2019年重点中学分班考试数学试卷

满分： 120 分　　时间： 90 分钟　　　　2019.5

一、选择题（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

（1）如果一元一次不等式组 $\begin{cases} x>3 \\ x>a \end{cases}$ 的解集为 x＞3，则 a 的取值范围是

A． a＞3　　B. a≥3　　C. a＜3　　D． a≤3

（2）若实数 x 满足 $x^3+2x^2+2x=-1$，则 $x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}=$

A． -1　　B. 0　　C. 1　　D． 99

（3）如果从一卷粗细均匀的电线上截取 1 米长的电线，称得它的质量为 a 克，再称得剩余电线的质量为 b 克，那么原来这卷电线的总长度是

A． $\dfrac{b+1}{a}$ 米　　B．（$\dfrac{a}{b}$ +1）米　　C．（$\dfrac{a+b}{a}$ +1）米　　D．（$\dfrac{b}{a}$ +1）米

（4）若实数 n 满足 $(n-46)^2+(45-n)^2=2$，则代数式 $(n-46)(45-n)$ 的值是

A． -1　　B． $-\dfrac{1}{2}$　　C． $\dfrac{1}{2}$　　D． 1

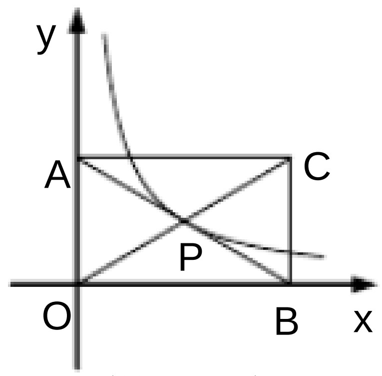
（5）已知方程 $x^2+(2k+1)x+k-1=0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1-x_2=4k-1$，则实数 k 的值为

A．－3，0　　B. 1，$-\dfrac{4}{3}$　　C. 1，$-\dfrac{1}{3}$　　D. 1，0

（6）如图，矩形 AOBC 的面积为 16，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过矩形的对角线的交点 P，则反比例函数的解析式是

A． $y=\dfrac{1}{x}$　　B． $y=\dfrac{2}{x}$

C． $y=\dfrac{4}{x}$　　D． $y=\dfrac{8}{x}$



（第 6 题）

（7）设 $a^2+1=3a$，$b^2+1=3b$，且 $a\neq b$，则代数式 $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}$ 的值为

A． -24　　B． -18　　C. 18　　D. 24

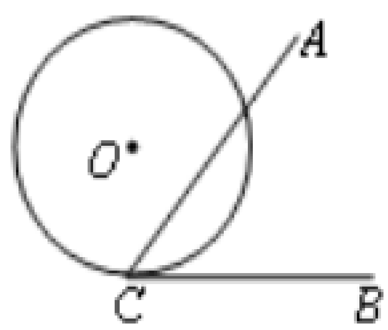
（8）当 x 分别取值 $\dfrac{1}{20}$，$\dfrac{1}{19}$，$\dfrac{1}{18}$，… $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，1，2，3，…，18，19，20 时，计算代数式 $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值，将所得的结果相加，其和等于

A．－20　　B． 0　　C． 1　　D． 20

（9）如图，∠ ACB＝60°，半径为 2 的⊙ O 切 BC 于点 C，若将⊙ O 在 CB 上向右滚动，则当滚动到⊙ O 与 CA 也相切时，圆心 O 移动的水平距离为

A． $2\sqrt{3}$　　B． 4

C． π　　D． 2π



（第 9 题）

（10）方程 $x^2+2xy+3y^2=81$ 的整数解 (x, y) 的组数为

A． 7　　B． 6　　C． 5　　D． 4

二、填空（本题有 7 个小题，其中 11 题 6 分，其余每小题 4 分，共 30 分）

（11）直接写出下列关于 x 的方程的根：

① $2x^2+7x-15=0$ ________；② $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ ________；

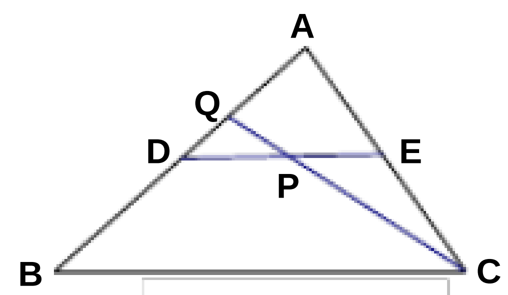
③ $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=4$ ________；④ $x^2+(2-a)x-a+1=0$ ________；

（12）已知三个数 a、b、c 的积为负数，和为正数，且 $x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}$，

则 $ax^3+bx^2+cx+1=$________.

（13）若化简 $|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}$ 的结果为 $2x-5$，则 x 的取值范围是 ________.

（14）如图，DE 是△ABC 的中位线，点 P 是 DE 的中点，CP 的延长线交 AB 于点 Q，那么 $S_{\triangle DPQ}:S_{\triangle ABC}=$________.



（第 14 题）

（15）若实数 a、b 满足 $b>a>0$，且 $a^2+b^2=4ab$，

则 $\frac{a-b}{a+b}=$________.

（16）若实数 a,b 满足 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$，则 $\frac{a^2+b^2}{ab}=$________.

（17）桌面上有三颗球，相互靠在一起。已知其中两个大球的半径均为 3cm，一个小球半径 1cm，则这三颗球分别与桌面相接触的三点构成三角形的面积为 ________cm^2.

三、解答题（本题有 6 小题，共 60 分）

（18）本题满分 8 分

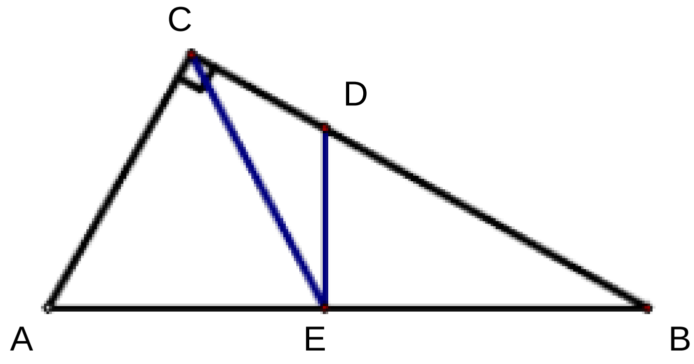
（Ⅰ）先化简，再求值：$(1+\frac{x}{x+1})\div(1-\frac{3x^2}{1-x^2})\times\frac{1}{x-1}$，其中 $x=\sin 60^\circ$.

（Ⅱ）已知正实数 x，y 满足：$2x^2+xy-6y^2=0$，求 $\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ 的值 .

（19）本题满分 8 分

如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，$\sin B=\frac{3}{5}$，D 是 BC 上一点，DE⊥AB 于 E，CD=DE，AC+CD=9.

（Ⅰ）求 BC 的长；（Ⅱ）求 CE 的长.



（第 19 题）

（20）本题满分 8 分

已知直线 $l_n: y=-\frac{n+1}{n}x+\frac{1}{n}$（n 是正整数）. 当 n=1 时，直线 $l_1: y=-2x+1$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_1 和 B_1，设△A_1OB_1（O 是平面直角坐标系的原点）的面积为 s_1；当 n=2 时，直线 $l_2: y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_2 和 B_2，设△A_2OB_2 的面积为 s_2，…，依此类推，直线 l_n 与 x 轴和 y 轴分别交于点 A_n 和 B_n，设 ΔA_nOB_n 的面积为 S_n.

（Ⅰ）求△A_1OB_1 的面积 s_1；（Ⅱ）求 $s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_{2013}$ 的值.

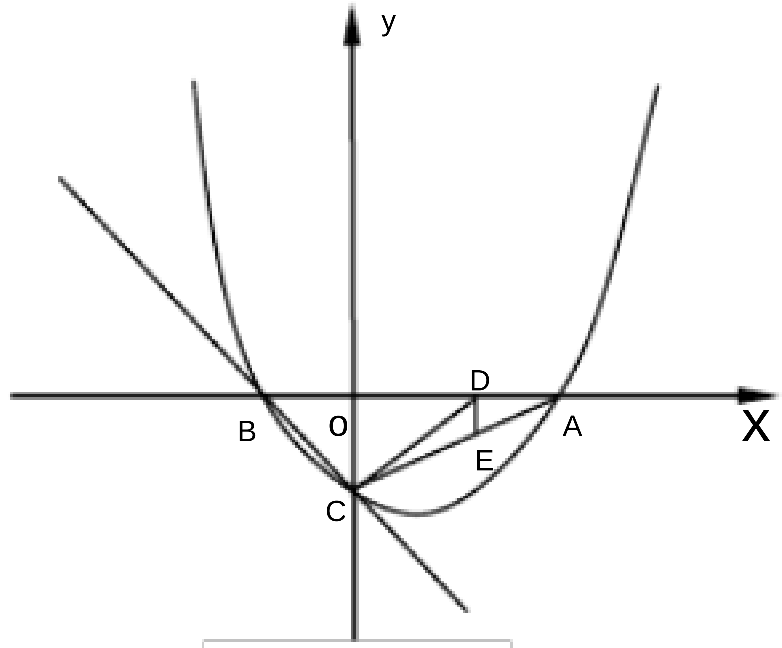
（21）本题满分 12 分

如图，已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 y 轴相交于 C，与 x 轴相交于 A、B，点 A 的坐标为（2，0），点 C 的坐标为（0，-1）.

（Ⅰ）求抛物线的解析式；

（Ⅱ）点 E 是线段 AC 上一动点，过点 E 作 DE⊥x 轴于点 D，连结 DC，当△DCE 的面积最大时，求点 D 的坐标；

（Ⅲ）若 ΔABC 的外接圆⊙P 与 y 轴的另一个交点为 F，请直接写出点 F 的坐标和⊙P 的面积.



（第 21 题）

（22）本题满分 12分

阅读下面的情景对话，然后解答问题：

老师：我们新定义一种三角形，两边的平方和等于第三边平方的 **2** 倍的三角形叫做奇异三角形．

小华：等腰三角形一定是奇异三角形！

小明：那直角三角形中是否存在奇异三角形呢？

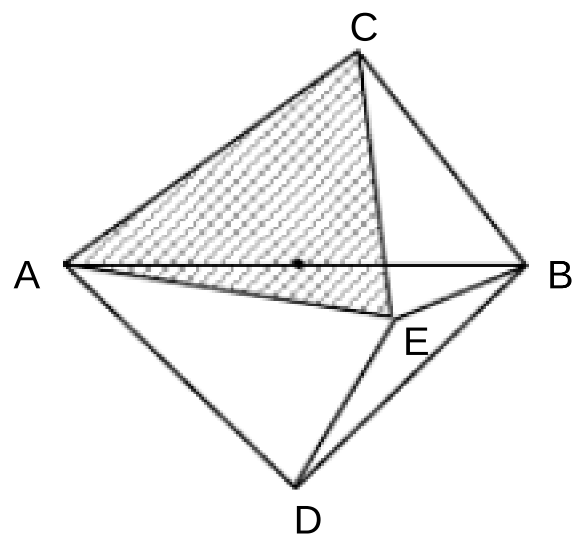
（Ⅰ）根据"奇异三角形"的定义，请你判断小华提出的猜想："等腰三角形一定是奇异三角形"是否正确？说明理由．

（Ⅱ）在 Rt△ABC 中，∠ ACB＝90°，AB=c，AC=b，BC=a，且 $b>a$，若 Rt△ABC 是奇异三角形，求 $a:b:c$；

（Ⅲ）如图，以 AB 为斜边分别在 AB 的两侧作直角三角形，且 AD=BD，若四边形 ADBC 内存在点 E，使得 AE=AD，CB=CE.

① 求证：△ ACE 是奇异三角形；

② 当△ ACE 是直角三角形时，求∠ ABC 的度数.



(第 22 题)

（23）本小题满分 12 分

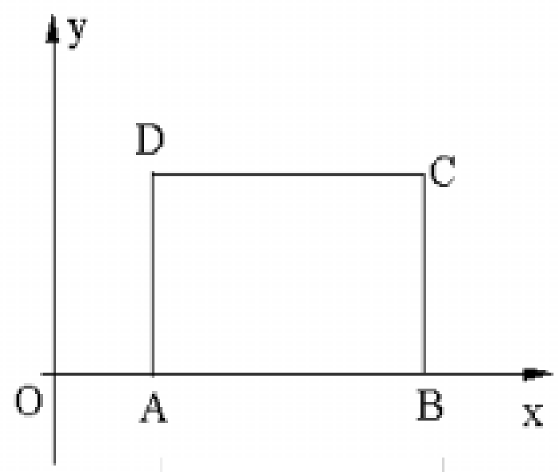
已知矩形 ABCD（字母顺序如图）的边长 AB=3，AD=2，将此矩形放在平面直角坐标系 xOy 中，使 AB 在 x 轴正半轴上，而矩形的其它两个顶点在第一象限，且直线 $y=\frac{3}{2}x-1$ 经过这两个顶点中的一个．

（Ⅰ）求出矩形的顶点 A、B、C、D 的坐标；

（Ⅱ）以 AB 为直径作⊙ M，经过 A、B 两点的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是 P 点．

① 若点 P 位于⊙ M 外侧且在矩形 ABCD 内部，求 a 的取值范围；

② 过点 C 作⊙ M 的切线交 AD 于 F 点，当 PF∥AB 时，试判断抛物线与 y 轴的交点 Q 是位于直线 $y=\frac{3}{2}x-1$ 的上方？还是下方？还是正好落在此直线上？并说明理由．



（第 23 题）

自主招生数学答案

1-10． DADBB, CCBAB

11. (1) $-5,\frac{3}{2}$; (2)1,-4 (3) $1,\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; (4) $-1,a-1$

12. 1 13. $1\le x\le 4$ 14．1:24 15. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 16. $\pm\sqrt{5}$ 17. $3\sqrt{3}$

19. 解①设 AC=3k，AB=5k，BD=x，CD=4-x，△BED∽△BCA→
BD：BA=DE：AC→x：5=（4-x）：3→
x=2.5k→CD=1.5k→由 AC+CD=9 →k=2→BC=4k=8

②连结 AD 交 CE 于 F 点,证明 AD 垂直平分 CE,可求出 AD= $3\sqrt{5}$,再证△CFD∽△ACD→CD：AD=CF：AC→ $\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{CF}{6}$ →CF=6 $\sqrt{5}$ →CE=12 $\sqrt{5}$。

20. 解：(1)当 n=1 时，直线 $l_1: y=-2x+1$ 与 x 轴和 y 轴的交点是

A_1（$\frac{1}{2}$，0）和 B_1（0，1） 所以 $OA_1=\frac{1}{2}$，OB_1=1， $\therefore s_1=\frac{1}{4}$

(2) 当 n=2 时，直线 $l_2: y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 与 x 轴和 y 轴的交点是

A_2（$\frac{1}{3}$，0）和 B_2（0，$\frac{1}{2}$）

所以 $OA_2=\frac{1}{3}$，$OB_2=\frac{1}{2}$， $\therefore s_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$

当 n=3 时，直线 $l_3: y_3=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ 与 x 轴和 y 轴的交点是

A_3（$\frac{1}{4}$，0）和 B_3（0，$\frac{1}{3}$）

所以 $OA_3=\frac{1}{4}$，$OB_3=\frac{1}{3}$， $\therefore s_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$

依次类推，

$$s_n==\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$\therefore s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_{2013}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})$$

$$\therefore s_1+s_2+s_3+\cdots\cdots+s_{2013}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2014})=\frac{1}{2}\times\frac{2013}{2014}=\frac{2013}{4018}$$

21. 解：（1）∵二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图像经过点 A（2，0）C(0,－1)

$\therefore\begin{cases}2+2b+c=0\\c=-1\end{cases}$ 解得：b=－$\frac{1}{2}$ c=－1 ∴二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$

（2）设点 D 的坐标为（m，0） （0＜m＜2）

∴ OD=m ∴AD=2- m

由△ADE ∽△AOC 得，$\frac{AD}{AO}=\frac{DE}{OC}$ ∴ $\frac{2-m}{2}=\frac{DE}{1}$ ∴DE=$\frac{2-m}{2}$

∴△CDE 的面积 = $\frac{1}{2}\times\frac{2-m}{2}\times m=-\frac{m^2}{4}+\frac{m}{2}=-\frac{1}{4}(m-1)^2+\frac{1}{4}$

当 m=1 时，△CDE 的面积最大 ∴点 D 的坐标为（1，0）

（3）F(0,2)，S=$\frac{5}{2}\pi$

22．在 Rt△ABC 中，$a^2+b^2=c^2$

∵ $c>b>a>0$

∴ $2c^2>a^2+b^2$，$2a^2<b^2+c^2$

∴若 Rt△ABC 为奇异三角形，一定有 $2b^2=a^2+c^2$

∴ $2b^2=a^2+(a^2+b^2)$

∴ $b^2=2a^2$ 得 $b=\sqrt{2}a$

∵ $c^2=b^2+a^2=3a^2$

∴ $c=\sqrt{3}a$

∴ $a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

(3) ①∵ AB 是⊙ O 的直径

∴∠ ACB=∠ADB=90°

在 Rt△ACB 中，$AC^2+BC^2=AB^2$

在 Rt△ADB 中，$AD^2+BD^2=AB^2$

∵点 D 是半圆 $\overset{\frown}{ADB}$ 的中点

∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

∴AD=BD

∴ $AB^2=AD^2+BD^2=2AD^2$

∴ $AC^2+CB^2=2AD^2$

又∵ $CB=CE, AE=AD$

∴ $AC^2+CE^2=2AE^2$

∴△ ACE 是奇异三角形

②由①可得△ ACE 是奇异三角形

∴ $AC^2+CE^2=2AE^2$

当△ ACE 是直角三角形时

由（2）可得 $AC:AE:CE=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 或 $AC:AE:CE=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

（Ⅰ）当 $AC:AE:CE=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 时，

$AC:CE=1:\sqrt{3}$ 即 $AC:CB=1:\sqrt{3}$

∵ $\angle ACB=90^\circ$ ∴ $\angle ABC=30^\circ$

（Ⅱ）当 $AC:AE:CE=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$ 时，

$AC:CE=\sqrt{3}:1$ 即 $AC:CB=\sqrt{3}:1$

∵ $\angle ACB=90^\circ$ ∴ $\angle ABC=60^\circ$

23 解：(1)如图，建立平面直有坐标系，

∵矩形 ABCD 中，AB= 3，AD =2，

设 A(m 0)（ m > 0)， 则有 B(m＋3 0)；C(m＋3 2), D(m 2);

若 C 点过 $y=\frac{3}{2}x-1$；则 $2=\frac{3}{2}(m+3)-1$,

m = －1 与 m＞0 不合；

∴C 点不过 $y=\frac{3}{2}x-1$；

若点 D 过 $y=\frac{3}{2}x-1$，则 $2=\frac{3}{2}m-1$, m=2,

∴A (2, 0)， B(5,0)，C(5,2)， D(2,2)；

（2）①∵⊙ M 以 AB 为直径，∴ M(3.5 0)，

由于 $y=ax^2+bx+c$ 过 A(2, 0) 和 B(5 ,0) 两点，

$$\therefore \begin{cases} 0=4a+2b+c \\ 0=25a+5b+c \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b=-7a \\ c=10a \end{cases}$$

$\therefore y=ax^2-7ax+10a$

(也可得：$y=a(x-2)(x-5)=a(x^2-7x+10)=ax^2-7ax+10a$)

$\therefore y=a(x-\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}a$；

∴抛物线顶点 $P(\frac{7}{2},-\frac{9}{4}a)$

∵顶点同时在⊙ M 内和在矩形 ABCD 内部，

$\therefore \frac{3}{2}<-\frac{9}{4}a<2, \therefore -\frac{8}{9}<a<-\frac{2}{3}$.

② 设切线 CF 与⊙ M 相切于 Q，交 AD 于 F，设 AF = n, n＞0；

∵AD、BC、CF 均为⊙ M 切线，∴ CF=n＋2, DF=2－n; 在 Rt△DCF 中，

$\because DF^2+DC^2=CF^2$；

$\therefore 3^2+(2-n)^2=(n+2)^2$，$\therefore n=\frac{9}{8}$，$\therefore F(2,\frac{9}{8})$

∴当 PF∥AB 时，P 点纵坐标为 $\frac{9}{8}$；$\therefore -\frac{9}{4}a=\frac{9}{8}$，$\therefore a=-\frac{1}{2}$；

∴抛物线的解析式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-5$

抛物线与 y 轴的交点为 Q（0，－5），

又直线 $y=\frac{3}{2}x-1$ 与 y 轴交点（ 0，－1）；

∴Q 在直线 $y=\frac{3}{2}x-1$ 下方 .