



## 数学真题汇总

(101 中学 2013) 小钱, 小孙, 小赵三个人, 每个人从事两种职业, 这些职业是: 音乐家, 理发师, 园丁, 驾驶员, 营业员和画家. 你能够从下面给定的条件中推断出他们三个人各从事哪两种职业吗?

1. 驾驶员批评音乐家头发长.
2. 园丁和音乐家经常同小钱在一起散步.
3. 画家从营业员那儿买了一只笔.
4. 驾驶员正在教画家的妹妹学驾驶.
5. 小孙借给园丁一本书.
6. 小赵在象棋比赛中赢了小孙和画家.

(理工附 2013) 一个圆把平面分成两部分, 10 个圆最多能把平面分成\_\_\_\_\_部分

(161 中学 2013) 某大楼共有 16 层, 有 15 人在第一层上了电梯, 他们分别到第 2 至 16 层, 每层一人, 而电梯只允许停一次, 可知只能使一个人满意, 其余 14 人都要步行上楼或下楼, 假设乘客下一层的不满意度为 1, 上一层的不满意度为 3, 则所有人不满意度之和最小时, 电梯应当停在第 ( )

- A. 10 层                      B. 11 层                      C. 12 层                      D. 13 层

(15 中 2013) 一个数  $n$  减去 59 是一个完全平方数, 加上 30 仍然是一个完全平方数. 求这个数

(15 中 2013) 菱形的两条对角线之和为  $L$ , 面积为  $S$ , 求边长

(161 中学 2013) 已知  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ ,  $\frac{1}{3} \leq x \leq 5$ , 求函数值域

(育才 2013) 比较  $\log_3 7$  和  $\log_3 8$  的大小关系

(101 中 2014) 一桶纯酒精倒出 8L 后, 用清水补满, 然后又倒出 4L, 再用水补满, 此时测得酒精与水之比为 18:7, 则此桶水的体积是?

(中关村中学 2014) 一个爱斯基摩人乘坐套有 5 只狗的雪橇赶往朋友家. 在途中第一天, 雪橇以爱斯基摩人规定的速度全速行驶. 一天后, 有两只狗扯断了缰绳和狼群一起逃走了. 于是剩下的路程爱斯基摩人只好用 3 只狗拖着雪橇, 前进的速度是原来的五分之三. 这使他到达目的地的时间比预计的时间迟到了 2 天. 事后, 爱斯基摩人说: “逃跑的狗如果能再拖走 60 千米, 那我就能比预计时间迟一天到.” 那么, 爱斯基摩人总共走了\_\_\_\_\_千米路程.

(北师大附中良乡 2014) 小华说: 是我做的值日

小林说: 不是我做的值日

小美说: 是小华做的值日

他们中一人说了真话, 是谁做的值日?

(北师大附中 2014) 平面上有 6 个点, 其中任意三点不共线, 任意四点不共面, 把任意线段染成红色或蓝色, 求证: 一定存在一个三边都相同颜色的三角形.

(15 中 2014) 一段绳子长  $2R$ , 以绳子圈三角形, 最大面积多少, 圈四边形, 最大面积? 圈圆形, 最大面积?

(东直门 2014) 画出  $y = x^3$  的图像

(九中 2014) 甲和乙两位同学骑着自行车沿一条笔直的马路相对而行, 甲骑车的速度是 15km/h, 而乙骑车的速度是 10km/h. 当两人相距 25km 时, 突然一只小蜜蜂闯入了他们的行车路线, 并碰到了甲的前车轮, 受惊的蜜蜂掉头便跑, 逃命的速度是 30km/h, 方向却与甲的行车方向相同, 所以不久后它必然又碰到了乙的前车轮, 吓傻了的小蜜蜂立即回头径直朝甲飞去, 速度的大小不变……就这样, 小蜜蜂为了逃命来回奔波于甲、乙之间, 速度大小不变. 可是直到最后它也没有能逃脱悲惨的命运——在甲和乙相聚时被车轮挤扁了. 伤感之余我们有一个问题: 从闯祸开始到被车轮挤扁, 小蜜蜂一共飞行



了多远？如果规定了甲的行驶方向为正方向，那么最后小蜜蜂的位移是多少？你能一眼看出来吗？

## 人大附中数学分班考试真题（部分）

有连续  $k$  个数  $(k \in \mathbf{N}^*)$ ，和为  $3^{11}$ ，则  $k$  的最小值为.

面积为  $3\sqrt{15}$  的三角形的两条中线长分别为 3 和 6，则第三条中线的长为.

已知一个三位数  $\overline{abc}$ ，该数平方后的后三位也是  $\overline{abc}$ ，则所有满足条件的  $\overline{abc}$  之和为.

$x + |y| = 7$ ， $|x| + y = 5$ ，则  $xy =$ .

若  $x^3 + y^3 = 2$ ，则  $x + y$  的最大值为.

若  $x + y + z = 3$ ，则  $\frac{(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)}{(x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3} =$ .

已知实数  $x, y, z$  满足  $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ y + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{x} = \frac{3}{7} \end{cases}$ ，则  $xyz =$ .

$1.5, \frac{3}{2}, |-2|, 2$  形成一个集合，则集合中的元素有个.

一菱形的边长为  $a$ ，对角线长之和为  $l$ ，则面积为.

函数  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ ， $\frac{1}{3} \leq x \leq 5$  的值域.



## 数学真题汇总参考答案与解析

(101 中学 2013) 小赵是驾驶员和园丁, 小孙是音乐家和营业员, 小钱是画家和理发师

【解析】

1. 由 (2) 知小钱不是园丁和音乐家
2. 由 (5) 知小孙不是园丁, 故小赵是园丁
3. 由 (6) 知小赵不是画家, 小孙不是画家, 故小钱是画家, 结合 2 可知小孙是音乐家
4. 结合 3 与 (1) 知, 小赵是驾驶员, 故小赵不是营业员, 不是理发师
5. 因为小赵是园丁和驾驶员故不是理发师和营业员, 且因为小钱是画家结合 (3), 小孙是营业员
6. 小孙是营业员和音乐家, 则小孙不是理发师, 故小钱是理发师

如图所示:

	小钱	小孙	小赵
音乐家	×	√	×
理发师	√	×	×
园丁	×	×	√
驾驶员	×	×	√
营业员	×	√	×
画家	√	×	×

(理工附 2013) 92

【解析】第一个圆将平面分成 2 部分, 第二个圆与第一个圆相交多出两个交点, 多了 2 条弧, 每多一条弧分得的部分数就加 1, 故二个圆分为 4 部分; 第三个圆与前两个圆相交多了 4 个交点, 多了四条弧, 多了 4 部分, 故 3 个圆将平面分成 8 部分。以此类推, 每多出一个圆就比之前多出  $2 \times$  圆的个数个交点, 多出  $2 \times$  圆的个数个部分。到 10 个圆将平面分割部分具体算式为  $2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 10 = 92$

(161 中学 2013) D

【解析】设不满意度为  $y$ , 则  $y = (1 + 2 + \dots + x - 2) + 3 \times (1 + 2 + \dots + 16 - x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{3(17-x)(16-x)}{2} = 2x^2 - 51x + 408$ , 因为  $x$  取正整数, 所以  $x=13$  时,  $y$  最小

(15 中 2013) 1995

【解析】设  $n - 59 = x^2$ ,  $n + 30 = y^2$  则有  $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = -89$  因为  $-89$  为质数故  $x+y=89$ ,  $x-y=-1$ , 故  $x=44$ ,  $y=45$ , 故  $n=1995$

(15 中 2013)  $\frac{\sqrt{L^2 - S}}{2}$

【解析】设菱形两条对角线分别为  $x$  和  $y$ , 则有  $\begin{cases} x+y=L \\ xy=2S \end{cases}$ , 设边长为  $z$ , 运用勾股定理有

$$z^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - 2xy] = \frac{1}{4}(L^2 - S) \text{ 故解得 } z = \frac{\sqrt{L^2 - S}}{2}$$



(161 中学 2013)  $[-1, 3]$

【解析】令  $t = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{5} \leq t \leq 3$ , 则原式可化为  $y = t^2 - 2t$ , 根据图象法求值域为  $[-1, 3]$

(育才 2013)  $\log_3 7 < \log_3 8$

【解析】根据指数函数单调性可判断  $\log_3 7 < \log_3 8$

(101 中 2014) 40

【解析】设桶的体积为  $x$ , 则第一次补满后: 水的体积  $8L$ , 酒精的体积  $(x-8)L$ ; 第二次补满后: 水

的体积  $\left(12 - \frac{32}{x}\right)L$ , 酒精的体积  $\left(x - 8 - \frac{4x-32}{x}\right)L$ , 由题意得  $\frac{12 - \frac{32}{x}}{x - 8 - \frac{4x-32}{x}} = \frac{7}{18}$

解得  $x_1 = 40$ ,  $x_2 = \frac{20}{7}$  (舍去)

(中关村中学 2014) 160

【解析】设 5 只狗速度为  $x$  千米每天, 总路程为  $s$ , 走了  $t$  天。由题意得  $60 \div \left(\frac{3}{5}x\right) - 60 \div x = 1$ , 解得  $x = 40$ ;

$40 + \frac{3}{5} \times 40 \cdot (t+1) = 40t$ , 解得  $t = 4$ , 故一共走了 160 千米

(中关村中学 2014) (题干不全)

(北师大附中良乡 2014) 小美

【解析】如果小华说的是真话, 小林小美说的也都是真话, 与题意不符

如果小林说的是真话, 小美小华说的是假话, 那么就是小美做的值日, 符合题意

如果小美说的是真话, 那么小华说的也是真相, 与题意不符

(北师大附中 2014)

【解析】设  $A, B, C, D, E, F$  为所给 6 点, 则以  $A$  为端点的 5 条线段至少有 3 条颜色相同。设这三条为  $AB, AC, AD$  且均为红色。 $\triangle BCD$  的三边, 若  $BC$  为红色, 则出现同色三角形, 若三边都不是红色, 则  $\triangle BCD$  为蓝色三角形, 故原题得证

(15 中 2014)

【解析】证明: 设  $S$  为三角形面积,  $a, b, c$  为三角形三边长, 由海伦公式得

$4S = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$ , 记  $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$ ,

$\therefore \left[\frac{(x+y+z)}{3}\right]^3 \geq xyz$ , 当且仅当  $x = y = z$  时取等号,

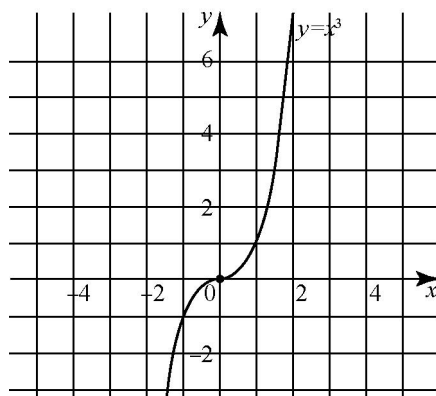
$\therefore \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$\therefore S \leq \frac{(a+b+c)^3}{12\sqrt{3}}$ , 当且仅当  $x = y = z = \frac{a+b+c}{3}$  时取等号。



(东直门 2014)

【解析】



(九中 2014) 位移是 15km，一共飞了 30km

【解析】甲乙相遇时间为 1h，故此段时间内小蜜蜂一直在飞，路程为 30km，位移大小即为小蜜蜂第一次碰到甲到相遇地点距离，即为 15km

(四十四中 2014)  $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{10}$

【解析】根据幂函数单调性有  $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{10}$ ；根据指数函数单调性有  $\sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{10}$ ；故  $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{10}$

### 人大附中数学分班考试真题（部分）

有连续  $k$  个数 ( $k \in \mathbb{N}^*$ )，和为  $3^{11}$ ，则  $k$  的最小值为 1.

【解析】设这  $k$  个数为  $x+1, x+2, \dots, x+k$  由题意得  $\frac{(x+1+x+k)k}{2} = 3^{11}$  即为  $k(2x+k+1) = 2 \times 3^{11}$ ， $k$  最

小，则  $(2x+k+1)$  最大， $k=2$  时符合题意

面积为  $3\sqrt{15}$  的三角形的两条中线长分别为 3 和 6，则第三条中线的长为  $3\sqrt{6}$ .

【解析】 $6S = 3\sqrt{15}$ ， $S = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ， $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \angle AOB = \sqrt{15}$

$$\sin \angle AOB = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos \angle AOB = \frac{1}{4}$$

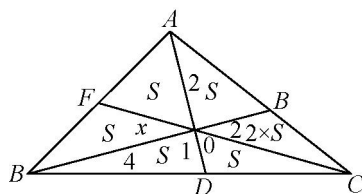
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{4} = 16$$

$$AB = 4, \quad AF = 2, \quad S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AF \cdot \sin \angle OAF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \angle OAF = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\sin \angle OAF = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos \angle OAF = \frac{1}{4}$$

$$OF^2 = OA^2 + AF^2 - 2 \cdot OA \cdot OF \cos \angle OAF = 6,$$

$$OF = \sqrt{6}, \quad CF = 3\sqrt{6}$$



已知一个三位数  $\overline{abc}$ ，该数平方后的后三位也是  $\overline{abc}$ ，则所有满足条件的  $\overline{abc}$  之和为 625

【解析】个位数平方还是个位数的只有 1、5、6。

$$(100a+10b+c)^2=10000a^2+100b^2+c^2+2000ab+20bc+200ac=10000a^2+2000ab+100(b^2+2ac)+20bc+c^2$$

$c=1$  时， $a=b=0$  不成立；

$c=5$ ， $b=2$ ， $a=6$  符合题意

$c=6$ ， $b=3$  不符合题意

$x+|y|=7$ ， $|x|+y=5$ ，则  $xy=-6$ 。

【解析】将两式分别平方后作差得  $x|y|-|x|y=12$ ，若  $x$  为负则作差后小于 0；所以  $x$  为正， $y$  为负

故  $xy=-6$

若  $x^3+y^3=2$ ，则  $x+y$  的最大值为 2。

【解析】运用基本不等式将原式放缩得

$$2=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]\geq(x+y)\left[(x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}(x+y)^3$$

故  $x+y$  的最大值为 2

若  $x+y+z=3$ ，则  $\frac{(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)}{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}=\frac{1}{3}$ 。

【解析】设  $x-1=a$ ， $y-1=b$ ， $z-1=c$ ， $a+b+c=0$

$$\text{故原式可化为 } \frac{abc}{a^3+b^3+c^3}=\frac{-ab(a+b)}{a^3+b^3-(a+b)^3}=\frac{-ab(a+b)}{-3ab(a+b)}=\frac{1}{3}$$

已知实数  $x, y, z$  满足  $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=4 \\ y+\frac{1}{z}=1 \\ z+\frac{1}{x}=\frac{3}{7} \end{cases}$ ，则  $xyz=1$ 。

【解析】 $4=x+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=x+\frac{z}{z-1}=x+\frac{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-1}=x+\frac{7x-3}{4x-3}$

解得  $x=\frac{3}{2}$ ，代入解得  $xyz=1$



1.5,  $\frac{3}{2}$ ,  $|-2|$ , 2 形成一个集合, 则集合中的元素有 2 个.

一菱形的边长为  $a$ , 对角线长之和为  $l$ , 则面积为.

【解析】设  $2x, 2y$  分别为两个对角线的长度, 依据题意  $x^2 + y^2 = a^2, 2x + 2y = l$ , 则经过整理可得

$(x + y)^2 - 2xy = a^2$ , 则  $2xy = \frac{l^2}{4} - a^2$ , 因为面积为  $\frac{4xy}{2} = 2xy$  所以面积为  $\frac{l^2}{4} - a^2$ .

函数  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ ,  $\frac{1}{3} \leq x \leq 5$  的值域.

【解析】令  $t = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{1}{5} \leq t \leq 3$ , 则原式可化为  $y = t^2 - 2t$ , 根据图象法求值域为  $[-1, 3]$

