Теория Вероятностей

Автор конспекта Федоров И.И.
По лекциям Савинова Е.А.

25 июня 2015 г.

Содержание

1 Вероятностное пространство

Определение 1. Теория вероятностей – раздел математики, изучающий случайные события. Теория вероятностей занимается явлениями, которые могут произойти некоторое число раз и обладают свойством статистической устойчивости.

Определение 2. *Случайное событие* – событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти.

Определение 3. Событие называется *достоверным*, если в результате испытаний оно обязательно происходит.

Определение 4. Событие называется *невозможным*, если в результате испытаний оно произойти не может.

Определение 5. События называются *несовместными*, если в результате испытания они не могут произойти вместе.

Определение 6. Совокупность $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ω называется *алгеброй множеств*, если выполняются условия:

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$
2. $\forall A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}, \bar{A} \in \mathfrak{A}$

Определение 7. Алгебра $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω называется *σ-алгеброй множеств*, если для любого счетного набора множеств $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A} : \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}$.

Определение 8. Пусть $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ – набор алгебр подмножеств множества Ω, тогда их пересечение это множество $\{A \subset \Omega : A \in \mathfrak{A}_i, \forall i \in I\}$.

Утверждение 1. *Пересечение σ-алгебр является σ-алгеброй.*

Определение 9. Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторая совокупность подмножеств Ω, пересечение всех σ-алгебр содержащих $\mathfrak{A}$ называется наименьшой σ-алгеброй содержащей $\mathfrak{A}$ или σ-алгеброй порожденной $\mathfrak{A}$, и обозначается $\sigma(A)$.

Определение 10. Неотрицательная функции $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ называется *конечно-аддитивной мерой*, если $\forall : A, B \in \mathfrak{A}, A \cap B = \emptyset : \mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Определение 11. Конечно-аддитивная мера $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ называется счетно-аддитивной, если $\forall A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{A}, A_i, A_j = \emptyset, i \neq j : \mu\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Определение 12. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, где Ω – пространство элементарных событий, $\mathfrak{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω,