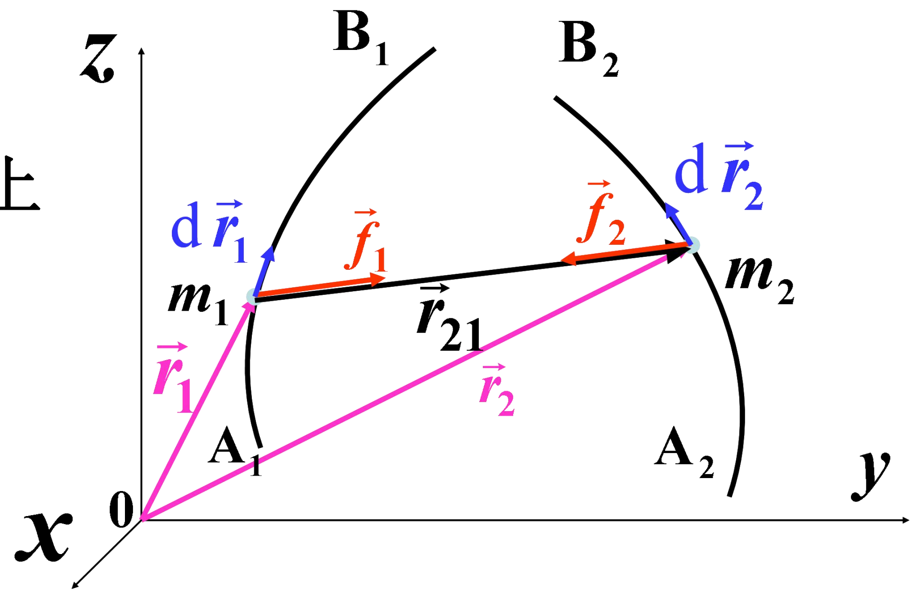
选讲：

注意： 1. 内力是成对出现的，但内力做功之和不一定为零。

一对力的功

设一对力分别作用在两个物体上



$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2, \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

一对力的元功

$$\mathrm{d}A_{对} = \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 = \vec{f}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

选讲：

$$\mathrm{d}A_{对} = \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21} = \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{12}$$

说明：

1 .一对力的功等于其中一个质点受的力沿着它相对于另一质点移动的路径所作的功。

2 .由于一对力的功只与“相对路径”有关，所以与参考系的选取无关。

3. 为方便起见，计算时常认为其中一个质点静止，并以该质点所在位置为原点，再计算另一质点受力所做的功，这就是一对力的功。

4. $\mathrm{d}\vec{r}_{21} = 0$ (相对位置不变)，

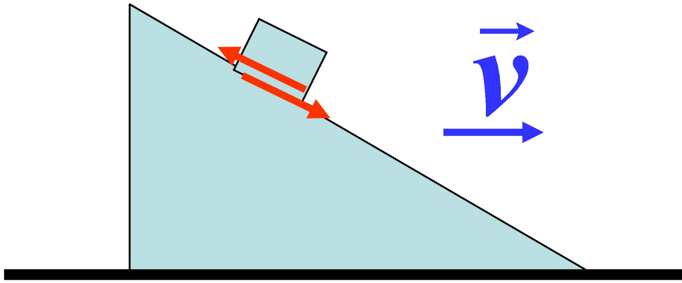
或 $\mathrm{d}\vec{r}_{21} \perp \vec{f}_2$ 时， $\mathrm{d}A_{对} = 0$

选讲：

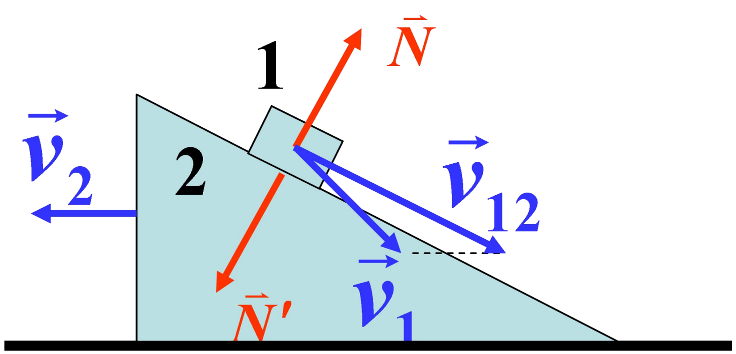
例、一对摩擦力的功是多大？

一对静摩擦力的功恒为零！

一对滑动摩擦力之功恒小于零！



例、小物体下滑大物体后退，一对正压力的功是多大？



$\vec{N}$ 不垂直于 $\vec{v}_1$， $W_N < 0$

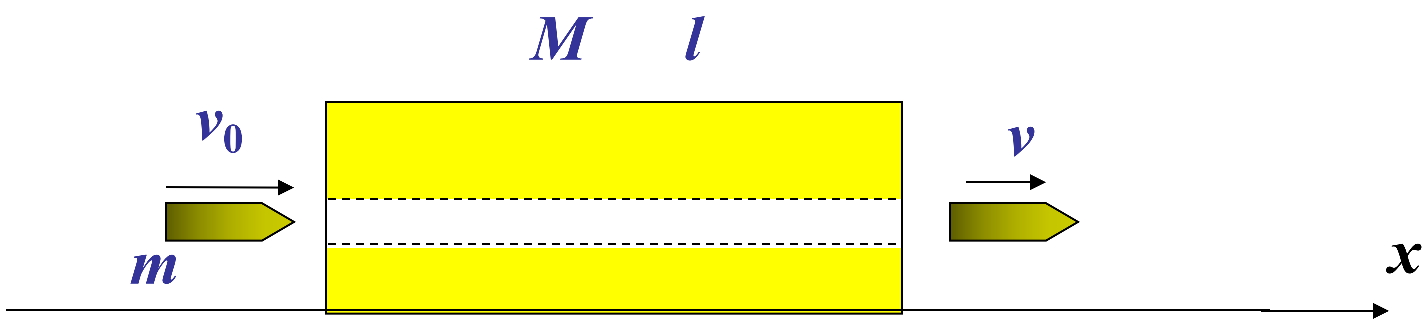
$\vec{N}'$ 不垂直于 $\vec{v}_2$， $W_{N'} > 0$

但 $N \perp \vec{v}_{12}$， $W_{对} = 0$

一对正压力的功恒为零！

选讲：

例. 在光滑水平面上停放一个砂箱，长度为 l，质量为M。一质量为 m的子弹以水平初速 v_0穿透砂箱，射出时速度减为 v，方向仍为水平。试求砂箱对子弹的平均阻力。



（直接用冲量定理？）

【解】 由题给的条件，根据动量的规律，可先求出子弹射出时砂箱的速度。

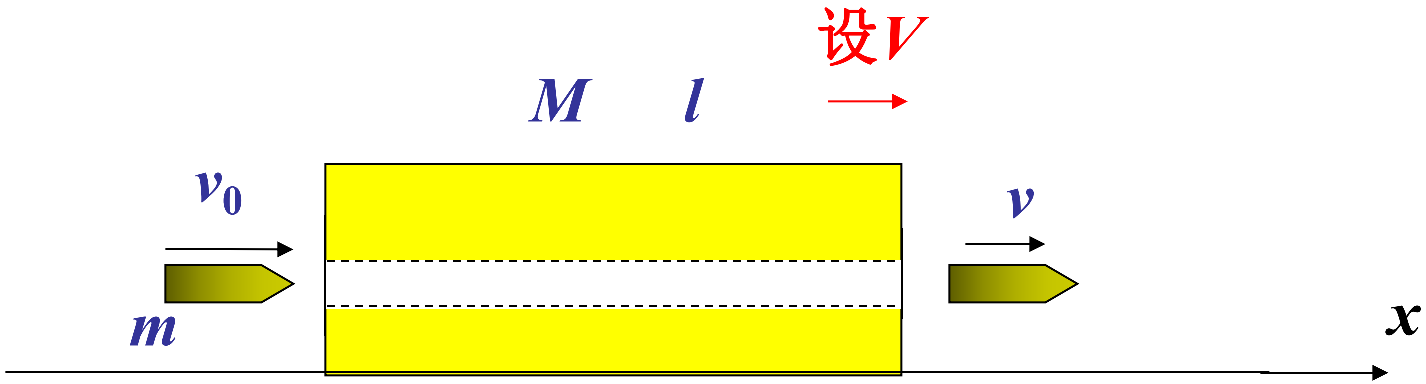
再根据能量的规律，由计算一对力的功的办法，求出子弹受的平均阻力。

选讲：

系统：砂箱和子弹

水平外力为零，
水平动量守恒，

设子弹射出时砂箱的速度为V，如图，



则有

$$MV + mv = mv_0$$

$$\longrightarrow \quad V = \frac{m}{M}(v_0 - v) \quad （>0）$$

选讲：

由质点系的动能定理：

$$A^{\mathrm{ex}} + A^{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k}0}$$

现在外力的功为零；

内力的功 就是一对阻力的功，

我们以砂箱为参照系来计算这一对阻力的功：

设子弹受的平均阻力为 $\bar{f}_r$（即看作常数），

而子弹相对砂箱的位移即为l，

所以，$$-\bar{f}_r \cdot l = \left(\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2$$

选讲：

$$-\bar{f}_r\cdot l=\left(\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2\right)-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$V=\frac{m}{M}(v_0-v)$$

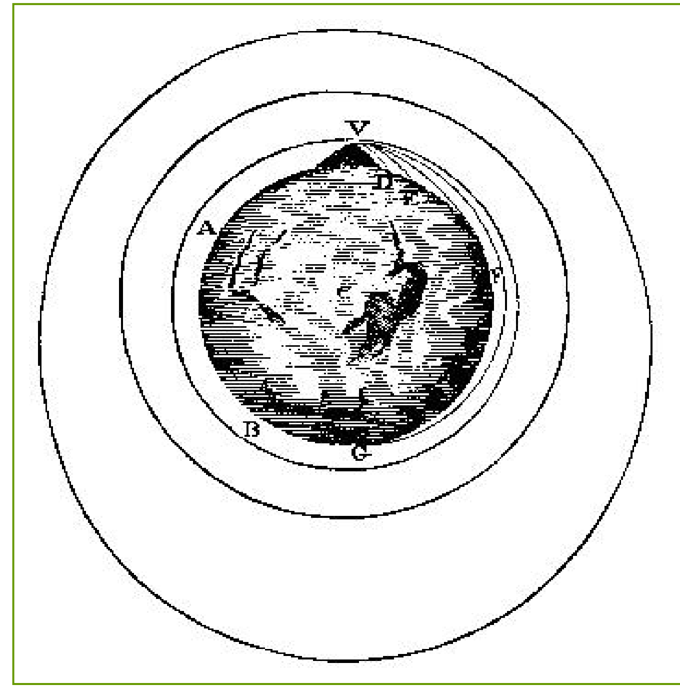
将V代入，可得

$$\bar{f}_r=\frac{1}{l}\left\{\frac{1}{2}m\left(v_0^2-v^2\right)-\frac{1}{2}\frac{m^2}{M}\left(v_0-v\right)^2\right\}$$

选讲：

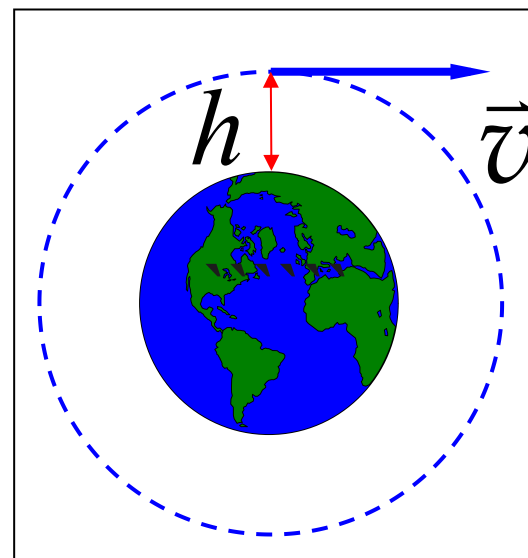
宇宙速度

牛顿的《自然哲学的数学原理》插图，抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度。



1. 人造地球卫星　第一宇宙速度

第一宇宙速度 v_1 ，是在地面上发射人造地球卫星所需的最小速度 。



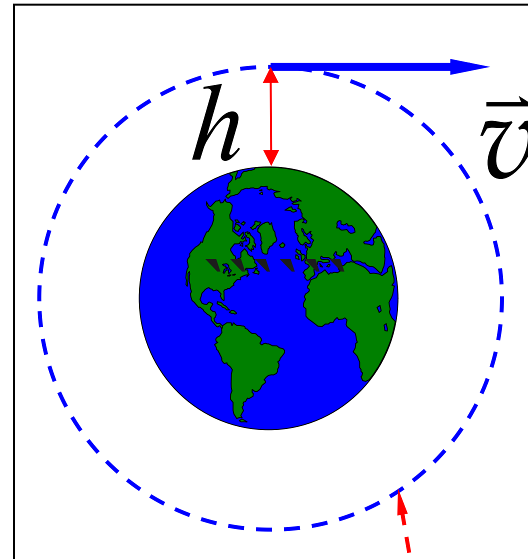
设 地球质量m_E ，抛体质量m ，地球半径 R_E 。

解 取抛体和地球为一系统， 系统的机械能 E 守恒。

选讲：

$$\therefore E=\frac{1}{2}mv_1^2+(-G\frac{mm_E}{R_E})=\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{mm_E}{R_E+h})$$

由牛顿第二定律和万有引力定律得



$$m\frac{v^2}{R_E+h}=G\frac{mm_E}{(R_E+h)^2}$$

解得 $v_1=\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}-\frac{Gm_E}{R_E+h}}$

$$\because g=\frac{Gm_E}{R_E^2} \qquad \therefore v_1=\sqrt{gR_E(2-\frac{R_E}{R_E+h})}$$

$\boxed{E<0}$

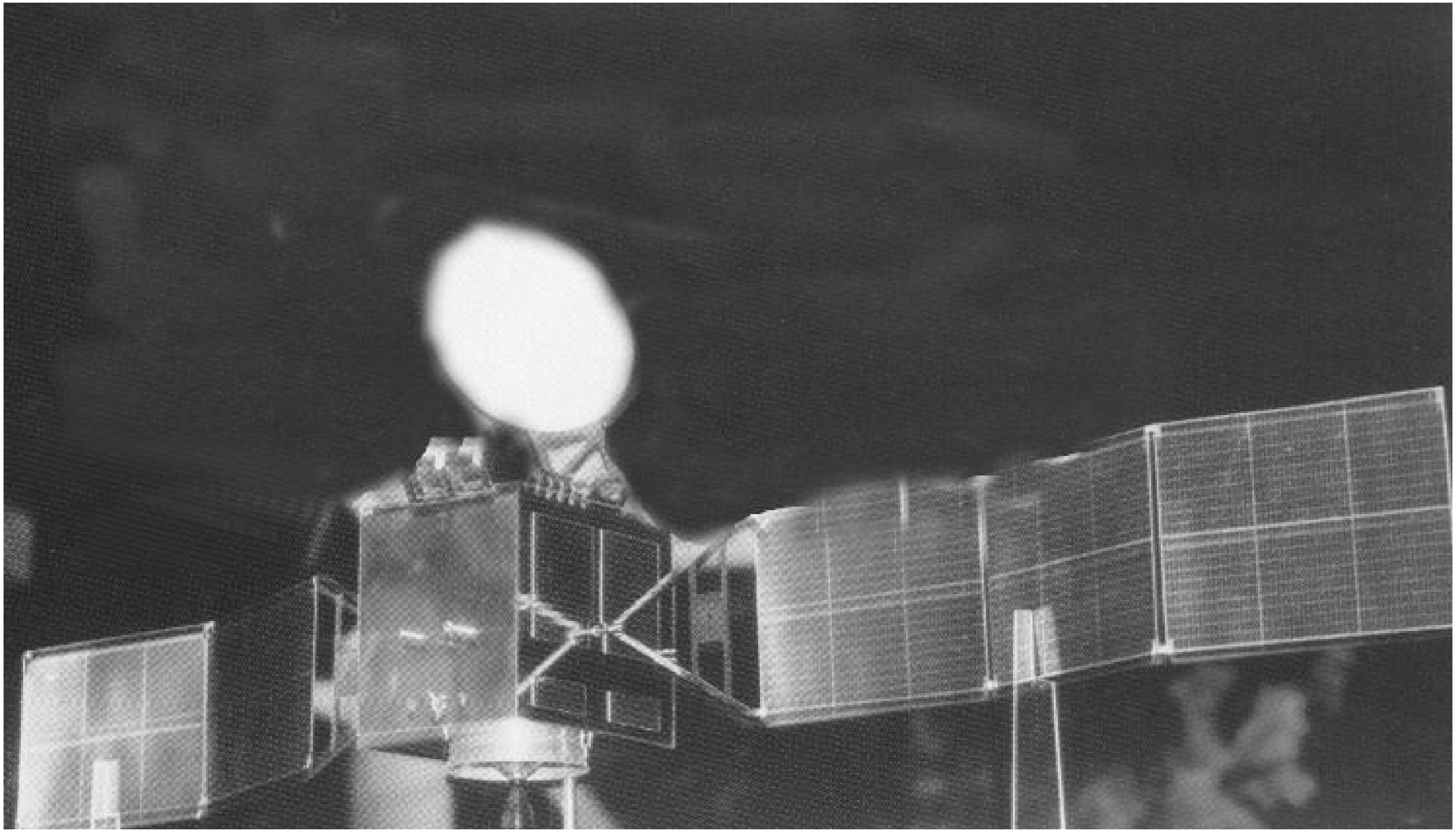
地球表面附近 $R_E >> h$ 故 $v_1=\sqrt{gR_E}$

计算得 $v_1=7.9\times10^3\,\mathrm{m/s}$

第一宇宙速度

$$E=-\frac{Gmm_E}{2(R_E+h)}<0$$

选讲：



我国1977年发射升空的东方红三号通信卫星

选讲:

2. 人造行星　第二宇宙速度

第二宇宙速度 v_2，是抛体脱离地球引力所需的最小发射速度。

设：地球质量 m_E ，抛体质量 m ，地球半径 R_E 。

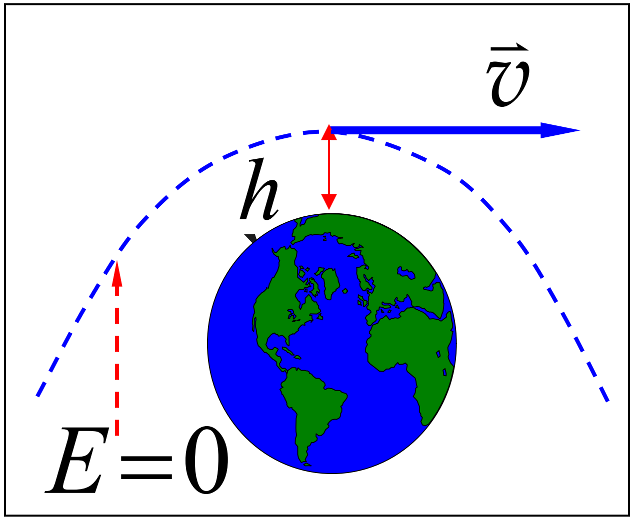
取抛体和地球为一系统 系统机械能 E 守恒 。

当 $r \to \infty$，　$F \to 0$；若此时　$v \to 0$，则：

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + (-G\frac{m_E m}{R_E})$$

$$= E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$



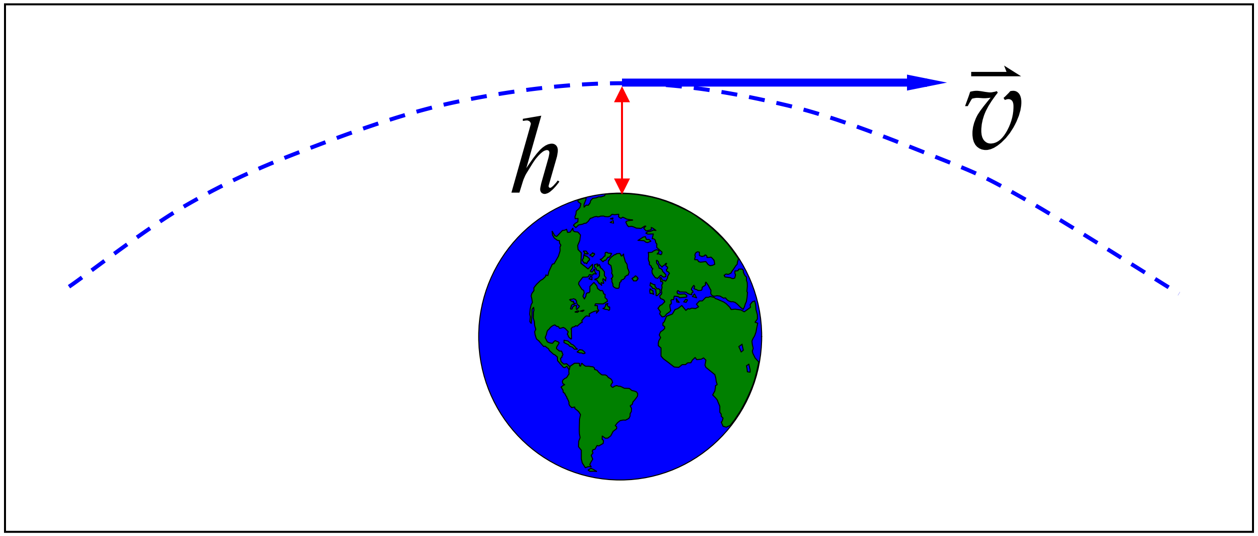
计算得　$v_2 = 11.2\mathrm{km/s}$

第二宇宙速度

选讲：

3. 飞出太阳系　第三宇宙速度

第三宇宙速度 v_3，是抛体脱离太阳引力所需的最小发射速度 。



设　地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E，太阳质量 m_S，抛体与太阳相距 R_S 。

取抛体和地球为一系统，抛体首先要脱离地球引力的束缚，其相对于地球的速率为 v' 。

选讲：

取地球为参考系，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_3^2+(-G\frac{m_E m}{R_E})=\frac{1}{2}mv'^2$$

取太阳为参考系，抛体相对于太阳的速度为 v'_3，则：

$$\vec{v}'_3=\vec{v}'+\vec{v}_E$$

地球相对于太阳的速度

如 $\vec{v}'$ 与 $\vec{v}_E$ 同向，有 $v'_3=v'+v_E$

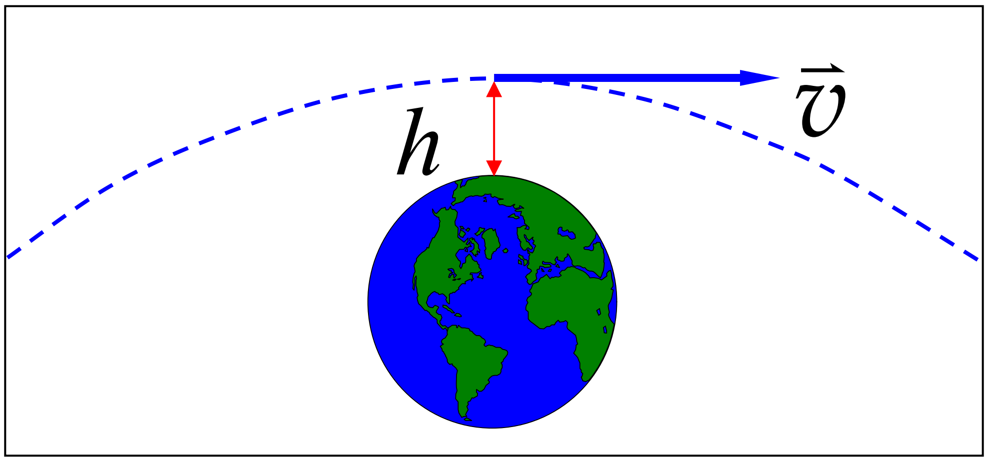
要脱离太阳引力，机械能至少为零。

$$E=\frac{1}{2}mv'^2_3+(-G\frac{m_S m}{R_S})=E_{k\infty}+E_{p\infty}=0$$

则 $v'_3=(\frac{2Gm_S}{R_S})^{1/2}$

选讲： 设地球绕太阳轨道近似为一圆，由于 $\vec{v}'_3$ 与 $\vec{v}_E$ 同向，则抛体与太阳的距离 R_S 即为地球轨道半径

则 $m_E \dfrac{v_E^2}{R_S} = G\dfrac{m_E m_S}{R_S^2} \Rightarrow v_E = (G\dfrac{m_S}{R_S})^{1/2}$



$$v' = v'_3 - v_E$$

计算得

$$v' = (\sqrt{2} - 1)(\frac{Gm_S}{R_S})^{1/2}$$

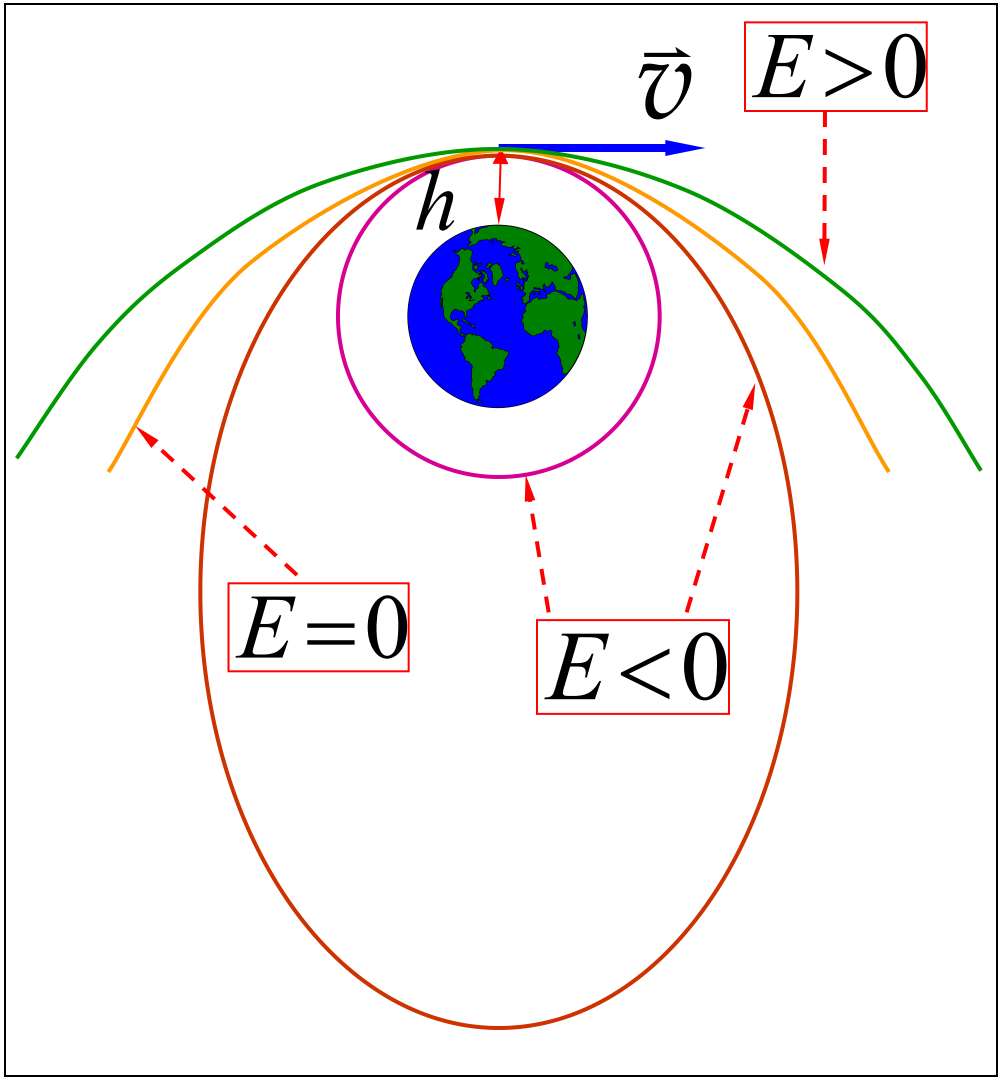
取地球为参照系 $\dfrac{1}{2}mv_3^2 + (-G\dfrac{m_E m}{R_E}) = \dfrac{1}{2}mv'^2$

计算得 $v_3 = (v'^2 + 2G\dfrac{m_E}{R_E})^{1/2} = 16.4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$

第三宇宙速度

选讲：

抛体的轨迹与能量的关系



（1） $E<0$ 椭 圆(包括圆)

$v_1 = 7.9\text{km/s}$

（2） $E=0$ 抛物线

$v_2 = 11.2\text{km/s}$

（3） $E>0$ 双曲线

$v_3 = 16.4\text{km/s}$

选讲：

系统内质量移动问题

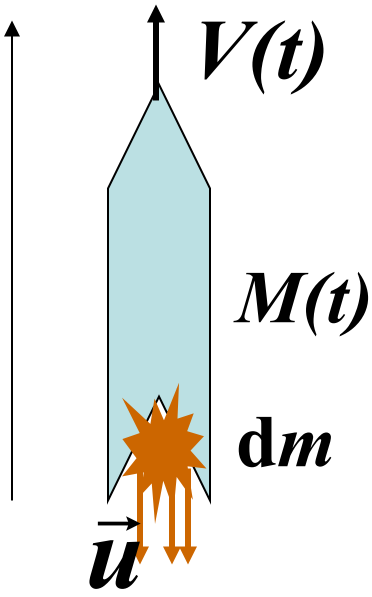
选讲：

讨论自由空间中火箭的发射。

无外力　　变质量体

考虑 t —t+dt内的

火箭体和所喷气体组成的系统



（喷气速度相对火箭）

$$t: \ M \ \vec{V}$$

$$t+\mathrm{d}t: \ (M-\mathrm{d}m), \ (\vec{V}+\mathrm{d}\vec{V})$$

$$\mathrm{d}m, \ (\vec{u}+\vec{V}+\mathrm{d}\vec{V})$$

系统动量守恒：

$$\{(M-\mathrm{d}m)(\vec{V}+\mathrm{d}\vec{V})+\mathrm{d}m(\vec{u}+\vec{V}+\mathrm{d}\vec{V})\}-M\vec{V}=0$$

$$\boxed{M\mathrm{d}\vec{V}+\vec{u}\mathrm{d}m=0} \xrightarrow{\mathrm{d}m=-\mathrm{d}M} M\mathrm{d}V+u\mathrm{d}M=0$$

选讲：

喷气速度一定时，有

$$\int_0^V \mathrm{d}V = -u\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}M}{M} \quad \rightarrow V = u\ln\frac{M_0}{M}$$

火箭的末速取决于：喷气速度；始末质量比。

多级火箭的思路——实现航天的梦想！

思考：有人说，对火箭，根据动量定理，

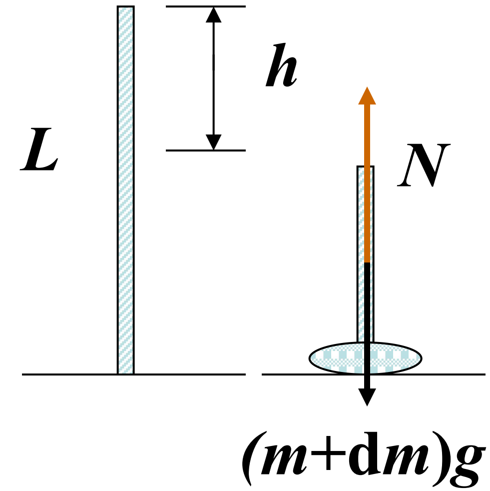
$$\because \mathrm{d}(M\vec{V}) = \vec{F}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \therefore M\,\mathrm{d}\vec{V} + \vec{V}\,\mathrm{d}M = 0$$

为什么得出了错误结果？！

选讲：

例 竖直链条，下端刚触地。求自由下落h时对地作用力（设质量线密度为η,总长为L）。

解：对象；$t\to t+\Delta t$内尚未触地及此间落在地上的链条



初态：$v \quad m+\mathrm{d}m$

末态：$m,(v+\mathrm{d}v)$; $\mathrm{d}m,0$

由动量定理：

$$m(v+\mathrm{d}v)-(m+\mathrm{d}m)v=\{(m+\mathrm{d}m)g-N\}\mathrm{d}t$$

$$N=mg-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$；代入 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\eta v$

得 $N=\eta v^2=2\eta gh$ 所以对地 $N^*=3\eta gh$

选讲：

解法二：对象 $t \rightarrow t+\mathrm{d}t$内落到地面的小段链条

$\mathrm{d}m$ ：初态 v；末态 0

因为自由下落，上端无力，重力不计（为小量）， 有：

$$-N \cdot \mathrm{d}t = 0 - \mathrm{d}m \cdot v,$$

$$N = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v = \eta v^2 = 2\eta g h$$

由牛顿第三定律，再加已有部分重力，得

$$N^* = 3\eta g h$$