> 完整版笔记在 https://github.com/BeiHai0/Surviving-LZU-Physics

# 1.2 群的重排定理

设 $G=\{g_\alpha\}$ 为群，$f$ 为 $G$ 中一个确定的元素。当 $\alpha$ 取遍所有可能的取值时，$fg_\alpha$ 给出且仅仅一次给出 $G$ 的所有元素。

$$G=\{g_\alpha\}=\{fg_\alpha\}$$

> 证明思路：先证明 $\{fg_\alpha\}$ 确实是一个集合（无重复元素），再证明 $\{fg_\alpha\}\subseteq G$，最后证明 $G\subseteq\{fg_\alpha\}$。

**证明**:

假设 $fg_\alpha$ 有重复元素，即 $\exists\alpha\neq\alpha', g_\alpha\neq g_{\alpha'}$，使得 $fg_\alpha=fg_{\alpha'}$，两边左乘 $f^{-1}$ 得 $g_\alpha=g_{\alpha'}$，这与假设矛盾。故 $\{fg_\alpha\}$ 是一个集合。

$\forall fg_\alpha\in\{fg_\alpha\}$，由于 $f,g_\alpha\in G$，再结合群的封闭性可知 $fg_\alpha\in G$，于是 $\{fg_\alpha\}\subseteq G$

$\forall g_\beta\in G$，由于 $f\in G$，于是 $\exists f^{-1}\in G$，群的封闭性给出 $f^{-1}g_\beta=g_\alpha\in G$，两边左乘 $f$ 得 $g_\beta=fg_\alpha\in\{fg_\alpha\}$，于是 $G\in\{fg_\alpha\}$

- 群乘法表中的每行、每列都是 $G$ 的元素的重新排列。
- 乘法表每个元素在每行每列中只出现依次。
- 乘法表的任意两行、两列都不会相同。

# 1.3 子群和陪集

## 子群的定义

若群 $G$ 的非空子集 $H$ 也构成一个群（相同的乘法），则 $H$ 称为群 $G$ 的一个子群。

子集 $H$ 为群 $G$ 的子群的条件为:

（1）封闭性：$\forall h_\alpha,h_\beta\in H, h_\alpha h_\beta\in H$

（2）存在逆元：$\forall h_\alpha\in H,\exists h_\alpha^{-1}\in H$，使得 $h_\alpha h_\alpha^{-1}=h_\alpha^{-1}h_\alpha=e$

每一个非平庸群 $G$ 最少有两个子群，一个是 $\{e\}$，另一个是它自身，这两个子群称为群 $G$ 的平庸子群。除此之外的子群称为固有子群。

## 一些关于子群的结论

（1）子群 $H$ 的恒元就是群 $G$ 的恒元。

（2）$HH = H$

## 子群的陪集

设 $H$ 为群 $G$ 的一个子群，$f \in G, f \notin H$，则 $fH = \{fh_\alpha\}$ 称为子群 $H$ 关于 $f$ 的左陪集；$Hf = \{h_\alpha f\}$ 称为子群 $H$ 关于 $f$ 的右陪集。

若 $H$ 为有限群，则 $n_{fH} = n_{Hf} = n_H$

- 由于 $e \notin fH$，于是陪集不是群。

**证明**：假设 $e \in fH$，则 $\exists h_\alpha \in H$，使得 $e = fh_\alpha$。又 $H$ 是群 $G$ 的子群，于是子群 $H$ 存在逆元 $h_\alpha^{-1} \in H$，两边右乘 $h_\alpha^{-1}$ 得到 $h_\alpha^{-1} = f \in H$，这与陪集定义中 $f \notin H$ 矛盾，于是 $e \notin fH$

由于左陪集 $fH$ 和右陪集 $Hf$ 总有一个共同元素 $fe = ef = f$，于是同一个子群关于同一个元素的左右陪集总是有交集的。

- 子群 $H$ 关于 $f \notin H, f \in G$ 的左陪集 $fH$ 与子群 $H$ 没有公共元素。

**证明**：

若子群 $H$ 关于 $f \in G, f \notin H$ 的左陪集 $fH$ 和 $H$ 有公共元素，即存在 $h_\alpha, h_\beta \in H$ 使得 $fh_\alpha = h_\beta$，右乘 $h_\alpha^{-1}$ 得 $f = h_\beta h_\alpha^{-1} \in H$，这与 $f \notin H$ 矛盾。

## 陪集定理

子群 $H$ 的两个左陪集（右陪集）要么完全重合，要么没有公共元素。

**证明**：

设 $H$ 是群 $G$ 的子群，设 $f_1, f_2 \in G, f_1, f_2 \notin H$，设 $f_1H$ 和 $f_2H$ 有一个共同元素，即 $\exists h_\alpha, h_\beta \in H$，使得：

$$f_1 h_\alpha = f_2 h_\beta$$

两边先左乘 $f_2^{-1}$ 再右乘 $h_\alpha^{-1}$ 得：

$$f_2^{-1} f_1 = h_\beta h_\alpha^{-1}$$

于是：

$$f_2^{-1}f_1H = h_\beta h_\alpha^{-1}H$$

子群的封闭性给出 $h_\beta h_\alpha^{-1} \in H$，于是群的重排定理给出：

$$h_\beta h_\alpha^{-1}H = H$$

对比得：

$$f_2^{-1}f_1H = H$$

两边左乘 $f_2$ 得：

$$f_1H = f_2H$$

这就是说，只要 $f_1H$ 和 $f_2H$ 有一个公共元素，则它们相等。

对于 $\mathrm{D}_3$ 群，其子群 $H_1 = \{e, d, f\}$ 有三个相同的左陪集：

$$aH_1 = \{a, b, c\},\ \ bH_1 = \{b, c, a\},\ \ cH_1 = \{c, a, b\}$$

子群 $H_2 = \{e, a\}$ 的左右陪集为：

$$dH_2 = \{d, c\},\ \ H_2d = \{d, b\}$$

$$fH_2 = \{f, b\},\ \ H_2f = \{f, c\}$$

# 拉格朗日定理

有限群的子群的阶等于群阶的因子。

**证明**：

设群 $G$ 是 $n_G$ 阶有限群，$H$ 为 $G$ 的 $n_H$ 阶子群。取 $f_1 \in G$ 且 $f_1 \notin H$，则 $f_1H$ 为子群 $H$ 的一个左陪集，且 $f_1H$ 与 $H$ 无重复元素，$n_H = n_{f_1H}$

若 $H$ 和 $f_1H$ 没有穷尽 $G$，取 $f_2 \in G, f_2 \notin H, f_2 \notin f_1H$，构造左陪集 $f_2H$。由于 $f_2 \notin f_1H$，$f_2 \in f_2H$，则由陪集定理可知 $f_1H$ 和 $f_2H$ 没有公共元素。同样，由于 $f_2 \notin H$，于是 $f_2H$ 与 $H$ 没有公共元素。

重复上述方法，直到穷尽群 $G$ 的所有元素。

最终得到包括 $H$ 在内的集合串：

$$H, f_1H, f_2H, \cdots, f_{k-1}H$$

每一个集合都有 $n_H$ 个元素，且集合串中任意两个集合没有重复元素，且集合串中的元素穷尽了 $G$，于是：

$$n_H k = n_G,\ \ k \in \mathbb{N}^+$$

### 拉格朗日定理的推论

- 阶为素数的群 $G$ 没有非平庸子群，这种群只能是循环群。
- 循环群可能有非平庸子群。如 $\mathrm{C}_4$ 群有子群 $\mathrm{C}_2$

若 $n_G$ 是非素数，则 $n_G$ 可以分解为：

$$n_G = n_1 \times n_2 = \cdots$$

设 $\forall g \neq e, g^m = e, m > 1$，由于群 $G$ 为有限群，则

$$H_g = \{g, g^2, \cdots, g^m = e\}$$

构成 $G$ 的一个 $m$ 阶子群，拉格朗日定理给出 $m$ 是 $n_G$ 的因子。

若 $m = n_i < n_G$，则 $H_g$ 为 $G$ 的一个非平庸循环子群。

若 $m = n_G$，则 $G$ 为非素数阶的循环群，它必有非平庸子群。

## 经典群

### $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 群和 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 群

General Linear Transformation，一般线性变换群。

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \equiv \{A | A\text{为}n \times n\text{的复矩阵}, \det(A) \neq 0\}$$

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \equiv \{A | A\text{为}n \times n\text{的实矩阵}, \det(A) \neq 0\}$$

乘积定义为矩阵乘法。

### $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 群和 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ 群

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \equiv \{A | A\text{为}n \times n\text{的复矩阵}, \det(A) = 1\}$$

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \equiv \{A | A\text{为}n \times n\text{的实矩阵}, \det(A) = 1\}$$

乘积定义为矩阵乘法。

### 幺正群和正交群

幺正群：

$$\mathrm{U}(n) \equiv \{A|A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}), A^{\dagger}A = AA^{\dagger} = I\}$$

特殊幺正群：

$$\mathrm{SU}(n) \equiv \{A|A \in \mathrm{U}(n), \det(A) = 1\}$$

正交群：

$$\mathrm{O}(n) \equiv \{A|A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I\}$$

特殊正交群：

$$\mathrm{SO}(n) = \{A|A \in \mathrm{O}(n), \det(A) = 1\}$$

以上几种经典群之间的关系可以用下图来说明：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SU}(n) & \subset & \left\{\begin{matrix} \mathrm{U}(n) \\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \end{matrix}\right\} & \subset & \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup \\ \mathrm{SO}(n) & \subset & \left\{\begin{matrix} \mathrm{O}(n) \\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \end{matrix}\right\} & \subset & \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \end{array}$$

## 1.4 共轭元素和类

### 共轭元素的定义

设 $g_\alpha, g_\beta \in G$，若 $\exists f \in G$ 使得

$$g_\alpha = f g_\beta g^{-1}$$

则称 $g_\alpha$ 和 $g_\beta$ 互为共轭元素，记为：

$$g_\alpha \sim g_\beta$$

### 共轭元素的性质

传染性：若 $g_\alpha \sim g_\gamma, g_\beta \sim g_\gamma$，则 $g_\alpha \sim g_\beta$

传递性：若 $g_\alpha \sim g_\beta, g_\beta \sim g_\gamma$，则 $g_\alpha \sim g_\gamma$

## 类的定义

$\forall a \in G$，$G$ 中所有与 $a$ 共轭的元素组成的集合 $C_a$ 称为 $a$ 的类：

$$C_a \equiv \{g_\alpha a g_\alpha^{-1} | g_\alpha \in G\}$$

由共轭的传染性可知，$C_a$ 中的元素互相共轭。

对于 $\mathrm{D}_3$ 群，它的类有：

$$\{e\},\ \{a, b, c\},\ \{d, f\}$$

## 类的性质

- 对于任何群，恒元自成一类。（与恒元共轭的元素只有其自身）
- Abel 群的每个元素自成一类。（Abel 群的元素乘积可交换）特别地，$n$ 阶循环群是 Abel 群，$n$ 阶循环群的每一个元素自成一类，共 $n$ 个类。
- $g_\alpha g_\beta \sim g_\beta g_\alpha$，即 $g_\alpha g_\beta$ 与 $g_\beta g_\alpha$ 在同一类中。

$$g_\alpha g_\beta = g_\alpha g_\beta e = g_\alpha (g_\beta g_\alpha) g_\alpha^{-1} \Longrightarrow g_\alpha g_\beta \sim g_\beta g_\alpha$$

- 同类元素的阶必然相同。

若 $a^m = e$，则

$$\left(g_\alpha a g_\alpha^{-1}\right)^m = g_\alpha a^m g_\alpha^{-1} = g_\alpha e g_\alpha^{-1} = e$$

- 两个不同的类没有公共元素。
- 有限群的类的元素个数为群阶的因子。