海淀区高三年级第一学期期中练习

数学　2019.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x|x+1\le 0\}$，$B=\{x\mid x\ge a\}$，若 $A\cup B=R$，则实数 a 的值可以为

A.　2　　B.　1　　C.　0　　D.　-2

2.下列函数值中，在区间 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数的是

A. $y=x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=x+\sqrt{x}$　　D. $y=|x-1|$

3.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=a_3$，且 $a_3\ne 0$，则 $\dfrac{S_4}{S_3}=$

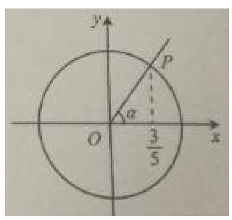
A.　1　　B.　$\dfrac{5}{3}$　　C.　$\dfrac{8}{3}$　　D.　3

4.不等式 $\dfrac{1}{x}>1$ 成立的一个充分不必要条件是

A. $0<x<\dfrac{1}{2}$　　B.　$x>1$　　C.　$0<x<1$　　D.　$x<0$

5.如图，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与单位圆 O 相交于点 P，且点 P 的横坐标为 $\dfrac{3}{5}$，则 $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)$ 的值为

A.　$-\dfrac{3}{5}$　　B.　$\dfrac{3}{5}$　　C.　$-\dfrac{4}{5}$　　D.　$\dfrac{4}{5}$



6.在四边形 ABCD 中，AB//CD，设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in R)$.若 $\lambda+\mu=\dfrac{3}{2}$，则 $\dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|}=$

A.　$\dfrac{1}{3}$　　B.　$\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D.2

7.已知函数 $f(x)=x^3+x^2-2|x|-k$.若存在实数 x_0，使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$ 成立，则实数 k 的取值范围是

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]$

8.设集合 A 是集合 N^* 的子集，对于 $i\in N^*$，定义 $\varphi_i(A)=\begin{cases}1, i\in A\\ 0, i\notin A\end{cases}$，给出下列三个结论：

①存在 N^* 的两个不同子集 A,B，使得任意 $i\in N^*$ 都满足 $\varphi_i(A\bigcap B)=0$ 且 $\varphi_i(A\bigcup B)=1$；

②任取 N^* 的两个不同子集 A,B，对任意 $i\in N^*$ 都有 $\varphi_i(A\bigcap B)=\varphi_i(A)\ \ \varphi_i(B)$；

③任取 N^* 的两个不同子集 A,B，对任意 $i\in N^*$ 都有 $\varphi_i(A\bigcup B)=\varphi_i(A)+\varphi_i(B)$

其中，所有正确结论的序号是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③

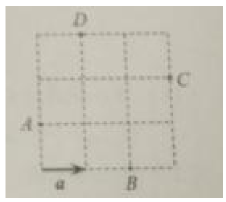
二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.已知向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(3,t)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $t=$ ______

10. 函数 $f(x)=x-\sqrt{x}-6$ 的零点个数是________

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\log_2 n$，则 $a_1=$____，$a_5+a_6+a_7+a_8=$______

12.如图，网格纸上小正方形的边长为 1.从 A,B,C,D 四点中任取两个点作为向量 $\vec{b}$ 的始点和终点，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值为___________



13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\ln n$，若存在 $p\in R$，使得 $a_n\le pn$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立，则 p 的取值范围为__________

14.已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\omega x, g(x)=\sqrt{2}\cos\omega x$，其中 $\omega>0$，A,B,C 是这两个函数图像的交点，且不共线.

①当 $\omega=1$ 时，ΔABC 面积的最小值为___________；

②若存在 ΔABC 是等腰直角三角形，则 ω 的最小值为__________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为各项均未正数的等比数列，S_n 为其 n 前项和， $a_2=3$，$a_3+a_4=36$

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）若 $S_n<121$，求 n 的最大值.

16. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）若 $f(x)+m\le 0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+x^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$

（I）求 b,c 的值；

（II）若函数 $f(x)$ 存在极大值，求 a 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

在ΔABC中， $a=7,b=5,c=8$.

（Ⅰ）求$\sin A$的值；

（Ⅱ）若点P为射线AB上的一个动点（与点A不重合），设$\dfrac{AP}{PC}=k$.

①求k的取值范围；

②直接写出一个k的值，满足：存在两个不同位置的点P，使得$\dfrac{AP}{PC}=k$.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$.

（I）判断函数$f(x)$在区间$(0,1)$上的单调性，并说明理由；

（II）求证：$f(x)<\dfrac{1}{2}$.

20.（本小题满分 14 分）

已知集合$M\subseteq N^*$，且M中的元素个数n大于等于 5.若集合M中存在四个不同的元素a,b,c,d，使得$a+b=c+d$，则称集合M是“关联的”，并称集合$\{a,b,c,d\}$是集合M的“关联子集”；若集合M不存在“关联子集”，则称集合M是“独立的”.

（Ⅰ）分别判断集合$\{2,4,6,8,10\}$和集合$\{1,2,3,5,8\}$是“关联的”还是“独立的”？若是“关联的”，写出其所有的关联子集；

（Ⅱ）已知集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$是“关联的”，且任取集合$\{a_i,a_j\}\subseteq M$，总存在M的关联子集A，使得$\{a_i,a_j\}\subseteq A$.若$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，求证：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5是等差数列；

（Ⅲ）集合M是“独立的”，求证：存在$x\in M$，使得$x>\dfrac{n^2-n+9}{4}$.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数　学　　　2019.11

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	B	B	A	A

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	9	10	11	12	13	14
答案	6	1	0；1	3	$\left[\frac{\ln 3}{3},+\infty\right)$	2π；$\frac{\pi}{2}$

说明:第 11，14 题第一空 3 分，第二空 2 分

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：(Ⅰ) 在等比数列$\{a_n\}$中，设$\{a_n\}$公比为 q.

因为 $a_2=3$，$a_3+a_4=36$，

所以$\begin{cases} a_1q=3, \\ a_1q^2+a_1q^3=36. \end{cases}$

所以 $3q+3q^2=36$．即 $q^2+q-12=0$.

则 $q=3$ 或 $q=-4$.

因为 $a_n>0$,

所以 $q>0$,

所以 $q=3$.

因为 $a_2=a_1q=3$,

所以 $a_1=1$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

（Ⅱ）在等比数列$\{a_n\}$中，

因为 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$，

所以 $S_n=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$.

因为 $S_n<121$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)<121$.

所以 $3^n<243$.

所以 $n<5$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $n\leq 4$. 即 n 的最大值为 4.

16.解：（Ⅰ）因为 $f(x)=2\sin x\cos(x+\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$=2\sin x(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2\sin x(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$=\sin(2x+\frac{\pi}{3}).$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）“$f(x)+m\leq 0$ 对 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 恒成立”等价于 “$f(x)_{\max}+m\leq 0$”.

因为 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}]$.

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，

$f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{12})=1$.

所以 $1+m\le 0$，

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

17．解：（Ⅰ）$f'(x)=ax^2+2x+b$，

因为 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$，

所以 $\begin{cases} f'(0)=1, \\ f(0)=1. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=1, \\ c=1. \end{cases}$

（Ⅱ）$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+x^2+x+1$，

① 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+x+1$ 不存在极大值，不符合题意.

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=ax^2+2x+1$.

令 $ax^2+2x+1=0$.

（i）当 $\Delta=4-4a\le 0$，即 $a\ge 1$ 时，不符合题意.

（ii）当 $\Delta=4-4a>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的实数根.

设方程两个根为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如表所示：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x_1)$ 为极大值.

③当 $a<0$ 时，$\Delta=4-4a>0$ 恒成立. 设方程两个根为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如表所示：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $f(x_2)$ 为极大值.

综上，若函数 $f(x)$ 存在极大值，a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

18．解：（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，$b=5$，$c=8$，

根据余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

所以 $\cos A=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）①在 $\triangle ABC$ 中，

根据正弦定理，得 $\dfrac{CP}{\sin A}=\dfrac{AP}{\sin\angle ACP}$.

$k=\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{\sin\angle ACP}{\sin A}=\dfrac{\sin\angle ACP}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\angle ACP$.

因为点 P 为射线 AB 上一动点，

所以 $\angle ACP\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$.

所以 k 的取值范围为 $(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}]$.

②答案不唯一. 取值在区间 $(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$ 上均正确.

19．（Ⅰ）函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增函数.

理由如下：

由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$，得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$．

因为 $x\in(0,1)$，

所以 $\dfrac{1}{x}>1,\ \ln x<0$．

因此 $\dfrac{1}{x}-\ln x>0$．

又因为 $e^x>0$，

所以 $f'(x)>0$ 恒成立．

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是单调递增函数．

（Ⅱ）证明"$f(x)<\dfrac{1}{2}$"等价于证明"$f(x)_{\max}<\dfrac{1}{2}$

由题意可得，$x\in(0,+\infty)$．

因为 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$，

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$．

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

因为 $g(1)=1>0,\ g(e)=\dfrac{1}{e}-1<0$，

所以存在唯一实数 x_0，使得 $g(x_0)=0$，其中 $x_0\in(1,e)$．

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如表所示：

所以 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一的极大值.

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{e^{x_0}}$.

因为 $\dfrac{1}{x_0}=\ln x_0$，

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{e^{x_0}}=\dfrac{1}{x_0e^{x_0}}$.

因为 $x_0\in(1,e)$，

所以 $f(x)_{\max}=\dfrac{1}{x_0e^{x_0}}<\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)<\dfrac{1}{2}$.

20.**解:**（Ⅰ）$\{2,4,6,8,10\}$ 是“关联的”，关联子集有 $\{2,4,6,8\}$，$\{4,6,8,10\}$，$\{2,4,8,10\}$，

$\{1,2,3,5,8\}$ 是“独立的”

（Ⅱ）记集合 M 的含有四个元素的集合分别为：

$A_1=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$，$A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$，$A_3=\{a_1,a_2,a_4,a_5\}$，$A_4=\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$，

$A_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

所以，M 至多有 5 个“关联子集”.

若 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 为“关联子集”，则 $A_1=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 不是“关联子集”，否则 $a_1=a_2$；

同理可得若 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 为“关联子集”，则 A_3，A_4 不是“关联子集”.

所以集合 M 没有同时含有元素 a_2,a_5 的“关联子集”，与已知矛盾.

所以 $A_2=\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$ 一定不是“关联子集”.

同理 $A_4=\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$ 一定不是"关联子集".

所以集合 M 的"关联子集"至多为 A_1，A_3，A_5.

若 A_1 不是"关联子集"，则此时集合 M 一定不含有元素 a_3,a_5 的"关联子集"，与已知矛盾；

若 A_3 不是"关联子集"，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1,a_5 的"关联子集"，与已知矛盾；

若 A_5 不是"关联子集"，则此时集合 M 一定不含有元素 a_1,a_3 的"关联子集"，与已知矛盾.

所以 A_1，A_3，A_5 都是"关联子集".

所以有 $a_2+a_5=a_3+a_4$，即 $a_5-a_4=a_3-a_2$；

$a_1+a_5=a_2+a_4$，即 $a_5-a_4=a_2-a_1$

$a_1+a_4=a_2+a_3$，即 $a_4-a_3=a_2-a_1$，

所以 $a_5-a_4=a_4-a_3=a_3-a_2=a_2-a_1$.

所以 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 是等差数列.

(Ⅲ)不妨设集合 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geq 5)$，$a_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_n$.

记 $T=\{t\mid t=a_i+a_j,1\leq i<j\leq n,i,j\in\mathbf{N}^*\}$.

因为集合 M 是"独立的"的，所以容易知道 T 中恰好有 $\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个元素.

假设结论错误，即不存在 $x\in M$，使得 $x>\dfrac{n^2-n+9}{4}$.

所以任取 $x\in M$，$x\leq\dfrac{n^2-n+9}{4}$. 因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x\leq\dfrac{n^2-n+8}{4}$.

所以 $a_i+a_j\leq\dfrac{n^2-n+8}{4}+\dfrac{n^2-n+8}{4}-1=\dfrac{n^2-n+8}{2}-1=\dfrac{n^2-n}{2}+3$.

所以任取 $t\in T$，$t\leq\dfrac{n^2-n}{2}+3$.

任取 $t\in T$，$t\geq 1+2=3$，

所以$T\subseteq\{3,4,\cdots,\frac{n^2-n}{2}+3\}$，且$T$中含有$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$个元素.

（i）若$3\in T$，则必有$a_1=1,a_2=2$成立.

因为$n\geq 5$，所以一定有$a_n-a_{n-1}>a_2-a_1$成立.所以$a_n-a_{n-1}\geq 2$.

所以$a_n+a_{n-1}\leq\frac{n^2-n+8}{4}+\frac{n^2-n+8}{4}-2=\frac{n^2-n}{2}+2$.

所以$T=\{t\,|\,3\leq t\leq\frac{n^2-n}{2}+2,t\in\mathbf{N}^*\}$.所以$a_n=\frac{n^2-n+8}{4},a_{n-1}=\frac{n^2-n+8}{4}-2$.

因为$4\in T$，所以$a_3=3$，所以有$a_n+a_1=a_{n-1}+a_3$，矛盾.

（ii）若$3\notin T$，则$T\subseteq\{4,5,\cdots,\frac{n^2-n}{2}+3\}$.

而T中含有$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$个元素,所以$T=\{t\,|\,4\leq t\leq\frac{n^2-n}{2}+3,t\in\mathbf{N}^*\}$.

所以$a_n=\frac{n^2-n+8}{4}$，$a_{n-1}=\frac{n^2-n+8}{4}-1$.

因为$4\in T$，所以$a_1=1,a_2=3$.

因为$\frac{n^2-n}{2}+2\in T$，所以$\frac{n^2-n}{2}+2=a_{n-2}+a_n$.

所以$a_{n-2}=\frac{n^2-n+8}{4}-2$.

所以$a_n+a_1=a_{n-2}+a_3$，矛盾.

所以命题成立.