主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年春季学期

高等代数与几何 B 期末考试题（A）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范遵守考场纪律

学院班号学号姓名

密 封 线

一．填空（每空 1.5 分）

1.令$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$为 3 维线性空间 V 的一个基，定义

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

则$\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A})=$______，$\mathrm{Ker}\mathcal{A}=$________________(用基向量表示).

2. 令A是一$n\times n$可逆矩阵,λ是A的一特征值.则

$A^2+A^{-1}+2I$必有特征值____________.

3. 矩阵$\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$的法式为______________,

Jordan标准形为______________.

4. 在$\mathbf{R}^3$中，向量$\alpha=(2,1,1)^T$在子空间$V_1=L(\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,0)^T)$上的内射影为______________.

5. 用正交变换化二次型：$2x_1x_2+2x_3x_4$所得标准形为______________________-

6.设V是数域 F 上的一个三维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是它的一组基，$f$是V上的一个线性函数，已知

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1, f(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=-1, f(\varepsilon_2+2\varepsilon_3)$=1

则$f(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3)=$__________.

二．选择最佳答案（每题 2 分）

7.设V_1, V_2都是n维欧式空间V的子空间, 且$\dim V_1<\dim V_2$. 下面结论正确的是(　　)

(A)$V_1\sqsubset V_2$, (B) $\dim(V_1^{\perp}+V_2)>n$

(C)$V_1^{\perp}\cap V_2\neq\phi$, (D)$V_1^{\perp}\cap V_2\neq 0$.

8.设V是一个欧式空间, $\mathcal{A}$是V上一个保持任意两个向量距离不变的变换,则(　　).

(A)$\mathcal{A}$是线性变换; (B)$\mathcal{A}$是正交变换; (C)$\mathcal{A}$是对称变换; (D)$\mathcal{A}$可能不是线性变换.

9. 令$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) A与 B 相似且合同，(B)A与 B 合同但不相似,

(C) A与 B 相似但不合同，(D)A与 B 既不相似又不合同.

10.令f是R^3上的一个双线性函数,它在自然基底下的度量矩阵为I_3;又令

$\delta_1=(1,0,0)^T, \delta_2=(1,1,0)^T, \delta_3=(1,1,1)^T$,则$f$在基$\delta_1$,$\delta_2,\delta_3$下的度量

矩阵为 (　　).

(A)$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&4\end{pmatrix}$; (B);$\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$;(C)$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$; (D)$\begin{pmatrix}4&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

11. 如果矩阵A的特征多项式与最小多项式相同，则(　　)

(A)A可对角化;　　　(B)A的 Jordan 标准形只有一个块;

(C)A的 Jordan 标准形中对应于每一特征值只有一个块.

三. 计算题(每题 5 分)

12. 令$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性空间 V 的一个基，$f_1,f_2,f_3$是它的对偶基，$\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对偶基是(用$f_1,f_2,f_3$表示).

.

13. 1)求在实数域R^3上定义的双线性函数:

$$f(X,Y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2,\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

在基底$\delta_1=(1,0,0)^T,\delta_2=(1,1,0)^T,\delta_3=(1,1,1)^T$下的度量矩阵;

2) 上面定义的双线性函数$f(X,Y)$是否是内积,说明理由.

学院班号学号姓名

14.设三阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3,向量$\alpha_1 = (-1,2,-1)^T,\alpha_2 = (0,-1,1)^T$是线性方程组$AX = 0$的两个解.

1)求A的特征值与特征向量; 2)求正交矩阵Q和对角矩阵D,使$Q^TAQ = D$.

-

15. 已知$\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

1)确定参数a,b及特征向量ξ所对应的特征值;

2)矩阵A能否对角化？若能，写出A相似的对角矩阵；若否，给出A的有理标准形.

密

封

线

四．综合题(17 题 2 分, 18、19 题 3 分)

16.设$\mathcal{A}$是n维欧式空间V的一个正交变换,V_1是$\mathcal{A}-$子空间，则$V_1^{\perp}$也是$\mathcal{A}-$子空间.

.

学院班号学号姓名

17. 设$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{F}^{n \times n}$, 且,

$$\boldsymbol{V_1} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{V_2} = \{\boldsymbol{X} | (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\},$$

求证：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{F}^n = \boldsymbol{V_1} \oplus \boldsymbol{V_2}$.

18. 设$\boldsymbol{n}$阶复可逆矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化,证明:$\boldsymbol{2n}$阶复方阵$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$也可对角化.