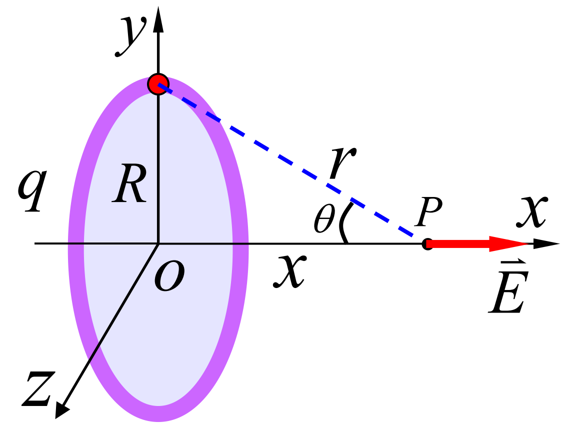
# 几种典型带电体的电场强度分布

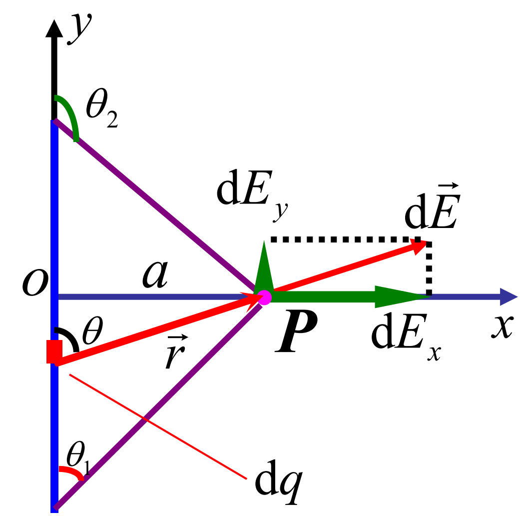



**1.带电圆环（轴线上）**

$$E=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

**2.均匀带电圆盘(轴线上)**

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$




**3.无限大带电平面**

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

**4.均匀带电直线**

$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

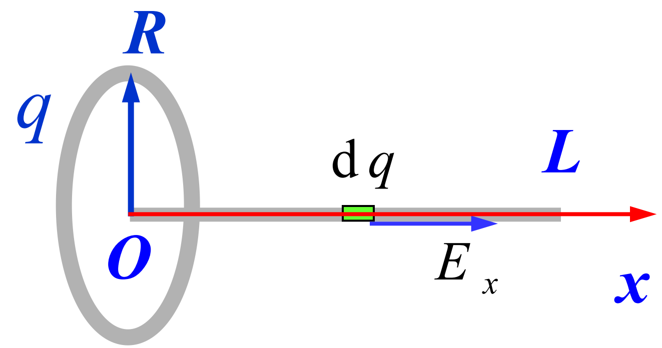
$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)$$

**5.无限长带电直线**

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

**补充例题

求：杆对圆环的作用力




解 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F = E_x \mathrm{d}q = E_x \lambda \mathrm{d}x$$

$$F = \int_0^L \frac{q\lambda x \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

# 高斯（C.F.Gauss 1777–1855）

德国数学家、天文学家和物理学家，有“数学王子”美称，他与韦伯制成了第一台有线电报机和建立了地磁观测台，高斯还创立了电磁量的绝对单位制.

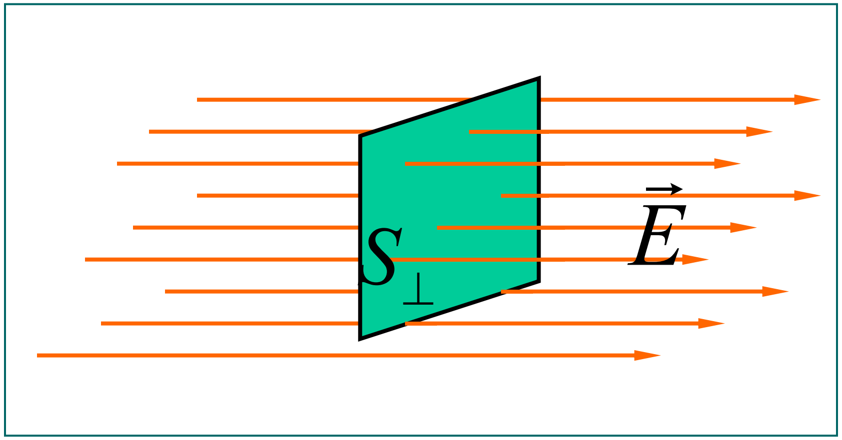
# §3 真空中的高斯定理

## 一、电场线

静止带电体所激发的静电场中，各点电场强度的大小和方向是确定的，可以用曲线形式表示出来——

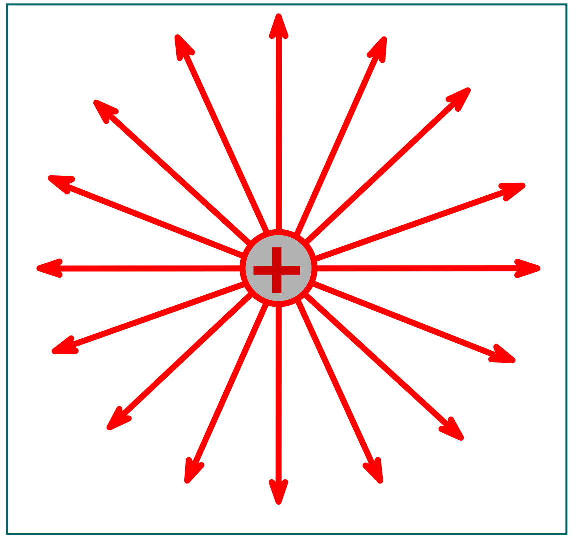
**规定：**（1）曲线上每一点切线方向为该点电场强度方向；

（2）在场中任意点附近，穿过垂直于电场方向上单位面积上电场线条数与该点电场强度大小成正比

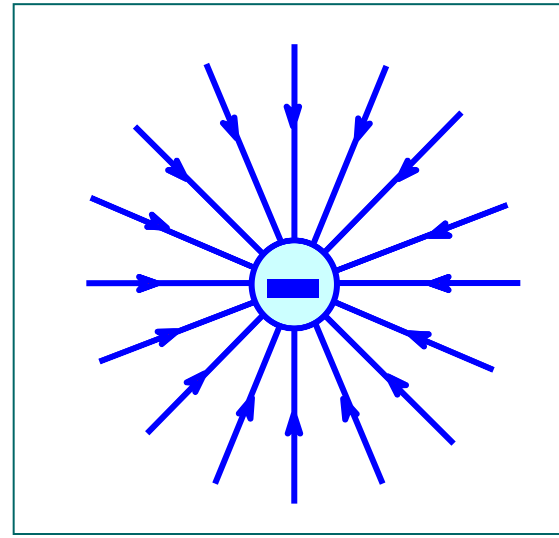


# 点电荷的电场线

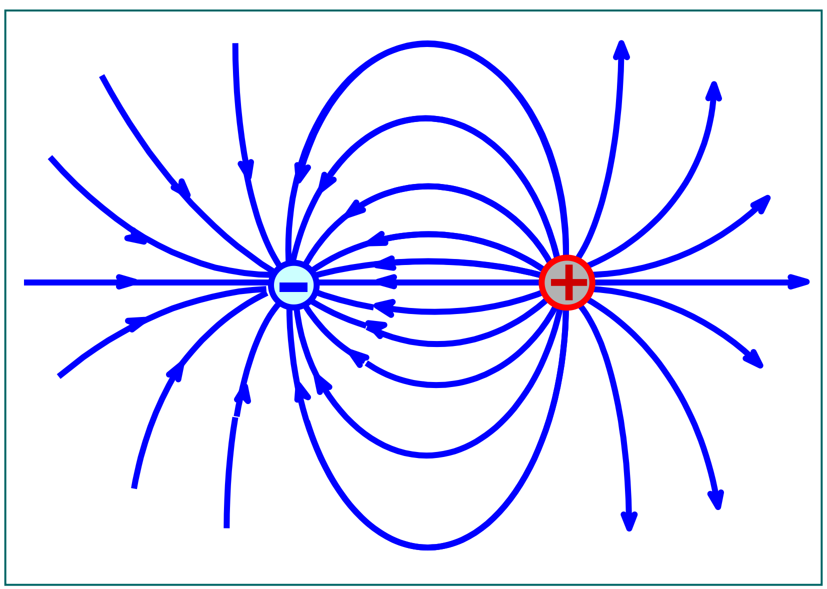
## 正点电荷



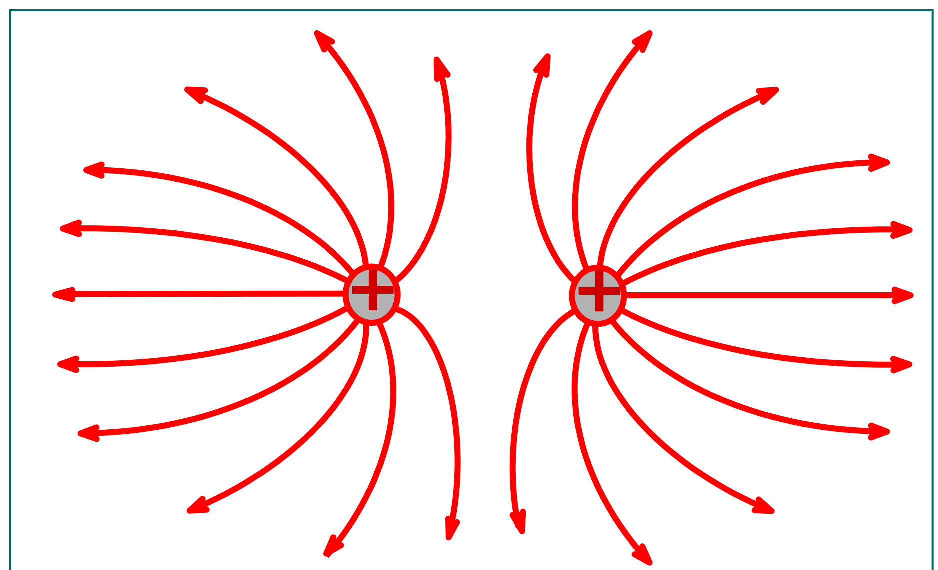
## 负点电荷



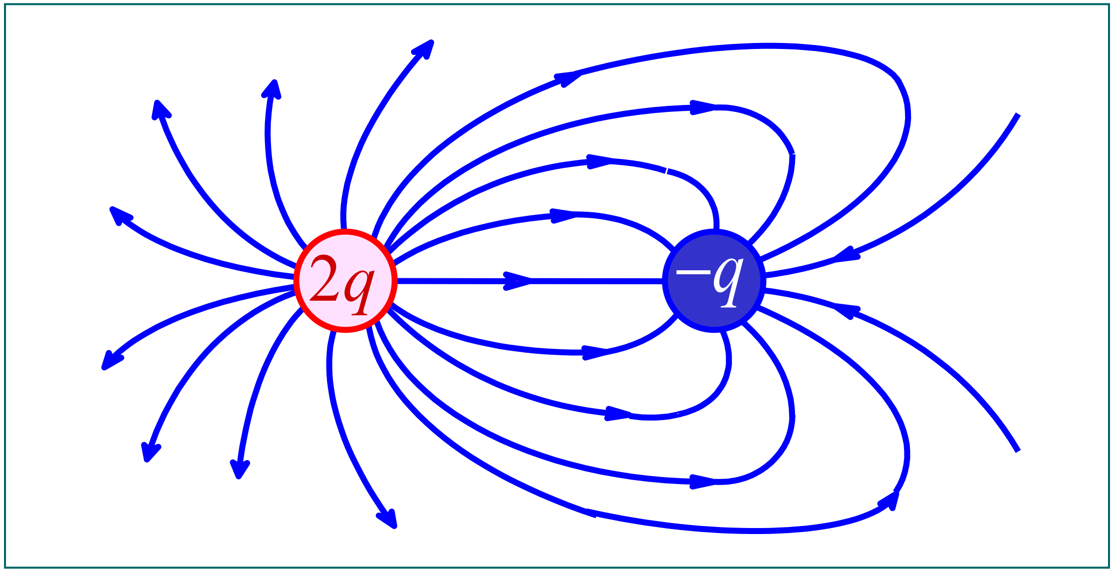
## 等量异号点电荷的电场线



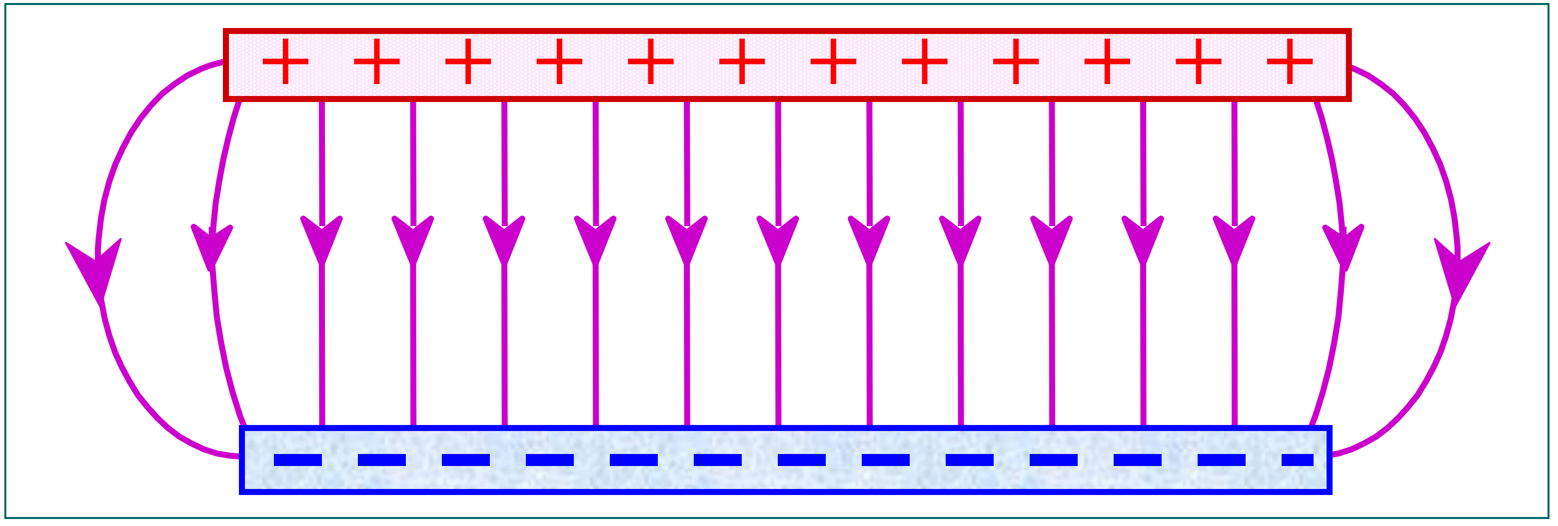
## 等量正点电荷的电场线



## 非等量异号点电荷的电场线




## 带电平行板电容器的电场线



## 电场线的特性：

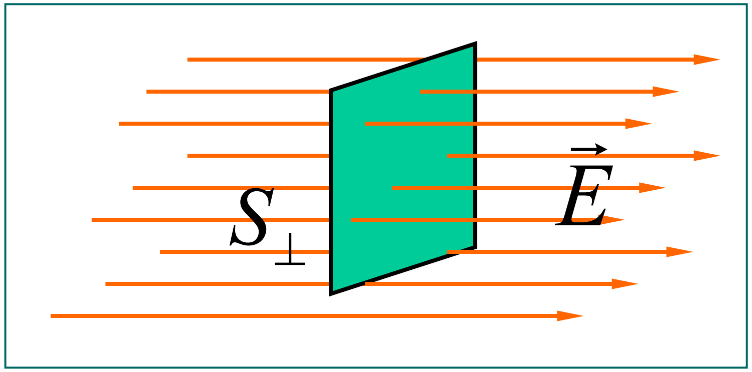
（1）始于正电荷，止于负电荷(或来自无穷远,去向无穷远)；

（2）电场线不相交；

（3）静电场电场线不闭合。

## 二、电场强度通量 —单位：N·m²·C⁻¹或V·m

电场中通过某一面积的电场线数称为通过这个面的电场强度通量“$\Phi_e$”。

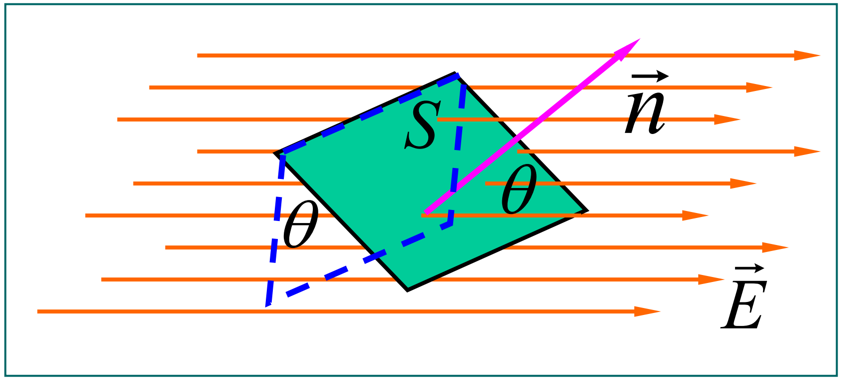



- 匀强电场，$\vec{E}$垂直平面

$$\Phi_e = ES_\perp$$

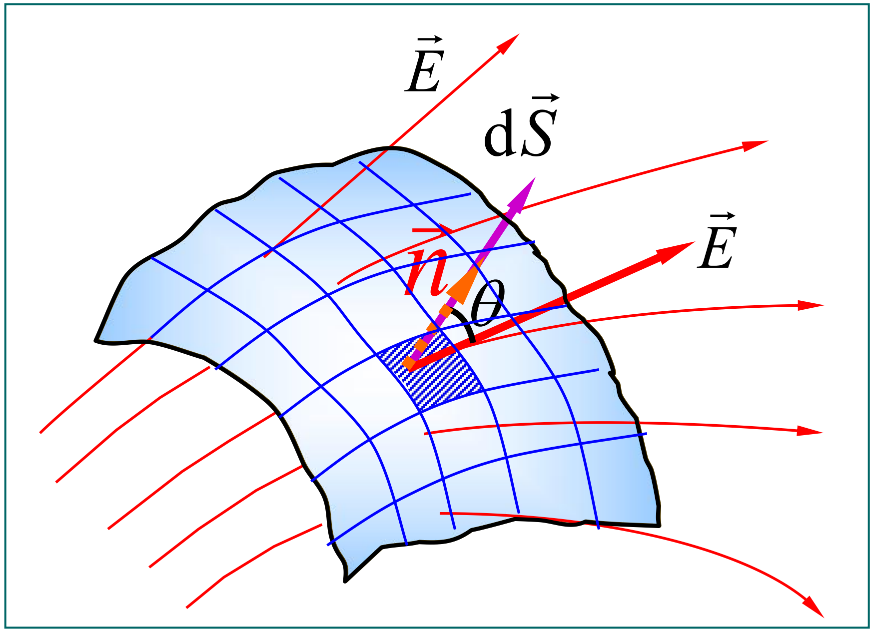
- 匀强电场，$\vec{E}$与平面夹角 $\theta$

$$\Phi_e = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$



## 非均匀电场强度电通量

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$$




$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\mathrm{d}S\cos\theta$$

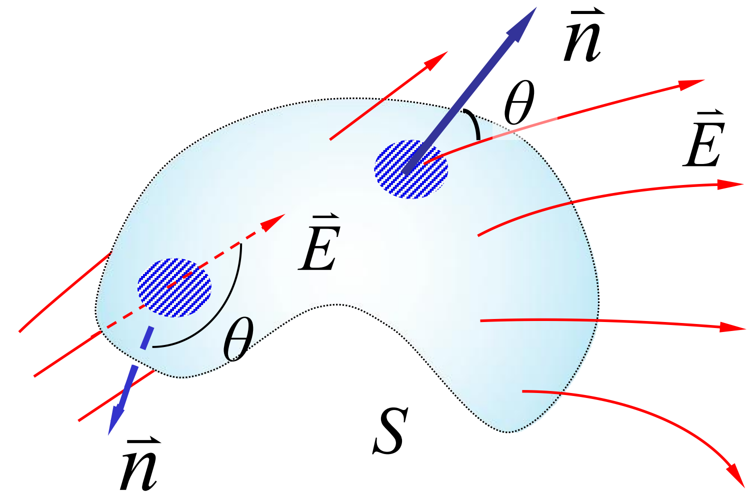
$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} > 0$$

$$\theta > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} < 0$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_S E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

- 通过闭合曲面的通量




$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$

$S$ 为闭合曲面

"穿出"

$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_e > 0$$

$$\theta > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_e < 0$$

"穿入"

## 三、真空中的高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数 $\varepsilon_0$。与闭合曲面外电荷无关。

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

说明：

（1）高斯定理描述了静电场的基本性质，说明静电场是有源场。

（2）闭合曲面称为高斯面。

（3）$\sum_{i=1}^{n} q_i$ 仅仅表示高斯面内的电荷的代数和。

（4）仅高斯面内的电荷对通过高斯面的电通量有贡献。

（5）高斯面上的 $\vec{E}$ 与高斯面内外所有电荷有关。

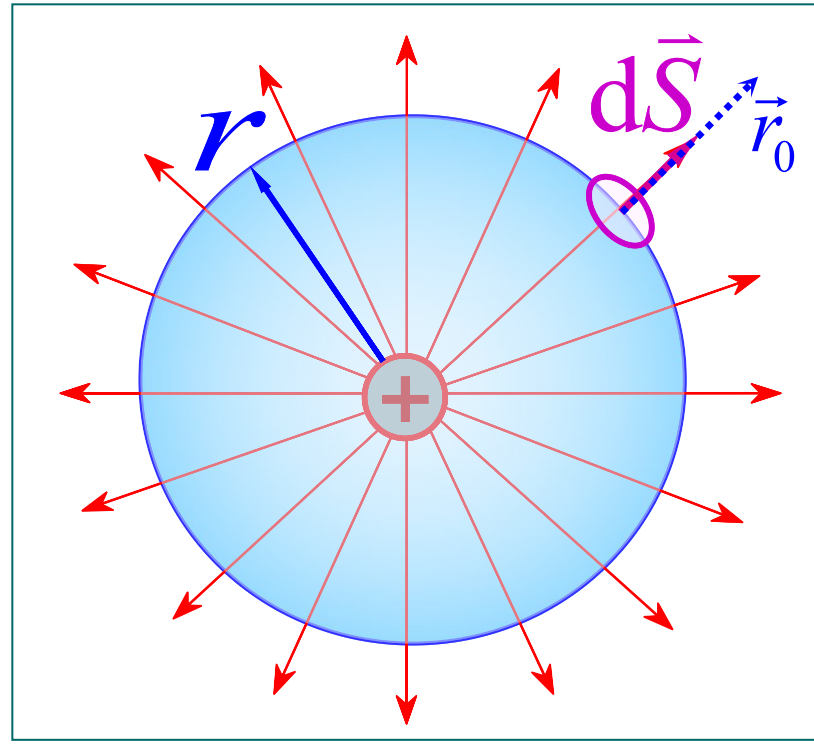
**下面从点电荷和点电荷系出发证明高斯定理。

（1）点电荷位于球面中心

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

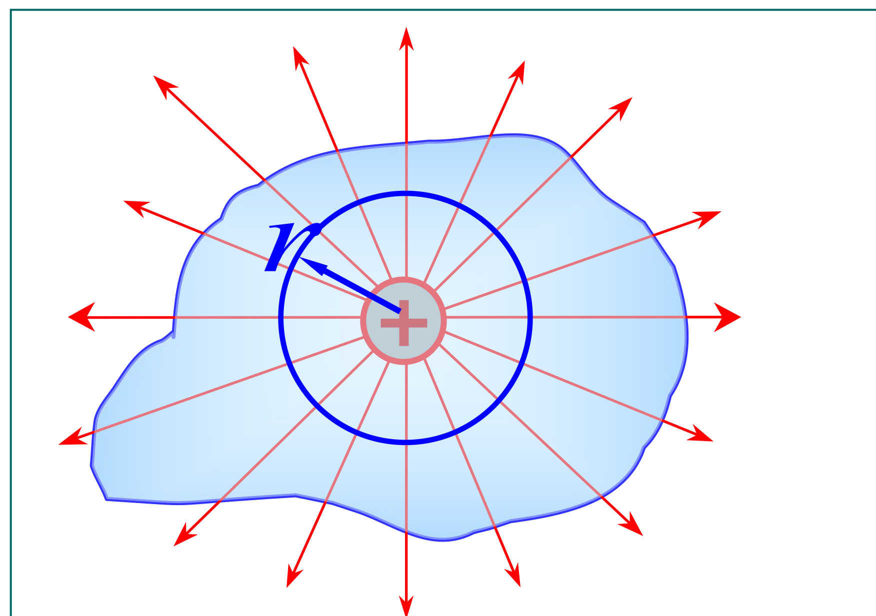
$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$




（2）点电荷在任意封闭曲面内

总可以在封闭曲面内做一个以点电荷为球心的球面，由于电场线的连续性，穿出球面和穿出封闭曲面的电通量相等，仍然有：$\Phi_e=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$。



选讲

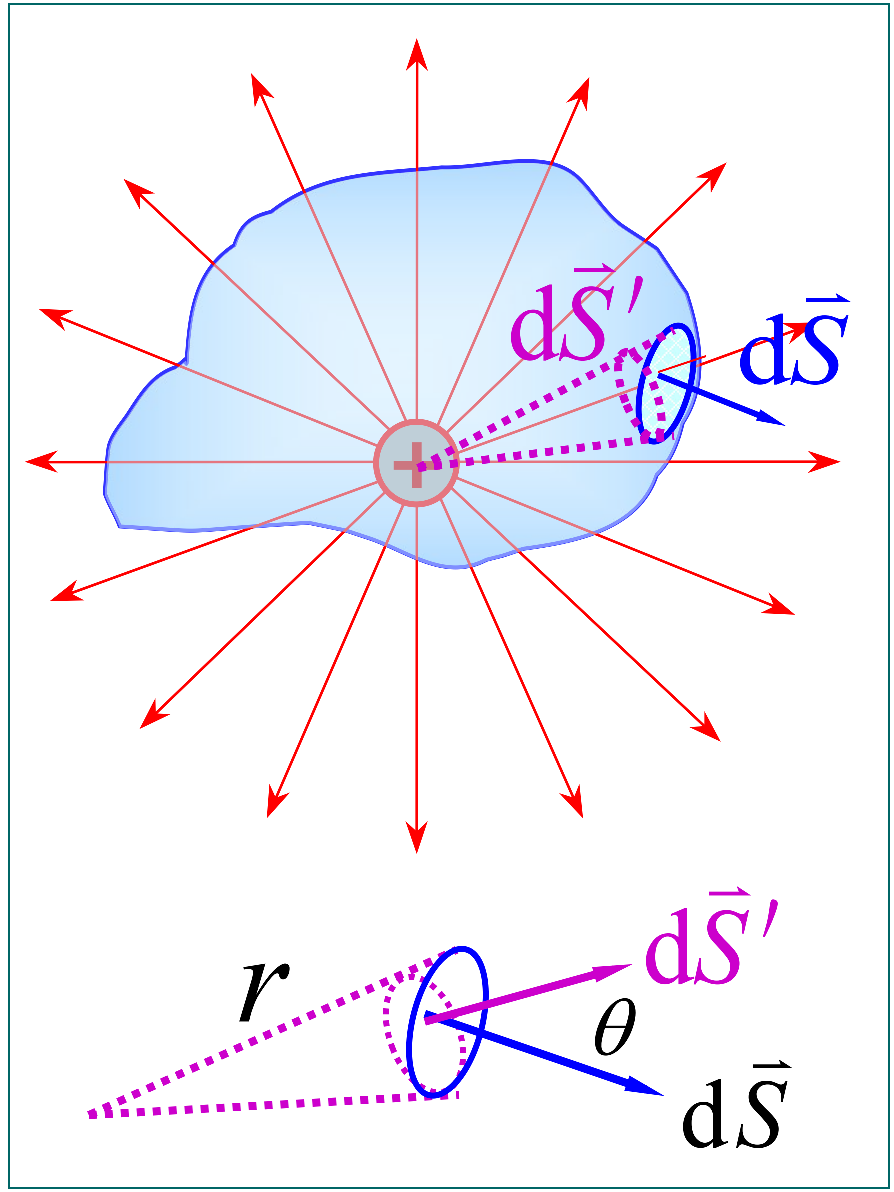
**也可以严格证明“点电荷在任意封闭曲面内”的情形。

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

其中立体角 $\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{d}S'}{r^2}$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



（3）点电荷在闭合曲面外

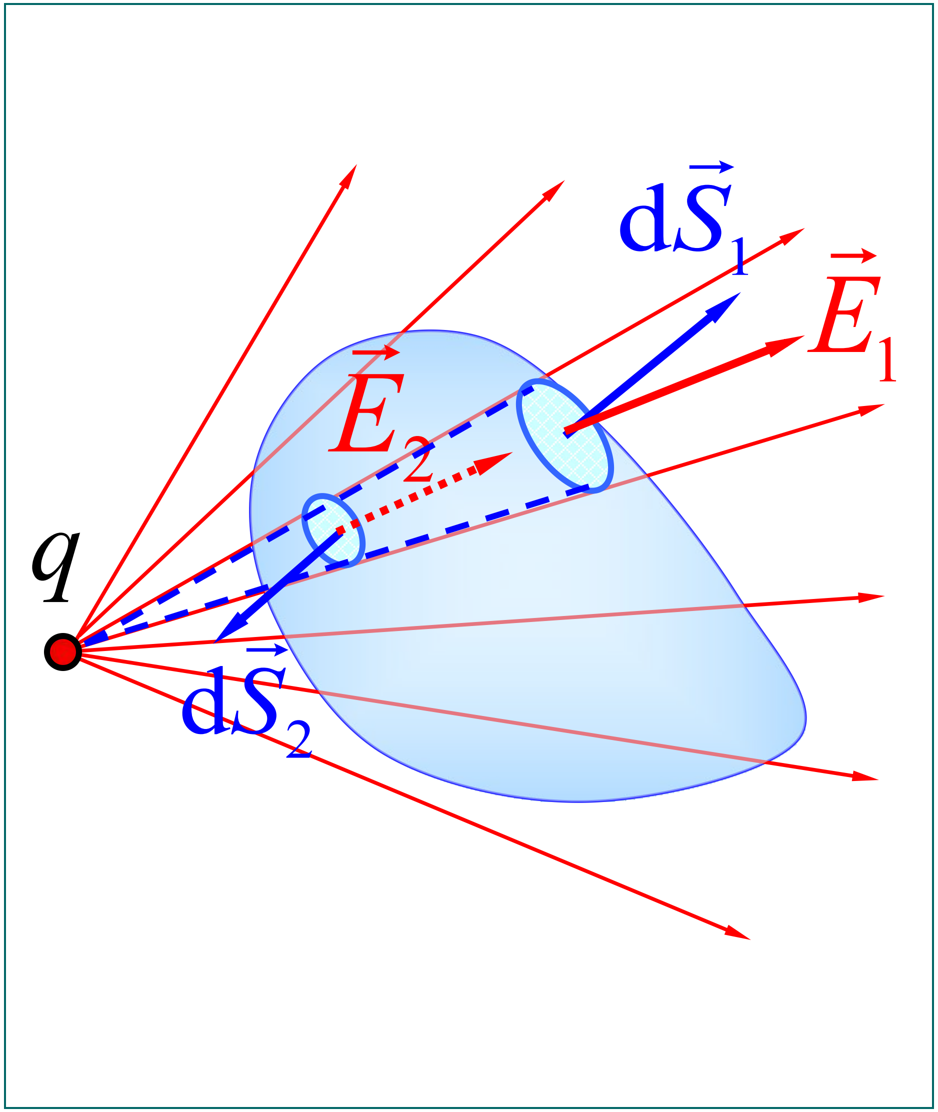
$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\left|\mathrm{d}\Phi_1\right| = \left|\mathrm{d}\Phi_2\right|$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



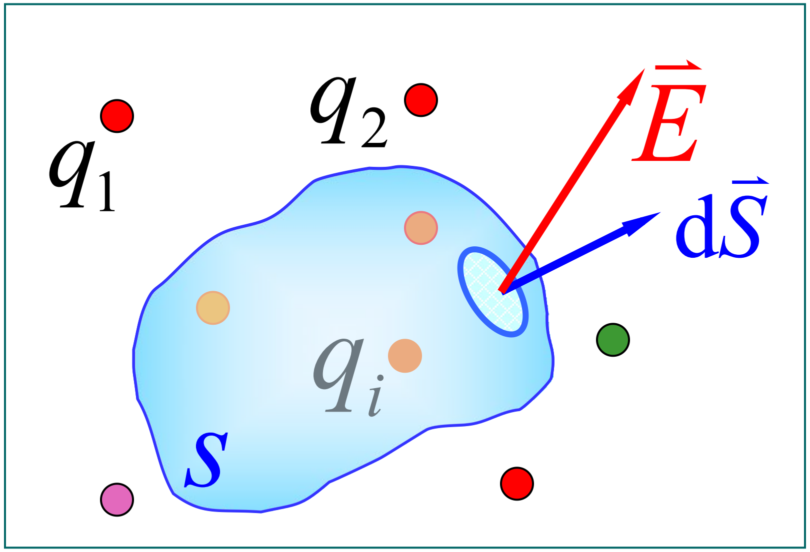
（4）由多个点电荷构成的点电荷系产生的电场中

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots = \sum_i \vec{E}_i$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$= \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$

$$+ \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}$$




$$\because \sum_{i(\text{外})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_e = \sum_{i(\text{内})} \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\text{内})} q_i$$

**高斯定理：**

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

**总结：**

（1）高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度。

（2）高斯面一定为封闭曲面。

（3）穿出高斯面的电通量为正，穿入为负。

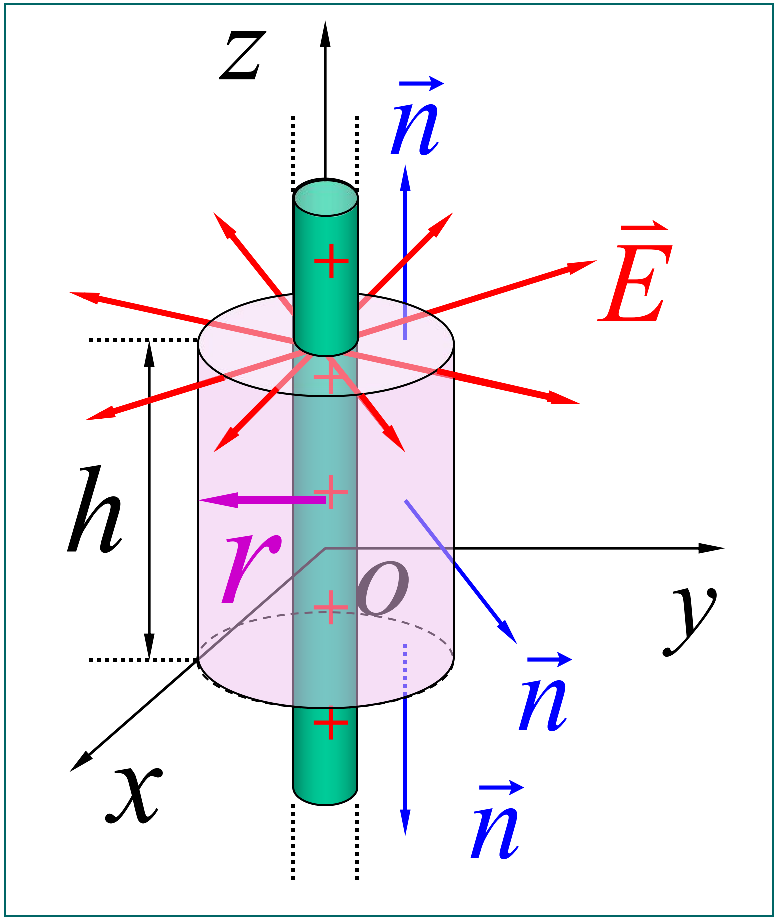
（4）仅高斯面内的电荷对高斯面的电通量有贡献。

（5）静电场是有源场。

例1 无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 $\lambda$ ，求距直线为 $r$ 处的电场强度。

解：电场分布具有柱对称性，带电体轴线即为对称轴。

选取**闭合的柱形高斯面**，侧面上各点电场强度大小相等，且平行于侧面各处的法线；上下底面的法线与场强方向垂直。




$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$+ \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S = E2\pi rh$$

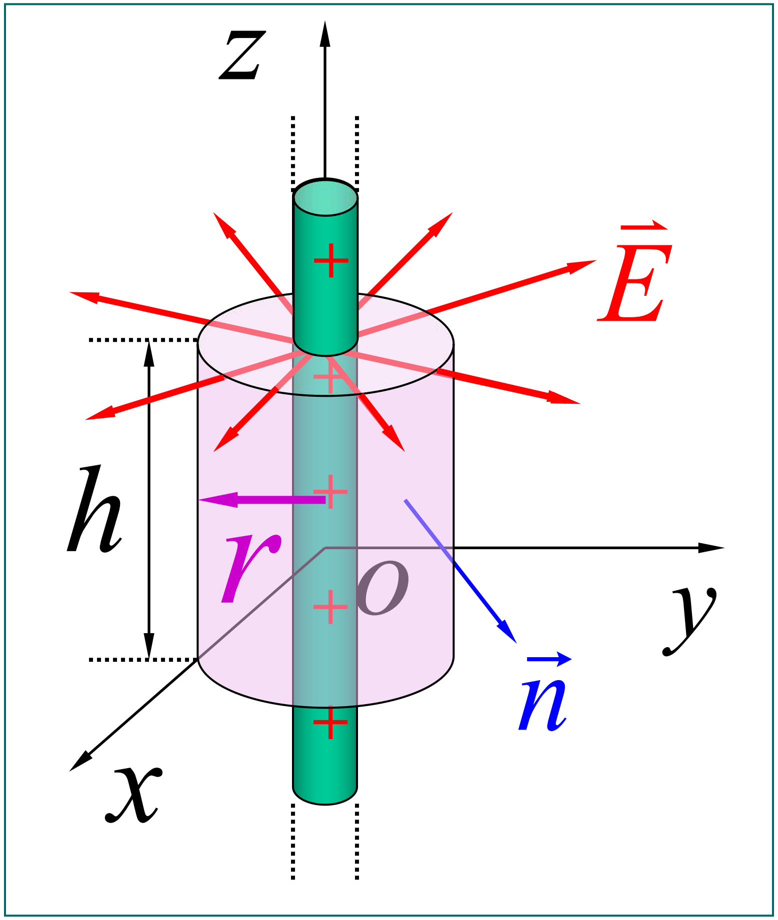
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

$\boxed{r > R}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}_0}$$

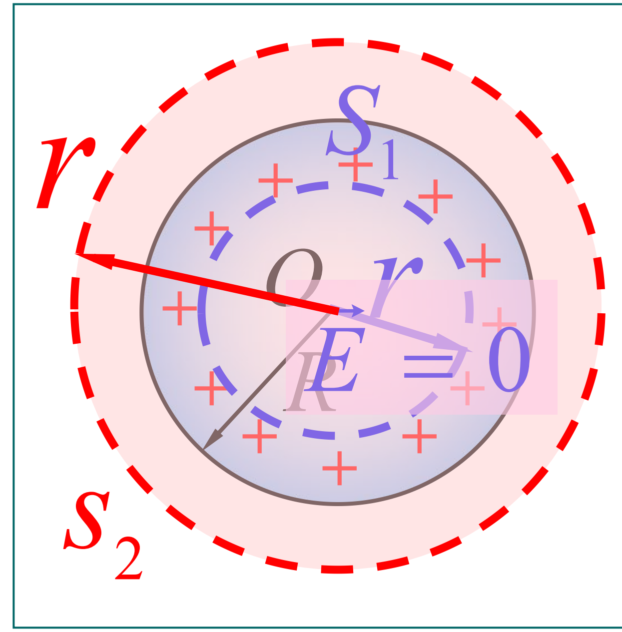



**思考：** 若求 $r < R$ 空间内的电场强度分布，如何求？

**例2** 一半径为 $R$，均匀带电 $Q$ 的薄球壳。

见教材例6-3

求：球壳内外任意点的电场强度。




解（1） $0<r<R$

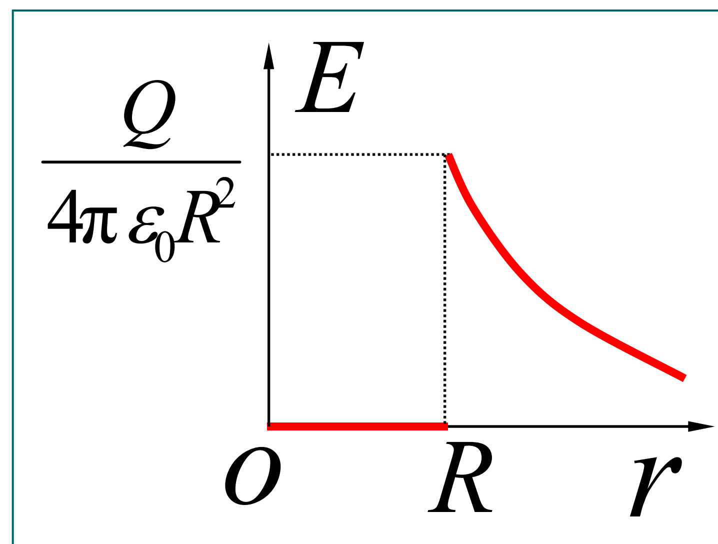
$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

（2） $r>R$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_{S_2} E\cdot \mathrm{d}S=4\ \pi r^2 E$$

$$E=\frac{Q}{4\ \pi\varepsilon_0 r^2}$$

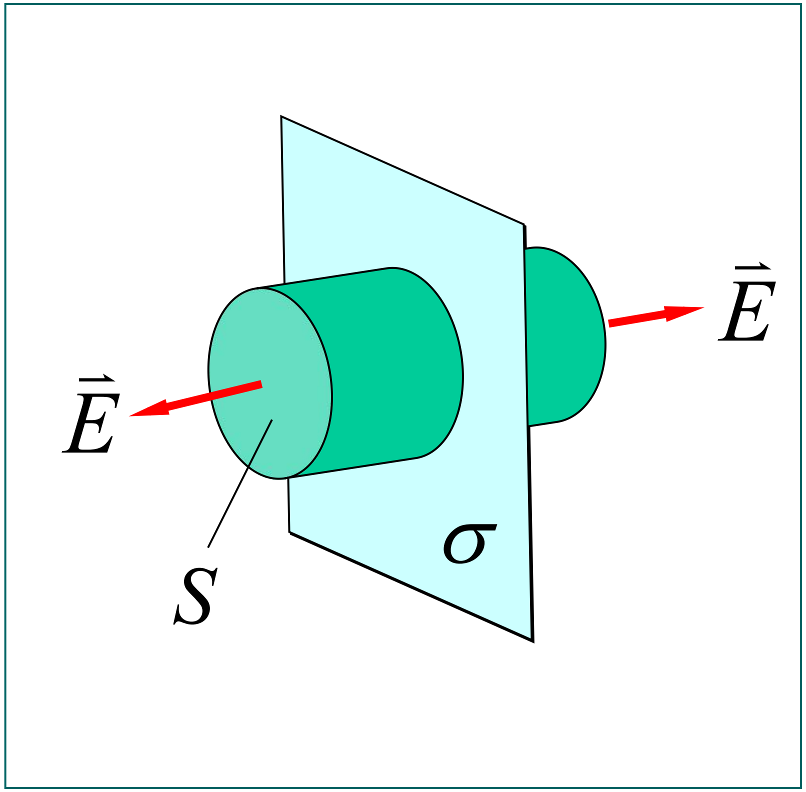


**例3** 设有一无限大均匀带电平面，电荷面密度为$\sigma$，求距平面为$r$处某点的电场强度.

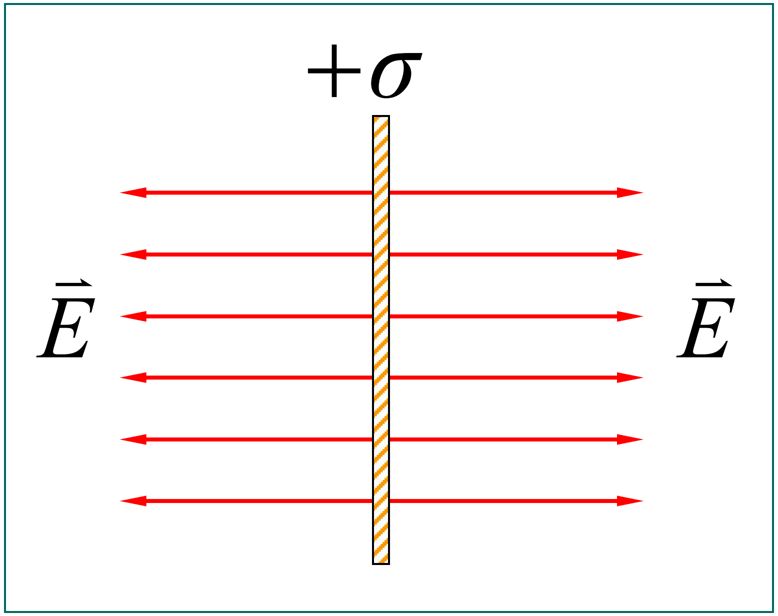
**解** 对称性分析与高斯面的选取

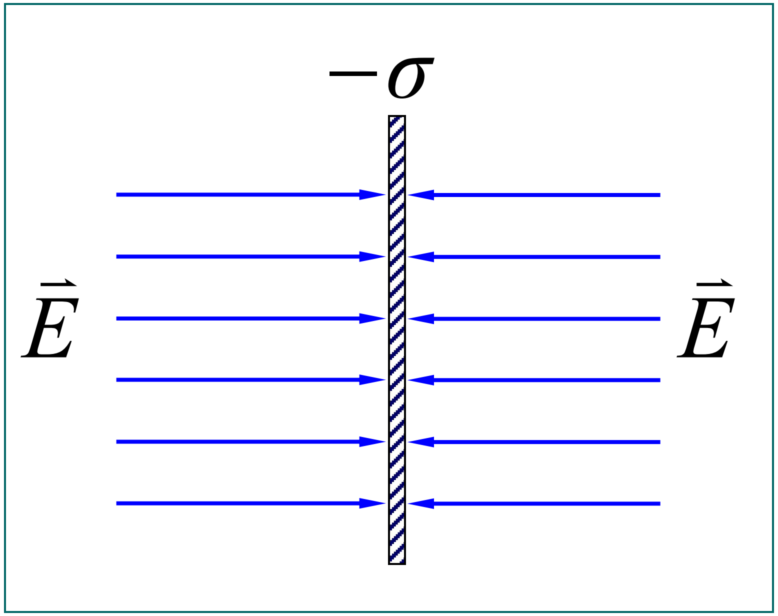
$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

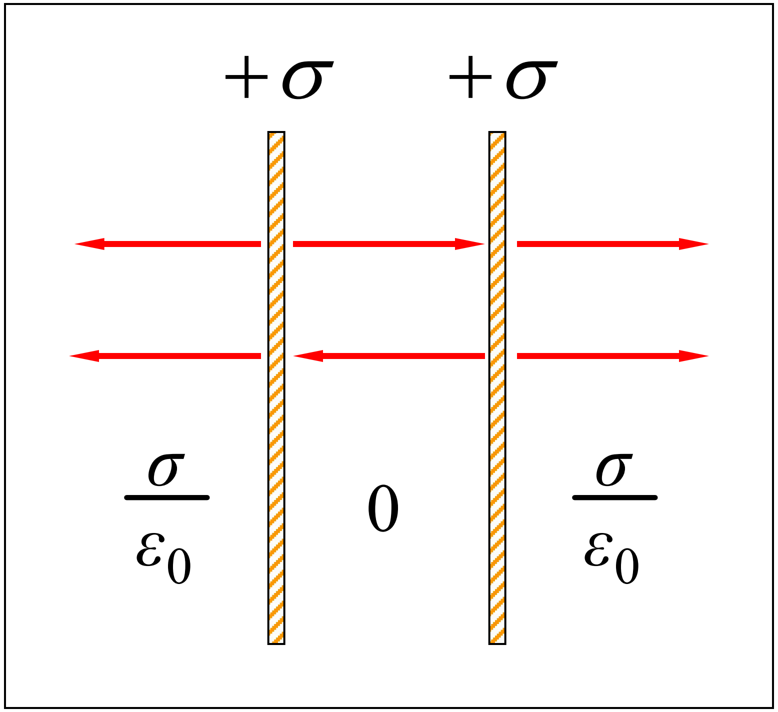


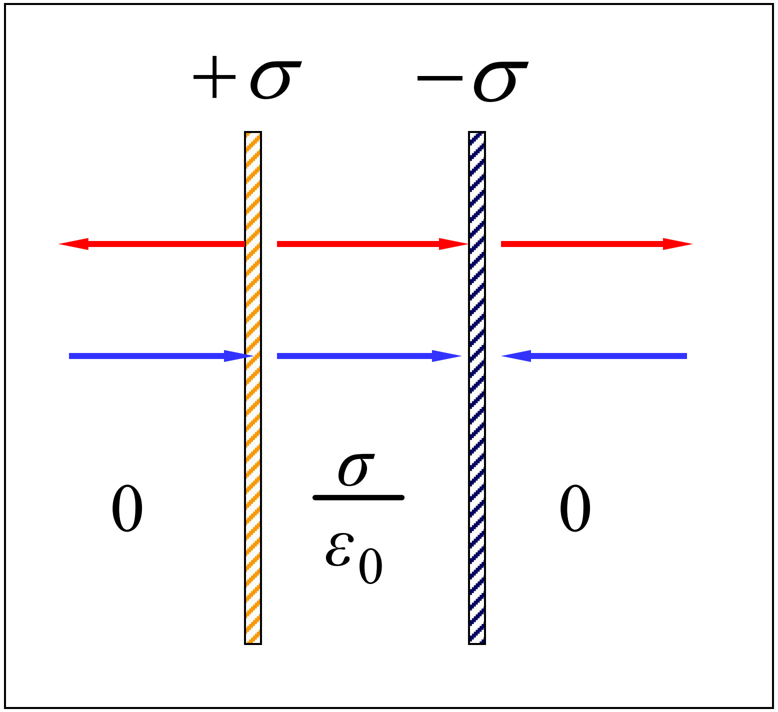
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



# 无限大带电平面的电场叠加问题



## 应用高斯定理求 $\vec{E}$ 的关键:

(1) 分析场强的对称性（方向、大小）。

(2) 选择适当的高斯面:

- 高斯面应该通过场点。
- 高斯面各部分或 // $\vec{E}$，或 ⊥ $\vec{E}$
- 高斯面上待求的场强只有一个值（可以提出积分号）。

如果带电系统是
球、板、柱 电荷分布的组合,
可以直接利用以上典型结果，再叠加。

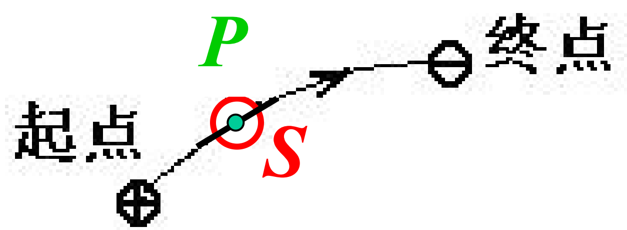
选讲

# **高斯定理更多应用举例

## 定性分析

例如．分析电场线的性质

电场线总是从正电荷发出，终止于负电荷；无电荷处不中断。



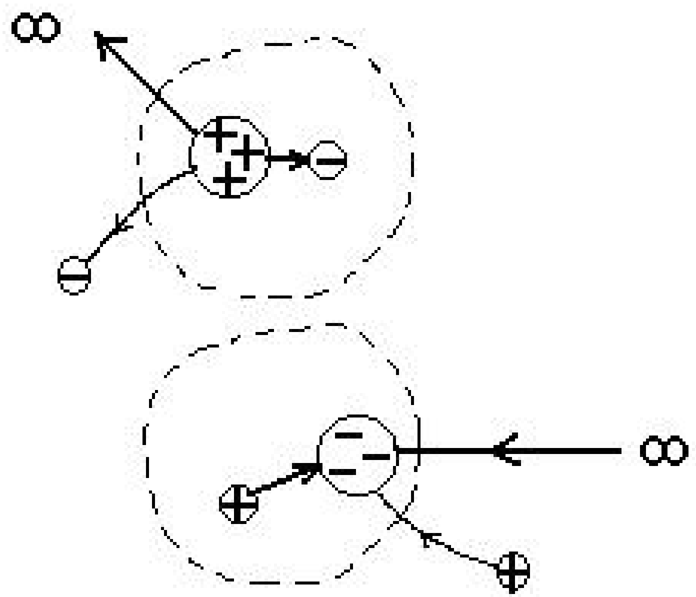

若$P$点无电荷，则有：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$$

即 $N_{入}=N_{出}$， $P$点处 $\vec{E}$ 线连续。

静电场称为有源场。

选讲




带电系统多余的正电荷发出的电场线将指向系统外的负电荷（或无限远）。

带电系统多余的负电荷处，必有从系统外的正场荷发来的电场线（或从无限远来的电场线）。

例如 . 分析导体带电时
电荷分布的性质

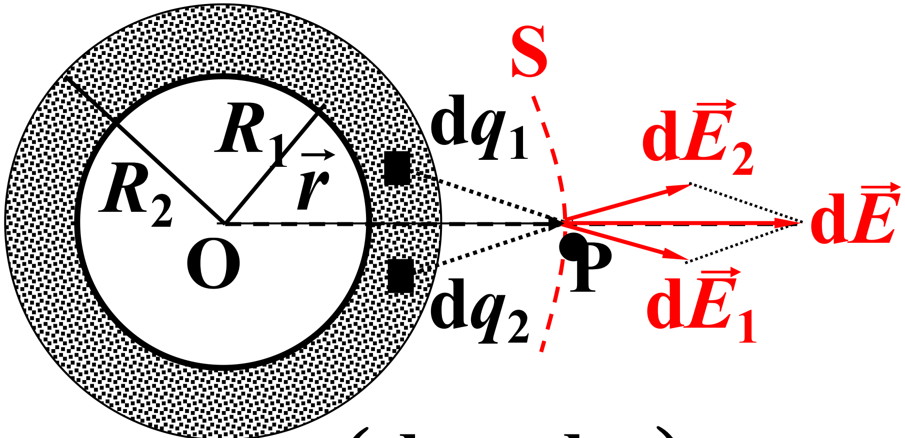
选讲

**拓展例题. 已知：**均匀带电量为$q$（设$q$>0）的球层，内、外半径分别为 $R_1$、$R_2$ **求：**电场强度的分布。

【解】 电荷体密度 $$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

$r > R_2$：任取一场点 P,

用点电荷场强叠加法好吗？




（$q$） （$dq_2 = dq_1$）

**现用高斯定理：**

先分析 $\vec{E}$ 的对称性：

场有球对称

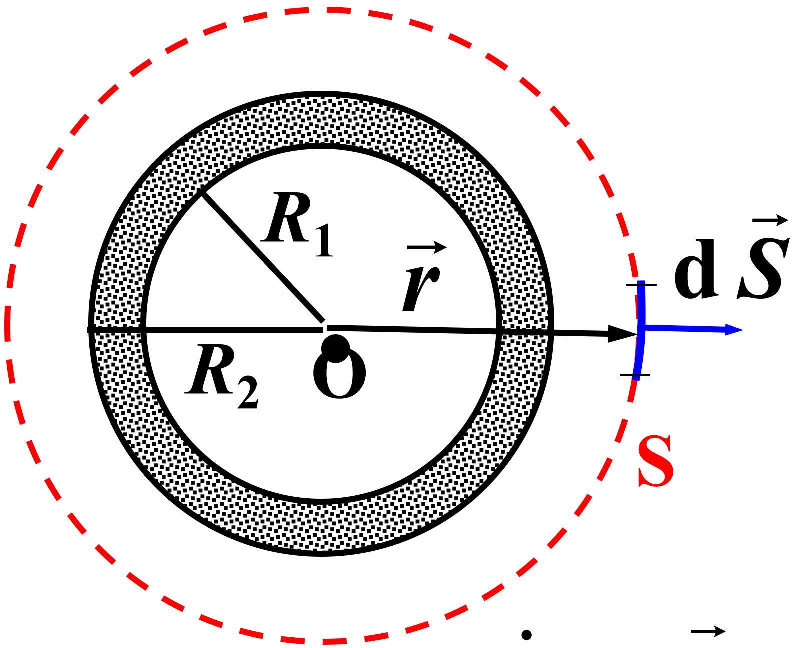
$$\vec{E} = E(r)\cdot\hat{r}$$

作高斯面S如图。

高斯面S 为 过P点、
与带电球层同心的球面。

此高斯面 S上的 $E$ 大小相同,方向处处与面元垂直。

电通量:




$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S E(r)\,\mathrm{d}S$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

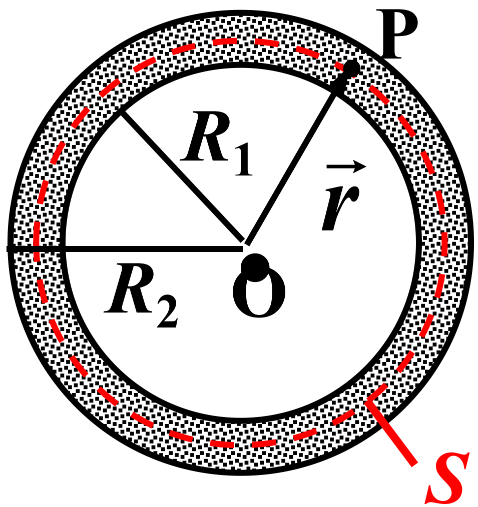
$$= \frac{q_{内}}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

因为 $q_{内} = q$，

有 $$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$ 球层外的电场与全部电荷 $q$ 集中在球心 的点电荷的场强一样。

对 $R_1 < r < R_2$： 任取一场点 P，同理可得




$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\because q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho,$$

有 $$\vec{E} = \frac{(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\rho\hat{r},$$

可见，在带电球层内的电场分布
不同于带电球层外的电场分布。

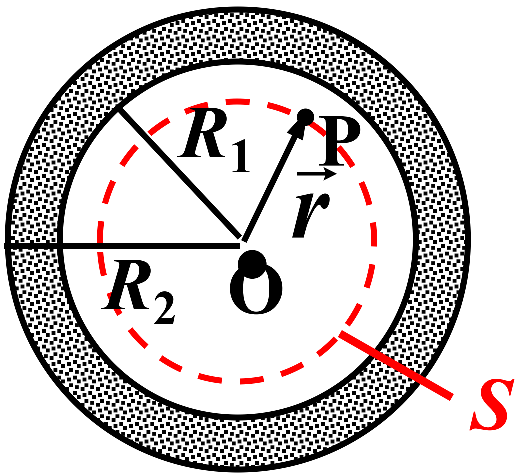
在带电球层内，场强是随着场点 P 与球心O的距离增大而增大。

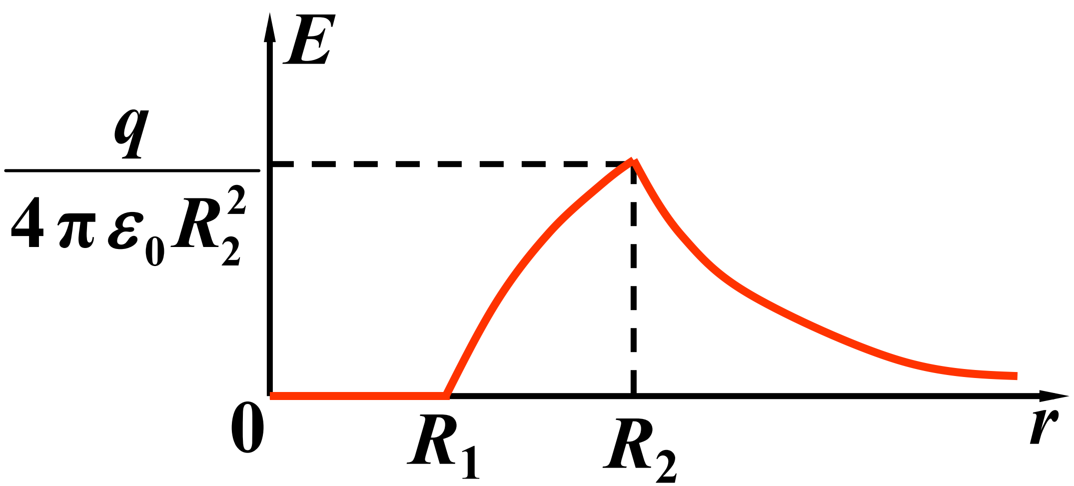
对　　$r < R_1$：任取一场点 P，同理可得

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

因为 $q_{内} = 0$，有 $E = 0$

球层内的空腔中没有电场。



讨论： （1）$E$ 的分布图：连续，无突变。

当 $q$、$R_2$不变时：

$R_1$增大，层变薄，$R_1 < r < R_2$ 区域的曲线变陡；

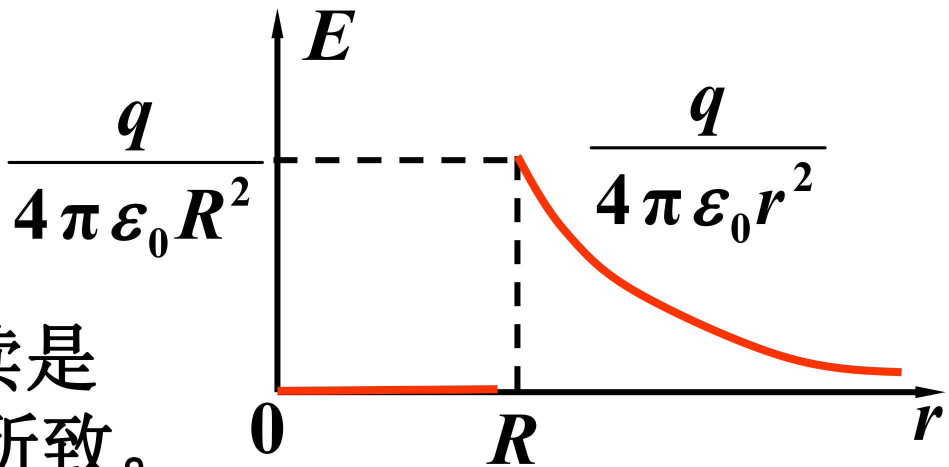
带电层厚度趋于零，场强分布不再连续。

当把电荷从体分布抽象为面分布时，在带电面两侧的电场强度发生突变。……有普遍性

如何理解

在 $r = R$ 处，

$E$ 值的不连续：




答：在 $r = R$ 处 $E$ 不连续是因为忽略了电荷厚度所致。

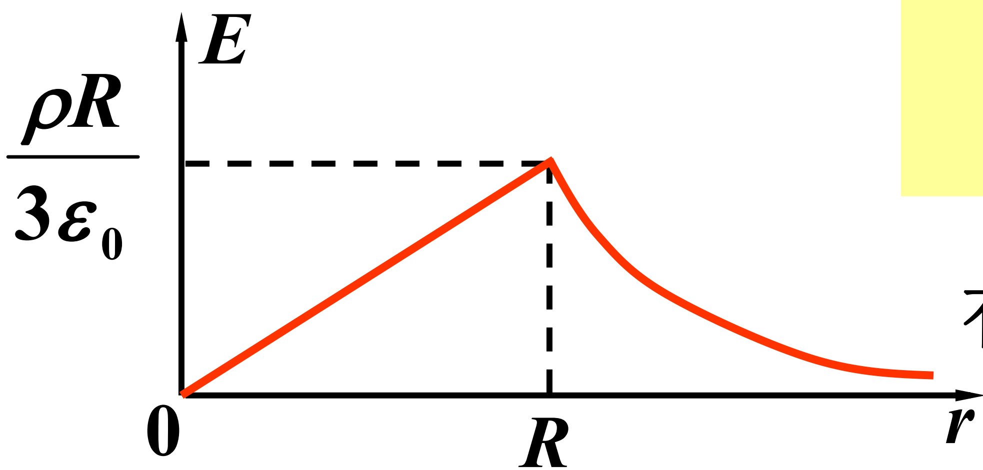
重要结论：

- 均匀带电球面内部空间的场强，处处为零。
- 均匀带电球面外部空间的场强，与全部电荷 $q$ 集中在球心的点电荷的场强一样。

（3）令$R_1=0$， $R_2=R$

即均匀带电球体的情形：

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & (内)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} & (外)\end{cases}$$




有 $$\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$