概率论

第四章: 随机变量的数字特征

陈国廷

2023 年秋季学期

哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

第四章: 随机变量的数字特征

例 1.1

设一个学生一个学期的数学分析, 高等代数, 英语, 历史的成绩分别为

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

例 1.1

设一个学生一个学期的数学分析, 高等代数, 英语, 历史的成绩分别为

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

其平均成绩可以是 $\dfrac{c_1+c_2+c_3+c_4}{4}$.

例 1.1

设一个学生一个学期的数学分析, 高等代数, 英语, 历史的成绩分别为

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

其平均成绩可以是 $\dfrac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}$.
由于各科目的学时数 (或学分) 不同, 所以这个平均值并不能反应学生的总体成绩. 考虑学时数的加权平均更能反应学生的总体成绩.

例 1.1

设一个学生一个学期的数学分析, 高等代数, 英语, 历史的成绩分别为

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

其平均成绩可以是 $\dfrac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4}$.

由于各科目的学时数 (或学分) 不同, 所以这个平均值并不能反应学生的总体成绩. 考虑学时数的加权平均更能反应学生的总体成绩.

所以, 如果数学分析, 高等代数, 英语, 历史的学分分别为 $5, 4, 3, 2$, 那么加权平均成绩

例 1.1

设一个学生一个学期的数学分析, 高等代数, 英语, 历史的成绩分别为

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

其平均成绩可以是 $\dfrac{c_1+c_2+c_3+c_4}{4}$.

由于各科目的学时数 (或学分) 不同, 所以这个平均值并不能反应学生的总体成绩. 考虑学时数的加权平均更能反应学生的总体成绩.

所以, 如果数学分析, 高等代数, 英语, 历史的学分分别为 $5,4,3,2$, 那么加权平均成绩

$$\frac{5c_1+4c_2+3c_3+2c_4}{14}=\frac{5}{14}c_1+\frac{4}{14}c_2+\frac{3}{14}c_3+\frac{2}{14}c_4$$

就更准确.

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i = 1, 2, \cdots, k$.

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k}a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去, 全年级总人数为 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$,

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i = 1, 2, \cdots, k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去, 全年级总人数为 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$,

总成绩为

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k}a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去, 全年级总人数为 $n=\sum\limits_{i=1}^{k}n_i$,

总成绩为

$$t=\sum_{i=1}^{k}a_in_i,$$

所以平均成绩

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k}a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去，全年级总人数为 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$,

总成绩为

$$t=\sum_{i=1}^{k}a_in_i,$$

所以平均成绩

$$A=\frac{t}{n}$$

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 $n_i,\ i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k}a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去，全年级总人数为 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$,

总成绩为

$$t=\sum_{i=1}^{k}a_in_i,$$

所以平均成绩

$$A=\frac{t}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}a_in_i$$

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 n_i, $i=1,2,\cdots,k$. 设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去，全年级总人数为 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$,

总成绩为

$$t=\sum_{i=1}^{k} a_i n_i,$$

所以平均成绩

$$A=\frac{t}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i n_i=\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{n_i}{n}$$

例 1.2

设一个年级共有 k 个班，每班的人数分别为 $n_i,\ i=1,2,\cdots,k$.
设第 i 班的平均成绩为 a_i. 考虑年级平均成绩.

解. 可以用平均值

$$a=\frac{\sum_{i=1}^k a_i}{k}.$$

如果把每班的人数考虑进去，全年级总人数为 $n=\sum\limits_{i=1}^k n_i$,

总成绩为

$$t=\sum_{i=1}^k a_i n_i,$$

所以平均成绩

$$A=\frac{t}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k a_i n_i=\sum_{i=1}^k a_i\frac{n_i}{n}$$

也是一种加权平均.

例 1.3

一个射击手, 进行 N 次射击, 其中 n_0 次射得 *0* 环, n_1 次得 *1* 环, n_2 次得 *2* 环, $\cdots$, n_{10} 次得 10 环,

例 1.3

一个射击手, 进行 N 次射击, 其中 n_0 次射得 *0* 环, n_1 次得 *1* 环, n_2 次得 *2* 环, $\cdots$, n_{10} 次得 10 环, $n_0 + n_1 + \cdots + n_{10} = N$,

例 1.3

一个射击手, 进行 N 次射击, 其中 n_0 次射得 *0* 环, n_1 次得 *1* 环, n_2 次得 *2* 环, $\cdots$, n_{10} 次得 10 环, $n_0+n_1+\cdots+n_{10}=N$,
那么他射得的总环数为 $S=0n_0+n_1+2n_2+\cdots 10n_{10}$,

例 1.3

一个射击手, 进行 N 次射击, 其中 n_0 次射得 0 环, n_1 次得 1 环, n_2 次得 2 环, $\cdots$, n_{10} 次得 10 环, $n_0+n_1+\cdots+n_{10}=N$,
那么他射得的总环数为 $S=0n_0+n_1+2n_2+\cdots 10n_{10}$,
这 N 次射击平均每次射得的环数为

$$\frac{S}{N}=\frac{0n_0+1n_1+2n_2+\cdots 10n_{10}}{N}=\sum_{k=0}^{10} k\cdot\frac{n_k}{N}.$$

如果以 X 记录其打靶的环数.

如果以 X 记录其打靶的环数. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

如果以 X 记录其打靶的环数. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.
其概率分布是

如果以 X 记录其打靶的环数. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.
其概率分布是

$$P(X = k) = p_k = \frac{n_k}{N}, \ k = 0, 1, \cdots, 10$$

如果以 X 记录其打靶的环数. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.
其概率分布是

$$P(X = k) = p_k = \frac{n_k}{N}, \ \ k = 0, 1, \cdots, 10$$

那么他在下一场打靶比赛中, 预期所得平均环数为

如果以 X 记录其打靶的环数. X 的取值范围是 $\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.
其概率分布是

$$P(X = k) = p_k = \frac{n_k}{N}, \;\; k = 0, 1, \cdots, 10$$

那么他在下一场打靶比赛中, 预期所得平均环数为

$$\sum_{i=0}^{10} kp_k.$$

从总体上看一个随机变量, 有两个主要的数字特征.

从总体上看一个随机变量, 有两个主要的数字特征.

第一个是总体平均值,

从总体上看一个随机变量, 有两个主要的数字特征.

第一个是总体平均值,
第二个是总体偏离平均值的程度.

从总体上看一个随机变量, 有两个主要的数字特征.

第一个是总体平均值,
第二个是总体偏离平均值的程度.

平均值—数学期望; 总体偏离平均值的程度—方差

从总体上看一个随机变量, 有两个主要的数字特征.

第一个是总体平均值,
第二个是总体偏离平均值的程度.

平均值—数学期望; 总体偏离平均值的程度—方差

把前面的例子抽象化, 就得到数学期望的定义.

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i,\ \ i = 1, 2, \cdots$$

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \ \ i = 1, 2, \cdots$$

若级数

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i,\ \ i = 1, 2, \cdots$$

若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty,$$

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \ \ i = 1, 2, \cdots$$

若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty,$$

则定义

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \;\; i = 1, 2, \cdots$$

若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty,$$

则定义

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

定义 1.1

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i,\ \ i = 1, 2, \cdots$$

若级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty,$$

则定义

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

称为 X 的数学期望.

注: 在随机变量 X 的分布律中

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$

注: 在随机变量 X 的分布律中

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

对 x_i 的编号是人为的, 所以要求级数绝对收敛,

注: 在随机变量 X 的分布律中

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

对 x_i 的编号是人为的, 所以要求级数绝对收敛, 否则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$$

是否收敛, 以及其和的值都将与编号有关.

注: 在随机变量 X 的分布律中

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

对 x_i 的编号是人为的, 所以要求级数绝对收敛,
否则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$$

是否收敛, 以及其和的值都将与编号有关,
因此无法定义期望.

特别地, 设 A 为事件.

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e)$$

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e) = \mathbf{1}_A(e)$$

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e)=\mathbf{1}_A(e)=\begin{cases}1, & e\in A\\ 0, & e\notin A\end{cases}$$

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e) = \mathbf{1}_A(e) = \begin{cases} 1, & e \in A \\ 0, & e \notin A \end{cases}$$

则

$$P(X = 1) = P(A),$$

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e) = \mathbf{1}_A(e) = \begin{cases} 1, & e \in A \\ 0, & e \notin A \end{cases}$$

则

$$P(X=1) = P(A),$$
$$P(X=0) = 1 - P(A),$$

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e) = \mathbf{1}_A(e) = \begin{cases} 1, & e \in A \\ 0, & e \notin A \end{cases}$$

则

$$P(X = 1) = P(A),$$
$$P(X = 0) = 1 - P(A),$$

所以

特别地, 设 A 为事件. 定义随机变量 X 如下

$$X(e) = \mathbf{1}_A(e) = \begin{cases} 1, & e \in A \\ 0, & e \notin A \end{cases}$$

则

$$P(X=1) = P(A),$$
$$P(X=0) = 1 - P(A),$$

所以

$$E(X) = E(\mathbf{1}_A) = P(A).$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

设 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$P(x_i < X \leq x_{i+1})$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$P(x_i < X \leq x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \leq x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

设 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化：取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \leq x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

$$E(X)$$

设 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化：取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \le x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

$$E(X) \approx \sum_i x_i P(x_i < X \le x_{i+1})$$

设 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化：取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \leq x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

$$E(X) \approx \sum_i x_i P(x_i < X \leq x_{i+1}) \approx \sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \leq x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &\approx \sum_i x_i P(x_i < X \leq x_{i+1}) \approx \sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \end{aligned}$$

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$.

应该怎么定义 $E(X)$?

对 x 进行离散化: 取直线的划分

$$\cdots < x_{-2} < x_{-1} < 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

因为

$$\begin{aligned} P(x_i < X \leq x_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &\approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &\approx \sum_i x_i P(x_i < X \leq x_{i+1}) \approx \sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \end{aligned}$$

当 $\max_i \Delta x_i \to 0$ 时, 约等于变成严格等于.

所以我们得到定义：

定义 1.2

若

所以我们得到定义：

定义 1.2

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

所以我们得到定义：

定义 1.2

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

则定义

所以我们得到定义：

定义 1.2

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

则定义

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

所以我们得到定义：

定义 1.2

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$$

则定义

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

称为 X 的数学期望，

所以我们得到定义:

定义 1.2

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

则定义

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

称为 X 的数学期望, 简称期望, 也称为平均值或均值.

例 1.4

按规定, 某车站每天 $8:00 \sim 9:00$, $9:00 \sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间相互独立.

例 1.4

按规定, 某车站每天 $8:00 \sim 9:00$, $9:00 \sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间相互独立. 其规律是:

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

例 1.4

按规定, 某车站每天 $8:00\sim 9:00$, $9:00\sim 10:00$ 都恰有一辆客车到站, 但到站的时刻是随机的, 且两者到站的时间相互独立. 其规律是:

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

一旅客 $8:20$ 到车站, 求他候车时间的数学期望.

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1=$ 候车时间 10 分钟,

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟,

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 $A_3 =$ 候车时间 50 分钟,

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1=$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1)=\frac{3}{6}$;
- 记 $A_2=$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2)=\frac{2}{6}$;
- 记 $A_3=$ 候车时间 50 分钟, 则 $A_3=$“第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:10$ 到”.

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 $A_3 =$ 候车时间 50 分钟, 则 $A_3 =$"第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 10 到". 运用独立性, 得 $P(A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$;

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1=$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1)=\frac{3}{6}$;
- 记 $A_2=$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2)=\frac{2}{6}$;
- 记 $A_3=$ 候车时间 50 分钟, 则 $A_3=$"第一趟车已在 8:10 到过, 且第二辆车在 9:10 到". 运用独立性, 得 $P(A_3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$;
- 记 $A_4=$ 候车时间 70 分钟,

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 A_1 = 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 A_2 = 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 A_3 = 候车时间 50 分钟, 则
  A_3 =“第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 10 到”. 运用独立性, 得 $P(A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$;
- 记 A_4 = 候车时间 70 分钟, 则
  A_4 =“第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 30 到”.

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1=$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1)=\frac{3}{6}$;
- 记 $A_2=$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2)=\frac{2}{6}$;
- 记 $A_3=$ 候车时间 50 分钟, 则
  $A_3=$"第一趟车已在 8:10 到过, 且第二辆车在 9:10 到". 运用独立性, 得 $P(A_3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$;
- 记 $A_4=$ 候车时间 70 分钟, 则
  $A_4=$"第一趟车已在 8:10 到过, 且第二辆车在 9:30 到". 运用独立性, 得 $P(A_4)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$;

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 $A_3 =$ 候车时间 50 分钟, 则
  $A_3 =$"第一趟车已在 8:10 到过, 且第二辆车在 9:10 到". 运用独立性, 得 $P(A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$;
- 记 $A_4 =$ 候车时间 70 分钟, 则
  $A_4 =$"第一趟车已在 8:10 到过, 且第二辆车在 9:30 到". 运用独立性, 得 $P(A_4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$;
- 记 $A_5 =$ 候车时间 90 分钟,

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 $A_3 =$ 候车时间 50 分钟, 则
  $A_3 =$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:10$ 到". 运用独立性, 得 $P(A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$;
- 记 $A_4 =$ 候车时间 70 分钟, 则
  $A_4 =$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:30$ 到". 运用独立性, 得 $P(A_4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$;
- 记 $A_5 =$ 候车时间 90 分钟, 则
  $A_5=$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:50$ 到".

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1 =$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1) = \frac{3}{6}$;
- 记 $A_2 =$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2) = \frac{2}{6}$;
- 记 $A_3 =$ 候车时间 50 分钟, 则
  $A_3 =$"第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 10 到". 运用独立性, 得 $P(A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$;
- 记 $A_4 =$ 候车时间 70 分钟, 则
  $A_4 =$"第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 30 到". 运用独立性, 得 $P(A_4) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6}$;
- 记 $A_5 =$ 候车时间 90 分钟, 则
  $A_5 =$"第一趟车已在 8 : 10 到过, 且第二辆车在 9 : 50 到". 运用独立性, 得

解. 我们需要先求出他候车时间 X 的概率分布.

- 记 $A_1=$ 候车时间 10 分钟, 则 $P(A_1)=\frac{3}{6}$;
- 记 $A_2=$ 候车时间 30 分钟, 则 $P(A_2)=\frac{2}{6}$;
- 记 $A_3=$ 候车时间 50 分钟, 则
  $A_3=$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:10$ 到". 运用独立性, 得 $P(A_3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$;
- 记 $A_4=$ 候车时间 70 分钟, 则
  $A_4=$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:30$ 到". 运用独立性, 得 $P(A_4)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$;
- 记 $A_5=$ 候车时间 90 分钟, 则
  $A_5=$"第一趟车已在 $8:10$ 到过, 且第二辆车在 $9:50$ 到". 运用独立性, 得 $P(A_5)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$.

所以 X 的分布律如下

所以 X 的分布律如下

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

所以 X 的分布律如下

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

因此

所以 X 的分布律如下

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

因此

$$E(X)$$

所以 X 的分布律如下

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

因此

$$E(X) = 10\cdot\frac{1}{2} + 30\cdot\frac{1}{3} + 50\cdot\frac{1}{36} + 70\cdot\frac{1}{12} + 90\cdot\frac{1}{18}$$

$$= 27.22(\text{分钟}).$$

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.
记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$X \leq 1$,　　一台付款 1500 元;

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$X \leq 1,$ 一台付款 1500 元;

$1 < X \leq 2,$ 一台付款 2000 元;

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$X \leq 1$, 一台付款 1500 元;

$1 < X \leq 2$, 一台付款 2000 元;

$2 < X \leq 3$, 一台付款 2500 元;

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$X \le 1$, 一台付款 1500 元;

$1 < X \le 2$, 一台付款 2000 元;

$2 < X \le 3$, 一台付款 2500 元;

$X > 3$, 一台付款 3000 元.

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 *X*(以年记). 规定:

$X \le 1$,	一台付款 *1500* 元;
$1 < X \le 2$,	一台付款 *2000* 元;
$2 < X \le 3$,	一台付款 *2500* 元;
$X > 3$,	一台付款 *3000* 元.

设寿命服从参数为 *10* 的指数分布, 其概率密度为

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$X \leq 1$,	一台付款 1500 元;
$1 < X \leq 2$,	一台付款 2000 元;
$2 < X \leq 3$,	一台付款 2500 元;
$X > 3$,	一台付款 3000 元.

设寿命服从参数为 10 的指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

例 1.5

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.

记使用寿命为 X(以年记). 规定:

$$\begin{aligned} &X \le 1, && \text{一台付款 } 1500 \text{ 元;} \\ &1 < X \le 2, && \text{一台付款 } 2000 \text{ 元;} \\ &2 < X \le 3, && \text{一台付款 } 2500 \text{ 元;} \\ &X > 3, && \text{一台付款 } 3000 \text{ 元.} \end{aligned}$$

设寿命服从参数为 10 的指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

试求该商店一台这种家用电器收费 Y 的数学期望.

解.

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$P(X \leq 1)$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$P(X \leq 1) \quad = \quad \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$P(X \le 1) \quad = \quad \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[- e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952$$

$P(1 < X \leq 2)$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$\begin{aligned} P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[- e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\ P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx \end{aligned}$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$\begin{aligned} P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[-e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\ P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \end{aligned}$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[- e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \leq 3) &
\end{aligned}
$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[-e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx
\end{aligned}
$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[-e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &
\end{aligned}
$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[- e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx
\end{aligned}
$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[- e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \leq 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \leq 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

所以收费 Y 的分布律为

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[- e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

所以收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \Big[- e^{-\frac{x}{10}} \Big]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \leq 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \leq 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

所以收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

因此

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^{\infty} \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

所以收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

因此 $E(Y) = 1500 \times 0.0952 + 2000 \times 0.0861 + 2500 \times 0.0779$
$+3000 \times 0.7408$

解. 先求 X 落在各个时间段内的概率.

$$
\begin{aligned}
P(X \le 1) &= \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^1 = 0.0952 \\
P(1 < X \le 2) &= \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = 0.0861 \\
P(2 < X \le 3) &= \int_2^3 \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.0779 \\
P(X > 3) &= \int_3^\infty \frac{1}{10} \exp(-\frac{x}{10}) dx = 0.7408.
\end{aligned}
$$

所以收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

因此 $E(Y) = 1500 \times 0.0952 + 2000 \times 0.0861 + 2500 \times 0.0779$

$+3000 \times 0.7408 = 2732.15.$

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验,

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验, 如果这混合血液呈阴性, 这 k 个人的血就只需验一次.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验, 如果这混合血液呈阴性, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 就再对这 k 个人的血液分别进行化验.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验, 如果这混合血液呈阴性, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 就再对这 k 个人的血液分别进行化验. 这样, 这 k 个人的血总共就要化验 $k+1$ 次.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验, 如果这混合血液呈阴性, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 就再对这 k 个人的血液分别进行化验. 这样, 这 k 个人的血总共就要化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p, 且每个人的试验反应相互独立.

例 1.6

在一个人数很多 (N) 的团体中普查某种疾病, 为此要抽验 N 个人的血. 可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去验, 这就需要验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组, 把从 k 个人抽来的血混合在一起检验, 如果这混合血液呈阴性, 这 k 个人的血就只需验一次. 若呈阳性, 就再对这 k 个人的血液分别进行化验. 这样, 这 k 个人的血总共就要化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p, 且每个人的试验反应相互独立. 试说明当 p 较小时, 选取适当的 k, 按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明 k 取什么值时最合适.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.

按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.
按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.
按第二种方法, 我们先计算平均每人需要化验次数的期望值.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.
按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.
按第二种方法, 我们先计算平均每人需要化验次数的期望值.
以 X 表示平均每人需要化验的次数.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.
按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.
按第二种方法, 我们先计算平均每人需要化验次数的期望值.
以 X 表示平均每人需要化验的次数.

令

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.
按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.
按第二种方法, 我们先计算平均每人需要化验次数的期望值.
以 X 表示平均每人需要化验的次数.

令$q = 1 - p$.

解. 我们考虑需要化验次数的期望值.
按第一种方法, 没有什么悬念, 这个期望值是 N.
按第二种方法, 我们先计算平均每人需要化验次数的期望值.
以 X 表示平均每人需要化验的次数.

令$q = 1 - p$. 则 q 是每个人化验呈阴性的概率.

- 因此当组内每个人都是阴性时，
  需要化验的总次数是 1，

- 因此当组内每个人都是阴性时，
  需要化验的总次数是 1，每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.

- 因此当组内每个人都是阴性时,
需要化验的总次数是 1, 每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k, 故

$$P(X=\frac{1}{k})=q^k;$$

- 因此当组内每个人都是阴性时,
  需要化验的总次数是 1, 每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
  由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k, 故

$$P(X = \frac{1}{k}) = q^k;$$

- 每个人都是阴性的逆事件,
  即至少一个人为阳性的概率为 $1 - q^k$,

- 因此当组内每个人都是阴性时，
  需要化验的总次数是 1, 每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
  由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k, 故

$$P(X = \frac{1}{k}) = q^k;$$

- 每个人都是阴性的逆事件，
  即至少一个人为阳性的概率为 $1 - q^k$,
  此时共需检验 $k + 1$ 次,

- 因此当组内每个人都是阴性时，
  需要化验的总次数是 1，每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
  由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k，故

$$P(X = \frac{1}{k}) = q^k;$$

- 每个人都是阴性的逆事件，
  即至少一个人为阳性的概率为 $1 - q^k$，
  此时共需检验 $k + 1$ 次，平均每人 $1 + \frac{1}{k}$ 次.

- 因此当组内每个人都是阴性时，
需要化验的总次数是 1，每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k，故

$$P(X=\frac{1}{k})=q^k;$$

- 每个人都是阴性的逆事件，
即至少一个人为阳性的概率为 $1-q^k$，
此时共需检验 $k+1$ 次，平均每人 $1+\frac{1}{k}$ 次. 因此

- 因此当组内每个人都是阴性时，
  需要化验的总次数是 1，每个人平均是 $\frac{1}{k}$ 次.
  由于 k 个人每人都是阴性的概率为 q^k，故

$$P(X=\frac{1}{k})=q^k;$$

- 每个人都是阴性的逆事件，
  即至少一个人为阳性的概率为 $1-q^k$，
  此时共需检验 $k+1$ 次，平均每人 $1+\frac{1}{k}$ 次. 因此

$$P(X=1+\frac{1}{k})=1-q^k.$$

X 的分布律如下

X 的分布律如下

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的分布律如下

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

所以

$$E(X)$$

X 的分布律如下

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

所以

$$E(X) = \frac{1}{k}q^k + (1+\frac{1}{k})(1-q^k)$$

X 的分布律如下

X	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

所以

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{k}q^k + (1+\frac{1}{k})(1-q^k) \\
&= 1 - q^k + \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

所以 N 个人需要化验的次数期望值为

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此, 只要

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此, 只要

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此，只要
$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$
第二种方法就可以减少化验次数.

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此, 只要

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

第二种方法就可以减少化验次数.

最合适的 k 是使得

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此, 只要
$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$
第二种方法就可以减少化验次数.

最合适的 k 是使得
$$1-q^k+\frac{1}{k}$$

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此，只要

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

第二种方法就可以减少化验次数.

最合适的 k 是使得

$$1-q^k+\frac{1}{k}$$

取得最小值的 k.

q \ k	3	4	5	6	7	8
0.9	0.6043	0.5939	0.6095			

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此，只要

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

第二种方法就可以减少化验次数.

最合适的 k 是使得

$$1-q^k+\frac{1}{k}$$

取得最小值的 k.

q \ k	3	4	5	6	7	8
0.9	0.6043	0.5939	0.6095			
0.95	0.4760	0.4355	0.4262	0.4316	0.4445	0.4616

所以 N 个人需要化验的次数期望值为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.
因此，只要

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1$$

第二种方法就可以减少化验次数.

最合适的 k 是使得

$$1-q^k+\frac{1}{k}$$

取得最小值的 k.

q \ k	3	4	5	6	7	8
0.9	0.6043	0.5939	0.6095			
0.95	0.4760	0.4355	0.4262	0.4316	0.4445	0.4616
0.96	0.4486	0.4007	0.3846	0.3839	0.3914	0.4036

k / q	6	7	8	9	10	11	12
0.97	0.3337	0.3349	0.3413	0.3509	0.3626	0.3756	0.3895
0.98	0.2808	0.2747	0.2742	0.2774	0.2829	0.2902	0.2986
0.99	0.2252	0.2108	0.2023	0.1976	0.1956	0.1956	0.1969

习题 1

50 个签中有 *4* 个标有 “中”, 依次无放回抽签时, 首次抽到 “中” 前期望抽签多少次?

习题 2

有两个相互独立的电子装置，它们的寿命 (以小时计) X_1, X_2 服从同一指数分布，其概率密度为

习题 2

有两个相互独立的电子装置，它们的寿命 (以小时计) X_1, X_2 服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

习题 2

有两个相互独立的电子装置, 它们的寿命 (以小时计) X_1, X_2 服从同一指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

其中 $\theta > 0$ 为参数.

习题 2

有两个相互独立的电子装置，它们的寿命 (以小时计) X_1, X_2 服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

其中 $\theta > 0$ 为参数. 若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命 (以小时计)N 的数学期望.

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题：

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题：

怎样求一个随机变量的函数的期望?

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题:

怎样求一个随机变量的函数的期望?

具体地说, 设 X 是随机变量, g 是连续函数,

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题:
怎样求一个随机变量的函数的期望?

具体地说, 设 X 是随机变量, g 是连续函数,
怎样求 $g(X)$ 的期望?

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题：

怎样求一个随机变量的函数的期望?

具体地说, 设 X 是随机变量, g 是连续函数,
怎样求 $g(X)$ 的期望?

一种办法是先求出 $g(X)$ 的概率分布, 然后用定义算.

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题：

怎样求一个随机变量的函数的期望?

具体地说, 设 X 是随机变量, g 是连续函数,

怎样求 $g(X)$ 的期望?

一种办法是先求出 $g(X)$ 的概率分布, 然后用定义算.

有没有可直接利用 X 的概率分布计算的方法呢?

§1.1 随机变量的函数的期望

下面考虑这样的问题：
怎样求一个随机变量的函数的期望？

具体地说，设 X 是随机变量，g 是连续函数，
怎样求 $g(X)$ 的期望？

一种办法是先求出 $g(X)$ 的概率分布，然后用定义算.

有没有可直接利用 X 的概率分布计算的方法呢？

我们分离散情况和连续情况考虑.

定理 1.1

如果 X 是离散型随机变量, 分布律是

定理 1.1

如果 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_k) = p_k, \ \ k = 1, 2, \cdots .$$

定理 1.1

如果 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X=x_k)=p_k,\ \ k=1,2,\cdots.$$

设 $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是函数,

定理 1.1

如果 X 是离散型随机变量，分布律是

$$P(X = x_k) = p_k, \ \ k = 1, 2, \cdots .$$

设 $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是函数，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < \infty,$$

定理 1.1

如果 X 是离散型随机变量，分布律是

$$P(X=x_k)=p_k,\ \ k=1,2,\cdots.$$

设 $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是函数，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k<\infty,$$

则 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

证明. 因为

$$P(X = x_k) = p_k,$$

证明. 因为

$$P(X=x_k)=p_k,$$

所以 $Y=g(X)$ 的分布律为

$$P(Y=g(x_k))=P(g(X)=g(x_k))=p_k,$$

证明. 因为

$$P(X=x_k)=p_k,$$

所以 $Y=g(X)$ 的分布律为

$$P(Y=g(x_k))=P(g(X)=g(x_k))=p_k,$$

所以

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

定理 1.2

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$,

定理 1.2

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数.

定理 1.2

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty,$$

定理 1.2

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty,$$

则 $Y=g(X)$ 的数学期望为

定理 1.2

设 X 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x)$, $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数. 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx<\infty,$$

则 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx.$$

证明一.

证明一. 取 $(-\infty, \infty)$ 的划分：

证明一. 取 $(-\infty, \infty)$ 的划分：

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

证明一. 取 $(-\infty, \infty)$ 的划分：

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$X' = x_n,\ X \in [x_n, x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

证明一. 取 $(-\infty,\infty)$ 的划分：

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$X' = x_n,\ X \in [x_n, x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

则 X' 是离散型随机变量，接近 X.

证明一. 取 $(-\infty,\infty)$ 的划分：

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$X' = x_n,\ X \in [x_n, x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

则 X' 是离散型随机变量, 接近 X.

X' 的分布律是

证明一. 取 $(-\infty, \infty)$ 的划分：

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$X' = x_n,\ X \in [x_n, x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

则 X' 是离散型随机变量，接近 X.

X' 的分布律是

$$P(X' = x_n) = P(X \in [x_n, x_{n+1})) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$$

证明一. 取 $(-\infty, \infty)$ 的划分:

$$\cdots < x_{-n} < x_{-n+1} < \cdots < x_{-1} < x_0 = 0 < x_1 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

令

$$X' = x_n,\ X \in [x_n, x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

则 X' 是离散型随机变量, 接近 X.
X' 的分布律是

$$P(X' = x_n) = P(X \in [x_n, x_{n+1})) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量,

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量, 分布律是

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量, 分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量，分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量，分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

因此

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量，分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

因此

$$E(Y') = \sum_n g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x_n) f(x)dx$$

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量, 分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

因此

$$E(Y') = \sum_n g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x_n) f(x)dx$$

由于 g 是连续函数, 所以 $Y' = g(X')$ 接近 $g(X)$.

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量, 分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

因此

$$E(Y') = \sum_n g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x_n) f(x)dx$$

由于 g 是连续函数, 所以 $Y' = g(X')$ 接近 $g(X)$. 因此当分划的长度趋于 0 时, 这个量的极限值等于 $E(Y)$,

因此 $Y' = g(X')$ 也是离散型随机变量，分布律是

$$P(Y' = g(x_n)) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx,$$

$$n = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

因此

$$E(Y') = \sum_n g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x_n)f(x)dx$$

由于 g 是连续函数，所以 $Y' = g(X')$ 接近 $g(X)$. 因此当分划的长度趋于 0 时，这个量的极限值等于 $E(Y)$，即

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

另一种证明.

另一种证明.

我们先证明一个引理.

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$,

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$),

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量,

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量,
且其概率密度为

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中

$$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$$

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中

$$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$$
$$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$$

另一种证明.

我们先证明一个引理.

引理 1.1

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中

$$\alpha = \min\{g(-\infty), g(\infty)\}$$
$$\beta = \max\{g(-\infty), g(\infty)\}$$

$h(x)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

证明.

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.

因为

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似. 因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加.

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理,

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理, 其反函数 $h(y)$ 存在,

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理, 其反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α, β) 上严格增加, 可导.

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理, 其反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α, β) 上严格增加, 可导.
设 X 的分布函数为 $F_X(x)$. 则

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理, 其反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α, β) 上严格增加, 可导.
设 X 的分布函数为 $F_X(x)$. 则

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du.$$

证明. 只考虑 $g'(x) > 0$ 的情况, $g'(x) < 0$ 的情况类似.
因为

$$g'(x) > 0,$$

所以 g 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调增加. 故由反函数定理, 其反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α, β) 上严格增加, 可导.
设 X 的分布函数为 $F_X(x)$. 则

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$$

以 $F_Y(y)$ 表示 Y 的分布函数.

因为 $Y=g(X)$,

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中.

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\forall y\le\alpha,\quad F_Y(y)$$

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \leq \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\begin{aligned}
&\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0, \\
&\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y)
\end{aligned}$$

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y)$$

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha,\beta)$,

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha, \beta)$, 那么

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha,\beta)$, 那么

$$F_Y(y)$$

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha, \beta)$, 那么

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\begin{aligned}\forall y\le\alpha,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=0,\\ \forall y\ge\beta,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=1,\end{aligned}$$

若 $y\in(\alpha,\beta)$, 那么

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(g(X)\le y)\\ &= P(X\le h(y))=F_X(h(y))\end{aligned}$$

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha, \beta)$, 那么

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ &= P(X \le h(y)) = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

因而

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha, \beta)$, 那么

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ &= P(X \le h(y)) = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

因而

$$f_Y(y)$$

因为 $Y = g(X)$, 而 g 的值域是 (α, β),
所以 Y 的值全部落在 (α, β) 之中. 因此,

$$\forall y \le \alpha, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0,$$
$$\forall y \ge \beta, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1,$$

若 $y \in (\alpha, \beta)$, 那么

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ &= P(X \le h(y)) = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

因而

$$f_Y(y) = F_Y(y)'$$

因为 $Y=g(X)$, 而 g 的值域是 (α,β),
所以 Y 的值全部落在 (α,β) 之中. 因此,

$$\forall y\le\alpha,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=0,$$
$$\forall y\ge\beta,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=1,$$

若 $y\in(\alpha,\beta)$, 那么

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(g(X)\le y)\\ &= P(X\le h(y))=F_X(h(y)) \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y(y)'\\ &= \begin{cases} f_X(h(y))h'(y), & y\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

定理的第二个证明

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):

由上一引理,

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):

由上一引理, Y 是连续型随机变量,

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):

由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):
由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y)$$

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):

由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):
由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):
由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$E(Y)$$

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):
由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

定理的第二个证明(在附加条件 g 为严格单调且处处可导下):
由上一引理, Y 是连续型随机变量, 且其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]|h'(y)| dy. \end{aligned}$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

$$E(Y)$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

$$E(Y) = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]|h'(y)|dy$$

当 $h'(y)>0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]|h'(y)|dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]h'(y)dy \end{aligned}$$

当 $h'(y)>0$ 时, 作变量代换

$$x=h(y)$$

此时

$$y=g(x).$$

故

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_\alpha^\beta y f_X[h(y)]|h'(y)|dy \\ &= \int_\alpha^\beta y f_X[h(y)]h'(y)dy = \int_\alpha^\beta y f_X[h(y)]dh(y) \end{aligned}$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]|h'(y)|dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]h'(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]dh(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

当 $h'(y) > 0$ 时, 作变量代换

$$x = h(y)$$

此时

$$y = g(x).$$

故

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]|h'(y)|dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]h'(y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} y f_X[h(y)]dh(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

$h'(y) < 0$ 时的证明类似.

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

$g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 是二元函数.

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

$g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 是二元函数. 令

$$Z = g(X, Y).$$

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 是二元函数. 令

$$Z = g(X, Y).$$

若

$$\sum_{i,j} |g(x_i, y_j)| p_{ij} < \infty,$$

上述结果可推广到多维随机变量的情况.

1. 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 分布律是:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ 是二元函数. 令

$$Z = g(X, Y).$$

若

$$\sum_{i,j} |g(x_i, y_j)| p_{ij} < \infty,$$

则

$$E(Z) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 概率密度为 $f(x, y)$.

2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 概率密度为 $f(x, y)$. 设 g 是二元连续函数.

2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 概率密度为 $f(x, y)$. 设 g 是二元连续函数. 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x, y)|f(x, y)dxdy < \infty.$$

2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 概率密度为 $f(x, y)$. 设 g 是二元连续函数. 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x, y)|f(x, y)dxdy < \infty.$$

令

$$Z = g(X, Y),$$

2. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，概率密度为 $f(x, y)$. 设 g 是二元连续函数. 且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x, y)|f(x, y)dxdy < \infty.$$

令

$$Z = g(X, Y),$$

则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x, y)f(x, y)dxdy.$$

§1.2 数学期望的性质

§1.2 数学期望的性质

定理 1.3

1. 设 C 是常数，则

§1.2 数学期望的性质

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则

$$E(C) = C.$$

§1.2 数学期望的性质

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则
$$E(C) = C.$$
2. 设 C 是常数, X 是随机变量, 则

定理 1.3

1. 设 C 是常数，则
$$E(C)=C.$$
2. 设 C 是常数，X 是随机变量，则
$$E(CX)=CE(X).$$

§1.2 数学期望的性质

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则
$$E(C) = C.$$
2. 设 C 是常数, X 是随机变量, 则
$$E(CX) = CE(X).$$
3. 设 X, Y 是随机变量, 则

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则
$$E(C) = C.$$
2. 设 C 是常数, X 是随机变量, 则
$$E(CX) = CE(X).$$
3. 设 X, Y 是随机变量, 则
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

§1.2 数学期望的性质

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则
$$E(C) = C.$$
2. 设 C 是常数, X 是随机变量, 则
$$E(CX) = CE(X).$$
3. 设 X, Y 是随机变量, 则
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

一般地, 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则

定理 1.3

1. 设 C 是常数, 则
$$E(C) = C.$$
2. 设 C 是常数, X 是随机变量, 则
$$E(CX) = CE(X).$$
3. 设 X, Y 是随机变量, 则
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$
一般地, 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则
$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

一般地, 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量, 则

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

一般地, 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量, 则

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n).$$

证明.

证明. 只对连续型随机变量证明.

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$,

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$,

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, X,Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x)\equiv C$, 则
$$E(C)=\int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则

$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$

2. 令 $g(x) = Cx$,

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX)$$

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx$$

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则

$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} C f_X(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C.$$

2. 令 $g(x) = Cx$, 则

$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = CE(X)$$

3. 令 $g(x, y) = x + y$,

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CE(X)$$
3. 令 $g(x, y) = x + y$,
$$E(X + Y)$$

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, X,Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x)\equiv C$, 则
$$E(C)=\int_{-\infty}^{\infty}Cf_X(x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=C.$$
2. 令 $g(x)=Cx$, 则
$$E(CX)=\int_{-\infty}^{\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=CE(X)$$
3. 令 $g(x,y)=x+y$,
$$E(X+Y)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CE(X)$$
3. 令 $g(x, y) = x + y$,
$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy \end{aligned}$$

证明. 只对连续型随机变量证明.

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, X,Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x)\equiv C$, 则
$$E(C)=\int_{-\infty}^{\infty}Cf_X(x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=C.$$
2. 令 $g(x)=Cx$, 则
$$E(CX)=\int_{-\infty}^{\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=CE(X)$$
3. 令 $g(x,y)=x+y$,
$$\begin{aligned}E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy\end{aligned}$$

证明. 只对连续型随机变量证明.
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

1. 令 $g(x) \equiv C$, 则
$$E(C) = \int_{-\infty}^{\infty} Cf_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$
2. 令 $g(x) = Cx$, 则
$$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CE(X)$$
3. 令 $g(x, y) = x + y$,
$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy \\ &= E(X)+E(Y) \end{aligned}$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

于是

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

于是

$$E(XY)$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

于是

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy) f(x, y) dxdy$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

于是

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy)f_X(x)f_Y(y)dxdy \end{aligned}$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

于是

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy) f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy) f_X(x) f_Y(y)\,dxdy \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\right]
\end{aligned}$$

4. 因为 X, Y 相互独立, 故

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

于是

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy) f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(xy) f_X(x) f_Y(y)\,dxdy \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\right] \\
&= E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

例 1.7

设风速 V 在 $(0,a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v)=\frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布，即具有概率密度

$$f(v) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数：$W = kV^2$(k 是常数)．求 W 的数学期望．

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W = kV^2$(k 是常数).
求 W 的数学期望.

解.

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W = kV^2$(k 是常数). 求 W 的数学期望.

解.

$$E(W)$$

例 1.7

设风速 V 在 $(0,a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v)=\frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W=kV^2$(k 是常数). 求 W 的数学期望.

解.

$$E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v)\,dv$$

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布，即具有概率密度

$$f(v) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数：$W = kV^2$(k 是常数)．求 W 的数学期望．

解．

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v)dv \\ &= \int_0^a kv^2 f(v)dv \end{aligned}$$

例 1.7

设风速 V 在 $(0, a)$ 上服从均匀分布, 即具有概率密度

$$f(v) = \frac{1}{a}\mathbf{1}_{(0,a)}.$$

又设飞机机翼受到的正压力 W 是 V 的函数: $W = kV^2$(k 是常数). 求 W 的数学期望.

解.

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v)\,dv \\ &= \int_0^a kv^2 f(v)\,dv \\ &= \frac{1}{3}ka^2. \end{aligned}$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x, \ x > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y = g(X,Y)$, 其中 $g(x,y) = y$.

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y=g(X,Y)$, 其中 $g(x,y)=y$. 因此

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y=g(X,Y)$, 其中 $g(x,y)=y$. 因此

$$E(Y)$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y=g(X,Y)$, 其中 $g(x,y)=y$. 因此

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y = g(X, Y)$, 其中 $g(x, y) = y$. 因此

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dxdy = \int_{1}^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^3y}dy$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y = g(X, Y)$, 其中 $g(x, y) = y$. 因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_1^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^3y}dy \\ &= \frac{3}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\left[\ln y\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = 3\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx \end{aligned}$$

例 1.8

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y = g(X, Y)$, 其中 $g(x, y) = y$. 因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_{1}^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^3y}dy \\ &= \frac{3}{2}\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\Big[\ln y\Big]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = 3\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx \\ &= \Big[-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\Big]_{1}^{\infty} + \frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx \end{aligned}$$

例 1.8

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x}<y<x,\ x>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$, $E(\frac{1}{XY})$.

解. Y 可以看成 $Y=g(X,Y)$, 其中 $g(x,y)=y$. 因此

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}dy\\ &= \frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}\Big[\ln y\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}dx=3\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx\\ &= \Big[-\frac{3}{2}\frac{\ln x}{x^2}\Big]_1^{\infty}+\frac{3}{2}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$$E(\frac{1}{XY})$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{xy} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{XY}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\,dydx \\
&= \int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}\,dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{XY}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx \\
&= \int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy = \int_{1}^{\infty}\frac{3}{2x^4}\Big[-\frac{1}{2y^2}\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{XY}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx \\
&= \int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy = \int_{1}^{\infty}\frac{3}{2x^4}\Big[-\frac{1}{2y^2}\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}dx \\
&= \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4}\Big[x^2-\frac{1}{x^2}\Big]dx = \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^6})dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{XY}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx \\
&= \int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy = \int_{1}^{\infty}\frac{3}{2x^4}\Big[-\frac{1}{2y^2}\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}dx \\
&= \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4}\Big[x^2-\frac{1}{x^2}\Big]dx = \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^6})dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[-\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{x^5}\Big]_{1}^{\infty}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{XY}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dydx \\
&= \int_{1}^{\infty}dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}dy = \int_{1}^{\infty}\frac{3}{2x^4}\Big[-\frac{1}{2y^2}\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}dx \\
&= \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^4}\Big[x^2-\frac{1}{x^2}\Big]dx = \frac{3}{4}\int_{1}^{\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^6})dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[-\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{x^5}\Big]_{1}^{\infty} \\
&= \frac{3}{4}(1-\frac{1}{5}) = \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元记, 价格高者获胜. 若甲中标, 他将此项目以 10 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的, 且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 (若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下)?

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元记, 价格高者获胜. 若甲中标, 他将此项目以 *10* 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的, 且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 (若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下)?

解. 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立,

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元记, 价格高者获胜. 若甲中标, 他将此项目以 *10* 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的, 且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 *(*若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下*)*?

解. 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且其公共的分布函数为

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元记, 价格高者获胜. 若甲中标, 他将此项目以 *10* 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的, 且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 (若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下)?

解. 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且其公共的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ \frac{x-7}{4}, & 7 \le x < 11, \\ 1, & x \ge 11. \end{cases}$$

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍，价格以千美元记，价格高者获胜。若甲中标，他将此项目以 *10* 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的，且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 *(*若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下*)*?

解. 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价，则 X_1, X_2, X_3 相互独立，且其公共的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ \frac{x-7}{4}, & 7 \le x < 11, \\ 1, & x \ge 11. \end{cases}$$

以 Y 记三人的最大报价:

例 1.9

某甲与其他三人参与一个项目的竞拍, 价格以千美元记, 价格高者获胜. 若甲中标, 他将此项目以 *10* 千美元转让给他人. 可认为其他三人的竞拍是相互独立的, 且都在 $7 \sim 11$ 千美元之间均匀分布.
问甲应如何报价才能使获益的数学期望为最大 (若甲中标他必须将此项目以他自己的报价买下)?

解. 设 X_1, X_2, X_3 是其他三人的报价, 则 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且其公共的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ \frac{x-7}{4}, & 7 \le x < 11, \\ 1, & x \ge 11. \end{cases}$$

以 Y 记三人的最大报价:

$$Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}.$$

利用独立性, 可算出 Y 的分布函数:

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

利用独立性, 可算出 Y 的分布函数:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

设报价为 x.

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<7,\\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7\le y<11,\\ 1, & y\ge 11.\end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<7,\\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7\le y<11,\\ 1, & y\ge 11.\end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；x 大于 10 也是不可能的，因为他将会亏本.

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；x 大于 10 也是不可能的，因为他将会亏本.

所以 x 的取值范围是 $[7, 10]$.

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<7,\\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7\le y<11,\\ 1, & y\ge 11.\end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；
x 大于 10 也是不可能的，因为他将会亏本.
所以 x 的取值范围是 $[7,10]$.
当报价为 x 时，甲赢得这个项目的概率为

利用独立性, 可算出 Y 的分布函数:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的, 因为他注定拍不到;
x 大于 10 也是不可能的, 因为他将会亏本.
所以 x 的取值范围是 $[7, 10]$.
当报价为 x 时, 甲赢得这个项目的概率为

$$p = P(Y \le x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \ (7 \le x \le 10)$$

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \leq y < 11, \\ 1, & y \geq 11. \end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；x 大于 10 也是不可能的，因为他将会亏本.

所以 x 的取值范围是 $[7, 10]$.

当报价为 x 时，甲赢得这个项目的概率为

$$p = P(Y \leq x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \ (7 \leq x \leq 10)$$

所以他的获利数 $G(x)$ 的分布是

利用独立性，可算出 Y 的分布函数：

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的，因为他注定拍不到；x 大于 10 也是不可能的，因为他将会亏本.

所以 x 的取值范围是 $[7, 10]$.

当报价为 x 时，甲赢得这个项目的概率为

$$p = P(Y \le x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \ (7 \le x \le 10)$$

所以他的获利数 $G(x)$ 的分布是

$$P(G(x) = 10 - x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3,$$

利用独立性, 可算出 Y 的分布函数:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 7, \\ \left(\frac{y-7}{4}\right)^3, & 7 \le y < 11, \\ 1, & y \ge 11. \end{cases}$$

设报价为 x. x 小于 7 是没有意义的, 因为他注定拍不到; x 大于 10 也是不可能的, 因为他将会亏本.

所以 x 的取值范围是 $[7, 10]$.

当报价为 x 时, 甲赢得这个项目的概率为

$$p = P(Y \le x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \ (7 \le x \le 10)$$

所以他的获利数 $G(x)$ 的分布是

$$P(G(x) = 10 - x) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3, \quad P(G(x) = 0) = 1 - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3.$$

于是, 其获利的数学期望为

于是, 其获利的数学期望为

$$H(x) = E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

于是, 其获利的数学期望为

$$H(x) = E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (10-x) - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (30-3x-x+7)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (37-4x) = 0, \end{aligned}$$

令 $H'(x) = 0$, 得

于是, 其获利的数学期望为

$$H(x) = E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (10-x) - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (30-3x-x+7)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (37-4x) = 0, \end{aligned}$$

令 $H'(x) = 0$, 得

$$x_1 = \frac{37}{4}, \ x_2 = 7 \text{ 舍去}.$$

于是, 其获利的数学期望为

$$H(x) = E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (10-x) - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (30-3x-x+7)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (37-4x) = 0, \end{aligned}$$

令 $H'(x) = 0$, 得

$$x_1 = \frac{37}{4}, \ x_2 = 7 \text{ 舍去}.$$

又 $H''(\frac{37}{4}) < 0$,

于是, 其获利的数学期望为

$$H(x) = E(G(x)) = \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 (10-x).$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (10-x) - \left(\frac{x-7}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (30-3x-x+7)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x-7}{4}\right)^2 (37-4x) = 0, \end{aligned}$$

令 $H'(x) = 0$, 得

$$x_1 = \frac{37}{4},\ x_2 = 7 \text{ 舍去}.$$

又 $H''(\frac{37}{4}) < 0$, 所以 H 在此处取极大值.
甲应报价 $\frac{37}{4} = 9.25$, 他获益的数学期望为最大.

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(*设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的*).*

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. (设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的).

解.

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(*设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的*)*.

解. $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$, 令

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的).*

解. $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$, 令

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 i 站没人下车} \\ 1, & \text{在第 i 站有人下车} \end{cases}$$

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的).*

解. $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$, 令

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 i 站没人下车} \\ 1, & \text{在第 i 站有人下车} \end{cases}$$

则

例 1.10

一民航送客车载有 *20* 位旅客自机场开出, 旅客有 *10* 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数, 求 $E(X)$. *(*设每位旅客在各个车站下车是等可能的, 并设各位旅客是否下车是相互独立的*)*.

解. $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$, 令

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 i 站没人下车} \\ 1, & \text{在第 i 站有人下车} \end{cases}$$

则

$$X = X_1 + \cdots + X_{10}.$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$，

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.

因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.

所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.

因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.

所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.

因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.

所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

所以

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

所以

$$E(X)$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

所以

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i)$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{10} E(X_i) \\ &= 10 \times [1 - (\frac{9}{10})^{20}] \end{aligned}$$

任一旅客在第 i 站下车的概率为 $\frac{1}{10}$, 故不在第 i 站下车的概率为 $\frac{9}{10}$.
因此在第 i 站无人下车的概率为 $(\frac{9}{10})^{20}$.
所以 $\forall i = 1, 2, \cdots, 10$,

$$P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, \quad P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

因此

$$E(X_i) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}.$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{10} E(X_i) \\ &= 10 \times [1 - (\frac{9}{10})^{20}] \\ &\approx 8.784 \end{aligned}$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$E(V)$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$E(V) = E(IR)$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$E(V) = E(IR) = E(I)E(R) \qquad (\text{独立性})$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$\begin{aligned} E(V) &= E(IR) = E(I)E(R) \qquad (\text{独立性}) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr\right] \end{aligned}$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$\begin{aligned} E(V) &= E(IR) = E(I)E(R) \qquad \text{(独立性)} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr\right] \\ &= \left[\int_0^1 2i^2 di\right]\left[\int_0^3 \frac{r^3}{9}dr\right] \end{aligned}$$

例 1.11

设一电路中电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别是

$$g(i) = 2i\mathbf{1}_{[0,1]},$$

$$h(r) = \frac{r^2}{9}\mathbf{1}_{[0,1]}.$$

求电压 $V = I \cdot R$ 的均值.

解.

$$\begin{aligned} E(V) &= E(IR) = E(I)E(R) \qquad (\text{独立性}) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} ig(i)di\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)dr\right] \\ &= \left[\int_0^1 2i^2 di\right]\left[\int_0^3 \frac{r^3}{9}dr\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3^4}{9} = \frac{3}{2}\ (V). \end{aligned}$$

习题 3

市场上对某种商品的需求量是随机变量 X(单位吨),
它服从 $[2000, 4000]$ 上的均匀分布, 设每售出这种商品 1 吨, 可挣得 3 万元, 但假如销售不出而屯积于仓库, 则每吨需浪费保养费 1 万元,
问题是应组织多少货源, 才能使收益最大?

§2. 方差

§2. 方差

对一个随机变量，数学期望是其平均值.

§2. 方差

对一个随机变量，数学期望是其平均值.

为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度，

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量.

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量. 故其平均偏离程度为

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量. 故其平均偏离程度为

$$E(|X - E(X)|)$$

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量. 故其平均偏离程度为

$$E(|X - E(X)|)$$

但这个量带有绝对值, 数学处理上不太方便,

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量. 故其平均偏离程度为

$$E(|X - E(X)|)$$

但这个量带有绝对值, 数学处理上不太方便,
故我们一般代之以

§2. 方差

对一个随机变量, 数学期望是其平均值.
为了刻画这个随机变量偏离这个平均值的程度,
我们需要另一个数字特征, 即方差.
设 X 是随机变量, $E(X)$ 是其数学期望.
X 偏离 $E(X)$ 的程度可用

$$|X - E(X)|$$

衡量. 故其平均偏离程度为

$$E(|X - E(X)|)$$

但这个量带有绝对值, 数学处理上不太方便,
故我们一般代之以

$$E[(X - E(X))^2]$$

这样我们就有下面的定义.

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量.

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量. 若

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量. 若

$$E[(X-E(X))^2]$$

存在,

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量. 若

$$E[(X - E(X))^2]$$

存在, 则称为 X 的方差 *Variance*, 记为 $Var(X)$ 或 $D(X)$. 即

$$D(X) = E[(X - E(X))^2].$$

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量. 若

$$E[(X-E(X))^2]$$

存在, 则称为 X 的方差 *Variance*, 记为 $Var(X)$ 或 $D(X)$. 即

$$D(X)=E[(X-E(X))^2].$$

而

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

这样我们就有下面的定义.

定义 2.3

设 X 是随机变量. 若

$$E[(X-E(X))^2]$$

存在, 则称为 X 的方差 *Variance*, 记为 $Var(X)$ 或 $D(X)$. 即

$$D(X)=E[(X-E(X))^2].$$

而

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

称为标准差或均方差.

方差的计算公式

方差的计算公式

利用公式:

方差的计算公式

利用公式：当 X 是离散型随机变量时

方差的计算公式

利用公式：当 X 是离散型随机变量时

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i,$$

方差的计算公式

利用公式：当 X 是离散型随机变量时

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i,$$

当 X 是连续型随机变量时

方差的计算公式

利用公式：当 X 是离散型随机变量时

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p_i,$$

当 X 是连续型随机变量时

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx,$$

方差的计算公式

利用公式：当 X 是离散型随机变量时

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i,$$

当 X 是连续型随机变量时

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

取 $g(x) = (x - E(X))^2$，得到

1. 若 X 是离散型随机变量,

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_i) = p_i$$

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_i) = p_i$$

则

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$$

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_i) = p_i$$

则

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$$

2. 若 X 是连续型随机变量, 概率密度是 $f(x)$,

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_i) = p_i$$

则

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p_i$$

2. 若 X 是连续型随机变量, 概率密度是 $f(x)$, 则

1. 若 X 是离散型随机变量, 分布律是

$$P(X = x_i) = p_i$$

则

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E(X))^2 p_i$$

2. 若 X 是连续型随机变量, 概率密度是 $f(x)$, 则

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - E(X)]^2 f(x)dx.$$

另外，我们还有下面的计算公式:

另外，我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

另外, 我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

另外，我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

$$D(X)$$

另外，我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

$$D(X) = E[(X - E(X))^2]$$

另外，我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

$$\begin{aligned} D(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2] \end{aligned}$$

另外, 我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

$$\begin{aligned} D(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2] \\ &= E[X^2] - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \end{aligned}$$

另外, 我们还有下面的计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明.

$$\begin{aligned} D(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2] \\ &= E[X^2] - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

方差的性质:

方差的性质:

1. 设 C 是常数, 则

方差的性质:

1. 设 C 是常数, 则

$$D(C) = 0.$$

方差的性质:

1. 设 C 是常数, 则

$$D(C) = 0.$$

2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则

方差的性质:

1. 设 C 是常数, 则

$$D(C) = 0.$$

2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则

$$D(CX) = C^2 D(X),$$

方差的性质:

1. 设 C 是常数, 则

$$D(C) = 0.$$

2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则

$$D(CX) = C^2 D(X),$$

$$D(X + C) = D(X).$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量，则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地，若 X, Y 相互独立，则

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地, 若 X, Y 相互独立, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地, 若 X, Y 相互独立, 则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

一般地, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

特别地, 若 X, Y 相互独立, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

一般地, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地, 若 X, Y 相互独立, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

一般地, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

4. $D(X) = 0$ 的充分必要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地, 若 X, Y 相互独立, 则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

一般地, 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是随机变量, 则

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

4. $D(X) = 0$ 的充分必要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即

$$P(X = E(X)) = 1.$$

证明.

证明.

1. $D(C)$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$
2.

$$D(CX)$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

2.

$$D(CX) = E(C^2X^2) - [E(CX)]^2$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$
2. $$D(CX) = E(C^2X^2) - [E(CX)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

2.

$$\begin{aligned} D(CX) &= E(C^2X^2) - [E(CX)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2[E(X^2) - [E(X)]^2] \end{aligned}$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

2.

$$\begin{aligned} D(CX) &= E(C^2X^2) - [E(CX)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2[E(X^2) - [E(X)]^2] = C^2D(X) \end{aligned}$$

$$D(X+C)$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

2.

$$\begin{aligned} D(CX) &= E(C^2X^2) - [E(CX)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2[E(X^2) - [E(X)]^2] = C^2D(X) \end{aligned}$$

$$D(X+C) = E[(X+C-E(X+C))^2]$$

证明.

1. $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$
2.

$$\begin{aligned} D(CX) &= E(C^2X^2)-[E(CX)]^2=C^2E(X^2)-C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2[E(X^2)-[E(X)]^2]=C^2D(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X+C) &= E[(X+C-E(X+C))^2] \\ &= E[(X-E(X))^2] \end{aligned}$$

证明.

1. $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0.$

2.

$$\begin{aligned} D(CX) &= E(C^2X^2) - [E(CX)]^2 = C^2E(X^2) - C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2[E(X^2) - [E(X)]^2] = C^2D(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X+C) &= E[(X+C-E(X+C))^2] \\ &= E[(X-E(X))^2] \\ &= D(X) \end{aligned}$$

3. $D(X+Y)$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

若 X, Y 相互独立，则

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

若 X, Y 相互独立, 则

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2] + E[(Y-E(Y))^2] + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

若 X, Y 相互独立, 则

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= E\left[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)Y\right]$$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\Big(X+Y-E(X+Y)\Big)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

若 X, Y 相互独立, 则

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= E\Big[XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)Y\Big]$$

$$= E(X)E(Y)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

3. $D(X+Y)$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right] \\
&= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2] \\
&= E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].
\end{aligned}
$$

若 X, Y 相互独立, 则

$$
\begin{aligned}
&E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\
&= E\left[XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)Y\right] \\
&= E(X)E(Y)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

3. $D(X+Y)$

$$= E\left[\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2\right]$$

$$= E[((X-E(X))+(Y-E(Y)))^2]$$

$$= E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

若 X, Y 相互独立, 则

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= E\left[XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)Y\right]$$

$$= E(X)E(Y)-E(X)E(Y)-E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$= 0.$$

用归纳法可证明多个的情况.

4. 充分性.

4. 充分性. 设

$$P(X = E(X)) = 1$$

4. 充分性. 设

$$P(X = E(X)) = 1$$

则

$$P(X^2 = E(X)^2) = 1$$

4. 充分性. 设

$$P(X = E(X)) = 1$$

则

$$P(X^2 = E(X)^2) = 1$$

所以

$$E(X^2) = E(X)^2$$

4. 充分性. 设

$$P(X = E(X)) = 1$$

则

$$P(X^2 = E(X)^2) = 1$$

所以

$$E(X^2) = E(X)^2$$

所以

$$D(X) = 0$$

4. 充分性. 设

$$P(X = E(X)) = 1$$

则

$$P(X^2 = E(X)^2) = 1$$

所以

$$E(X^2) = E(X)^2$$

所以

$$D(X) = 0$$

必要性的证明稍后给出.

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2 \neq 0$.

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2 \neq 0$.

记

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2 \neq 0$.
记
$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$
试计算 X^* 的期望和方差.

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$E(X^*)$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2 \neq 0$.
记

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$E(X^*) \quad = \quad E(\frac{X-\mu}{\sigma})$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$E(X^*) \quad = \quad E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2 \neq 0$.
记

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu] \end{aligned}$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$.
记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$D(X^*)$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$.

记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$$D(X^*) = E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$.

记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$$D(X^*) = E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-E(X))^2]$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-E(X))^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \end{aligned}$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$.
记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-E(X))^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1 \end{aligned}$$

例 2.12

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}.$$

试计算 X^* 的期望和方差.

解.

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E[(X^*)^2]-[E(X^*)]^2=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-E(X))^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1 \end{aligned}$$

由于这个原因, X^* 称为 X 的标准化.

① 离散随机变量的例子

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布，

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布, 其分布律为

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布, 其分布律为

$$P(X=0)=1-p, \quad P(X=1)=p,$$

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布, 其分布律为

$$P(X=0)=1-p, \quad P(X=1)=p,$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p,$$

$$E(X^2)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布, 其分布律为

$$P(X=0)=1-p, \quad P(X=1)=p,$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p,$$
$$E(X^2)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

所以

§3. 例子

① 离散随机变量的例子

例 2.13 (0-1 分布)

设随机变量 X 具有 $(0-1)$ 分布, 其分布律为

$$P(X=0)=1-p, \quad P(X=1)=p,$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p,$$
$$E(X^2)=0\times(1-p)+1\times p=p.$$

所以

$$D(X)=p-p^2=p(1-p).$$

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n, p)$, 即

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n, p)$, 即

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

求 $E(X), D(X)$.

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n,p)$, 即

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n,p)$, 即

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$$

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n,p)$, 即

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q=1-p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n, p)$, 即

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n,p)$, 即

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} \end{aligned}$$

例 2.14 (二项分布)

设 X 服从二项分布: $X \sim b(n,p)$, 即

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1-p.$$

求 $E(X), D(X)$.

解. **方法 1: 直接计算.**

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} = np(p+q)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X = k)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} knp C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} knpC_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} knp C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np \cdot (n-1)p + np(p+q)^{n-1} \\
&= np \cdot (n-1)p + np = np(np+1-p)
\end{aligned}
$$

$$
D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(np+q) - n^2 p^2 = np(1-p).
$$

方法 2: 二项分布 X 代表 n 重伯努利试验中事件 A 成功的次数.

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{A在第 } k \text{ 次试验时发生}, \\ 0 & \text{A在第 } k \text{ 次试验时不发生}, \end{cases}$$

则

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

X_k 只与第 k 次试验有关, 各次试验相互独立, 故 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.

设 $P(A)=p$, X_k 服从 $0-1$ 分布,

$$E(X_k)=p, D(X_k)=p(1-p).$$

所以

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=np,$$

由独立性,

$$D(X)=D(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=np(1-p).$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$,

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X)$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \end{aligned}$$

例 2.15

设 X 服从泊松分布, $X \sim \pi(\lambda)$, 即

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \lambda > 0.$$

求 $E(X), D(X)$.

解.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

而

而

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

而

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

而

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

所以

而

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1)+k] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda.$$

习题 4 (几何分布)

习题 4 (几何分布)

以 X 表示无穷次伯努利试验中第一次成功时所进行的试验次数. 则

$$\{X=k\}=\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A.$$

若 $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p)$,

$$P(X=k)$$

习题 4 (几何分布)

以 X 表示无穷次伯努利试验中第一次成功时所进行的试验次数. 则

$$\{X=k\}=\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A.$$

若 $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p)$,

$$P(X=k) \quad = \quad P(\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A)$$

习题 4 (几何分布)

以 X 表示无穷次伯努利试验中第一次成功时所进行的试验次数. 则

$$\{X=k\}=\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A.$$

若 $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p)$,

$$P(X=k) \quad = \quad P(\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A)=\underbrace{P(\bar{A})\cdots P(\bar{A})}_{k-1}P(A)$$

习题 4 (几何分布)

以 X 表示无穷次伯努利试验中第一次成功时所进行的试验次数. 则

$$\{X=k\}=\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A.$$

若 $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p)$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A)=\underbrace{P(\bar{A})\cdots P(\bar{A})}_{k-1}P(A) \\ &= q^{k-1}p. \end{aligned}$$

习题 4 (几何分布)

以 X 表示无穷次伯努利试验中第一次成功时所进行的试验次数. 则

$$\{X=k\}=\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A.$$

若 $P(A)=p, P(\overline{A})=q=1-p)$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(\underbrace{\bar{A}\cdots\bar{A}}_{k-1}A)=\underbrace{P(\bar{A})\cdots P(\bar{A})}_{k-1}P(A) \\ &= q^{k-1}p. \end{aligned}$$

即 $X\sim G(p)$. 求 $E(X), D(X)$.

习题 5

习题 5

考虑随机变量 X, 其概率分布律是

$$p_k = P\left(X = (-1)^k \frac{2^k}{k}\right) = 2^{-k}.$$

② 连续型随机变量的例子

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a, b)$, 求 $E(X), D(X)$.

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X), D(X)$.

解.

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a, b)$, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此

② 连续型随机变量的例子

例 2.16

设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \\ E(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}, \\ D(X) &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$E(X)$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$E(X) = \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^{\infty} x de^{-\frac{x}{\theta}}$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^{\infty} x d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^\infty x d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta, \\ E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \end{aligned}$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta>0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\int_0^\infty xde^{-\frac{x}{\theta}}=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta,\\
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=-\int_0^\infty x^2de^{-\frac{x}{\theta}}
\end{aligned}$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^\infty x d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta, \\ E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^\infty x^2 d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^\infty 2x e^{-\frac{x}{\theta}} dx \end{aligned}$$

例 2.17 (指数分布)

设 X 服从参数为 $\theta > 0$ 的指数分布, 求 $E(X), D(X)$.

解. X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

所以

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^\infty x d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta, \\ E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -\int_0^\infty x^2 d e^{-\frac{x}{\theta}} = \int_0^\infty 2x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 2\theta^2, \\ D(X) &= 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2. \end{aligned}$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X)$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z + \mu)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z + \mu)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \end{aligned}$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z + \mu)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z + \mu)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= \mu. \end{aligned}$$

所以现在我们知道了 $N(\mu, \sigma^2)$ 中 μ 的意义:

例 2.18

设 X 服从正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 $E(X), D(X)$.

解.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

作变量代换 $x = \sigma z + \mu$, 则上述积分等于

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z + \mu)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \\ &= \mu. \end{aligned}$$

所以现在我们知道了 $N(\mu, \sigma^2)$ 中 μ 的意义：

它是 X 的期望.

令 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$,

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le \sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$,

令 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z \leq x) = P(X \leq \sigma x + \mu) = \int_{-\infty}^{\sigma x+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad (\text{作变换: } t = \frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z \sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\leq x)=P(X\leq\sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le \sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (作变换: t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0$.

$$D(Z)$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le \sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0.$

$$D(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le\sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0$.

$$D(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}}$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\leq x)=P(X\leq \sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0$.

$$\begin{aligned} D(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \left[-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le\sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$
$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0$.

$$\begin{aligned}D(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}}\\ &= \left[-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\end{aligned}$$

令 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则

$$P(Z\le x)=P(X\le\sigma x+\mu)=\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \qquad (\text{作变换: } t=\frac{u-\mu}{\sigma})$$

因此 $Z\sim N(0,1)$, Z 的概率密度为

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

有 $E(Z)=0$.

$$\begin{aligned} D(Z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \left[-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

由于

由于

$$X = \sigma Z + \mu,$$

由于

$$X = \sigma Z + \mu,$$

故

由于

$$X = \sigma Z + \mu,$$

故

$$\begin{aligned} E(X) &= \sigma E(Z) + \mu = \mu, \\ D(X) &= \sigma^2 D(Z) = \sigma^2. \end{aligned}$$

总结一下这个例子，我们可以得到

总结一下这个例子，我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

总结一下这个例子，我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则

总结一下这个例子，我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

总结一下这个例子，我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

(b) 反之，设 X 服从正态分布，且

总结一下这个例子, 我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

(b) 反之, 设 X 服从正态分布, 且

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2,$$

总结一下这个例子，我们可以得到

命题 2.1

(a) 设

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

(b) 反之，设 X 服从正态分布，且

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2,$$

则

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

证明.

证明. 第一部分刚刚已经证明.

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

因为 X 服从正态分布,

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

因为 X 服从正态分布, 所以由定义, 存在 $\mu', \sigma' > 0$, 使得

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

因为 X 服从正态分布, 所以由定义, 存在 $\mu', \sigma' > 0$, 使得

$$X \sim N(\mu', \sigma'^2)$$

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

因为 X 服从正态分布, 所以由定义, 存在 $\mu', \sigma' > 0$, 使得

$$X \sim N(\mu', \sigma'^2)$$

由上例, 必有 $E(X) = \mu' = \mu, D(X) = \sigma'^2 = \sigma^2$. 故

证明. 第一部分刚刚已经证明. 下面证第二部分.

因为 X 服从正态分布, 所以由定义, 存在 $\mu', \sigma' > 0$, 使得

$$X \sim N(\mu', \sigma'^2)$$

由上例, 必有 $E(X) = \mu' = \mu, D(X) = \sigma'^2 = \sigma^2$. 故

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

推论 2.1

若

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

推论 2.1

若
$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$
且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,
$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$$

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$$

证明.

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$$

证明. 之前已经证明 $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ 服从正态分布.

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$$

证明. 之前已经证明 $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ 服从正态分布.
由上一命题,

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

$$\sum_{i=1}^n C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n C_i \mu_i, \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2)$$

证明. 之前已经证明 $\sum_{i=1}^n C_i X_i$ 服从正态分布.
由上一命题,

$$E[\sum_{i=1}^n C_i X_i] = \sum_{i=1}^n C_i \mu_i$$

推论 2.1

若

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则对任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$$

证明. 之前已经证明 $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ 服从正态分布.
由上一命题,

$$E[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i$$

$$D[\sum_{i=1}^{n} C_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2$$

所以推论获证.

习题 6

设活塞的直径 (以 cm 计)$X \sim N(22.40, 0.03^2)$,
气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, 且 X, Y 相互独立.
任取一只活塞, 任取一只气缸, 求活塞能装入气缸的概率.

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式

现在考虑下面的问题：

切比雪夫不等式

现在考虑下面的问题：设 X 是随机变量，

切比雪夫不等式

现在考虑下面的问题：设 X 是随机变量,

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

切比雪夫不等式

现在考虑下面的问题：设 X 是随机变量，

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

能否用 μ 与 σ^2 控制

切比雪夫不等式

现在考虑下面的问题：设 X 是随机变量，

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

能否用 μ 与 σ^2 控制

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon), \ \varepsilon > 0.$$

定理 2.4 (切比雪夫不等式)

定理 2.4 (切比雪夫不等式)

设 X 是随机变量,

定理 2.4 (切比雪夫不等式)

设 X 是随机变量, 且

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

定理 2.4 (切比雪夫不等式)

设 X 是随机变量, 且

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 有

定理 2.4 (切比雪夫不等式)

设 X 是随机变量, 且

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

则 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$P\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

证明.

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$,

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.
设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx
\end{aligned}
$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$
\begin{aligned}
P\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} |x-\mu|^2 f(x)dx
\end{aligned}
$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} |x-\mu|^2 f(x)dx \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 f(x)dx
\end{aligned}
$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} |x-\mu|^2 f(x)dx \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu|^2 f(x)dx \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E((X-E(X))^2) \\
&= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

类似可以证明：

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量，$E(X)$ 存在，

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量，$E(X)$ 存在，则 $\forall a > 0$,

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量，$E(X)$ 存在，则 $\forall a > 0$,

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

类似可以证明:

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量, $E(X)$ 存在, 则 $\forall a > 0$,

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$,

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量，$E(X)$ 存在，则 $\forall a > 0$,

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $\forall a > 0$,

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{a} xf(x)dx + \int_a^{\infty} xf(x)dx$$

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量, $E(X)$ 存在, 则 $\forall a > 0$,

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则 $\forall a > 0$,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^a xf(x)dx + \int_a^\infty xf(x)dx \\ &\geq \int_a^\infty xf(x)dx \geq a\int_a^\infty f(x)dx = a(1 - \int_0^a f(x)dx) \end{aligned}$$

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量, $E(X)$ 存在, 则 $\forall a>0$,

$$P(X>a)\leq\frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则 $\forall a>0$,

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{a}xf(x)dx+\int_a^{\infty}xf(x)dx\\&\geq\int_a^{\infty}xf(x)dx\geq a\int_a^{\infty}f(x)dx=a(1-\int_0^{a}f(x)dx)\\&=a(1-P(X\leq a))\end{aligned}$$

类似可以证明：

定理 2.5 (Markov 不等式)

设 X 是只取非负值的随机变量，$E(X)$ 存在，则 $\forall a > 0$，

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

证明. 只就连续型随机变量的情况证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $\forall a > 0$，

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{a} xf(x)dx + \int_a^{\infty} xf(x)dx \\
&\geq \int_a^{\infty} xf(x)dx \geq a\int_a^{\infty} f(x)dx = a(1 - \int_0^{a} f(x)dx) \\
&= a(1 - P(X \leq a)) \\
&= aP(X > a).
\end{aligned}$$

定理 2.6

设 X 是随机变量, $E(|X|^2)$ 存在,

定理 2.6

设 X 是随机变量, $E(|X|^2)$ 存在, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

定理 2.6

设 X 是随机变量, $E(|X|^2)$ 存在, 则 $\forall\varepsilon > 0$,

$$P(|X| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}E(|X|^2).$$

证明.

$$P(|X| > \varepsilon) = P(X^2 > \varepsilon^2) \le \frac{E(|X|^2)}{\varepsilon^2}.$$

应用举例.

应用举例.

推论 2.2

设 X 是随机变量,

应用举例.

推论 2.2

设 X 是随机变量, $D(X)=0$ 的充分必要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即

应用举例.

推论 2.2

设 X 是随机变量, $D(X)=0$ 的充分必要条件是 X 以概率 1 取常数 $E(X)$, 即

$$P(X=E(X))=1.$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式,

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X) = 0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X - E(X)| \geq \frac{1}{n}) \leq n^2\sigma^2 = 0.$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq\frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq\frac{1}{n}\},$$

所以

$$P(X\neq E(X))$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

$$P(X\neq E(X)) \quad = \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right)$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

$$\begin{aligned} P(X\neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) \end{aligned}$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

$$\begin{aligned} P(X\neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right)=0 \end{aligned}$$

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}) \leq n^2\sigma^2 = 0.$$

注意

$$\{X \neq E(X)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

$$\begin{aligned} P(X \neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) = 0 \end{aligned}$$

因此

证明. 充分性已证过. 现证必要性:

设 $D(X)=0$, 由切比雪夫不等式, $\forall n$,

$$P(|X-E(X)|\geq \frac{1}{n})\leq n^2\sigma^2=0.$$

注意

$$\{X\neq E(X)\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\},$$

所以

$$\begin{aligned} P(X\neq E(X)) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\right)=0 \end{aligned}$$

因此

$$P(X=E(X))=1-P(X\neq E(X))=1.$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明.

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性:

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$,

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$.

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性: 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性：设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性:

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性：设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$,

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性: 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性：设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\leq n^2E(X^2)=0$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\leq n^2E(X^2)=0$$

所以

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\leq n^2E(X^2)=0$$

所以

$$P(X\neq 0)$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\leq n^2E(X^2)=0$$

所以

$$P(X\neq 0) \quad = \quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X|>\frac{1}{n}\})$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性： 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\leq n^2E(X^2)=0$$

所以

$$\begin{aligned} P(X\neq 0) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X|>\frac{1}{n}\}) \\ &= \lim_{n\to\infty}P(\{|X|>\frac{1}{n}\}) \end{aligned}$$

推论 2.3

$P(X=0)=1$ 的充要条件是: $E(X^2)=0$.

证明. 必要性: 设 $P(X=0)=1$, 则 $P(X^2=0)=1$. 所以

$$E(X^2)=0\times 1=0.$$

充分性: $\forall n$, 由上述定理,

$$P(|X|>\frac{1}{n})\le n^2E(X^2)=0$$

所以

$$\begin{aligned} P(X\neq 0) &= P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|X|>\frac{1}{n}\}) \\ &= \lim_{n\to\infty}P(\{|X|>\frac{1}{n}\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

习题 7

设某校的运动衫由某种积分交换，每件运动衫所需的积分 Z 是随机且独立的，它的分布律为：

Z	0	1	2
p_k	0.3	0.6	0.1

(1) 求 Z 的期望与方差.

(2) 某学院想获得 100 件运动衫，求所需积分 X 的期望与方差.

(3) 用切比雪夫不等式估计该学院至少需有多少积分才能保证有 99% 的概率获得 100 件运动衫？

解.

(1) $E(Z)$

(1) $E(Z)=0\cdot 0.3+1\cdot 0.6+2\cdot 0.1=0.8$;

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$;

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36$,

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分,

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100},$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80,$

(1) $E(Z)=0\cdot 0.3+1\cdot 0.6+2\cdot 0.1=0.8;$

$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=1\cdot 0.6+2^2\cdot 0.1-0.8^2=1-0.64=0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100}=Z_1+Z_2+\cdots+Z_{100}$,

$E(X_{100})=100\cdot 0.8=80,$

由 Z_j 之间的独立性,

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80,$

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$;

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36$,

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80$,

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80,$

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$P(X_{100} < a) = P(X - 80 < a - 80)$$

(1) $E(Z)=0\cdot 0.3+1\cdot 0.6+2\cdot 0.1=0.8;$

$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=1\cdot 0.6+2^2\cdot 0.1-0.8^2=1-0.64=0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100}=Z_1+Z_2+\cdots+Z_{100}$,

$E(X_{100})=100\cdot 0.8=80,$

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2=D(X_{100})=100\cdot 0.36=36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a>80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$\begin{aligned}P(X_{100}<a)&=P(X-80<a-80)\\&\geq P(|X-80|<a-80)=1-P(|X-80|\geq a-80)\\&\geq 1-\frac{36}{(a-80)^2}.\end{aligned}$$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$;

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36$,

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80$,

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$\begin{aligned} P(X_{100} < a) &= P(X - 80 < a - 80) \\ &\geq P(|X - 80| < a - 80) = 1 - P(|X - 80| \geq a - 80) \\ &\geq 1 - \frac{36}{(a-80)^2}. \end{aligned}$$

$1 - \frac{36}{(a-80)^2} \geq 0.99$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80,$

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$\begin{aligned} P(X_{100} < a) &= P(X - 80 < a - 80) \\ &\geq P(|X - 80| < a - 80) = 1 - P(|X - 80| \geq a - 80) \\ &\geq 1 - \frac{36}{(a - 80)^2}. \end{aligned}$$

$1 - \frac{36}{(a-80)^2} \geq 0.99 \iff \frac{36}{(a-80)^2} \leq 0.01$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$;

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36$,

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80$,

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$
\begin{aligned}
P(X_{100} < a) &= P(X - 80 < a - 80) \\
&\geq P(|X - 80| < a - 80) = 1 - P(|X - 80| \geq a - 80) \\
&\geq 1 - \frac{36}{(a-80)^2}.
\end{aligned}
$$

$$1 - \frac{36}{(a-80)^2} \geq 0.99 \iff \frac{36}{(a-80)^2} \leq 0.01 \iff (a-80)^2 \geq 3600$$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8;$

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36,$

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80,$

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$\begin{aligned} P(X_{100} < a) &= P(X - 80 < a - 80) \\ &\geq P(|X - 80| < a - 80) = 1 - P(|X - 80| \geq a - 80) \\ &\geq 1 - \frac{36}{(a-80)^2}. \end{aligned}$$

$1 - \frac{36}{(a-80)^2} \geq 0.99 \iff \frac{36}{(a-80)^2} \leq 0.01 \iff (a - 80)^2 \geq 3600$
$\iff a - 80 \geq 60 \iff a \geq 140.$

(1) $E(Z) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.1 = 0.8$;

$D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \cdot 0.6 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.8^2 = 1 - 0.64 = 0.36$,

(2) 设 Z_j 为第 j 件运动衫所需积分, 则换 100 件运动衫所需总积分为 $X_{100} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100}$,

$E(X_{100}) = 100 \cdot 0.8 = 80$,

由 Z_j 之间的独立性, $\sigma^2 = D(X_{100}) = 100 \cdot 0.36 = 36$

(3) 设 a 为学院已有积分, 设 $a > 80$, 由 Tchebychev 不等式,

$$\begin{aligned} P(X_{100} < a) &= P(X - 80 < a - 80) \\ &\geq P(|X - 80| < a - 80) = 1 - P(|X - 80| \geq a - 80) \\ &\geq 1 - \frac{36}{(a-80)^2}. \end{aligned}$$

$1 - \frac{36}{(a-80)^2} \geq 0.99 \Longleftrightarrow \frac{36}{(a-80)^2} \leq 0.01 \Longleftrightarrow (a-80)^2 \geq 3600$

$\Longleftrightarrow a - 80 \geq 60 \Longleftrightarrow a \geq 140$.

故至少要有 140 积分, 才能保证有 99% 的概率获得 100 件运动衫.

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

要衡量两个随机变量间的相依关系, 我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量,

§4. 协方差及相关系数

要衡量两个随机变量间的相依关系, 我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量, 令

§4. 协方差及相关系数

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量，令

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big)$$

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量，令

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big)$$

称为 X 与 Y 的协方差；

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量，令

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big)$$

称为 X 与 Y 的协方差；再令

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量，令

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big)$$

称为 X 与 Y 的协方差；再令

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

要衡量两个随机变量间的相依关系，我们需要引进相关系数的概念.

定义 3.4

设 X, Y 是随机变量，令

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big([X - E(X)][Y - E(Y)]\Big)$$

称为 X 与 Y 的协方差；再令

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

称为 X 与 Y 的相关系数.

简单事实.

简单事实.

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

简单事实.

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. $\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$.

简单事实.

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. $\mathrm{Cov}(X, X) = D(X)$.
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

简单事实.

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$.
2. $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$.
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
4. $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

性质:

性质:

1. 设 a, b 是常数,

性质:

1. 设 a, b 是常数, 则

$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

性质:

1. 设 a, b 是常数, 则
$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

2.
$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mathrm{Cov}(X_2, Y).$$

设 X, Y 是随机变量，考虑下面的问题：

设 X, Y 是随机变量，考虑下面的问题：

- 问题:

设 X, Y 是随机变量, 考虑下面的问题:

- 问题:
  以 X 的线性函数 $a + bX$ 来近似 Y,

设 X, Y 是随机变量, 考虑下面的问题:

- 问题:
  以 X 的线性函数 $a + bX$ 来近似 Y,
  怎么确定 a, b 的值, 以使此近似最佳?

设 X, Y 是随机变量，考虑下面的问题：

- 问题:
  以 X 的线性函数 $a + bX$ 来近似 Y,
  怎么确定 a, b 的值，以使此近似最佳？
- 最佳的含义: 使得均方误差

设 X, Y 是随机变量, 考虑下面的问题:

- 问题:
  以 X 的线性函数 $a+bX$ 来近似 Y,
  怎么确定 a, b 的值, 以使此近似最佳?
- 最佳的含义: 使得均方误差

$$e = E[(Y-(a+bX))^2]$$

设 X, Y 是随机变量, 考虑下面的问题:

- 问题:
  以 X 的线性函数 $a+bX$ 来近似 Y,
  怎么确定 a, b 的值, 以使此近似最佳?
- 最佳的含义: 使得均方误差

$$e = E[(Y-(a+bX))^2]$$

最小.

解.

$$e =$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值,

解.

$$e = E(Y^2) + b^2E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \end{cases}$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值，令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)} \\ \end{cases}$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)} \\ a_0 = E(Y) - E(X)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}. \end{cases}$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值, 令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)} \\ a_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}. \end{cases}$$

此时

$$e_0$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)} \\ a_0 = E(Y) - E(X)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}. \end{cases}$$

此时

$$e_0 = E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\}$$

解.

$$e = E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y).$$

为求 e 的最小值，令

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)} \\ a_0 = E(Y) - E(X)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}. \end{cases}$$

此时

$$\begin{aligned} e_0 &= E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\} \\ &= (1 - \rho_{XY}^2)D(Y) \end{aligned}$$

由这个推导过程，可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

由这个推导过程，可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \le 1$.

由这个推导过程，可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \leq 1.$
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是:

由这个推导过程, 可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$.
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是: 存在常数 a, b, 使得

$$P(Y = a + bX) = 1.$$

由这个推导过程, 可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \le 1$.
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是: 存在常数 a, b, 使得
$$P(Y = a + bX) = 1.$$

证明. 1. 因为

$$0 \le e_0 = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y)$$

由这个推导过程, 可以看出 ρ_{XY} 的下述性质:

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \le 1$.
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是: 存在常数 a, b, 使得
$$P(Y = a + bX) = 1.$$

证明. 1. 因为
$$0 \le e_0 = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y)$$
所以 $\rho_{XY}^2 \le 1$,

由这个推导过程，可以看出 ρ_{XY} 的下述性质：

定理 3.7

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$.
2. $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是：存在常数 a, b，使得

$$P(Y = a + bX) = 1.$$

证明. 1. 因为

$$0 \leq e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

所以 $\rho_{XY}^2 \leq 1$，即

$$|\rho_{XY}| \leq 1.$$

2. 因为

2. 因为

$$0 \leq e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y),$$

2. 因为

$$0 \leq e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y),$$

所以 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是 $e_0 = 0$,

2. 因为

$$0 \le e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y),$$

所以 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是 $e_0 = 0$, 即

$$E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\} = 0,$$

2. 因为

$$0 \leq e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y),$$

所以 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是 $e_0 = 0$, 即

$$E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\} = 0,$$

此式成立的充要条件是

$$P(Y - (a_0 + b_0 X) = 0) = 1$$

2. 因为

$$0 \le e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y),$$

所以 $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是 $e_0 = 0$, 即

$$E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\} = 0,$$

此式成立的充要条件是

$$P(Y-(a_0+b_0X)=0) = 1$$

即

$$P(Y = a_0 + b_0X) = 1.$$

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明,

等式

$$e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

如果 $\rho_{XY}=0$, 即 $b_0=0$,

等式

$$e_0 = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

如果 $\rho_{XY} = 0$, 即 $b_0 = 0$, 则说明完全不可能用 X 的线性函数来近似 Y.

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

如果 $\rho_{XY}=0$, 即 $b_0=0$, 则说明完全不可能用 X 的线性函数来近似 Y. 所以我们有下述定义.

等式

$$e_0 = (1 - \rho_{XY}^2) D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

如果 $\rho_{XY} = 0$, 即 $b_0 = 0$, 则说明完全不可能用 X 的线性函数来近似 Y. 所以我们有下述定义.

定义 3.5

若 $\rho_{XY} = 0$, 即 $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$,

等式

$$e_0 = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

说明, $|\rho_{XY}|$ 越大, 用 X 的线性函数近似 Y 时能达到的效果就越好,

因此 ρ_{XY} 描述了 X 和 Y 的相关程度.

如果 $\rho_{XY}=0$, 即 $b_0=0$, 则说明完全不可能用 X 的线性函数来近似 Y. 所以我们有下述定义.

定义 3.5

若 $\rho_{XY}=0$, 即 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, 则称 X, Y 不相关.

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立,

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$\mathrm{Cov}(X, Y)$$

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

所以 $\rho_{XY} = 0$,

我们以前学过独立性的概念. 不相关和独立性之间的关系是:

定理 3.8

若 X, Y 相互独立, 则它们不相关.

证明. 设 X, Y 独立, 则

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

所以 $\rho_{XY} = 0$, 即 X, Y 不相关.

但不相关不一定独立.

但不相关不一定独立.

例 3.19

设 X, Y 的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P(Y=j)$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

但不相关不一定独立.

例 3.19

设 X, Y 的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P(Y=j)$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

故

$$P(X=-2, Y=1)=0 \neq P(X=-2)P(Y=1)=\frac{1}{8}$$

但不相关不一定独立.

例 3.19

设 X, Y 的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P(Y=j)$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

故

$$P(X=-2, Y=1) = 0 \neq P(X=-2)P(Y=1) = \frac{1}{8}$$

所以 X, Y 不独立.

但是

$$E(X) = 0,$$

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$,

$$\rho_{XY} = 0$$

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$

$$\rho_{XY} = 0$$

因此 X, Y 不相关.

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$

$$\rho_{XY} = 0$$

因此 X, Y 不相关.

这是离散型随机变量不相关但不独立的例子.

但是

$$E(X) = 0, \quad E(Y) = \frac{5}{2},$$

$$E(XY) = 0,$$

所以, $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$

$$\rho_{XY} = 0$$

因此 X, Y 不相关.

这是离散型随机变量不相关但不独立的例子.
下面看一个连续型的例子.

习题 8

设 θ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布,

$$X = \cos\theta, \quad Y = \cos(\theta + \alpha)$$

其中 α 是常数. X 与 Y 何时不相关? 它们相互独立吗?

解.

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$
$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)dt=\frac{1}{2},$$

我们有，

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)dt=\frac{1}{2},\ \ D(Y)=\frac{1}{2},$$

我们有,

$$E(X) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos t dt = 0,$$

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(t+\alpha) dt = 0,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}, \ \ D(X) = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t+\alpha) dt = \frac{1}{2}, \ \ D(Y) = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cos(t+\alpha) dt = \frac{1}{2} \cos \alpha,$$

我们有，

$$E(X) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos t dt = 0,$$

$$E(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(t+\alpha) dt = 0,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}, \ \ D(X) = \frac{1}{2},$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t+\alpha) dt = \frac{1}{2}, \ \ D(Y) = \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \cos(t+\alpha) dt = \frac{1}{2} \cos\alpha,$$

因此，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)dt=\frac{1}{2},\ \ D(Y)=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cos(t+\alpha)dt=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

因此,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)dt=\frac{1}{2},\ \ D(Y)=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cos(t+\alpha)dt=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

因此,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

$$\rho=\cos\alpha$$

我们有,

$$E(X)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos t dt=0,$$

$$E(Y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(t+\alpha)dt=0,$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\frac{1}{2},\ \ D(X)=\frac{1}{2},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(t+\alpha)dt=\frac{1}{2},\ \ D(Y)=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\cos(t+\alpha)dt=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

因此,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

$$\rho=\cos\alpha$$

所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, X,Y 不相关.

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

但

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0,$$

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

但

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0, \quad P(|Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0,$$

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

但

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0, \quad P(|Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0,$$

从而

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}) P(|Y| < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

此时

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

所以

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

但

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0, \quad P(|Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0,$$

从而

$$P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}}, |Y| < \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq P(|X| < \frac{1}{\sqrt{2}})P(|Y| < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

故 X, Y 不独立.

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$,

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 概率密度是:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\
& \left.\left. - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 概率密度是:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

求 X, Y 的相关系数.

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 概率密度是:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.$$

求 X, Y 的相关系数.

解. 我们曾求出 (X, Y) 的边缘概率密度为

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 概率密度是:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

求 X, Y 的相关系数.

解. 我们曾求出 (X, Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

如果 (X, Y) 服从二维正态分布, 则两者等价.

例 3.20

设 X, Y 服从二维正态分布, $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 概率密度是:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

求 X, Y 的相关系数.

解. 我们曾求出 (X, Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad -\infty < y < \infty,$$

因此

因此

$$E(X) = \mu_1,\ D(X) = \sigma_1^2,$$

因此

$$E(X) = \mu_1,\ D(X) = \sigma_1^2,$$
$$E(Y) = \mu_2,\ D(Y) = \sigma_2^2$$

因此

$$E(X)=\mu_1,\ D(X)=\sigma_1^2,$$
$$E(Y)=\mu_2,\ D(Y)=\sigma_2^2$$

而

$\mathrm{Cov}(X, Y)$

因此

$$E(X) = \mu_1, \;\; D(X) = \sigma_1^2,$$
$$E(Y) = \mu_2, \;\; D(Y) = \sigma_2^2$$

而

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

因此

$$E(X) = \mu_1, \ \ D(X) = \sigma_1^2,$$
$$E(Y) = \mu_2, \ \ D(Y) = \sigma_2^2$$

而

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令

因此

$$E(X)=\mu_1,\ D(X)=\sigma_1^2,$$
$$E(Y)=\mu_2,\ D(Y)=\sigma_2^2$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

因此

$$E(X)=\mu_1,\ \ D(X)=\sigma_1^2,$$
$$E(Y)=\mu_2,\ \ D(Y)=\sigma_2^2$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

令

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$
$$u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},$$

则有

则有

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\exp(-\frac{u^2+t^2}{2})dtdu$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\exp(-\frac{u^2+t^2}{2})dtdu \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right) \\
&\quad+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}t\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right)
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\exp(-\frac{u^2+t^2}{2})dtdu \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right) \\
&\quad+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}t\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right) \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}+0
\end{aligned}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2\right)\exp(-\frac{u^2+t^2}{2})dtdu \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right) \\
&\quad + \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u\exp(-\frac{u^2}{2})du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}t\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right) \\
&= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}+0 \\
&= \rho\sigma_1\sigma_2
\end{aligned}
$$

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

因此当 X, Y 不相关时,

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

因此当 X, Y 不相关时, 即 $\rho_{XY} = 0$ 时,

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

因此当 X, Y 不相关时, 即 $\rho_{XY} = 0$ 时,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

所以

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho$$

因此当 X, Y 不相关时，即 $\rho_{XY} = 0$ 时，

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

即 X, Y 相互独立.

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

§5. 矩、协方差矩阵

设 X, Y 是随机变量，$k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在，

§5. 矩、协方差矩阵

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的k 阶原点矩, 简称k 阶矩.

§5. 矩、协方差矩阵

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在,

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称为 X 的 k 阶中心矩.

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称为 X 的 k 阶中心矩.
- 若 $E[X^k Y^\ell]$ 存在,

§5. 矩、协方差矩阵

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称为 X 的 k 阶中心矩.
- 若 $E[X^k Y^\ell]$ 存在, 则称为 X 和 Y 的 $k+\ell$ 阶混合矩.

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称为 X 的 k 阶中心矩.
- 若 $E[X^k Y^\ell]$ 存在, 则称为 X 和 Y 的 $k+\ell$ 阶混合矩.
- 若 $E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^\ell]$ 存在,

§5. 矩、协方差矩阵

设 X, Y 是随机变量, $k, \ell = 1, 2, \cdots$.

- 若 $E[X^k]$ 存在, 则称为 X 的 k 阶原点矩, 简称 k 阶矩.
- 若 $E\{[X - E(X)]^k\}$ 存在, 则称为 X 的 k 阶中心矩.
- 若 $E[X^k Y^\ell]$ 存在, 则称为 X 和 Y 的 $k+\ell$ 阶混合矩.
- 若 $E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^\ell]$ 存在, 则称为 X, Y 的 $k+\ell$ 阶混合中心矩.

设 X_1, X_2 为随机变量，

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

$$c_{11} = E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

$$c_{11} = E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

$$c_{12} = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

$$c_{11} = E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

$$c_{12} = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

$$c_{21} = E[(X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1))]$$

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

$$c_{11} = E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

$$c_{12} = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

$$c_{21} = E[(X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1))]$$

$$c_{22} = E[(X_2 - E(X_2))^2]$$

则矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

设 X_1, X_2 为随机变量, 且下面四个量都存在

$$c_{11} = E[(X_1 - E(X_1))^2]$$

$$c_{12} = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

$$c_{21} = E[(X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1))]$$

$$c_{22} = E[(X_2 - E(X_2))^2]$$

则矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

称为 X_1, X_2 的协方差矩阵.

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明.

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明. 设 (a_1, a_2) 是任意实向量.

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明. 设 (a_1, a_2) 是任意实向量. 则

$$(a_1, a_2)\, C \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明. 设 (a_1, a_2) 是任意实向量. 则

$$(a_1, a_2)C\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_{11}a_1^2 + c_{12}a_1a_2 + c_{21}a_2a_1 + c_{22}a_2^2$$

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明. 设 (a_1, a_2) 是任意实向量. 则

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2)C\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= c_{11}a_1^2 + c_{12}a_1a_2 + c_{21}a_2a_1 + c_{22}a_2^2 \\
&= E\{\left[a_1(X_1 - E(X_1)) + a_2(X_2 - E(X_2))\right]^2\}
\end{aligned}
$$

定理 4.9

C 为非负定矩阵.

证明. 设 (a_1, a_2) 是任意实向量. 则

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2)C\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= c_{11}a_1^2 + c_{12}a_1a_2 + c_{21}a_2a_1 + c_{22}a_2^2 \\
&= E\{\Big[a_1(X_1 - E(X_1)) + a_2(X_2 - E(X_2))\Big]^2\} \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

设二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为

$$f(x_1, x_2)$$

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

设二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\
& \left.\left. - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

设二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵为

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

设二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right.\right. \\
& \left.\left. - \; 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$
C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}
$$

利用协方差矩阵可以将二维正态分布的概率密度写的比较简洁.

设二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\
& \left.\left. - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

(X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$
C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}
$$

容易求出

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1}$$

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

则

$$(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)$$

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
&(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu) \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].
\end{aligned}$$

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

则

$$(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)$$
$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

因此

容易求出

$$\det C = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

令

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu) \\ = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].\end{aligned}$$

因此

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi(\det C)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right)$$

多维情形

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量.

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

矩阵

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

矩阵

C

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

多维情形

上述关于二维随机变量的概念和结果可平行推广到 n-维情形.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n-维随机变量. 令

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵.

n-维正态随机变量

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量.

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu) \right]$$

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, \cdots, x_n) \\
& \quad = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right]
\end{aligned}
$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, \cdots, x_n) \\
& \qquad = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right]
\end{aligned}
$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,
其中 C 为 n-维正定方阵, μ 为 n-维向量.

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, \cdots, x_n) \\
& \qquad = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu) \right]
\end{aligned}
$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,
其中 C 为 n-维正定方阵, μ 为 n-维向量.
可以证明:

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right]$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,
其中 C 为 n-维正定方阵, μ 为 n-维向量.
可以证明：若

$$(X_1, \cdots, X_n) \sim N(\mu, C)$$

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right]$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,
其中 C 为 n-维正定方阵, μ 为 n-维向量.
可以证明：若

$$(X_1, \cdots, X_n) \sim N(\mu, C)$$

则

$$E[X_i] = \mu_i$$

n-维正态随机变量

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n-维随机变量. 若它有概率密度

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)\right]$$

则称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n-维正态分布 $N(\mu, C)$,
其中 C 为 n-维正定方阵, μ 为 n-维向量.
可以证明：若

$$(X_1, \cdots, X_n) \sim N(\mu, C)$$

则

$$E[X_i] = \mu_i$$

且 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵为 C.