2019年人大附中新高一分班考试数学试题-真题

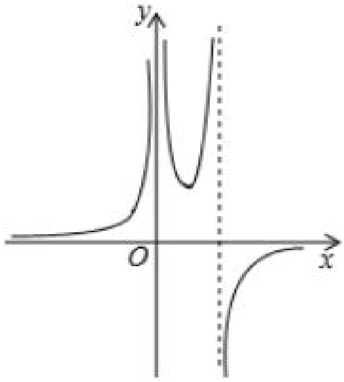
2019.8

一、选择题（本大题共17小题，共34分）

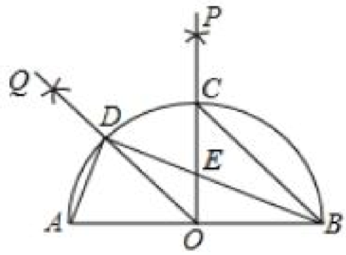
1. 小雨利用几何画板探究函数$y=\frac{a}{(x-b)|x-c|}$图象，在他输入一组a，b，c的值之后，得到了如图所示的函数图象，根据学习函数的经验，可以判断，小雨输入的参数值满足(　)

A. $a>0$，$b>0$，$c=0$　　　　B. $a<0$，$b>0$，$c=0$

C. $a>0$，$b=0$，$c=0$　　　　D. $a<0$，$b=0$，$c>0$



第 1 题图



第 3 题图

2. 大于1的正整数m的三次幂可“分裂”成若干个连续奇数的和，如$2^3=3+5$，$3^3=7+9+11$，$4^3=13+15+17+19$，..若m^3分裂后，其中有一个奇数是103，则m的值是(　)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

3. 如图，AB是半圆O的直径，按以下步骤作图：

(1)分别以A，B为圆心，大于AO长为半径作弧，两弧交于点P，连接OP与半圆交于点C；

(2)分别以A，C为圆心，大于$\frac{1}{2}AC$长为半径作弧，两弧交于点Q，连接OQ与半圆交于点D；

(3)连接AD，BD，BC，BD与OC交于点E.

根据以上作图过程及所作图形，下列结论：

①BD平分$\angle ABC$；②$BC//OD$；③$CE=OE$；④$AD^2=OD\cdot CE$；所有正确结论的序号是(　)

A. ①②　　B. ①④　　C. ②③　　D. ①②④

4. 图1的摩天轮上以等间隔的方式设置36个车厢，车厢依顺时针方向分别编号为1号到36号，且摩天轮运行时以逆时针方向等速旋转，旋转一圈花费30分钟．若图2表示21号车厢运行到最高点的情形，则此时经过多少分钟後，9号车厢才会运行到最高点？(　)

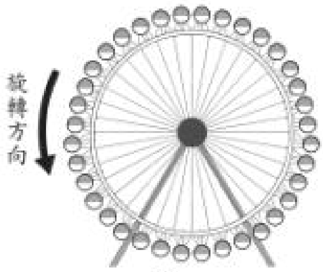


图1

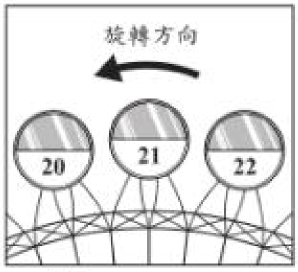


图2

A. 10　　B. 20　　C. $\frac{15}{2}$　　D. $\frac{45}{2}$

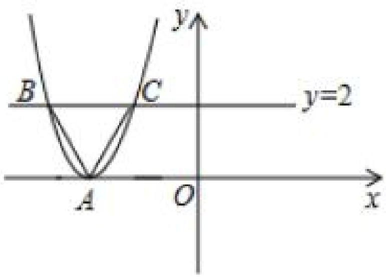
5. 某旅行团到森林游乐区参观，如表为两种参观方式与所需的缆车费用．已知旅行团的每个人皆从这两种方式中选择一种，且去程有 15 人搭乘缆车，回程有 10 人搭乘缆车．若他们缆车费用的总花费为 4100元，则此旅行团共有多少人？(　)

参观方式	缆车费用
去程及回程均搭乘缆车	300元
单程搭乘缆车，单程步行	200元

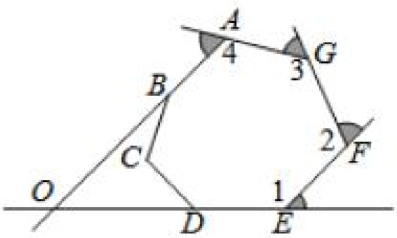
A. 16　　B. 19　　C. 22　　D. 25

6. 如图，坐标平面上有一顶点为 A 的抛物线，此抛物线与方程式$y=2$的图形交于 B、C 两点，$\triangle ABC$为正三角形．若 A 点坐标为$(-3,0)$，则此抛物线与 y 轴的交点坐标为何？(　)

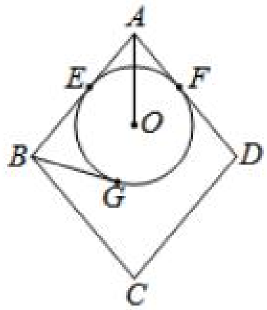
A. $(0,\frac{9}{2})$　　B. $(0,\frac{27}{2})$　　C. $(0,9)$　　D. $(0,19)$



第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图

7. 如图的七边形$ABCDEFG$中，AB、ED的延长线相交于O点．若图中$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的外角的角度和为$220°$，则$\angle BOD$的度数为何？(　)

A. $40°$　　B. $45°$　　C. $50°$　　D. $60°$

8. 如图，菱形$ABCD$的边长为 10，圆 O 分别与 AB、AD 相切于 E、F 两点，且与 BG 相切于 G 点．若$AO=5$，且圆 O 的半径为 3，则 BG 的长度为(　)

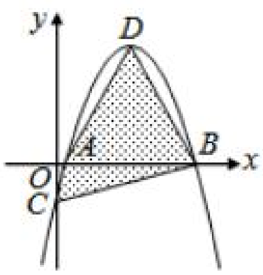
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

9. 桌面上有甲、乙、丙三个杯子，三杯内原本均装有一些水．先将甲杯的水全部倒入丙杯，此时丙杯的水量为原本甲杯内水量的 2 倍多 40 毫升；再将乙杯的水全部倒入丙杯，此时丙杯的水量为原本乙杯内水量的 3 倍少 180 毫升．若过程中水没有溢出，则原本甲、乙两杯内的水量相差多少毫升？(　)

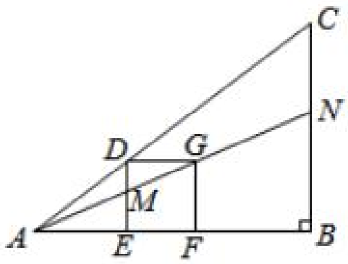
A. 80　　B. 110　　C. 140　　D. 220

10. 如图，坐标平面上，二次函数$y=-x^2+4x-k$的图形与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，其顶点为 D，且$k>0$.若$\triangle ABC$与$\triangle ABD$的面积比为 1：4，则 k 值为何？(　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{5}$



第 10 题图

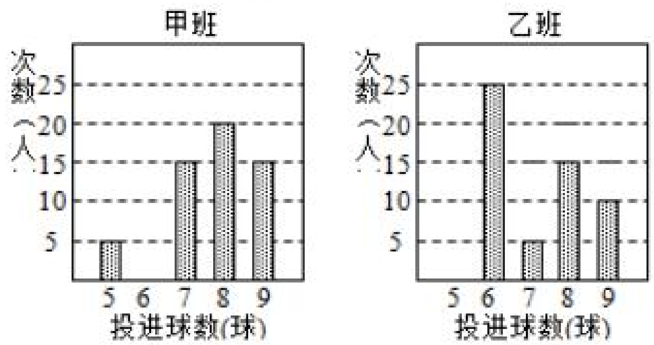


第 11 题图

11. 如图的$\triangle ABC$中有一正方形 $DEFG$，其中 D 在 AC 上，E、F 在 AB 上，直线 AG 分别交 DE、BC 于 M、N 两点．若$\angle B=90°$，$AB=4$，$BC=3$，$EF=1$，则 BN 的长度为何？(　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{8}{5}$　　D. $\frac{12}{7}$

12. 图(一)、图(二)分别为甲、乙两班学生参加投篮测验的投进球数直方图．若甲、乙两班学生的投进球数的众数分别为 a、b；中位数分别为 c、d，则下列关于 a、b、c、d 的大小关系，何者正确？(　)

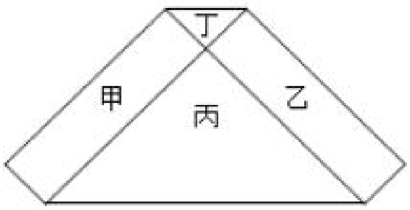


图(一)　　图(二)

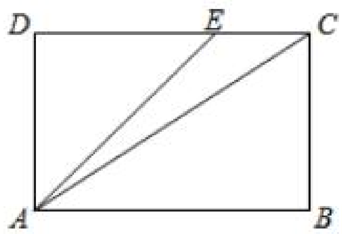
A. $a>b$，$c>d$　　B. $a>b$，$c<d$　　C. $a<b$，$c>d$　　D. $a<b$，$c<d$

13. 如图的六边形是由甲、乙两个长方形和丙、丁两个等腰直角三角形所组成，其中甲、乙的面积和等于丙、丁的面积和．若丙的一股长为 2，且丁的面积比丙的面积小，则丁的一股长为何？(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $4-2\sqrt{3}$



第 13 题图



第 14 题图

14. 如图的矩形 $ABCD$ 中，E 点在 CD 上，且$AE<AC$若 P、Q 两点分别在 AD、AE 上，AP：$PD=4$：1，AQ：$QE=4$：1，直线 PQ 交 AC 于 R 点，且 Q、R 两点到 CD 的距离分别为 q、r，则下列关系何者正确？(　)

A. $q<r$，$QE=RC$　　B. $q<r$，$QE<RC$

C. $q=r$，$QE=RC$　　D. $q=r$，$QE<RC$

15. 下表为小洁打算在某电信公司购买一支 MAT 手机与搭配一个号码的两种方案．此公司每个月收取通话费与月租费的方式如下：若通话费超过月租费，只收通话费；若通话费不超过月租费，只收月租费．若小洁每个月的通话费均为 x 元，x 为 400 到 600 之间的整数，则在不考虑其他费用并使用两年的情况下，x 至少为多少才会使得选择乙方案的总花费比甲方案便宜？(　)

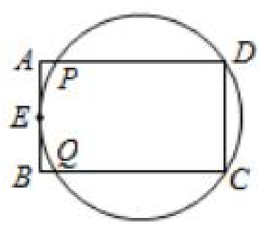
	甲方案	乙方案
号码的月租费(元)	400	600
MAT 手机价格(元)	15000	13000
注意事项：以上方案两年内不可变更月租费		

A. 500　　B. 516　　C. 517　　D. 600

16. 如图的矩形 $ABCD$ 中，E 为AB的中点，有一圆过 C、D、E 三点，且此圆分别与AD、BC相交于 P、Q 两点．甲、乙两人想找到此圆的圆心 O，其作法如下：

(甲) 作$\angle DEC$的角平分线 L，作DE的中垂线，交 L 于 O 点，则 O 即为所求；

(乙) 连接PC、QD，两线段交于一点 O，则 O 即为所求



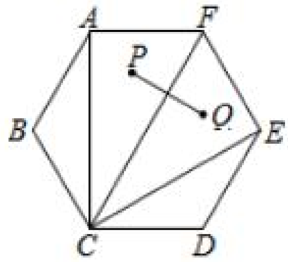
对于甲、乙两人的作法，下列判断何者正确？(　)

A. 两人皆正确　　B. 两人皆错误

C. 甲正确，乙错误　　D. 甲错误，乙正确

17. 如图，正六边形$ABCDEF$中，P、Q两点分别为$\triangle ACF$、$\triangle CEF$的内心.

若$AF=2$，则PQ的长度为何？(　)

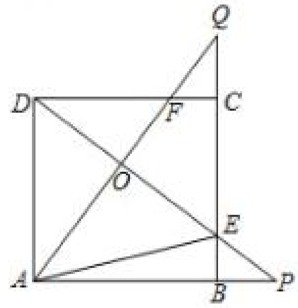


A. 1　　　　B. 2

C. $2\sqrt{3}-2$　　　　D. $4-2\sqrt{3}$

二、填空题（本大题共3小题，共9分）

18. 如图，正方形$ABCD$的边长是3，P，Q分别在AB，BC的延长线上，$BP=CQ$，连接AQ，DP交于点O，并分别与CD，BC交于点F，E，连接AE.下列结论：



①$AQ\perp DP$　　②$OA^2=OE\cdot OP$

③$S_{\triangle AOD}=S_{四边形OECF}$　　④当$BP=1$时，$\tan\angle OAE=\frac{13}{16}$

其中正确结论的序号是______.

19. 在等边$\triangle ABC$中，M、N、P分别是边AB、BC、CA上的点(不与端点重合)，对于任意等边$\triangle ABC$，下面四个结论中：

①存在无数个$\triangle MNP$是等腰三角形；　②存在无数个$\triangle MNP$是等边三角形；

③存在无数个$\triangle MNP$是等腰直角三角形；④存在一个$\triangle MNP$在所有$\triangle MNP$中面积最小.

所有正确结论的序号是______.

20. 如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，记$x=AC$，$y=BC-AC$，在平面直角坐标系xOy中，定义(x,y)为这个直角三角形的坐标，$Rt\triangle ABC$为点(x,y)对应的直角三角形．有下列结论：

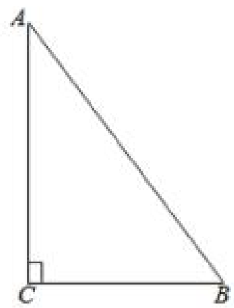
①在x轴正半轴上的任意点(x,y)对应的直角三角形均满足$AB=\sqrt{2}BC$；

②在函数$y=\frac{2019}{x}(x>0)$的图象上存在两点边P，Q，使得它们对应的直角三角形相似；

③对于函$y=(x-2020)^2-1(x>0)$的图象上的任意一点P，都存在该函数图象上的另一点Q，使得这两个点对应的直角三角形相似；

④在函数$y=-2x+2020(x>0)$的图象上存在无数对点P，Q(P与Q不重合)，使得它们对应的直角三角形全等.

所有正确结论的序号是______.



三、解答题（本大题共9 小题，第21-26题每题6分，第27-29题，每题7分，共57分）

21. 如图，AM是$\triangle ABC$的中线，D是线段AM上一点(不与点A重合).$DE//AB$交AC于点F，$CE//AM$，连结AE.

(1)如图1，当点D与M重合时，求证：四边形$ABDE$是平行四边形；

(2)如图2，当点D不与M重合时，(1)中的结论还成立吗？请说明理由.

(3)如图3，延长BD交AC于点H，若$BH\perp AC$，且$BH=AM$.

①求$\angle CAM$的度数；

②当$FH=\sqrt{3}$，$DM=4$时，求DH的长.

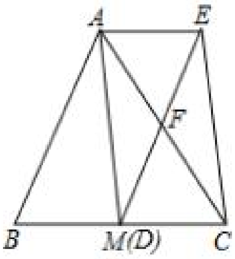


图1

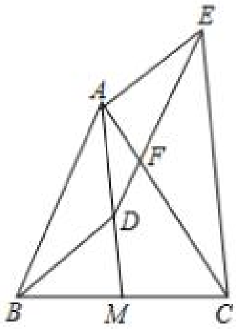


图2

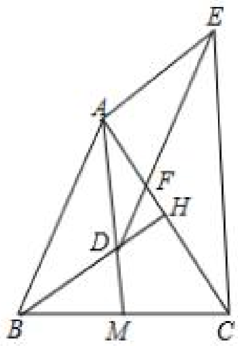


图3

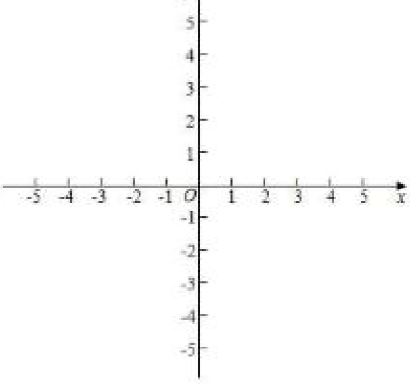
22. 对于平面直角坐标系xOy中的点P和$\odot M$，给出如下定义：若$\odot M$上存在两个点A，B，使$AB=2PM$，则称点P为$\odot M$的“美好点”.

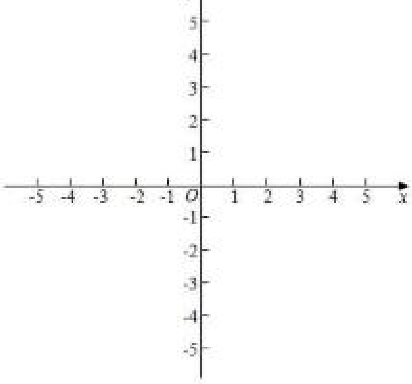
(1)当$\odot M$半径为2，点M和点O重合时.

①点$P_1(-2,0)$，$P_2(1,1)$，$P_3(2,2)$中，$\odot O$的“美好点”是______；

②若直线$y=2x+b$上存在点P为$\odot O$的“美好点”，求b的取值范围；

(2)点M为直线$y=4$上一动点，以2为半径作$\odot M$，点P为直线$y=x$上一动点，点P为$\odot M$的“美好点”，求点M的横坐标m的取值范围.





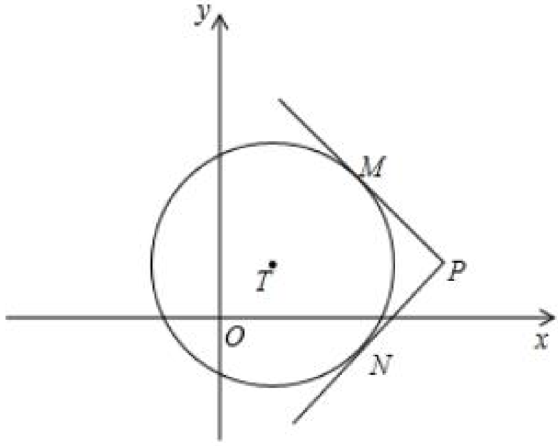
23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过$\odot T$外一点 P 引它的两条切线，切点分别为 M，N，若$60° \leq \angle MPN < 180°$，则称 P 为$\odot T$的环绕点．

(1)当$\odot O$半径为 1 时，

①在$P_1(1,0)$，$P_2(1,1)$，$P_3(0,2)$中，$\odot O$的环绕点是______；

②直线$y=2x+b$与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，若线段 AB 上存在$\odot O$的环绕点，求 b 的取值范围；

(2) $\odot T$的半径为 1，圆心为$(0,t)$，以$(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)(m>0)$为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}m$为半径的所有圆构成图形 H，若在图形 H 上存在$\odot T$的环绕点，直接写出 t 的取值范围．



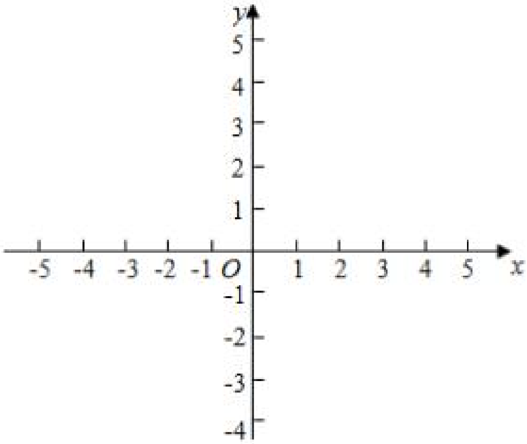
24. 在平面直角坐标系 xOy 中，我们称横纵坐标都是整数的点为整点，若坐标系内两个整点$A(p,q)$、$B(m,n)(m \leq n)$满足关于 x 的多项式x^2+px+q能够因式分解为$(x+m)(x+n)$，则称点 B 是 A 的分解点．

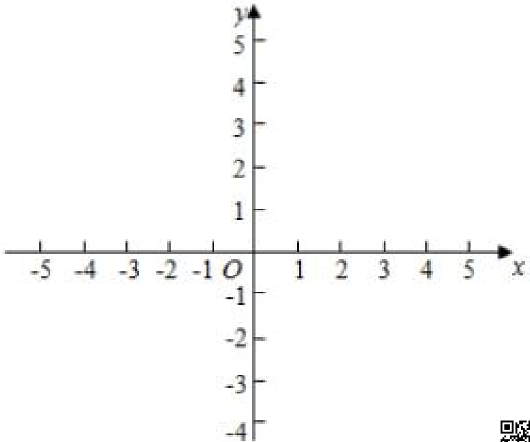
例如$A(3,2)$、$B(1,2)$满足$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，所以 B 是 A 的分解点．

(1)在点$A_1(5,6)$、$A_2(0,3)$、$A_3(-2,0)$中，请找出不存在分解点的点：______；

(2)点 P、Q 在纵轴上(P在 Q 的上方)，点 R 在横轴上，且点 P、Q、R 都存在分解点，若$\triangle PQR$面积为 6，请直接写出满足条件的$\triangle PQR$的个数及每个三角形的顶点坐标；

(3)已知点 D 在第一象限内，D 是 C 的分解点，请探究$\triangle OCD$是否可能是等腰三角形？若可能请求出所有满足条件的点 D 的坐标；若不可能，请说明理由．





25. 已知关于 x 的一元二次方程$\frac{1}{4}x^2+bx+c=0$

(1)$c=2b-1$时，求证：方程一定有两个实数根.

(2)有甲、乙两个不透明的布袋，甲袋中装有 3 个除数字外完全相同的小球，分别标有数字 1，2，3，乙袋中装有 4 个除数字外完全相同的小球，分别标有数字 1，2，3，4，从甲袋中随机抽取一个小球，记录标有的数字为

b，从乙袋中随机抽取一个小球，记录标有的数字为 c，利用列表法或者树状图，求 b、c 的值使方程$\frac{1}{4}x^2+bx+c=0$两个相等的实数根的概率.

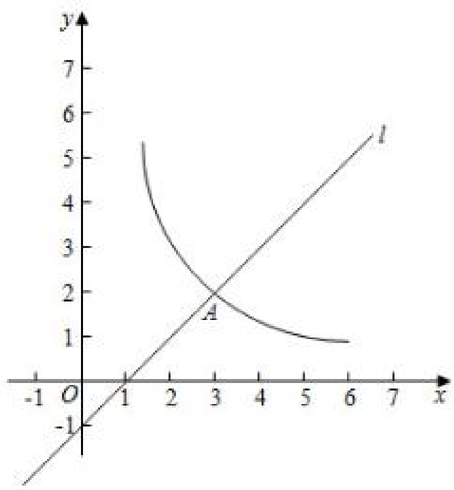
26. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=kx-1(k\neq 0)$与函数$y=\frac{m}{x}(x>0)$的图象交于点$A(3,2)$.

(1)求 k，m 的值；

(2)将直线 l 沿 y 轴向上平移$t(t>0)$个单位后，所得直线与 x 轴，y 轴分别交于点 P，Q，与函数$y=\frac{m}{x}(x>0)$的图象交于点 C.

①当$t=2$时，求线段 QC 的长.

②若$2<\frac{QC}{PQ}<3$，结合函数图象，直接写出 t 的取值范围.



27. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线$y = x^2 - 2ax + a^2 - a + 4$的顶点为 A，点 B，C 为直线$y = 3$上的两个动点(点 B

在点 C 的左侧)，且$BC = 3$.

(1)求点 A 的坐标(用含 a 的代数式表示)；

(2)若$\triangle ABC$是以 BC 为直角边的等腰直角三角形，求抛物线的解析式；

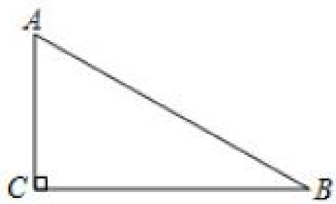
(3)过点 A 作 x 轴的垂线，交直线$y = 3$于点 D，点 D 恰好是线段 BC 三等分点且满足$BC = 3BD$，若抛物线与线段 BC 只有一个公共点，结合函数的图象，直接写出 a 的取值范围.

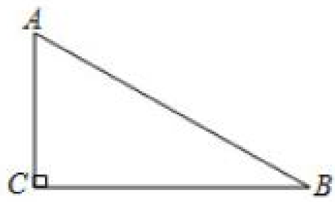
28. 如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，点 C 关于直线 AB 的对称点为 D，连接 BD，CD，过点 B 作 $BE//AC$交直线 AD 于点 E.

(1)依题意补全图形；

(2)找出一个图中与$\triangle CDB$相似的三角形，并证明；

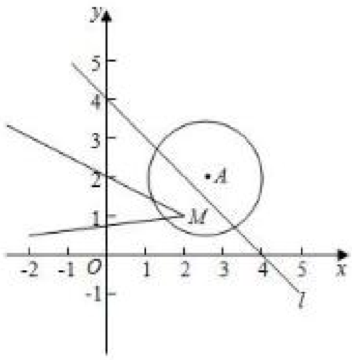
(3)延长 BD 交直线 AC 于点 F，过点 F 作$FH//AE$交直线 BE 于点 H，请补全图形，猜想 BC，CF，BH 之间的数量关系并证明.





备用图

29. 新定义：在平面直角坐标系 xOy 中，若几何图形 G 与⊙ A有公共点，则称几何图形 G 的叫⊙ A的关联图形，特别地，若⊙ A的关联图形 G 为直线，则称该直线为⊙ A的关联直线．如图，$\angle M$为⊙ A的关联图形，直线 l 为⊙ A的关联直线．



(1)已知⊙ O是以原点为圆心，2为半径的圆，下列图形：

①直线$y=2x+2$；②直线$y=-x+3$；③双曲线$y=\frac{2}{x}$，是⊙ O的关联图形的是______(请直接写出正确的序号)．

(2)如图 1，⊙ T的圆心为$T(1,0)$，半径为 1，直线 l：$y=-x+b$与 x 轴交于点 N，若直线 l 是⊙ T的关联直线，求点 N 的横坐标的取值范围．

(3)如图 2，已知点$B(0,2)$，$C(2,0)$，$D(0,-2)$，⊙ I经过点 C，⊙ I的关联直线 HB 经过点 B，与⊙ I的一个交点为 P；⊙ I的关联直线 HD 经过点 D，与⊙ I的一个交点为 Q；直线 HB，HD 交于点 H，若线段 PQ 在直线$x=6$上且恰为⊙ I的直径，请直接写出点 H 横坐标 h 的取值范围．

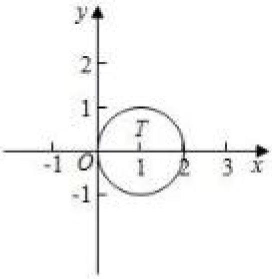


图 1

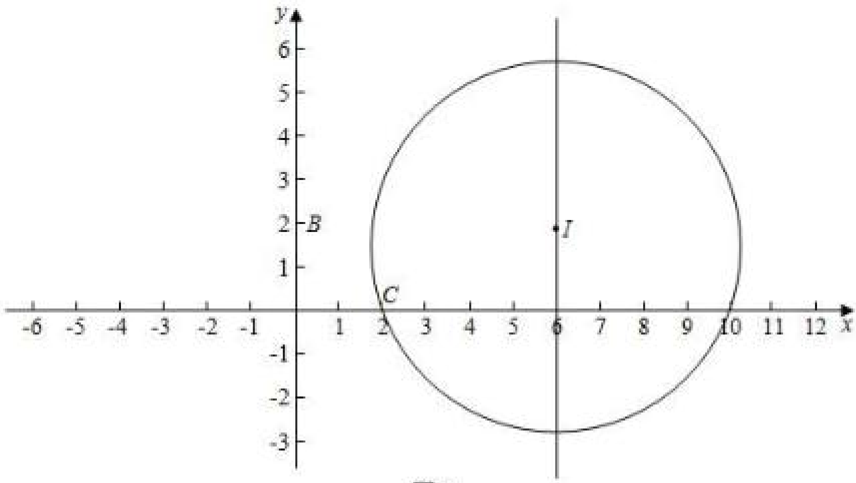


图 2

2019年人大附中新高一分班考试数学试题真题

答案和解析

1.【答案】B

【解析】解：设虚线为$x=m$ (显然，$m>0$)，

由图中可知，当$x<m$时，$y>0$，$|x-c|>0$，所以$\frac{a}{(x-b)}>0$；

当$x>m$时，$y<0$，$|x-c|>0$，所以$\frac{a}{(x-b)}<0$，

可得$(x-b)$在m的左右两侧时，符号是不同的，

即$b=m>0$当$x<b$时，$x-b<0$，而$y>0$，

所以$a<0$显然另外一条分割线为$x=0=c$；

故选：B.

从函数整体图象，发现部分图象有类似反比例函数，再从y轴右侧图象，判断图象虚线代表的意义，即可求解.

本题考查函数的图象，要求学生根据学过的反比例函数、分式等知识，通过函数图象，大致发现图象的一些特征，此类题目难度较大.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题题是数字规律应用的考查，重点考查分析问题和解决问题以及计算方面的能力，确定每一个“拆分数”中第一个数构成的数列的规律是关键．观察可知，分裂成的奇数的个数与底数相同，然后求出到m^3的所有奇数的个数的表达式，再求出奇数103的是从3开始的第52个数，然后确定出52所在的范围即可得解.

【解答】

解：∵底数是2的分裂成2个奇数，底数为3的分裂成3个奇数，底数为4的分裂成4个奇数，

∴m^3有m个奇数，

∵$2n+1=103$，$n=51$，

∴奇数103是从3开始的第52个奇数，

∵$\frac{(9-1)(9+2)}{2}=44$，$\frac{(10+2)(10-1)}{2}=54$，

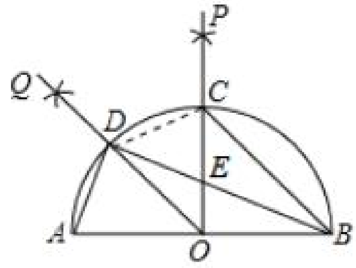
∴第52个奇数是底数为10的数的立方分裂的奇数的其中一个，

即$m=10$.

故选：B.

3.【答案】D

【解析】解：由作图可知，OP垂直平分线段AB，OQ平分$\angle AOC$，故①正确，



$\therefore OP\perp AB$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOC=45^{\circ}$，

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle OBC=45^{\circ}$，

$\therefore \angle AOD=\angle OBC=45^{\circ}$，

$\therefore OD//BC$，故②正确，

$\therefore \frac{OD}{BC}=\frac{OE}{EC}<1$，

$\therefore OE<EC$，故③错误，

连接CD.

$\because \angle DCE=\angle DCO$，$\angle CDE=\angle COD=45^{\circ}$，

$\therefore \triangle DCE\backsim\triangle OCD$，

$\therefore \frac{CD}{OC}=\frac{CE}{CD}$，

$\therefore CD^2=OD\cdot CE$，

$\because \angle AOD=\angle DOC$，

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore AD=CD$，

$\therefore AD^2=OD\cdot CE$，故④正确，

故选：D.

由作图可知，OP垂直平分线段AB，OQ平分$\angle AOC$，利用平行线的判定，相似三角形的性质一一判断即可.

本题考查相似三角形的判定和性质，圆周角定理，平行线的判定等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

4.【答案】B

【解析】解：$\frac{36-21+9}{36}\times 30=20$(分钟).

所以经过20分钟後，9号车厢才会运行到最高点.

故选：B.

先求出从21号旋转到9号旋转的角度占圆大小比例，再根据旋转一圈花费30分钟解答即可.

本题主要考查了生活中的旋转现象，理清题意，得出从21号旋转到9号旋转的角度占圆大小比例是解答本题的关键.

5.【答案】A

【解析】解：设此旅行团有x人单程搭乘缆车，单程步行，其中去程及回程均搭乘缆车的有y人，根据题意得，

$\begin{cases}200x+300y=4100\\(15-y)+(10-y)=x\end{cases}$,

解得，$\begin{cases}x=7\\y=9\end{cases}$,

则总人数为$7+9=16$(人)

故选：A.

设此旅行团有x人单程搭乘缆车，单程步行，其中去程及回程均搭乘缆车的有y人，根据题意列出二元一次方程，求出其解.

本题是二元一次方程组的应用，主要考查了列二元一次方程组解应用题，关键是读懂题意，找出等量关系，列出方程组.

6.【答案】B

【解析】解：设$B(-3-m,2)$，$C(-3+m,2)$，$(m>0)$

$\because A$点坐标为$(-3,0)$,

$\therefore BC=2m$,

$\because\triangle ABC$为正三角形,

$\therefore AC=2m$，$\angle DAO=60°$,

$$\therefore m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore C(-3+\frac{2}{3}\sqrt{3},2)$$

设抛物线解析式$y=a(x+3)^2$，

$a(-3+\frac{2\sqrt{3}}{3}+3)^2=2$，

$\therefore a=\frac{3}{2}$，

$\therefore y=\frac{3}{2}(x+3)^2$，

当$x=0$时，$y=\frac{27}{2}$；

故选：B.

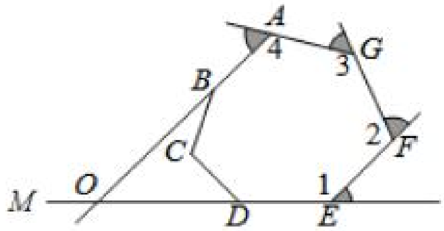
设$B(-3-m,2)$，$C(-3+m,2)$，$(m>0)$，可知$BC=2m$，再由等边三角形的性质可知$C(-3+\frac{2}{3}\sqrt{3},2)$，

设抛物线解析式$y=a(x+3)^2$，将点C代入解析式即可求a，进而求解；

本题考查二次函数的图象及性质，等边三角形的性质；结合函数图象将等边三角形的边长转化为点的坐标是解题的关键.

7.【答案】A

【解析】解：在DO延长线上找一点M，如图所示.



$\because$多边形的外角和为$360°$，

$\therefore \angle BOM=360°-220°=140°$.

$\because \angle BOD+\angle BOM=180°$，

$\therefore \angle BOD=180°-\angle BOM=180°-140°=40°$.

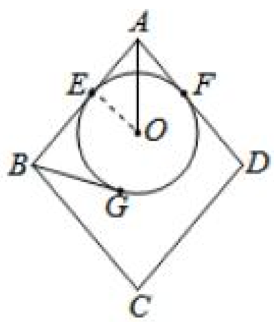
故选：A.

在DO延长线上找一点M，根据多边形的外角和为$360°$可得出$\angle BOM=140°$，再根据邻补角互补即可得出结论.

本题考查了多边形的内角与外角以及邻补角，解题的关键是根据多边形的外角和为$360°$找出$\angle BOM=140°$.

8.【答案】C

【解析】解：连接OE，



$\because\odot O$与AB相切于E，

$\therefore \angle AEO=90°$，

$\because AO=5$，$OE=3$，

$\therefore AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=4$，

$\because AB=10$，

$\therefore BE=6$，

$\because BG$与$\odot O$相切于G，

$\therefore BG=BE=6$，

故选C．

连接OE，由$\odot O$与AB相切于E，得到$\angle AEO=90°$，根据勾股定理得到$AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=4$，根据切线长定理即可得到结论．

本题考查了切线的性质，勾股定理，熟练掌握切线的性质是解题的关键．

9.【答案】B

【解析】解：设甲杯中原有水a毫升，乙杯中原有水b毫升，丙杯中原有水c毫升，

$$\begin{cases}a+c-40=2a & ① \\ a+b+c+180=3b & ②\end{cases}$$

②－①，得$b-a=110$，

故选B．

根据题意可以分别设出甲、乙、丙三个杯子内原有水的体积，然后根据题意可以列出方程组，然后作差即可得到原本甲、乙两杯内的水量相差多少毫升，本题得以解决．

本题考查三元一次方程组的应用，解题的关键是明确题目中的等量关系，列出相应的方程组，巧妙变形，得到所求问题的答案．

10.【答案】D

【解析】解：$\because y=-x^2+4x-k=-(x-2)^2+4-k$，

$\therefore$顶点$D(2,4-k)$，$C(0,-k)$，

$\therefore OC=k$，

$\because\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}AB\cdot k$，$\triangle ABD$的面积$=\frac{1}{2}AB(4-k)$，$\triangle ABC$与$\triangle ABD$的面积比为$1:4$，

$\therefore k=\frac{1}{4}(4-k)$，

解得：$k=\frac{4}{5}$．

故选：D．

求出顶点和C的坐标，由三角形的面积关系得出关于k的方程，解方程即可．

本题考查了抛物线与x轴的交点、抛物线的顶点式；根据三角形的面积关系得出方程是解决问题的关键．

11.【答案】D

【解析】解：$\because$四边形$DEFG$是正方形，

$\therefore DE//BC$，$GF//BN$，且$DE = GF = EF = 1$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACB$，$\triangle AGF \backsim \triangle ANB$，

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ①，$\frac{AE+EF}{AB} = \frac{GF}{BN}$ ②，

由①可得，$\frac{AE}{4} = \frac{1}{3}$，解得：$AE = \frac{4}{3}$，

将$AE = \frac{4}{3}$代入②，得：$\frac{\frac{4}{3}+1}{4} = \frac{1}{BN}$，

解得：$BN = \frac{12}{7}$，

故选：D.

由$DE//BC$可得$\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$求出$AE$的长，由$GF//BN$可得$\frac{AE+EF}{AB} = \frac{GF}{BN}$，将$AE$的长代入可求得$BN$.

本题主要考查正方形的性质及相似三角形的判定与性质，根据相似三角形的性质得出AE的长是解题的关键.

12.【答案】A

【解析】解：由图(三)、图(四)可知$a = 8$，$b = 6 \Rightarrow a > b$，

甲班共有$5 + 15 + 20 + 15 = 55$(人)，乙班共有$25 + 5 + 15 + 10 = 55$(人)，

则甲、乙两班的中位数均为第28人，得$c = 8$，$d = 7 \Rightarrow c > d$.

故选A.

根据众数是一组数据中出现次数最多的数据，确定众数；找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数(或两个数的平均数)为中位数；依此即可求解.

此题考查了众数与中位数的知识．解题的关键是熟记众数与中位数的定义.

13.【答案】D

【解析】解：设丁的一股长为a，且$a < 2$，

$\because$甲面积+乙面积=丙面积+丁面积，

$\therefore 2a + 2a = \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times a^2$，

$\therefore 4a = 2 + \frac{1}{2}a^2$，

$\therefore a^2 - 8a + 4 = 0$，

$\therefore a=\frac{8\pm\sqrt{(-8)2-4\times1\times4}}{2}=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{2}=4\pm2\sqrt{3}$，

$\because 4+2\sqrt{3}>2$，不合题意舍，

$4-2\sqrt{3}<2$，合题意，

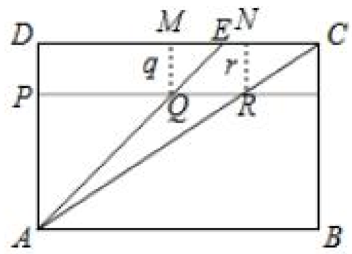
$\therefore a=4-2\sqrt{3}$.

故选 D.

设出丁的一股为 a，表示出其它，再用面积建立方程即可.

此题是一元二次方程的应用题，主要考查了一元二次方程的解，解本题的关键是列出一元二次方程.

14.【答案】D



【解析】解：$\because$在矩形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，

$\because AP$：$PD=4$：1，AQ：$QE=4$：1，

$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{AQ}{QE}$,

$\therefore PQ//CD$,

$\therefore \frac{AR}{RC}=\frac{AQ}{QE}=4$,

$\because$平行线间的距离相等，

$\therefore q=r$,

$\because \frac{AR}{RC}=\frac{AQ}{QE}=4$,

$\therefore \frac{QE}{AE}=\frac{CR}{AR}=\frac{1}{5}$,

$\because AE<AC$,

$\therefore QE<CR$.

故选：D.

根据矩形的性质得到$AB//CD$，根据已知条件得到$\frac{AP}{PD}=\frac{AQ}{QE}$，根据平行线分线段成比例定理得到$PQ//CD$，$\frac{AR}{RC}=\frac{AQ}{QE}=4$，根据平行线间的距离相等，得到$q=r$，证得$\frac{QE}{AE}=\frac{CR}{AR}=\frac{1}{5}$，于是得到结论.

本题考查了平行线分线段成比例定理，矩形的性质，熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键.

15.【答案】C

【解析】解：$\because x$为 400 到 600 之间的整数，

$\therefore$若小洁选择甲方案，需以通话费计算，若小洁选择乙方案，需以月租费计算，

甲方案使用两年总花费$=24x+15000$；乙方案使用两年总花费$=24\times600+13000=27400$.

由已知得：$24x+15000>27400$，

解得：$x>516\frac{2}{3}$，即 x 至少为 517．

故选 C．

由 x 的取值范围，结合题意找出甲、乙两种方案下两年的总花费各是多少，再由乙方案比甲方案便宜得出关于 x 的一元一次不等式，解不等式即可得出结论．

本题考查了一元一次不等式的应用以及一次函数的应用，解题的关键是结合题意找出关于 x 的一元一次不等式．本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，根据数量关系列出不等式(方程或方程组)是关键．

16.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查的是确定圆的条件，掌握线段垂直平分线的性质、圆周角定理是解题的关键．根据线段垂直平分线的性质判断甲，根据90°的圆周角所对的弦是直径判断乙．

【解答】

解：甲，$\because \overline{ED}=\overline{EC}$，

$\therefore \triangle DEC$为等腰三角形，

$\therefore L$为$\overline{CD}$之中垂线，

$\therefore O$为两中垂线之交点，

即 O 为$\triangle CDE$的外心，

$\therefore O$为此圆圆心．

乙，$\because \angle ADC=90^\circ$，$\angle DCB=90^\circ$，

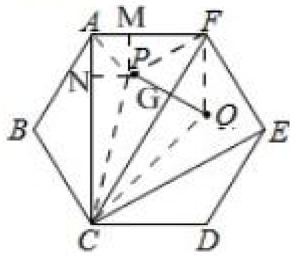
$\therefore \overline{PC}$、$\overline{QD}$为此圆直径，

$\therefore \overline{PC}$与$\overline{QD}$的交点 O 为此圆圆心，因此甲、乙两人皆正确．

故选 A．

17.【答案】C

【解析】解：如图，



连接 PF，QF，PC，QC，

$\because P$、Q 两点分别为$\triangle ACF$、$\triangle CEF$的内心，

$\therefore PF$是$\angle AFC$的角平分线，FQ 是$\angle CFE$的角平分线，

$\therefore \angle PFC = \frac{1}{2}\angle AFC = 30°$，$\angle QFC = \frac{1}{2}\angle CFE = 30°$，

$\therefore \angle PFC = \angle QFC = 30°$，

同理，$\angle PCF = \angle QCF$

$\therefore PQ \perp CF$，

$\therefore \triangle PQF$是等边三角形，

$\therefore PQ = 2PG$；

易得$\triangle ACF \cong \triangle ECF$，且内角是30°，60°，90°的三角形，

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$，$AF = 2$，$CF = 2AF = 4$，

$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}AF \times AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$，

过点 P 作$PM \perp AF$，$PN \perp AC$，PQ 交 CF 于 G，

$\because$点 P 是$\triangle ACF$的内心，

$\therefore PM = PN = PG$，

$$\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle PAF} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PCF}$$

$$= \frac{1}{2}AF \times PM + \frac{1}{2}AC \times PN + \frac{1}{2}CF \times PG$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times PG + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times PG + \frac{1}{2} \times 4 \times PG$$

$$= (1 + \sqrt{3} + 2)PG$$

$$= (3 + \sqrt{3})PG$$

$= 2\sqrt{3}$，

$$\therefore PG = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore PQ = 2PG$$

$$= 2(\sqrt{3} - 1)$$

$= 2\sqrt{3} - 2$.

故选：C.

先判断出$PQ \perp CF$，再求出$AC = 2\sqrt{3}$，$AF = 2$，$CF = 2AF = 4$，利用$\triangle ACF$的面积的两种算法即可求出PG，然后计算出PQ即可.

此题是三角形的内切圆与内心，主要考查了三角形的内心的特点，三角形的全等，解本题的关键是知道三角形的内心的意义.

18.【答案】①③④

【解析】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD = BC$，$\angle DAB = \angle ABC = 90°$，

$\because BP = CQ$，

$\therefore AP = BQ$，

在$\triangle DAP$与$\triangle ABQ$中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAP = \angle ABQ, \\ AP = BQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAP \cong \triangle ABQ(SAS)$，

$\therefore \angle P = \angle Q$，

$\because \angle Q + \angle QAB = 90°$，

$\therefore \angle P + \angle QAB = 90°$，

$\therefore \angle AOP = 90°$，

$\therefore AQ \perp DP$；

故①正确；

$\because \angle DOA = \angle AOP = 90°$，$\angle ADO + \angle P = \angle ADO + \angle DAO = 90°$，

$\therefore \angle DAO = \angle P$，

$\therefore \triangle DAO \backsim \triangle APO$，

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{OP}{OA}$，

$\therefore AO^2 = OD \cdot OP$，

$\because AE > AB$，

$\therefore AE > AD$，

$\therefore OD \neq OE$，

$\therefore OA^2 \neq OE \cdot OP$；故②错误；

在$\triangle CQF$与$\triangle BPE$中

$$\begin{cases}\angle FCQ=\angle EBP\\ \angle Q=\angle P\\ CQ=BP\end{cases},$$

$\therefore\triangle CQF\cong\triangle BPE(AAS)$，

$\therefore CF=BE$，

$\therefore DF=CE$，

在$\triangle ADF$与$\triangle DCE$中，

$$\begin{cases}AD=CD\\ \angle ADC=\angle DCE,\\ DF=CE\end{cases}$$

$\therefore\triangle ADF\cong\triangle DCE(SAS)$，

$\therefore S_{\triangle ADF}-S_{\triangle DFO}=S_{\triangle DCE}-S_{\triangle DOF}$，

即$S_{\triangle AOD}=S_{四边形OECF}$；故③正确；

$\because BP=1$，$AB=3$，

$\therefore AP=4$，

$\because\triangle PBE\backsim\triangle PAD$，

$\therefore\frac{PB}{EB}=\frac{PA}{DA}=\frac{4}{3}$，

$\therefore BE=\frac{3}{4}$，

$\therefore QE=\frac{13}{4}$，

$\because\triangle QOE\backsim\triangle PAD$，

$\therefore\frac{QO}{PA}=\frac{OE}{AD}=\frac{QE}{PD}=\frac{\frac{13}{4}}{5}$，

$\therefore QO=\frac{13}{5}$，$OE=\frac{39}{20}$，

$\therefore AO=5-QO=\frac{12}{5}$，

$\therefore\tan\angle OAE=\frac{OE}{OA}=\frac{\frac{39}{20}}{\frac{12}{5}}=\frac{13}{16}$，故④正确，

故答案为①③④.

由四边形$ABCD$是正方形，得到$AD=BC$，$\angle DAB=\angle ABC=90°$，根据全等三角形的性质得到$\angle P=\angle Q$，根据余角的性质得到$AQ\perp DP$；故①正确；根据相似三角形的性质得到$AO^2=OD\cdot OP$，由$OD\neq OE$，得到$OA^2\neq OE\cdot OP$；故②错误；根据全等三角形的性质得到$CF=BE$，$DF=CE$，于是得到$S_{\triangle ADF}-S_{\triangle DFO}=S_{\triangle DCE}-S_{\triangle DOF}$，即$S_{\triangle AOD}=S_{四边形OECF}$；故③正确；根据相似三角形的性质得到$BE$

$\frac{3}{4}$，求得$QE=\frac{13}{4}$，$QO=\frac{13}{5}$，$OE=\frac{39}{20}$，由三角函数的定义即可得到结论．

本题考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，正方形的性质，三角函数的定义，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题的关键．

19.【答案】①②③

【解析】解：如图1中，满足$AM=BN=PC$，可证$\triangle PMN$是等边三角形，这样的三角形有无数个．

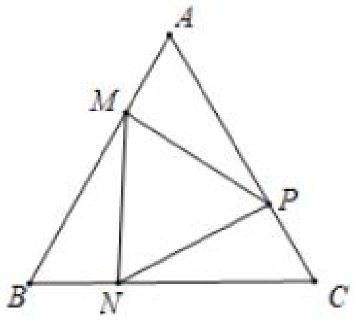


图1

如图2中，当$NM=NP$，$\angle MNP=90°$时，$\triangle MNP$是等腰直角三角形，这样的三角形有无数个．

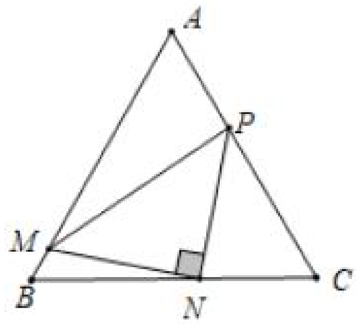


图2

故①②③正确，$\triangle PNM$的面积不存在最小值．

故答案为①②③.

利用图象法，画出图形判定即可解决问题．

本题考查等腰三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

20.【答案】①③④

【解析】解：①∵在x轴正半轴上的任意点(x,y)，

$\therefore y=0$，

$\therefore AC=BC$，

$\therefore AB=\sqrt{2}BC$；

②设$P(\{x_1,\frac{2019}{x_1})$，$Q(x_2,\frac{2019}{x_2})$，

则对应的直角三角形的直角边分别为x_1，$x_1+\frac{2019}{x_1}$；x_2，$x_2+\frac{2019}{x_2}$，

若两个三角形相似，则有$\frac{x_1}{x_1+\frac{2019}{x_1}}=\frac{x_2}{x_2+\frac{2019}{x_2}}$，

$\therefore x_2^2=x_1^2$，

$\because x>0$，

$\therefore x_1=x_2$，

∴不存在两点边P，Q，使得它们对应的直角三角形相似；

③设$P(x_1,(x_1-2020)^2-1)$，$Q(x_2,(x_2-2020)^2-1)$，

则对应的直角三角形的直角边分别为$x_1+(x_1-2020)^2-1$，x_1；x_2，$x_2+(x_2-2020)^2-1$，

若两个三角形相似，则有$\frac{x_1}{(x_1-2020)^2-1}=\frac{x_2}{(x_2-2020)^2-1}$，

$\therefore (x_1-x_2)(x_1x_2+1-2020^2)=0$，

$\because x>0$，

$\therefore x_1x_2+1=2020^2$，

∴图象上的任意一点P，都存在该函数图象上的另一点Q，使得这两个点对应的直角三角形相似；

④设$P(x_1,-2x_1+2020)$，$Q(x_2,-2x_2+2020)$，

则对应的直角三角形的直角边分别为x_1，$-x_1+2020$；x_2，$-x_2+2020$，

若两个三角形全等，则有$x_1=-x_2+2020$，$x_2=-x_1+2020$，

$\therefore x_2+x_1=2020$，

$\because x>0$，

∴图象上存在无数对点P，Q，使得它们对应的直角三角形全等；

故答案为①③④.

①在x轴正半轴上的任意点(x,y)，则$y=0$，所以$AC=BC$，由勾股定理可得$AB=\sqrt{2}BC$；

②设$P(\{x_1,\frac{2019}{x_1})$，$Q(x_2,\frac{2019}{x_2})$，则对应的直角三角形的直角边分别为$x_1$，$x_1+\frac{2019}{x_1}$；$x_2$，$x_2+\frac{2019}{x_2}$，若两个三角形相似，则有$\frac{x_1}{x_1+\frac{2019}{x_1}}=\frac{x_2}{x_2+\frac{2019}{x_2}}$，可得$x_2^2=x_1^2$，当$x>0$时$x_1=x_2$；

③设$P(x_1,(x_1-2020)^2-1)$，$Q(x_2,(x_2-2020)^2-1)$，则对应的直角三角形的直角边分别为$x_1+(x_1-2020)^2-1$，x_1；x_2，$x_2+(x_2-2020)^2-1$，若两个三角形相似，则有$\frac{x_1}{(x_1-2020)^2-1}=\frac{x_2}{(x_2-2020)^2-1}$，$(x_1-x_2)(x_1x_2+1-2020^2)=0$，由条件可得$x_1x_2+1=2020^2$；

④设$P(x_1,-2x_1+2020)$，$Q(x_2,-2x_2+2020)$，则对应的直角三角形的直角边分别为x_1，$-x_1+2020$；x_2，$-x_2+2020$，若两个三角形全等，则有$x_1=-x_2+2020$，可得$x_2+x_1=2020$.

本题考查函数的性质，新定义，三角形性质；能够理解题意，将问题转化为直角三角形相似与全等，利用相似与全等的关系结合直角三角形的性列出正确的等式，再能正确求解方程是解题的关键.

21.【答案】(1)证明：如图1中，点D与M重合，

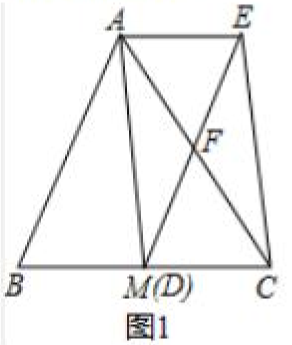


图1

$\because DE//AB$，

$\therefore \angle EDC=\angle ABD$，

$\because CE//AM$，

$\therefore \angle ECD=\angle ADB$，

$\because AM$是$\triangle ABC$的中线，且D与M重合，

$\therefore BD=DC$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle EDC(ASA)$，

$\therefore AB=ED$，

$\because AB//ED$，

$\therefore$四边形$ABDE$是平行四边形.

(2)结论：成立．理由如下：

如图2中，过点M作$MG//DE$交CE于G.

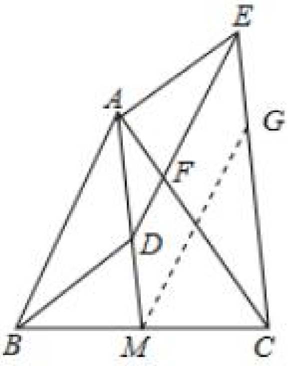


图2

$\because CE//AM$，

∴四边形$DMGE$是平行四边形，

$\therefore ED=GM$，且$ED//GM$，

由(1)可知$AB=GM$，$AB//GM$，

$\therefore AB//DE$，$AB=DE$，

∴四边形$ABDE$是平行四边形.

(3)①如图3中，取线段HC的中点I，连接MI，

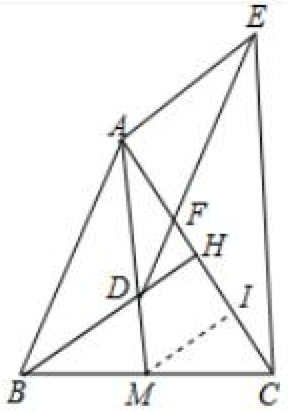


图3

$\because BM=MC$，

$\therefore MI$是$\triangle BHC$的中位线，

$\therefore MI//BH$，$MI=\frac{1}{2}BH$，

$\because BH\perp AC$，且$BH=AM$.

$\therefore MI=\frac{1}{2}AM$，$MI\perp AC$，

$\therefore \angle CAM=30°$.

②设$DH=x$，则$AH=\sqrt{3}x$，$AD=2x$，

$\therefore AM=4+2x$，

$\therefore BH=4+2x$，

∵四边形$ABDE$是平行四边形，

$\therefore DF//AB$，

$\therefore \frac{HF}{HA}=\frac{HD}{HB}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x}=\frac{x}{4+2x}$，

解得$x=1+\sqrt{5}$或$1-\sqrt{5}$(舍弃)，

$\therefore DH=1+\sqrt{5}$.

【解析】(1)只要证明$AB=ED$，$AB//ED$即可解决问题；

(2)成立．如图2中，过点M作$MG//DE$交CE于G.由四边形$DMGE$是平行四边形，推出$ED=GM$，且$ED//GM$，由(1)可知$AB=GM$，$AB//GM$，可知$AB//DE$，$AB=DE$，即可推出四边形$ABDE$是平行四边形；

(3)①如图3中，取线段HC的中点I，连接MI，只要证明$MI=\frac{1}{2}AM$，$MI\perp AC$，即可解决问题；

②设$DH=x$，则$AH=\sqrt{3}x$，$AD=2x$，推出$AM=4+2x$，$BH=4+2x$，由四边形$ABDE$是平行四边形，推出$DF//AB$，推出$\frac{HF}{HA}=\frac{HD}{HB}$，可得$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}x}=\frac{x}{4+2x}$，解方程即可；

本题考查四边形综合题、平行四边形的判定和性质、直角三角形30度角的判定、平行线分线成比例定理、三角形的中位线定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造特殊四边形解决问题，属于中考压轴题.

22.【答案】P_1和P_2

【解析】解：(1)①如图1中，

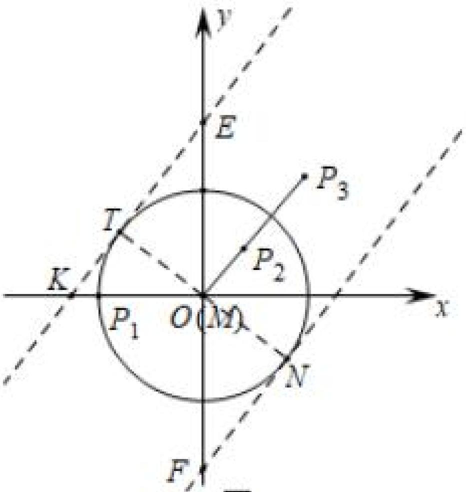


图1

$\because OP_1=2=r$，$OP_2=\sqrt{2}<r$，$OP_3=2\sqrt{2}<r$，

根据⊙M的“美好点”的定义可知，P_1，P_2是⊙M的“美好点”．

故答案为P_1和P_2.

②当直线$y=2x+b$与⊙O相切时，设切点为T，该直线交x轴于K，交y轴于E.

由题意$E(0,b)$，$K(-\frac{b}{2},0)$，

$\therefore OE=b$，$OK=\frac{b}{2}$，$EK=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，

$\because \sin\angle TKO=\frac{TO}{OK}=\frac{OE}{EK}$，

$\therefore \frac{2}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{5}}{2}b}$,

$\therefore b = 2\sqrt{5}$,

根据对称性可知：当直线与$\odot O$在下方相切时，$OF = OE = 2\sqrt{5}$，

$\therefore b = -2\sqrt{5}$，

$\therefore b$的取值范围为：$-2\sqrt{5} \le b \le 2\sqrt{5}$.

(2)如图 2 中，

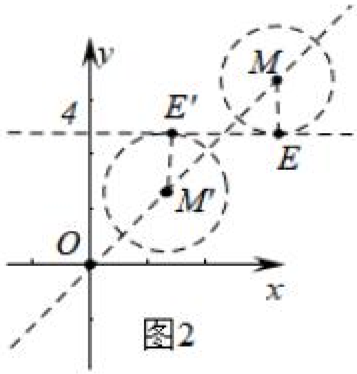


图2

当直线$y = 4$与$\odot M$相切时，切点分别为 E或E'，连接ME，$M'E'$，

$\because EM = E'M' = 2$，

$\therefore M'(2,2)$，$m(6,6)$，

∴满足条件的 m 的取值范围为$2 \le m \le 6$.

(1)①根据$\odot M$的“美好点”即可判断.

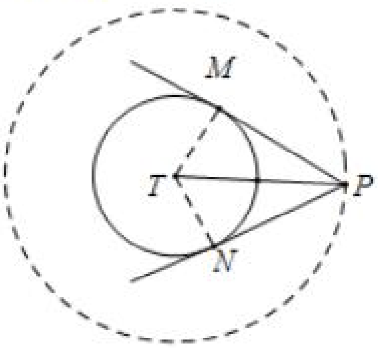
②求出直线$y = 2x + b$与$\odot M$相切时，b 的值即可解决问题；

(2)当直线$y = 4$与$\odot M$相切时，求出点 M 的坐标，有两个值，由此即可解决问题；

本题属于圆综合题、直线与圆的位置关系、解直角三角形等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，学会在取特殊位置解决问题，属于中考压轴题.

23.【答案】P_2，P_3

【解析】解：(1)①如图，PM，PN是$\odot T$的两条切线，M，N为切点，连接TM，TN.



当$\angle MPN=60°$时，$\because PT$平分$\angle MPN$，

$\because \angle TPM=\angle TPN=30°$，

$\because TM\perp PM$，$TN\perp PN$，

$\therefore \angle PMT=\angle PNT=90°$，

$\therefore TP=2TM$，

以T为圆心，TP为半径作$\odot T$，

观察图象可知：当$60°\le \angle MPN<180°$时，$\odot T$的环绕点在图中的圆环内部(包括大圆设的点不包括小圆上的点)．

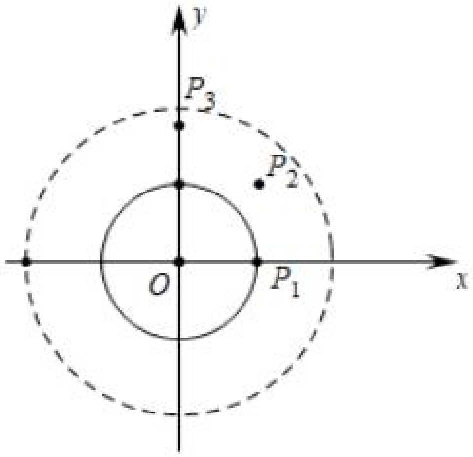


图1

如图 1 中，以O为圆心 2 为半径作$\odot O$，观察图象可知，P_2，P_3是$\odot O$的环绕点，

故答案为P_1，P_2．

②如图 2 中，设小圆交y轴的正半轴与于E．

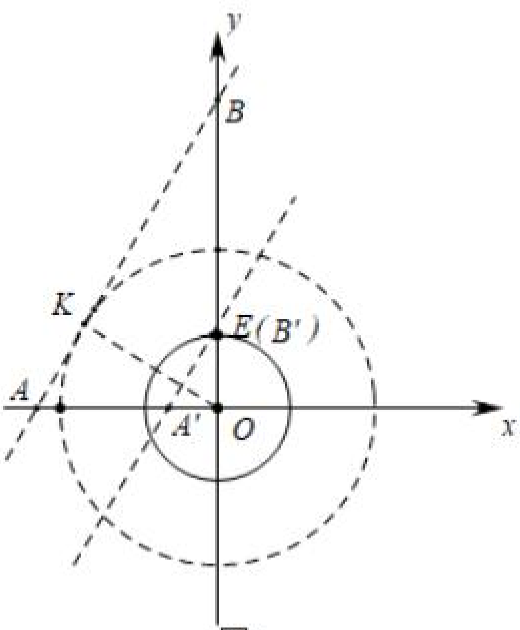


图2

当直线$y=2x+b$经过点E时，$b=2$．

当直线$y=2x+b$与大圆相切于K(在第二象限)时，连接 OK,

由题意$B(0,b)$，$A(-\frac{b}{2},0)$,

$\therefore OB=b$，$OA=\frac{b}{2}$，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+b^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}b$,

$\because OK=2$，$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OK=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB$,

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}b\times 2=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{b}{2}$,

解得$b=2\sqrt{5}$,

观察图象可知，当$2<b\le 2\sqrt{5}$时，线段AB上存在$\odot O$的环绕点,

根据对称性可知：当$-2\sqrt{5}\le b<-2$时，线段AB上存在$\odot O$的环绕点,

综上所述，满足条件的b的值为$2<b\le 2\sqrt{5}$或$-2\sqrt{5}\le b<-2$.

(2)如图 3 中，不妨设$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)$，则点E在直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$时,

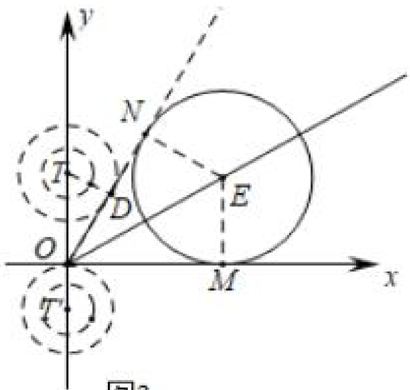


图3

$\because m>0$,

$\therefore$点E在射线OE上运动，作$EM\perp x$轴,

$\because E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)$,

$\therefore OM=m$，$EM=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$以$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)(m>0)$为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}m$为半径的$\odot E$与$x$轴相切，作$\odot E$的切线$ON$,

观察图象可知，以$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)(m>0)$为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}m$为半径的所有圆构成图形$H$，图形$H$即为$\angle MON$的内部，包括射线$OM$，$ON$上.

当$\odot T$的圆心在y轴的正半轴上时，假设以T为圆心，2 为半径的圆与射线ON相切于D，连接TD.

$\because \tan\angle EOM=\frac{EM}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle EOM=30°$,

$\because ON$，OM是$\odot E$的切线，

$\therefore \angle EON=\angle EOM=30^\circ$，

$\therefore \angle TOD=30^\circ$，

$\therefore OT=2DT=4$，

$\therefore T(0,4)$，

当$\odot T$的圆心在y轴的负半轴上时，且经过点$O(0,0)$时，$T(0,-2)$，

观察图象可知，当$-2\leq t\leq 4$时，在图形H上存在$\odot T$的环绕点．

(1)①如图，PM，PN是$\odot T$的两条切线，M，N为切点，连接TM，TN.当$\angle MPN=60^\circ$时，可证$TP=2TM$，以T为圆心，TP为半径作$\odot T$，首先说明：当$60^\circ\leq\angle MPN<180^\circ$时，$\odot T$的环绕点在图中的圆环内部(包括大圆设的点不包括小圆上的点).利用这个结论解决问题即可．

②如图2中，设小圆交y轴的正半轴与于E.求出两种特殊位置b的值，结合图形根据对称性解决问题即可．

(2)如图3中，不妨设$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)$，则点E在直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$时，以$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)(m>0)$为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}m$为半径的$\odot E$与$x$轴相切，作$\odot E$的切线$ON$，观察图象可知，以$E(m,\frac{\sqrt{3}}{3}m)(m>0)$为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{3}m$为半径的所有圆构成图形$H$，图形$H$即为$\angle MON$的内部，包括射线$OM$，$ON$上．利用(1)中结论，画出圆环，当圆环与$\angle MON$的内部有交点时，满足条件，求出两种特殊位置$t$的值即可解决问题.

本题属于圆综合题，考查了切线长定理，直线与圆的位置关系，一次函数的性质等知识，解题的关键是理解题意，学会用转化的思想问题，学会利用特殊位置解决数学问题，属于中考压轴题.

24.【答案】4221

【解析】解：(1)由规律得，$63\times 67=100\times 6\times(6+1)+3\times 7=4200+21=4221$，

故答案为：4221；

(2)规律：个位数字相同，十位数字和为10的两个两位数相乘，结果末两位的是个位数字的平方(或乘积)，前几位是十位数字的乘积与与个位数字的和．

理由：设将相同的个位数字设为m，十位数字分别为p，q，则$p+q=10$，

$$\therefore \bar{pm}\cdot\bar{qm}=(10p+m)(10q+m)$$

$$=100pq+10pm+10qm+m^2$$

$$=100pq+10m(p+q)+m^2$$

$$=100pq+100m+m^2$$

$= 100(pq + m) + m^2$，

即：个位数字相同，十位数字和为 10 的两个两位数相乘，结果末两位的是个位数字的平方(或乘积)，前几位是十位数字的乘积与与个位数字的和.

(1)直接根据规律计算即可得出结论；

(2)设将相同的个位数字设为 m，十位数字分别为 p，q，则$p + q = 10$，进而得出$\overline{pm} \cdot \overline{qm} = 100(pq + m) + m^2$，即可得出结论.

此题主要考查了数字问题，多项式乘以多项式，找出规律是解本题的关键.

25.【答案】A_2

【解析】解：(1)对于$A_1(3,2)$，$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$，故 $B_1(1,2)$是A_1的分解点.

对于$A_3(-2,0)$，$x^2 - 2x = x(x - 2)$，故 $B_3(0,-2$是A_3的分解点.

点A_2不存在分解点.

故答案为A_2.

(2)$\because P$，Q 在纵轴上，P，Q 都存在分解点，

$\therefore P$，Q 的纵坐标只能是 0，-1，-4，-16，

当$R_1(1,0)$时，$\because \triangle PQR$的面积为 6，

$\therefore PQ = 12$，

$\because P$在 Q 的上方，

$\therefore P_1(0,-4)$，$Q_1(0,-16)$，

同法当$R_2(-1,0)$时，可得$P_2(0,-4)$，$Q_2(0,-16)$，

当$R_3(3,0)$时，可得$P_3(0,0)$，$Q_3(0,-4)$，

当$R_4(-3,0)$时，可得$P_4(0,0)$，$Q_4(0,-4)$，

当$R_5(4,0)$时，可得$P_5(0,-1)$，$Q_5(0,-4)$，

当$R_6(-4,0)$时，可得$P_6(0,-1)$，$Q_6(0,-4)$，

当$R_7(12,0)$时，可得$P_7(0,0)$，$Q_7(0,-1)$，

当$R_8(-12,0)$时，可得$P_8(0,-4)$，$Q_8(0,-1)$，

综上所述，$\triangle PQR$的个数为 8.

(3)如图，设$D(m,n)$，则 m，n 是正整数，

$\because (x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$且 D 为 C 的分解点，

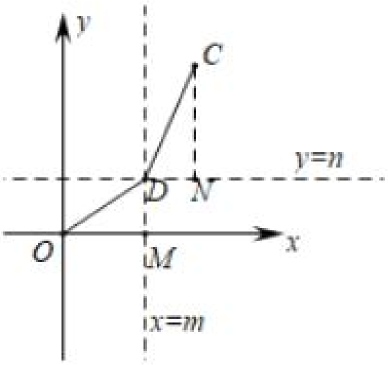
$\therefore C(m+n,mn)$.

当$m=1$时，$D(1,n)$，$C(n+1,n)$，此时$OC>OD>CD$，不可能构成等腰三角形.

当$m\neq 1$时，则$m+n>m$，$mn>m$，则点C必在直线$x=m$，$y=n$相交直线的右上角区域，

此时$OC>OD$，$OC>CD$，若$\triangle OCD$为等腰三角形，只可能$OD=CD$，

如图，过C作$CN\perp$直线$y=n$，过点D作$DM\perp x$轴于M.



在$Rt\triangle ODM$和$Rt\triangle CDN$中，$DM=DN=n$，若$OD=CD$，则$Rt\triangle ODM\cong Rt\triangle CDN(HL)$，

$\therefore DM=CN$，即$m=mn-n$，此式子可以化为$(m-1)(n-1)=1$，

$\because m$，n为正整数，

$\therefore m=2$，$n=2$，即$D(2,2)$，$C(4,4)$，

此时O，C，D共线，$\triangle OCD$不存在，

综上所述，$\triangle OCD$不可能为等腰三角形.

(1)根据B是A的分解点的定义判断即可.

(2)因为P，Q在纵轴上，P，Q都存在分解点，推出P，Q的纵坐标只能是0，-1，-4，-16，当$R_1(1,0)$时，由$\triangle PQR$的面积为6，推出$PQ=12$，由P在Q的上方，推出$P_1(0,-4)$，$Q_1(0,-16)$，同法可求其余各个点.

(3)如图，设$D(m,n)$，则m，n是正整数，由题意$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$且D为C的分解点，推出$C(m+n,mn)$.分两种情形：①当$m=1$时，$D(1,n)$，$C(n+1,n)$，此时$OC>OD>CD$，不可能构成等腰三角形.

②当$m\neq 1$时，可以证明O，C，D共线，不存在$\triangle OCD$.

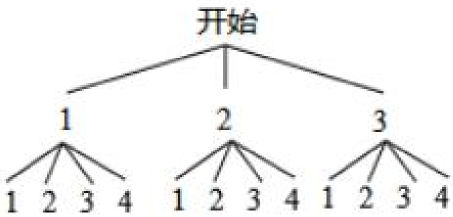
本题属于三角形专题，考查了分解点的定义，三角形的面积，等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考常考题型.

26.【答案】(1)证明：$\because\triangle=b^2-4\cdot\frac{1}{4}c=b^2-c=0$，

$\therefore$将$c=2b-1$代入得：$\triangle=b^2-(2b-1)=b^2-2b+1=(b-1)^2\geq 0$，

$\therefore$方程一定有两个实数根；

(2)解：画树状图得：



∵共有 12 种等可能的结果，若方程有两个相等的实数根，$\triangle = b^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}c = b^2 - c = 0$，

$\therefore b^2 = c$，满足条件的结果有$(1,1)$和$(2,4)$，共 2 种，

$\therefore P$(b、c的值使方程$\frac{1}{4}x^2 + bx + c = 0$两个相等的实数根的概率$) = \frac{1}{6}$.

【解析】(1)直接利用根的判别式以及完全平方公式进而分析得出答案；

(2)首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果；可得$2x + y = 6$的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率=所求情况数与总情况数之比.

27.【答案】解：(1)将点$A(3,2)$的坐标分别代入$y = kx - 1(k \neq 0)$与$y = \frac{m}{x}(x > 0)$中，得

$2 = 3k - 1$，$2 = \frac{m}{3}$，

$\therefore k = 1$，$m = 6$；

(2)①∵直线$y = kx - 1$与y轴交于点$(0,-1)$，

∴当$t = 2$时，$Q(0,1)$.

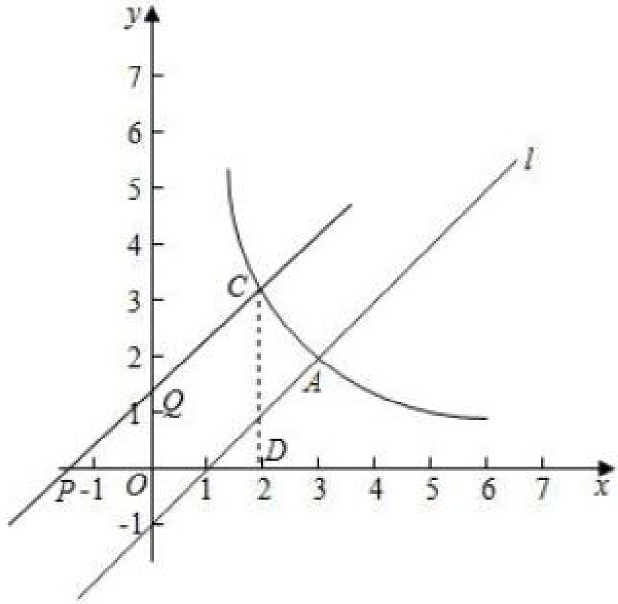
此时直线解析式为$y = x + 1$，代入函数$y = \frac{6}{x}$中，整理得，$x(x + 1) = 6$，

解得$x_1 = -3$(舍去)，$x_2 = 2$，

$\therefore C(2,3)$，

$\therefore QC=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$.

②如图，作$CD\perp x$轴于D，



若$\frac{QC}{PQ}=2$时，则$\frac{OD}{OP}=2$，$\frac{CD}{OQ}=3$，

$\because$直线解析式系数$k=1$，

$\therefore OP=OQ$，

设$OP=OQ=a$，

$\therefore OD=2a$，$CD=3a$，

$\therefore CD=\frac{6}{2a}=\frac{3}{a}$，

$\therefore 3a=\frac{3}{a}$，

解得$a=1$，

$\therefore$此时$t=1+1=2$，

若$\frac{QC}{PQ}=3$时，则$\frac{OD}{OP}=3$，$\frac{CD}{OQ}=4$，

$\because$直线解析式系数$k=1$，

$\therefore OP=OQ$，

设$OP=OQ=a$，

$\therefore OD=3a$，$CD=4a$，

$\therefore CD=\frac{6}{3a}=\frac{2}{a}$，

$\therefore 4a=\frac{2}{a}$，

解得$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$此时$t=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$若$2<\frac{QC}{PQ}<3$，结合函数图象，得出t的取值范围是$1+\frac{\sqrt{2}}{2}<t<2$.

【解析】(1)将点A分别代入$y=kx-1(k\neq 0)$与$y=\frac{m}{x}(x>0)$，即可求出k、m的值；

(2)①求出当$t=2$时直线解析式，代入函数$y=\frac{6}{x}$中，整理得，$x(x+1)=6$，解方程求出点C的坐标，即可求出QC的长；②观察图象解答即可.

本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，待定系数法求解析式，利用函数图象性质解决问题是本

题的关键.

28.【答案】解：(1)$y=x^2-2ax+a^2-a+4=(x-a)^2+4-a$，

故点$A(a,4-a)$；

(2)点A所在的直线为：$y=4-x$，

联立$y=4-x$与$y=-x$并解得：$x=1$，故两个直线的交点为$(1,3)$；

①当点C的坐标为：$(1,3)$时，

则点$B(-2,3)$，点$A(-2,6)$，$a=-2$，

故抛物线的表达式为：$y=(x+2)^2+6$；

②当点B的坐标为：$(1,3)$时，

则点$A(4,0)$，则$a=4$，

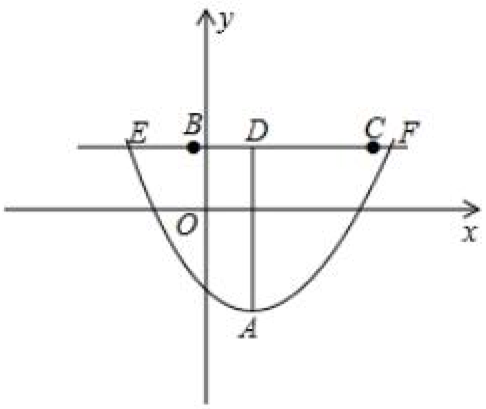
故抛物线的表达式为：$y=(x-4)^2$；

综上，抛物线的表达式为：$y=(x+2)^2+6$或$y=(x-4)^2$；

(3)点$A(a,4-a)$，则点$D(a,3)$，

$BC=3BD$，则点B、C的坐标分别为：$(a-1,3)$、$(a+2,3)$，

将抛物线$y=x^2-2ax+a^2-a+4$与直线$y=3$联立并解得：$x=a\pm\sqrt{a-1}$，



故点E、F的坐标分别为：$(a-\sqrt{a-1},3)$、$(a+\sqrt{a-1},3)$，

①当$a=1$时，点E、B、C、F的坐标分别为：$(1,3)$、$(0,3)$、$(2,3)$、$(1,3)$，而点$A(1,3)$，

此时，抛物线于BC只有一个公共点；

②当$a>1$时，

当点C、F重合时，则$a+\sqrt{a-1}=a+2$，解得：$a=5$；

当点B、E重合时，$a-\sqrt{a-1}=a-1$，解得：$a=2$，

故$2<a\leq 5$；

综上，$a=1$或$2<a\le5$.

【解析】(1)$y=x^2-2ax+a^2-a+4=(x-a)^2+4-a$，即可求解；

(2)分当点C的坐标为：$(1,3)$时、点B的坐标为：$(1,3)$时，两种情况分别求解；

(3)分$a=1$、$a>1$两种情况，分别求解即可．

本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数的性质、等腰直角三角形的性质等，其中(2)、(3)，都要注意分类求解，避免遗漏.

29.【答案】解：(1)如图1所示：

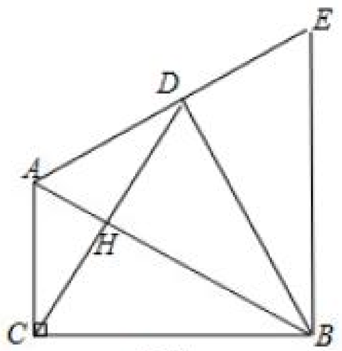


图1

(2)与$\triangle CDB$相似的三角形是$\triangle ABE$，

理由如下：$\because$点C关于直线AB的对称点为D，

$\therefore CH=DH$，$AB\perp CD$，

$\therefore AB$是CD的垂直平分线，

$\therefore AD=AC$，$BC=BD$，且$AB\perp CD$，

$\therefore \angle ACD=\angle ADC$，$\angle CAB=\angle DAB$，$\angle BCD=\angle BDC$，$\angle DBA=\angle CBA$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle ABC+\angle CAB=90°$，且$\angle ABC+\angle BCH=90°$，$\angle BAC+\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle BCD=\angle BAC$，$\angle ACD=\angle ABC$，

$\therefore \angle DAB=\angle BCD=\angle BAC=\angle BDC$，

$\because AC//BE$，

$\therefore \angle CAB=\angle ABE$，

$\therefore \angle CDB=\angle ABE$，且$\angle DAB=\angle BCD$，

$\therefore\triangle BCD\backsim\triangle EAB$；

(3)$BH\cdot FC=BC^2+CF^2$，

理由如下：

如图2，

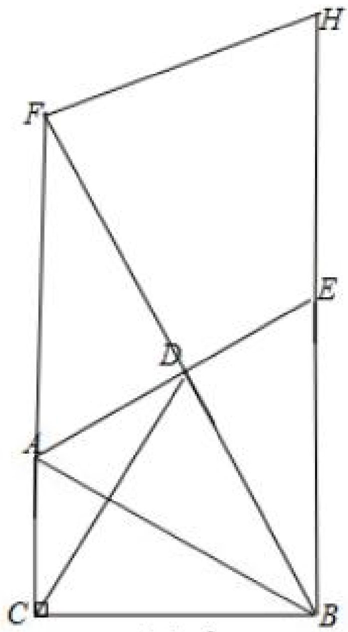


图 2

$\because \angle ACB = 90°$,

$\therefore BC^2 + CF^2 = BF^2$,

$\because \triangle BCD \backsim \triangle EAB$,

$\therefore \angle AEB = \angle CBD$,

$\because AE // FH$,

$\therefore \angle H = \angle AEB = \angle CBD$,

$\because AC // BE$,

$\therefore \angle CFB = \angle FBH$,

$\therefore \triangle FCB \backsim \triangle BFH$,

$\therefore \frac{BH}{BF} = \frac{BF}{FC}$,

$\therefore BF^2 = BH \cdot FC$,

$\therefore BH \cdot FC = BC^2 + CF^2$.

【解析】(1)由题意补全图形;

(2)由轴对称的性质可得AB是CD的垂直平分线，可得$AD = AC$，$BC = BD$，由等腰三角形的性质和余角的性质，可得$\angle DAB = \angle BCD = \angle BAC = \angle BDC$，由平行线的性质可得$\angle CAB = \angle ABE = \angle CDB$，可证$\triangle BCD \backsim \triangle BAE$;

(3)由勾股定理可得$BC^2 + CF^2 = BF^2$，通过证明$\triangle FCB \backsim \triangle BFH$，可得$\frac{BH}{BF} = \frac{BF}{FC}$，可得结论.

本题是几何变换综合题，考查了轴对称的性质，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，找到正确的相似三角形是本题的关键.

30.【答案】①③

【解析】解：(1)由题意①③是$\odot O$的关联图形，

故答案为①③.

(2)如图1中，

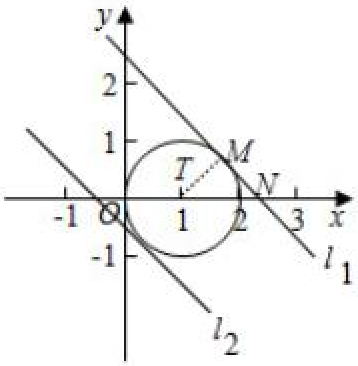


图1

$\because$直线$l_1\ y=-x+b$是$\odot T$的关联直线，

$\therefore$直线l的临界状态是和$\odot T$相切的两条直线l_1和l_2，

当临界状态为l_1时，连接TM(M为切点)，

$\therefore TM=1$，$TM\perp MB$，且$\angle MNO=45°$，

$\therefore\triangle TMN$是等腰直角三角形，

$\therefore TN=\sqrt{2}$，$OT=1$，

$\therefore N(1+\sqrt{2},0)$，

把$N(1+\sqrt{2},0)$代入$y=-x+b$中，得到$b=1+\sqrt{2}$，

同法可得当直线l_2是临界状态时，$b=-\sqrt{2}+1$，

$\therefore$点N的横坐标的取值范围为$-\sqrt{2}+1\leq\leq\sqrt{2}+1$.

(3)如图$3-1$中，当点Q在点P是上方时，连接BQ，PD交于点H，当圆心I在x轴上时，点H与点C重合，此时$H(2,0)$，得到h的最大值为2，

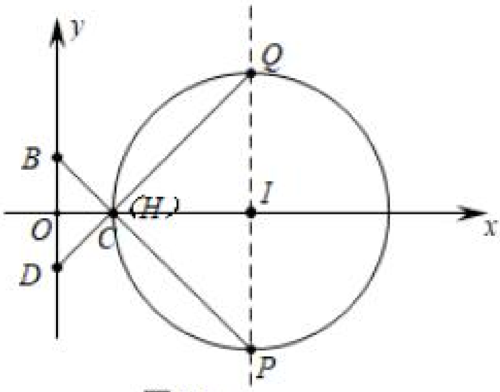


图3-1

如图$3-2$中，当点P在点Q是上方时，连接BQ，PD交于点H，当圆心I在x轴上时，点$H(-6,0)$得到h的最小值为-6，

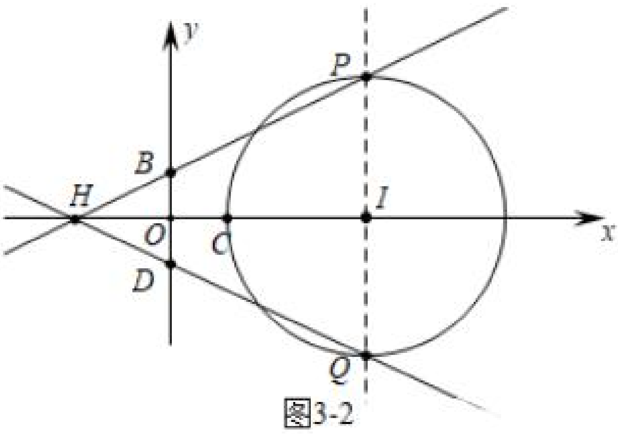


图3-2

综上所述，$-6 \le h < 0$，$0 < h \le 2$．

(1)根据$\odot A$的关联图形的定义判断即可．

(2)直线l的临界状态是和$\odot T$相切的两条直线l_1和l_2，求出两种特殊情形的点N的横坐标即可解决问题．

(3)分两种情形：如图$3-1$中，当点Q在点P是上方时，连接BQ，PD交于点H，当圆心I在x轴上时，点H与点C重合，此时$H(2,0)$，得到h的最大值为2.如图$3-2$中，当点P在点Q是上方时，连接BQ，PD交于点H，当圆心I在x轴上时，点$H(-6,0)$得到h的最小值为-6，由此即可解决问题．

本题属于圆综合题，考查了$\odot A$的关联图形的定义，直线与圆的位置关系等知识，解题的关键是理解题意，学会寻找特殊点，特殊位置解决问题，属于中考压轴题．