

选择题 (共8小题, 每题5分)

1. 设集合 $M = \{x|x < 1\}$, $N = \{x|0 < x \leq 1\}$, 则 $M \cup N = ()$.

A. $\{x|x < 1\}$

B. $\{x|0 < x < 1\}$

C. $\{x|x \leq 1\}$

D. $\{x|0 < x \leq 1\}$

2. 下列函数中, 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函数的是 ().

A. $y = 3^x$

B. $y = x^2 - 2x + 3$

C. $y = x$

D. $y = -x^2 - 4x + 3$

3. 计算 $\log_4 16 + 9^{\frac{1}{2}}$ 等于 ().

A. $\frac{7}{3}$

B. 5

C. $\frac{13}{3}$

D. 7

4. 函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x} + \frac{1}{x+3}$ 的定义域为 ().

A. $(-3, 0]$

B. $(-3, 1]$

C. $(-\infty, -3) \cup (-3, 0]$

D. $(-\infty, -3) \cup (-3, 1]$

5. 函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+4x-5}$ 的单调递增区间是 ().

A. $[1, 2]$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(-\infty, 2]$

D. $[2, +\infty)$

6. 已是偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 则满足 $f(2x-1) > f\left(\frac{1}{4}\right)$ 的 x 的取值范围是 ().

A. $\left(-\infty, \frac{5}{8}\right)$

B. $\left(\frac{5}{8}, +\infty\right)$

C. $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}, +\infty\right)$

7. 若函数 $f(x) = a^{|x+1|}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的值域为 $[1, +\infty)$, 则 $f(-4)$ 与 $f(0)$ 的关系是 ().

A. $f(-4) > f(0)$

B. $f(-4) = f(0)$

C. $f(-4) < f(0)$

D. 不能确定

8. 对于实数 a 和 b , 定义运算 " $*$ " : $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$. 设 $f(x) = (2x-1) * (x-2)$. 如果关于 x 的方程 $f(x) = m$ ($m \in \mathbf{R}$) 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 , 则 m 的取值范围是 ().

A. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$

B. $\left[0, \frac{9}{4}\right)$

C. $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

D. \emptyset

填空题 (共6小题, 每小题5分)

9. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____ .

10. 若 $0 < a < 1$, $b < -1$, 则函数 $f(x) = a^x + b$ 的图象不经过第 _____ 象限 .

11. 已知 $\log_2 5 = a$, $\log_8 6 = b$, 则用 a , b 表示 $\lg 6 =$ _____ .

12. 函数 $y = \frac{3x+4}{x+2} (x \leq 0)$ 的值域是 _____ .

13. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x + 3a - 8, & x \leq 0 \\ a^x, & x > 0 \end{cases}$ 满足对任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ 成立 , 则实数 a 的取值范围是 _____ .

14. 设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0$, $c > b > 0$. 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长 , 则下列结论正确的是 _____ .

(写出所有正确结论的序号)

① 对任意的 $x \in (-\infty, 1)$, 都有 $f(x) > 0$.

② 存在 $x \in \mathbf{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长 .

③ 若 $\triangle ABC$ 是顶角为 120° 的等腰三角形 , 则存在 $x \in (1, 2)$. 使 $f(x) = 0$.

解答题 (共5小题 , 共50分)

15. 已知函数 $f(x) = a^{x-1} (x \geq 0)$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$.

(1) 若 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, 求 a 的值 .

(2) 求函数 $y = f(x) (x \geq 0)$ 的值域 .

16. 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (a-1)x + a^2 - 5 = 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = \{2\}$, 求实数 a 的值 .

(2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围 .

17. 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{4x^2+1}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 , 且 $f(1) = 1$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 判断并用定义证明 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 的单调性 .

18. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 2$, $f(x+1) - f(x) = 4x - 4$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) - t < 0$ 在 $[-1, 2]$ 上恒成立 . 求实数 t 的取值范围 .

(3) 若函数 $g(x) = f(x) - mx$ 在区间 $(-1, 2)$ 内至少有一个零点 , 求实数 m 的取值范围 .

19. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + a\sqrt{1+x} + a\sqrt{1-x}$.

(1) 设 $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, 求 t 的取值范围 .

(2) 把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $h(t)$.

(3) 设 $f(x)$ 的最大值为 $M(a)$, 最小值为 $m(a)$, 记 $g(a) = M(a) - m(a)$. 求 $g(a)$ 的表达式 .

