Теория Представлений.

Автор конспекта Федоров И.И.
По лекциям Игнатьева М.В.

26 мая 2015 г.

Содержание

1 Представления групп

Определение 1. Пусть G - группа, а V - линейное векторное пространство, тогда гомоморфизм $\phi : G \to \mathrm{GL}\,(V)$ называется *представлением группы G, а V* называется *пространством представления.*
Будем писать $g.x$ вместо $(\phi(g))(x)$.

Определение 2. Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление. Функция $\chi : G \to \mathbb{C}$ действующая по правилу: $\chi(g) = tr(\phi(g))$, называется *характером представления V.*

Определение 3. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется *центральной функцией на G*, если $\forall g, h \in G : f(g) = f(hgh^{-1})$. Множество всех центральных функций обозначается $\mathrm{C}(G)$.

Утверждение 1. $\mathrm{C}(G)$ *- векторное пространство над $\mathbb{C}$, причем размерность $\mathrm{C}(G)$ равна количеству классов сопряженности. Функции $f_1, \ldots, f_n$ будут базисом, где*

$$f_i(g) = \begin{cases} 1, & g \in K_i \,(i\text{-ый класс сопряженности}) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Утверждение 2. *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - любое представление, а χ - его характер, тогда $\chi \in \mathrm{C}(G)$.*

Утверждение 3. *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - любое представление, тогда:*

$$\forall g \in G : \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$$

Определение 4. Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V), \psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ - представления. *Прямой суммой представлений* $(\phi + \psi)$ называется гомоморфизм: $\eta : G \to \mathrm{GL}(V \oplus W)$.
По определению: $(\eta(g))(x, y) := ((\phi(g))(x), (\psi(g))(y))$.
$\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$

Утверждение 4. $\chi_{V^*} = \chi_V$*, где V^* - сопряженное к V пространство.*

Определение 5. Пусть V, W - векторные пространства над K. Рассмотрим множество $F = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} z_i(x_i, y_i) | x_i \in V, y_i \in W, z_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Введем на F отношение эквивалентности заданное правилами:

1. $(\alpha x, y) \sim (x, \alpha y)$, где $\alpha \in K$,
2. $(x_1 + x_2, y) \sim (x_1, y) + (x_2, y)$,
3. $(x, y_1 + y_2) \sim (x, y_1) + (x, y_2)$.

Фактормножество $F/_\sim$ является векторным пространством и называется *тензорным произведением*, обозначается $V \otimes W$. Класс элемента (x, y) обозначается $x \otimes y$.

Замечание. Тензорное произведение V_1, V_2 так же может быть определено как пространство W вместе с полилинейным отображением $\otimes : V_1 \times V_2 \to W$ обладающим универсальным свойством(читаем теорию категорий).

Замечание. Данные выше определения тензорного произведения без изменений переносятся на случай модулей над кольцами.

Утверждение 5. $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,j=1}^{n,m}$ *- базис* $V \otimes W$.

Утверждение 6. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \times \chi_W$.

Определение 6. Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V), \psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ - представления. Линейное отображение $F : V \to W$ называется *морфизмом представлений*, если $\forall g \in G, \forall x \in V$:

$$F((\phi(g))(x)) = (\psi(g))(F(x))$$

$$F(g.x) = g.F(x)$$

Определение 7. Морфизм представлений $F : V \to W$ группы G, называется *изоморфизмом представлений*, если он является биекцией.
Если существует хоть один изоморфизм между V и W, то их называют *изоморфными представлениями группы* G.

Определение 8. Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление. $W \subset V$ называется *инвариантным подпространством*, если $\forall g \in G, \forall x \in W : (\phi(g))(x) \in W$. Очевидно, что W само является представлением G.

Определение 9. Если в V существуют нетривиальные инвариантные подпространства, то V называется *приводимым представлением группы* G. Иначе V называется *неприводимым представлением группы* G.

Утверждение 7. *Пусть* $V_1, \ldots, V_k$ *- любые векторные пространства.*
$V_1 \oplus \ldots \oplus V_k := \{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 \in V_1, \ldots, x_k \in V_k\}$
$\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$
Если каждое из них является представлением группы G*, то и их прямая сумма будет представлением.*

Определение 10. Представление V группы G называется *вполне приводимым представлением*, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых.

Определение 11. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{C}$, отображение $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если:

1. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$
2. $\beta(\alpha x, y) = \alpha \times \beta(x, y)$
3. $\beta(y, x) = \overline{\beta(x, y)}$

Определение 12. Полуторалинейная форма называется *положительно определенной* и *эрмитовым произведением*, если:

$$\forall x \in V : \beta(x, x) \geq 0$$

$$\beta(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(V, β) - называется *унитарным пространством.*

Определение 13. Пусть V - векторное пространство, а W - подпространство в V. *Ортогональным дополнением к подпространству* W называется $W^{\perp} := \{x \in V | x \perp y, \forall y \in V\} (x \perp y \Leftrightarrow (x, y) = 0)$.

Определение 14. Пусть V - унитарное конечномерное пространство являющееся представлением группы G. Эрмитово произведение называется *инвариантным*, если $\forall x, y \in V, g \in G : (x, y) = (g.x, g.y)$

Утверждение 8. *Если эрмитово произведение инвариантно и* $W \subset V$ *- инвариантно, то* $W^{\perp}$ *- тоже инвариантно.*

Теорема 1. ***Теорема Машке.*** *Любое конечномерное комплексное представление любой конечно группы вполне приводимо.*

Лемма 1. ***Лемма Шура.***

1. *Пусть V, W - неприводимые представления группы G, а $\phi : V \to W$ - морфизм, тогда ϕ - изоморфизм, либо $\phi = 0$.*

2. *Пусть V - неприводимое представление группы G. $\phi : V \to V$ - морфизм, тогда:*

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in V : \phi(x) = \lambda x$$

Утверждение 9. *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V), \psi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимые представления, $\sigma : V \to W$ - любое линейно отображение. Обозначим через $\widetilde{\sigma}$ линейное отображение вида:*

$$\widetilde{\sigma} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \circ \sigma \circ \phi^{-1}$$

тогда:

1. $\phi \ncong \psi : \widetilde{\sigma} = 0$

2. $V = W, \phi = \psi$, *то* $\widetilde{\sigma} = \frac{\operatorname{tr} \sigma}{\dim V} id_V$

Утверждение 10.

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1 \overline{f_2}$$

- эрмитово произведение на $\mathrm{C}(G)$.
$\mathrm{C}(G)$ *- унитарное пространство.*

Теорема 2. ***Первое соотношение ортогональности.*** *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V), \psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ - неприводимые представления.*

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1, & V \cong W \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Утверждение 11.
1. *Пусть V - представление группы G, $V = m_1 V_1 \oplus \ldots \oplus m_k V_k$ - его разложение на неприводимые, тогда кратность вхождения i-ого неприводимого представления $m_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$.*

2. *Любое представление можно однозначно разложить в прямую сумму неприводимых.*

3. *Если $\chi_V = \chi_W$, то $V \cong W$.*

Утверждение 12. *Если V - любое представление, то $(\chi_V, \chi_V) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. При этом V неприводимо $\leftrightarrow$ $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

Лемма 2. *Пусть $\Gamma \in \mathrm{C}(G), \phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимое представление, χ - его характер. Положим*

$$\psi := \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \phi(h) : V \to V$$

Тогда $\psi = \lambda \times id_V$, где $\lambda = \frac{|G|}{\chi(e)}(\chi, \Gamma)$.

Теорема 3. *Пусть $V_1, \ldots, V_k$ - все попарно не изоморфные неприводимые представления G. $\chi_1, \ldots, \chi_k$ - их характеры - базис в $\mathrm{C}(G)$.*

Утверждение 13. *Количество неприводимых представлений равно числу классов сопряженности в G.*

Определение 15. Представление $\phi : G \to \mathrm{GL}(W)$ называется *регулярным*, если W— пространство функций на группе G и линейное преобразование $\phi(g) : W \to W$ ставит в соответствие каждой функции $f(\omega), \omega \in G$, функцию $f(g\omega), \omega \in G$.

Утверждение 14. *Каждое неприводимое представление входит в регулярное с крастностью равной его размерности.*

Теорема 4. ***Теорема Фробениуса.*** *Пусть $V_1, \dots, V_r$ - все неприводимые представления группы G, тогда:*

$$\sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2 = |G|$$

Определение 16. $z(h) := \{g \in G | gh = hg\}$ - *централизатор* элемента h.

Теорема 5. ***Второе соотношение ортогональности.*** *Пусть $\chi_1, \dots, \chi_r$ - все неприводимые характеры группы G. Пусть $C_1, \dots, C_r$ - классы сопряженности и $g_1 \in C_1, \dots, g_r \in C_r$. Тогда:*

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g_j)\overline{\chi_i(g_k)} = \begin{cases} |z(g_j)|, & j = k \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Утверждение 15. *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление группы G, а $\phi|_H \colon H \to \mathrm{GL}(V)$ его ограничение на подгруппу H. Тогда из неприводимости $\phi|_H$ следует неприводимость ϕ.*

Утверждение 16. *Пусть $\phi : G \to \mathrm{GL}(V), \psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ - представления группы G. Рассмотрим пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V, W)$ всех линейных отображений из V в W, тогда отображение $\gamma : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V, W)$ такое, что:*

$$\forall g \in G, \theta \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V, W) : (\gamma(g))(\theta) = \psi(g) \circ \theta \circ \phi(g^{-1})$$

будет представлением группы G.

Утверждение 17. *Пусть V, W - векторные пространства над $\mathbb{C}$. Тогда отображение $\eta : V^* \otimes W \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V, W)$ заданное правилом:*

$$\forall \lambda \in V^*, w \in W, x \in V : (\eta(\lambda \otimes w))(x) := \lambda(x)w$$

является изоморфизмом векторных пространств.
Если V, W - представления группы G, то η будет изоморфизмом представлений.

Утверждение 18. $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$

Утверждение 19. *Пусть G - любая группа, $H \subset G$ - любая подгруппа. Если $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление G, то $\phi|_H$ - представление H. Обозначение $\mathrm{Res}_H^G(V)$.*

Определение 17. Пусть G - группа, а $H \subset G$ - подгруппа. Пусть задано представление H в V. Рассмотрим векторное пространство $\mathrm{Ind}_H^G(V) := \{f : G \to V | f(hx) = h.f(x), \forall x \in G, h \in H\}$. Определим действие группы правилом $(g.f)(x) := f(xg)$.
$\mathrm{Ind}_H^G(V)$ называется *индуцированным представлением.*

Утверждение 20. $\dim \mathrm{Ind}_H^G V = \dim V[G : H]$

Теорема 6. *Пусть $g_1 \dots g_l$ полная система представителей правых смежных классов G по H, тогда:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G V}(g) = \sum_{1 \le i \le l, g_i g g_i^{-1} \in H} \chi_V(g_i g g_i^{-1})$$

Следствие 1. *Пусть $g_1 \dots g_l$ полная система представителей левых смежных классов G по H, тогда:*

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G V}(g) = \sum_{1 \le i \le l, g_i^{-1} g g_i \in H} \chi_V(g_i^{-1} g g_i)$$

Теорема 7 (Двойственность Фробениуса)**.** *Пусть G - группа, $H \subset G$ подгруппа, V - представление G,W - представление H. Тогда существует изоморфизм векторных пространств:*

$$\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G V, W) \cong \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G W)$$

Следствие 2. *Пусть G - группа, $H \subset G$ подгруппа, V - представление G,W - представление H. Тогда*

$$(\chi_{\mathrm{Res}_H^G V}, \chi_W)_H = (\chi_V, \chi_{\mathrm{Ind}_H^G W})_W$$

Определение 18. Пусть G - любая группа. Подгруппа порожденная элементами вида $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ называется *коммутантом* и обозначается $[G, G]$.

Утверждение 21. *Любая подгруппа содержащая коммутант является нормальной.*

Утверждение 22. *G/H - абелева тогда и только тогда, когда $[G, G] \subset H$.*

Замечание. В любой непонятной ситуации факторизуй по коммутанту. Таким образом если у нас есть группа G мы можем получить серию её одномерных представлений.