu}(x)$  和  $J_{-\nu}(x)$  分别是(非整数) $\nu$  阶贝塞尔函数:

$$\mathrm{J}_{-
u}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k!\Gamma\left(k-
u+1
ight)} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k-
u}$$

$$\mathrm{J}_{
u}(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k! \Gamma\left(k+
u+1
ight)} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k+
u}$$

#### 整数阶贝塞尔方程的通解

若不限制  $\varphi$  的取值范围,而采用周期性边界条件  $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ ,可得:

$$\nu=m,\ m=0,1,2,\cdots$$

此时贝塞尔方程是(正整数)m阶贝塞尔方程:

$$rac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + rac{1}{x}rac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - rac{m^2}{x^2}
ight)y = 0, \ \ m = 0, 1, 2, \cdots$$

此时,m 阶贝塞尔方程的通解为:

$$y(x) = C_1 \mathrm{J}_m(x) + C_2 \mathrm{N}_m(x)$$

其中,  $C_1, C_2$  是任意非零常数,  $J_m(x)$  称为 (正整数) m 阶贝塞尔函数, 其定义为:

$$\mathrm{J}_m(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k!\Gamma\left(k+
u+1
ight)} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k+
u} = \sum_{k=0}^{\infty} rac{\left(-1
ight)^k}{k!(m+k)!} \left(rac{x}{2}
ight)^{2k+
u}$$

 $N_m(x)$  是 (正整数) m 阶诺伊曼函数, 其表达式就不写了。

# 整数阶贝塞尔函数的简单性质

$$egin{aligned} \mathrm{J}_m(-x) &= \left(-1
ight)^m \mathrm{J}_m(x) \ &\mathrm{J}_0(0) = 1 \ &\mathrm{J}_m(0) = 0, \ \ m = 1, 2, \cdots \ &\mathrm{N}_{-m}(x) = \left(-1
ight)^m \mathrm{N}_m(x) \end{aligned}$$

# 贝塞尔函数的递推关系

$$egin{aligned} \mathrm{J}_{
u-1}(x) + \mathrm{J}_{
u+1}(x) &= rac{2
u}{x} \mathrm{J}_{
u}(x) \ \mathrm{J}_{
u-1}(x) - \mathrm{J}_{
u+1}(x) &= 2\mathrm{J}_{
u}'(x) \ \mathrm{N}_{
u-1}(x) + \mathrm{N}_{
u+1}(x) &= rac{2
u}{x} \mathrm{N}_{
u}(x) \ \mathrm{N}_{
u-1}(x) - \mathrm{N}_{
u+1}(x) &= 2\mathrm{N}_{
u}'(x) \ \mathrm{J}_{0}'(x) &= -\mathrm{J}_{1}(x) \end{aligned}$$

# 柱函数

若函数  $y_{\nu}(x)$  满足:

$$egin{cases} y_{
u-1}(x) + y_{
u+1}(x) = rac{2
u}{x} y_
u(x) \ y_{
u-1}(x) - y_{
u+1}(x) = 2y_
u'(x) \end{cases}$$

或满足与上两式等价的关系:

$$egin{cases} rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^
u y_
u(x)
ight] = x^
u y_{
u-1}(x) \ rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-
u} y_{
u+1}(x)
ight] = x^{-
u} y_{
u+1}(x) \end{cases}$$

则这类函数统称为柱函数。

• 柱函数必定满足贝塞尔方程。

# 例题

### 例1

求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标,设  $u(\rho,\varphi,t)$  是 t 时刻  $\rho,\varphi$  处质点偏离平衡位置的位移,则  $u(\rho,\varphi,t)$  满足二维波动方程:

$$u_{tt}(
ho,arphi,t)-a^2
abla_{(2)}^2u(
ho,arphi,t)=0$$

其中, $\nabla^2_{(2)}$  是二维拉普拉斯算子:

$$abla_{(2)}^2 \equiv rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2}$$

设  $u(\rho, \varphi, t)$  可分离变量为:

$$u(\rho, \varphi, t) = U(\rho, \varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得:

$$U(
ho,arphi)T''(t)-a^2T(t)\left[rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight)+rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2}
ight]U(
ho,arphi)=0$$

上式两边同时除以 U(
ho, arphi)T(t), 再移项, 得:

$$rac{T''(t)}{T(t)} = rac{a^2}{U(
ho,arphi)} \left[rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial}{\partial
ho}
ight) + rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2}{\partialarphi^2}
ight] U(
ho,arphi)$$

注意到, $\frac{T''(t)}{T(t)}$  只与 t 有关,而  $\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$  只与  $\rho,\varphi$  有关,二者相等,因此二者均等于同一党数  $-\omega^2$ :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad \frac{a^2}{U(\rho,\varphi)} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] U(\rho,\varphi) = -\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式,因此只需要关注空间部分 U(
ho, arphi) 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分  $U(\rho,\varphi)$  满足的方程等号两边同乘  $\dfrac{U(\rho,\varphi)}{a^2}$  并移项,得:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{\omega^2}{a^2}U(\rho,\varphi) = 0$$

令:

$$k\equiv rac{\omega}{a},~~k^2=rac{\omega^2}{a^2}$$

则  $U(\rho,\varphi)$  满足的方程为:

$$rac{1}{
ho}rac{\partial}{\partial
ho}\left(
horac{\partial U(
ho,arphi)}{\partial
ho}
ight)+rac{1}{
ho^2}rac{\partial^2 U(
ho,arphi)}{\partialarphi^2}+k^2U(
ho,arphi)=0$$

由于圆形膜边界固定,因此得到一个边界条件:

$$U(
ho,arphi)igg|_{
ho=b}=0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限,因此得到一个自然边界条件:

$$|U(
ho,arphi)| igg|_{
ho=0} < +\infty$$

再结合  $\varphi$  作为角度这一物理量应使得  $U(\rho,\varphi)$  满足周期性边界条件:

$$U(
ho,arphi+2\pi)=U(
ho,arphi)$$

综上,空间部分  $U(\rho,\varphi)$  要满足的所有条件为:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(\rho, \varphi) = 0 \\ \left. \left| U(\rho, \varphi) \right|_{\rho = b} = 0 \right. \\ \left. \left| U(\rho, \varphi) \right|_{\rho = 0} \right| < + \infty \\ \left. \left| U(\rho, \varphi) \right|_{\rho = 0} = U(\rho, \varphi) \end{cases}$$

设  $U(\rho,\varphi)$  可分离变量为:

$$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分  $U(\rho,\varphi)$  要满足的方程,得:

$$rac{\Phi(arphi)}{
ho}rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}
ho}\left(
horac{\mathrm{d}R(
ho)}{\mathrm{d}
ho}
ight)+rac{R(
ho)}{
ho^2}rac{\mathrm{d}^2\Phi(arphi)}{\mathrm{d}arphi^2}+k^2R(
ho)\Phi(arphi)=0$$

上式等号两边同乘  $\dfrac{
ho^2}{R(
ho)\Phi(arphi)}$  , 整理得:

$$rac{1}{\Phi(arphi)}rac{\mathrm{d}^2\Phi(arphi)}{\mathrm{d}arphi^2} = -\left[rac{
ho}{R(
ho)}rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}
ho}\left(
horac{\mathrm{d}R(
ho)}{\mathrm{d}
ho}
ight) + k^2
ho^2
ight]$$

上式等号左边只与  $\varphi$  有关,等号右边只与  $\rho$  有关,因此二者均等于一个常数  $-m^2$ :

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2$$

因此,角度部分满足方程:

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

周期性边界条件:

$$U(\rho, \varphi + 2\pi) = U(\rho, \varphi) \Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \Longrightarrow \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0$$

可以解得:

$$\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

可得:

$$m=0,1,2,\cdots$$

径向部分  $R(\rho)$  满足:

$$-\left[rac{
ho}{R(
ho)}rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}
ho}\left(
horac{\mathrm{d}R(
ho)}{\mathrm{d}
ho}
ight)+k^2
ho^2
ight]=-m^2$$

可以整理成:

$$rac{1}{
ho}rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}
ho}\left(
horac{\mathrm{d}R(
ho)}{\mathrm{d}
ho}
ight)+\left(k^2-rac{m^2}{
ho^2}
ight)R(
ho)=0$$

令  $x=k
ho,
ho=x/k,R(
ho)igg|_{
ho=x/k}=R(x/k)\equiv y(x)$ ,则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$\begin{split} U(\rho,\varphi)\bigg|_{\rho=b} &= 0 \Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi)\bigg|_{\rho=b} = 0 \Longrightarrow R(\rho)\bigg|_{\rho=b} = 0 \\ |U(\rho,\varphi)|\bigg|_{\rho=0} &< +\infty \Longrightarrow |R(\rho)\Phi(\varphi)|\bigg|_{\rho=0} < +\infty \Longrightarrow |R(\rho)|\bigg|_{\rho=0} < +\infty \\ &\left\{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0 \\ y(x) &\equiv R(\rho)\bigg|_{\rho=x/k} = R(x/k), \ R(\rho) = y(x)\bigg|_{x=k\rho} = y(k\rho) \\ R(\rho)\bigg|_{\rho=b} &= 0 \\ |R(\rho)|\bigg|_{\rho=b} &< +\infty \end{split}$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0$$

其通解为:

$$y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x) + D_m \mathrm{N}_m(x)$$

考虑自然边界条件 |R(
ho)|  $= < +\infty$ ,可得:

$$D_m = 0$$

因此:

$$y^{(m)}(x) = C_m \mathrm{J}_m(x)$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$\left. y^{(m)}(x) 
ight|_{x=k
ho} = C_m \mathrm{J}_m(x) 
ight|_{x=k
ho}$$

结合  $x=k
ho, R(
ho)=y(x)igg|_{x=k
ho}=y(k
ho)$  可得:

$$R^{(m)}(
ho) = C_m \mathrm{J}_m(k
ho)$$

设 m 阶贝塞尔函数  $\mathrm{J}_m(x)$  的第 n 个正零点为  $x_n^{(m)}$ ,即:

$${
m J}_m\left(x_n^{(m)}
ight)=0, \ \ m=0,1,2,\cdots; \ \ n=,1,2,\cdots$$

结合边界条件  $R(
ho)igg|_{
ho=b}=0$ ,即:

$$C_{m}\mathbf{J}_{m}\left(kb\right)=0$$

因此 k 允许的取值  $k_n^{(m)}$  为:

$$k_n^{(m)} = rac{x_n^{(m)}}{h}, \;\; m = 0, 1, 2, \cdots; \;\; n = 1, 2, \cdots$$

再根据  $k \equiv \omega/a$ ,得到  $\omega$  允许的取值,即圆形膜的本征频率  $\omega_n^{(m)}$  为:

$$\omega_n^{(m)} = a k_n^{(m)} = rac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a, \;\; m = 0, 1, 2, \cdots; \;\; n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征振动模式  $R_n^{(m)}(\rho)$  为:

$$R_n^{(m)}(
ho)=\mathrm{J}_m\left(k_n^{(m)}
ho
ight)=\mathrm{J}_m\left(rac{x_n^{(m)}}{b}
ho
ight),\;\;m=0,1,2,\cdots;\;\;n=1,2,\cdots$$

综上所述,边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率  $\omega_n^{(m)}$  及本征振动模式  $R_n^{(m)}(\rho)$  为:

$$\boxed{\omega_n^{(m)} = rac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a}, \;\; m = 0, 1, 2, \cdots; \;\; n = 1, 2, \cdots$$

$$oxed{R_n^{(m)}(
ho)=\mathrm{J}_m\left(rac{x_n^{(m)}}{b}
ho
ight)}, \ \ m=0,1,2,\cdots; \ \ n=1,2,\cdots$$

其中,  $x_n^{(m)}$  是 m 阶贝塞尔函数  $J_m(x)$  的第 n 个正零点。

第18章 格林函数法

第19章 其他方程求解

第20章 非线性数学物理方程初步

第21章 泛函的变分

第22章 变分原理