数值计算原理实习作业

1. 令 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,对 $f(x)$ 在区间[-5,5]进行如下插值或者逼近：

（1）令插值节点为等距节点：-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、5，在这些节点处对 $f(x)$ 进行拉格朗日插值；

（2）令插值节点为区间[-5,5]上的 11 次切比雪夫多项式的零点，在这些节点处对 $f(x)$ 进行拉格朗日插值；

（3）令插值节点为等距节点：-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、5，在这些节点处对 $f(x)$ 进行分段线性插值；

（4）令插值节点为等距节点：-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、5，在这些节点处对 $f(x)$ 进行三次样条插值，插值函数为 $S(x)$，其中边界条件为第一类边界条件： $S'(\pm5)=f'(\pm5)$；

（5）求 $f(x)$ 在区间区间[-5,5]上的四次最佳平方逼近多项式（权函数为 1）；

（6）考虑等距节点：-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、5，求 $f(x)$ 在这些节点上的四次最小二乘拟合多项式（权重均为 1）。

要求：提交实验报告，报告包含

（a）算法描述；

（b）原函数、插值或逼近函数的图像展示；

（c）误差计算（算法为区间[-5,5]上 101 个等距分布 $z_j=-5+\dfrac{1}{10}j, j=0,1,\cdots,100$ 处的误差绝对值的平均值）；

（d）可执行的程序作为附件（代码拷贝附在报告最后，同时单独附一个可执行程序的文件夹）。

2. 用以下积分公式计算积分$\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+x^2}dx$：

（1）将区间[-2,2]等分 20 份，用复合梯形公式计算；

（2）将区间[-2,2]等分 10 份，用复合辛普森公式计算（每个小区间需加中点）；

（3）令$T_0(h)=T(h), h=\frac{2-(-2)}{10}=\frac{2}{5}$，其中$T(h)$为将区间[-2,2]等分为 10 份的复合梯形公式，用龙贝格积分算法加速一次，计算$T_1(h)$（P112 公式（4.9））；

（4）令$T_0(h)=T(h), h=\frac{2-(-2)}{5}=\frac{4}{5}$，其中$T(h)$为将区间[-2,2]等分为 5 份的复合梯形公式，用龙贝格积分算法加速两次，计算$T_2(h)$（P112 公式（4.9））；

（5）将区间[-2,2]等分 10 份，用复合的 2 点高斯公式计算；

（6）将区间[-2,2]等分 5 份，用复合的 4 点高斯公式计算。

要求：提交实验报告，报告包含

（a）算法描述；

（b）误差计算；

（c）误差比较与评价；

（d）可执行的程序作为附件（代码拷贝附在报告最后，同时单独附一个可执行程序的文件夹）。

选做题（可不做）：将区间[-2,2] n 等分，h 为每个小区间的长度，即$h=\frac{4}{n}$，用复合梯形公式、复合辛普森公式、复合 3 点高斯公式计算上面的积分。

（a）理论上，给出这些积分公式误差的收敛阶$O(h^{\alpha})$；

（b）取$h=\frac{4}{n}$，$n=2^k, k=2,3,4,5,6$，数值验证上述误差收敛阶$O(h^{\alpha})$（收敛阶$O(h^{\alpha})$中的阶数α可用$\frac{\log(e_k)-\log(e_{k-1})}{\log(h_k)-\log(h_{k-1})}$验证，其中$h_k, e_k$分别为$k=2,3,4,5,6$时对应的区间长度和积分误差）