第2章 静电场中的导体和电介质

基本概念

导体静电平衡的条件

均匀**导体**的静电平衡条件就是其体内电场强度处处为零。

处于静电平衡的导体的性质

导体是个等势体，导体表面是个等势面

导体以外靠近其表面地方的场强处处与表面垂直

导体内部处处没有未抵消的净电荷（即电荷的体密度$\rho_e=0$），电荷只分布在导体的表面

导体表面之外附近空间的场强 $\vec{E}$ 与该处导体表面的电荷面密度 σ_e 的关系：

$$E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$$

导体壳(腔内无带电体)

导体壳的**内表面上处处没有电荷**，电荷只能分布在**外表面**

空腔内没有电场，或者说，空腔内的电势处处相等

导体壳(腔内有带电体)

当导体壳腔内有其他带电体时，在静电平衡状态下，导体壳的内表面所带电荷与腔内电荷的代数和为 0

孤立导体

附近没有其他导体和带电体的导体

孤立导体的电容

$$C\equiv\frac{q}{U}$$

电容器的电容

$$C_{AB}\equiv\frac{q}{U_{AB}}$$

电容器的串联

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

电容器的并联

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

电容器储能

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

电介质

电介质就是绝缘介质，它们是不导电的

无极分子位移极化

在没有外加电场时，无极分子的等效负电荷与等效正电荷的位置重合，不存在电矩.当加上外电场，等效正电荷与等效负电荷就要错开来，从而形成由等效负电荷指向等效正电荷的电偶极矩，称为**感生电矩**；对于均匀电介质，其内部仍是电中性的，但是在与外电场垂直的两个介质端面上，由于极化电荷不能离开电介质，故会出现极化电荷

有极分子取向极化

每个有极分子都有固有电矩，但宏观上相互抵消，于是电矩的矢量和为零，宏观上不产生电场；当施加一个外加电场，固有电矩会不同程度地转向，于是在介质端面会出现未被抵消地束缚电荷，这种极化机制称为**取向极化**.当然，在取向极化中也会存在一定程度的位移极化，但取向极化占据主导地位.

电极化强度(度量电介质极化状态)：

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{(\Delta V内)} \vec{p}_{分子}}{\Delta V}$$

均匀极化

电介质中各点的电极化强度矢量大小和方向都相同

电极化强度与极化电荷分布的关系

$$\oiint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum_{(S内)} q'$$

极化电荷面密度

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}S} = P\cos\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P_n$$

各向同性线性均匀介质电极化率

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

比例常量 χ_e 叫作极化率。极化率与电介质的种类有关，是介质材料的属性。真空中 $\chi_e = 0$

电位移矢量

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

各向同性线性均匀介质中的电位移矢量

各向同性线性均匀介质中，有：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

比例常量 χ_e 叫作极化率。极化率与电介质的种类有关，是介质材料的属性。真空中 $\chi_e = 0$

于是：

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ &= (1+\chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

相对介电常量，记为 ε，定义为：

$$\varepsilon \equiv 1 + \chi_e$$

则：

$$\begin{aligned} \vec{D} &= (1+\chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} \\ &= \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

有介质时的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)} q_0$$

做题几板斧

其中，q_0 是 S 内的自由电荷.

$$\begin{gathered}\sigma_e'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n\\ \vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}\\ \varepsilon=1+\chi_e\\ \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\\ \oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)} q_0\end{gathered}$$

各向同性线性介质中，三个矢量：$\vec{P},\vec{E},\vec{D}$存在各种转化关系：

$\vec{P},\vec{E}:\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{E},\vec{D}:\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{D},\vec{P}:\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\frac{1}{\chi_e})\vec{P}$

以及系数转化关系：

$\varepsilon=1+\chi_e$

电场的能量和能量密度

匀强电场：

$$W_e=\frac{1}{2}DEV$$

电能密度：

$$w_e=\frac{W_e}{V}$$

匀强电场：

$$w_e=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2$$

真空中，$\varepsilon=1$

进一步，无介质（真空）：

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

对全空间进行积分：

$$W_e=\iiint_V w_e\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}DE\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V$$

在真空中，进一步有：

$$W_e=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V$$

第2章课后习题选解

2.3-4

平行板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中间充满两层厚度为 $d_1,d_2(d_1+d_2=d)$、介电常量为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的电介质层

(1)求电容C

结合：

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

和介质中的高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{S内} q_0$$

取一个圆柱形高斯面，圆柱一端的底面在电容器一个极板内部，圆柱另一端的底面在电介质中，有：

$$D\Delta S=\sigma_{e0}\Delta S$$

于是第一步求出电位移矢量$\vec{D}$：

$$D=\sigma_{e0}=\frac{Q}{S}(假设电容器带电荷Q)$$

再由$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}(\varepsilon是电介质的介电常量)$分别求出电介质1,2中的实际电场(原来电场和退极化场叠加后的结果)：

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}$$
$$E_2=\frac{D}{\varepsilon_2\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}$$

第三步求电极板电势差：

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{Qd_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}+\frac{Qd_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}$$

最后由电容的定义：

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1+\varepsilon_1 d_2}$$

(2)

当金属极板上带电面密度为$\pm\sigma_{e0}$时，求两层介质间分界面上的极化电荷面密度σ_e'

分析：

电介质解题几板斧：

$$\sigma_e'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n$$
$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\varepsilon=1+\chi_e$$
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{S内} q_0$$

要想求 σ_{e0}', 就要求电极化矢量 $\vec{P}$

第一步：

结合(电容器两极板间电场为零，电位移矢量也为零)：

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

和介质中的高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{(S内)} q_0$$

有：

$$D\Delta S=\sigma_{e0}\Delta S$$

即：

$$D=\sigma_{e0}$$

于是：

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}$$
$$E_2=\frac{D}{\varepsilon_2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_2\varepsilon_0}$$

又由于：

$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E}$$

于是：

$$P_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0E_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{(\varepsilon_1-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1}$$
$$P_2=\frac{(\varepsilon_2-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_2}$$

于是两电介质分界面上的电荷面密度(最好规定图上哪个板带正电)：

$$\sigma_e'=P_1-P_2=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sigma_{e0}$$

(3)求电容器两极板间电势差U

$$U=\frac{(\varepsilon_2d_1+\varepsilon_1d_2)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}$$

(4)两层电介质中的电位移D

$$D=\sigma_{e0}$$

电介质解题几板斧：

$$\oiint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{S内}q_0$$
$$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-1)\varepsilon_0\vec{E}$$
$$\sigma_e'=\vec{P}\cdot\vec{e}_n=P_n$$

各向同性线性介质中，三个矢量：$\vec{P},\vec{E},\vec{D}$存在各种转化关系：

$\vec{P},\vec{E}:\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{E},\vec{D}:\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{D},\vec{P}:\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=(1+\frac{1}{\chi_e})\vec{P}$

以及系数转化关系：

$\varepsilon=1+\chi_e$

一道考试题

某球形介质球在匀强电场 E 下被均匀极化，该介质的介电常量为 ε，求球心处的电场强度大小

思路：均匀极化，极化电荷只分布在介质球表面，介质球内部没有极化电荷；球坐标下求解

解：

令 z 轴于原电场 $\vec{E}$ 同向平行，

$$\begin{aligned}P&=\chi_e\varepsilon_0E\\&=(\varepsilon-1)\varepsilon_0E\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_e'&=\vec{P}\cdot\vec{e}_n\\&=P\cos\theta\\&=(\varepsilon-1)\varepsilon_0E\cos\theta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}q' &= \sigma_e \mathrm{d}S \\
&= \sigma_e R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 R^2 E \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E'_z &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q'}{R^2} \cdot \cos\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{4\pi}
\end{aligned}
$$

（其中，正负代表方向）

$$
\begin{aligned}
E'_z &= \oiint_S \mathrm{d}E'_z \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{4\pi} \oiint_S \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{3}
\end{aligned}
$$

实际电场是E, E'的矢量和：

$$
\begin{aligned}
E_{real} &= E' + E \\
&= -\frac{(\varepsilon - 1)E}{3} + E \\
&= \frac{(4 - \varepsilon)E}{3}
\end{aligned}
$$