光在各向同性介质中的传播规律

麦克斯韦方程组

微分形式

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{cases}
$$

积分形式

$$
\begin{cases}
\displaystyle\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\displaystyle\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q \\
\displaystyle\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\displaystyle\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I + \oiint_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{cases}
$$

光的电磁性质

（1）光扰动是一种电磁扰动。光扰动随时间变化和在空间的分布遵从麦克斯韦方程组：

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{cases}
$$

其中，$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$；$\vec{P}$ 是电位移矢量，$\vec{M}$ 是磁化强度，ρ 是自由电荷体密度，$\vec{j}$ 是传导电流

若光在各向同性线性非铁磁介质中传播，则有：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_{\mathrm{M}} \vec{H}$$

（2）光波是一种电磁波

由矢量分析可得，光在各向同性线性非铁磁介质中传播时，$\vec{E}, \vec{H}$ 满足波动方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

其中，ε 是介质的电容率（或介电常数），μ 是介质的磁导率

从中可知，光在介质中的传播速度 v 为：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$$

其中，$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0$，$\varepsilon_r$ 是相对电容率（或相对介电常数），μ_r 是相对磁导率。

特别地，在真空中，$\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$，于是得到真空中的光速 c:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

在后面我们会定义某种介质的折射率 n:

$$n \equiv \frac{c}{v}$$

可得:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

（3）平面电磁波是自由空间电磁波的一基元成分

可以验证，平面电磁波函数:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_E)$$
$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_H)$$

满足波动方程。其中，$\vec{k}$ 称为波矢，其方向与波的传播方向一致，也与平面等相面正交，其大小 k 与波长（或称为空间周期）的关系为:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

（4）光是横波

$$\vec{E} \perp \vec{k}, \ \ \vec{H} \perp \vec{k}$$

（5）电场与磁场之间具有正交性和同步性

振荡着的电场与磁场，彼此在方向上是时时正交的，$\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ 三者方向构成一个右手螺旋，即:

$$(\vec{E} \times \vec{H}) \parallel \vec{k}$$

（6）电磁波能流密度——坡印廷矢量

电磁波能流密度矢量:

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$$

称为坡印廷矢量

光强

对于光波，平均能流密度为:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E} \times \vec{H}| \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E_0^2 \end{aligned}$$

在光频段，$\mu_r \approx 1$，于是 $n \equiv \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$，于是:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E_0^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_0^2 \\ &\propto n E_0^2 \end{aligned}$$

光强，记为 I，定义为:

$$I \equiv n E_0^2$$

可见，光强度量的是平均电磁能流密度，但和平均电磁能流密度差一个系数

定态波场

（1）空间各点的扰动是同频率的振动

（2）波场中各点扰动的振幅不随时间变化

定态光波的标量表示

$\vec{E}$ 在直角坐标系下的三个分量遵从同一形式的波动方程，这就允许我们用标量 U 来代表 E_x, E_y, E_z 中的任意一个量，它们都遵从如下的波动方程：

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

U 可以理解为 E_x, E_y, E_z 中的任意一个

对于某一确定场点 $\vec{r}$ 上的定态光扰动 $E_i(\vec{r}, t), (i = x, y, z)$，其是关于时间的周期函数，在满足狄利克雷条件的情况下，此光扰动可以展开为余弦傅里叶级数，于是我们可以选取余弦函数作为定态光波的基元，定态光波可由无数不同频率的余弦波线性组合而成。这种选定的基元成分的一般形式为：

$$U(P, t) = A(P)\cos(\omega t + \varphi(P))$$

其中，$A(P)$ 是振幅，$\varphi(P)$ 是初相位

波函数的复数表示

简谐波函数的实数形式：

$$U(P, t) = A(P)\cos(\omega t + \varphi(P))$$

其中，$\varphi(P)$ 是场点 P 处光扰动的初相位

复数形式：

$$\tilde{U}(P, t) = A(P)e^{-\mathrm{i}(\omega t + \varphi(P))}$$

由欧拉公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，可得二者的关系为：

$$\Re\{\tilde{U}(P, t)\} = U(P, t)$$

其中，$\Re\{\cdot\}$ 表示“取实部”操作

> 比如：
>
> $$\Re\{1 + 2\mathrm{i}\} = 1$$

平面简谐波

$$U(\vec{r}, t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

其中，A 是平面波的振幅；$\vec{r}$ 是坐标原点指向场点的位矢；$\vec{k}$ 是平面波的波矢，其方向与平面波的传播方向同向平行，大小为 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$；φ_0 是坐标原点的初相位，也就是坐标原点在 $t = 0$ 时刻的相位；

$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = Ae^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \varphi_0)}$$

发散球面简谐波

$$U(\vec{r}, t) = \frac{a_1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

其中，r 是点源到场点 $\vec{r}$ 的距离；φ_0 是点源的初相位

$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr - \omega t - \varphi_0)}$$

柱面简谐波

$$U(r, t) = \frac{b_1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{\mathrm{i}(kr - \omega t - \varphi_0)}$$

复振幅

设 $U(P, t) = A(P)\cos(\omega t + \varphi(P))$，其中，$\varphi(P)$ 是 P 点的初相位，则 P 点的复振幅，记为 $\tilde{U}(P)$，定义为：

$$\tilde{U}(P) \equiv A(P)e^{-\mathrm{i}\varphi(P)}$$

复振幅与时间无关，其关注的是光扰动在空间中的分布规律。

平面简谐波复振幅

$$U(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}) &\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})} \\ &= Ae^{-\mathrm{i}(-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_0)} \\ &= Ae^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\varphi_0)}\end{aligned}$$

球面发散简谐波复振幅

$$U(\vec{r},t) = \frac{a_1}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -kr + \varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}) &\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})} \\ &= \frac{a_1}{r}e^{-\mathrm{i}(-kr+\varphi_0)} \\ &= \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\end{aligned}$$

柱面简谐波复振幅

$$U(r,t) = \frac{b_1}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -kr + \varphi_0$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\vec{r}) &\equiv A(\vec{r})e^{-\mathrm{i}\varphi(\vec{r})} \\ &= \frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{-\mathrm{i}(-kr+\varphi_0)} \\ &= \frac{b_1}{\sqrt{r}}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)}\end{aligned}$$

波前函数

观察平面上某点的复振幅称为波前函数。

一般用 $z = \mathrm{const}$ 来表示这个观察平面。由于 z 坐标是个常数，于是波前函数只是观察平面上的两个直角坐标分量 x, y 的函数，用 $\tilde{U}(x,y)$ 来表示（波前函数）。

球面波向平面波的转化

傍轴条件（振幅条件）—— $z^2 \gg \rho^2$

源面 $x_0 - y_0$ 平面上有一点源 (x_0, y_0) 发射球面波，场面 $x - y$ 平面距源面的距离为 z，则场面上 (x,y) 场点的波前函数精确表达是：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y) &\equiv \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)} \\ &= \frac{a_1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}e^{\mathrm{i}(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}-\varphi_0)}\end{aligned}$$

傍轴条件下，波前函数的近似表达是：

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x,y) &\approx \frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}(kz+k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}-\varphi_0)} \\ &= \frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{\mathrm{i}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}\end{aligned}$$

远场条件（相位条件）—— $z\lambda \gg \rho^2$

源面 $x_0 - y_0$ 平面上有一点源 (x_0, y_0) 发射球面波，场面 $x - y$ 平面距源面的距离为 z，则场面上 (x,y) 场点的波前函数精确表达是：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(x,y) &\equiv \frac{a_1}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)} \\
&= \frac{a_1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}e^{\mathrm{i}(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}-\varphi_0)}
\end{aligned}
$$

仅远场条件下，波前函数的近似表达是：

$$
\tilde{U}(x,y) \approx \frac{a_1}{z+\frac{x^2+y^2}{2z}}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}
$$

对于光波，远场条件更加苛刻。若满足了远场条件，则傍轴条件也必定满足。

于是对于光波，波前函数可进一步近似为：

$$
\tilde{U}(x,y) \approx \frac{a_1}{z}e^{\mathrm{i}kz}\cdot e^{-\mathrm{i}\varphi_0}
$$

由此可见，对于光波，在远场条件下，球面波可近似为平面波。

波叠加原理

在通常介质与通常光强条件下，波叠加原理成立，即总扰动等于各分扰动的叠加。

波叠加的两种情况

在波叠加原理成立的情况下，考察交叠区中的光强分布，存在两种情况：

非相干叠加

在观测时间中，总光强是各分光强的直接相加：

$$
I(P) = I_1(P) + I_2(P)
$$

相干叠加

在观测时间中，总光强**不等于**各分光强的直接相加：

$$
I(P) = I_1(P) + I_2(P) + \Delta I(P)
$$

光波叠加的相干条件

（1）光振动方向一致或有方向一致的平行振动分量。

（2）两列波的频率相同。

证明：

设交叠区中场点 P 处的两个扰动的实值表示分别为：

$$
U_1(P,t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1(P))
$$

$$
U_2(P,t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1(P))
$$

总扰动 $U(P,t)$ 遵从波叠加原理：

$$
U(P,t) = U_1(P,t) + U_2(P,t)
$$

在光的矢量理论中，光强正比于平均电磁能流密度。这里我们讨论的是光的标量理论，用标量 U 代表电场 $\vec{E}$ 在直角坐标系下的任一分量。

类比矢量理论，可定义标量理论中的“光强”：

$$
I'(P) \equiv \langle U^2(P,t)\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T U^2(P,t)\mathrm{d}t
$$

其中，T 是观察时间，$\langle\cdot\rangle$ 表示对尖括号内的物理量取观察时间的平均值。

基于此，总扰动的“光强”为：

$$
\begin{aligned}
I(P) &\equiv \langle U^2(P,t)\rangle \\
&= \left\langle \Big(U_1(P,t)+U_2(P,t)\Big)^2 \right\rangle \\
&= \langle U_1^2(P,t)+U_2^2(P,t)+2U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= \langle U_1^2(P)\rangle + \langle U_2^2(P,t)\rangle + 2\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= I_1(P)+I_2(P)+2\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle
\end{aligned}
$$

观察交叉项:

$$
\begin{aligned}
\Delta I(P) &\equiv 2\langle U_1(P,t)U_2(P,t)\rangle \\
&= 2\langle A_1A_2\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\rangle \\
&= A_1A_2\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2]\rangle + A_1A_2\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle
\end{aligned}
$$

注意到，光的频率很大，时间周期很短，因此在相对很长的观察时间 T 内，有:

$$
\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2]\rangle \approx 0
$$

于是进一步有:

$$
\begin{aligned}
\Delta I'(P) &= A_1A_2\langle\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_1+\varphi_2]\rangle + A_1A_2\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle \\
&\approx A_1A_2\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle
\end{aligned}
$$

当 $\omega_1 \neq \omega_2$，且 ω_1 和 ω_2 相差不太小时，同样有:

$$
\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle \approx 0
$$

此时,

$$
\Delta I(P) \approx 0
$$

也就是说，当 $\omega_1 \neq \omega_2$，且 ω_1 和 ω_2 相差不太小时， 交叉项为零，不发生干涉。

当 $\omega_1 = \omega_2$ 时,

$$
\begin{aligned}
\Delta I(P) &\approx A_1A_2\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle \\
&\neq 0,\ (\mathrm{ps}: \varphi_1-\varphi_2 \text{ 的值合适的情况下})
\end{aligned}
$$

此时，干涉项不为零。也就是说，当满足同频条件 $\omega_1 = \omega_2$ 时，才能发生干涉。

（3）场点有稳定的相位差。

双光束干涉强度公式

注意到:

$$
\begin{aligned}
I_1(P) &\equiv \langle U_1(P,t)\rangle \\
&\approx \frac{1}{2}A_1^2
\end{aligned}
$$

$$
I_2(P) \approx \frac{1}{2}A_2^2
$$

上面推导给出，当 $\omega_1 = \omega_2$ 时，有:

$$
\begin{aligned}
\Delta I(P) &\approx A_1A_2\langle\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\rangle \\
&= A_1A_2\langle\cos(\varphi_1-\varphi_2)\rangle \\
&= A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)
\end{aligned}
$$

令:

$$
\delta(P) = \varphi_1-\varphi_2
$$

则得到双光束干涉强度公式:

$$
\begin{aligned}
I(P) &= I_1+I_2+A_1A_2\cos\delta(P) \\
&= I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)
\end{aligned}
$$

或者:

$$I(P)=\frac{1}{2}A_1^2+\frac{1}{2}A_2^2+\sqrt{A_1A_2}\cos\delta(P)$$

由于上式中很多 $\frac{1}{2}$，不好看，而光强又只是一“相对度量手段”，不妨将光强写为：

$$I(P)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta(P)$$

再注意到复振幅：

$$\tilde{U}_1(P)=A_1e^{-\mathrm{i}\varphi_1(P)}$$

$$\tilde{U}_2(P)=A_2e^{-\mathrm{i}\varphi_2(P)}$$

注意到：

$$\begin{aligned}
&[\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)][\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)]^*\\
=&[A_1e^{-\mathrm{i}\varphi_1(P)}+A_2e^{-\mathrm{i}\varphi_2(P)}][A_1e^{\mathrm{i}\varphi_1(P)}+A_2e^{\mathrm{i}\varphi_2(P)}]\\
=&A_1^2+A_2^2+A_1A_2e^{\mathrm{i}(\varphi_2(P)-\varphi_1(P))}+A_1A_2e^{\mathrm{i}(\varphi_1(P)-\varphi_2(P))}\\
=&A_1^2+A_2^2+A_1A_2\cos\left[\varphi_2(P)-\varphi_1(P)\right]+\mathrm{i}\sin\left[\varphi_2(P)-\varphi_1(P)\right]+A_1A_2\cos\left[\varphi_1(P)-\varphi_2(P)\right]+\mathrm{i}\sin\left[\varphi_1(P)-\varphi_2(P)\right]\\
=&A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta(P)
\end{aligned}$$

干涉场的衬比度

$$\gamma\equiv\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$$

$$0\leqslant\gamma\leqslant1$$

衬比度越大，干涉条纹清晰度越好。

当衬比度 $\gamma=0$，即 $I_{\max}=I_{\min}$，此时干涉场中光强处处相等，不出现干涉条纹。

对于双光束干涉，

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)$$

得到：

$$I_{\max}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$$

$$I_{\min}=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\gamma&\equiv\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}\\
&=\frac{4\sqrt{I_1I_2}}{2(I_1+I_2)}\\
&=\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}
\end{aligned}$$

考虑到 $I_1/I_2=(A_1/A_2)^2$

于是双光束干涉的衬比度也可以用振幅比表达：

$$\gamma=\frac{2\frac{A_1}{A_2}}{1+(\frac{A_1}{A_2})^2}$$

利用衬比度表达双光束干涉强度公式

$$\begin{aligned}
I&=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta(P)\\
&=(I_1+I_2)(1+\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}\cos\delta(P))\\
&=(I_1+I_2)(1+\gamma\cos\delta(P))\\
&=I_0(1+\gamma\cos\delta(P)),\quad I_0=I_1+I_2
\end{aligned}$$

两束自然光交叠场中衬比度 γ 与光束夹角 α 的关系

$$\gamma = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

相干叠加的五个条件

（1）光振动方向一致或有方向一致的平行振动分量。

（2）两列波的频率相同。

（3）场点有稳定的相位差。

（4）参与相干叠加的两束光的振幅尽可能接近。

（5）参与相干叠加的两束光的传播方向的夹角不要太大。

双光束干涉强度公式汇总

$$\boxed{I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta(P)}$$

$$\boxed{I(P) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta(P)}$$

$$\boxed{I(P) = (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)^*}$$

$$\boxed{I(P) = I_0(1+\gamma\cos\delta(P))},\quad I_0 = I_1 + I_2$$