一

(1) 质点在约束下可能发生的微小位移 $\delta\vec{r}$ 称为虚位移。质点实际运动产生的位移称为实位移。实位移是众多虚位移之中的一个。

(2) 若拉格朗日量中不显含某个广义坐标，则这个广义坐标称为循环坐标，其对应的广义动量是个守恒量。

(3) 某一时刻，刚体上速度为零的质点称为转动瞬心。

(4)科里奥利力：

$$\vec{F}_c = -2m\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)$$

其中，$\vec{F}_c$ 为科里奥利力，m 为质点质量，$\vec{\omega}$ 为旋转参考系的角速度，$\vec{v}$ 为质点相对于旋转参考系的速度。

例子：傅科摆

(5)

限制在平面上的质点自由度：2

傅科摆自由度：2

水面上作匀速纯滚动的刚体球自由度：3

二

设粒子的静止质量为 m_0，粒子速度 $v = 0.9c$

运动质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(0.9c\right)^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{0.19}} = \frac{10m_0}{\sqrt{19}}$$

总能量：

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{0.19}} = \frac{10m_0c^2}{\sqrt{19}}$$

动能：

$$T = E - m_0c^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{19}} - 1\right)m_0c^2$$

动量：

$$p = mv = \frac{10m_0}{\sqrt{19}} \cdot (0.9c) = \frac{9m_0c}{\sqrt{19}}$$

三

虚功原理：受理想约束的力学体系平衡的充要条件是此力学体系的所有主动力在任何虚位移中所做的元功**之和**等于零，即 $\delta W = \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

三个受主动力的质点分别记为 $1, 2, 3$

选取 α, β 为广义坐标来描述所有质点的位置

$$\begin{gathered}
\vec{r}_1 = \frac{l_1}{2}\sin\alpha\vec{e}_x + \frac{l_1}{2}\cos\alpha\vec{e}_y, \\
\vec{r}_2 = (l_1\sin\alpha + \frac{l_2}{2}\sin\beta)\vec{e}_x + (l_1\cos\alpha + \frac{l_2}{2}\cos\beta)\vec{e}_y, \\
\vec{r}_3 = (l_1\sin\alpha + l_2\sin\beta)\vec{e}_x + (l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta)\vec{e}_y
\end{gathered}$$

主动力：

$$\vec{F}_1^{(A)} = P_1\vec{e}_x, \quad \vec{F}_2^{(A)} = P_2\vec{e}_x, \quad \vec{F}_3^{(A)} = F\vec{e}_y$$

$$\begin{gathered}
\delta\vec{r}_1 = \frac{l_1}{2}\cos\alpha\delta\alpha\vec{e}_x - \frac{l_1}{2}\sin\alpha\delta\alpha\vec{e}_y \\
\delta\vec{r}_2 = (l_1\cos\alpha\delta\alpha + \frac{l_2}{2}\cos\beta\delta\beta)\vec{e}_x + (-l_1\sin\alpha\delta\alpha - \frac{l_2}{2}\sin\beta\delta\beta)\vec{e}_y \\
\delta\vec{r}_3 = (l_1\cos\alpha\delta\alpha + l_2\cos\beta\delta\beta)\vec{e}_x + (-l_1\sin\alpha\delta\alpha - l_2\sin\beta\delta\beta)\vec{e}_y
\end{gathered}$$

虚功原理：

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

即：

$$\delta\alpha\left[\frac{1}{2}l_1P_1\cos\alpha+l_1P_2\cos\alpha-Fl_1\sin\alpha\right]+\delta\beta\left[\frac{1}{2}l_2P_2\cos\beta-Fl_2\sin\beta\right]=0$$

$\delta\alpha,\delta\beta$ 相互独立，上式成立，当且仅当：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}l_1P_1\cos\alpha+l_1P_2\cos\alpha-Fl_1\sin\alpha=0\\ \frac{1}{2}l_2P_2\cos\beta-Fl_2\sin\beta=0\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{P_1+2P_2}{2F}\\ \tan\beta=\dfrac{P_2}{2F}\end{cases}$$

ps：也可以用广义力来写

四

ps：参考答案错了

以质心为原点，过原点垂直上底面为 z 轴建系

密度：

$$\rho=\frac{M}{\pi R^2h}$$

柱坐标 r,θ,z 与直角坐标 x,y,z 关系：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

柱坐标体积元：

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

质量元：

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

积分区域：

$$
\begin{cases}
r \in [0, R] \\
\theta \in [0, 2\pi] \\
z \in [-\dfrac{h}{2}, \dfrac{h}{2}]
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{zz} &= \int (y^2 + x^2) \mathrm{d}m \\
&= \rho \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} r^3 \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} M R^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= I_{yy} \\
&= \int (x^2 + z^2) \mathrm{d}m \\
&= \rho \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} (r^2 \cos^2\theta + z^2) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{12} M (3R^2 + h^2)
\end{aligned}
$$

五

(1)

泊松括号：

$$
\{f, g\} \equiv \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} \right)
$$

物理量对时间的全导数：

$$
\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}
$$

(2)

证明：

$$\{x, L_x\} = 0$$

$$\{x, L_y\} = z$$

$$\{x, L_z\} = -y$$

$$\{p_x, L_x\} = 0$$

$$\{p_x, L_y\} = p_z$$

$$\{p_x, L_z\} = -p_y$$

六

(1)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - kr^{-\beta}$$

$$\lim_{r \to 0^+} V_{\text{eff}}(r) = +\infty$$

$$\lim_{r \to +\infty} V_{\text{eff}}(r) = 0^-$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_m} = 0 \Longrightarrow r_m = \left(\frac{2l^2}{mk\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$$

可以画出 $V_{\text{eff}}(r)$ 的大致图像

质点只能在 $V_{\text{eff}}(r) \leqslant E$ 的区域内运动，而 $E < 0$，于是从图像上可以看出 r 不能趋于无穷大

(2)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - kr^{-\beta} \leqslant E$$

由方程 $\frac{L^2}{2mr^2} - kr^{-\beta} = E$ 可得 $r_{\min}, r_{\max}$

角动量、能量守恒：

$$\begin{cases} L = mr^2\dot{\theta} \\ E = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - kr^{-\beta} \end{cases} \Longrightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - kr^{-\beta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-\frac{L^2}{2mr^2}+kr^{-\beta}\right]}$$

结合角动量表达式 $L=mr^2\dot{\theta}$，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$，代入上式，得:

$$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^2+\frac{2mk}{L^2}r^{2-\beta}-1}}$$

积分得:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\int\mathrm{d}\theta\\&=\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^2+\frac{2mk}{L^2}r^{2-\beta}-1}}\end{aligned}$$

(3)

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{L^2}{2mr^2}-kr^{-\beta}\leqslant E=0^-$$

当 $E=0^-$，可得:

$$\begin{cases}r_{\min}=\left(\dfrac{L^2}{2mk}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}\\r_{\max}=+\infty\end{cases}$$

将 $r_{\min},r_{\max},E=0^-$ 代入 (2) 的积分式，得:

$$\Delta\Phi=\int_{r=\left(\frac{L^2}{2mk}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}^{r=+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{\frac{2mk}{L^2}r^{2-\beta}-1}}\tag{1}$$

令 $u=\sqrt{\frac{2mk}{L^2}r^{2-\beta}-1}$, $\frac{L^2}{2mk}(u^2+1)=r^{2-\beta}$，两边微分:

$$\frac{L^2}{mk}u\mathrm{d}u=(2-\beta)r^{1-\beta}\mathrm{d}r\Longrightarrow r^{1-\beta}\mathrm{d}r=\frac{L^2}{(2-\beta)mk}u\mathrm{d}u$$

两边同时除以 $r^{2-\beta}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{r} &= \frac{L^2}{(2-\beta)mk}u\mathrm{d}u \Big/ r^{2-\beta} \\
&= \frac{L^2}{(2-\beta)mk}u\mathrm{d}u \Big/ \frac{L^2}{2mk}(u^2+1) \\
&= \frac{2}{2-\beta}\frac{u}{u^2+1}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \int_{r=\left(\frac{L^2}{2mk}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}}^{r=+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{\frac{2mk}{L^2}r^{2-\beta}-1}} \\
&= \int_{u=0}^{u=+\infty} \frac{2}{2-\beta}\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{2-\beta}\cdot\arctan u\Big|_{u=0}^{u=+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2-\beta}
\end{aligned} \tag{1}
$$

可见，$\Delta\Phi$ 与角动量无关