Constraint Programmierung für Scheduling

Ekaterina Tikhoncheva

10. Juli 2014

Agenda

1. Constraint Programmierung
   - Constraint Satisfaction Problem
   - Lösung des Constraint Satisfaction Problems
   - Constraint Optimization Problem
   - Vorteile der Constraint Programmierung
2. Anwendung von CP zur Lösung der Scheduling Probleme
   - Minimieren der gewichteten Gesamtverspätung
   - Job Shop Scheduling
   - Timetabling

Überblick

Dame oder Tiger?

Dame oder Tiger?

Ein Gefangener soll zwischen drei Türen wählen. Hinter einer von zwei Türen ist entweder eine Dame oder ein Tiger versteckt. Das dritte Zimmer ist leer. Auf jeder Tür hängt ein Schild. Das Schild auf der Tür zur Dame sagt Wahrheit. Das Schild auf der Tür zum Tiger lügt. Das Schild ins leere Zimmer kann sowohl lügen, als auch Wahrheit sagen.

I	II	III
Zimmer III ist leer.	Der Tiger ist im Zimmer I.	Dieses Zimmer ist leer.

Dame oder Tiger?

I	II	III
Zimmer III ist leer.	Der Tiger ist im Zimmer I.	Dieses Zimmer ist leer.

Variablen: $r_1, r_2, r_3 \in \{l, t, e\}$ für Zimmer ($l = Dame, t = Tiger, e = leer$)
$s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}$ für Schilder.

Nebenbedingungen: $r_i = t \rightarrow s_i = 0,\ r_i = l \rightarrow s_i = 1$
$s_1 = l \rightarrow r_3 \neq e,\ s_2 = l \rightarrow r_1 \neq t,\ s_3 = l \rightarrow r_3 \neq e$

Lösung:

Dame oder Tiger?

I	II	III
Zimmer III ist leer.	Der Tiger ist im Zimmer I.	Dieses Zimmer ist leer.

Variablen: $r_1, r_2, r_3 \in \{l, t, e\}$ für Zimmer ($l = Dame, t = Tiger, e = leer$)
$s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}$ für Schilder.

Nebenbedingungen: $r_i = t \rightarrow s_i = 0$, $r_i = l \rightarrow s_i = 1$
$s_1 = l \rightarrow r_3 \neq e$, $s_2 = l \rightarrow r_1 \neq t$, $s_3 = l \rightarrow r_3 \neq e$

Lösung:
Aus $r_i = l \rightarrow s_i = 1$ folgt $r_3 \neq l. \Rightarrow r_3 \in \{t, e\}$

Dame oder Tiger?

I	II	III
Zimmer III ist leer.	Der Tiger ist im Zimmer I.	Dieses Zimmer ist leer.

Variablen: $r_1, r_2, r_3 \in \{l, t, e\}$ für Zimmer ($l = Dame, t = Tiger, e = leer$)
$s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}$ für Schilder.
Nebenbedingungen: $r_i = t \rightarrow s_i = 0$, $r_i = l \rightarrow s_i = 1$
$s_1 = l \rightarrow r_3 \neq e$, $s_2 = l \rightarrow r_1 \neq t$, $s_3 = l \rightarrow r_3 \neq e$
Lösung:
Aus $r_i = l \rightarrow s_i = 1$ folgt $r_3 \neq l. \Rightarrow r_3 \in \{t, e\}$
Angenommen $r_2 = l$. Daraus folgt $s_2 = 1$, $r_1 = t$, $s_1 = 0$
$r_3 = e$. Aber dann ist $s_1 = 0$. D.h. Zimmer III kann nicht leer sein, wir sind zu einem Widerspruch gekommen.

Dame oder Tiger?

I	II	III
Zimmer III ist leer.	Der Tiger ist im Zimmer I.	Dieses Zimmer ist leer.

Variablen: $r_1, r_2, r_3 \in \{l, t, e\}$ für Zimmer ($l = Dame, t = Tiger, e = leer$)
$s_1, s_2, s_3 \in \{0, 1\}$ für Schilder.
Nebenbedingungen: $r_i = t \rightarrow s_i = 0$, $r_i = l \rightarrow s_i = 1$
$s_1 = l \rightarrow r_3 \neq e$, $s_2 = l \rightarrow r_1 \neq t$, $s_3 = l \rightarrow r_3 \neq e$
Lösung:
Aus $r_i = l \rightarrow s_i = 1$ folgt $r_3 \neq l. \Rightarrow r_3 \in \{t, e\}$
Angenommen $r_2 = l$. Daraus folgt $s_2 = 1$, $r_1 = t$, $s_1 = 0$ $r_3 = e$. Aber dann ist $s_1 = 0$. D.h. Zimmer III kann nicht leer sein, wir sind zu einem Widerspruch gekommen.
Angenommen $r_1 = l$. Dann gilt: $s_1 = 1$, $r_2 = t$, $s_2 = 0$ $r_3 = e$, $s_3 = 1$. Die Lösung ist gefunden!

Was ist Constraint Programmierung?

Die Constraint Logische Programmierung (engl. Constraint Logic Programming) oder einfach Constraint Programmierung (kurz *CP*) ist ein Ansatz zur Lösung eines Bedingungserfüllung- oder Optimierungsroblems. Die zwei Hauptprinzipien von CP sind:

- Deduktion der zusätzlichen Nebenbedingungen aus den vorhandenen Nebenbedingungen durch logische Folgerungen
- Anwendung der Suchalgorithmen zum Untersuchen des Lösungsraums

Ursprünglich stammt es aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz und gilt als eine Erweiterung der Ideen der logischen Programmierung.

Constraint Satisfication Problem

Definition

Ein Constraint Satisfication Problem (CSP) ist definiert durch

- die Menge $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ diskrete Variablen zusammen mit ihren endlichen Definitionsbereichen $\{D_1, D_2, , \ldots D_n\}$
- die Menge der Bedingungen $C_{ijk\ldots}$ zwischen den Variablen $x_i, x_j, x_k, \ldots$, die die möglichen Werte der Variablen zusätzlich einschränken.

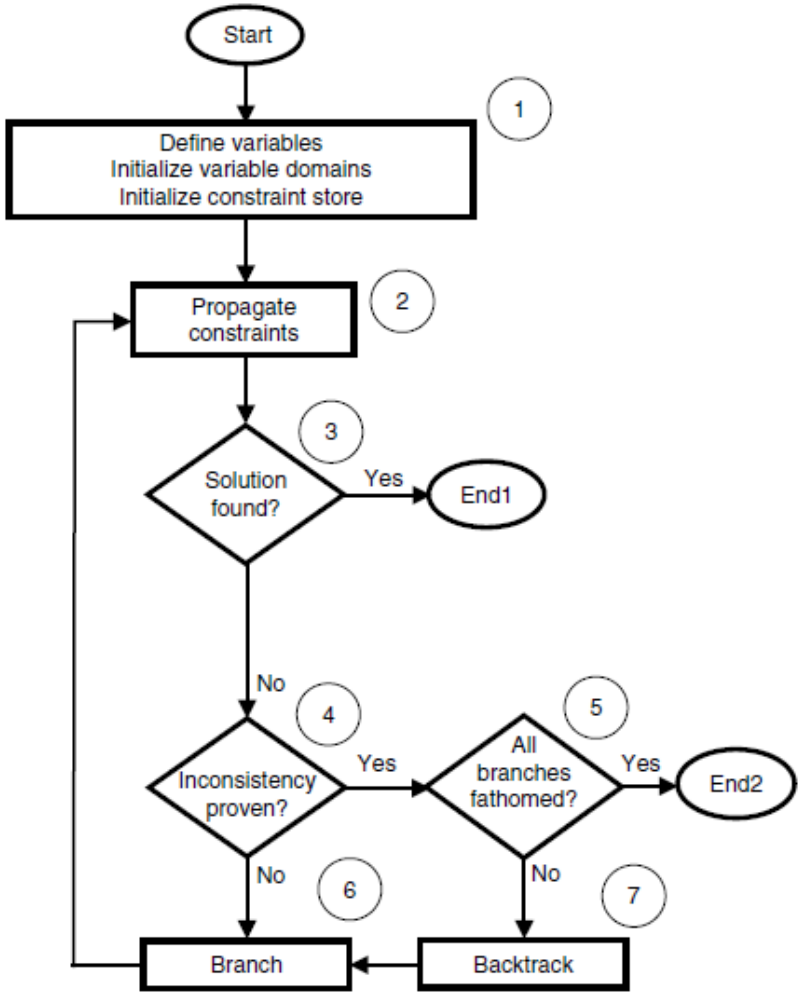
Ein CSP besitzt eine **(zulässige) Lösung**, wenn eine Zuweisung der Werte aus den Definitionsbereichen zu jeder Variable existiert, so dass alle Bedingungen erfüllt sind.

Die Variablen können von verschiedenen Typen sein: ganzzahlig, boolean, symbolisch, Mengen.

Dafür gibt es verschiedene Typen der Bedingungen:

- mathematische (Fertigstellungszeit = Startzeit + Bearbeitungszeit),
- disjunktive (Jobs J_1 und J_2 müssen an verschiedenen Maschinen abgearbeitet werden),
- relational (die Maschine I kann höchstens vier Jobs abarbeiten),
- explizite (die Jobs J_1, J_2 und J_5 können nur auf der Maschine 1 abgearbeitet werden).

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

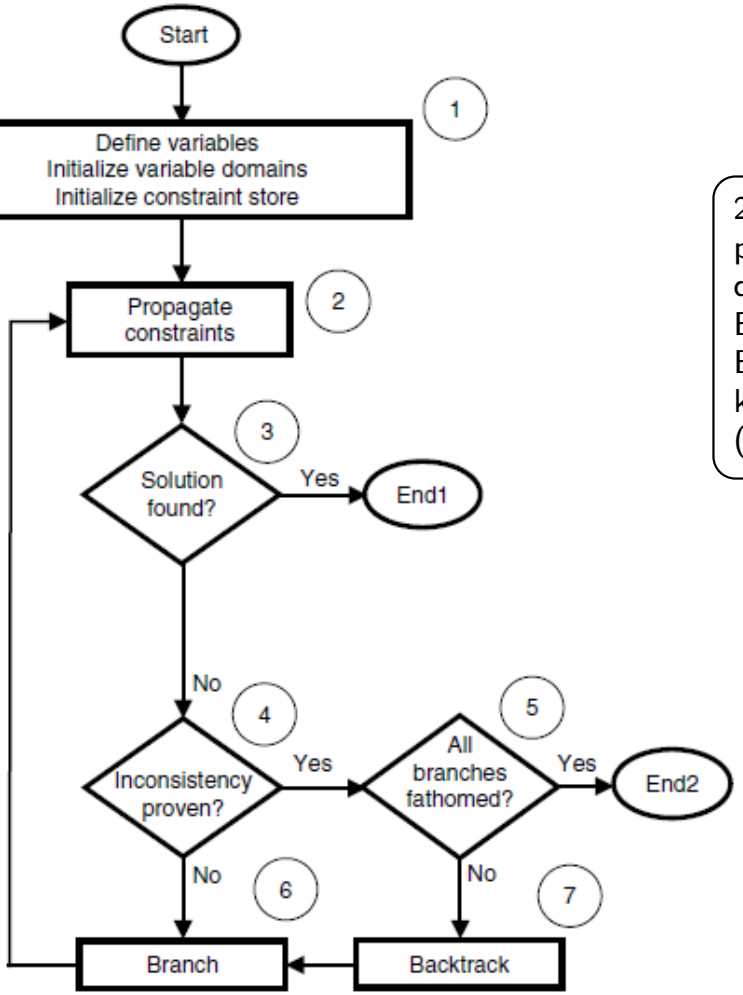


1: Initialisiere das Modell

Bild aus [3]

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

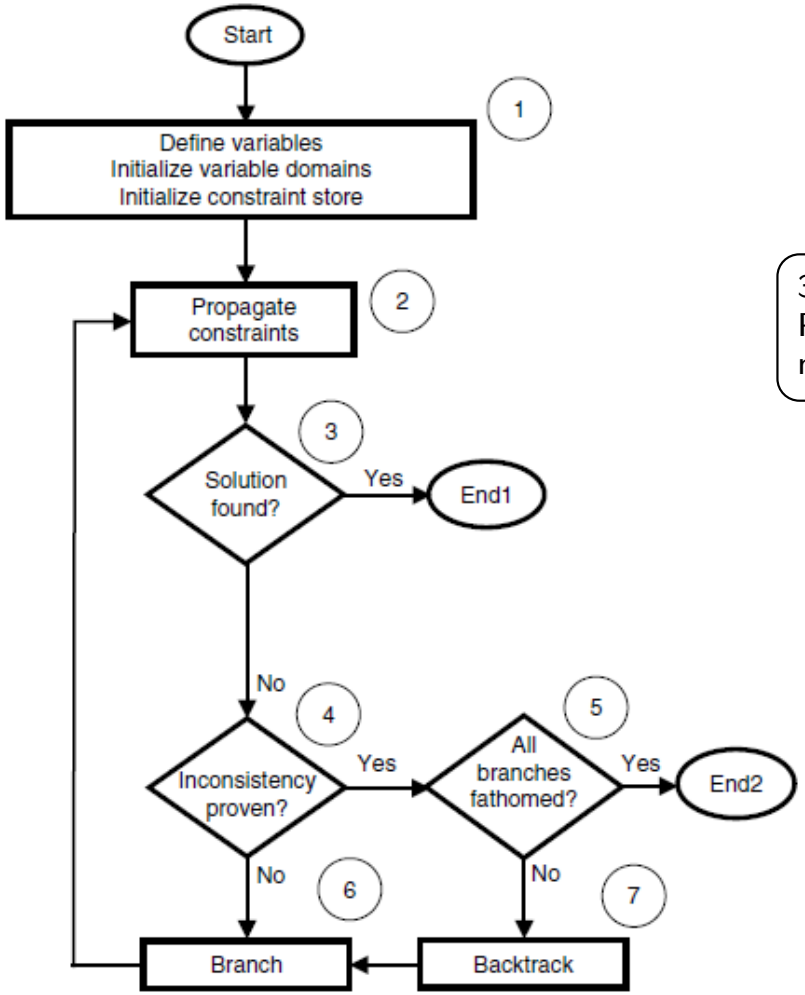
Beispiel



2: **Bedingungsfortpflanzung** prüft die Widerspruchsfreiheit der im Problem vorhandenen Bedingungen, um die neuen Bedingungen ableiten zu können
(eng. arc consistency checking)

Bild aus [3]

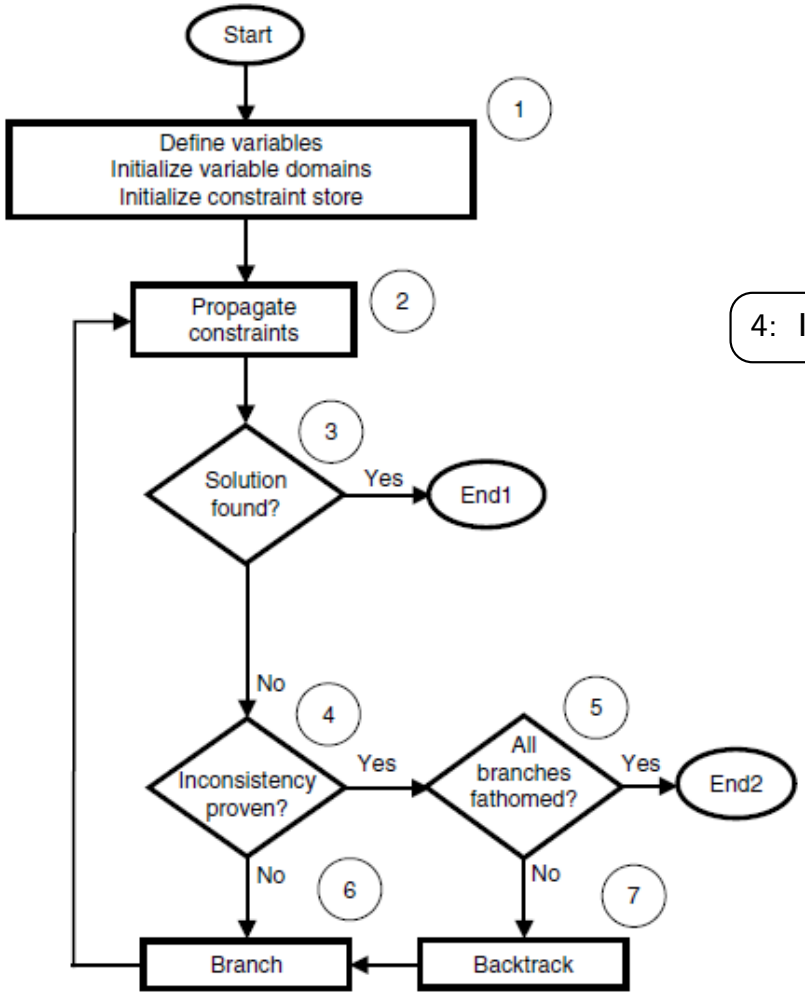
Lösung des Constraint Satisfaction Problems



3: Falls eine Lösung des Problems gefunden ist, terminiert der Algorithmus

Bild aus [3]

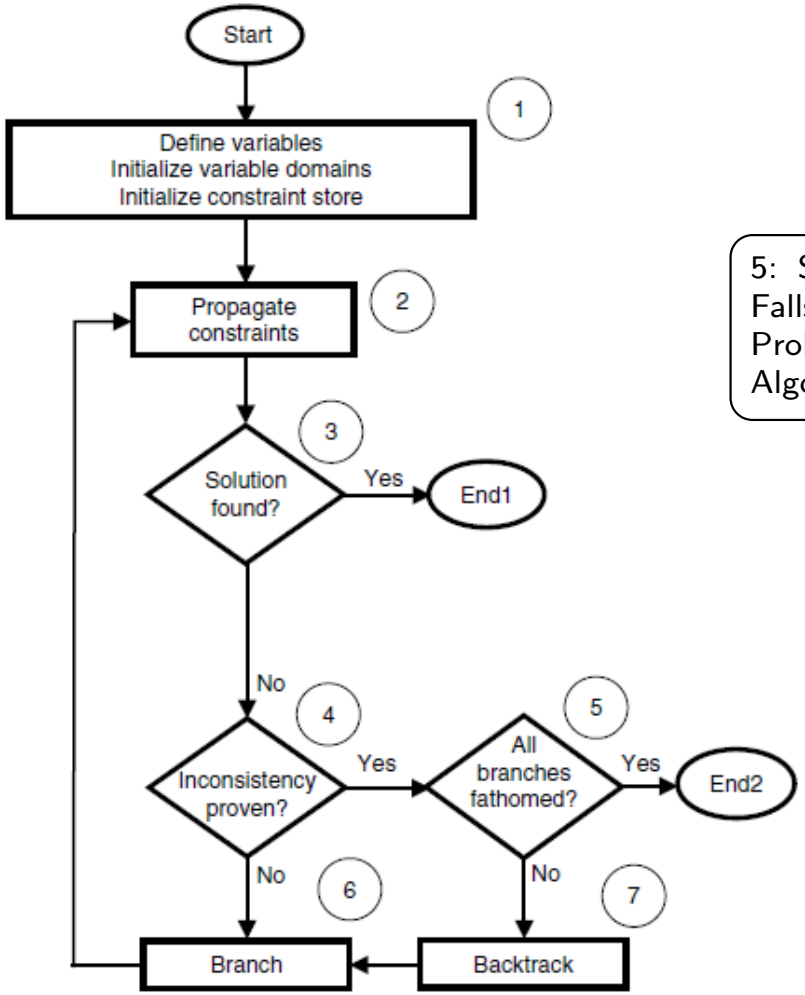
Lösung des Constraint Satisfaction Problems



4: Ist das Problem widersprüchlich?

Bild aus [3]

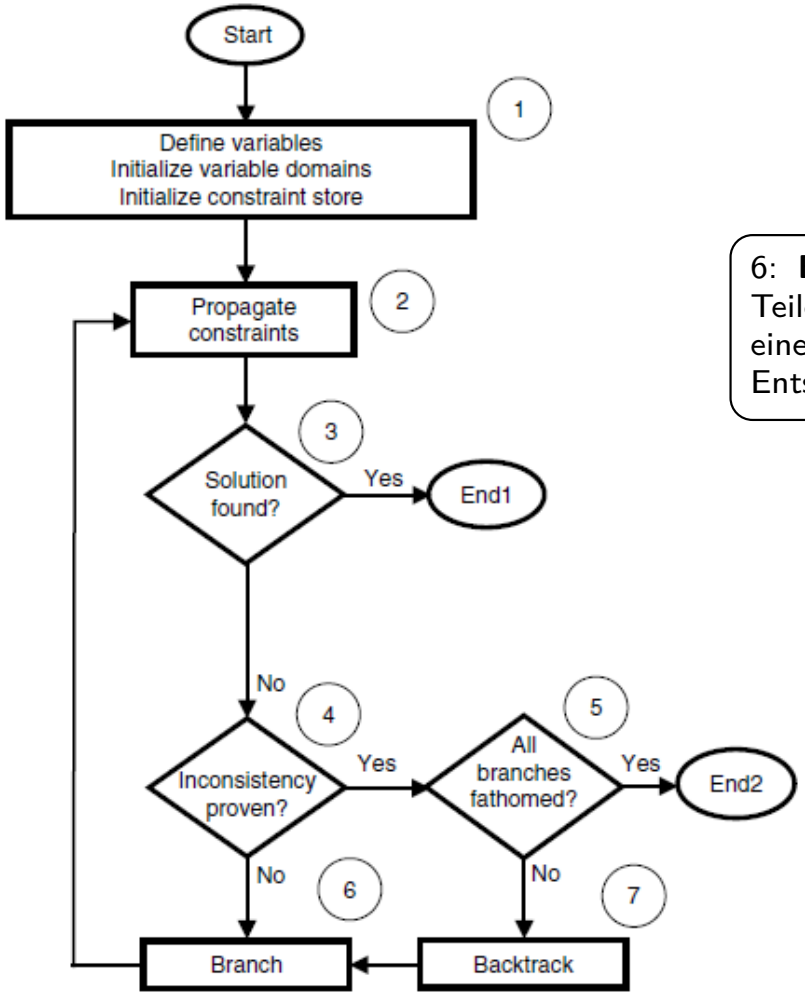
Lösung des Constraint Satisfaction Problems



5: Sind alle Teilprobleme untersucht? Falls ja, dann ist das ursprüngliche Problem widersprüchlich und der Algorithmus terminiert.

Bild aus [3]

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

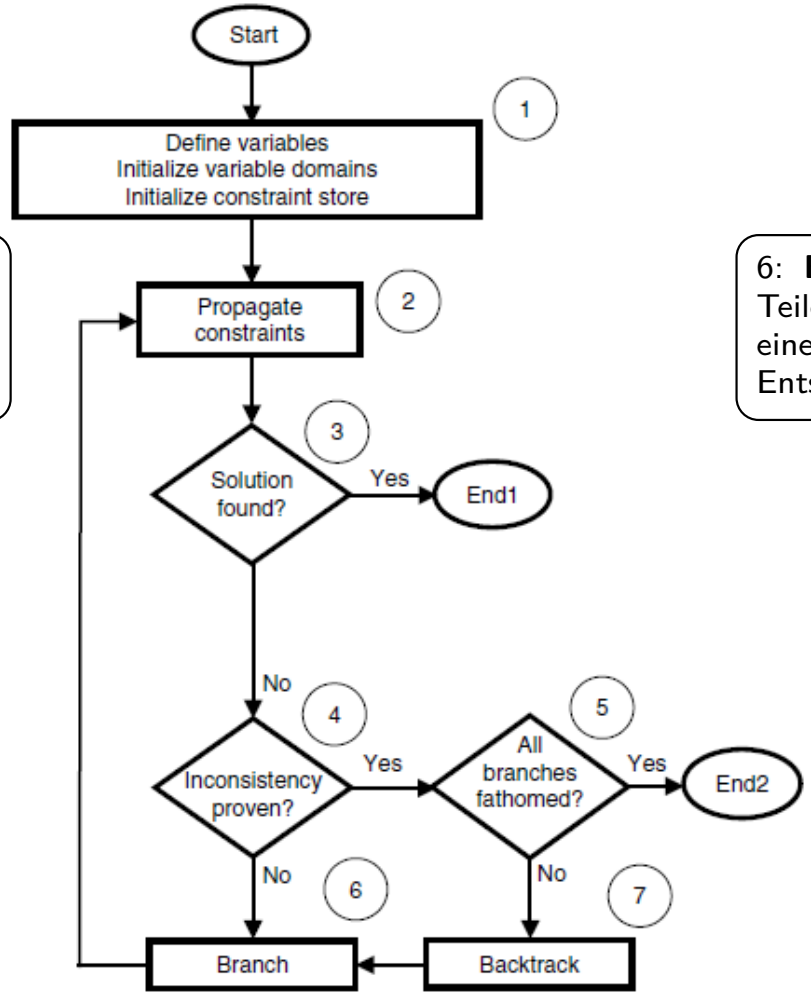


6: **Branching**
Teile das ursprüngliche Problem in eine Menge von Teilproblemen $\rightsquigarrow$ Entscheidungsbaum

Bild aus [3]

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

oft das Backtracking-Verfahren '–' ineffizient
Alternativ lookahead Verfahren (z.B. Forward checking, MAC)



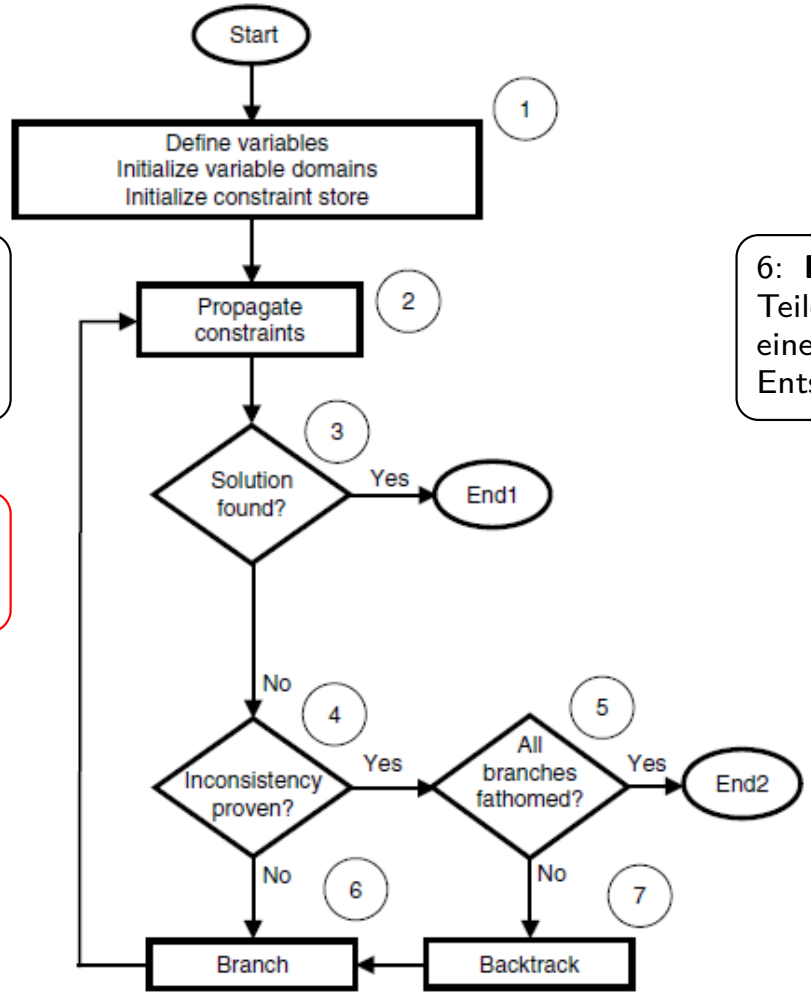
6: **Branching**
Teile das ursprüngliche Problem in eine Menge von Teilproblemen ⇝ Entscheidungsbaum

Bild aus [3]

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

oft das Backtracking-Verfahren '–' ineffizient
Alternativ lookahead Verfahren (z.B. Forward checking, MAC)

?: wo wird als erstes verzweigt z.B in die Variable mit dem kleinsten Definitionsbereich



6: **Branching**
Teile das ursprüngliche Problem in eine Menge von Teilproblemen ⇝ Entscheidungsbaum

Bild aus [3]

Lösung des Constraint Satisfaction Problems

oft das Backtracking-Verfahren '–' ineffizient
Alternativ lookahead Verfahren (z.B. Forward checking, MAC)

?: wo wird als erstes verzweigt
z.B in die Variable mit dem kleinsten Definitionsbereich

?:welchen Wert soll die verzweigte Variable annehmen
Z.B den kleinsten Wert aus dem Definitionsbereich

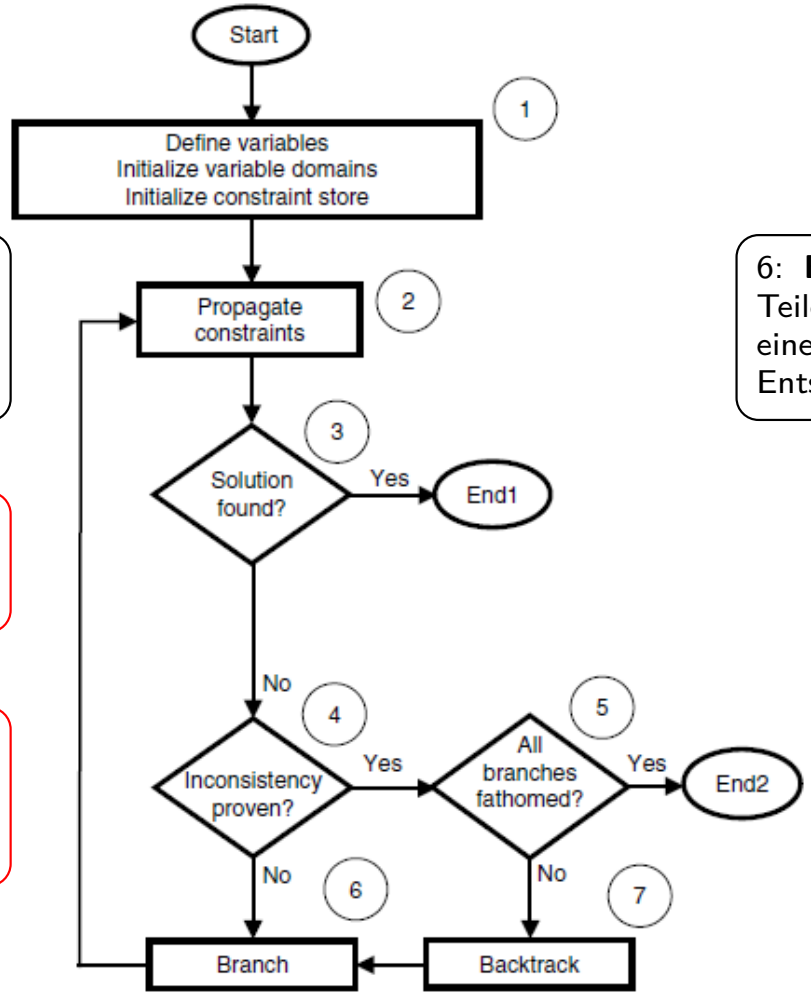
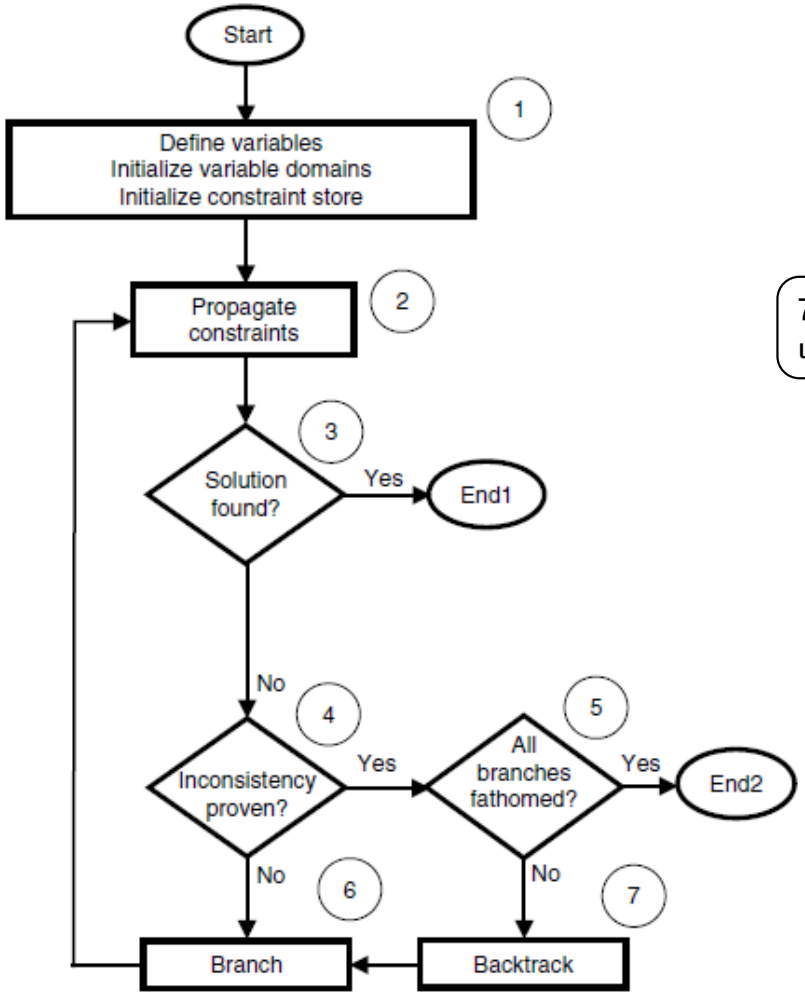


Bild aus [3]

6: **Branching**
Teile das ursprüngliche Problem in eine Menge von Teilproblemen ⇝ Entscheidungsbaum

Lösung des Constraint Satisfaction Problems



7: Wähle nächstes Teilproblem und versuche es zu lösen

Bild aus [3]

Constraint Optimization Problem

Constraint Optimization Problem (COP) kann einfach aus dem CSP erweitert werden:

- Angenommen unser COP hat eine Zielfunktion Z, die minimiert werden soll.
- Ohne Z haben wir ein CSP und seine Lösung können wir mit Hilfe des Algorithmus finden.

Constraint Optimization Problem

Constraint Optimization Problem (COP) kann einfach aus dem CSP erweitert werden:

- Angenommen unser COP hat eine Zielfunktion Z, die minimiert werden soll.
- Ohne Z haben wir ein CSP und seine Lösung können wir mit Hilfe des Algorithmus finden.
- Sobald eine Lösung des CSP gefunden wurde, berechne den Wert der Zielfunktion Z0 und füge die Bedingung $Z < Z0$ zum Problem hinzu
- Löse neues CSP und so weiter, bis es zu einem Widerspruch kommt und alle Zweige im Suchbaum untersucht wurden.

Constraint Optimization Problem

Constraint Optimization Problem (COP) kann einfach aus dem CSP erweitert werden:

- Angenommen unser COP hat eine Zielfunktion Z, die minimiert werden soll.
- Ohne Z haben wir ein CSP und seine Lösung können wir mit Hilfe des Algorithmus finden.
- Sobald eine Lösung des CSP gefunden wurde, berechne den Wert der Zielfunktion Z0 und füge die Bedingung $Z < Z0$ zum Problem hinzu
- Löse neues CSP und so weiter, bis es zu einem Widerspruch kommt und alle Zweige im Suchbaum untersucht wurden.
- Die zuletzt gefundene zulässige Lösung ist somit die Lösung des COP.

Vorteile der Constraint Programmierung

- Analog zu den Programmiersprachen ist die Benutzung einer Variablen als Indizes von anderen Variablen erlaubt
  $\rightsquigarrow$ Reduktion der Anzahl der Entscheidungsvariablen

Z.B. Berechnung der Kosten einer Jobreihenfolge

IP: $n(n-1)$ Variablen
$y[i,j] \in \{0,1\}$ 1, falls Job i ein direkter Vorgänger des Jobs j ist

Gesamter Preis der Jobreihenfolge :
$\sum_{i,j,i \neq j} cost[i,j]y[i,j]$

CP: n Variablen
$job[k] =$ Index des k-ten Jobs in der Reihenfolge

Gesamter Preis der Jobreihenfolge :
$\sum_{k>1} cost[job[k-1], job[k]]$

- # Einfachere Notation der Nebenbedingungen

Angenommen wir haben ein Problem mit zwei Maschinen. Die Variablen *MaschineA* und *MaschineB* können den Wert 0 haben, falls es keinen Job gibt, der auf der Maschine abgearbeitet werden muss, oder 1 ansonsten. Wir suchen nach einer solchen Zuordnung der Jobs zu diesen Maschinen, so dass nur eine Maschine in Betrieb sein kann.

IP: $MaschineA + MaschineB = 1$

CP: $MaschineA \neq MaschineB$

Seien die Variablen *MaschineA* und *MaschineB* ganzzahlig und ihre Werte sind die Nummern der Jobs, die auf diesen Maschinen abgearbeitet werden.
Die Bedingung lautet „ein Job kann nicht auf zwei Maschinen abgearbeitet werden“.

IP:
$(MaschineA - MaschineB - \epsilon + \sigma BigM \geq 0)$
$(MaschineB - MaschineA - \epsilon + (1 - \sigma)BigM \geq 0)$
$\sigma \in 0, 1$

CP:
$MaschineA \neq MaschineB$

Die Fertigstellungszeit-Bedingung: falls Job *A* und Job *B* auf einer Maschine abgearbeitet werden, dann muss die Bearbeitung von Job *A* früher fertig werden, als die Bearbeitung vom Job *B* beginnt, oder umgekehrt.

IP:
$(A.start - B.end - \epsilon + \sigma BigM \geq 0)$
$(B.start - A.end - \epsilon + (1 - \sigma)BigM \geq 0)$
$\sigma \in 0, 1$

CP:
$(A.start > B.end) Xor (B.start > A.end)$

Allgemein gilt:

IP:

- wichtig ist die mathematische Struktur des Problems
- zentrale Rolle spielt die Zielfunktion
- gesucht wird eine Menge der Nebenbedingungen, die ausreichend ist, um den Kernpunkt des Problems zu beschreiben

CP:

- lässt großen Spielraum im Entwerfen von Nebenbedingungen und Suchalgorithmen
- konzentriert sich auf Nebenbedingen
- so viele Nebenbedingungen, wie möglich

Überblick

$1||\sum w_j T_j$ I

Es ist ein bekanntes *NP*-hartes Problem.

Es gibt einen Lösungsansatz mittels Dynamischer Programmierung, der einen pseudopolynomialen Algorithmus liefert.

Die einfachste Formulierung des Problems in CP:

- n Variablen s_j mit dem Definitionsbereich $[0 \cdots \sum_{j=1..n} p_j]$ für Startzeiten
- n Variablen C_j mit dem Definitionsbereich $[0 \cdots \sum_{j=1..n} p_j]$ für die Fertigstellungszeiten von Jobs.

$1||\sum w_j T_j$ II

CP-Formulierung

$$\min \sum_j w_j T_j$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & C_j = p_j + s_j && \forall j = 1..n \\ & C_j \leq s_k \vee C_k \leq s_j && \forall j, k = 1..n,\ k > j \\ & T_j = \max\{0, C_j - d_j\} && \forall j = 1..n \end{aligned}$$

Insgesamt: $2n$ Variablen und $\frac{n(n+1)}{2}$ Nebenbedingungen.

$1||\sum w_j T_j$ III

Eine andere Formulierung ist möglich:

- Ersetze n Variablen s durch n Variablen pos mit den Definitionsbereichen $[1..n]$, wobei $pos[j]$ die Position des Jobs j in der Bearbeitungsreihenfolge ist.

$$pos_j \neq pos_k \qquad \forall j, k = 1..n,\ k > j$$
$$pos_j > pos_k \Leftrightarrow C_j \geq C_k + p_j \qquad \forall j, k = 1..n,\ k \neq j$$
$$pos_j = 1 \Rightarrow C_j = p_j \qquad \forall j = 1..n$$

Insgesamt: $2n$ Variablen und $\frac{3n^2-n}{2}$ Nebenbedingungen, aber die Optimierung ist viel langsamer

$1||\sum w_j T_j$ IV

Weitere Bedingungen:

Wird ein Job auf der Position j platziert, ist die untere Schranke seiner Fertigstellungszeit gleich der Summe seiner Bearbeitungszeit und der Summe p_i von $j-1$ Jobs mit den kleinsten Bearbeitungszeiten.

$$pos_j = k \wedge j <= k \quad \Rightarrow \quad C_j \geq \sum_{l<=k} p_l$$

$$pos_j = k \wedge j > k \quad \Rightarrow \quad C_j \geq p_j + \sum_{l<k} p_l$$

Mögliche Heuristik für das Suchverfahren WMDD („*weighted modified due date* “)

$Jm||C_{max}$ I

Die Aufgabe ist n Jobs zu m Maschinen zuzuordnen, wobei jeder Job j aus einer Menge von Operationen O_j besteht, die in einer bestimmten Reihenfolge abgearbeitet werden müssen.

Zur Modellierung dieses Problems verwendet man so genannte disjunktive Graphen und zur Lösung das Branch & Bound Verfahren.

$Jm||C_{max}$ II

CP-Formulierung:

- definiere eine Variable s_o für die Startzeit der Operation $o \in O_j$, $s_o \in \{0, 1, \ldots C\}$, wobei $C_{max} < C$ ist.
- Oder besser: $s_o \in [\sum_{o' \in pred(o)} p_{o'} \ldots \ C - p_o - \sum_{o' \in succ(o)} p_{o'}]$, wobei $pred(o)$ der Vorgänger und $succ(o)$ ein Nachfolger von einer Operation o sind.

Die Nebenbedingungen

$$s_o + p_o \leq s_{o'} \qquad o, o' \in O_j,\ o' \in succ(o),\ j = 1 \ldots n$$
$$s_o + p_o \leq C \qquad o \in O$$
$$s_o + p_o \leq s_{o'} \ \vee \ s_{o'} + p_{o'} \leq s_o \qquad o, o' \in O, o \neq o', m_o = m_{o'}$$

wobei O die Menge aller Operationen bezeichnet.

$Jm||C_{max}$ III

Wie kann man die Bedingungsfortpflanzung für dieses Modell effektiv durchführen?
Definiere für jede o

- die frühst möglichste Startzeit $est(o)$
- die spät möglichste Startzeit $lst(o)$

Aus $s_o + p_o \leq s_{o'}$ folgt $s_o + p_0 \leq lst(o')$ und $est(o) + p_o \leq p_{o'}$
$\Rightarrow$ lösche die Werte größer als $lst(o') - p_o$ und kleiner als $est(o) + p_o$ aus den Definitionsbereichen von s_o und $s_{o'}$.

Aus $(s_o + p_o \leq s_{o'}) \vee (s_{o'} + p_{o'} \leq s_o)$ folgt
$(s_o \leq lst(o') - p_o) \vee (s_o \geq est(o') + p_{o'})$
$\Rightarrow$ falls $lst(o') - p_o + 1 \leq est(o') + p_{o'} - 1$ gilt, lösche
$[lst(o') - p_o + 1 \ldots est(o') + p_{o'} - 1]$ aus dem Definitionsbereich von s_o.

Timetabling I

Aufgabe

Einen Spielplan für 9 Basketball-Teams erstellen. Es sollen 18 Termine festgelegt werden, sodass an jedem Termin 8 Teams spielen und ein Team nicht spielt (d.h. hat „bye“). Alle Termine sollten in neun Wochen mit einem Wochenende und einen Arbeitstag pro Woche geplant werden.

Timetabling II

Das Problem wird in drei Phasen gelöst:

- Generierung von einem Muster (engl. pattern) für jedes Team, das für jeden Termin feststellt, ob das Team ein Heim-, Auswärtsspiel oder „bye“ spielen kann.
- Suche nach einer Menge von 9 Mustern, die die Erstellung eines Zeitplanes ermöglichen.
- Generierung eines Zeitplanes, indem man anhand des Zeitplans die Zuordnung von Spielen zu den Teams und Paare von Gegnern bestimmt.

Timetabling III

Phase 1: Pattern-Generierung (CSP)

Binäre Variablen $h_j, a_j, b_j, j = 1 \ldots 18$, für Heimspiele, Auswärtsspiele und byes

- jedes Team hat nur ein Spiel an jedem Termin: $h_j + a_j + b_j = 1$
- s.g. Mirroring: Termine sind paarweise in die vorgegebene Menge m gruppiert, jedes Paar bezeichnet Spiele der gleichen Teams: $h_j = a_{j'},\ a_j = h_{j'},\ b_j = b_{j'}\ (j, j') \in m$
- die beiden letzten Spielen können nicht beide Auswärtsspiele sein: $a_{17} + a_{18} = 2$
- Es sind nicht mehr als zwei Auswärtsspiele nacheinander erlaubt: $a_j + a_{j+1} + a_{j+2} < 3$
- Es sind nicht mehr als zwei Heimspiele nacheinander erlaubt: $h_j + h_{j+1} + h_{j+2} < 3$

Timetabling IV

- Es sind nicht mehr als drei Auswärtsspiele oder byes nacheinander erlaubt:
  $a_j + b_j + a_{j+1} + b_{j+1} + a_{j+2} + b_{j+2} + a_{j+3} + b_{j+3} < 4$
- Es sind nicht mehr als vier Heimspiele oder byes nacheinander erlaubt:
  $h_j + b_j + h_{j+1} + b_{j+1} + h_{j+2} + b_{j+2} + h_{j+3} + + b_{j+3} + h_{j+4} + b_{j+4} < 5$
- An allen Wochenenden spielt jedes Team vier Heim-, vier Auswärtsspiele und ein bye: $\sum_{j \in \{2,4,\ldots 18\}} h_j = 4$, $\sum_{j \in \{2,4,\ldots 18\}} a_j = 4$, $\sum_{j \in \{2,4,\ldots 18\}} b_j = 1$
- Jedes Team spielt ein Heimspiel oder bye mindestens an zwei der ersten fünf Wochenenden $\sum_{j \in \{2,4,6,8,10\}} (h_j + b_j) \geq 2$

Timetabling V

Die effektivste Suchstrategie in diesem Fall ist das Durchzählen der möglichen Werte vom h, a, b in der Reihenfolge $h_1, a_1, b_1, h_2, a_2 \ldots$.

Phase 2: Menge von Mustern (CSP)

$$\sum_i x_i = 9$$

$$\sum_i h_{ij} x_i = 4, \quad \sum_i s_{ij} x_i = 4, \quad \sum_i b_{ij} x_i = 1 \qquad j = 1 \ldots 18$$

$$x_i + x_{i'} < 1 \qquad j = 1 \ldots 18, \; i, i' = 1 \ldots 9, \; i \neq i',$$

$$(h_{ij} = 0 \vee a_{i'j} = 0) \wedge (a_{ij} = 0 \vee h_{i'j} = 0)$$

Timetabling VI

Phase 3: Erstellung von einem zulässigen Zeitplan

Ordne erst jedes Team zu einem von 9 vorhandenen Mustern zu und danach suche es für jedes Team nach den möglichen Gegnern an jedem Termin.

- formuliere die Aufgabe als ein CP Modell, das jeweils für jedes Team und jeden Termin einen Gegner und eine Spielart (Heim-/Auswärtsspiel oder bye) berechnet
- Die Nebenbedingungen werden von allgemeinen Bedingungen an ein Rundenturnier und Bedingungen aus Phase 1 bestimmt.

Timetabling VII

Phase	IP SPARCstation 20	CP Pentium II, 233 MHz 64 MB RAM	Ergebnis der Phase
	CPLEX 4.0	Friar Tuck	
1	nicht gegeben	0.44 sec	38 Mustern
2	< 1 *min*	„Sekunden“	17 Menge von 9 Mustern
3	24 Stunden	53.7*sec*	179 Zeitpläne

References I

[1] S. C. Brailsford, C. N. Potts, and B. M. Smith. Constraint satisfaction problems: Algorithms and applications. *European Journal of Operation Research*, 119:557 – 581, 1999.

[2] M. Henz. Scheduling a major college basketball conference. *Operations Research*, 49:163–168, 2002.

[3] J. J. Kanet, S. L. Ahire, and M. F. Groman. Constraint programming for scheduling. In J. Y. T. Leung, editor, *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Taylor & Francis, 2004.

[4] R. Smullyan. *The Lady or the Tiger?: and Other Logic Puzzles, including a mathematical novel that features Gödel's great discovery*. Times Books, 1982.

[5] Jannik Strötgen. Beamer theme, 2013.

The End

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!