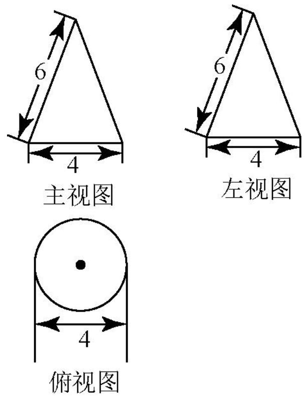
2013-2014 高一入学分班数学测试试题

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1．现有 A，B 两枚均匀的小立方体（立方体的每个面上分别标有数字1，2，3，4，5，6）．用小莉 A 立方体朝上的数字为 x，小明掷 B 立方体朝上的数字为 y 来确定点 $P(x，y)$，那么它们各掷一次所确定的点 P 落在已知抛物线 $y=-x^2+4x$ 上的概率为（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　　　B．$\frac{1}{9}$　　　　C．$\frac{1}{12}$　　　　D．$\frac{1}{18}$

2．如图是一个几何体的三视图，根据图中标注的数据可求得这个几何体的侧面积为（　　）



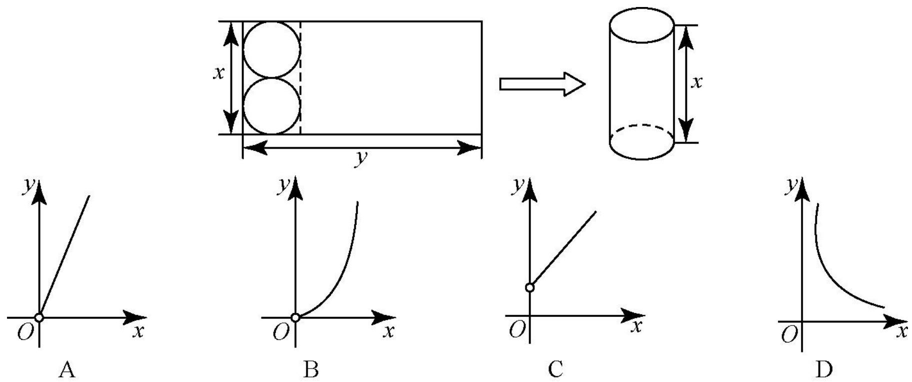
A．6π　　　　B．12π　　　　C．24π　　　　D．48π

3．已知 x 为任意实数，且 $|x-4|+|x-3|>-\frac{1}{a}$ 恒成立，则（　　）

A．$a>1$　　　　B．$-1<a<0$

C．$a<-1$ 或 $a>0$　　　　D．$0<a<1$

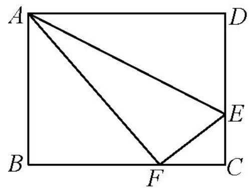
4．如图，在矩形中截取两个相同的圆作为圆柱的上、下底面，剩余的矩形作为圆柱的侧面，刚好能组合成圆柱．设矩形的长和宽分别为 y 和 x，则 y 与 x 的函数图象大致是（　　）



5．设非零实数 a，b，c 满足 $\begin{cases} a+2b+3c=0, \\ 2a+3b+4c=0, \end{cases}$ 则 $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 的值为（　　）

A．1　　　　B．$\frac{1}{2}$　　　　C．0　　　　D．$-\frac{1}{2}$

6．如图，点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，把 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折，点 D 的对称点 F 恰好落在 BC 上，已知折痕 $AE=10\sqrt{5}\,\text{cm}$，且 $\tan\angle EFC=\frac{3}{4}$，那么该矩形的周长是（　　）



A．72cm　　B．36cm　　C．20cm　　D．16cm

7．根据图 1 所示的程序，得以了 y 与 x 的函数图象，如图 2，若点 M 是 y 轴正半轴上任意一点，过点 M 作 $PQ\parallel x$ 轴交图象于点 P，Q，连接 OP，OQ．则以下结论：

①$x<0$ 时，$y=\frac{2}{x}$．②$\triangle OPQ$ 的面积为定值．③$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大．

④$MQ=2PM$．⑤$\angle POQ$ 可以等于 $90°$．

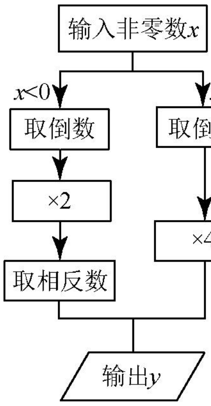


图 1

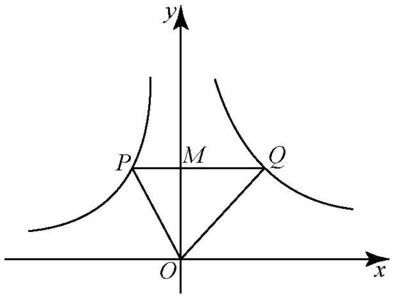


图 2

A．①②④　　B．②④⑤　　C．③④⑤　　D．②③⑤

8．若 $2x^2+y^2=6x$，则 x^2+y^2+4x+6 的最大值为（　　）

A．31　　B．30　　C．27　　D．6

二、填空题（每题 4 分，共 32 分）

9．函数 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ 自变量 x 的取值范围是__________．

10．已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x-a\geqslant 0,\\ 5-2x>1\end{cases}$ 只有四个整数解，则实数 a 的取值范围是__________．

11．若 $a=\sqrt{2}$，则 $\frac{a-2}{a^2-1}\div\left(1-\frac{2a-3}{a-1}\right)$ 的值为__________．

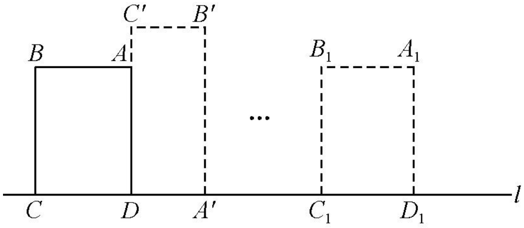
12．已知 $\odot O$ 的直径 $CD=10$，AB 是 $\odot O$ 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=8$，则 AC 的长为__________．

13．已知甲船在 A 处，乙船在甲船的正南方向的 B 处，甲船由 A 处向西南方向行驶，同时乙船由 B 处向正北方向行驶，半小时到 C 处，此时甲船在乙船的北偏西 $30°$ 方向，距乙船 30 海里的 D 处，甲船每小时行驶__________海里．

14．已知 α、β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+3)x+m^2=0$ 的两个不相等的实数根，且满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-1$，则 m 的值是__________．

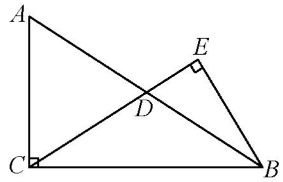
15．设实数 s、t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，并且 $st\neq 1$，则 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值为__________．

16．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，边 CD 在直线 l 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 l 作无滑动翻滚，当点 A 第一次翻滚到点 A_1 位置时，则点 A 经过的路线长为__________．



三、解答题（17，18 每题 8 分，19，20 每题 10 分，共 36 分）

17.（本小题满分 8 分）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$．D 是边 AB 的中点，$BE\perp CD$，垂足为点 E．已知 $AC=15$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$．



（1）求线段 CD 的长；

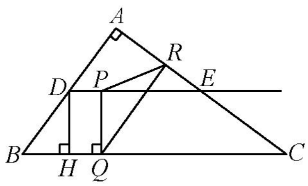
（2）求 $\sin\angle DBE$ 的值．

18．（本小题满分 8 分）已知△ABC 的两边 AB、AC 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+3)x+k^2+3k+2=0$ 的两实根，第三边 BC 的长为 5．

问：（1）k 为何值时，△ABC 是以 BC 为斜边的直角三角形．

（2）k 为何值时，△ABC 是等腰三角形，并求△ABC 的周长．

19.（本小题满分 10 分）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=6$，$AC=8$，D，E 分别是边 AB，AC 的中点，点 P 从点 D 出发沿 DE 方向运动，过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于 Q，过点 Q 作 $QR\parallel BA$ 交 AC 于 R，当点 Q 与点 C 重合时，点 P 停止运动．设 $BQ=x$，$QR=y$．



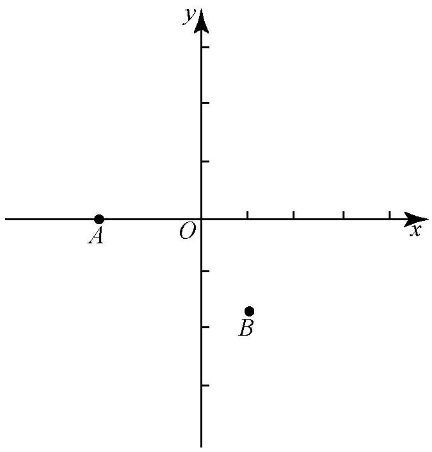
（1）求点 D 到 BC 的距离 DH 的长；

（2）求 y 关于 x 的函数关系式（不要求写出自变量的取值范围）；

（3）是否存在点 P，使△PQR 为等腰三角形？若存在，请求出所有满足要求的 x 的值；若不存在，请说明理由．

20.（本小题满分 10 分）如图，在直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(-2，0)$，点 B 的坐标为 $(1，-\sqrt{3})$，

已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 经过三点 A、B、O（O 为原点）．



（1）求抛物线的解析式；

（2）在该抛物体的对称轴上，是否存在点C，使$\triangle BOC$的周长最小？若存在， 求出点C 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如果点P是该抛物线上x轴上方的一个动点，那么$\triangle PAB$是否有最大面积？若有，求出此时P点的坐标及$\triangle PAB$的最大面积；若没有，请说明理由.（注意：本题中的结果均保留根号）

2013-2014 高一入学分班数学测试试题参考答案与解析

1．【答案】C

【解析】小莉和小明投掷立方体时，每个人都有可能扔出$1\sim6$之间任意一个数字，故P点一共有36种情况．而P点在抛物线$y=-x^2+4x$上的情况有3种值分别是$(1,3)$、$(2,4)$、$(3,3)$，其余点均不在抛物线上．故概率为$\frac{1}{12}$．

2．【答案】B

【解析】根据三视图可知该几何体为圆锥．圆锥体侧面积为扇形，根据扇形面积公式$s=\frac{1}{2}rl$，式中r为圆锥的母线长即6，l为底面圆周长为4π，所以计算解得圆锥侧面积为12π．

3．【答案】C

【解析】根据绝对值的几何意义可知，不等式左边表示的为点x到4与点x到3的距离之和，其最小值在3到4之间取得且最小值为1，故$-\frac{1}{a}$只需小于1即可，故原不等式等价于$-\frac{1}{a}<1$，当$a>0$时，该式恒成立；当$a<0$时，解不等式得$a<-1$．故原不等式的解集为$a<-1$或$a>0$．

4．【答案】A

【解析】由题意可知圆柱侧面展开的侧面的长为底面圆周长．故可列出$y-\frac{x}{2}=\pi\times\frac{x}{2}$，整理可得$y=\frac{\pi+1}{2}x$，图象为过原点的一次函数，故选A．

5．【答案】D

【解析】方程组中有3个未知数2个方程，结合所求应该用其中一个未知数来表示另外两个未知数．用式中1式整体乘2减去2式并整理得$b=-2c$，并将其代入1式可得$a=c$，将其代入所求化简得

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{c\cdot(-2c)+(-2c)\cdot c+c\cdot c}{c^2+(-2c)^2+c^2}=-\frac{1}{2}.$$

6．【答案】A

【解析】由题意得$\triangle AED\cong\triangle AEF$，$DE=FE$，$AF=AD$．且$\tan\angle EFC=\frac{3}{4}$，故设$CE=3x$，$CF=4x$，根据勾股定理得$EF=5x$，故$AB=CD=8x$．且因为$\angle AFE=90^\circ$，故$\triangle AFB$相似于$\triangle EFC$，$\tan\angle BAF=\frac{3}{4}$，所以$BF=8x$，$AF=10x$，在$\triangle AEF$运用勾股定理，解得$x=2$，代入得$AB=16$，$AD=20$，所以周长为$72$．

7．【答案】B

【解析】①$x<0$时，根据流程图可得$y=-\frac{2}{x}$；②设Q点横坐标为x_0，则根据流程图可算出Q点纵坐标为$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{2}+x_0\right)\cdot\frac{4}{x_0}=3$，因为$PQ\parallel x$轴，故$P$点纵坐标为$\frac{4}{x_0}$，根据$y=-\frac{2}{x}$可得$P$点横坐标为$-\frac{x_0}{2}$，所以$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{2}+x_0\right)\cdot\frac{4}{x_0}=3$；③根据图象可知$y$随$x$的增大而减小；④根据②分析可得$MQ=2PM$；⑤$\angle POQ$可以取到$0^\circ$至$180^\circ$之间任意角度．

8．【答案】A

【解析】将 y^2 替换为 $6x-2x^2$，则原题可化为求 $-x^2+10x+6$ 的最大值，故解得最大值为 31．

9．【答案】$x\geqslant 1$ 且 $x\neq 3$

【解析】分子根号内的数要求大于或等于 0，分母不为 0，故解得 x 取值范围为 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 3$．

10．【答案】$-3<a\leqslant -2$

【解析】解不等式组得 $a\leqslant x<2$，因原不等式组只有 4 个整数解，故 x 的取值只能有 1、0、-1、-2．若 $a\leqslant -3$，则原不等式可有 5 个以上的解，不符合题意；若 $a>-2$，则原不等式的解小于 4 个．所以 a 的取值范围为 $-3<a\leqslant -2$．

11．【答案】$1-\sqrt{2}$

【解析】由 $a=\sqrt{2}$ 得 $a^2-1=1$ 故原式 $=\dfrac{a-2}{\dfrac{a-1-2a+3}{a-1}}=\dfrac{a-2}{\dfrac{-(a-2)}{a-1}}=1-a=1-\sqrt{2}$

12．【答案】$4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

【解析】如图所示，

分析：连结 OA，由 $AB\perp CD$，根据垂径定理得到 $AM=4$，再根据勾股定理计算出 $OM=3$，然后分类讨论：当如图 1 时，$CM=8$；当如图 2 时，$CM=2$，再利用勾股定理分别计算即可．

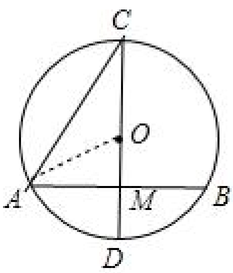


图1

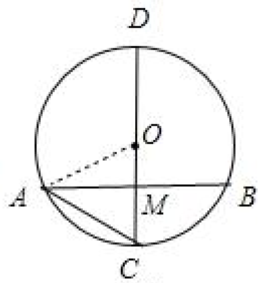


图2

解答：连接 OA，$\because AB\perp CD,\therefore AM=BM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 8=4$，

在 $Rt\Delta OAM$ 中，　$OA=5\therefore OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=3$，

当如图 1 时，$CM=OC+OM=5+3=8$，

在 $Rt\Delta ACM$ 中，　$AC=\sqrt{AM^2-CM^2}=4\sqrt{5}$，

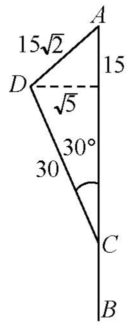
当如图 1 时，$CM=OC-OM=5-3=2$，

在 $Rt\Delta ACM$ 中，　$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=2\sqrt{5}$，

故答案为 $4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}$

13．【答案】$30\sqrt{2}$

【解析】如图所示，半小时行驶距离为 $15\sqrt{2}$，故时速为 $30\sqrt{2}$



14．【答案】3

【解析】$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-1$ 因为 α 、 β 为原方程的两个不相等实根，故应用韦达定理解得 $\alpha+\beta=-2m-3$ ，$\alpha\beta=m^2$ ，并带回原式解得 m 为 -1 或 3 ，并检验得 $\Delta>0,m>-\frac{3}{4}$， $m=-1$（舍），则 3 均符合题意．

15．【答案】-5

【解析】将方程 $t^2+99t+19=0$ 转化为 $19\frac{1}{t^2}+\frac{99}{t}+1=0$ ，经观察发现 s 和 $\frac{1}{t}$ 为 $19x^2+99x+1=0$ 的两个解．$\frac{st+4s+1}{t}$ 可化为 $s+\frac{1}{t}+4\cdot s\cdot\frac{1}{t}$ ．根据韦达定理，$s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19}$ ，$s\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{19}$ ，代入计算解得原式为 -5 ．

16．【答案】6π

【解析】A 经过的路线分为 3 部分，第一部分为以 D 为圆心，DA 为半径的四分之一圆弧，长度为 $\frac{3}{2}\pi$ ；第二部分为以 A' 为圆心，$A'B'$ 为半径的四分之一圆弧，长度为 2π ；第三部分为以 C''' 为圆心，$C'''A''$ 为半径的四分之一圆弧，长度为 $\frac{5}{2}\pi$ ，故最终总长度为 6π ．

17．【答案】（1）$\frac{25}{2}$（2）$\frac{7}{25}$

【解析】（1）$\because AC=15$，$\angle ACB=90°$，$\cos A=\frac{3}{5}$

$\therefore AB=\frac{AC}{\cos A}=25$

在 $Rt\triangle ABC$ 中， CD 为斜边 AB 上的中线

$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=\frac{25}{2}$

（2）在 $Rt\triangle ABC$ 中， $BC^2=AB^2-AC^2$

$\therefore BC=20$

过 D 点向 BC 作 $DF\perp BC$ 交 BC 于 F

$\because DF\perp BC$，$\angle ACB=90°$ 且 D 为 AB 中点

$\therefore DF=\frac{1}{2}AC=\frac{15}{2}$

$\because S_{\triangle CDB}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot EB=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DF$

$\therefore EB=12$

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $DE^2=DB^2-BE^2$

$\therefore DE=\dfrac{7}{2}$，$\sin\angle DBE=\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{7}{25}$

18.

【解析】（1）$\because \triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形，且 $BC=5$

$\therefore AB^2+AC^2=25$

$\because AB$ 、AC 长为方程两实根

$\therefore AB+AC=2k+3$，$AB\cdot AC=k^2+3k+2$

$\therefore AB^2+AC^2=\left(AB+AC\right)^2-2AB\cdot AC$

$\therefore k=2$ 或 -5

（2）$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形

$\therefore$ 当 $AB=AC$ 时 $\Delta=0$

$\therefore \left(2k+3\right)^2-4\left(k^2+3k+2\right)=0$

此时 k 不存在

$\because$ 当 $AB=AC=5$ 时

$\therefore \left(AB+AC=5+AC=2k+3，5AC=k^2+3k+2\right)$

解得 $k=3$ 或 4

$\therefore AC=4$ 或 6

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 14 或 16

19.

【解析】（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中

$\because \angle A=90^\circ$，$AB=6$，$AC=8$

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$

$\because \angle DHB=\angle A=90^\circ$，$\angle B=\angle B$

$\therefore \triangle BHD \backsim \triangle BAC$

$\therefore \dfrac{DH}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$，

$\therefore DH=\dfrac{BD}{BC}\cdot AC=\dfrac{3}{10}\times 8=\dfrac{12}{5}$

（2）$\because QR \parallel AB$

$\therefore \angle QRC=\angle A=90^\circ$

$\because \angle C=\angle C$

$\therefore \triangle RQC \backsim \triangle ABC$

$\therefore \dfrac{RQ}{AB}=\dfrac{QC}{BC}$，$\dfrac{y}{6}=\dfrac{10-x}{10}$

$\therefore y=-\dfrac{3}{5}x+6$

（3）存在，有三种情况

（1）当 $PQ=PQ$ 时，过点 P 作 $PM\perp QR$ 于 M

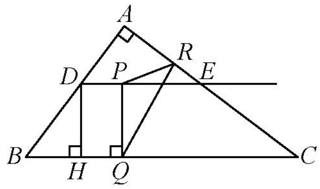
则 $QM=RM$

$\because \angle 1+\angle 2=90^\circ$，$\angle \mathrm{C}+\angle 2=90^\circ$

$\therefore \angle 1=\angle C$

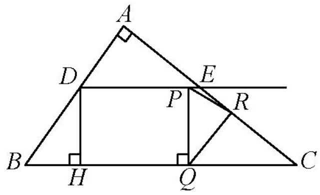
$\therefore \cos\angle 1=\cos\angle C=\dfrac{4}{5}$

$\therefore x=\dfrac{18}{5}$



（2）当 $PQ=RQ$ 时，$-\dfrac{3}{5}x+6=\dfrac{12}{5}$

$x=6$



（3）$EM\perp BC$，$RN\perp EM$

$\therefore EM\parallel PQ$

当 $PR=QR$ 时，则 R 为 PQ 中垂线上的点

$\therefore EN=MN$

$\therefore ER=RC$

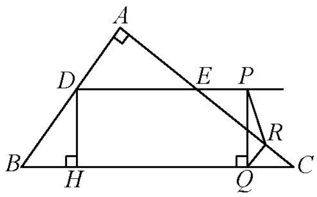
$\therefore$点 R 为 EC 的中点

$\therefore CR=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{1}{4}AC=2$

$\because \tan C=\dfrac{QR}{CR}=\dfrac{BA}{CA}$

$\therefore \dfrac{-\dfrac{3}{5}x+6}{2}=\dfrac{6}{8}$

$\therefore x=\dfrac{15}{2}$



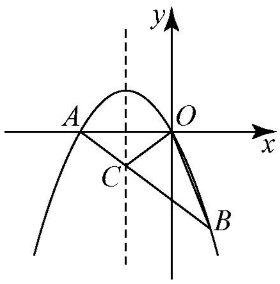
20.

【解析】

（1）将 $A(-2,0)$ $B(1,-\sqrt{3})$ $O(0,0)$ 代入解析式

解得$\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ c=0 \end{cases}$，故所求解析式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

（2）存在，理由如下



∵ $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

∴抛物线的对称轴的 $x=-1$

∵点 C 在对称轴 $x=-1$ 上 $\triangle BOC$ 的周长 $=OB+BC+CO$ 且 $OB=2$

要使周长最小则 $BC+CO$ 最小

又∵ $CO=CA$

∴ $\triangle BOC$ 的周长 $=OB+BC+CA$

∴ A，C，B 共线时周长最小

∴ $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

当 $x=-1$ 时，$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $C\left(-1，-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

（3）如图所示，过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴于点 Q，$PG\perp x$ 轴于点 G，过点 A 作 $AF\perp PQ$ 于点 F，过点 B 作 $BE\perp PQ$ 于 E

则 $PQ=-x$，$PG=-y$

由题意得 $S_{\triangle PAB}=S_{梯形AFEB}-S_{\triangle AFP}-S_{\triangle BEP}$

$=\dfrac{1}{2}\left(y+\sqrt{3}+y\right)(1+2)-\dfrac{1}{2}y\cdot(2+x)-\dfrac{1}{2}(1-x)\left(\sqrt{3}+y\right)$

$=\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$

将 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 代入得

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{2}+\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

∴当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，面积最大为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

此时 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

∴点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$