

# 2016~2017学年北京西城区北京师范大学附属实验中学高一上学期期中数学试卷

## 选择

- 已知集合  $A = \{x|2 < x < 4\}$  ,  $B = \{x|x < 3 \text{ 或 } x > 5\}$  , 则  $A \cap B = ( \quad )$  .  
 A.  $\{x|2 < x < 3\}$                       B.  $\{x|2 < x < 5\}$                       C.  $\{x|x < 4 \text{ 或 } x > 5\}$                       D.  $\{x|x < 2 \text{ 或 } x > 5\}$
- 下列函数中, 定义域是  $\mathbf{R}$  且为增函数的是 (     ) .  
 A.  $y = e^{-x}$                       B.  $y = x$                       C.  $y = \ln x$                       D.  $y = |x|$
- 已知函数  $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$  , 在下列区间中, 包含  $f(x)$  零点的区间是 (     ) .  
 A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $(2, 4)$                       D.  $(4, +\infty)$
- 下列大小关系正确的是 (     ) .  
 A.  $0.4^2 < 3^{0.4} < \log_4 0.3$                       B.  $0.4^2 < \log_4 0.3 < 3^{0.4}$                       C.  $\log_4 0.3 < 0.4^2 < 3^{0.4}$                       D.  $\log_4 0.3 < 3^{0.4} < 0.4^2$
- 与函数  $y = 10^{\lg(x-1)}$  的定义域相同的函数是 (     ) .  
 A.  $y = x - 1$                       B.  $y = |x - 1|$                       C.  $y = \sqrt{x - 1}$                       D.  $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$
- 已知  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数和奇函数, 且  $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$  , 则  $f(1) + g(1) = ( \quad )$  .  
 A.  $-3$                       B.  $-1$                       C.  $1$                       D.  $3$

- 顾客请一位工艺师把  $A, B$  两件玉石原料各制成一件工艺品, 工艺师带一位徒弟完成这项任务, 每件原料先由徒弟完成粗加工, 再由工艺师进行精加工完成制作, 两件工艺品都完成后交付顾客, 两件原料每道工序所需时间 (单位: 工作日) 如下:

原料 \ 工序 时间	工序	
	粗加工	精加工
原料 $A$	9	15
原料 $B$	6	21

则最短交货期为 (     ) .

- A. 24个工作日                      B. 27个工作日                      C. 36个工作日                      D. 42个工作日

8. 设函数  $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$ , 则使得  $f(x) > f(2x-1)$  成立的  $x$  的取值范围是 ( ).
- A.  $(\frac{1}{3}, 1)$       B.  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$       C.  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$       D.  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

## 填空

9. 若点  $(2, \sqrt{2})$  在幂函数  $y = f(x)$  的图象上, 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_ .
10. 若映射  $f: x \rightarrow y = 2^{(x-2)}$ , 则8的原象是 \_\_\_\_\_, 8的象是 \_\_\_\_\_ .
11.  $\lg \frac{1}{2} - \lg 5 - \lg \sqrt{10} =$  \_\_\_\_\_ .
12. 若  $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$  是奇函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .
13. 校运会上, 学生会组织售卖某种 “SDSZ” 纪念品. 已知该纪念品进货单价为40元, 若销售价为50元, 可卖出50个, 如果销售单价每涨1元, 销售量就减少1个. 为了获得最大利润, 则该纪念品的最佳售价为 \_\_\_\_\_ 元.
14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ .
- (1) 当  $m = 1$  时, 则  $f(f(-2)) =$  \_\_\_\_\_ ;
- (2) 若  $m > 0$ , 且存在实数  $b$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x) = b$  有三个不同的根, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .
15. 函数  $y = (\frac{1}{2})^{3+2x-x^2}$  的定义域为 \_\_\_\_\_, 值域为 \_\_\_\_\_ .
16. 已知函数  $f(x) = ax^2 + (1-3a)x + a$  在区间  $[1, +\infty)$  上递增, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .
17. 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 - 2x + 3)$  的单调递减区间是 \_\_\_\_\_ .
18. 已知集合  $U = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . 设集合  $A$  同时满足下列三个条件.
- ①  $A \subseteq U$ ; ② 若  $x \in A$ , 则  $2x \notin A$ ; ③ 若  $x \in \complement_U A$ , 则  $2x \notin \complement_U A$ .
- (1) 当  $n = 4$  时, 一个满足条件的集合  $A$  是 \_\_\_\_\_ . (写出一个即可)
- (2) 当  $n = 7$  时, 满足条件的集合  $A$  的个数为 \_\_\_\_\_ .

## 解答

19. 已知: 函数  $f(x) = x^2 - bx + 3$ , 且  $f(0) = f(4)$ .
- (1) 求函数  $y = f(x)$  的零点, 写出满足条件  $f(x) < 0$  的  $x$  的集合.

(2) 求函数  $y = f(x)$  在区间  $[0, 3]$  上的最大值和最小值 .

20. 已知函数  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  .

(1) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性 , 并证明 .

(2) 判断函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上的单调性 , 并用定义加以证明 .

21. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1$  .

(1) 若  $f(1) = 3$  , 求实数  $a$  的值 .

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上是单调的 , 求实数  $a$  的取值范围 .

(3) 当  $x \in [-1, 1]$  时 , 求函数  $f(x)$  的最小值  $g(a)$  , 并画出最小值函数  $y = g(a)$  的图象 .

22. 设集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$  ,  $B = \{x | \frac{1}{2} < 2^{x-1} < 8\}$  ,  $C = \{x | 2x^2 + mx - m^2 < 0\}$  ,  $m \in R$  .

(1) 求  $A \cup B$  .

(2) 若  $(A \cup B) \subseteq C$  , 求实数  $m$  的取值范围 .

23. 已知函数  $f(x)$  满足 :

① 任意  $s, t \in R$  有  $f(s+t) = f(s) + f(t) + st$  ;

②  $f(3) = 6$  ;

③ 任意  $x > 0$  , 有  $f(x) > 0$  .

(1) 求  $f(1)$  的值 .

(2) 证明 : 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增 .

(3) 求满足  $f(2^x) + f(2^{1-x}) < 4$  的  $x$  的取值范围 .

24. 已知函数  $g(x) = \log_a x$  , 其中  $a > 1$  .

(1) 当  $x \in [0, 1]$  时 ,  $g(a^x + 2) > 1$  恒成立 , 求  $a$  的取值范围 .

(2) 设  $m(x)$  是定义在  $[s, t]$  上的函数 , 在  $(s, t)$  内任取  $n-1$  个数  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$  , 设  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1}$

, 令  $s = x_0, t = x_n$  , 如果存在一个常数  $M > 0$  , 使得  $\sum_{i=1}^n |m(x_i) - m(x_{i-1})| \leq M$  恒成立 , 则称函数  $m(x)$  在区间  $[s, t]$  上的具有性质  $P$  . 试判断函数  $f(x) = |g(x)|$  在区间  $\left[\frac{1}{a}, a^2\right]$  上是否具有性质  $P$  ? 若具有性质  $P$  , 请求出  $M$  的最小值 ; 若不具有性质  $P$  , 请说明理由 . (注 :

$$\sum_{i=1}^n |m(x_i) - m(x_{i-1})| = |m(x_1) - m(x_0)| + |m(x_2) - m(x_1)| + \dots + |m(x_n) - m(x_{n-1})|)$$