1

> 推导复变函数可导的柯西-黎曼条件。

设 $f(z)$ 在 z 点可导，则极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在且与 Δz 趋于 0 的方式无关。

设 $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

特别地

（1）令:

$$\mathrm{i}\Delta y=0,\Delta x\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

（2）令:

$$\Delta x=0,\mathrm{i}\Delta y\to 0$$

此时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则这两个导数值应该相等，于是:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

2

> 求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在环形区域 $0<|z|<1$ 和 $|z|>1$ 内，在 $z_0=0$ 处的展开式。

$0<|z|<1$ 区域在 $z_0=0$ 处展开 $f(z)$

由于 $|z|<1$，于是有几何级数：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

于是：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{1-z}-\frac{1}{z} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n
\end{aligned}$$

$|z|>1$ 区域在 $z_0=0$ 处展开 $f(z)$

注意到 $|z|>1$，则 $|1/z|<1$，于是：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - z^{-1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - z^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - z^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}
\end{aligned}
$$

3

> 计算回路积分 $I = \oint\limits_{l^+} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

令 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路 $l:(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$ 内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i}, z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 为二阶极点。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点处的留数：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z_1) &= \frac{1}{0!} \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0} (z-\mathrm{i}) \cdot \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res} f(z_2) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

于是:

$$
\begin{aligned}
I &= \oint\limits_{l}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{Res} f(z_1)+\operatorname{Res} f(z_2)\right] \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

4

> 计算定积分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$，其中 $0<\varepsilon<1$

令:

$$
z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \ z^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \ \mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\Longrightarrow\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\ \ \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)
$$

于是:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

其中，C 是复平面上以原点为圆心的单位圆。

令 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$，被积函数的两个一阶极点为:

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

被积函数 $f(z)$ 可写为:

$$f(z) = \frac{1}{\varepsilon(z-z_1)(z-z_2)}$$

只有 z_1 在积分回路内。

计算 $f(z)$ 在回路内孤立奇点 z_1 处的留数:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to z_1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_1)f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{\varepsilon(z-z_2)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon(z_1-z_2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}$$

由留数定理，有:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_1) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}$$

于是积分为:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}
\end{aligned}$$

5

> 用拉普拉斯变换解下列 RL 串联电路方程，其中 L, R, E 为常数：
>
> $$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

设 $i(t) \fallingdotseq F(p)$

微分定理给出：

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \fallingdotseq p^1F(p) - p^0i^{(0)}(0) = pF(p) - i(0) = pF(p)$$

常用拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p},\ \ \mathrm{Re}\, p > 0,\ \ \text{or}\ \ 1 \fallingdotseq \frac{1}{p}$$

对方程 $L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = +Ri(t) = E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得：

$$LpF(p) + RF(p) = \frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$：

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{E}{Lp^2 + Rp} \\ &= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p + R/L}\right) \end{aligned}$$

常用拉普拉斯变换的反演：

$$\frac{1}{p - \alpha} \risingdotseq \mathrm{e}^{\alpha t}$$

于是：

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1,\ \ \frac{1}{p + R/L} \risingdotseq \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

对方程 $F(p) = \dfrac{E}{R}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p + R/L}\right)$ 两边同时作拉普拉斯逆变换，得：

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

6

> 证明 $\nabla\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$，并据此由 Gauss 公式 $\int\limits_{\Omega}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ 证明 Green 公式 $\int\limits_{\Omega}\psi\nabla^2\varphi+\varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}(\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\varphi\vec{A})&=\partial_i(\varphi\vec{A})_i\\&=\partial_i(\varphi A_i)\\&=A_i\partial_i\varphi+\varphi\partial_iA_i\\&=A_i(\nabla\varphi)_i+\varphi\partial_iA_i\\&=\vec{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

高斯公式给出：

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

令 $\vec{A}=\nabla(\psi\varphi)$，代入高斯公式得：

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\cdot\nabla(\psi\varphi)\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}\nabla(\psi\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

即：

$$\int\limits_{\Omega}\psi\nabla^2\varphi+\varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V=\int\limits_{\partial\Omega}(\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

7

> 求定解问题：

> $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x\Big|_{x=0} = 0 \\ u_x\Big|_{x=l} = 0 \\ u\Big|_{t=0} = \cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right) + 0.3\cos\left(\dfrac{3\pi x}{l}\right) \\ u_t\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设:

$$u(x,t) = U(x)T(t)$$

代入一维波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 可得:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{U''(x)}{U(x)} = -\omega^2$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \Longrightarrow T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$T'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$$

$$u_t\Big|_{t=0} = 0 \Longrightarrow T'(t)\Big|_{t=0} = 0 \Longrightarrow B = 0$$

因此:

$$T(t) = A\cos\omega t$$

令:

$$k \equiv \frac{\omega}{a},\ \ k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$U''(x) + k^2 U(x) = 0 \Longrightarrow U(x) = C\cos kx + D\sin kx$$

$$U'(x) = -kC\sin kx + kD\cos kx$$

$$u_x\Big|_{x=0} = 0 \Longrightarrow U'(x)\Big|_{x=0} = 0 \Longrightarrow D = 0$$

因此:

$$U(x)=C\cos kx,\ \ U'(x)=-kC\sin kx$$

$$u_x\bigg|_{x=l}=0\Longrightarrow U'(x)\bigg|_{x=l}=0\Longrightarrow -kC\sin kl=0$$

因此，k 的本征值 k_n 为:

$$k_n=\frac{n\pi}{l},\ \ n=,1,2,\cdots$$

> $n=0$ 是平庸解，不考虑。

相应的本征函数 $U_n(x)$ 为:

$$U_n(x)=\cos k_nx=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \ n=1,2,\cdots$$

由 $k\equiv\omega/a$，得 ω 的本征值 ω_n 为:

$$\omega_n=ak_n=\frac{n\pi a}{l},\ \ n=1,2,\cdots$$

相应的本征函数 $T_n(x)$ 为:

$$T_n(t)=\cos\omega_nt=\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

本征解 $u_n(x,t)$ 为:

$$u_n(x,t)=U_n(t)T_n(t)=\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right),\ \ n=,1,2,\cdots$$

定解问题的通解 $u(x,t)$ 为:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_nu_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

最后结合初始条件

$$u\bigg|_{t=0}=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)+0.3\cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$$

得到:

$$E_1=1,E_2=0,E_3=0.3,E_4=E_5=\cdots=0$$

最终得到定解问题的解为:

$$u(x,t)=\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)+0.3\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{3\pi a}{l}t\right)$$

8

> 在均匀电场 $\vec{E}_0$ 中放一半径为 a 的接地导体球，求球外电势、电场、导体球表面面电荷密度分布。

以球心 O 为坐标原点，选取 $\vec{E}_0$ 方向为 z 轴正方向，则电势 u 关于 z 轴轴对称。

球外无自由电荷，于是球外电势分布 $u(\vec{r})$ 满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 u(\vec{r})=0,\ \ r>a$$

特别地，这里电势 u 关于 z 轴对称，u 与 φ 无关，拉普拉斯方程可简化为：

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0,\ \ r>a$$

导体球接地，得到一个边界条件：

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0$$

由电势的叠加原理，实际电势 $u(r,\theta)$ 是导体球面上的感应电荷产生的电势和匀强电场 $\vec{E}_0$ 导致的电势的代数和。把感应电荷在无穷远处产生的电势设为零，则当 $r\to+\infty$，电势只由匀强电场贡献。设匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势为 u_0，则：

$$u_0-u(r,\theta)=E_0 r\cos\theta,\ \ r\to+\infty$$

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2 u(r,\theta)=0\\ u(r,\theta)\Big|_{r=a}=0\\ u(r,\theta)=u_0-E_0 r\cos\theta,\ \ r\to+\infty\end{cases}$$

套用结论，轴对称问题的拉普拉斯方程在自然边界条件约束下的形式解为：

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r\to+\infty}=u_0-E_0 r\cos\theta$，当 $r\to+\infty$，有 $r^{-(l+1)}\to0$，于是：

$$
\begin{aligned}
u_0 - E_0 r\cos\theta &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= A_0 + A_1 r\cos\theta + \cdots
\end{aligned}
$$

左右两边都看作关于 r 的多项式，对比系数得：

$$
A_0 = u_0,\ \ A_1 = -E_0,\ \ A_2 = A_3 = \cdots = 0
$$

于是形式解可写为：

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)
\end{aligned}
$$

再考虑边界条件 $u(r,\theta)\Big|_{r=a} = 0$，将形式解代入边界条件，得：

$$
u_0 - E_0 a\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0
$$

即：

$$
u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta) - E_0 a\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0
$$

整理成各阶勒让德多项式的线性叠加的形式：

$$
\left(u_0 + B_0 a^{-1}\right)\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \left(-E_0 a + B_1 a^{-2}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l a^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = 0
$$

由各阶勒让德多项式的正交性，它们的线性叠加为零，当且仅当所有线性叠加系数为零，即：

$$
B_0 = -a u_0,\ \ B_1 = a^3 E_0,\ \ B_2 = B_3 = \cdots = 0
$$

综上，导体球外电势分布为：

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= u_0 - E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\
&= u_0 - E_0 r\cos\theta - \frac{u_0 a}{r} + E_0 a^3\frac{\cos\theta}{r^2},\ \ r \geqslant a
\end{aligned}
$$

其中，u_0 为匀强电场单独存在时在坐标原点产生的电势。

取 $u_0 = 0$，则导体球外电势分布为：

$$\boxed{u(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + E_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}},\quad r \geqslant a$$

球外电场与电势的关系为：

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla u(\vec{r}) \\ &= -\left[\frac{\partial u}{\partial r}\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{\mathrm{e}}_\varphi\right] \\ &= E_0\cos\theta\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)\vec{\mathrm{e}}_r + E_0\sin\theta\left(\frac{a^3}{r^3}-1\right)\vec{\mathrm{e}}_\theta,\quad r \geqslant a\end{aligned}$$

导体表面电场为：

$$\vec{E}(\vec{r})\Big|_{r=a} = 3E_0\cos\theta\vec{\mathrm{e}}_r$$

利用高斯定理，导体球表面面电荷密度分布为：

$$\sigma(\vec{r})\Big|_{r=a} = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})\Big|_{r=a}\cdot\vec{\mathrm{e}}_r = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

9

> 求边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率及本征振动模式。

以圆形膜的圆心为原点建立极坐标，设 $u(\rho,\varphi,t)$ 是 t 时刻 ρ,φ 处质点偏离平衡位置的位移，则 $u(\rho,\varphi,t)$ 满足二维波动方程：

$$u_{tt}(\rho,\varphi,t) - a^2\nabla^2_{(2)}u(\rho,\varphi,t) = 0$$

其中，$\nabla^2_{(2)}$ 是二维拉普拉斯算子：

$$\nabla^2_{(2)} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

设 $u(\rho,\varphi,t)$ 可分离变量为：

$$u(\rho,\varphi,t) = U(\rho,\varphi)T(t)$$

代入二维波动方程可得：

$$U(\rho,\varphi)T''(t)-a^2T(t)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=0$$

上式两边同时除以 $U(\rho,\varphi)T(t)$，再移项，得：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$$

注意到，$\frac{T''(t)}{T(t)}$ 只与 t 有关，而 $\frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)$ 只与 ρ,φ 有关，二者相等，因此二者均等于同一常数 $-\omega^2$：

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-\omega^2,\quad \frac{a^2}{U(\rho,\varphi)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]U(\rho,\varphi)=-\omega^2$$

由于要求本征振动频率和本征振动模式，因此只需要关注空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程和边界条件。

对上式空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程等号两边同乘 $\frac{U(\rho,\varphi)}{a^2}$ 并移项，得：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\frac{\omega^2}{a^2}U(\rho,\varphi)=0$$

令：

$$k\equiv\frac{\omega}{a},\quad k^2=\frac{\omega^2}{a^2}$$

则 $U(\rho,\varphi)$ 满足的方程为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0$$

由于圆形膜边界固定，因此得到一个边界条件：

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0$$

且圆心处质点偏离平衡位置的位移应有限，因此得到一个自然边界条件：

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$$

再结合 φ 作为角度这一物理量应使得 $U(\rho,\varphi)$ 满足周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)$$

综上，空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的所有条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial U(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 U(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2U(\rho,\varphi)=0\\ U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b}=0\\ |U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0}<+\infty\\ U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\end{cases}$$

设 $U(\rho,\varphi)$ 可分离变量为：

$$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入空间部分 $U(\rho,\varphi)$ 要满足的方程，得：

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+k^2R(\rho)\Phi(\varphi)=0$$

上式等号两边同乘 $\dfrac{\rho^2}{R(\rho)\Phi(\varphi)}$，整理得：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]$$

上式等号左边只与 φ 有关，等号右边只与 ρ 有关，因此二者均等于一个常数 $-m^2$：

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)+k^2\rho^2\right]=-m^2$$

因此，角度部分满足方程：

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0$$

周期性边界条件：

$$U(\rho,\varphi+2\pi)=U(\rho,\varphi)\Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)=R(\rho)\Phi(\varphi)\Longrightarrow\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

从

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

可以解得：

$$\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)$$

结合周期性边界条件

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

可得：

$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

径向部分 $R(\rho)$ 满足：

$$-\left[\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + k^2\rho^2\right] = -m^2$$

可以整理成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

令 $x = k\rho, \rho = x/k, R(\rho)\Big|_{\rho=x/k} = R(x/k) \equiv y(x)$，则上面可方程化为 m 阶贝塞尔方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$U(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \Longrightarrow R(\rho)\Phi(\varphi)\Big|_{\rho=b} = 0 \Longrightarrow R(\rho)\Big|_{\rho=b} = 0$$

$$|U(\rho,\varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \Longrightarrow |R(\rho)\Phi(\varphi)|\Big|_{\rho=0} < +\infty \Longrightarrow |R(\rho)|\Big|_{\rho=0} < +\infty$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\dfrac{m^2}{x^2}\right)y=0 \\
y(x)\equiv R(\rho)\Big|_{\rho=x/k}=R(x/k),\;\; R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho) \\
R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0 \\
|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty
\end{cases}
$$

对于 m 阶贝塞尔方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0
$$

其通解为:

$$
y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)+D_m\mathrm{N}_m(x)
$$

考虑自然边界条件 $|R(\rho)|\Big|_{\rho=0}<+\infty$，可得:

$$
D_m=0
$$

因此:

$$
y^{(m)}(x)=C_m\mathrm{J}_m(x)
$$

对上面等式两边同取附加条件:

$$
y^{(m)}(x)\Big|_{x=k\rho}=C_m\mathrm{J}_m(x)\Big|_{x=k\rho}
$$

结合 $x=k\rho, R(\rho)=y(x)\Big|_{x=k\rho}=y(k\rho)$ 可得:

$$
R^{(m)}(\rho)=C_m\mathrm{J}_m(k\rho)
$$

设 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点为 $x_n^{(m)}$，即:

$$
\mathrm{J}_m\left(x_n^{(m)}\right)=0,\;\; m=0,1,2,\cdots;\;\; n=,1,2,\cdots
$$

结合边界条件 $R(\rho)\Big|_{\rho=b}=0$，即:

$$C_m \mathrm{J}_m(kb) = 0$$

因此 k 的本征值 $k_n^{(m)}$ 为:

$$k_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b},\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n = 1, 2, \cdots$$

相应的本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(k_n^{(m)}\rho\right) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right),\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n = 1, 2, \cdots$$

再根据 $k \equiv \omega/a$，得到 ω 的本征值，即圆形膜的本征频率 $\omega_n^{(m)}$ 为:

$$\omega_n^{(m)} = ak_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a,\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n = 1, 2, \cdots$$

综上所述，边缘固定半径为 b 的圆形膜的本征振动频率 $\omega_n^{(m)}$ 及本征振动模式 $R_n^{(m)}(\rho)$ 为:

$$\boxed{\omega_n^{(m)} = \frac{x_n^{(m)}}{b} \cdot a},\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n = 1, 2, \cdots$$

$$\boxed{R_n^{(m)}(\rho) = \mathrm{J}_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{b}\rho\right)},\ \ m = 0, 1, 2, \cdots;\ \ n = 1, 2, \cdots$$

其中，$x_n^{(m)}$ 是 m 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 n 个正零点。

10

> 数学物理方程反映了同一类现象的共同规律，各个具体问题所处的特定“环境”(边界条件)决定了其特殊性的一面，试简述你边界条件的认识（从边界条件的分类、边界条件与本征值的关系、自然边界条件等方面阐述）。

大家自由发挥。