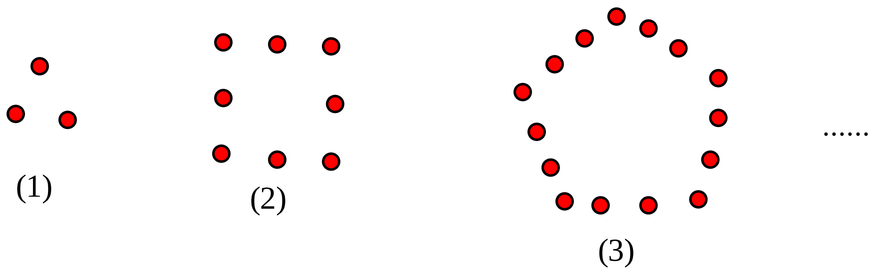
新高一分班考试数学真题汇编

参考目录

【题型】【找规律】

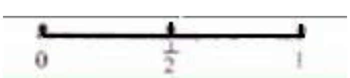
【2013·华二附中】
【题目】如图，有棋子摆成这样，求第n幅图有_________颗棋子。



【答案】$n(n+2)$
【解析】第(1)幅图有 3 条边，每边 1 个棋子
第(2)幅图有 4 条边，每边 2 个棋子
第(3)附图有 5 条边，每边 3 个棋子
第n幅图右$(n+2)$条边，每边n个棋子，有$n(n+2)$个棋子

【2013·华二附中】
【题目】$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\cdots$第2013个数是____________
【答案】63
【解析】最后一个$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$分别在第$1,3,6,10,\cdots,\dfrac{n(n+1)}{2},\cdots$位
$\dfrac{63\times64}{2}=2016$，$\dfrac{62\times63}{2}=1953$，最后一个 62 在第 1953 位，
最后一个 63 在第 2016 位故第 2013 个数是 63

【2011·华二附中】
【题目】以下是面点师一个工作环节的数学模型：如图，在数轴上截取从0到1对应的线段，对折后（坐标1所对应的点与原点重合）再均匀地拉成1个单位长度的线段，这一过程称为一次操作（例如在第一次操作完成后，原来的坐标$\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$变成$\dfrac{1}{2}$，原来的$\dfrac{1}{2}$变成1，等等），那么原数轴从 0 到 1 对应的线段上（除两个端点外）的点，在第n次操作完成后（$n\geq1$），恰好被拉到与1重合的点所对应的坐标为____________



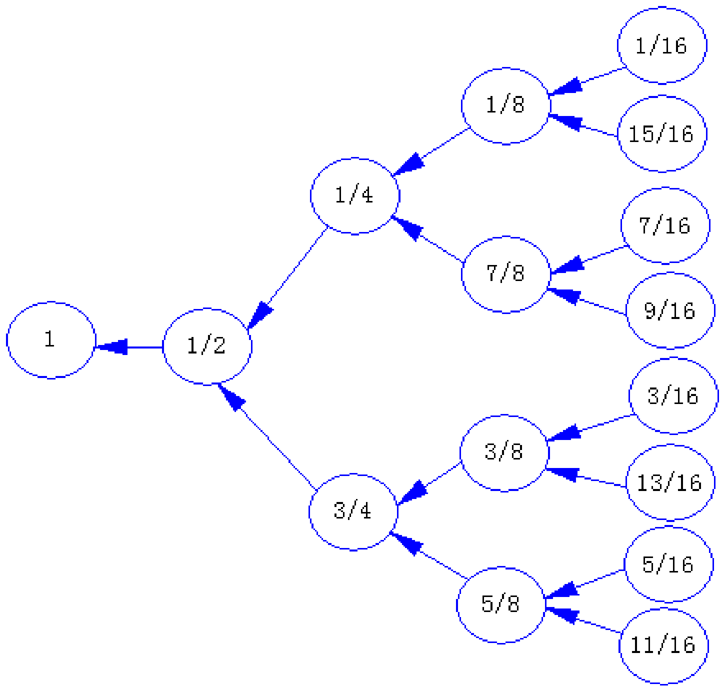
【答案】$\dfrac{k}{2^n}$（$k\in[1,2^n]$中的奇数）

【解析】设坐标为x的点经过一次操作后变为坐标y，则$y=\begin{cases}2x\ , & 0\leq x\leq\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x)\ , & \dfrac{1}{2}<x\leq1\end{cases}$

要使得经过一次操作后坐标变为 1，则倒数第 2 次操作坐标应为$\dfrac{1}{2}$，

要使操作一次后坐标为 $\frac{1}{2}$，则前一次坐标为 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$，即 $x=\frac{y}{2}$ 或 $1-\frac{y}{2}$

树形图如下所示:

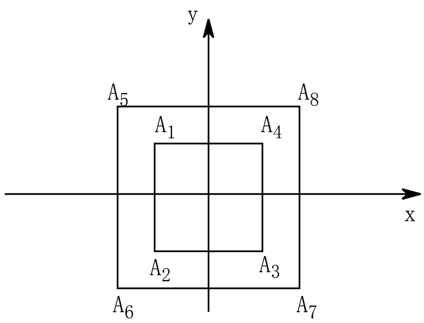


可发现规律反向操作 n 层后，分母为 2^n，分子为所有全体小于 2^n 的奇数

故答案为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-3}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}$

【2013 • 进才中学】

【题目】正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 边长为 2，与之相比更大的正方形边长分别为 $4,6,8,10,\cdots$，求 A_{55} 坐标。



【解析】$55=4\times13+3$，位于第四象限，坐标为 $(13,-13)$

【题型】【创新题】

【2013 • 华二附中】

【题目】定义：①$1^{*}1=1$，② $(n+1)^{*}1=n^{*}1+1$，求 $n^{*}1=$______________
【答案】n

【2013 • 重点高中自招训练题】
【题目】电子计算机中使用二进制，它与十进制的换算关系如下表所示：

十进制	1	2	3	4	5	6	7	8	…
二进制	1	10	11	100	101	110	111	1000	…

观察二进制为 1 位数、2 位数、3 位数时，对应的十进制的数，当二进制为 6 位数时，能表示十进制中的最大数是（　　）

A. 61　　B. 62　　C. 63　　D. 64

【解析】$2^{6}-1=63$

【2013 • 上海中学】
【题目】已知$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$，这里 n 为任意正整数，请你利用恒等式$(n+1)^{3}=n^{3}+2n\ \ +3n+1$，推导出$1^{2}+2^{2}+3^{2}+\cdots+n^{2}$的计算公式。

【解析】$(n+1)^{3}=n^{3}+3n^{2}+3n+1$，

$n^{3}=(n-1)^{3}+3(n-1)^{2}+3(n-1)+1$，

$(n-1)^{3}=(n-2)^{3}+3(n-2)^{2}+3(n-2)+1$，

…　…

$2^{3}=1^{3}+3\times1^{2}+3\times1+1$，

所有式相加，得：$(n+1)^{3}=1+3(1^{2}+2^{2}+\cdots+n^{2})+3(1+2+\cdots+n)+n$，

即 $n^{3}+3n^{2}+3n+1=1+3(1^{2}+2^{2}+\cdots+n^{2})+\dfrac{3n(n+1)}{2}+n$

$\therefore 1^{2}+2^{2}+\cdots+n^{2}=\dfrac{1}{3}(n^{3}+\dfrac{3}{2}n^{2}+\dfrac{1}{2}n)=\dfrac{n(n\quad 1)(2n+1)}{6}$

【2013 • 重点高中自招训练题】
【题目】给你一列数：$1,1,2,6,24$，（　　）。请你仔细观察这列数的排列规则，然后从四个供选择单选项中选出一个你认为最合理的一项，来填补其中的空缺项，使之符合原数列的排列规律.

A. 48　　B. 96　　C. 120　　D. 144

【解析】$\times1,\times2,\times3,\times4,\times5$，$24\times5=120$

【题型】【巧算】

【2013 • 上海中学】
【题目】计算$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}}=$______________

【解析】原式$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2013}-\sqrt{2012})=\sqrt{2013}-1$

【题型】【根式开方问题】

【2013·华二附中】

【题目】已知：x,y 为有理数，且满足 $\sqrt{\frac{21}{4}+3\sqrt{\ }}=x+\sqrt{y}$，则 $(x,y)=$____________

【答案】$(\frac{3}{2},3)$

【解析】$\sqrt{\frac{21}{4}+3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21+12\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{21+2\sqrt{108}}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$

故 $(x,y)=(\frac{3}{2},3)$

【2013·上海中学】

【题目】若有理数 a,b 满足 $\sqrt{\frac{21}{4}-3\sqrt{\ }}=a+\sqrt{b}$，则 $a+b=$____________

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】$\because \sqrt{\frac{21}{4}-3\sqrt{\ }}=\frac{\sqrt{21-12\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{21-2\sqrt{108}}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ $b=3$，$\therefore a+b=\frac{3}{2}$

【题型】【化简与求值】

【2013·复旦附中】

【题目】已知：$|a+b|\le c,|b+c|\le a,|c+a|\le b$，求$a+b+c$的值。

【答案】0

【解析】$\because a\ge |b \quad | \Rightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ a\ge b+c \end{cases}$，$b\ge |a \quad | \Rightarrow \begin{cases} b\ge 0 \\ b\ge a+c \end{cases}$，$c\ge |a \quad | \Rightarrow \begin{cases} c\ge 0 \\ c\ge a+b \end{cases}$

$\therefore \left.\begin{matrix} a\ge 0 \\ b\ge 0 \\ c\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b+c \quad 0$，$\left.\begin{matrix} a\ge b+c \\ b\ge a+c \\ c\ge a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b+c\ge 2(a+b+c) \Rightarrow a+b+c \quad 0$

$\therefore a+b+c=0$

【2013·上海中学】

【题目】设 x,y,z 为整数且满足 $|x-y|^{2012}+|y-z|^{2013}=1$，则代数式 $|x-y|^3+|y-z| +$ $|z-x|^3$ 的值为____________

【解析】若 $|x-y|=0,|y-z|=1$，则 $x=y$，$|x-y|^3+|y-z|^3+|z-x|^3=0+1+1=2$

若 $|x-y| \quad 1, |y-z| \quad 0$，则同理可得所求的值为2。

【2013·华二附中】

【题目】已知：$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{4}{a^2+b^2}$，求 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2012} \quad \left(-\right)^{2013}=$ ____________

【答案】2 或 0

【解析】$\dfrac{1}{a^2} \quad \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{4}{a^2+b^2}$，即 $\dfrac{a^2+b^2}{a^2}+\dfrac{a^2 \quad b^2}{b^2}=2+\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}=$

$\dfrac{a^2}{b^2}+\text{—} \quad 2$，故 $\dfrac{a^2}{b^2}=\text{—} \quad 1$，故 $\dfrac{a}{b}=1$或-1，原式$=2$或0

【2013·重点高中自招训练题】

【题目】已知 $a=\dfrac{1}{+\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{1-2a+a^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值。

【解析】$\because a=2-\sqrt{3}<1$

$\therefore$原式$=\dfrac{(\quad 1)^2}{a-1}-\dfrac{|a-1|}{a(a-1)}=a-1-\dfrac{1-a}{a(a-1)}$

$=a+\dfrac{1}{a}-1=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-1=3$

【题型】【有理数、无理数与反证法】

【2013·复旦附中】

【题目】若a、b、c为正有理数，证明：

(1)若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 为有理数，则 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 为有理数，

(2)若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 为有理数，则 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为有理数。

【解析】(1) a,b 为有理数，设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=p$，则 p 为有理数

$\sqrt{a}=p-\sqrt{b}$，平方得 $a=p^2+b-2p\sqrt{b}$，则 $\sqrt{b}=\dfrac{p^2+b-a}{2p}$ 为有理数

同理，$\sqrt{a}$ 为有理数

(2) a,b,c 为有理数，设 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=q$ 为有理数

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=q-\sqrt{c}$，平方 $a+b+2\sqrt{ab}=q^2+c-2q\sqrt{c}$

即 $\sqrt{ab}+q\sqrt{c}=\sqrt{ab}+\sqrt{q^2c}=\dfrac{q^2+c-a-b}{2}$ 为有理数

由(1)，可得 $\sqrt{ab},\sqrt{q^2c}$ 均为有理数，即 $q\sqrt{c}$ 是有理数，故 $\sqrt{c}$ 是有理数

同理，$\sqrt{a},\sqrt{b}$ 也是有理数，证毕。

【题型】【方程与方程组求解】

【2011·华二附中】

【题目】关于 x,y 的方程组 $\begin{cases} \quad ^{x-y}=y^{x \quad y} \\ y\sqrt{x}=1 \end{cases}$ 有____________组解.

【答案】2

【解析】由②得 $x>0,y>0$，且 $x=\dfrac{1}{y^2}\quad{}^{-2}$，代入①得 $(\quad{}^{-2})^{y^{-2}-y}=y^{y\quad+y}$，

即 $y^{-2y^{-2}+\quad y}=y^{y\quad+y}$，$\therefore -2y^{\quad 2}\quad 2y=y^{-}\quad+y$，

即 $3\quad{}^{-2}=y$，$y^3=3$，$y=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$，$x=\quad{}^{-2}\quad 3^{-\frac{2}{3}}$，

显然 $x=y=1$ 是方程的一组解，综上所述：方程有两组解

【2013 • 上海中学】

【题目】解方程组 $\begin{cases} x^2=1+(y-z)^2 \\ y^2=2+(z-x)^2 \\ z^2=3+(x-y)^2 \end{cases}$

【解析】原方程等价于：$\begin{cases} (x+y-z)(x-y+z)=1 \\ (y+z-x)(y-z+x)=2 \\ (z+x-y)(z-x+y)=3 \end{cases}$

设 $x+y-z=a,x-y+z=b,-x+y+z=c$，则原方程等价于 $\begin{cases} ab=1 \\ ac=2 \\ bc=3 \end{cases}$

三式相乘得 $a^2b^2c^2=6$，即 $abc=\pm\sqrt{6}$，可得 $(a,\ ,\ )=\pm(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{\ }}{\ },1)$

$x=\dfrac{a+b}{2}\quad\pm\dfrac{5\sqrt{\ }}{12}$，$y=\dfrac{a+c}{2}=\pm\dfrac{2\sqrt{\ }}{\ }$，$z=\dfrac{b+c}{2}=\pm\dfrac{3\sqrt{\ }}{\ }$

$\therefore$ 原方程的解为 $\begin{cases} x=\pm\dfrac{5\sqrt{\ }}{12} \\ y=\pm\dfrac{2\sqrt{\ }}{3} \\ z=\pm\dfrac{3\sqrt{\ }}{4} \end{cases}$

【题型】【方程的实际应用】

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】某校去年投资 2 万元购买实验器材，预计今明两年的投资总额为 8 万元，若该校这两年．购买的实验器材的投资年平均增长率为 x，则可列方程为___________

【解析】$2(1+x)+2(1+x)^2=8$

【题型】【一次函数、反比例函数的性质】

【2013 • 华师一附】

【题目】已知 a,b,c 为正实数，且满足 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=k$，则一次函数 $y=kx+k-\sqrt{5}$ 的图象一定经过（　　）

A.第一、二、三象限　　　　B.第一、二、四象限
C.第一、三、四象限　　　　D.第二、三、四象限

【解析】$\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=k=\frac{b+c+a+b+a+c}{a+c+b}=2$

$y=2x+2-\sqrt{5}$ 过一、三、四象限

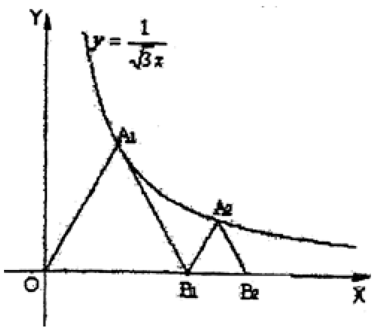
【2013 • 重点高中自招训练题】
【题目】在初中已学过的一次函数、反比例函数和二次函数等函数中，它们的图像与任意一条直线 $x=a$（a 是任意实数）交点的个数为（　　）

A.必有一个　　B.一个或两个　　C.至少一个　　D.至多一个

【解析】D

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】如图，ΔOA_1B_1，$\Delta B_1A_2B_2$ 是等边三角形，点 A_1,A_2 在函数 $y=\frac{1}{\sqrt{3}x}$ 的图象上，点 B_1,B_2 在 x 轴的正半轴上，分别求 ΔOA_1B_1，$\Delta B_1A_2B_2$ 的面积。



【解析】直线 OA_1 的解析式为 $y=\sqrt{3}x$，与 $y=\frac{1}{\sqrt{3}x}$ 联立，得 $x=\frac{1}{\sqrt{3}},y=1$，

即 $A_1(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$，$S_{\triangle OB_1A_1}=\frac{y^2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

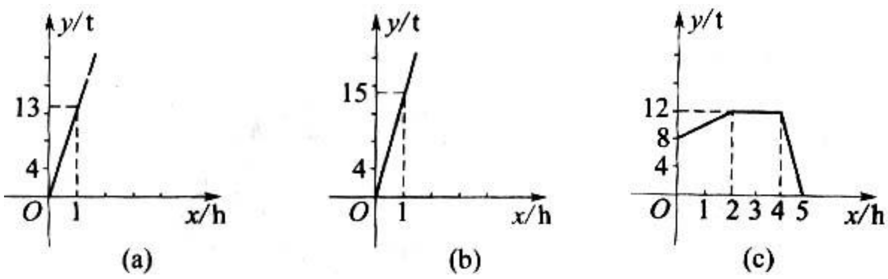
直线 B_1A_2 的解析式：$y=\sqrt{3}x-1$，与 $y=\frac{1}{\sqrt{3}x}$，得 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即 $y_{A_2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$S_{\triangle B_1A_2B_2}=\frac{y^2}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$

【题型】【函数的实际应用】

【2013 • 华师一附】
【题目】某仓储系统有 20 条输入传送带，20 条输出传送带。某日，控制室的电脑显示，每条输入传送带每小时进库的货物流量如图(a)，每条输出传送带每小时出库的

货物流量如图(b)，而该日仓库中原有货物 8 吨，在 0 时至 5 时，仓库中货物存量变化情况如图(c)，则在 0 时至 2 时有多少条输入传送带和输出传送带在工作？在 4 时至 5 时有多少条输入传送带和输出传送带在工作？



【解析】图（a）表明，输入传送带可运进货物13t/h；

图（b）表明，输出传送带可以运出货物15t/h；

图（c）表明，在 0:00 ~ 2:00 时间段内仓库中货物增加$\dfrac{12-8}{2}=2\text{t/h}$。

设此时有x条输入传送带，y条输出传送带在工作，则有$13x-15y=2$

故$x=\dfrac{15y+2}{13}=y+\dfrac{2y+2}{13}$

因$0\le y\le 20$，故取$2y+2=26$，得$x=14, y=12$

在 4:00 ~ 5:00 内，同理得方程

$13x-15y=-12$，故$x=\dfrac{15x-12}{13}=y+\dfrac{2y-12}{13}$

因$0\le x\le 20$，$0\le y\le 20$，取$2x-12=0$或$2y-12=26$，

得$x=6, y=6$或$x=21, y=19$（$x=21$不合题意，舍去）

综上所述：在 0:00 ~ 2:00 内有 14 条输入传送带和 12 条输出传送带在工作；

在 4:00 ~ 5:00 内有 6 条输入传送带和 6 条输出传送带在工作。

【2013 • 华师一附】

【题目】某学校要召开学生代表大会，规定各班每 10 人推选一名代表，当各班人数除以 10 的余数大于 7 时再增选一名代表.那么，各班可推选代表人数y与该班人数x之间的函数关系用取整函数$y=[x]$（$[x]$表示不大于x的最大整数）可以表示为（　　）

A. $y=[\dfrac{x+1}{10}]$　　B. $y=[\dfrac{x+2}{10}]$　　C. $y=[\dfrac{x+3}{10}]$　　D. $y=[\dfrac{x+4}{10}]$

【解析】B

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】某商店若将进价为 100 元的某种商品按 120 元出售，一天就能卖出 300 个。若该商品在 l20 元的基础上每涨价 l 元，一天就要少卖出 l0 个，而每减价 l 完，一天赢可多卖出 30 个。问：为使一天内获得最大利润，商店应将该商品定价为多少？

【解析】设定价为x元时，每天可以卖y个，则$y=\begin{cases}300-10(x-120), x\ge 120\\300+30(120-x), 100<x<120\end{cases}$，

且 x 为整数，即 $y=\begin{cases}1500 \quad 10x, x\geq 120\\ 3900-30x,100< \quad <120\end{cases}$

当 $x\geq 120$ 时，利润为:

$(x-100)y=(x-100)(1500-10x)=10(x-100)(150-x)$

$=10(-x^2+250x-15000)=-10(x-125) \quad +6250$

当 $x=125$ 时，最大利润为 6250 元

当 $100<x<120$ 时，利润

$(x-100)y=(x-100)(3900-30x)=30(x-100)(130-x)$

$=30(-x^2+230x-13000)=-30(x-115) \quad +6750$

当 $x=115$ 时，最大利润为 6750 元

综上，要使利润最大，定价应为 115 元

【题型】【二次方程与韦达定理】

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+2=0$ 与 $x^2+2x+m=0$ 有一个公共实数根，则 $m=$____________

【解析】设公共根为 x_0，则 $x_0+mx_0+2=0=x_0^2+2x_0+m$，即 $(m-2)(x_0-1)=0$

若 $m=2$，则无公共根，$\therefore x_0=1$，$\therefore m=-3$

【2013 • 复旦附中】

【题目】已知 $\begin{cases}xy+x+y=17\\ x^2y+xy^2=66\end{cases}$，求 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ 的值。

【答案】12499

【解析】设 $x+y=a, xy=b$，则 $a+b=17, ab=66$，

$\therefore \begin{cases}a=11\\ b=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6\\ b=11\end{cases}$，

又 $\because (x+y)^2\geq 4xy$，即 $a^2\geq 4b$，故 $a=11, b=6$

$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=(xy)^2+(x+y)(x^3+y^3)=b^2+a(x^3+y^3)$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ab=1133$

原式 $=36+11\times 1133=12499$

【2011 • 华二附中】

【题目】已知关于 x 的方程 $x^2+(a-2)x+a+1=0$ 的两实根 x_1, x 满足 $x_1 \quad +x^{\ 2}=4$，则实数 $a=$____________

【答案】$3-\sqrt{11}$

【解析】先考察 $\Delta=(a-2) \quad -4(a+1)=a^2-8a\geq 0$，$\therefore a\geq 8$ 或 $a\leq 0$

$x_1+x \quad =2-a$，$x_1x \quad =a+1$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2-a)^2-2(a+1)=a^2-6a+2=4$

$\therefore a^2-6a-2=0, a=3\pm\sqrt{11}$

又 $a\geq 8$，$a\leq 0$，$\therefore a=3-\sqrt{11}$

【2013 • 华师一附】
【题目】设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+4x-3=0$ 的两个根，$2x_1(2x_2^2+5x_2-6)+a=2$，则 $a=$____________
【解析】$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-3$

$2x_1(2x_2^2+5x_2-6)=2x_1(-3x_2)=-6x_1x_2=18$

$a=2-18=-16$

【题型】【二次函数及其性质】

【2013 • 华师一附】
【题目】二次函数 $y=-2x^2+4x+1$ 的图象如何移动就得到 $y=-2x^2$ 的图象（　　）

A.向左移动 1 个单位，向上移动 3 个单位.
B.向左移动 1 个单位，向下移动 3 个单位.
C.向右移动 1 个单位，向上移动 3 个单位.
D.向右移动 1 个单位，向下移动 3 个单位.

【解析】$y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$ 是由 $y=-2x^2$ 右移 1 个单位，上移 3 个单位得到，因此，反过来需左移 1 个，下移 3 个

【2013 • 重点高中自招训练题】
【题目】已知二次函数 $y=x^2-2x+a$（a 是实数），当自变量任取 x_1,x_2 时，分别与之对应的函数值 y_1，y_2 满足 $y_1>y_2$，则 x_1,x_2 应满足的关系式是（　　）

A. $x_1-1<x_2-1$　　B. $x_1-1>x_2-1$　　C. $|x_1-1|<|x_2-1|$　　D. $|x_1-1|>|x_2-1|$

【解析】D

【2011 • 华二附中】
【题目】已知二次函数 $y=2x^2-px+5$，当 $x\geq-2$ 时，y 的值随 x 的值增加而增加，那么 $x=p$ 对应的 y 值的取值范围是____________
【答案】$y\geq 69$
【解析】抛物线对称轴为 $\frac{p}{4}$ 必须要在 -2 的左边，即 $\frac{p}{4}\leq-2$，$p\leq-8$

$f(p)=2p^2-p^2+5=p^2+5\geq 64+5=69$，即 $y\geq 69$

【2013 • 上海中学】
【题目】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有两个交点 M,N，顶点为 R，若 ΔMNR 恰好是等边三角形，则 $b^2-4ac=$____________
【解析】$|y_R|=\frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$ 即 $\frac{|\Delta|}{4|a|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，解得 $\Delta=12$

【2013 • 进才中学】
【题目】$\mathrm{Rt}\Delta ABC$ 三个顶点均在函数 $y=x^2$ 上是斜边与 x 轴平行，则顶点到斜边上高取值范围（　　）

A. $h=1$　　B. $0<h<1$　　C. $1<h\leq 2$　　D. $h>2$

【答案】B

【2013 • 华二附中】

【题目】$f(x)=\dfrac{(a+1)x^2+(a+3)x+2a-8}{(2a-1)x^2+(a+1)x+a-4}$ 定义域为 D，$f(x)>0$ 在定义域 D 内恒成立，求 a 的取值范围？

【答案】$a=1$ 或 $a<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}$ 或 $a>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}$

【解析】分子分母，当 $a=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{2x-10}{-3x^2-5}$ 显然不合题意

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x-7}{\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}}$ 显然不合题意

$\therefore$ 分子分母均为二次，即 $a\neq -1,\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 分子分母均为抛物线，对定义域内的任何 x 要同号

若分母的抛物线与 x 轴有 2 个交点，则要使分子的抛物线和它同号，则必然只有一种情况，就是分子的抛物线，也经过这 2 个交点，且开口方向相同，此时，$f(x)$ 是常函数

此种情况，解得 $a=1$，代回 $f(x)$，得 $f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+2x-3}=2>0$，符合题意

$\therefore$ $a=1$ 时，成立，若分母的抛物线与 x 轴相切、或者没有交点，则分子的抛物线必须和 x 轴无公共点，且开口方向和分母的抛物线相同

$\Delta_2=(a+1)^2-4(2a-1)(a-4)=-7a^2+38a-15=(a-5)(-7a+3)$，两根 $5,\dfrac{3}{7}$

$\Delta_1=(a+3)^2-4(a+1)(2a-8)=-7a^2+30a+41$，两根为 $\dfrac{15\pm16\sqrt{2}}{7}$

当 $\Delta_2\leq 0$ 时，解得 $a\geq 5$ 或 $a\leq\dfrac{3}{7}$

当 $a\leq\dfrac{3}{7}$ 时，$2a-1<0$，两个抛物线开口都要向下，需满足 $\begin{cases}a+1<0\\ \Delta_1<0\end{cases}$，

解得 $a<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}$

当 $a\geq 5$ 时，$2a-1>0$，两个抛物线开口都要向上，需满足 $\begin{cases}a+1>0\\ \Delta_1<0\end{cases}$，

解得 $a>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}$

综上，$a=1$ 或 $a>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}$ 或 $a<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}$

【2013 • 上海中学】

【题目】设方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根为 a,b，求满足 $f(a)=b, f(b)=a, f(1)=1$ 的二次函数 $f(x)$。

【解析】根据题意得：$a+b=1, ab=-1$，$a^2-a-1=b^2-b-1=0$

设 $f(x)=cx^2+mx+n$，则：

$f(1)=c+m+n=1$　　①

$f(a)=ca^2+ma+n=b$　②

$f(b)=cb^2+mb+n=a$　③

②－③得 $c(a+b)(a-b)+m(a-b)=b-a$

$\because a\neq b$，$a+b=1$，故 $c+m=-1$

代入①，得 $n=2$

$b=ca^2+ma+n=c(a+1)+ma+2=(c+m)a+c+2=-a+c+2$

$\therefore c+2=a+b=1$，$c=-1$，$\therefore m=0 \therefore f(x)=-x^2+2$

【2013 • 华师一附】

【题目】已知方程 $x^2+(a-3)x+3=0$ 在实数范围内恒有解，并且恰有一个解大于 1 小于 2，则 a 的取值范围是______________

【解析】若有两个不同实根，则 $f(1)\cdot f(2)<0$，即 $(a+1)(2a+1)<0$，得 $-1<a<-\frac{1}{2}$

若有两个等根，则 $x_1x_2=x_1^2=3$，$x_1=\sqrt{3}=\frac{3-a}{2}$，故 $a=3-2\sqrt{3}$

综上所述：a 的范围为 $-1<a<-\frac{1}{2}$ 或 $a=3-2\sqrt{3}$

【2013 • 华师一附】

【题目】已知二次函数 $y=x^2-2(m-1)x+2m^2-2$，

⑴证明：不论 m 为何值，二次函数图象的顶点均在某一函数图象上，并求出此图象的函数解析式；

⑵若二次函数图象在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{3}$，求出此二次函数的解析式。

【解析】⑴二次函数的顶点坐标为 $(m-1, m^2+2m-3)$，消去 m 得到 $y=x^2+4x$

故不论 m 为何值，二次函数的顶点都在抛物线 $y=x^2+4x$ 上

⑵设二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，由已知 $|x_2-x_1|=2\sqrt{3}$，

再利用根与系数的关系得：$\begin{cases} x_1+x_2=2(m-1) \\ x_1x_2=2m^2-2 \end{cases}$，

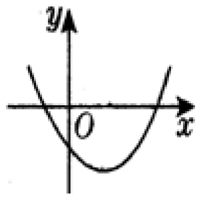
又 $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$，则：

$12=4(m-1)^2-4(2m^2-2)$，$\therefore m=0$ 或 -2

当 $m=0$ 时，$y=x^2+2x-2$；当 $m=-2$ 时，$y=x^2+6x+6$

【2013 • 华师一附】

【题目】二次函数 $y=ax^2+(a-b)x-b$ 的图象如图所示，那么化简 $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}-|b|}{a}$ 的结果是_____________



【解析】由图可得，$a>0$，$-b<0$，$\frac{b-a}{2a}>0$，即$b>a>0$，

$$\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}-|b|}{a}=\frac{(b-a)-b}{a}=-1$$

【题型】【动点问题】

【2013 • 华二附中】

【题目】在$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中，$\angle A=90°, AB=a, AC=b$，在AC上有一点E，在BC上有一点R，$BE\perp EF$，$AE=x$，$S_{\Delta EFC}=y$，求y与x的函数关系。

【答案】$y=\frac{ax(b-x)^2}{2(a^2+bx)}$

【解析】过F作$FD\perp CE$于D，则$\frac{DF}{AB}=\frac{CD}{CA}$，$CD=\frac{DF\cdot b}{a}$

$\triangle FDE\backsim\triangle EAB$，$\frac{DF}{AE}=\frac{DE}{AB}$，$DE=\frac{DF\cdot a}{x}$

$CE=CD+DE=DF(\frac{b}{a}+\frac{a}{x})$，$CE=b-x$，$DF=\frac{b-x}{\frac{b}{a}+\frac{a}{x}}=\frac{ax(b-x)}{bx+a^2}$

$$y=S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CE\cdot DF=\frac{ax(b-x)^2}{2(bx+a^2)}$$

【2013 • 华师一附】

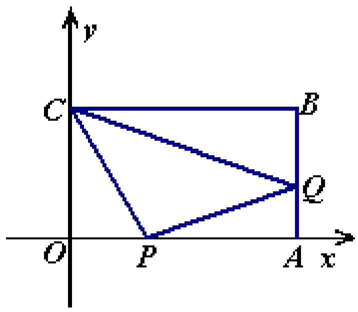
【题目】如图，在平面直角坐标系中，矩形$OABC$的两边分别在x轴和y轴上，$OA=10$厘米，$OC=6$厘米，现有两动点P,Q分别从O,A同时出发，点P在线段OA上沿OA方向作匀速运动，点Q在线段AB上沿AB方向作匀速运动，已知点P的运动速度为1厘米 / 秒。

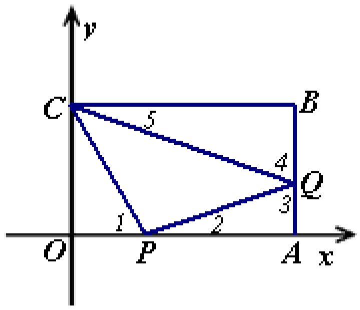
(1)设点Q的运动速度为$\frac{1}{2}$厘米 / 秒，运动时间为t秒，

①当ΔCPQ的面积最小时，求点Q的坐标；

②当ΔCOP和ΔPAQ相似时，求点Q的坐标.

(2)设点Q的运动速度为a厘米 / 秒，问是否存在a的值，使得$\Delta OCP,\Delta PAQ$和ΔCBQ这三个三角形都相似？若存在，请求出a的值，并写出此时点Q的坐标；若不存在，请说明理由。





【解析】(1)① $S_{\Delta CPQ}=S_{OABC}-S_{\Delta OCP}-S_{\Delta PAQ}-S_{\Delta BCQ}=\frac{1}{4}(t-6)^2+21$（$0\le t\le 10$）

故当 $t=6$ 时，$S_{\Delta CPQ}$ 最小值为 21，此时点 Q 的坐标为 $(10,3)$

②如图，当 $\angle 1=\angle 2$ 时，$\frac{OC}{OP}=\frac{QA}{PA}$，$\therefore \frac{6}{t}=\frac{\frac{1}{2}t}{10-t}$，

$\therefore \frac{1}{2}t^2+6t-60=0$，解得 $t_1=-6+2\sqrt{39}$，$t_2=-6-2\sqrt{39}$（舍去）

当 $\angle 1=\angle 3$ 时，$\frac{6}{t}=\frac{10-t}{\frac{1}{2}t}$，解得 $t=7$，因此当 $t=-6+2\sqrt{39}$ 或 7 时，

即当 Q 点的坐标为 $(10,-3+\sqrt{39})$ 或 $(10,\frac{7}{2})$ 时，ΔCOP 与 ΔPAQ 相似。

(2)设 P,Q 运动时间为 t 秒，则 $OP=t,AQ=at$，

①当 $\angle 1=\angle 3=\angle 4$ 时，$\frac{OC}{OP}=\frac{PA}{AQ}=\frac{BC}{BQ}$，$\frac{6}{t}=\frac{10-t}{at}=\frac{10}{6-at}$，

解得 $t_1=2,t_2=18$（舍去），此时 $a=\frac{4}{3}$，Q 点的坐标为 $(10,\frac{8}{3})$

②当 $\angle 1=\angle 3=\angle 5$ 时，$\angle CPQ=\angle CQP=90^\circ$ 不成立

③当 $\angle 1=\angle 2=\angle 4$ 时，$\frac{OC}{OP}=\frac{AQ}{PA}=\frac{BC}{BQ}$，$\frac{6}{t}=\frac{at}{10-t}=\frac{10}{6-at}$

得 $5t^2-36t+180=0$，$\Delta<0$，方程无实数解;

④当 $\angle 1=\angle 2=\angle 5$ 时，由图可知 $\angle 1=\angle PCB>\angle 5$，故不存在这样的 a 值;

综上所述，存在 a 的值，使得 ΔOCP 与 ΔPAQ 和 ΔCBQ 这两个三角形都相似，

此时 $a=\frac{4}{3}$，Q 点的坐标为 $(10,\frac{8}{3})$

【题型】【不等式与最值】

【2013・重点高中自招训练题】

【题目】某计算机用户计划用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的 A 类软件和 B 类软件，根据需要 A 类软件至少买 3 片，B 类软件至少买 2 片，则不同的选购方式共有____________种

【解析】先把该买的都买了，要 $60\times 3+70\times 2=320$ 元，剩 180 元想买什么买什么，

$60x+70y\le 180$，不定方程的解为:

$(x,y)=(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(3,0)$ 共 8 种

【2011・华二附中】

【题目】已知 a,b,c 均大于零，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=20$，则 $a+b+c$ 的最小

值是____________

【答案】$2\sqrt{3}$

【解析】$a^2+2ab+2ac+4bc=a(a+2b)+2c(a+2b)=(a+2c)(a+2b)=20$

$20=(a+2b)(a+2c)\le(\frac{a+2b+a+2c}{2})^2=(a+b+c)$

$a+b+c\ge 2\sqrt{5}$，故最小值为 $2\sqrt{5}$

【2013 • 华师一附】

【题目】正实数 x,y 满足 $xy=1$,那么 $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{9y^4}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C.1　　D. $\sqrt{2}$

【解析】$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{9y^4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{9x^4y^4}}=\frac{2}{3x^2y^2}=\frac{2}{3}$

【2011 • 华二附中】

【题目】定义 $\min\{a,b,c\}$ 表示实数 a,b,c 中的最小值，若 x,y 是任意正实数，则

$M=\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}$ 的最大值是____________

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】x 和 $\frac{1}{x}$ 对称，y 和 $\frac{1}{y}$ 对称，即求 $M=\min\{\frac{1}{x},\frac{1}{y},x+y\}$ 的最大值，

不妨设 $x\ge y$，则 $\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}$，则 $M=\min\{\frac{1}{x},\frac{1}{y},x+y\}=\min\{\frac{1}{x},x+y\}$

1° 若 $\frac{1}{x}\le x+y$，则 $M=\min\{\frac{1}{x},x+y\}=\frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}\le x+y\\ x\ge y\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{x}\le x+x\Rightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{1}{}\le\sqrt{2}$$

当 $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时等号成立，故 $M_{\max}=\sqrt{2}$

2° 若 $\frac{1}{x}>x+y$，则 $M=\min\{\frac{1}{x},x+y\}=x+y$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}>x+y\\ x\ge y\Rightarrow\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{y}\ge\frac{1}{x}>x+y\ge 2y\Rightarrow y<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{x}>x+y\Leftrightarrow x^2+yx-1<0\Rightarrow x<\frac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

$$x+y<\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}<\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{2}=\sqrt{2}$$

即 $M_{\max}<\sqrt{2}$，综上所述，$M_{\max}=\sqrt{2}$

【2013 • 进才中学】

【题目】不等式 $\begin{cases} x\ge 2-n \\ x<n \end{cases}$ 只有5个整数解，求 n 的范围。

【解析】在数轴上，解集以1为对称点向两边延伸

当 $n=3, 2-n=-1$ 时，解集刚好有 4 个整数

当 $3<n<4$ 时，$-2<2-n<-1$，解集刚好有 5 个整数

当 $n=4$ 时，$2-n=-2$，解集刚好有 6 个整数

$\therefore 3<n<4$

【2013 • 上海中学】

【题目】已知 $a>0$，且不等式 $1<ax<2$ 恰有三个正数解，则当不等式 $2<ax<3$ 含有最多的整数解时，正数 a 的取值范围为____________。

【解析】$1<ax<2$ 有 3 个整数解，即 $\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}$ 有 3 个整数解

令 $b=\frac{1}{a}$，即 $b<x<2b$ 有 3 个整数解画数轴，得:

$2.5<b<3$ 或 $3<b\le 3.5$ 或 $b=4$

不等式 $2<ax<3$ 的解集为 $2b<x<3b$

若 $b=4$，则 $8<x<12$ 含三个整数；若 $b=3.5$，则 $7<x<10.5$ 含三个整数

若 $3<b<3.5$，则 $6<2b<7$，$9<3b<10.5$；要使在 $(2b,3b)$ 间的整数最多，

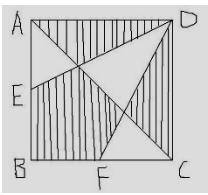
则最多可达到 4 个，此时 $\begin{cases} 2b<7 \\ 3b>10 \end{cases}$，即 $\frac{2}{7}<\frac{1}{b}=a<\frac{3}{10}$

若 $2.5<b<3$，则 $(2b,3b)$ 间最都含 3 个整数，因此，a 的范围为 $\frac{2}{7}<a<\frac{3}{10}$

【题型】【平面几何之面积割补】

【2011 • 华二附中】

【题目】如图所示，正方形 $ABCD$ 的面积设为 1，E 和 F 分别是 AB 和 BC 的中点，则图中阴影部分的面积是____________



【答案】$\frac{2}{3}$

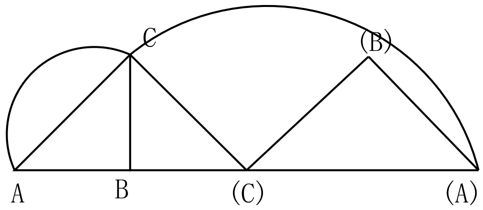
【解析】设 DE, DF 分别交 AC 于 M, N，则 M, N 为 AC 的三等分点

$$S_{\triangle DMN}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=S_{\triangle DAM}=S_{\triangle DNC},\quad S_{\triangle AME}=\frac{1}{2}S_{\triangle DAM}=\frac{1}{12}=S_{\triangle NFC}$$

$$S_{阴}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

【2013•进才中学】

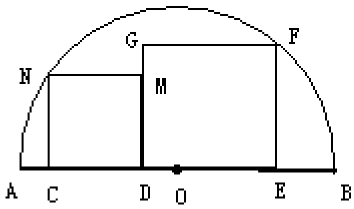
【题目】如下图所示，$AB=CB=1$，ΔABC 为等腰直角三角形，当 ΔABC 从左到右滚动时，点 A 的运动轨迹围成的图形面积。



【解析】$S_{扇BAC}=\frac{\pi}{4}$，$S_{\triangle BCC'}=\frac{1}{2}$，$S_{扇C'CA'}=\frac{135}{360}\pi\times2=\frac{270}{360}\pi=\frac{3}{4}\pi$，$S=\pi+\frac{1}{2}$

【2013•华师一附】

【题目】如图，AB 是半圆 O 的直径，四边形 $CDMN$ 和 $DEFG$ 都是正方形，其中 C,D,E 在 AB 上，F,N 在半圆上。若 $AB=10$，则正方形 $CDMN$ 的面积与正方形 $DEFG$ 的面积之和是____________



【解析】设 $CD=a$，$DE=b$，$OD=x$，则 $a^2+(a+x)^2=R^2=b^2+(b-x)^2$

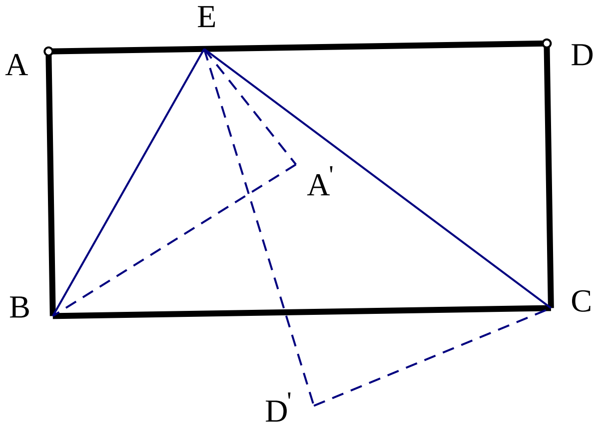
即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=(b-x)^2-(a+x)^2=(b+a)(b-a-2x)$

即 $a-b=b-a-2x$，$\therefore b-a=x$，$\therefore a^2+(a+x)^2=a^2+b^2=R^2=25$

【平面几何之几何中的度量与计算】

【2013•华二附中】

【题目】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$2AE=BE$，将 $\Delta ABE,\Delta DEC$ 分别沿 BE,EC 翻折，$\angle D'E'A'=15°$，求 $\angle ECB=$____________



【答案】$37.5°$

【解析】设 $\angle AEB=\angle A'EB=\alpha$，$\angle DEC=\angle D'EC=\beta$

$\angle D'EA'=\angle BEA'+\angle CED'-\angle BEC=\alpha+\beta-(180°-(\alpha+\beta))$

$=2(\alpha+\beta)-180°=15°$

$\alpha+\beta=97.5°$，$\alpha=60°$，$\beta=37.5°$

【题目】在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle A-\angle B=\angle B-\angle C=\angle C-\angle D=>0$，且四个内角中有一个角为 84°，求其余各角的度数。

【解析】设 $A-B=B-C=C-D=x>0°$，则 $C=D+x$，$B=C+x=D+2x$，

$A=B+x=D+3x$

$\because A+B+C+D=4D+6x=360°$，$\therefore 2D+3x=180°=B+C=A+D$

(1)若 $D=84°$，则 $x=4°$，此时，$C=88°, B=92°, A=96°$

(2)若 $C=84°=D+x$，则 $B=96°$，此时，$x=8°$，$D=72°$，$A=108°$

若 $B=84°$，则 $C=96°>B$，矛盾

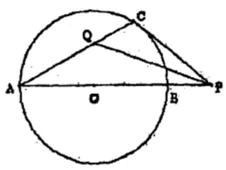
若 $A=84°$，则 $D=96°>A$，矛盾

$\therefore$ 综上，其余各角度数为 $88°, 92°, 96°$ 或 $72°, 96°, 108°$

【2013·重点高中自招训练题】

【题目】如图，P 是圆 D 的直径 AB 的延长线上的一点，PC 与圆 D 相切于点 C，$\angle APC$ 的平分线交 AC 于点 Q，则 $\angle PQC=$（　　）

A.30 °　　B.45 °　　C.50 °　　D.60 °



【解析】连 BC 交 PQ 于 D，$\angle ACB=90°$

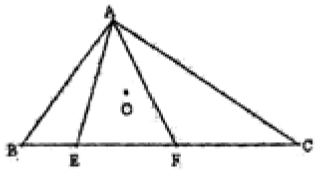
$\angle PQC=\angle A+\angle APQ=\angle PCB+\angle CPQ=\angle CDQ$，$\therefore \angle PQC=45°$

【2013·重点高中自招训练题】

【题目】如图，在ΔABC中，O是内心，点E,F都在大边BC上，已知$BF=BA$，$CE=CA$

⑴求证：O是ΔAEF的外心；

⑵若$\angle B=40°,\angle C=30°$，求$\angle EOF$的大小.



【解析】⑴连OB,OC,OA,OE,OF

$$\left.\begin{aligned}O\text{是内心}\Rightarrow\angle ABO=\angle CBO\\BA=BF\end{aligned}\right\}\Rightarrow BO\text{垂直平分}AF\Rightarrow OA=OF$$

同理$OE=OF$

故O是$\triangle AEF$外心

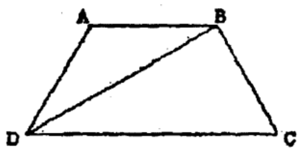
⑵$\angle AFB=90°-\dfrac{\angle ABC}{2}=70°$，$\angle AEC=90°-\dfrac{\angle ACB}{2}=75°$

$\angle EAF=180°-\angle AEF-\angle AFE=35°$

$\angle EOF=2\angle EAF=70°$

【2013·重点高中自招训练题】

【题目】如图，在梯形$ABCD$中，$AB/\!/DC$，$DC=2AB=2AD,BD=6,BC=4$，则该梯形的面积$S_{\text{梯形}ABCD}=$____________



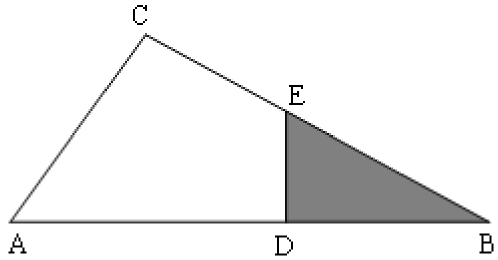
【解析】取DC中点E，连AE

$$\left.\begin{aligned}&CE\underset{=}{/\!/}BD\Rightarrow AE/\!/BC\\&\left.\begin{aligned}&AD=AB=DE\\&\angle BDE=\angle ABD=\angle ADB\end{aligned}\right\}\Rightarrow AE\perp BD\end{aligned}\right\}\Rightarrow BC\perp BD$$

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{BD\cdot BC}{2}=12$，$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle BCD}=6$，$S_{\text{梯形}ABCD}=18$

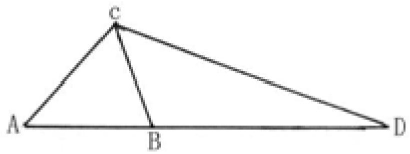
【2013·上海中学】

【题目】如图，ΔABC中，$AC=3,BC=4,AB=5$，线段$DE\perp AB$，且ΔBDE的面积是ΔABC面积的三分之一，那么，线段BD长为____________



【解析】设 $BD=x$， $DE=\frac{3}{4}x$， $BD\cdot DE=\frac{AC\cdot CB}{3}$， 即 $\frac{3}{4}x^2=4$， $x=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【2013 • 华师一附】
【题目】如图所示， ΔABC 中 $AB=2, AC=\sqrt{3}, \angle A=\angle BCD=45°$，求 BC 的长及 ΔBDC 的面积。



【题目】如图，过 C 作 CE⊥AB 交 AB 于 E。则 $CE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore BE=2-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{4-\sqrt{6}}{2}$

又 $BC^2=CE^2+BE^2$， $\therefore BC=\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{6}-1$

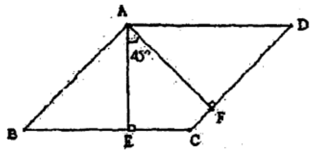
再过 D 作 DF⊥BC，交 CB 的延長線於 F，并设 DF=CF=x，则

$BF=x-BC=x+1-\sqrt{6}$，又 Rt△DFB∽Rt△CEB， $\therefore \frac{DF}{BF}=\frac{CE}{BE}$

即 $\frac{x}{x+1-\sqrt{6}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$， $\therefore x=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

因此 $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}\times(\sqrt{6}-1)\times\frac{3+2\sqrt{6}}{2}=\frac{9\quad\sqrt{6}}{4}$

【2013 • 重点高中自招训练题】
【题目】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE\perp BC$ 于 E， $AF\perp CD$ 于 F 。 $\angle EAF=45°$，且 $AE+AF=2\sqrt{2}$，则平行四边形 $ABCD$ 的周长为____________



【解析】 $\because \angle C=135°=\angle BAD$， $\therefore \angle BAE+\angle FAD=90°$，

又 $\angle FAD+\angle D=90°$， $\therefore \triangle BAE\backsim\triangle ADF$， $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AF}=\frac{AB+AD}{AE+AF}=\sqrt{2}$

$\therefore AB+AD=4$，$\therefore$周长为8

【2011 • 华二附中】
【题目】在直角梯形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$AB=16$，对角线$AC$与交$BD$于点$E$，过$E$作$EF\perp AB$于点$F$，$O$为边$AB$的中点，且$FE+EO=8$，则$AD+BC$的值为____________
【答案】16
【解析】如图，以B为原点建系，设$A(0,16)$，则$C(a,0)$，$D(b,16)$，$O(0,8)$，

$\because \dfrac{1}{EF}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}$，$\therefore EF=\dfrac{ab}{a+b}$，即$x_E=\dfrac{ab}{a+b}$

直线BD解析式：$y=\dfrac{16}{b}x$，$y_E=\dfrac{16}{b}x_E=\dfrac{16a}{a+b}$

$$OE=\sqrt{x_E^2+(y_E-8)^2}=\frac{\sqrt{a^2b^2+(8a-8b)^2}}{a+b}$$

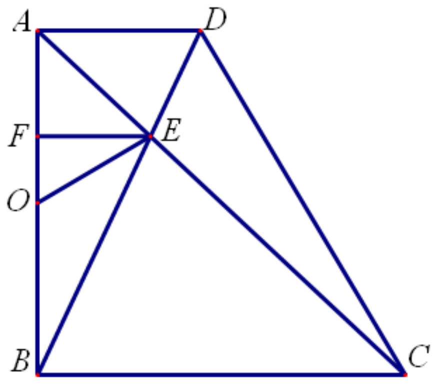
由题设，$EF+OE=\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+64(a-b)^2}}{a+b}=8$

化简得$\sqrt{a^2b^2+64(a-b)^2}+ab=8(a+b)=\dfrac{64(a-b)^2}{\sqrt{a^2b^2+64(a-b)^2}-ab}$

即$\sqrt{a^2b^2+64(a-b)^2}-ab=\dfrac{8(a-b)^2}{a+b}$

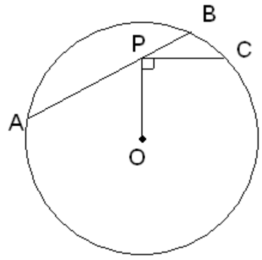
两式相减得$2ab=8(a+b-\dfrac{(a-b)^2}{a+b})=\dfrac{32ab}{a+b}$

$\therefore a+b=16$，即$AD+BC=16$



【2013 • 华师一附】
【题目】如图，点P为弦AB上一点，连结OP，过P作$PC\perp OP$，PC交$\odot O$于点C，若$AP=4$，$PB=2$，则PC的长为（　　）

A.2　　B.3　　C.$\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{2}$



【解析】延长CP交$\odot O$于D，则$AP \cdot PB = CP \cdot PD$，又$OP \perp CD$，故$CP = PD$

$AP \cdot PB = PC^2$，$PC = 2\sqrt{2}$。

【2013·华师一附】

【题目】如图，边长为1的菱形$ABCD$绕点A旋转，当B,C两点恰好落在扇形AEF的弧EF上时，弧BC的长度等于（　　）

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

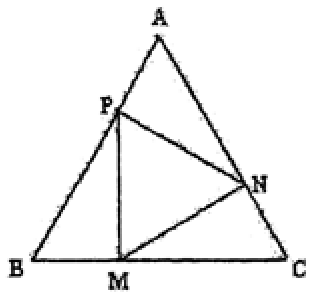
【解析】由题意，$AB = AC$，$BC = 2\pi \times 1 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$

【2013·重点高中自招训练题】

【题目】如图，正三角形ABC的边长为1，点M,N,P分别在边BC,AB上，设$BM = x$，$CN = y$，$AP = z$，且$x + y + z = 1$。

⑴试用x,y,z表示ΔMNP的面积；

⑵求ΔMNP面积的最大值；



【解析】⑴ $S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2} BM \cdot BP \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} BM \cdot BP = \frac{\sqrt{}}{4} x(1-z)$

$S_{\triangle CMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} CM \cdot CN = \frac{\sqrt{3}}{4} y(1-x)$，$S_{\triangle ANP} = \frac{\sqrt{3}}{4} AP \cdot AN = \frac{\sqrt{3}}{4} z(1-y)$

$S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BMP} - S_{\triangle CMN} - S_{\triangle ANP}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - x(1-z) - y(1-x) - z(1-y))$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-x-y-z+xy+yz+zx)=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$

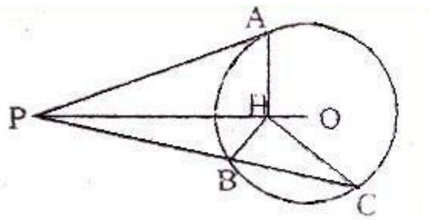
(2)$\because (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$，$\therefore xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}$

当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时等号成立，$S_{\triangle MNP}\leq\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，因此 $S_{\triangle MNP}$ 最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$

【题型】【平面几何之计算与证明】

【2011·华二附中】

【题目】如图，已知 PA 切 $\odot O$ 于 A，$\angle APO=30^{\circ}$，$AH\perp PO$ 于 H，任作割线 PBC 交 $\odot O$ 于点 B、C，计算 $\frac{HC-HB}{BC}$ 的值。



【解析】连接 OC,OB，过 B 作 OP 的平行线交 HC 于 Q，易证 $\Delta HOC\backsim\Delta COP$

由圆周角定理易知 $HBCO$ 四点共圆，利用平行线内错角相等证明 $HQ=HB$，

所以 $HC-HB=HC-HQ=QC$，$QC:BC=HC:PC=\frac{1}{2}$。

【2013·华师一附】

【题目】已知 AB 是半圆 O 的直径，点 C 在 BA 的延长线上运动（点 C 与点 A 不重合），以 OC 为直径的半圆 M 与半圆 O 交于点 D，$\angle DCB$ 的平分线与半圆 M 交于点 E。

(1)求证：CD 是半圆 O 的切线（图 1）；

(2)作 $EF\perp AB$ 于点 F（图 2），求证：$EF=\frac{1}{2}OA$；

(3)在上述条件下，过点 E 作 CB 的平行线交 CD 于点 N，当 NA 与半圆 O 相切时（图 3），求 $\angle EOC$ 的正切值.

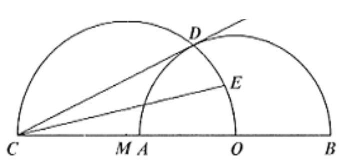


图 1

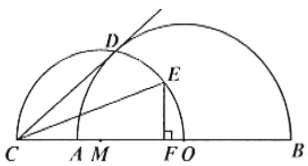


图 2

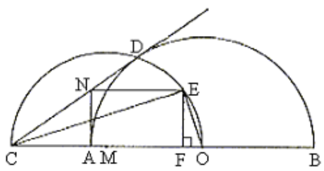


图 3

【解析】(1)如图 1，连结 OD，则 OD 为半圆 O 的半径，OC 为半圆 M 的直径

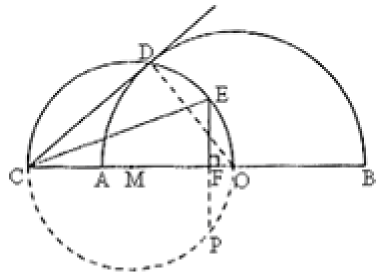
$\therefore\angle CDO=90^{\circ}$，$\therefore CD$ 是半圆 O 的切线。

(2)如图，以 OC 为直径作 $\odot M$，延长 EF 交 $\odot M$ 于点 P，连结 OD。

$\because EF \perp CO$， $\therefore EF = PF = \dfrac{1}{2}EP, EO = PO$

$\because CE$ 平分 $\angle DCB$， $\therefore \angle DCE = \angle ECO$， $\therefore DE = OE, OD = EP$

$\therefore OD = EP$， $\therefore EF = \dfrac{1}{2}OD = \dfrac{1}{2}OA$



⑶如图 3，延长 OE 交 CD 于点 K，设 OF=x，EF=y，则 OA=2y

∵NE//CB，EF⊥CB，NA 切半圆 O 于点 A，∴四边形 AFEN 是矩形

$\therefore NE = AF = OA - OF = 2y - x$，易得 E 是 OK 的中点

∴N 是 CK 的中点，$\therefore CO = 2NE = 2(2y - x)$，

$\therefore CF = CO - OF = 4y - 3x$，

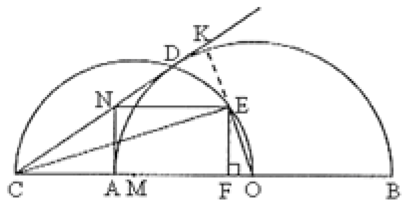
$\because EF \perp AB, CE \perp EO$， $\therefore \mathrm{Rt}\Delta CEF \backsim \mathrm{Rt}\Delta EOF$

$\therefore EF^2 = CF \cdot OF$，即 $y^2 = x(4y - 3x)$，解得 $\dfrac{y}{x} = 3$ 或 $\dfrac{y}{x} = 1$

当 $\dfrac{y}{x} = 3$ 时，$\tan\angle EOC = \dfrac{EF}{OF} = \dfrac{y}{x} = 3$；

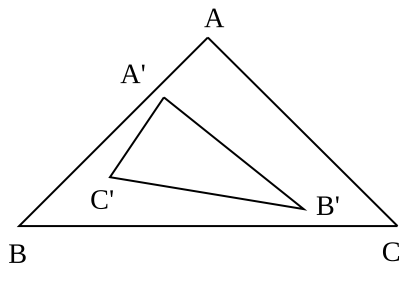
当 $\dfrac{y}{x} = 1$ 时，点 C 与点 A 重合，不符合题意，故舍去;

综上所述：$\tan\angle EOC = 3$



【2013·上海中学】

【题目】已知 ΔABC，$CA = 5, AB = 6, BC = 7$，$\Delta A'B'C'$ 中，$\angle A' = \angle A$，$\angle B' = \angle B$，$\triangle A'B'C'$ 在 $\triangle ABC$ 内，但 $\Delta A'B'C'$ 的大小和位置不定，当 A' 到 BC 的距离为 3，B' 到 AC 的距离为 1（如图），问：C' 到 AB 的距离是否为定值？若是，求出此定值；若不是，说明理由。



【解析】过 A' 作 BC 的平行线 l_1，过 B' 作 AC 的平行线 l_2，设两条线交于 M 点，则:

$S_{BMC}=\frac{1}{2}\times BC\times 3=\frac{21}{2}$，$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\times AC\times 1=\frac{5}{2}$，

设$\triangle ABC$半周长 $p=\dfrac{CA+CB+AB}{2}=9$

由 $Helon$ 公式，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9\times 2\times 3\times 4}=6\sqrt{6}$

$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMC}-S_{\triangle BMC}=6\sqrt{6}-13$

点 M 到 AB 的距离设为 d，则 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot d=6\sqrt{6}-13$，$d=2\sqrt{6}-\frac{13}{3}$

设 l_1 分别交 AB,AC 于 D,E，l_2 分别交 AB,BC 于 F,G 则

$$\left.\begin{array}{l} l_1 // BC \\ l_2 // AC \end{array}\right\} \Rightarrow \text{四边形}MECG\text{是平行四边形} \Rightarrow \angle C=\angle EMG$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \angle A'=\angle A \\ \angle B'=\angle B \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C'=\angle C \\ \angle C=\angle EMG \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C'=\angle EMG$$

$$\Rightarrow B',C',A',M\text{共圆}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \angle A'=\angle C'MB' \\ l_2 // AC \Rightarrow \angle BFG=\angle A \\ \qquad\qquad \angle A=\angle A' \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C'MB'=\angle BFG$$

$$\Rightarrow C'M // BA$$

因此，C'到 AB 的距离为定值，且等于 M 到 AB 的距离 $2\sqrt{6}-\frac{13}{3}$

【题型】【组合计数与概率】

【2013 • 华师一附】

【题目】随机掷三枚硬币，落地后恰有两枚正面朝上的概率是____________

【解析】两枚朝上，即一枚朝下，有 3 种可能，故概率为 $\frac{3}{8}$

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】同时掷两个骰子，其中向上的点数之和是5的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{12}$

【解析】$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】一个样本为$1,3,2,2,a,b,c$，已知这个样本的众数为3，平均数为2，则这个样本的方差=__________

【解析】不妨设 $a=b=3$，则$1+3\times 3+2+2+c=2\times 7$，$c=0$

方差 $\delta^2=\dfrac{(1-2)^2+(3-2)^2\times 3+(0-2)^2}{7}=\dfrac{8}{7}$

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】某校食堂有 4 元、5 元、6 元三种价格的饭菜供学生们选择（每人限购一份）.

三月份销．售该三种价格饭菜的学生比例分别为 25%、55%、20%，则该校三月份学生每餐购买饭菜的平均费用是（　　）

A. 4.9 元　　B. 4.95 元　　C. 5 元　　D. 5.05 元

【解析】$4\times 25\%+5\times 55\%+6\times 20\%=1+2.75+1.2=4.95$

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】在一个木制的棱长为 3 的正方体的表面涂上颜色，将它的棱三等分，然后从等分点把正方体锯开，得到 27 个棱长为 1 的小正方体，将这些小正方体充分混合后，装入口袋，从这个口袋中任意取出一个小正方体，则这个小正方体的表面恰好涂有两面颜色的概率是____________

【解析】0 色有 1 个；1 色有 6 个（6 个面）；2 色有 12 个（12 条棱）；

3 色有 8 个（8 个顶点）；概率为 $\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$

【2013 • 重点高中自招训练题】

【题目】在 8 个银元中混进了一个大小形状颜色完全一样的假银元，已知 7 个真银元的重量完全相同，而假银元比真银元稍轻点儿，你用一台天平最少（　　）次就能找出这枚假银元．

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【解析】$[\log_3 8]=2$，将 8 个分为 $3,3,2$；然后第一次把 2 份 3 个的放到天平上

【题型】【几何组合计算】

【2013 • 上海中学】

【题目】如图所示，为 25 个小正方形组成的 5×5 棋盘，其中含有符号“#”的各种正方形共有______________个。

		#		

【解析】$1+4+9+4+1=19$ 个

【2013 • 上海中学】

【题目】平面上有 n 个点，其中任意三点都是直角三角形的顶点，则 n 的最大值为______

【解析】4 个是可以的，如任一矩形的四个顶点

5 个是不可以的，考虑这 5 个点构成的凸包

若凸包为 5 边形，则内角和为 540°，5 个内角中至少有一个 ⩾108°（抽屉原理），钝角若凸包为 4 边形，则内角均为 90°，凸包内的点无法和其余 4 个点中的任 2 个构成 6 个直角三角形

若凸包为 3 边形，则两个锐角顶点和凸包内的点必然构成钝角三角形

【题型】【多项式问题】

【2011 • 华二附中】

【题目】已知关于 x 的多项式 $ax^7+bx^5+x^2+x+12$（a,b 为常数），且当 $x=2$ 时，该多项式的值为 -8，则当 $x=-2$ 时，该多项式的值为____________

【答案】40

【解析】$\because a\cdot 2^7+b\cdot 2^5+2^2+2+12=-8$，$\therefore a\cdot 2^7+b\cdot 2^5=-26$

$\therefore a\cdot(-2)^7+b\cdot(-2)^5+(-2)^2+(-2)+12=-(a\cdot 2^7+b\cdot 2^5)+4-2+12$

$=26+4-2+12=40$

【2013 • 上海中学】

【题目】若方程 $\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=k$ 有四个非零实根，且它们在数轴上对应的四个点等距排列，则实数 $k=$____________

【解析】注意到，方程只含 x 的偶次幂，因此，若某个数是根，则其相反数也必然是根

设四个根分别为 $a,-a,b,-b$，不妨设 $a>b>0$，

由题意，$a-b=b-(-b)$，即 $a=3b$

因此，$(b^2-1)(b^2-4)=(a^2-1)(a^2-4)=(9b^2-1)(9b^2-4)$

展开得 $b^4-5b^2+4=81b^4-45b^2+4$

即 $80b^4=40b^2$，即 $b^2=\dfrac{1}{2}$，故 $k=(b^2-1)(b^2-4)=\dfrac{7}{4}$

【2011 • 华二附中】

【题目】已知当船位于处 A 时获悉，在其正东方向相距 10 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救，甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°，相距 10 海里 C 处的乙船，试问乙船应该朝北偏东____________度的方向沿直线前往 B 处救援.

【答案】60°

【题型】【数论之十进制与整数的性质】

【2011 • 华二附中】

【题目】四个不同的三位整数的首位数字相同，并且它们的和能被它们中的三个数整除，求这些数.

【解析】四个数的和能被三个整除，先设这三个数为 a,b,c，另一个不能整除的为 d

不失一般性，不妨设 $a<b<c$，设 $S=a+b+c+d$

那么，可以得到这 3 个整数 $\dfrac{a+b+c+d}{a},\dfrac{a+b+c+d}{b},\dfrac{a+b+c+d}{c}$，

即 $\dfrac{S}{a},\dfrac{S}{b},\dfrac{S}{c}$，先通过放缩限制范围，$d$ 是不知道和这三个数的大小关系的，

但注意到，这几个数都是三位数，且首位数字相同，因此，一个数的 2 倍，

必然比另几个数都要大，因此 $d<2a,d<2b,d<2c$，最后一个数的上界可确定，

故 $\dfrac{S}{c}=\dfrac{a+b+c+d}{c}<\dfrac{c+c+c+2c}{c}=5$

再次注意，几个三位数首位数字相同，因此，任意两个数的和，一定比另一个数大

即 $a+b>c$，$d>\frac{c}{2}$，$\frac{S}{c}=\frac{a+b+c+d}{c}>\frac{c+c+\frac{c}{2}}{c}=\frac{5}{2}$，$\frac{5}{2}<\frac{S}{c}<5$，

又因其为整数，故 $\frac{S}{c}=3或4$

下面就要确定①这个到底是等于 3 还是 4，②剩余两个分式的范围，

剩余的两个分式，$\frac{S}{a}=\frac{a+b+c+d}{a}<\frac{a+2a+2a+2a}{a}=7$

$\frac{S}{b}=\frac{a+b+c+d}{b}<\frac{b+b+2b+2b}{b}=6$

如果 $\frac{S}{c}=4$，那么，首先，至少有 $\frac{S}{b}>\frac{S}{c}=4$，故 $5\le\frac{S}{b}<6$，即 $\frac{S}{b}=5$②

同样的，$7>\frac{S}{a}>\frac{S}{b}=5$，故 $\frac{S}{a}=6$③，至此，可得到 $S=4c=5b=6a$

故 $c=\frac{3}{2}a,b=\frac{6}{5}a$，代回③式，得

$$\frac{S}{a}=\frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+\frac{3}{2}a+\frac{6}{5}a+d}{a}=\frac{37}{10}+\frac{d}{a}=6$$

即 $d=\frac{23}{10}a>2a$，与 $d<2a$ 矛盾！，故①式不成立！，因此，$\frac{S}{c}=3$，即 $S=3c$

$\because\frac{S}{a}<7$，若 $\frac{S}{a}=6$，则 $\frac{3c}{a}=6$，即 $c=2a$，矛盾！

故 $\frac{S}{a}=5$，而 $3=\frac{S}{c}<\frac{S}{b}<\frac{S}{a}=5$，因此，$\frac{S}{b}=4$

$\therefore S=3c=4b=5a$

故 $c=\frac{5}{3}a,b=\frac{5}{4}a$，代回 $\frac{S}{a}=\frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+\frac{5}{4}a+\frac{5}{3}a+d}{a}=5$

得 $d=\frac{13}{12}a$，进一步得到 $d=\frac{13}{12}a=\frac{13}{15}b=\frac{13}{20}c$

即 $\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{20}=\frac{d}{13}$，设 $\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{20}=\frac{d}{13}=k=\frac{c-a}{8}\le\frac{99}{8}<13$

若 $k\le 8$，则 $a\le 96$，不是三位数；

若 $k=10$ 或 11 或 12，则 $a\le 144$，$c\ge 200$，首位不相同

因此 $k=9$，因此，$a=108,b=135,c=180,d=117$

【2013 • 华师一附】

【题目】已知三角形的三边 a,b,c 都是整数，且满足 $abc+bc+ca+ab+a+b+c=7$，则此三角形的面积等于____________

【解析】显然 $a=b=c=1$，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$

【2013 • 华师一附】

【题目】已知 p 为质数，使二次方程 $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ 的两根都是整数，求出所有可能的 p 的值。

【解析】由于这个整系数一元二次方程有整数根，

所以$\Delta=4p^2-4(p^2-5p-1)=4(5p+1)$是完全平方数，

从而$5p+1$是完全平方数，令$5p+1=n^2$，n是正整数，则$5p=(n-1)(n+1)$

所以$5\left|(n-1)(n+1)\right.$，即$5\left|(n-1)\right.$或$5\left|(n+1)\right.$。

若$5\left|(n-1)\right.$，令$n-1=5k$，则$p=k(5k+2)$，

由于p是质数，故$k=1$，$p=7$，此时方程为$x^2-14x+13=0$，$x_1=1$，$x_2=13$满足条件。

若$5\left|(n+1)\right.$，令$n+1=5k'$，则$p=k'(5k'-2)$，故$k'=1$，$p=3$，此时方程为$x^2-6x-7=0=0$，$x_1=-1$，$x_2=7$满足条件。

综上所述，所求的质数p为3或7

【2013·上海中学】

【题目】一个老人有n匹马，他把马全部分给两个儿子，大儿子得x匹，小儿子得y匹，（$x>y\geq1$），并且满足x是$n+1$的约数，y也是$n+1$的约数，则正整数n共有____________种可能的取值。

【解析】$n=x+y$，设$n+1=px$，$n+1=qy$即$x+y+1=px=qy$，

$(p-1)x=y+1<x+1$，$(p-2)x<1$，p,x都是正整数，

若$p=1$，则$x+y+1=x$，显然不可能

因此，$p-2\geq0$，$x\geq1$，$(p-2)x$是整数，且小于1，则只能为0

$\therefore p=2$，$\therefore x+y+1=2x$，即$y+1=x$

$\therefore x+y+1=2y+2=qy$，$q=\dfrac{2y+2}{y}=2+\dfrac{2}{y}$是正整数$\therefore y=1$或2

对应的$x=2$或3均符合题意，因此共2种

【2013·进才中学】

【题目】$\left(n^2-2n-1\right)^{n^2-41}=\left(n^2-2n-1\right)^{16n-15}$且$n$为实数，则$n$的个数为？

【解析】若$n^2-2n-1=0$，则$n=1\pm\sqrt{2}$，指数不为0，合题意

若$n^2-2n-1=1$，则$n=1\pm\sqrt{3}$，合题意

若$n^2-2n-1=-1$，则$n=0$或2，检验，均合题意

若$n^2-41=16n-15$，则$n^2-16n-26=0$，$n=8\pm3\sqrt{10}$

此时$16n-15=113\pm48\sqrt{10}$

$n^2-2n-1=16n+26-2n-1=14n+25=137\pm42\sqrt{10}$，底数均大于0

故$n=8\pm3\sqrt{10}$符合题意，因此共8个解