第1章 群的基本知识

1.1 群的定义

在规定了两个元素之间的“乘积”法则后，满足以下四个条件的集合 G 称为群：

（1）封闭性

$$\forall f,g \in G, fg \in G$$

（2）结合律

$$\forall f,g,h \in G, (fg)h = f(gh)$$

（3）存在恒元

$$\exists e \in G, \forall f \in G, ef = fe = f$$

e 称为群 G 的恒元。

（4）存在逆元

$$\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G, gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

g^{-1} 称为元素 g 的逆元。

- 若集合 G 满足 (1)(2)(3) 但不满足 (4)，则称为“半群”。
- 群元可以是任何客体。
- “乘积”法则不局限于数乘。

5个结论

（1）恒元 e 是唯一的。

假设存在另一个恒元 e'，则：

$$e' = e'e = e$$

（2）$\forall g \in G$ 的逆元 g^{-1} 是唯一的。

假设 g' 也是 g 的逆元，则：

$$g' = g'e = g'(gg^{-1}) = (g'g)g^{-1} = g^{-1}$$

（3）恒元 e 的逆元是它本身。

$$e^{-1} = ee^{-1} = e$$

（4）$\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$

$$\left(g^{-1}\right)^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1} e = \left(g^{-1}\right)^{-1} \left(g^{-1}g\right) = \left(\left(g^{-1}\right)^{-1} g^{-1}\right) g = eg = g$$

（5）$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}; (g_1g_2\cdots g_N)^{-1} = g_N^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}$

$$(g_1g_2\cdots g_N)(g_1g_2\cdots g_N)^{-1} = e$$

等号两边依次左乘 $g^{-1}, g_2^{-1}, \cdots, g_N^{-1}$ 得:

$$(g_1g_2\cdots g_N)^{-1} = g_N^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}$$

7个概念

（1）群的元素的个数 n_G 可以是有限的，也可以是无限的。群元个数有限的群称为有限群。

（2）有限群的元素的个数 n_G 称为有限群的阶。

（3）群元个数无限的群称为无限群。无限群有群元素离散和连续两种情况。

（4）群元素离散的无限群称为离散无限群。

（5）群元素连续的无限群称为连续无限群。

（6）$\forall g \in G$，若 $g^m = e$，其中 m 是最小的正整数，则 m 称为群元 g 的阶。

（7）若 $\forall f, g \in G$，有 $fg = gf$，则称群 G 为可交换群，或 Abel 群。

7个例子

例1

$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$，乘法定义为数乘。

例2

$G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$$g_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ g_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\ g_3=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ g_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

乘法定义为矩阵乘法。

例3

整数加法群 $\mathbb{Z}_+=(\mathbb{Z},+)$，群元为所有整数，乘法定义为数的加法。

例4

实数加法群 $\mathbb{R}_+=(\mathbb{R},+)$，群元为所有实数，乘法定义为数的加法。

例5

非零实数乘法群 $\overline{\mathbb{R}}_\times$，群元为所有非零实数，乘法定义为数的乘法。

例6

n 阶有限循环群 $\mathbf{C}_n=\{C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},C_n^n=e\}$

乘法定义为：

$$C_n^p\cdot C_n^q=C_n^{p+q}$$

逆元：

$$C_n^p\cdot C_n^{n-p}=C_n^n=e\Longrightarrow(C_n^p)^{-1}=C_n^{n-p}$$

$$C_n^p\cdot C_n^q=C_n^{p+q}=C_n^q\cdot C_n^p$$

$\mathbf{C}_n$ 是 n 阶 Abel 群。

例 1 中提到的四阶群 $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}=\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$ 也是一个循环群，其中的群元可以表示为：

$$C_4^1=\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\mathrm{i}=g_2$$

$$C_4^2=\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=-1=g_3$$

$$C_4^3=\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)=-\mathrm{i}=g_4$$

$$C_4^4=\exp\left(\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=1=g_1$$

群元可代表复平面内一个矢量逆时针转 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

例7

$\mathrm{SO}(2)$ 群

二维平面中，将一个矢量逆时针旋转 α 角度可表示为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中，

$$g(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

称为旋转矩阵，为集合 $\mathrm{SO}(2)$ 的元素，记为：

$$G = \mathrm{SO}(2) = \{g(\alpha) | \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

乘法定义为矩阵乘法。

- 封闭性：$g(\alpha)g(\beta) = g(\alpha+\beta) \in G$
- 结合律：矩阵乘法满足结合律
- 存在恒元：$e = g(0) = I$
- 存在逆元：$g^{-1}(\alpha) = g(2\pi - \alpha)$

$\mathrm{SO}(2)$ 是 Abel 群，也是一个 1 阶李群。

代数上可借助复平面推导旋转矩阵的表达式：

设复数 z 逆时针旋转 α 角后得到 z'，则：

$$z' = \exp(\mathrm{i}\alpha)z$$

设 $z' = x' + \mathrm{i}y', z = x + \mathrm{i}y$，由欧拉公式可得：

$$x' + \mathrm{i}y' = [\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha][x + \mathrm{i}y]$$

整理得：

$$x' + \mathrm{i}y' = [(\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y] + \mathrm{i}[(\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y]$$

于是：

$$
\begin{cases}
x' = (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\
y' = (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y
\end{cases}
$$

写成矩阵乘法形式：

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

例8

正三角对称群 D_3

正三角形有三个对称轴和一个对称中心。

群元是一系列对称操作，操作保证**操作后的正三角形**与**操作前的正三角形**重合。

三角形 ABC，中心为 O，三条对称轴为 a, b, c

e：绕 O 转 360°，$e(ABC) = (ABC)$

d：绕 O 转 120°，$d(ABC) = (CAB)$

f：绕 O 转 240°，$f(ABC) = (BCA)$

a：绕对称轴 a 转 180°，$a(ABC) = (ACB)$

b：绕对称轴 b 转 180°，$b(ABC) = (CBA)$

c：绕对称轴 c 转 180°，$c(ABC) = (BAC)$

这些操作构成了 D_3 群：

$$
\mathrm{D}_3 = \{e, d, f, a, b, c\}
$$

- 称两个操作 X, Y 相等，当且仅当 $X(ABC) = Y(ABC)$

$(ab)(ABC) = a(CBA) = (CAB) = d(ABC) \Longrightarrow ab = d$

$(ba)(ABC) = b(ACB) = (BCA) = f(ABC) \Longrightarrow ba = f$

$\{a, d\}$ 或 $\{a, f\}$ 或 $\{b, d\}$ 等为 D_3 群的生成元。

各群元的阶：

群元 g	e	d	f	a	b	c
阶数n_g	1	3	3	2	2	2

例9

一维空间连续平移群 T_1

一维空间连续平移群的群元是平移操作：

$$\mathrm{T}_1 : \{T(a)|a \in \mathbb{R}\}$$

其中，群元 $T(a)$ 可以表示为：

$$T(a) : x \mapsto x + a$$

或：

$$T(a)x = x + a$$

- 封闭性：$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R} \Longrightarrow T(a)T(b) = T(a+b) \in \mathrm{T}_1$
- 结合律：$T(a)[T(b)T(c)]x = T(a+b+c)x = [T(a)T(b)]T(c)x$
- 存在恒元：$T(0) = e$
- 存在逆元：$T^{-1}(a) = T(-a)$

一维空间平移群的群元可写成矩阵形式：

$$T(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ 1 \end{bmatrix}$$

推广到 n 维平移群 T_n：

$$T_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_n \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \\ \vdots \\ x_n + a_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

一阶平移群是一阶 Abel 群。