1

(A) 柯西-黎曼条件:

设复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，若 $f(z)$ 在 z 点可导，则必定有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

上面两条等式就是**柯西-黎曼条件(C-R条件)**

(B) 留数定理:

若 $f(z)$ 在回路 C 所包围的区域内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 外解析，则 $f(z)$ 沿 C^+ 的回路积分值等于 $f(z)$ 在 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 的留数之和乘 $2\pi\mathrm{i}$，即:

$$\oint\limits_{C^+} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}f(z_j)$$

(C) 泰勒级数和洛朗级数的区别:

泰勒级数:

设 z_0 为 $f(z)$ 解析区域 Ω 内的一点，以 z_0 为圆心的圆周 C 在 Ω 内，则 $f(z)$ 可以在 C 内展成泰勒级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，展开系数为:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

洛朗级数:

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心，半径为 R_1,R_2 的两个圆周 C_1,C_2 所包围的环形区域，$R_2<|z-z_0|<R_1$ 上解析，则在此区域内 $f(z)$ 可展成洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint\limits_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

C 是任一条在环形区域内把 C_2 包围在内的闭曲线

区别:

泰勒级数要求 $f(z)$ 在整个圆周 C 内解析，而洛朗级数只要求在圆周 C_1,C_2 间的环形区域解析;

洛朗级数的幂项的次数从 $-\infty$ 到 ∞，而泰勒级数的幂项次数从 0 到 ∞;

泰勒级数的系数可以由求导数求得，也可以由回路积分求得，但洛朗级数的系数只能由回路积分求得。

(D) 傅里叶变换:

若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实函数，它在任何有限的区间上满足 Dirichlet 条件，且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}C(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\equiv C(k)$$

其中，$\mathscr{F}\{f(x)\}(k)\equiv C(k)$ 称为 $f(x)$ 的傅里叶变换

(E) 拉普拉斯变换:

对于定义在实变数 $t\in[0,+\infty)$ 上的实函数或复函数 $f(t)$，定义 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p)\equiv F(p)\equiv\int_{t=0}^{t=+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

其中，$p=s+\mathrm{i}\sigma,s\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}$

(F) 自然边界条件：

所要求解的场量 u 在考虑的区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上，都是有界的，不发散的，即：

$$|u|<+\infty$$

2

已知解析函数的实部 $u=x^3-3xy^2$，求该解析函数

解：

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

解析函数应满足柯西-黎曼条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}=6xy\\ \mathrm{d}v=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{1}$$

选择积分路径为：$\underbrace{(0,0)\to(x,0)}_{C_1},\underbrace{(x,0)\to(x,y)}_{C_2}$，两边积分：

$$\begin{aligned}v(x,y)-v(0,0)&=\int\limits_{C_1}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y+\int\limits_{C_2}6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{y=0}^{y=y}(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3x^2y-y^3\end{aligned}$$

令 $v(0,0)=C$,

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+C$$

于是：

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+C)\end{aligned}$$

ps：从 (1) 开始还有令另一种做法（类似于热统里导出熵的统计表达式）：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v&=6xy\mathrm{d}x+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3y\mathrm{d}(x^2)+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3[\mathrm{d}(x^2y)-x^2\mathrm{d}y]+(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3\mathrm{d}(x^2y)-3y^2\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(3x^2y)-\mathrm{d}(y^3)\\&=\mathrm{d}(3x^2y-y^3)\end{aligned}$$

于是：

$$v=3x^2y-y^3+C$$

$$\begin{aligned}f(z)&=u+\mathrm{i}v\\&=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3+C)\end{aligned}$$

3

求 $\frac{1}{z(z-1)}$ 分别在 $z_1=0$ 和 $z_2=1$ 附近的展开式

解:

$z_1=0$ 附近:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\\ &= -\frac{1}{1-z}-\frac{1}{z}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - z^{-1}\\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n\end{aligned}$$

$z_2=1$ 附近：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\\ &= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}-z^{-1}\\ &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-z^{-1}\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n - z^{-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}-z^{-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1}\end{aligned}$$

4

计算回路积分 $I=\oint\limits_{l^+}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$，其中回路 l 的方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$

解:

令 $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}$

在回路内的孤立奇点有：$z_1=\mathrm{i}, z_2=1$，z_1 为一阶极点，z_2 二阶极点

计算回路内孤立奇点处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_1) &= \frac{1}{0!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_2) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}z^1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z-1)^2}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}I &= \oint\limits_{l}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}\\ &= 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}f(z_1)+\mathrm{Res}f(z_2))\\ &= -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\end{aligned}$$

5

计算定积分:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

令 $z=e^{\mathrm{i}\theta},\ln z=\mathrm{i}\theta,\theta=\frac{\ln z}{\mathrm{i}},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$

$z=e^{\mathrm{i}\theta},z^{-1}=e^{-\mathrm{i}\theta},\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}$

设 C 是复平面上的单位圆

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\\&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}\end{aligned}$$

令 $f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}$，其有两个一阶极点 $z_1=2-\mathrm{i},z_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$，只有 z_2 在单位圆 C 内

z_1,z_2 是 $(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}=0$ 的两根，于是 $f(z)$ 可表达为:

$$f(z)=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z-z_1)(z-z_2)}$$

$f(z)$ 在 z_2 处的留数:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z_2)&=\frac{1}{0!}\lim_{z\to z_2}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}z^0}(z-z_2)f(z)\\&=\frac{1}{(1-2\mathrm{i})(z_2-z_1)}\\&=\frac{1}{4\mathrm{i}}\end{aligned}$$

于是由留数定理:

$$\begin{aligned}\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}&=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_2)\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}I&=2\oint\limits_{C^+}\frac{\mathrm{d}z}{(1-2\mathrm{i})z^2+6\mathrm{i}z-1-2\mathrm{i}}\\&=2\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\pi\end{aligned}$$

6

用拉普拉斯变换求解下列 RL 串联电路方程，其中 L,R,E 为常数:

$$\begin{cases}L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=E\\i(0)=0\end{cases}$$

解:

设 $i(t)\fallingdotseq F(p)$

对方程 $L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=E$ 两边同时作拉普拉斯变换，得:

$$LpF(p)+RF(p)=\frac{E}{p}$$

解出 $F(p)$:

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \frac{E}{Lp^2+Rp} \\
&= \frac{E}{R}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}})
\end{aligned}
$$

两边同时做拉普拉斯逆变换得:

$$
i(t) = \frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})
$$

7

在半径 $r=r_0$ 的球内求解 $\nabla^2 u=0$，使满足边界条件 $u\Big|_{r=r_0}=\sin^2\theta$

8

求定解问题:

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\
u_x\Big|_{x=0}=0 \\
u\Big|_{t=0}=\cos(\frac{\pi x}{l}) \\
u_t\Big|_{t=0}=0
\end{cases}
$$

9

半径为 a 的导体球接地，在距球心为 b 的地方放置一点电荷，$b>a$，电荷量为 $4\pi\varepsilon_0$，求导体球外的电势分布

10

求边缘固定半径为 a 的圆形膜的本征振动频率（固有频率）及本征振动模式