电磁学

内 容 总 结

第六章 静电场

1. 库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

——真空中点电荷之间的相互作用力

2. 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 点电荷的电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$$

- 连续分布带电体的电场强度

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0 \qquad \vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0$$

3. 电通量

$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \Phi_\mathrm{e} = \int_S \mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

4. 真空中的高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数 ε_0 。与闭合曲面外电荷无关。

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

- 无限长均匀带电直线外的场强 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

- 无限大均匀带电平面 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

5. 电势： $U = \dfrac{W}{q_0}$

- 点电荷的电势 $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- 连续分布电荷的电势 $U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- 电势差 $\Delta U = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

6. 电场强度与电势的关系

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0 = -\nabla U$$

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0 = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

7. 静电平衡条件

（1）导体内部任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向，都与导体表面垂直。

——**推论：** 导体是等势体；导体表面是等势面。

8. 孤立导体的电容

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

电容器的电容

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{Q}{\Delta U}}$$

9. 电介质

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

有电介质时的高斯定理： $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0 = \sum_i q_{0i}$

10. 静电场的能量

- 孤立导体的静电能 $W_e = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{1}{2} qU = \dfrac{1}{2} CU^2$

- 能量密度 $w_e = \dfrac{1}{2} \varepsilon E^2$

$$W_e = \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

第七章 恒定磁场

1. 电流与电动势

- 电流 $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$
- 电流密度 $\mathrm{d}I = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ $\quad I = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
- 电动势 $\boxed{\mathscr{E} = \dfrac{A_{BA}}{q}}$ $\quad \mathscr{E} = \int_B^A \vec{E}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ $\quad \mathscr{E} = \oint_l \vec{E}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

2. 磁感强度 $\vec{B}$

磁感强度大小 $B = \dfrac{F_{\max}}{qv}$ 方向：小磁针 **N** 极所指

洛仑兹力：$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

3. 毕奥—萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

- 载流长直导线 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

- 无限长载流长直导线的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

- 载流圆线圈轴线上 $B_x=\dfrac{\mu_0 I}{2}\dfrac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

- 圆心处 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

- 载流螺线管内 $$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

- 无限长的螺线管内 $$B=\mu_0 nI$$

4. 磁感强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_m=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\qquad \Phi_m=\int_{(S)}\mathrm{d}\Phi_m=\int_{(S)}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

磁场高斯定理：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零。

$$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

5. 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

真空中磁感应强度沿任一闭合回路的线积分，数值上等于该闭合回路所包围的所有电流的代数和乘以真空磁导率。与回路的形状和回路外的电流无关。

6. 磁场对载流导体的作用

- 磁场对载流导线的作用 $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$
- 磁场对载流线圈的作用——磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{n}$$

7. 磁介质

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

磁场强度矢量 $$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

磁介质中的安培环路定理：

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{L内} I_{0i} = I_0$$

第八章 电磁感应与电磁场

1. 电磁感应定律

楞次定律——

$$\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

2. 动生电动势

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{i}} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \mathscr{E}_{\mathrm{i}} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

3. 感生电动势

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

感生电场

$$\oint_L \vec{E}_{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

空间总的电场: $\vec{E}_{\mathrm{T}} = \vec{E}_{\mathrm{S}} + \vec{E}_{\mathrm{R}}$ $\boxed{\oint_L \vec{E}_{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$

4. 自感 $\boxed{L = \Phi_L / i}$ $\boxed{\mathscr{E}_{\mathrm{L}} = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

5. 互感 $\boxed{M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}}$ $\boxed{\mathscr{E}_{12} = -M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$

6. 磁场能 $\boxed{W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2}$

- 能量密度 $w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2} BH$
- 磁场总能量 $W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{B^2}{2\mu} \mathrm{d}V$

****7. 位移电流** $I_{\mathrm{d}}=\int_S \vec{j}_{\mathrm{d}}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

- 全电流 $I_{\mathrm{T}}=I_0+I_{\mathrm{d}}$
- 全电流安培环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{\mathrm{s}}(\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

**8. 麦克斯韦方程组的积分形式

- 静电场高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 = \sum q_{0i}$
- 电场环流定理 $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$
- 磁场高斯定理 $\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$
- 安培环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0 + I_d$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

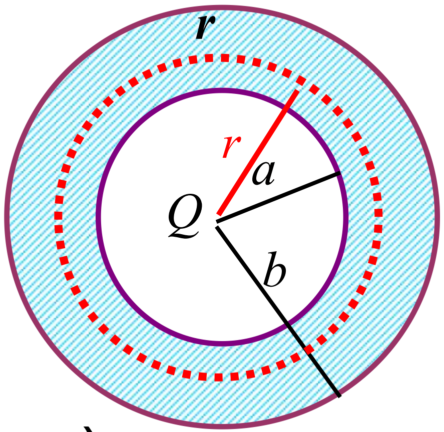
$$I_{\mathrm{d}} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad I_0 = \frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}$$

常见错误

沿袭中学套用公式的作法，不管B是否匀强，是否变化，能量密度是否为恒量，在求磁通量和电动势及磁场能量时套用：

$$\Phi = BS \qquad \mathcal{E}_\mathrm{i} = Blv \qquad W_\mathrm{m} = w_\mathrm{m} \cdot V$$

例1. 有一带电球壳，内、外半径分别为 a 和 b，电荷体密度 $\rho=A/r$，A与半径无关，在球心处有一点电荷 Q，求当$A=?$ 时，球壳区域内的场强的大小与 r 无关.



解： 先由高斯定理求球壳内场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \left(Q+\int_V \rho\,\mathrm{d}V\right)/\varepsilon_0$$

其中：$\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_a^r \frac{A}{r}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi A\int_a^r r\,\mathrm{d}r = 2\pi A\left(r^2-a^2\right)$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 2\pi A\left(r^2-a^2\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\frac{A}{2\varepsilon_0}-\frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

要使 $\vec{E}$的大小与r无关，则应有

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}=0 \qquad \text{即：}\ A=\frac{Q}{2\pi a^2}$$

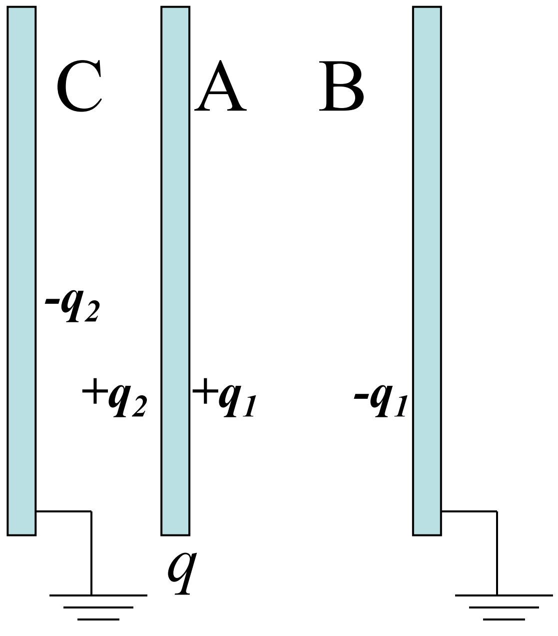
例2：三块平行金属板A、B和C的面积都是200cm^2，其中A、B相距4.0mm，A、C相距2.0mm，B和C板接地。如果使A板带正电，电荷量为3*10^{-7}C，忽略边缘效应，试求：（1）金属板B和C的感应电量: (2)A板相对于地的电势。

解：设B、C板因静电感应带电$-q_1$，$-q_2$，A板两表面相应分布电荷q_1 及q_2，则$q_1 + q_2=Q$

A，B间及A，C间场强为:

$$E_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}=\frac{q_1}{\varepsilon_0 S} \qquad E_2=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}=\frac{q_2}{\varepsilon_0 S}$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{q_1}{q_2}$$



因B、C接地，$U_{AC}=U_{AB}$，即$E_2\, d_{AC}=E_1 d_{AB}$，故

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{d_{AC}}{d_{AB}}=\frac{1}{2}$$

联立 $q_1=1.0\times10^{-7}\,C$ $\qquad$ $q_2=2.0\times10^{-7}\,C$

$$U_{AB}=U_A-U_B=U_A=E_1 d_{AB}=\frac{q_1}{\varepsilon_0 S}d_{AB}=2.26\times10^3\,(V)$$

例3 两均匀带电金属同心球壳，如图，内球半径为： R_1=0.05m, 带电q_1=+(2/3) ×10^{-8}C, 外球内径R_2=0.07m , 外径R_3=0.09m, 带电 q'=－2×10^{-8}C．求：（1）外球电荷如何分布？
（2）求距球心分别为：0.03，0.06，0.08，0.10 m 的A，B，C，D四个点的场强和电势。

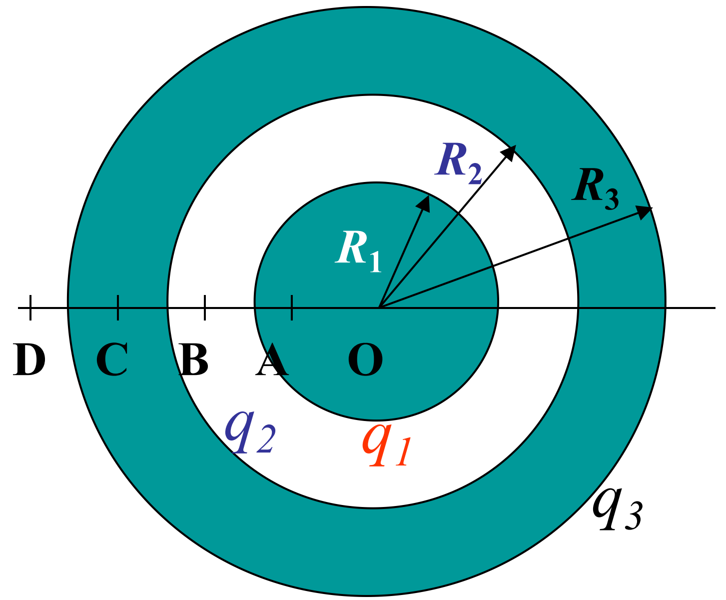
解（1）设q_2 、q_3为外球壳内、外层所带电荷。

由高斯定理可得：

$$q_2 = -q_1 = -\frac{2}{3}\times 10^{-8}C$$

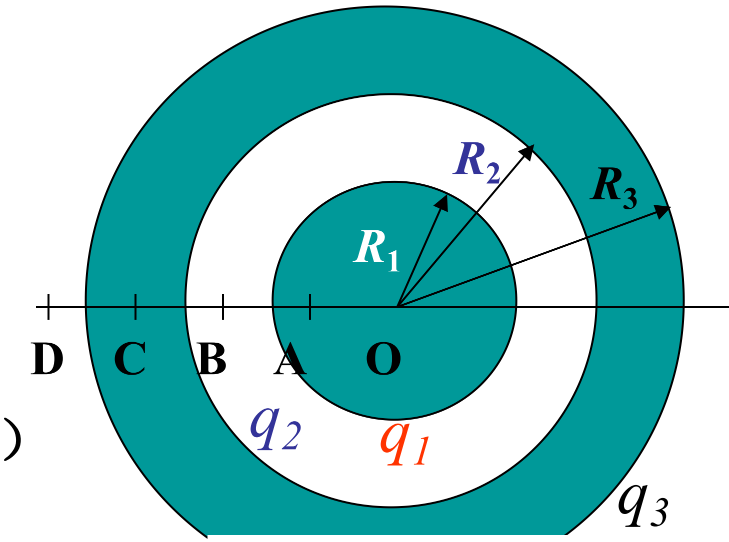
$$\because q_2 + q_3 = q'$$

$$\therefore q_3 = -\frac{4}{3}\times 10^{-8}C$$



（2）各点的场强和电势

B点：由高斯定理得：$E_B = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}$



请判断下列哪个答案正确，为什么？

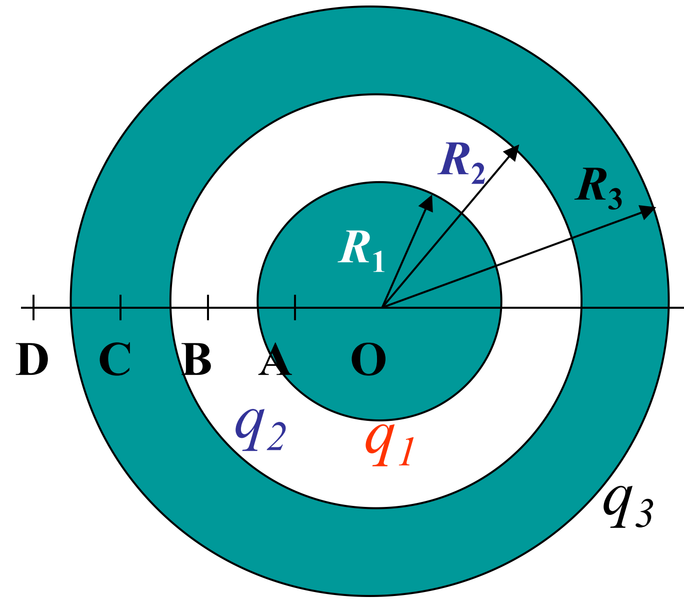
$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$ （只考虑电荷q_1的作用）

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 (R_2 - r_B)} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 (R_3 - r_B)}$$ （按r_B距球面的距离考虑）

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$ （所有电荷集中在O点）

$$\boxed{V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = -1230\ (V)}$$

$$V_B = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = -1230(V)$$



$$V_B = \int_{r_B}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_B}^{R_2} \frac{q_1 \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \int_{R_2}^{R_3} 0 \cdot dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_3 \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{-q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

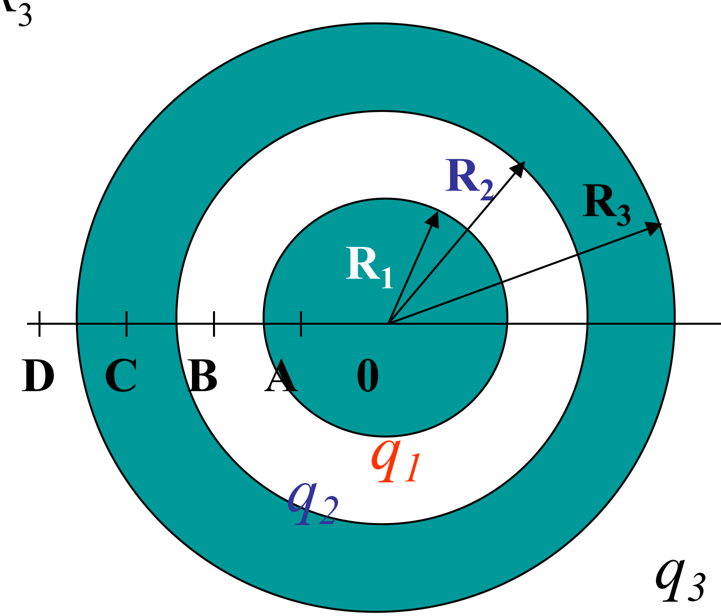
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_B} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_3}{R_3}\right) \quad (\because q_2 = -q_1)$$

A点： $E_A = 0, \quad V_A = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = -978(V)$

C点： $E_C=0,\quad V_C=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_C}+\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_C}+\dfrac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=-1333(V)$

D点： $E_D=\dfrac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_D^2}=-1.2\times10^4(V/m)$

$$V_D=\frac{q_1+q_2+q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_D}=-1200\ (V)$$

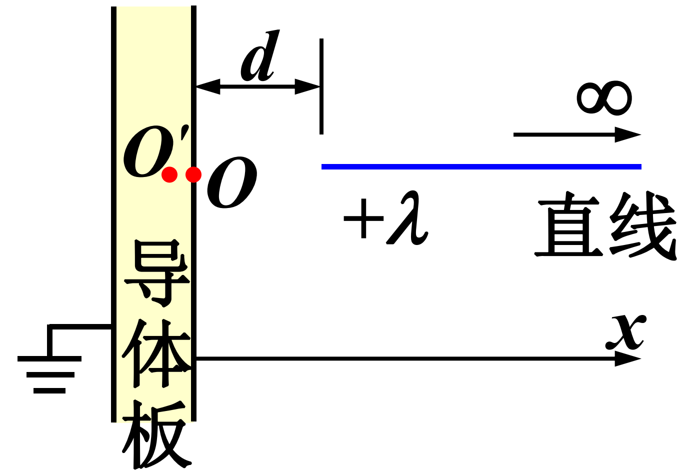


小结 （1）导体球外一点的场强和电势，可将电量看作集中于球心，应用 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 及 $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 其中 *r* 为该点到球心的距离

（2）球内（无论是空心与实心）的场强*E*=0，（内无电荷）；电势不为零，等于球面上的电势。

（3）求*E*和*V*时，要将形成场的所有电荷都考虑到，然后求矢量（*E*）和或代数和（*V*）。

例4　如图，求 O 点处感应电荷密度 σ。



解： 取导体板内很邻近 O 点的 O' 点，直线在 O' 点产生的电场

$$E_1=\int_d^{\infty}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

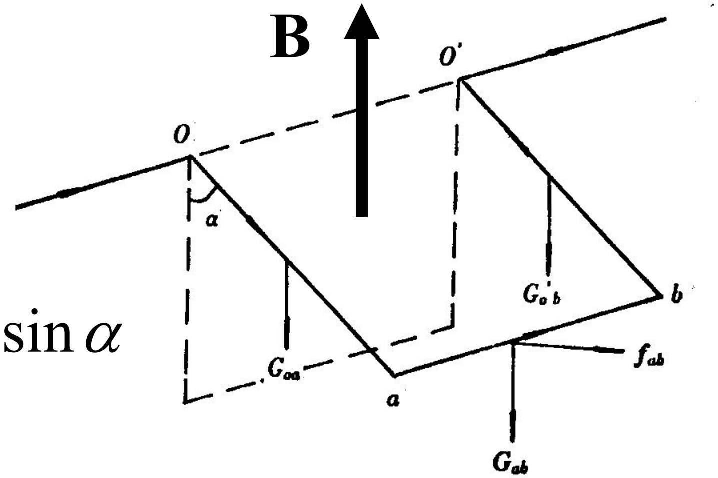
感应电荷在 O' 点产生的电场

$$E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

由总电场　$E_{O'}=E_1+E_2=0$

得 $\sigma=-\dfrac{\lambda}{2\pi d}$

例5 截面积为S，密度为ρ的铜导线被弯成正方形的三边，可以绕与所缺的正方形的一边重合的水平轴转动，如图所示。导线放在方向竖直向上的均匀磁场中，当导线中的电流为I时，导线离开原来竖直位置偏转一角度α而平衡。求磁感应强度大小。



解： 设正方形边长为l，每边质量为m，平衡时，重力对OO'轴力矩

$$M_1 = 2mg \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha + mgl\sin\alpha = 2mgl\sin\alpha$$

线圈受到磁力矩等于导线ab段所受到的磁力对轴的力矩

$$m = \rho \cdot Sl$$

$$\therefore M_m = BIl \cdot l\cos\alpha = BIl^2\cos\alpha \quad 方向与M_1相反$$

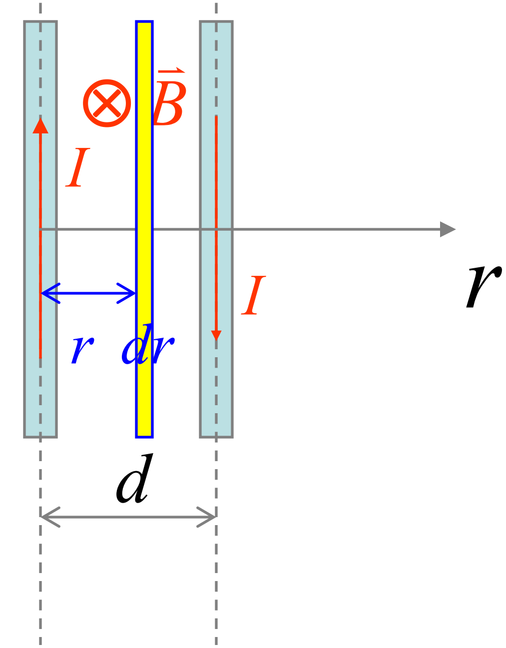
$$M_1 = M_m \quad \rightarrow \quad BIl^2\cos\alpha = 2mgl\sin\alpha \qquad \therefore B = \frac{2\rho Sg}{I}\tan\alpha$$

例6 两根足够长的平行直导线轴线间的距离为20cm，在导线中保持一强度为20A而方向相反的恒定电流。若导线的半径为 a＝0.1cm，且导线内部磁场忽略不计。

(1)求两导线间每单位长度的自感系数；

(2)若将两导线分开到相距40cm，求磁场对单位长度导线所做的功；

(3)位移时，单位长度的磁能改变了多少？是增加，还是减少？说明能量的来源。



解 (1) 两导线间任一点磁感应强度为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}$$

单位长 l=1

$$\Phi = \int B\,dS = \int_a^{d-a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-r)}\right)\cdot l\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

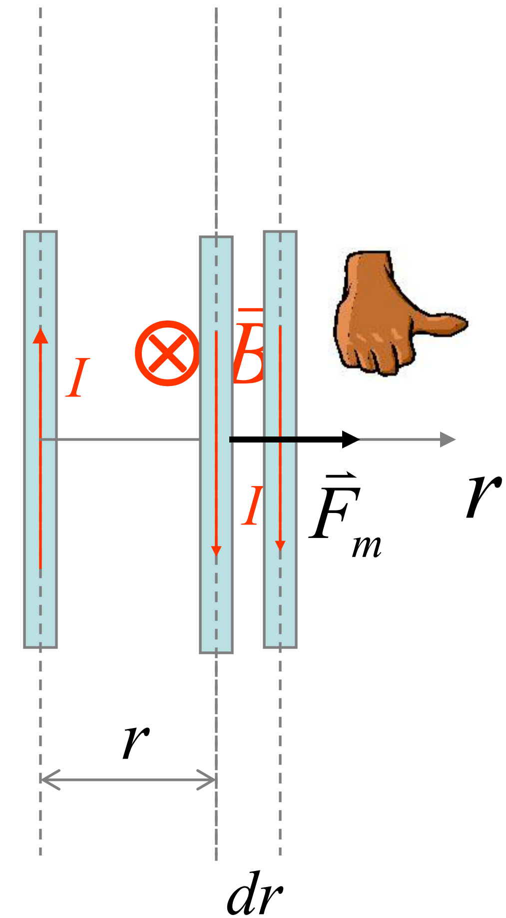
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} = \frac{4\pi\times10^{-7}}{\pi}\ln\frac{20-0.1}{0.1} = 2.1\times10^{-6}\,H/m$$

(2) 两导线中,一条导线上的电流在另一条导线处产生的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

故任一条导线单位长度上所受磁力为:

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}} \qquad F_m=IB\cdot 1=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$ 方向:相斥



磁力的功:

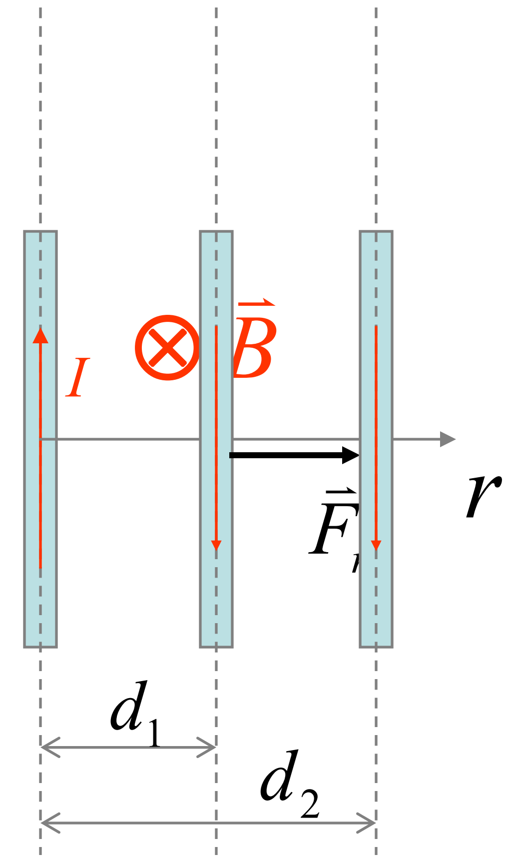
$$W=\int_{d_1}^{d_2}\vec{F}_m\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20^2}{2\pi}\ln\frac{40}{20}=5.5\times10^{-5}J$$ 磁力作正功.

(3) 由(1)的解

当两导线相距为 d_1 时 $$L_1 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d_1 - a}{a}$$

当两导线相距为 d_2 时 $$L_2 = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d_2 - a}{a}$$



单位长度的磁能改变:

$$\Delta W_{\mathrm{m}} = W_{\mathrm{m}2} - W_{\mathrm{m}1} = \frac{1}{2}L_2 I^2 - \frac{1}{2}L_1 I^2 = \frac{1}{2}I^2(L_2 - L_1)$$

$$= \frac{1}{2}I^2\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d_2 - a}{d_1 - a}$$

$$\because d >> a \quad \therefore \Delta W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1} = 5.5\times 10^{-5} J$$

讨论: 导线移动过程中磁能增加, 磁场既对外作功, 磁能又增加, 可能否？ 是否违反能量守恒定律？

可能！ 否！ 其能量来源于电源： 导线拉开⟶磁通量增加⟶感应电动势使电流减少⟶为维持电流恒定⟶电源克服反电动势作功⟶对外作功+磁能增加.