Алгебры и группы Ли

Автор конспекта Федоров И.И.
По лекциям Панова А.Н. и Игнатьева М.В.

22 мая 2015 г.

Содержание

1 Алгебры Ли

Определение 1. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$, снабжённое билинейным отображением $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (a, b) \mapsto [a, b]$, причем выполняются следующие свойства:

1. $\forall x \in \mathfrak{g} : [x, x] = 0$;
2. $\forall x, y, z : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$(тождество Якоби).

Отображение $[\cdot,\cdot]$ обычно называется *коммутатором* или *скобкой Ли*.

Замечание. В случае если характеристика поля не равна 2 свойство (1) можно переписать в виде: $\forall x, y \in \mathfrak{g} : [x, y] = -[y, x]$.

Замечание. Альтернативная формулировка тождества Якоби: $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$.

Определение 2. Пусть $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ — алгебра Ли. Подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Ли*, если $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot])$ — алгебра Ли.

Утверждение 1. *Подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является подалгеброй Ли $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathfrak{h} : [x, y] \in \mathfrak{h}$.*

Определение 3. Множество $\mathfrak{h}$ называется *идеалом*, если $\forall x \in \mathfrak{h}, \forall y \in \mathfrak{g} : [x, y] \in \mathfrak{h}$.

Определение 4. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если $\dim \mathfrak{g} > 1$ и в ней нет идеалов кроме $\{0\}$ и $\mathfrak{g}$.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ - алгебры Ли. Линейное отображение $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}_1 : \Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)].$$

Если Φ - биекция, то Φ называются *изоморфизмом*.

Определение 6. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{K}$, а $\mathrm{End}(V)$ — пространство эндоморфизмов. Введем на $\mathrm{End}(V)$ скобку Ли формулой $[x, y] = xy - yx$. Полученная алгебра Ли называется *полной линейной алгеброй* и обозначается $\mathfrak{gl}(V)$. Любая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли*.

Определение 7. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. *Представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ называется отображение $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) : x \mapsto \tau_x$ такое, что

1. $\tau_{x+y} = \tau_x + \tau_y$,
2. $\tau_{\alpha x} = \alpha\tau_x$,
3. $\tau_{[x,y]} = [\tau_x, \tau_y]$.

Замечание. Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ это просто гомоморфизм алгебр Ли $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Утверждение 2. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, а $V = \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, тогда $\tau_X(A) = XA + AX^T$ - представление.*

Определение 8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $V = \mathfrak{g}$, тогда гомоморфизм $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) : x \mapsto \mathrm{ad}_x$ такой, что $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$, называется *присоединенным представлением.*

Определение 9. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $I \subset \mathfrak{g}$ — идеал. Фактормножество $\mathfrak{g}$ по отношению эквивалентности "$x \equiv y \mod I \Leftrightarrow x - y \in I$" называется *факторалгеброй Ли* и обозначается $\mathfrak{g}/I$. Класс эквивалентности элемента x обычно обозначается $x + I$ или $[x]$.

Утверждение 3. *Факторалгебра Ли сама является алгеброй Ли:* $[x + I, y + I] = [x, y] + I$.

Определение 10. Гомоморфизм $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I : x \mapsto x + I$ называется *канонической(естественной) проекцией.*

Определение 11. Пусть $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ - гомоморфизм, тогда
$\operatorname{Ker} \Phi := \{x \in \mathfrak{g}_1 | \Phi(x) = 0\}$ - ядро Φ,
$\operatorname{Im} \Phi := \{y \in \mathfrak{g}_2 | \exists x \in \mathfrak{g}_1 : \Phi(x) = y\}$ - образ Φ.

Утверждение 4. *Множество* $\operatorname{Ker} \Phi$ *— идеал в* $\mathfrak{g}_1$*, а* $\operatorname{Im} \Phi$ *- подалгебра в* $\mathfrak{g}_2$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *— гомоморфизм, тогда существует изоморфизм* $\psi : \mathfrak{g}_1 / \operatorname{Ker} \Phi \to \operatorname{Im} \Phi$.

Определение 12. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, тогда $\beta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)$ называется *формой Киллинга.*

Замечание. На английском языке "форма Киллинга" записывается как "Killing form", что дословно переводится как "убивающая форма".

Утверждение 5. *Отображение* β *— симметрическая билиненая форма, причем* $(x, [y, z]) = ([x, y], z)$.

2 Гладкие многообразия

Определение 13. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным отображением*, если прообраз любого открытого в Y множества открыт в X.

Определение 14. Отображение $f : X \to Y$, где X, Y — топологические пространства, называется *гомеоморфизмом*, если:

1. f — биекция.
2. f — непрерывное отображение.
3. f^{-1} — непрерывное отображение.

Если существует хоть один гомеоморфизм из X в Y, то их называют *гомеоморфными.*

Определение 15. Пусть $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}, a \in \mathbb{E}^n$, причем существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = f'_i(a)$$

тогда он называется *частной производной.*

Замечание. Под $\mathbb{E}$ будем подразумевать множество $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение 16. Если частная производная существует в любой точке $a \in \mathbb{E}^n$, то возникает функция $f'_i : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}$, которая a переводит в $f'_i(a)$. Функция f называется *гладкой*, если f' - непрерывна.

Определение 17. Отображение $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ называется *гладким отображением*, если в координатах оно задается гладкими функциями.

Утверждение 6. *Любое гладкое отображение непрерывно.*

Определение 18. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если у любых двух точек существуют непересекающиеся окрестности.

Определение 19. Пусть M — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, M — представлено в виде объединения своих открытых подмножеств U_α и для любого α задан гомеоморфизм $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$(какое-то открытое подмножество в $\mathbb{E}^n$), причем:

$$(\forall \alpha, \beta)(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{E}^n \text{ - гладкое}),$$

тогда M называется *гладким многообразием.* Множества U_α называются *картами* на M. Отображения $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ называются *картирующими гомеоморфизмами.* Множество пар $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ называется *атласом* на M.

Определение 20. Пусть M — гладкое многообразие, $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ — атлас на M. Рассмотрим конкретное U_α и $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{E}^n$. Возникает набор функций $x^1, \ldots, x^n$, где $x^i : U_\alpha \to \mathbb{R} : p \mapsto$ i-ая координата $\phi_\alpha(p)$. Функции $\phi_\alpha(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ называются *локальными координатами* в U_α.

Утверждение 7. *Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в U_α, а $y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты в U_β, тогда в $U_\alpha \cap U_\beta$ можно выразить y^j через x^i.*
Условие гладкости $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ означает, что каждое y^j является гладкой функцией от $x^1, \ldots, x^n$.

Теорема 2. *Пусть X — множество решений некоторой системы гладких уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Если ранг матрицы якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ равен r в каждой точке, то X — гладкое многообразие размерности $n - r$.

Утверждение 8. *Пусть X — гладкое многообразие. Отображение $f : X \to \mathbb{E}$ является гладким, если $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ гладкое для любого α.*

Определение 21. Множество всех гладких функций $C^\infty(X)$ с поточечными операциями называется *алгеброй гладких функций.*

Утверждение 9. *Пусть X, Y — гладкие мнообразия с атласами $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$. Отображение $F : X \to Y$ является гладким, если $\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1}$ гладкое для любого α, β.*

Определение 22. Пусть X, Y — гладкие мнообразия с атласами $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, тогда произведение $X \times Y$ это гладкое многообразие с атласом $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$.

Определение 23. Пусть X — гладкое мнообразие, тогда $Y \subset X$ называется *подмногообразием*, если Y является решением системы гладких уравнений и ранг матрицы якоби данной системы равен r в каждой точке.

3 Группы Ли

Определение 24. Множество G называется *группой Ли*, если

1. G — группа,
2. G — гладкое многообразие,
3. отображения $(g, h) \mapsto gh$ и $g \mapsto g^{-1}$ — гладкие.

Утверждение 10. *Пусть группа G — множество решений гладких уравнений, тогда G — группа Ли.*

Примеры 1. Следующие группы являются группами Ли

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$
2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$
3. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) | A^t = A^{-1}\}$

4. $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \neq 0; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Определение 25. Пусть G — группа Ли, тогда подгруппа H называется *подгруппой Ли*, если H — подмногообразие.

Определение 26. Пусть G — группа Ли, G подгруппа Ли в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. X - косательный вектор к группе G в точке e, если существует кривая $g(t)$ такая, что $\forall t \in \mathbb{R} : g(t) \in G, g(0) = e$ и $\frac{dg(t)}{dt}|_{t=0} = X$

Определение 27. Множество всех касательных векторов в точке e к группе G называется касательным пространством и обозначается $T_e(G)$.

Утверждение 11. *Касательное пространство это подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, H — подгруппа Ли в G, $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы H. Если H — нормальная подгруппа в G, то $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.*

Определение 28. Путь из p в q — отображение $x : [0, 1] \to X$ такое, что $x(0) = p, x(1) = q$.

Определение 29. Многообразие X называется связным, если $\forall p, q \in X$ существует непрерывный путь из p в q.

Определение 30. Многообразие X называется односвязным, если любую петлю можно непрерывно стянуть в точку.

Утверждение 12. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, тогда в G существует подгруппа Ли H такая, что $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$.*

Определение 31. Пусть G_1, G_2 — группы Ли, $\phi : G_1 \to G_2$. Отображение ϕ называется гомоморфизмом групп Ли, если

1. ϕ — гомоморфизм групп;

2. ϕ — гладкое отображение.

Если ϕ — биекция, то ϕ называется изоморфизмом групп Ли.

Теорема 4. *Если ϕ - гомоморфизм групп Ли, то $\Phi = d_e\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм алгебр Ли.*

Теорема 5. *Пусть G — подгруппа Ли в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Тогда $\mathfrak{d} = \mathrm{Lie}(G)$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ и $exp : \mathfrak{d} \to G$.*

Утверждение 13. *Отображение $exp : \mathfrak{g} \to G$ — локальный диффеоморфизм окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестности e в G.*

Теорема 6. *Если ϕ — гомоморфизм групп Ли G_1, G_2, то $\Phi = d_e\phi$ — гомоморфизм алгебр Ли $\mathrm{Lie}(G_1), \mathrm{Lie}(G_2)$. Причем следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "d_e\phi"] \arrow[d, "\exp"] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\ G_1 \arrow[r, "\phi"] & G_2 \end{tikzcd}$$