统计学习题02 参考解答

1. 设 $X \sim B(N, p)$，求 N, p 的矩估计.

解：用参数表示一、二阶总体矩如下

$$\mu_1 = \mathbb{E}X = Np$$

$$\mu_2 = \mathbb{E}X^2 = \mathrm{Var}\,X + (\mathbb{E}X)^2$$

$$= Np(p-1) + (Np)^2$$

由此可解得

$$\mu_2 = \mu_1(p-1) + (\mu_1)^2$$

$$p = 1 + \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1}$$

$$N = \frac{\mu_1}{p} = \frac{\mu_1^2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1^2}$$

用样本矩 $\bar{X}$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 分别代替 μ_1，μ_2 可得 N，p 的矩估计量如下

$$\hat{N} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\bar{X} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{p} = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

矩估计值分别为

$$\hat{N} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{p} = \frac{\bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}}.$$

2 设 $X \sim f(x;a) = \begin{cases} (a+1)x^a & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

求 a 的矩估计，极大似然估计.

解：1) X 的一阶总体矩为

$$\mu_1 = EX = \int_0^1 x\cdot(a+1)x^a dx$$

$$= \int_0^1 (a+1)x^{a+1}dx = \frac{a+1}{a+2}$$

由此可得

$$(a+2)\mu_1 = a+1$$

$$a(\mu_1-1) = 1-2\mu_1$$

$$a = \frac{1-2\mu_1}{\mu_1-1}.$$

用样本矩 $\bar{X}$ 代替 μ_1 可得 a 的矩估计

$$\hat{a} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}.$$

2) 似然函数

$$L(a) = \prod_{i=1}^n (a+1)x_i^a = (a+1)^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^a$$

对数似然函数为

$$l(a) = n\log(a+1) + a\log\prod_{i=1}^n x_i.$$

由

$$\frac{\partial}{\partial a}\log l(a) = \frac{n}{a+1} + \log \prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{n}{a+1} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0$$

可得

$$a = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x} .$$

于是可知 a 的 MLE 为

$$\hat{a} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log X_i} .$$

3. 设总体的pdf为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\exp(-(x-\theta)) & x\geq\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 θ 的MLE

解：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\exp(-(x_i-\theta))\mathbb{1}_{[\theta,+\infty)}(x_i)\right]$$

$$=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right)\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(-\infty,x_i]}(\theta)$$

$$=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta\right)\mathbb{1}_{(-\infty,x_{(1)}]}(\theta)$$

易知 θ 的MLE为 $X_{(1)}$.

4. 设 $X \sim G(p)$: $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\cdots$, $0<p<1$

求 p 的 MLE.

解: p 的似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{n(\bar{x}-1)}$$

故 p 的对数似然函数为

$$l(p)=n\log p+n(\bar{x}-1)\log(1-p).$$

从

$$\frac{\partial l}{\partial p}=\frac{n}{p}-\frac{n(\bar{x}-1)}{1-p}=0$$

可解得

$$p=\frac{1}{\bar{x}}.$$

故 p 的 MLE 为

$$\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}.$$