主管 领核 签字

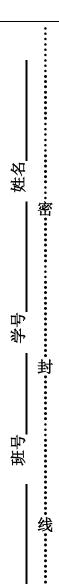
哈尔滨工业大学(深圳)2019/2020 学年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题号	=	Ш	四	五	六	七	总分
得分							
阅卷人							

注意行为规范

遵守考场纪律



一、 填空题(每小题3分,共15分)

- 1. 复数-1+i√3的主辐角是 $\frac{2\pi}{3}$ 。
 - 2. 设C是从z=0到 z=1+i的直线段,则 $\int_{C} |z| dz = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i).$
 - 3. 设函数 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2)^n$,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2)^n$ 的收敛半经 $R = \underline{3}_{-\infty}$ 。

4.
$$\oint_{|z|=3} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{10\pi i}{3}.$$

5. 设
$$f(t) = \frac{1}{2} [\delta(t+2) + \delta(t-2)]$$
,则其傅氏变换
$$F(\omega) = \underline{\cos 2\omega}, \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} (e^{2\omega i} + e^{-2\omega i}).$$

二、 单项选择题 (每小题 3 分,共 15 分)

- 1. 设函数 $f(z) = 2xy ix^2$, 那么 (D)。
 - A. f(z)处处可微;
- B. f(z)处处不可导;
- C. f(z)仅在原点可导;
- D. f(z)仅在x轴上可导。
- 2. $\oint_{|z|=1} \overline{z} \cos \frac{1}{\overline{z}} dz = (A).$
 - A. $2\pi i$;
- Β. πί;
- C. $-2\pi i$;
- D. 0.
- 3. 若 f(z) 在 D 内解析,且 $\arg f(z)$ 在 D 内是常数,则(C)。
 - A. 这样的函数不存在;
 - B. $f(z)=u(x,y)+i\theta u(x,y)$, u 是任意二阶可导函数, θ 是常数;
 - C. f(z)是不为零的常数;
 - D. f(z)=u(x,y)+iu(x,y), u是任意二阶可导函数。
- 4. z=1是函数 $e^{\frac{z}{1-z}}$ 的(A)。
 - A. 本性奇点;

B. 一阶极点;

C. 二阶极点;

- D. 可去奇点。
- 5. 若 $f(t) = e^{-t} \sin 2t$, 则 f(t) 拉氏变换是 (B)。

A.
$$\frac{4}{(s+1)^2+4}$$
;

B.
$$\frac{2}{(s+1)^2+4}$$
;

C.
$$\frac{4}{(s-1)^2+4}$$
;

D.
$$\frac{2}{(s-1)^2+4}$$
 o

三、 计算(每小题5分,共20分)

1.
$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} dz;$$

函数 $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ 在 |z| < 1 内仅有一个奇点 z = 0,且 z = 0 是它

的可去奇点,故
$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} dz = 0.$$

2.
$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz$$
;

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \lim_{z \to i} \left(e^{z^2} \right)'' = \pi i \lim_{z \to i} 2(e^{z^2} + 2z^2 e^{z^2}) = -2\pi i e^{-1}$$

3.
$$I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^{100} + 1)(z - 3)} dz$$
;

$$I = 2\pi i \left\{ \sum_{k=0}^{99} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^{100} + 1)(z - 3)}, e^{\frac{(2k\pi + \pi)i}{100}} \right] \right\}$$

$$= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^{100} + 1)(z - 3)}, 3 \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{1}{(z^{100} + 1)(z - 3)}, \infty \right] \right\}$$

$$= -2\pi i \left\{ \frac{1}{3^{100} + 1} - \text{Res} \left[\frac{z^{99}}{(1 + z^{100})(1 - 3z)}, 0 \right] \right\}$$

$$=-\frac{2\pi i}{3^{100}+1}$$
 .

4.
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$
.

$$I_{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^{2} + 1)(x^{2} + 4)} dx$$

$$= 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z^{2} + 1)(z^{2} + 4)}, i \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z^{2} + 1)(z^{2} + 4)}, 2i \right] \right\}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^{-1}}{2i(-1 + 4)} + \frac{e^{-2}}{4i(-4 + 1)} \right] = \pi \left(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-2}}{6} \right) \circ$$

$$\therefore I = \operatorname{Re}(I_{1}) = \pi \left(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-2}}{6} \right) \circ$$

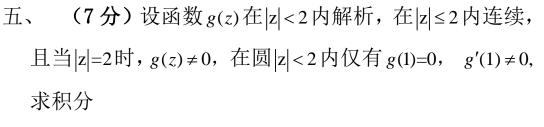
四、 (8分) 求函数 $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$ 在 1 < |z| < 2 内的洛朗展开式.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+z} - \frac{2}{2-z} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n \right] \circ$$



$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{zg(z)} dz \quad \circ$$

被积函数 $f(z) = \frac{1}{zg(z)}$ 在 |z| < 2 内有二个一阶极点 z = 0 和

$$z=1$$
。 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{zg(z)} dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1] \right\}$$

$$= 2\pi i \left[\lim_{z \to 0} \frac{1}{g(z)} + \lim_{z \to 1} \frac{z - 1}{z g(z)} \right]$$
$$= 2\pi i \left[\frac{1}{g(0)} + \frac{1}{g'(1)} \right] \circ$$

六、 (10分)利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$s^{2}Y(s) - 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2}, 1\right]$$

$$=1+\lim_{s\to 1}\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s}\right)'=1+t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t.$$

班号

孙河

七、 (5分)设 $u(x,y)=x^2-y^2-2xy+x+y+2$,求二元实函数v(x,y)

满足f(x,y)=u+iv 是解析函数且f(0)=2+3i。

得
$$v = \int (2x + 2y - 1) dx = x^2 + 2xy - x + \varphi(y)$$
 。

又由
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y + 1$$
 , 得

$$2x + \varphi'(y) = 2x - 2y + 1$$
,

$$\varphi'(y) = -2y + 1,$$

:.
$$\varphi(y) = \int (-2y+1) dy = -y^2 + y + c$$
.

$$\iint \overline{\Pi} \quad v = x^2 - y^2 + 2xy - x + y + c \circ$$

再由
$$f(0) = 2 + 3i$$
, 得 $c = 3$ 。

因此,
$$v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - x + y + 3$$
。