应用随机过程

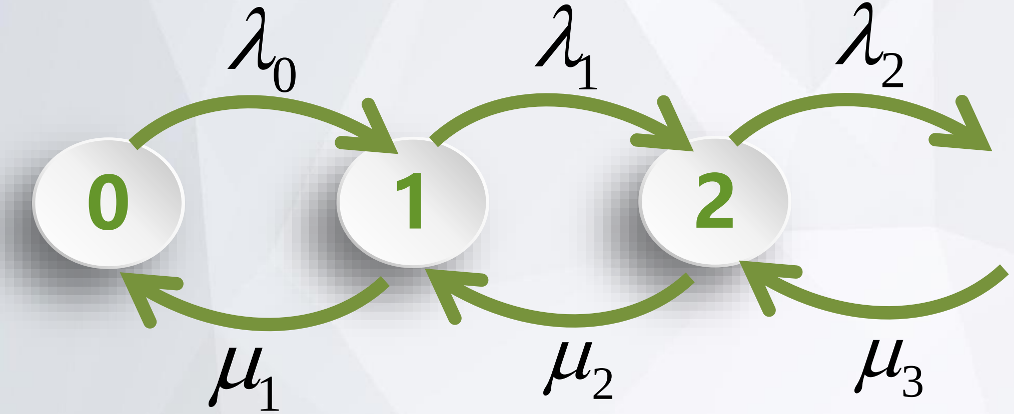
Kolmogorov微分方程

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

知识回顾

出生消失过程



$$Q=\begin{bmatrix} -v_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mu_1 & -v_1 & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \mu_2 & -v_2 & \lambda_2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \mu_3 & -v_3 & \lambda_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Kolmogorov微分方程

$$P_{ij}(t+h)=\sum_{k\in S}P_{ik}(h)P_{kj}(t)=\sum_{k\in S,k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)+P_{ii}(h)P_{ij}(t)$$

(Chapman-Kolmogorov等式)

两边同时减去$P_{ij}(t)$

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\sum_{k\in S,k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)-(1-P_{ii}(h))P_{ij}(t)$$

两边除以h并令$h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k\in S,k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)}{h}-\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-P_{ii}(h)}{h}\right)P_{ij}(t)$$

$$=\sum_{k\in S,k\neq i}\lim_{h\to 0}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)-\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-P_{ii}(h)}{h}\right)P_{ij}(t)$$

Kolmogorov微分方程的证明

q_{ij}和v_i定义

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in S, k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t) \qquad t \geq 0, i, j \in S$$

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

后向$Kolmogorov$微分方程

矩阵形式为：$\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) = QP(t) & t \geq 0 \\ P(0) = I \end{cases}$

前向Kolmogorov微分方程

- 类似地，可以得到前向Kolmogorov微分方程：

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\in S,k\neq i} P_{ik}(t)q_{kj} - P_{ij}(t)v_j \qquad t \geq 0, i,j \in S$$

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad i,j \in S$$

则矩阵形式为：$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P(t) = P(t)Q & t \geq 0 \\ P(0) = I \end{cases}$

求解Kolmogorov微分方程

定义： $$P_{ij}^e(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{ij}(t)dt$$

$$P^e(s) = \{P_{ij}^e(s)\}$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = QP(t) \quad t \geq 0$$

Laplace变换

$$sP^e(s) - P(0) = QP^e(s)$$

初始条件$P(0) = I$

$$sP^e(s) - I = QP^e(s)$$

整理变换

$$P^e(s) = \{sI - Q\}^{-1}$$

Laplace逆变换

$$\boxed{P(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!} \quad t \geq 0}$$

思考问题

一辆车被送到修车厂进行全面检修，要依次经历发动机调校、空调检修和制动系统更换三个步骤。这三种步骤的平均处理时间分别为1.2小时、1.5小时和2.5小时。假设各个步骤相互独立的，之间没有时间延迟。每个步骤的处理时间服从指数分布，那么四个小时后汽车处在制动系统更换这个阶段的概率是多少?

谢谢听课

授课教师 赵毅

案例分析

- 1，2，3代表三种操作，4代表完成整个修车工作
- $\{X(t), t \geq 0\}$是连续马链，状态空间为$S = \{1,2,3,4\}$
- 无穷小生成元矩阵为

$$Q = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} -1/1.2 & 1/1.2 & & \\ & -1/1.5 & 1/1.5 & \\ & & -1/2.5 & 1/2.5 \\ & & & \end{bmatrix}$$

4为吸收态

初始状态$s = (1,0,0,0)$，令列向量$e_3 = [0,0,1,0]$

$$P\{X(4) = 3\} = s(t) \cdot e_3 = s(0) \cdot p(t) \cdot e_3 = s(0) \cdot e^{(4*Q)} \cdot e_3 = 0.3765$$