交流电的功率

瞬时功率

$$P(t)=u(t)i(t)$$

设:

$$i(t)=I_0\cos(\omega t),\ \ u(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$$

则利用“积化和差”公式，瞬时功率可表达为:

$$\begin{aligned}P(t)&=U_0I_0\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\\&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos(\varphi)+\frac{1}{2}U_0I_0\cos(2\omega t+\varphi)\end{aligned}$$

平均功率

$$\begin{aligned}\bar{P}&\equiv\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{P}=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi}$$

纯电阻元件的平均功率

纯电阻元件，$\varphi=0,\cos\varphi=1$

$$\begin{aligned}\bar{P}&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi\\&=\frac{1}{2}U_0I_0\\&=\frac{1}{2}I_0^2R\end{aligned}$$

纯电容元件的平均功率

纯电容元件，$\varphi=-\dfrac{\pi}{2},\cos\varphi=0$

$$\bar{P}=0$$

纯电感元件的平均功率

纯电感元件，$\varphi=\dfrac{\pi}{2},\cos\varphi=0$

$$\bar{P}=0$$

功率因数

普遍情形下，任意一个与外界有两个连接点的电路（称为二端网络），它两端的**电压**与其中的**电流**之间的相位差 φ 可以取 $-\dfrac{\pi}{2}\sim\dfrac{\pi}{2}$ 之间的任意值，从而 $\cos\varphi$ 介于 $0\sim1$ 之间。

利用有效值 $U\equiv\dfrac{U_0}{\sqrt{2}},I\equiv\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$，可将二端网络的平均功率写为:

$$\begin{aligned}\bar{P}&=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi\\&=UI\cos\varphi\end{aligned}$$

其中，正因子 $\cos\varphi$ 称为该二端网络的**功率因数**。

有功电流和无功电流

当一个用电器中的**电压**与**电流**之间有相位差 φ 时，可定义有功电流 $I_{\parallel}$ 和无功电流 $I_{\perp}$:

$$I_{\parallel} \equiv I\cos\varphi$$

$$I_{\perp} \equiv I\sin\varphi$$

电路中的平均功率可写为:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= UI\cos\varphi \\ &= UI_{\parallel}\end{aligned}$$

可见，只有 $I_{\parallel}$ 分量对平均功率有贡献

视在功率

视在功率，记为 S，定义为:

$$S \equiv UI$$

利用视在功率 S 和功率因数 $\cos\varphi$，可将平均功率表达为:

$$\bar{P} = S\cos\varphi$$

有功功率和无功功率

$$P_{\text{有功}} \equiv UI_{\parallel} = UI\cos\varphi = S\cos\varphi$$

显然，

$$\bar{P} = P_{\text{有功}}$$

$$P_{\text{无功}} = UI_{\perp} = UI\sin\varphi = S\sin\varphi$$

从而:

$$S = \sqrt{P_{\text{有功}}^2 + P_{\text{无功}}^2}$$

有功电阻和电抗

一个电路的复阻抗 $\tilde{Z} = Ze^{\mathrm{j}\varphi} = r + \mathrm{j}x$ 的实部 r 称为**有功电阻**，虚部 x 叫作**电抗**

对于 RC 串联电路，

$$\tilde{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}$$

RC 串联电路的有功电阻 r 和电抗 x 为:

$$r = R$$

$$x = -\frac{1}{\omega C}$$

电容性电路的电抗 $x < 0$

电感性电路的电抗 $x > 0$

负的电抗叫**容抗**

正的电抗叫**感抗**

品质因数（Q 值）

一个电抗元件的品质因数，记为 Q，定义为:

$$Q \equiv \frac{P_{\text{无功}}}{P_{\text{有功}}} = \frac{UI_{\perp}}{UI_{\parallel}} = \frac{I\sin\varphi}{I\cos\varphi} = \tan\varphi = \frac{x}{r}$$

损耗角 δ

$$\delta \equiv \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\tan\delta = \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cot\varphi = \frac{P_{有功}}{P_{无功}} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\delta = \frac{1}{Q},\ \ Q = \frac{1}{\tan\delta}$$

$\tan\delta$ 称为**耗散因数**

第8章 麦克斯韦电磁理论和电磁波

基本概念

位移电流

恒定条件下，有：

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 \\ = \iint_S \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

其中，I_0 是穿过曲面 S 的传导电流

上式在非恒定情况下不适用。

在非恒定情况下，有电流连续性方程：

$$\iint_{\partial V} \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}t}$$

介质中的高斯定理：

$$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_0$$

对时间求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \oiint_{\partial V} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

与电流连续性方程比较，得：

$$\oiint_{\partial V} (\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

上式表明，$\vec{j}_0 + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 这个量永远是连续的。

透过某一曲面 S 的电位移通量，记为 Φ_D，定义为：

$$\Phi_D \equiv \iint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

有：

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$ 称为位移电流，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 称为位移电流密度

传导电流 $I_0 = \iint\limits_S \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 与位移电流 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 合在一起，称为**全电流**。全电流在任何情况下都是连续的。

在恒定情况下，有安培环路定理：

$$\oint\limits_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0$$

上式不适用于非恒定情况。非恒定情况下，有**麦克斯韦位移电流假说**，即用全电流来替换传导电流：

$$\oint\limits_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 + \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

在电介质中的位移电流：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \varepsilon_0 \iint\limits_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint\limits_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}$$

注意到，介质中，有：

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -Q'$$

于是：

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
&= \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{aligned}$$

另一方面，极化电荷的连续性方程为：

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \vec{j}_P \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t}$$

其中，$\vec{j}_P$ 是极化电流密度

结合两式，可得：

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial V} \vec{j}_P \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组积分形式

$$\begin{cases} \oiint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_0 \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint\limits_{S} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \\ \oiint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\ \oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 + \iint\limits_{S} \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \end{cases}$$

其中，Q_0 是 V 内总电荷量，I_0 是通过曲面 S 的总传导电流

麦克斯韦方程组微分形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

其中，ρ_{e0} 是自由电荷体密度，$\vec{j}_0$ 是传导电流密度，$\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 是位移电流密度

三个描述介质性质的方程

各向同性线性介质中：

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \end{cases}$$

坡印廷矢量

坡印廷矢量，记为 $\vec{S}$，定义为：

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$$

$\vec{S}$ 的方向代表电磁能传播的方向，$\vec{S}$ 的大小代表单位时间流过与之垂直的单位面积的电磁能量。$\vec{S}$ 就是电磁能流密度矢量。

简谐波平均能流密度

$$\bar{S} = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

又由于 $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu\mu_0}$，于是：

$$\bar{S} \propto E_0^2,\text{ 或 } \bar{S} \propto H_0^2$$

这就是说，电磁波中的能流密度正比于电场或磁场振幅的平方。