2019 北京首师附中高一（上）期中

数　　学

（满分：120 分）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1．设集合$A=\{a,a^2,0\}$，$B=\{2,4\}$，若$A\cap B=\{2\}$，则实数 a 的值为（　　）

A．2　　B．± 2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\pm\sqrt{2}$

2．若 $0<a_1<a_2$，$0<b_1<b_2$，且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中值最大的是

A．$a_1b_1+a_2b_2$　　B．$a_1a_2+b_1b_2$　　C．$a_1b_2+a_2b_1$　　D．$\frac{1}{2}$

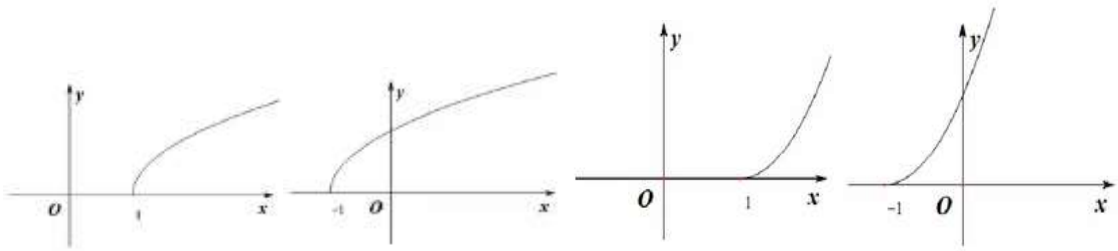
3．下列函数中，是偶函数的是（　　）

A．$f(x)=\frac{1}{x}$　　B．$f(x)=\lg x$　　C．$f(x)=e^x-e^{-x}$　　D．$f(x)=|x|$

4．已知 p:$|x-m|<1$，q：$x^2-8x+12<0$，且 q 是 p 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为：

A．（3，5）　B．[3，5]　C．（-∞，3）∪（5，+∞）　D．（-∞，3]∪（5，+∞）

5．已知$f(x+1)=\sqrt{x}$，则函数$f(x)$的大致图像是（　　）



A．　　　　B．　　　　C．　　　　D．

6．关于 x 的方程 $x^2+(m-3)x+7-m=0$ 的两根都大于 3，则 m 的取值范围是

A．$(-\infty，1-2\sqrt{5})\cup(1+2\sqrt{5}，+\infty)$　　B．$(-\frac{7}{2}，1-2\sqrt{5}]$

C．$(-\infty，-\frac{7}{2})\cup(1-2\sqrt{5}，+\infty)$　　D．$(-\infty，1-2\sqrt{5}]$

7．用列举法可以将集合 A={a|a 使方程 $ax^2+2x+1=0$ 有唯一实数解}表示为　　（　　）

A．A={1}　　B．A={0}　　C．A={0，1}　　D．A={0}或{1}

8．已知集合 M={m|m=a+b$\sqrt{2}$，a，b∈Q}，则下列四个元素中属于 M 的元素的个数是

①$1+\sqrt{2}\pi$；②$\sqrt{11+6\sqrt{2}}$；③$\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$；④$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$　（　　）

A．4　B．3　C．2　D．1

9．下列不等式正确的是　（　　）

A．$x^2+\dfrac{3}{x^2}\geqslant 2\sqrt{3}$　B．$a^2+b^2\geqslant 4ab$　C．$\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$　D．$a+\dfrac{4}{a}\geqslant 4$

10．“x＞3”是“$x^2-5x+6>0$”的

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

二、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．已知集合$A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|x>a\}$，若$A\subseteq B$，则实数a的取值范围是________。

2．关于 x 的方程$\dfrac{x}{(x-1)}=\dfrac{(k-2x)}{(x^2-x)}$的解集中只含有一个元素，k=______________。

3．已知$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leq 1\\ -x+1, & x>1\end{cases}$，则$f[f(-1)]=$________；若$f(x)=-1$，则$x=$________。

4．若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是$\{x|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\}$，则 a+b=____________。

5．关于函数$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x^4}}{|x-1|-1}$的性质描述，正确的是______________。

①$f(x)$的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$　　②$f(x)$的值域为$(-1,1)$

③$f(x)$在定义域上是增函数　　④$f(x)$的图象关于原点对称

6．有 15 人进家电超市，其中有 9 人买了电视，有 7 人买了电脑，两种都买了的有 3 人，则这两种都没买的有_______人。

7．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3+a, x>0\\ x+1, x\leq 0\end{cases}$在 R 上是增函数，则实数$a$的取值范围是________。

8．设 x＞5，P=$\sqrt{x-4}-\sqrt{x-5}$，Q=$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}$，则 P 与 Q 的大小关系是 P____Q。

9．非空有限数集S满足：若$a,b\in S$，则必有$ab\in S$．请写出一个满足条件的二元数集 S=________。

10．已知 a，b 是正实数，且 a+b=2，则$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为______________。

三、解答题（每题 5 分，共 60 分）

1．已知集合$A=\{x|x^2-x<0\}$，$B=\{x|x^2-2x-m<0\}$.

（1）求$\complement_R A$；

（2）若$A\cap B=\emptyset$，求实数 m 的取值范围.

2. 已知函数$f(x)$的定义域是（0，$+\infty$），且满足$f(xy)=f(x)+f(y),f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，如果对于$0<x<y$，都有$f(x)>f(y)$

（1）求$f(1)$

（2）解不等式$f(-x)+f(3-x)\geq -2$

3．已知 a，b 为正实数，试比较$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小。

4. 已知一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|\alpha<x<\beta\}$，且$0<\alpha<\beta$, 求不等式$ax^2+bx+a<0$的解集。

5.（1）已知$x>0$，求函数$y=\frac{x^2+5x+4}{x}$的最小值；

（2）已知$0<x<\frac{1}{3}$，取函数$y=x(1-3x)$的最大值。

6. 已知$a>0,b>0,a+2b$=1，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值。

7.（1）已知$x<\frac{5}{4}$，求$y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值；

（2）已知$0<x<\frac{1}{2}$，求$y=\frac{1}{2}x(1-2x)$的最大值。

8.（1）已知$x>0,y>0,$且满足$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1,$求$x+2y$的最小值。

（2）若把（1）中的“$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$”改为“$x+2y=1$”，其他条件不变，求$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}$的最小值。

9. 求下列不等式的解集

（1）$-4<-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$　　（2）$(x+3)^2\geq(1-2x)^2$　　（3）$\frac{5x-2}{2x+1}>3$

10. 若x,y为正实数，且$2x+8y-xy=0$，求$x+y$的最小值。

11. 已知$ax^2+2ax+1\geq 0$恒成立。

（1）求 a 的取值范围；（2）解关于 x 的不等式$x^2-x-a^2+a<0$

12. 已知x_1，x_2k 是一元二次方程$(a-6)x^2+2ax+a=0$的两个实数根。

（1）是否存在实数 a，使$-x_1+x_1x_2=4+x_2$成立？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由；

（2）求使$(x_1+1)(x_2+1)$为负整数的示数 a 的整数值。

2019 北京首师附中高一（上）期中数学参考答案

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1．D　2．A　3．D　4．B　5．A　6．B　7．C　8．C　9．A　10．A

二、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1．$(-\infty,1]$

2．-1

3．－10 或 2

4．-14

5．①②④

6．2

7．$[1,+\infty)$

8．＞

9．$\{0,1\}$或$\{-1,1\}$，

10．$\frac{9}{2}$

三、解答题（每题 5 分，共 60 分）

1．（1）由$x^2-x<0$得$0<x<1$，故$A=(0,1)$，所以$C_RA=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

（2）由题知，当$x\in A$时，$x^2-2x-m\geq 0$恒成立，

即：当$x\in(0,1)$时，$m\leq x^2-2x$恒成立.

x^2-2x在区间$(0,1)$上的值域为$(-1,0)$，

所以$m\leq -1$，即实数 m 的取值范围是$(-\infty,-1]$.

2．（1）因为 f(1×1)=f(1)+f(1)，所以 f(1)=0

因为 f(2)+f(1/2)=f(2×1/2)=f(1)=0，所以 f(2)=-f(1/2)=-1

（2）f（4）=f（2）+f（2）=-2

∴f（-x）+f（3-x）=f[x（x-3）]≥f（4）

又对于 0＜x＜y，都有 f（x）＞f（y），所以 f（x）为（0,+∞）上的减函数

∴$-x>0 \Rightarrow x<0$

$3-x>0 \Rightarrow x<3$

$x(x-3) \leqslant 4 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 4$

解得$-1 \leqslant x<0$

∴原不等式的解集为$[-1,0)$．

3．$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

4．因为不等式$ax^2+bx+c>0$（$a \neq 0$）的解为$\alpha<x<\beta$，其中$\beta>\alpha>0$，

所以有$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$且$a<0$，$c<0$。

设方程$cx^2+bx+a=0$的两根为m，n，且$m<n$．则$m+n=-\frac{b}{c}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$，$mn=\frac{a}{c}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$

所以可得$n=\frac{1}{\alpha}$，$m=\frac{1}{\beta}$．又因为$c<0$，不等式$cx^2+bx+a<0$的解$x>\frac{1}{\alpha}$或$x<\frac{1}{\beta}$．

5．（1）9（当$x=2$时）　$y=5+x+\frac{4}{x}$

（2）$\frac{1}{12}$（当$x=\frac{1}{6}$时）　$y=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$

另：$y=x(1-3x)=\frac{1}{3} \times 3x(1-3x) \leqslant \frac{1}{3} \times \left(\frac{3x+(1-3x)}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$

6．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+2b}{a}+\frac{a+2b}{b}=1+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}+2=3+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 3+2\sqrt{2}$

7．（1）$y=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3=3-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right) \leqslant 3-2=1$

（2）$y=\frac{1}{2}x(1-2x)=\frac{1}{4} \times 2x(1-2x) \leqslant \frac{1}{4} \times \left(\frac{2x+(1-2x)}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$

另：$y=\frac{1}{2}x-x^2=-\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16}=-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{16}$

8．（1）$x+2y=(x+2y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)=8+\frac{16y}{x}+\frac{x}{y}+2=10+\left(\frac{16y}{x}+\frac{x}{y}\right) \geqslant 10+2 \times 4=18$。

另：令$a=\frac{1}{x}$，$b=\frac{1}{y}$，则$8a+b=1$。

因为$x>0$，$y>0$，所以$a>0$，$b>0$；

$x+2y=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{8a+b}{a}+\frac{16a+2b}{b}=8+\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}+2=10+(\frac{b}{a}+\frac{16a}{b})\geqslant 10+2\times 4=18$。

（2）$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8x+16y}{x}+\frac{x+2y}{y}=8+\frac{16y}{x}+\frac{x}{y}+2=10+(\frac{16y}{x}+\frac{x}{y})\geqslant 10+2\times 4=18$。

9．（1）$\Rightarrow x^2+x-5<0$

$\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

（2）$\Rightarrow (2x-1)^2-(x+3)^2\leqslant 0$

$\Rightarrow (3x+2)(x-4)\leqslant 0$

$\Rightarrow x\leqslant -\frac{2}{3}$ or $x\geqslant 4$

（3）$\Rightarrow \frac{5x-2-6x-3}{2x+1}>0$

$\Rightarrow \frac{x+5}{2x+1}<0$

$\Rightarrow (x+5)(2x+1)<0$

$\Rightarrow -5<x<-\frac{1}{2}$

10．$2x+8y-xy=0\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$

$x+y=(x+y)(\frac{2}{x}+\frac{8}{y})=2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}+8=10+(\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y})\geqslant 10+2\times 4=18$（当$\frac{2y}{x}=\frac{8x}{y}$时取“=”）

11．（1）**当 $a=0$ 时**，$1\geqslant 0$ 恒成立

当 $a\neq 0$ 时

$ax^2+2ax+1\geqslant 0$

$\Rightarrow a(x^2+2x+1)+1-a\geqslant 0$

$\Rightarrow a(x+1)^2+1-a\geqslant 0$

当 $a>0$ 时

$\Rightarrow (x+1)^2\geqslant \frac{a-1}{a}$

$\Rightarrow \frac{a-1}{a}\leqslant 0$

$\Rightarrow a(a-1)\leqslant 0$ 且 $a\neq 0$

$\Rightarrow 0<a\leqslant 1$

当 a＜0 时

⇒（x+1）^{2}≤$\frac{a-1}{a}$（不符合题意）

综上，a∈[0，1]

另：当 a=0 时，1≥0 恒成立，因此 a=0 适合

当 a≠0 时，要使不等式 ax2+2ax+1≥0 对一切 x∈R 恒成立，! $\begin{cases} a>0 \\ 4a^2-4a\leq 0 \end{cases}$ 解得 0＜a≤1

综上，a 的取值范围是[0，1]

（2）原不等式可化为（x-a）[x-（1-a）]＞0，

当 0≤a＜$\frac{1}{2}$时，不等式的解为：x＜a，或 x＞1-a

当 a=$\frac{1}{2}$时，不等式的解为：x≠ $\frac{1}{2}$

当 $\frac{1}{2}$＜a≤1 时，不等式的解为：x＜1-a，或 x＞a

综上，当 0≤a＜$\frac{1}{2}$时，不等式的解集为：{x|x＜a，或 x＞1-a}；

当 a= $\frac{1}{2}$时，不等式的解集为：{x|x≠ $\frac{1}{2}$}；

当 $\frac{1}{2}$＜a≤1 时，不等式的解集为：{x|x＜1-a 或 x＞a }

12．方程（a-6)x² +2ax+a=0 有两个实数根,则判别式=4a^2-4a(a-6)=24a≥0,得：a≥0

因为二次项系数 a-6≠0，即 a≠6

（1）$x_1+x_2=\frac{-2a}{a-6}$，$x_1x_2=\frac{a}{a-6}$

由$-x_1+x_1x_2=4+x_2$,得：$x_1x_2=4+x_1+x_2$

代入得：$\frac{a}{a-6}=4+\frac{-2a}{a-6}$

a=4a-24-2a

a=24

故当 a=24 时,有$-x_1+x_1x_2=4+x_2$成立

2）$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{-2a}{a-6}+\frac{a}{a-6}+1=-\frac{6}{a-6}$

要使上式为负整数,则有 a-6=1，2，3 or 6

所以 a=7，8，9 or 12。