2020秋季学期期中试题解析

填空（每空 1 分）

1. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^2+tx+u$ 的最大公因式是一个二次

多项式,，则 $t=$ __2____ ，$u=$ __0____ .

2. 实系数多项式 x^3+px+q 有一个复根 $3+2i$，则其余两个根是 _$3-2i$_____ ，

_-6_____ .

3. 如果 x^3-x^2-4x+1 的三个根为 a_1，a_2，a_3，则 $\sum a_1^2a_2=$ __-1____ .

提示：$\sum \boldsymbol{a_1^2a_2}=\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}$

4. 已知向量组 $\alpha_1=1,\ 2,\ -1,\ 1^T,\alpha_2=2,\ 0,\ t,\ 0^T,\alpha_3=0,\ -4,$

H308课件

1. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^2+tx+u$ 的最大公因式是一个二

多项式,，则 $t=$ __2____ ，$u=$ __0____ .

2. 实系数多项式 x^3+px+q 有一个复根 $3+2i$，则其余两个根是 _$3-2i$_____ ，

_-6_____ .

3. 如果 x^3-x^2-4x+1 的三个根为 a_1，a_2，a_3，则 $\sum a_1^2a_2=$ __-1____ .

提示：$\sum \boldsymbol{a_1^2a_2}=\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}$

4. 已知向量组 $\alpha_1=1,\ 2,\ -1,\ 1^T,\alpha_2=2,\ 0,\ t,\ 0^T,\alpha_3=0,\ -4,\ 5,\ -2^T$

的秩为 2，则 $t=$ ___3___ .

5. 当 $\alpha =$ __4____ 时，下面的线性方程组无解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 依次是行列式 $|A|$ 的第一、第二、第三、第四列，$\alpha_1,\alpha_3,\gamma,\alpha_2$ 依次是行列式 $|B|$ 的第一、第二、第三、第四列，又已知 $|A| = a$，$|B| = b$，

则，行列式 $|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1,(\beta+\gamma)| =$ _$a+b$_____.

二. 选择正确答案（每题 1 分）

7. $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2$ 是关于 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的 n 元多项式，它（ A ）

二. 选择正确答案（每题 1 分）

7. $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2$ 是关于 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的 n 元多项式，它（ A ）

A. 是对称多项式，首项为 $x_1^5x_2^3x_3^2$； B. 不是对称多项式，首项为 $x_1^5x_2^3x_3^2$；

C. 是对称多项式，首项为 $x_1^5x_2^2x_3^2$； D. 不是对称多项式，首项为 $x_1^2x_2x_3^2$

8. 设向量组(1)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以被向量组(2)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（D）正确.

A. 若 $r<s$，向量组(2)必定线性相关； B. 若 $r>s$，向量组(2)必定线性无关

C. 若 $r<s$，向量组(1)必定线性相关； D. 若 $r>s$，向量组(1)必定线性相关.

9. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，那么 $\begin{vmatrix} 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ 2a_{22} & 2a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{32} & 2a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix} =$（ B ）.

A. 8； B. -16； C. 16； D. 12.

10. 对于线性方程组 $Ax=b$，下列陈述中那一个正确？（ D ）

A. 如果 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

B. 如果 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

C. $Ax=b$ 有唯一解当且仅当 $|A|\neq 0$；

10. 对于线性方程组 $Ax=b$，下列陈述中那一个正确？（ D ）

A. 如果 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

B. 如果 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

C. $Ax=b$ 有唯一解当且仅当 $|A|\neq 0$；

D. 如果 $Ax=b$ 有两个不同解，则 $Ax=0$ 有无穷多解.

三．计算题（每题 3 分）

11. 设 $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$ 与 $g(x)=x^2-x+1$，求其最大公因式 $(f(x),g(x))$，

使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解. $(f(x),g(x))=1$， $u(x)=x$， $v(x)=-3x^2-x+1$

A. 如果 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；

B. 如果 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解；

C. $Ax=b$ 有唯一解当且仅当 $|A|\neq 0$；

D. 如果 $Ax=b$ 有两个不同解，则 $Ax=0$ 有无穷多解.

三．计算题（每题 3 分）

11. 设 $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$ 与 $g(x)=x^2-x+1$，求其最大公因式 $(f(x),g(x))$，

使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解. $(f(x),g(x))=1$， $u(x)=x$， $v(x)=-3x^2-x+1$

12. 设 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$，求其第一行前 $n-1$ 个元素的代

H308课件

12. 设 n 级行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$，求其第一行前 $n-1$ 个元素的代

数余子式之和：$\sum_{j=1}^{n-1}A_{1j}$.

解. $n>2$ 时

$$\sum_{j=1}^{n-1}A_{1j}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}&0&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\end{vmatrix}=n!(1-\sum_{k=2}\frac{1}{k})$$

H308课件

$\scriptstyle j=1$

解. $n>2$时

$$\sum_{j=1}^{n-1}A_{1j}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}&0&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=n!(1-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k})$$

$$n=2,\ \sum_{j=1}^{n-1}A_{1j}=2.$$

13.已知一个二次三项式除以$x-1$所得余数是3，除以$x-2$所得余数是6，除以$x+2$所得余数是18，求这个二次三项式.

解. 设所求的二次三项式为:$f(x)=ax^2+bx+c$.

因用一次多项式$x-\alpha$去除$f(x)$所得余数等于$f(\alpha)$,我们有

$$\begin{cases}a+b+c=3\\4a+2b+c=6\\4a-2b+c=18\end{cases}$$

解得:$a=2$, $b=-3$, $c=4$,$f(x)=2x^2-3x+4$.

14.试确定λ的值使得线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=4\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$$

无解，有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下H308课件它的

14.试确定λ的值使得线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=4\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$$

无解，有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下，求出它的通解.

解. $\begin{vmatrix}1&1&\lambda\\-1&\lambda&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-4)=0$，得$\lambda=-1$ or $\lambda=4$.

14.试确定λ的值使得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

无解，有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下，求出它的通解.

解. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-4) = 0$，得$\lambda = -1$ or $\lambda = 4$.

在$\lambda \neq -1$ and $\lambda \neq 4$时，方程组有唯一解;

$\lambda = -1$,我们有$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

$\lambda = -1$,我们有$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

由$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

知方程组无解;

$\lambda = 4$时，由

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ 4-t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in R \text{ 为方程组通解.}$$

四．证明题（每题 2 分）

15.求证：对$n>2$的上三角行列式$|A|$，若$i<j$，则$A_{ij}=M_{ij}=0$.

证明：M_{ij}与A_{ij}分别是在行列式$|A|$中划去i行j列后余下元素

15.求证：对$n>2$的上三角行列式$|A|$，若$i<j$，则$A_{ij}=M_{ij}=0$.

证明：M_{ij}与A_{ij}分别是在行列式$|A|$中划去i行j列后余下元素组成的$n-1$阶子式与代数余子式，它们仅差一个符号. $|A|$是一上三角行列式,划去第i行第j列后,若$i+1<j$，元素$a_{i+1,i+1}$在M_{ij}中位于第i行第$i+1$列,主对角线上(i,i)-位置元素为零,若 $i+1=j$，$a_{i+1,i+1}$亦被划去，$a_{i+2,i+2}$在M_{ij}中位于第$i+1$行第$i+1$列,主对角线上(i,i)-位置元素仍为零,而M_{ij}仍然为上三角行列式,故$M_{ij}=0$,当然$A_{ij}=0=M_{ij}$.

16.设A为$m\times n$矩阵，B为$l\times n$矩阵，则$AX=0$与$BX=0$同解当且仅当

$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A)=R(B)$.

证明. ”$\Longrightarrow$:”$AX=0$与$BX=0$同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则$r(A)=r(B)=n-s$. 又因$AX=0$与$BX=0$同解,$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$也与$AX=0$,$BX=0$同解,故

$$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A).$$

”$\Longleftarrow$”因$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A)$,$A$的极大线性无关向量组也是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的极大线性无关向量组，则$B$的行向量可由$A$的行向量组线性表出,即

证明. ”$\Longrightarrow$:”$AX=0$与$BX=0$同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则$r(A)=r(B)=n-s$. 又因$AX=0$与$BX=0$同解,$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$也与$AX=0$,$BX=0$同解,故

$$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A).$$

”$\Longleftarrow$”因$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A)$,$A$的极大线性无关向量组也是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的极大线性无关向量组，则$B$的行向量可由$A$的行向量组线性表出,即
$BX=0$中的每一个方程可写成中$AX=0$的方程的线性组合，故$AX=0$的解都是$BX=0$的解.同理,$BX=0$的解也都是$AX=0$的解,$AX=0$与$BX=0$同解.

证明. ”$\Longrightarrow$:”$AX=0$与$BX=0$同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则$r(A)=r(B)=n-s$. 又因$AX=0$与$BX=0$同解,$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$也与$AX=0,BX=0$同解,故

$$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A).$$

”$\Longleftarrow$”因$r(\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix})=r(A)$,$A$的极大线性无关向量组也是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的极大线性无关向量组，则$B$的行向量可由$A$的行向量组线性表出,即$BX=0$中的每一个方程可写成中$AX=0$的方程的线性组合，故$AX=0$的解都是$BX=0$的解.同理,$BX=0$的解也都是$AX=0$的解,$AX=0$与$BX=0$同解.

H308课件

17. 证明：三次方程$x^3+px^2+qx+r=0$的三个根成等比数列的充分必要条件为：$p^3r-q^3=0$.

证明：设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根分别为x_1,x_2,x_3. 三个根成等比数列的充要条件是

$$(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)=0,$$

展开整理后有：

$$x_1^4x_2x_3+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4-(x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3)=0$$

将上面不等式左边用初等对称多项式表出，即为：$\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$,这里$\sigma_1=-p,\sigma_2=q$，$\sigma_3=-r$. 故上述的充分条件等价于$p^3r-$

H308课件

证明：设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根分别为x_1,x_2,x_3. 三个根成等比数列的充要条件是

$$(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)=0,$$

展开整理后有：

$$x_1^4x_2x_3+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4-(x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3)=0$$

将上面不等式左边用初等对称多项式表出，即为：$\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$，这里$\sigma_1=-p,\sigma_2=q$，$\sigma_3=-r$. 故上述的充分条件等价于$p^3r-q^3=0$.

H308课件

1. 设多项式$f(x)$用$x-1$除时余式为 3，用$x-3$除时余式为 5，求用$(x-1)(x-3)$除$f(x)$的余式.

解. 写 $f(x)=(x-1)(x-3)g(x)+ax+b$，将$x=1$，$x=3$代入，解得

$$a=1,\quad b=2.$$

2.设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根都是实数，求证: $p^2\geq 3q$.

证明. 设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根分别为x_1,x_2,x_3. 三个根均为实数的一个充分条件是（若有复根，必为共轭根，且三次多项式至少有一实根）:

H308课件

2. 设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根都是实数，求证: $p^2\geq 3q$.

证明. 设多项式x^3+px^2+qx+r的三个根分别为x_1,x_2,x_3.

三个根均为实数的一个充分条件是（若有复根，必为共轭根，且三次多项式至少有一实根）：

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2\geq 0$$

展开整理后有：$x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\geq 0$

将上面不等式左边用初等对称多项式表出，即为：$\sigma_1^2-3\sigma$

展开整理后有：$x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\geq 0$

将上面不等式左边用初等对称多项式表出，即为：$\sigma_1^2-3\sigma_2$，

这里 $\sigma_1=-p,\sigma_2=q$，故上述的充分条件等价于 $p^2\geq 3q$.

3. 设 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$与$g(x)=x^2+x-2$，求其最大公因式 $(f(x),g(x))$，以及 $u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

答案. $(f(x),g(x))=1$， $u(x)=-\frac{1}{8}x$， $v(x)=\frac{1}{8}(x^2+x-$