高二数学 期中测试卷

试卷分为两卷，A 卷 100 分，B 卷 50 分，共计 150 分

考试时间：120 分钟

A 卷

一．选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. 不等式 $\frac{x-3}{x+2}<0$ 的解集为

A. $\{x|-2<x<3\}$　B. $\{x|x<-2\}$　C. $\{x|x<-2或x>3\}$　D. $\{x|x>3\}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+n$，且 $a_1=2$，那么 $a_3=$

A．4　B．5　C．6　D．7

3. 下列命题中的假命题是

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3>0$.　B. $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\tan x=2$.

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$.　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\lg x=0$.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-1$，公差 $d=2$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和等于

A. -15　B. -17　C. 15　D. 17

5. 若 $a<b<0$，则下列不等式中成立的是

A．$a^2<b^2$　B．$\frac{a}{b}<1$　C．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　D．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

6. 设 P：$a^2=4$，Q：$a=2$，则 P 是 Q 的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

7. 若 $a,b\in R$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是

A．$a^2+b^2>2ab$　B．$a+b\geq 2\sqrt{ab}$　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　D．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=-11$，$a_4+a_6=-6$，则 S_n 取最小值时的 n 为

A．6　B．7　C．8　D．9

9. 函数 $y=\tan x+\dfrac{9}{\tan x}(\dfrac{\pi}{2}<x<\pi)$ 的最大值为

A. 6　　B. 9　　C. -6　　D. -9

10. 已知常数 $k\in(0,\ 1)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n\cdot k^n(n\in\mathbf{N}^*)$. 下面说法正确的是

①当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列；

②当 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递减数列；

③当 $\dfrac{1}{2}<k<1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不一定有最大项；

④当 $\dfrac{k}{1-k}$ 为正整数时，数列 $\{a_n\}$ 必有两项相等的最大项.

A. ①②　　B. ②③　　C. ②④　　D. ③④

二．填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-1>0$”的否定是_____.

12. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$8a_2-a_5=0$，则公比 $q=$_____，$\dfrac{S_4}{S_2}=$_____.

13. 若正数 a,b 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=1$，则 $a+b$ 的最小值等于_____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的对应关系如下表所示：

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3,\ a_{n+1}=f(a_n)$，则 $a_4=$_____，$a_{2019}=$_____.

15. 能够说明“设 a,b,c 是任意实数. 若 $a>b>c$，则 $a+b>c$.”是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为_____.

三．解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

16.（本小题满分 10 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_3=6$，$a_6=0$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$b_2=a_4+a_5$，求$\{b_n\}$的前n项和公式.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数$f(x)=x^2+ax-4$.

（Ⅰ）当$a=3$时，解不等式$f(x)<0$；

（Ⅱ）若不等式$f(x)+5>0$的解集为$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围.

18.（本小题满分 10 分）

已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且$b_2=3$，$b_5=81$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$c_n=a_nb_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

B 卷

一．选填题（本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1. 若$m<0,\ n>0$且$m+n<0$，则

A. $m<-n<n<-m$　B. $-n<m<-m<n$　C. $m<-n<-m<n$　D. $-n<m<n<-m$

2. 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，其公比$q\neq1$，且$b_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$．若$a_1=b_1$，$a_{11}=b_{11}$，则a_6与b_6的大小关系为

A．$a_6=b_6$　　B．$a_6>b_6$　　C．$a_6<b_6$　　D．不确定

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+a_n=4n+3$，则$a_1+a_{2020}=$

A．4043　　B．4046　　C．4047　　D．4049

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=4S_n-3$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=$______.

5. 若$a>0,\ b>0$，则不等式$-b<\dfrac{1}{x}<a$的解集是______.

6. 已知$a>b>0$，则$a^2-\dfrac{4}{b^2-ab}$的最小值是______.

7. 有穷数列$\{a_n\}\ (n\in\mathbf{N}^*,n\leq12)$满足$a_1,a_4,a_{12}$成等比数列，且对$\forall k\in\mathbf{N}^*$，$2\leq k\leq12$，都有

$|a_k-a_{k-1}|=1$．若 $a_1=1,\ a_{12}=4$，则满足条件的不同数列 $\{a_n\}$ 的个数为______.

二．解答题（本大题共 2 小题，共 22 分）

8．（本小题满分 10 分）

已知二次函数 $f(x)=a^2x+\quad l$，$f(-1)=-4$，恒有 $f(x)\le 6x+2$．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，且 $0<a_n<\frac{1}{2}$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

（Ⅲ）记 $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots\cdots a_n$．若 $a_1=\frac{1}{3}$，求 $\prod_{i=1}^{n}(1-2a_i)$.

9．（本小题满分 12 分）

给定数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$．对 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，该数列前 i 项的最大值记为 A_i，后 $n-i$ 项 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 的最小值记为 B_i，$d_i=A_i-B_i$.

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 为 3,4,7,1. 写出 d_1,d_2,d_3 的值；

（Ⅱ）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\ge 4)$ 是公比大于 1 的等比数列，且 $a_1>0$.

证明：$d_1,d_2,\cdots,d_{n-1}$ 是等比数列；

（Ⅲ）若 $d_1=d_2=\cdots=d_{n-1}=0$，证明：$\{a_n\}$ 是常数列.

参考答案

A 卷

一．选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	A	C	D	B	D	A	C	C

二．填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11	$\exists x\in\mathbf{R},\ x^2-1\le 0.$		12	$2,5$	13	9
14	3	1	15	$-1,-2,-3$		

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

16．（本小题满分 10 分）

已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_3=6$，$a_6=0$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）若等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$b_2=a_4+a_5$，求$\{b_n\}$的前n项和公式.

解:（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_3=6,a_6=0$，

所以$\begin{cases}a_1+2d=6\\ a_1+5d=0\end{cases}$，解得$a_1=10,d=-2$.

所以$a_n=10+(n-1)\cdot(-2)=-2n+12$.

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

因为$b_2=a_4+a_5=6,\ b_1=3$，

所以$3q=6$，即$q=2$.

所以$\{b_n\}$的前n项和公式为$S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=3(2^n-1)$.

17．（本小题满分 10 分）

已知函数$f(x)=x^2+ax-4$.

（Ⅰ）当$a=3$时，解不等式$f(x)<0$;

（Ⅱ）若不等式$f(x)+5>0$的解集为$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围.

解：（Ⅰ）由 $f(x)=x^2+3x-4<0$ 得 $(x+4)(x-1)<0$，

由二次函数的图象，得原不等式解集为 $\{x\mid -4<x<1\}$.

（Ⅱ）若不等式 $f(x)+5>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，因为抛物线 $g(x)=f(x)+5=x^2+ax+1$ 开口向上，

所以只需 $\Delta=a^2-4<0$，解得 $-2<a<2$.

故 $f(x)+5>0$ 解集为 $\mathbf{R}$ 时，实数 a 的取值范围为 $(-2,2)$.

18.（本小题满分 10 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2=3,\ b_5=81,\ a_1=b_1,\ a_{14}=b_4$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（Ⅰ）等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q^3=\dfrac{b_5}{b_2}=\dfrac{81}{3}=27$，故 $q=3$.

所以 $b_1=\dfrac{b_2}{q}=1$，$b_4=b_3q=27$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，

所以 $1+13d=27$，即 $d=2$.

所以 $a_n=2n-1\ (n\in N^*)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$，从而 $c_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$.

由于 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$，

即 $T_n=1+3\times3+5\times3^2+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$ （1）

则 $3T_n=3+3^2\times3+5\times3^3+\cdots+(2n-1)\cdot3^n$ （2）

由（1）-（2）得

$$\begin{aligned}-2T_n&=1+2\times(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n\\&=1+2\times\frac{3\times(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot3^n\\&=1+3\times(3^{n-1}-1)-(2n-1)\cdot3^n\\&=-2-(2n-2)\cdot3^n\end{aligned}$$

所以 $T_n=(n-1)\cdot3^n+1$.

B 卷

一．选填题（本大题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1	2	3	4	5	6	7
A	B	A	$\frac{341}{256}$	$\{x\mid x<-\frac{1}{b}或x>\frac{1}{a}\}$	8	176

二．解答题（本大题共 2 小题，共 22 分）

8．（本小题满分 10 分）

已知二次函数 $f(x)=a^{2}x+\quad l$，$f(-1)=-4$，恒有 $f(x)\le 6x+2$．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，且 $0<a_n<\frac{1}{2}$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

（Ⅲ）记 $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots\cdots a_n$．若 $a_1=\frac{1}{3}$，求 $\prod_{i=1}^{n}(1-2a_i)$．

解：（Ⅰ）由 $f(-1)=-4$ 得 $a-b=-4$，即 $b=a+4$；

因为 $f(x)\le 6x+2$ 恒成立，即 $ax^2+(b-6)x-2\le 0$ 恒成立，

即 $ax^2+(a-2)x-2\le 0$ 恒成立，从而 $\Delta=(a-2)^2+8a=(a+2)^2\le 0$，所以 $a=-2$；

所以表达式为 $f(x)=-2x^2+2x$；

（Ⅱ）由于 $a_{n+1}-a_n=(-2a_n{}^2+2a_n)-a_n=-2a_n{}^2+a_n=-2a_n(a_n-\frac{1}{2})$，

又因为 $0<a_n<\frac{1}{2}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)，

所以 $-2a_n(a_n-\frac{1}{2})>0$，因此 $a_{n+1}>a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

（Ⅲ）因为 $1-2a_{n+1}=1-2(-2a_n{}^2+2a_n)=1-4a_n+4a_n{}^2=(1-2a_n)^2>0$，

所以 $\log_3(1-2a_{n+1})=2\log_3(1-2a_n)$，即 $\frac{\log_3(1-2a_{n+1})}{\log_3(1-2a_n)}=2$，

所以数列 $\log_3(1-2a_n)$ 是等比数列，其首项 $\log_3(1-2a_1)=-1$，公比 $q=2$，

所以 $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=1-2^n$，所以 $\prod_{i=1}^{n}(1-2a_i)=3^{S_n}=3^{1-2^n}$．

9. （本小题满分 12 分）

给定数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 对 $i=1,2,3,\cdots,n-1$，该数列前 i 项的最大值记为 A_i，后 $n-i$ 项 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 的最小值记为 B_i， $d_i=A_i-B_i$.

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 为 3,4,7,1. 写出 d_1,d_2,d_3 的值；

（Ⅱ）设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 4)$ 是公比大于 1 的等比数列，且 $a_1>0$.

证明 $d_1,d_2,\cdots,d_{n-1}$ 是等比数列；

（Ⅲ）若 $d_1=d_2=\cdots=d_{n-1}=0$，证明 $\{a_n\}$ 是常数列.

解：（Ⅰ） $d_1=A_1-B_1=3-1=2$， $d_2=A_2-B_2=4-1=3$， $d_3=A_3-B_3=7-1=6$

（Ⅱ）因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 4)$ 是公比大于 1 的等比数列，且 $a_1>0$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}$ 且 $\{a_n\}$ 为单调递增数列.

所以当 $k=1,2,3,\cdots,n-1$ 时， $d_k=A_k-B_k=a_k-a_{k+1}<0$

所以当 $k=2,3,\cdots,n$ 时， $\dfrac{d_k}{d_{k-1}}=\dfrac{a_k-a_{k+1}}{a_{k-1}-a_k}=\dfrac{a_{k-1}q(1-q)}{a_{k-1}(1-q)}=q$

所以 $d_1,d_2,\cdots,d_{n-1}$ 是首项为 a_1-a_2,公比为 q 的等比数列.

（Ⅲ）任取 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,因为 $0=d_i=A_i-B_i$,所以, $A_i=B_i$,故

$a_i\leq\max\{a_1,\cdots,a_i\}=A_i=B_i=\min\{a_{i+1},\cdots,a_n\}\leq a_{i+1}$,故 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$,

因此，任取 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,有 $a_i=\max\{a_1,\cdots,a_i\}=A_i=B_i=\min\{a_{i+1},\cdots,a_n\}=a_{i+1}$,

即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,也即 $\{a_n\}$ 是常数列.