3. 均差与牛顿插值：

（一）问题描述与构造：

$\{l_0, \cdots, l_n\}$

$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, \cdots, n$

$\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$

$P_0 = a_0$ 插值 $P_0(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$

$P_1 = a_0 + a_1(x-x_0)$ 在 x_0, x_1 插值

已知 $a_0 = f(x_0)$. 代入 x_1, 得 $a_1 = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$P_2 = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0)}_{P_1(x)} + a_2(x-x_0)(x-x_1)$ 插值 x_0, x_1, x_2

$a_2 = \dfrac{P_2(x_2)-P_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$

$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$ 插值 $x_0, \cdots x_n$

$a_n = \dfrac{P_n(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$

$\cdots\cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

3. 均差与牛顿插值：

（二）（定义：牛顿插值多项式）：

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

称为 n 阶牛顿插值多项式

$a_k \quad k=0, \cdots, n$ 牛——系数

"a_k" 有无更好"算法"

$L_n(x) = P_n(x)$

注意1：牛顿插值与拉格朗日插值区别：基底不同

$L: \{l_0(x) \cdots l_n(x)\}$

$N: \{1, (x-x_0), \cdots, (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$

注意2：牛顿插值的思想：后进来插值点不影响前面的点

"在线"

牛顿插值的余项：$f(x) - P_n(x) = f(x) - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}$

3. 均差与牛顿插值：（牛顿插值系数a_k如何求？）

（三）（定义：均差）： $f[x_0, x_k] = \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 斜率

f 在 x_0，x_k 一阶均差

$f[x_0, x_1, x_k] = \dfrac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$ 二阶均差

一般地 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \dfrac{f[x_0, \cdots x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$

f K阶均差

由均差定义： $\underline{a_1} = f[x_0, x_1]$

$\underline{a_2} = f[x_0, x_1, x_2]$

可证 $\underline{a_n = f[x_0, x_1, \cdots x_n]}$??

3. 均差与牛顿插值：

（四）牛顿插值的系数与插值余项的均差形式：

（a）插值系数的获得：$\forall x\in[a,b]$ 于 $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 一起作均差

$\underbrace{x, x_0, x_1, \cdots, x_n}_{n+2}$

x 与 x_0 $\quad f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$

x 与 x_0, x_1 $\quad f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$

$x, x_0, \cdots, x_{n-1}$ $\quad f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n)$

从下往上依次代入：

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$+f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

（b）余项的均差形式：①n次多项式 ②插值 x_i $R_n(x_i)=0$

$P_n(x)$ 就是N插值多项式 ③基底 $\{1,(x-x_0),\cdots(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$

$a_k=f[x_0,\cdots,x_k]$

均差形式 $R_n=f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

3. 均差与牛顿插值：

（五）均差性质：

归纳法

(1) $f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$

对称性：$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_2,x_1,x_0]$

(2) $f[x_0,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$

(3) $f[x,x_0\cdots x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，$\Longrightarrow$ $\underbrace{f[x_0,\cdots,x_n]}_{n\text{阶}}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

n+1 阶

a_n

11:27 回来

3. 均差与牛顿插值：

（六）均差表：

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶	四阶
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,\cdots,x_4]$

3. 均差与牛顿插值：

（例）：

四阶N插值. 并估计余项

0.4	0.41075					
0.55	0.57815	1.1160				
0.65	0.69675		0.2800			
0.8	0.88811			0.19733		
0.9	1.02652				0.03134	
1.05	1.25382					-0.00012

$P_4(x) = \_\ \_\ \_\ \_\ \ldots$

$P_4(0.596) \approx 0.63192$

$|R_4(x)| \le |f[x_0, \cdots x_5] W_5(0.596)| \le 3.63 \times 10^{-9}$

≈ -0.00012

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（一）重节点插值、泰勒插值：

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_1, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

同理 $$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f''(x_0)}{2!} = f[x_0, x_0, x_0]$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_n \to x_0}} f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = f[\underbrace{x_0, \cdots x_0}_{n+1}]$$

重节点均差

在牛顿插值中令 $x_1, \cdots, x_n \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

泰勒公式

（定义：埃尔米特插值）：插值导数的插值公式称为 Hermite 插值

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$, $f'(x_1)$

（a）问题描述：找 $P \in P_3$. 使 $P(x_i)=f(x_i)$. $P'(x_1)=f'(x_1)$

$i=0,1,2$ Hermite

（b）构造：(1) 插 $f(x_i)$ $i=0,1,2$

(2) 插 $f'(x_1)$

$$P_n = \underline{f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}$$

$$+ A\,\underline{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

A. $P_n'(x_1)=f'(x_1)$ 求出

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0,x_1] - (x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：

（c）构造（重节点牛顿插值）： f 在 x_0, x_1, x_2, x_1 牛插值

$$P(x) = f[x_1] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

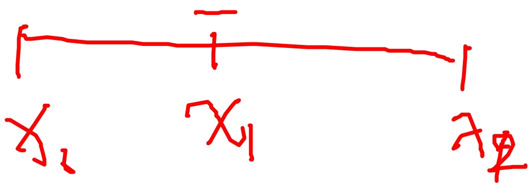
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_1](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f[x_1, x_1] = f'(x_1)$$

$$R(x) = f[x, x_0, x_1, x_2, x_1](x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

可证 P 满足要求

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$



4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：

（d）误差：

已求

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（三）典型H插值二： $x_k \quad x_{k+1}$，求 $H_3(x)$ 也 P_3 足

（a）问题描述：

$H_3(x_k)=f(x_k)=y_k$ 已知 $H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1})=y_{k+1}$

$x_k \quad x_{k+1}$

$H_3'(x_k)=f'(x_k)=m_k \quad H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})=m_{k+1}$

（b）构造（基函数法）：

$$H_3(x)=\alpha_k(x)y_k+\alpha_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$$

其中 α_k、α_{k+1}、β_k、β_{k+1} 三次多项式 满足

$$\begin{cases}\alpha_k(x_k)=1 & \underline{\alpha_k(x_{k+1})=0}, & \alpha_k'(x_k)=\underline{\alpha_k'(x_{k+1})=0}\\ \alpha_{k+1}(x_k)=0 & \alpha_{k+1}(x_{k+1})=1 & \alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0\\ \beta_k(x_k)=\beta_k(x_{k+1})=0 & \beta_k'(x_k)=1 & \beta_k'(x_{k+1})=0\\ \beta_{k+1}(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=0 & \beta_k'(x_k)=0 & \beta_{k+1}'(x_{k+1})=1\end{cases}$$

$$\alpha_k(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$ a, b 待定 $a=-\dfrac{2}{x_k-x_{k+1}}$，$b=1+\dfrac{2x_k}{x_k-x_{k+1}}$

$$\alpha_k(x)=\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（三）典型H插值二：

同理：$\alpha_{k+1}(x)=\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$

$\beta_k=(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$ $\beta_{k+1}=(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$

可知 $H_3(x)$ 满足插值条件

作业 13 15

（c）误差估计：

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（四）推广：