

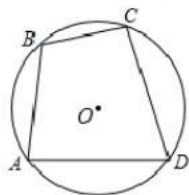
2019 年北京一六—中学新高—新生入学分班考试

数学试卷

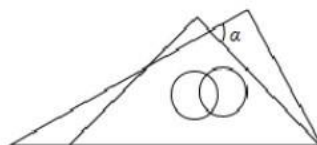
一、选择题（本大题共 14 小题，共 28 分）

1. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，若 $\angle B = 108^\circ$ ，则 $\angle D$ 的大小为（ ）

A. 54° B. 62° C. 72° D. 82°



1 题图



2 题图

2. 将一副三角尺按如图所示的方式摆放，则 $\angle \alpha$ 的大小为（ ）

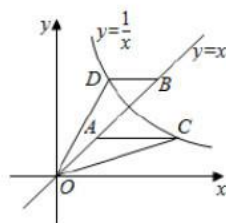
A. 85° B. 75° C. 65° D. 60°

3. 若二次函数 $y = a^2x^2 - bx - c$ 的图象，过不同的六点 $A(-1, n)$ 、 $B(5, n-1)$ 、 $C(6, n+1)$ 、 $D(\sqrt{2}, y_1)$ 、 $E(2, y_2)$ 、 $F(4, y_3)$ ，则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是（ ）

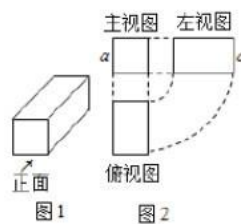
A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_2 < y_1 < y_3$

4. 如图，点 A 、 B 是直线 $y = x$ 上的两点，过 A 、 B 两点分别作 x 轴的平行线交双曲线 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 于点 C 、 D 。若 $AC = \sqrt{3}BD$ ，则 $3OD^2 - OC^2$ 的值为（ ）

A. 5 B. $3\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{3}$



4 题图

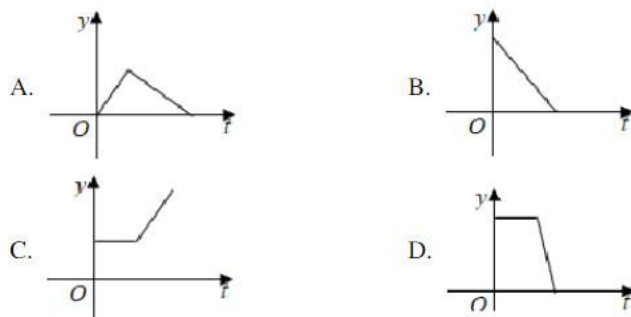


5 题图

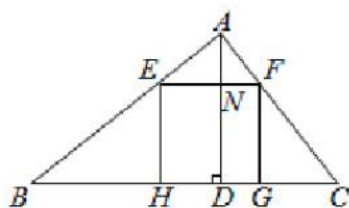
5. 如图 2 是图 1 长方体的三视图，若用 S 表示面积， $S_{\text{主}} = a^2$ ， $S_{\text{左}} = a^2 + a$ ，则 $S_{\text{俯}} =$ （ ）

A. $a^2 + a$ B. $2a^2$ C. $a^2 + 2a + 1$ D. $2a^2 + a$

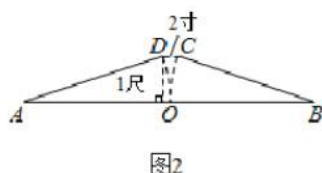
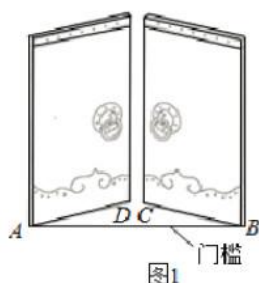
6. 2020年初以来，红星消毒液公司生产的消毒液在库存量为 m 吨的情况下，日销售量与产量持平，自1月底抗击“新冠病毒”以来，消毒液需求量猛增，该厂在生产能力不变的情况下，消毒液一度脱销，下面表示2020年初至脱销期间，该厂库存量 y (吨) 与时间 t (天) 之间函数关系的大致图象是()



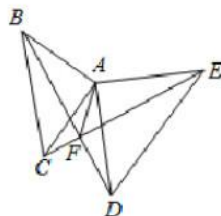
7. 若 k 为正整数，则 $\frac{(k+k+\cdots+k)^k}{k \text{ 个 } k} = ()$
- A. k^{2k} B. k^{2k+1} C. $2k^k$ D. k^{2+k}
8. 若 $\frac{(9^2-1)(11^2-1)}{k} = 8 \times 10 \times 12$ ，则 $k = ()$
- A. 12 B. 10 C. 8 D. 6
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 120$ ，高 $AD = 60$ ，正方形 $EFGH$ 一边在 BC 上，点 E, F 分别在 AB, AC 上， AD 交 EF 于点 N ，则 AN 的长为()
- A. 15 B. 20 C. 25 D. 30



10. 《九章算术》是古代东方数学代表作，书中记载：今有开门去闩(读kǔn，门槛的意思)一尺，不合二寸，问门广几何？题目大意是：如图1、2(图2为图1的平面示意图)，推开双门，双门间隙 CD 的距离为2寸，点 C 和点 D 距离门槛 AB 都为1尺(1尺=10寸)，则 AB 的长是()



- A. 50.5寸 B. 52寸 C. 101寸 D. 104寸
11. 如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， BD ， CE 交于点 F ，连接 AF 。下列结论：① $BD = CE$ ；② $BF \perp CF$ ；③ AF 平分 $\angle CAD$ ；④ $\angle AFE = 45^\circ$ 。其中正确结论的个数有()
- A. 1个
B. 2个
C. 3个
D. 4个



12. 如图1，已知 $\angle ABC$ ，用尺规作它的角平分线。

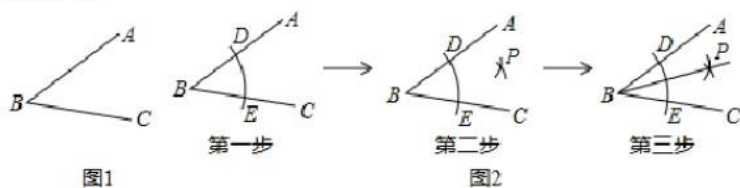
如图2，步骤如下，

第一步：以 B 为圆心，以 a 为半径画弧，分别交射线 BA ， BC 于点 D ， E ；

第二步：分别以 D ， E 为圆心，以 b 为半径画弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部交于点 P ；

第三步：画射线 BP 。射线 BP 即为所求。

下列正确的是()

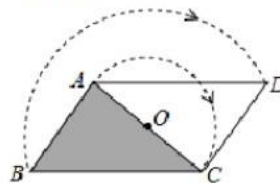


- A. a ， b 均无限制 B. $a > 0$ ， $b > \frac{1}{2}DE$ 的长
C. a 有最小限制， b 无限制 D. $a \geq 0$ ， $b < \frac{1}{2}DE$ 的长

13. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕边 AC 的中点 O 顺时针旋转 180° . 嘉淇发现, 旋转后的 $\triangle CDA$ 与 $\triangle ABC$ 构成平行四边

形, 并推理如下:

点 A, C 分别转到了点 C, A 处,
而点 B 转到了点 D 处.
 $\therefore CB = AD$,
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

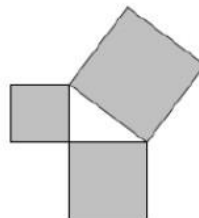


小明为保证嘉淇的推理更严谨, 想在方框中“ $\because CB = AD$,”和“ \therefore 四边形...”之间作补充, 下列正确的是

()

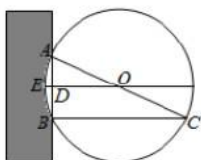
- A. 嘉淇推理严谨, 不必补充 B. 应补充: 且 $AB = CD$
C. 应补充: 且 $AB \parallel CD$ D. 应补充: 且 $OA = OC$
14. 如图是用三块正方形纸片以顶点相连的方式设计的“毕达哥拉斯”图案. 现有五种正方形纸片, 面积分别是 1, 2, 3, 4, 5, 选取其中三块(可重复选取)按图的方式组成图案, 使所围成的三角形是面积最大的直角三角形, 则选取的三块纸片的面积分别是 ()

- A. 1, 4, 5
B. 2, 3, 5
C. 3, 4, 5
D. 2, 2, 4

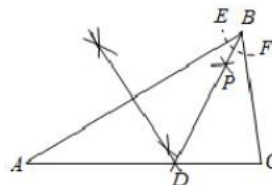


二、填空题 (本大题共 8 小题, 共 16 分)

15. 我国古代数学经典著作《九章算术》中记载了一个“圆材埋壁”的问题: “今有圆材埋在壁中, 不知大小. 以锯锯之, 深一寸, 锯道长一尺. 问径几何?”意思是: 今有一圆柱形木材, 埋在墙壁中, 不知其大小. 用锯去锯这木材, 锯口深 $ED = 1$ 寸, 锯道长 $AB = 1$ 尺(1尺 = 10寸). 问这根圆形木材的直径是_____寸.



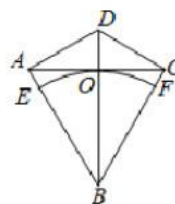
15 题图



16 题图

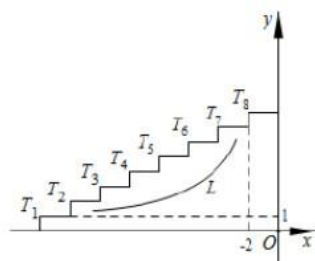
16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 84^\circ$, 分别以点 A, B 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 两弧分别交于点 M, N , 作直线 MN 交 AC 点 D ; 以点 B 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 BA, BC 于点 E, F , 再分别以点 E, F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 P , 作射线 BP , 此时射线 BP 恰好经过点 D , 则 $\angle A =$ _____度.

17. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = CB$, $AD = CD$, 我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”. 筝形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O . 以点 B 为圆心, BO 长为半径画弧, 分别交 AB , BC 于点 E , F . 若 $\angle ABD = \angle ACD = 30^\circ$, $AD = 1$, 则 \widehat{EF} 的长为_____ (结果保留 π).

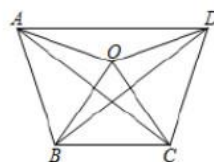


18. 如图是 8 个台阶的示意图, 每个台阶的高和宽分别是 1 和 2, 每个台阶凸出的角的顶点记作 T_m (m 为 $1 \sim 8$ 的整数). 函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象为曲线 L .

- (1) 若 L 过点 T_1 , 则 $k =$ _____;
 (2) 若 L 过点 T_4 , 则它必定还过另一点 T_m , 则 $m =$ _____;
 (3) 若曲线 L 使得 $T_1 \sim T_8$ 这些点分布在它的两侧, 每侧各 4 个点, 则 k 的整数值有 _____ 个.



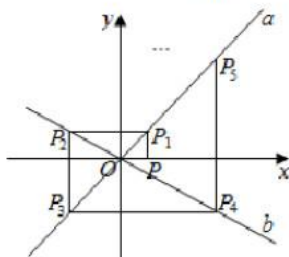
18 题图



19 题图

19. 匈牙利著名数学家爱尔特希 ($P. Erdos$, 1913 – 1996) 曾提出: 在平面内有 n 个点, 其中每三个点都能构成等腰三角形, 人们将具有这样性质的 n 个点构成的点集称为爱尔特希点集. 如图, 是由五个点 A 、 B 、 C 、 D 、 O 构成的爱尔特希点集 (它们为正五边形的任意四个顶点及正五边形的中心构成), 则 $\angle ADO$ 的度数是_____.

20. 如图, 已知直线 $a: y = x$, 直线 $b: y = -\frac{1}{2}x$ 和点 $P(1, 0)$, 过点 P 作 y 轴的平行线交直线 a 于点 P_1 , 过点 P_1 作 x 轴的平行线交直线 b 于点 P_2 , 过点 P_2 作 y 轴的平行线交直线 a 于点 P_3 , 过点 P_3 作 x 轴的平行线交直线 b 于点 P_4 , ..., 按此作法进行下去, 则点 P_{2020} 的横坐标为_____.



21. 2002年8月,在北京召开的国际数学家大会会标取材于我国古代数学家赵爽的《勾股圆方图》,它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的大正方形(如图1),且大正方形的面积是15,小正方形的面积是3,直角三角形的较短直角边为 a ,较长直角边为 b .如果将四个全等的直角三角形按如图2的形式摆放,那么图2中最大的正方形的面积为_____.

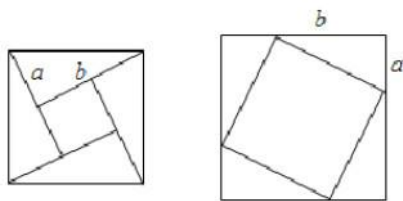


图1

图2

21 题图

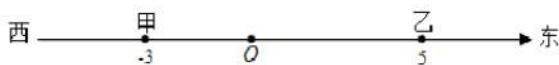


22 题图

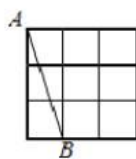
22. 如图所示,将一个半径 $OA = 10\text{cm}$,圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$ 的扇形纸板放置在水平面的一条射线 OM 上,在没有滑动的情况下,将扇形 AOB 沿射线 OM 翻滚至 OB 再次回到 OM 上时,则半径 OA 的中点 P 运动的路线长为_____ cm . (计算结果不取近似值)

三、解答题(本大题共10小题,共56分)

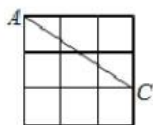
23. 如图,甲、乙两人(看成点)分别在数轴-3和5的位置上,沿数轴做移动游戏.每次移动游戏规则:裁判先捂住一枚硬币,再让两人猜向上一面是正是反,而后根据所猜结果进行移动.
- ①若都对或都错,则甲向东移动1个单位,同时乙向西移动1个单位;
 - ②若甲对乙错,则甲向东移动4个单位,同时乙向东移动2个单位;
 - ③若甲错乙对,则甲向西移动2个单位,同时乙向西移动4个单位.
- (1)经过第一次移动游戏,求甲的位置停留在正半轴上的概率 P ;
 - (2)从如图的位置开始,若完成了10次移动游戏,发现甲、乙每次所猜结果均为一对一错.设乙猜对 n 次,且他最终停留的位置对应的数为 m ,试用含 n 的代数式表示 m ,并求该位置距离原点 O 最近时 n 的值;
 - (3)从如图的位置开始,若进行了 k 次移动游戏后,甲与乙的位置相距2个单位,直接写出 k 的值.



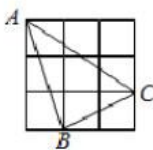
24. 图①、图②、图③都是 3×3 的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点， A, B, C 均为格点．在给定的网格中，按下列要求画图：



图①



图②



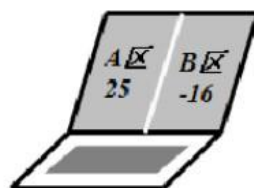
图③

- (1)在图①中，画一条不与 AB 重合的线段 MN ，使 MN 与 AB 关于某条直线对称，且 M, N 为格点．
- (2)在图②中，画一条不与 AC 重合的线段 PQ ，使 PQ 与 AC 关于某条直线对称，且 P, Q 为格点．
- (3)在图③中，画一个 $\triangle DEF$ ，使 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 关于某条直线对称，且 D, E, F 为格点．

25. 有一电脑程序：每按一次按键，屏幕的 A 区就会自动加上 a^2 ，同时 B 区就会自动减去 $3a$ ，且均显示化简后的结果．已知 A, B 两区初始显示的分别是25和-16，如图．

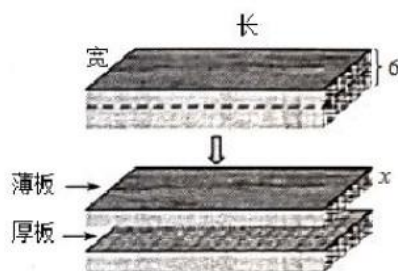
如，第一次按键后， A, B 两区分别显示：

A区	B区
$25+a^2$	$-16-3a$

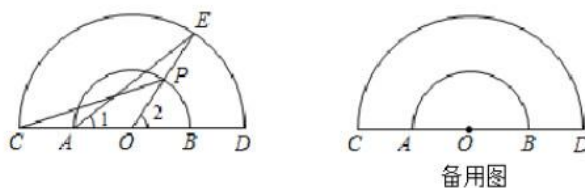


- (1)从初始状态按2次后，分别求 A, B 两区显示的结果；
- (2)从初始状态按4次后，计算 A, B 两区代数式的和，请判断这个和能为负数吗？说明理由．

26. 用承重指数 w 衡量水平放置的长方体木板的最大承重量. 实验室有一些同材质同长同宽而厚度不一的木板, 实验发现: 木板承重指数 W 与木板厚度 x (厘米) 的平方成正比, 当 $x = 3$ 时, $W = 3$.
- (1) 求 W 与 x 的函数关系式.
- (2) 如图, 选一块厚度为 6 厘米的木板, 把它分割成与原来同长同宽但薄厚不同的两块板 (不计分割损耗). 设薄板的厚度为 x (厘米), $Q = W_{\text{薄}} - W_{\text{厚}}$.
- ① 求 Q 与 x 的函数关系式;
- ② x 为何值时, Q 是 $W_{\text{薄}}$ 的 3 倍? [注: (1) 及 (2) 中的 ① 不必写 x 的取值范围]



27. 如图, 点 O 为 AB 中点, 分别延长 OA 到点 C , OB 到点 D , 使 $OC = OD$. 以点 O 为圆心, 分别以 OA , OC 为半径在 CD 上方作两个半圆. 点 P 为小半圆上任一点 (不与点 A , B 重合), 连接 OP 并延长交大半圆于点 E , 连接 AE , CP .
- (1) ① 求证: $\triangle AOE \cong \triangle POC$;
- ② 写出 $\angle 1$, $\angle 2$ 和 $\angle C$ 三者间的数量关系, 并说明理由.
- (2) 若 $OC = 2OA = 2$, 当 $\angle C$ 最大时, 直接指出 CP 与小半圆的位置关系, 并求此时 $S_{\text{扇形} EOD}$ (答案保留 π).



28. 实践操作：

第一步：如图 1，将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 D 的直线折叠，使点 A 落在 CD 上的点 A' 处，得到折痕 DE ，然后把纸片展平。

第二步：如图 2，将图 1 中的矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 E 的直线折叠，点 C 恰好落在 AD 上的点 C' 处，点 B 落在点 B' 处，得到折痕 EF ， $B'C'$ 交 AB 于点 M ， $C'F$ 交 DE 于点 N ，再把纸片展平。

问题解决：

(1)如图 1，填空：四边形 $AEA'D$ 的形状是_____；

(2)如图 2，线段 MC' 与 ME 是否相等？若相等，请给出证明；若不等，请说明理由；

(3)如图 2，若 $AC' = 2\text{cm}$ ， $DC' = 4\text{cm}$ ，求 DN 、 EN 的值。

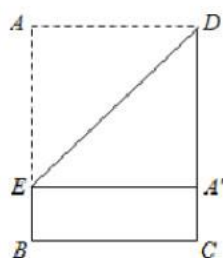


图 1

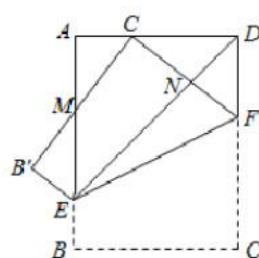
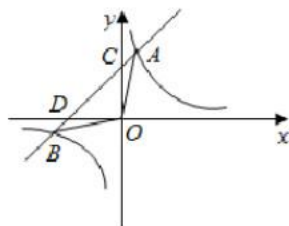


图 2

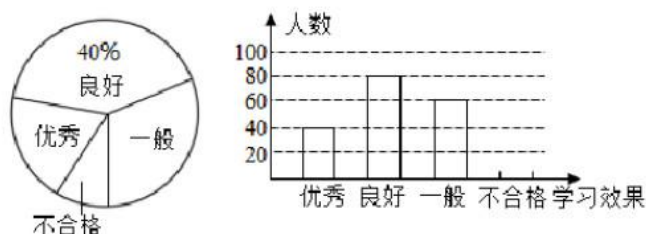
29. 已知：如图，一次函数的图象与反比例函数的图象交于 A 、 B 两点，与 y 轴正半轴交于点 C ，与 x 轴负半轴交于点 D ， $OB = \sqrt{5}$ ， $\tan \angle DOB = \frac{1}{2}$ 。

(1)求反比例函数的解析式；

(2)当 $S_{\triangle ACO} = \frac{1}{2} S_{\triangle OCD}$ 时，求点 C 的坐标。



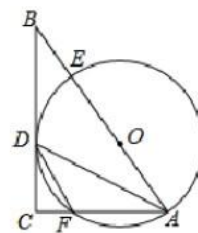
30. 为了解疫情期间学生网络学习的学习效果，东坡中学随机抽取了部分学生进行调查．要求每位学生从“优秀”，“良好”，“一般”，“不合格”四个等次中，选择一项作为自我评价网络学习的效果．现将调查结果绘制成如图两幅不完整的统计图，请结合图中所给的信息解答下列问题：



- (1) 这次活动共抽查了_____人．
- (2) 将条形统计图补充完整，并计算出扇形统计图中，学习效果“一般”的学生人数所在扇形的圆心角度数．
- (3) 张老师在班上随机抽取了 4 名学生，其中学习效果“优秀”的 1 人，“良好”的 2 人，“一般”的 1 人，若再从这 4 人中随机抽取 2 人，请用画树状图法，求出抽取的 2 人学习效果全是“良好”的概率．

31. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ， O 为 AB 上一点，经过点 A 、 D 的 $\odot O$ 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F ．

- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 $BE = 8$ ， $\sin B = \frac{5}{13}$ ，求 $\odot O$ 的半径；
- (3) 求证： $AD^2 = AB \cdot AF$ ．



32. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = x + 1$ 与直线 $l_2: x = -2$ 相交于点 D , 点 A 是直线 l_2 上的动点, 过点 A 作 $AB \perp l_1$ 于点 B , 点 C 的坐标为 $(0, 3)$, 连接 AC, BC . 设点 A 的纵坐标为 t , $\triangle ABC$ 的面积为 s .

(1) 当 $t = 2$ 时, 请直接写出点 B 的坐标;

(2) s 关于 t 的函数解析式为 $s = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 + bt - \frac{5}{4}, & t < -1 \text{ 或 } t > 5 \\ a(t+1)(t-5), & -1 < t < 5 \end{cases}$, 其图象如图 2 所示, 结合图 1、2 的信息, 求出 a 与 b 的值;

(3) 在 l_2 上是否存在点 A , 使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形? 若存在, 请求出此时点 A 的坐标和 $\triangle ABC$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

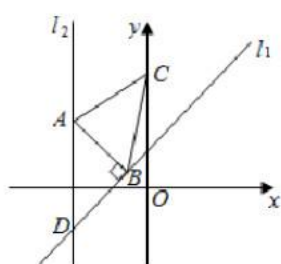


图 1

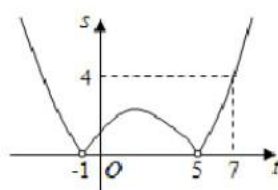


图 2