

2021 年秋统计学习题 08 参考解答

3. 设 X 为连续型随机变量, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 求 $X_{(n)}$ 大于 X 的中位数 m 的概率.

解:

$$\begin{aligned} & P(X_{(n)} > m) \\ &= 1 - P(X_{(n)} \leq m) \\ &= 1 - P(X_1 \leq m, X_2 \leq m, \dots, X_n \leq m) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \leq m) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

4. 设 X_1, X_2 独立同分布, 为来自均匀分布 $(\theta, 1 + \theta)$ 的样本. 为检验 $H_0: \theta = 0 \leftrightarrow H_1: \theta > 0$, 考虑如下两种检验方法:

ϕ_1 : $X_1 > 0.95$ 时, 拒绝 H_0 ,

ϕ_2 : $X_1 + X_2 > C$ 时, 拒绝 H_0 .

- (a). 求 C 的值使得检验 ϕ_1, ϕ_2 的显著性水平相同.
(b). 求两个检验各自的势函数.
(c). 证明或否定: ϕ_2 的势比 ϕ_1 的势更大.

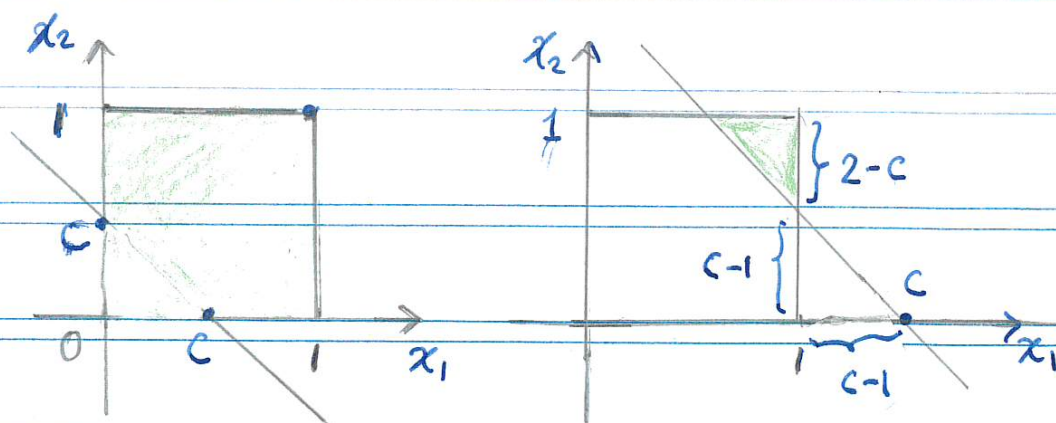
解 (a) 检验 ϕ_1 的显著性水平 α_1 为在 H_0 为真的条件下, 拒绝 H_0 的概率, 即 $\{X_1 > 0.95\}$ 的概率.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P(X_1 > 0.95 | \theta = 0) \\ &= \int_{0.95}^1 1 \, dx \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

检验 ϕ_2 的显著性水平 α_2 为 H_0 为真, 即 $0=0$ 条件下,
拒绝 H_0 , 即 $\{X_1 + X_2 > c\}$ 的概率 $\bar{\phi}$:

$$\alpha_2 = P(X_1 + X_2 > c)$$

$$= \begin{cases} 1 & c \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}c^2 & 0 < c \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2-c)^2 & 1 < c < 2 \\ 0 & c \geq 2 \end{cases}$$



为使 $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.05$, 显然应取 $c \in (1, 2)$, 使

$$\frac{1}{2}(2-c)^2 = 0.05,$$

可得

$$c = 2 - \sqrt{0.1} \approx 1.68.$$

(b) 检验 ϕ_1 的势函数为 $p(\theta) = P(X_1 > 0.95 | \theta)$, 可计算得:

$$p_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \leq -0.05, \\ \theta + 0.05, & -0.05 < \theta \leq 0.95, \\ 1, & 0.95 < \theta. \end{cases}$$

检验 ϕ_2 的势函数为

$$p_2(\theta) = P(X_1 + X_2 > c | \theta).$$

$$= \begin{cases} 0 & \theta \leq \frac{c}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} [2(\theta + 1) - c]^2 & \frac{c}{2} - 1 < \theta < \frac{c-1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} (c - 2\theta)^2 & \frac{c-1}{2} < \theta < \frac{c}{2} \\ 1 & \theta \geq \frac{c}{2} \end{cases}$$

(c) 当 θ 接近 0 时, $p_1(\theta) \approx 0.5$, $p_2(\theta) \approx \frac{1}{2}(2-c)^2 \approx \frac{1}{2} \times 0.32^2$.

故此时 $p_1(\theta) > p_2(\theta)$.

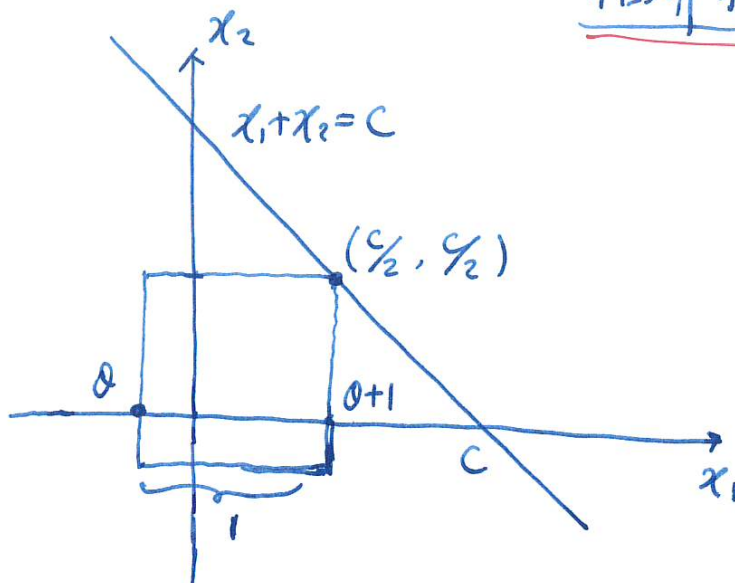
当 $\theta > \frac{c}{2} = 1.68/2 = 0.84$, 但 $\theta \leq 0.95$ 时,

$$p_1(\theta) = \theta + 0.05 < 1, \quad p_2(\theta) = 1,$$

故此时 $p_2(\theta) > p_1(\theta)$, 即 ϕ_2 (或 ϕ_1) 比 ϕ_1 (或 ϕ_2) 不是
一致最有效的检验。

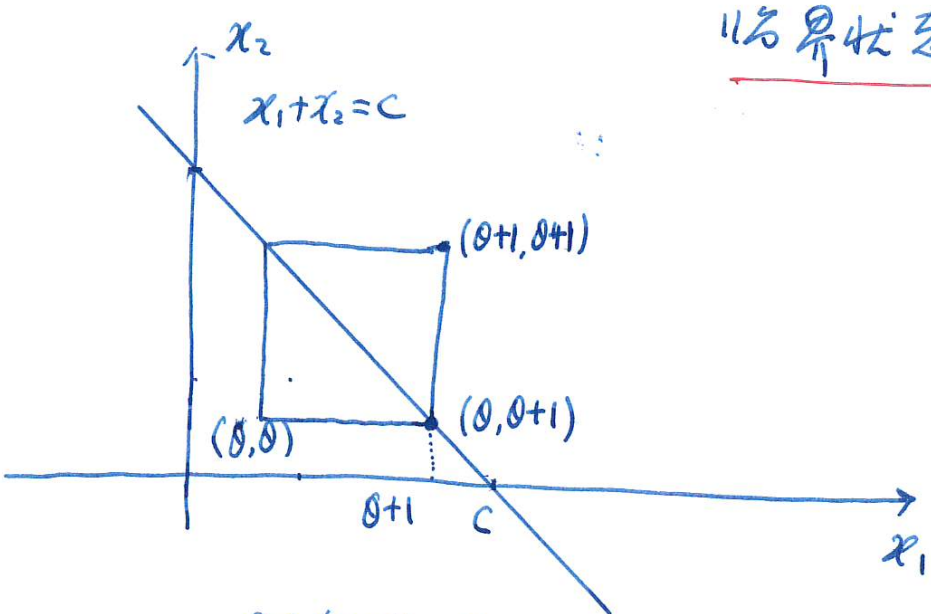
4

临界状态 1.



$$0+1 = \frac{c}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{c}{2} - 1$$

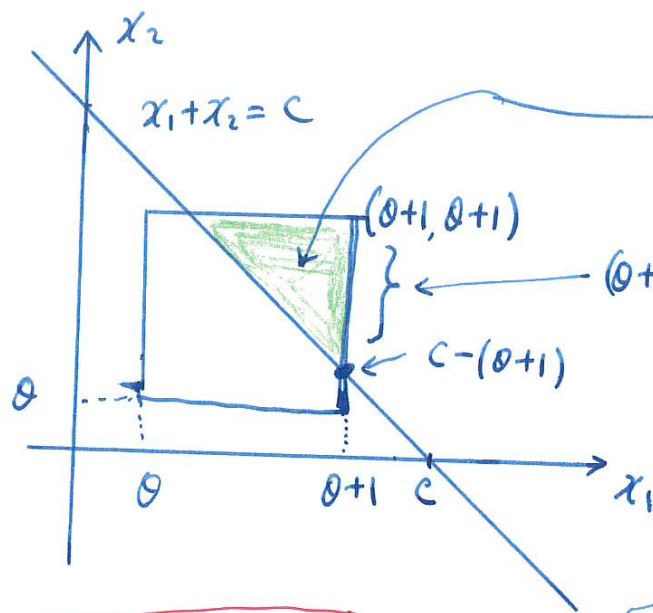
临界状态 2



$$0 + (0+1) = c$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{c-1}{2}$$

5



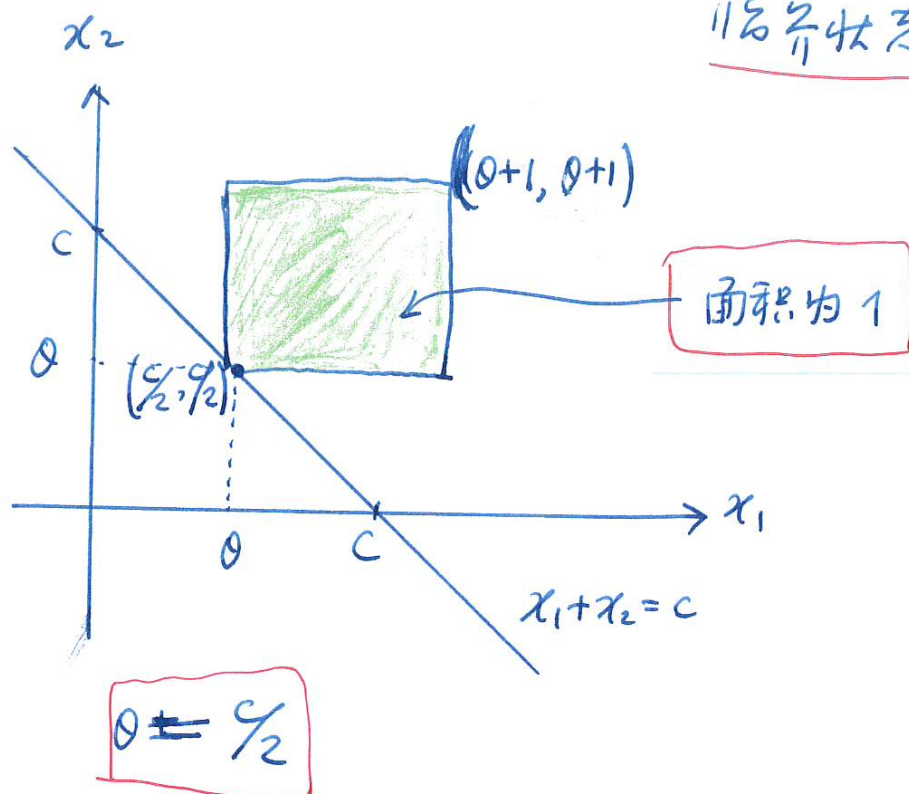
面积为 $\frac{1}{2} [2(\theta+1)-c]^2$

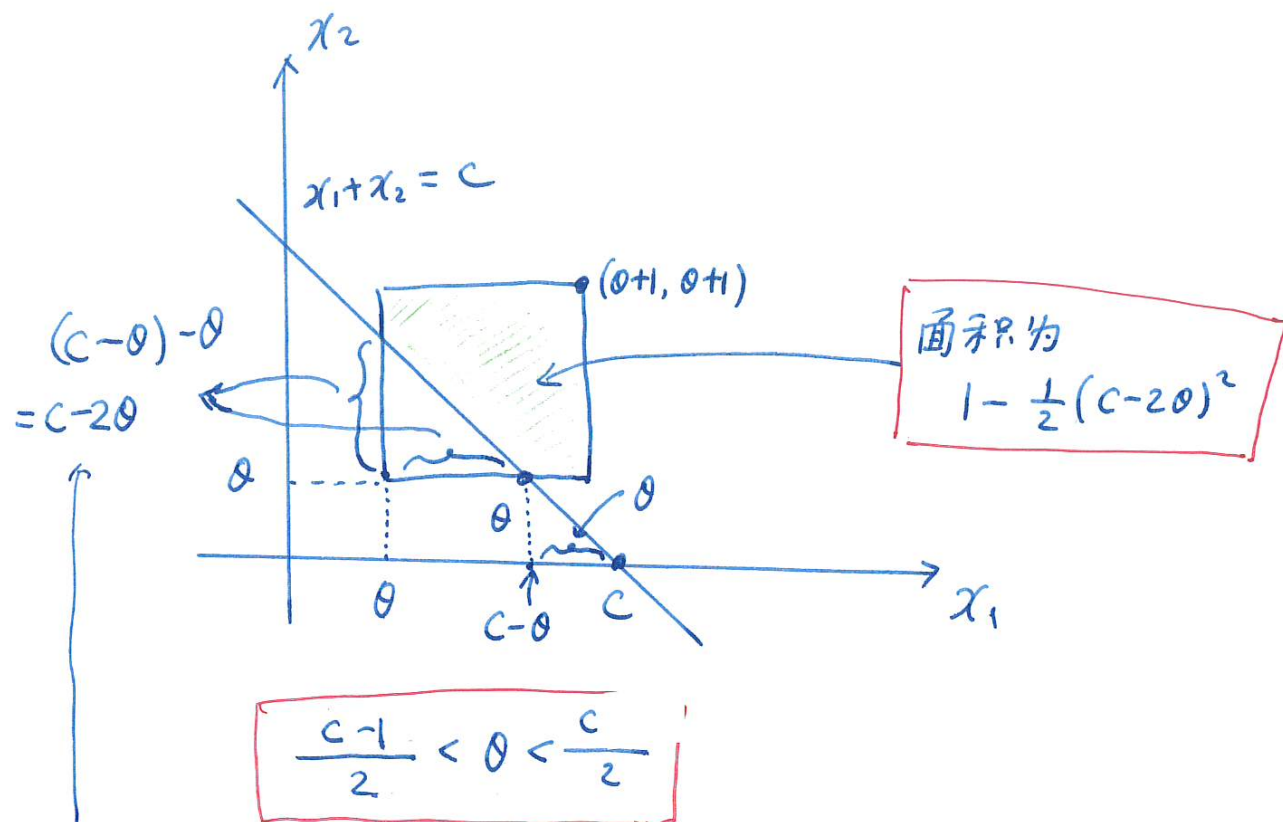
$(\theta+1) - [c - (\theta+1)]$
 $= 2(\theta+1) - c$

$\frac{c}{2} - 1 < \theta < \frac{c-1}{2}$

$0 < 2(\theta+1) - c < 1$
 $\Leftrightarrow c < 2(\theta+1) < c+1$
 $\frac{c}{2} < \theta+1 < \frac{c}{2} + \frac{1}{2}$
 $\frac{c}{2} < \theta < \frac{c}{2} - \frac{1}{2}$
 $\frac{c}{2} < \theta < \frac{c-1}{2}$

11名 2/11 状态 3





$$\textcircled{1} \quad c-2\theta < 1 \Rightarrow c < 2\theta+1 \Rightarrow \theta \geq \frac{c-1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad c-2\theta > 0 \Rightarrow \theta < \frac{c}{2}$$