第三章 函数逼近 1. 基本概念

问题：给定$f(x)$，找一个简单、便于计算的函数$p(x)$，使$p(x)$与$f(x)$在某种度量下最小

基底. $\forall x \in S$，可由x_i线性表示

线性空间：以R^n和$C[a,b]$作为脑中的样板

(1)线性空间、线性相关、线性无关、基底：

$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ 线性无关，则 $S=\mathrm{span}\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$

$x, y \in S$ 则 $ax+by \in S$

$x_1 \cdots x_n$ $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ $\begin{cases} a_i\text{可以非0，相关} \\ \text{全只能为0，无关} \end{cases}$

(2)有限维空间、无穷维空间：

R^n $C[a,b]$ R^n基底 $e_i=(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)$

(3)赋范线性空间$(S,\|\bullet\|)$: (1) $\|x\|\ge 0$ $\|x\|=0 \iff x=0$ (2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ 齐次性 (3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ $\|\cdot\|$ 范数

R^n: $\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$ $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

$C[a,b]$: $\|f\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$ $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ $w(x)=1$

加权范数: $w(x)>0$ 已知函数，权函数 $\|f\|_{2,w}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)w(x)dx}$

1. 基本概念　线性空间：以R^n和$C[a,b]$作为脑中的样板

(4)线性空间与内积:$(S,(\bullet,\bullet))$

$\forall u, v \in S$ (1) $(u,v)=(v,u)$

(2) $(\lambda u, v)=\lambda(u,v)$ (3) $(u+v, w)=(u,w)+(v,w)$

内积空间 (4) $(u,u)\geq 0$ $(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$

两个向量正交：$(u,v)=0$ 称 u 与 v 正交

R^n: $(x,y)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

$C[a,b]$: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$

加权内积 $(f,g)_w=\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$

定理（柯西希瓦兹不等式）：$(S,(\cdot,\cdot))$内积空间 则 $|(u,v)|^2\leq(u,u)(v,v)$

设 $\varphi(t)=(u+tv, u+tv)=(u,u)+2t(u,v)+t^2(v,v)$ 对任何 t，$\varphi(t)\geq 0$

$|\Delta|\leq 0$

定义 $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$ 则 $\|\cdot\|$ 是一个范数 内积 → 范数

1. 基本概念　线性空间：以R^n和$C[a,b]$作为脑中的样板

X是内积空间，$u_1,\cdots u_n \in X$,这组向量的$Gram$矩阵定义为：

$$G\begin{pmatrix} (u_1,u_1) & \cdots & (u_1,u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (u_n,u_1) & \cdots & (u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

,定义只与内积有关　Gram 矩阵

定理：$u_1,\cdots,u_n$线性无关的充要条件是，它们的$Gram$矩阵非奇异

证明

"⇐"

$a_1u_1+\cdots+a_nu_n=0$ "⟹" $=0 \Rightarrow a_1=\cdots=a_n=0$ 线性无关

$$(a_1,\cdots,a_n)\,G\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1u_1+\cdots+a_nu_n,\ a_1u_1+\cdots+a_nu_n) \geq 0$$

若$=0$ 则 $a_1=\cdots=a_n=0$

二次型正定与A非奇异等价

1. 基本概念　线性空间：以R^n和$C[a,b]$作为脑中的样板

(5)最佳逼近：

$f \in C[a,b]$，令$H_n = span\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$，找$p^* \in H_n$，　与$\|\cdot\|$有关

使得$\|f - p^*\| = \min_{p \in H_n} \|f - p\|$，$p^*$称为$f$在$H_n$中的最佳逼近

最佳一致逼近：　$\|\cdot\| \Rightarrow \|\cdot\|_\infty$　$\|f-p^*\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p^*(x)|$

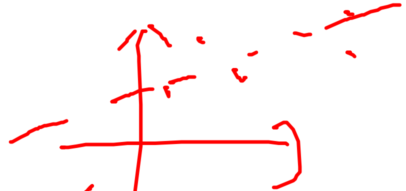
$\|\cdot\|_\infty$

最佳平方逼近：　$\|f-p^*\|_2 = \min_{p \in H_n} \|f-p\|_2$　$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

加权最佳平方逼近：$\|f-p^*\|_{2,w} = \min_{p \in H_n} \|f-p\|_{2,w}$

n阶最佳多项式逼近：　$H_n = P_n = n$次多项式空间

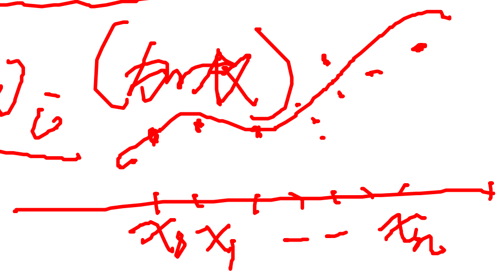
1. 基本概念　线性空间：以R^n和$C[a,b]$作为脑中的样板



最小二乘拟合：$a<x_0<\cdots<x_n<b$　$f(x_i)$已知，求 $p^*\in H_n$ 使

$$\|f-p^*\|_2^2=\min_{p\in H_n}\|f-p\|_2^2=\min_{p\in H_n}\sum_{i=0}^{n}(f(x_i)-p(x_i))^2$$

$$\|f\|_2^2=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)^2 \text{ 或 } \|f\|_{2,w}^2=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)^2w_i \text{（加权）}$$



使 $p^*(x)$ 在 x_i 上误差平方和最小. 最小二乘拟合

插值与拟合区别

“最小二乘拟合可以不是多项式”

多项式最小二乘拟合：$H_n=P_n=\mathrm{span}\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$

定理（*Weierstrass*）：$f\in C[a,b]$,则$\forall\varepsilon$，总存在一个多项式$p(x)$,　多项式逼近连续函数

使得:$\|f-p\|_\infty<\varepsilon$　依据

“稠密性”　“11.26回来”

2. 正交多项式

$1, x, x^2 ----$

定义（带权正交族）：$\rho(x)>0$ 权函数，设 $f, g \in C[a,b]$ 若 $(f,g)=\int_a^b f g \rho\, dx = 0$

称 f 与 g 加权正交。若 $\varphi_0, \cdots \varphi_n(x) \cdots$ 满足

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_\rho = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ A_k > 0 & j = k \end{cases}$$

称 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 为带权正交函数族

~~定义：$\varphi_n(x)$是$[a,b]$上首项系数 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式，$\rho(x)$权，若 $\{\varphi_n\}$ 两两正交~~

~~则 $\{\varphi_n\}$ 为 $\rho(x)$ 正交多项式~~

例（三角函数集）：

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \cdots \cos nx, \sin nx \cdots$ 在 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ 为权下正交

定义：$\phi_n(x)$是$[a,b]$上首项系数$a_n \neq 0$的n次多项式，$\rho(x)$为权函数，

若$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$中的函数两两加权正交，称$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为带权$\rho(x)$正交，

$\phi_n(x)$称为$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式

注意：正交多项式与区间$[a,b]$和权重$\rho(x)$相关

$\int_a^b f g \rho(x) dx$

$[a,b]$ $\rho(x)$

2. 正交多项式：[a,b], ρ(x)

$(f,g)_\rho=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$ 在加权内积

正交多项式的斯密特正交化构造方法：

$\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 作斯密特正交化

$\varphi_0(x)=1,$

$\varphi_n(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x^n,\varphi_j(x))_\rho}{(\varphi_j(x),\varphi_j(x))_\rho}\varphi_j(x)$ 则 $\varphi_n(x)$ 在 $(\cdot,\cdot)$ 正交

φ_n 是n次多项式 $\longleftrightarrow$ 则 首项系数为1

正交多项式性质：$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为带权$\rho(x)$正交，则

(1)$\phi_0(x),\cdots,\phi_n(x)$线性无关； 正交 → 线性无关

$\{1,x,\cdots,x^n\}$

(2)任何一个次数小于等于n的多项式，可以由$\phi_0(x),\cdots,\phi_n(x)$线性表示；

(3)$\phi_n(x)$与任何一个次数小于n的多项式加权正交.

$p \Rightarrow p$ 次数小于 n. 为什么 $(\varphi_n, p)_\rho=0$

$p(x)=\alpha_0\varphi_0+\cdots+\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}$ 与 φ_n 正交

2. 正交多项式：[a,b]，ρ(x) 首1：最高项系数为1

定理：$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为$[a,b]$上首1的带权$\rho(x)$正交多项式，则对$n$成立递推关系：

$\phi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\phi_n(x)-\beta_n\phi_{n-1}(x), n=0,1,\cdots,$其中

$\phi_0(x)=1$，$\phi_{-1}(x)=0$，$\alpha_n=(x\varphi_n(x),\phi_n(x))/(\varphi_n(x),\phi_n(x))$

$\alpha_n=(\varphi_n(x),\phi_n(x))/(\varphi_{n-1}(x),\phi_{n-1}(x)), n=1,2,\cdots$

证明：$\varphi_{n+1}(x)-x\varphi_n(x)=c_0\varphi_0+\cdots+c_n\varphi_n=c_{n-1}\varphi_{n-1}+c_n\varphi_n$

① 内积 φ_j，$j=0,\cdots,n-2$ $\Rightarrow$ $c_j=0$. $j=0,\cdots n-2$

② 内积 φ_n $\Rightarrow$ $c_n=\dfrac{-(x\varphi_n,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$

③ 内积 φ_{n-1} $\Rightarrow$ $c_{n-1}=\dfrac{-(x\varphi_n,\varphi_{n-1})}{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}$

$(x\varphi_n,\varphi_{n-1})=(\varphi_n,x\varphi_{n-1})$

$=(\varphi_n,\boxed{x\varphi_{n-1}-\varphi_n})+(\varphi_n,\varphi_n)$

$=0+(\varphi_n,\varphi_n)$

2. 正交多项式：[a,b]，ρ(x)

定理：$\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为$[a,b]$上的带权$\rho(x)$正交多项式，则$\phi_n(x)$在$(a,b)$上有$n$个不同零点.

证明：$x_1 \cdots x_K$ 是 $\varphi_n(x)$ 0点. 且都是偶数阶0点

则 $\varphi_n(x)$ 大于等于0 或 小于等于0

$\varphi_n(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 正交 $\int_a^b \varphi_n(x) \cdot 1 \cdot \rho(x)\,dx = 0 \Rightarrow \varphi_n(x)=0$ 矛盾.

$\varphi_0 = 1$

则 设 $\varphi_n(x)$ 有奇数阶0点 $x_1, \cdots, x_j$. $j<n$

则 $\varphi_n(x)\underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_j)}_{j次}$ 大于等于0 或 小于等于0

$0 = (\varphi_n, (x-x_1)\cdots(x-x_j))_\rho = \int_a^b \varphi_n(x)(x-x_1)\cdots(x-x_j)\rho(x)\,dx$

$\Rightarrow \varphi_n(x)=0$ 矛盾 $j=n$ □

2. 正交多项式：[a,b]，ρ(x)

(二)勒让德多项式：$[-1,1], \rho(x)=1$，由$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交化得到

简单表达：$P_0(x)=1$，$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. $n=1,2\cdots$

$P_n(x)$的首项系数 $a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，首1 $\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

性质1 $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$

性质2：奇偶性 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

性3：递推公式 $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)P_n(x)-nP_{n-1}(x)$

(二)勒让德多项式：$[-1,1],\ \rho(x)=1$，由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

性质：前n个多项式：$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\dfrac{(3x^2-1)}{2}$ $P_3(x)=\dfrac{(5x^3-3x)}{2}$

$P_4(x)=\dfrac{(35x^4-30x^2+3)}{8}$ $P_5(x)=\dfrac{(63x^5-70x^3+15)}{8}$

性质4. P_n 的在 $[-1,1]$ 有 n 个不同零点

作业 P94. 4(3) 5 6