

## 2023 年秋统计学习题 02

1. 证明  $n \rightarrow \infty$  时, 自由度为  $n$  的  $t$  分布的概率密度函数收敛于标准正态分布的密度函数.
2. 已知随机变量  $X \sim t(n)$ , 求证:  $X^2 \sim F(1, n)$ .
3. 设  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$  是分布  $N(0, \sigma^2)$  的容量为  $n+m$  的样本, 试求下列统计量的概率分布

(a).

$$Y_1 = \frac{\sqrt{m} \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}.$$

(b).

$$Y_2 = \frac{m \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$$

4. 设  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

试求统计量

$$T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的分布.