参考解答　2021. 欧阳顺湘

2021 年秋统计学习题 04

设 T 为参数 θ 的估计，称

$$\mathrm{MSE}(T) := \mathbb{E}_\theta(T-\theta)^2$$

为 T 的均分误差（MES 为 mean squared error 的首字母缩写）.

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布随机变量序列，期望为 μ，方差为 σ^2. 记

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2, \quad S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

(a). 设 a 为常数，证明对任意形如 aS^2 的 σ^2 的估计，有

$$\mathrm{MSE}(aS^2) = \mathbb{E}(aS^2-\sigma^2)^2 = a^2 \operatorname{Var} S^2 + (a-1)^2\sigma^4.$$

(b). 证明

$$\operatorname{Var}(S^2) = \frac{1}{n}\left(\kappa - \frac{n-3}{n-1}\right)\sigma^4,$$

其中 $\kappa = \frac{\mathbb{E}(X-\mu)^4}{\sigma^4}$ 为 X 的峰度 (kurtosis).

(c). 设 X_i 服从正态分布. 证明

(i) $\mathrm{MSE}(S^{*2}) < \mathrm{MSE}(S^2)$.

(ii) $\kappa = 3$.

(iii) 形如 aS^2 的估计中，MSE 最小的是 $\frac{n-1}{n+1}S^2$.

(d). 不做正态性假设，证明当

$$a = \frac{n-1}{(n+1)+\frac{(\kappa-3)(n-1)}{n}}$$

时 $\mathrm{MSE}(S^2)$ 取得最小值.

(a)

$$MSE(aS^2) = E_{\sigma^2}(aS^2-\sigma^2)^2$$
$$= Var(aS^2) + [E(aS^2-\sigma^2)]^2$$
$$= a^2 Var(S^2) + (a\sigma^2-\sigma^2)^2$$
$$= a^2 Var(S^2) + (a-1)^2\sigma^4.$$

即有

$$MSE(aS^2) = a^2 Var(S^2) + (a-1)^2\sigma^4 \qquad (1)$$

至第7页

(b) 易由代数运算证明如下等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(x_i-x_j)^2. \qquad (2)$$

或由如下概率结论理解(2)或证明(2):

设 X, Y 为独立同分布随机变量, 则

$$Var\, X = \frac{1}{2} Var(X-Y).$$

由(2)立得

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2$$
$$= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(X_i-X_j)^2.$$

注意到

$$S^2-\sigma^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\sigma^2$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\left[\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\sigma^2\right].$$

其中 $\sum_{i\neq j}$ 表示对 $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,n$ 作双重求和,但 $i\neq j$.

于是有

$$Var(S^2)=\mathbb{E}\left(S^2-\sigma^2\right)^2 \qquad (3)$$

$$=\frac{1}{n^2(n-1)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i\neq j}\left[\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\sigma^2\right]\right)^2.$$

为计算(3),我们注意到对任意 $i\neq j$,

$$\mathbb{E}(X_i-X_j)^2=2\sigma^2 \qquad (4)$$

$$\mathbb{E}(X_i-X_j)^4=2(\kappa+3)\sigma^4, \qquad (5)$$

等式(4)很简单:

$$\mathbb{E}(X_i-X_j)^2=Var(X_i-X_j)+\left(\mathbb{E}(X_i-X_j)\right)^2$$

$$=Var\,X_i+Var\,X_j+0^2$$

$$=2\sigma^2.$$

等式(5)的证明如下:

先注意到

$$(X_i-X_j)^4=\left[(X_i-\mu)-(X_j-\mu)\right]^4 \qquad (6)$$

$$= (X_i-\mu)^4-4(X_i-\mu)^3(X_j-\mu)+6(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2$$

$$-4(X_i-\mu)(X_j-\mu)^3+(X_j-\mu)^4.$$

由于 $X_i-\mu$ 与 $X_j-\mu$ 独立，可知

$$\mathbb{E}(X_i-\mu)(X_j-\mu)^3=\mathbb{E}(X_i-\mu)\cdot\mathbb{E}(X_j-\mu)^3=0,$$

同理可知

$$\mathbb{E}(X_i-\mu)^3(X_j-\mu)=0,$$

且有

$$\mathbb{E}\left[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2\right]$$

$$=\mathbb{E}(X_i-\mu)^2\cdot\mathbb{E}(X_j-\mu)^2$$

$$=\sigma^2\cdot\sigma^2=\sigma^4.$$

因此，对(6)的两边同时取期望可得

$$\mathbb{E}(X_i-X_j)^4=\kappa\sigma^4+6\sigma^4+\kappa\sigma^4$$

$$=2(\kappa+3)\sigma^4.$$

现在我们回到(3). (3)的展开式的通项的期望可利用(4)得到为

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\sigma^2\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(X_k-X_l)^2-\sigma^2\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\frac{1}{4}(X_i-X_j)^2(X_k-X_l)^2-\frac{1}{2}\sigma^2(X_i-X_j)^2-\frac{1}{2}\sigma^2(X_k-X_l)^2+\sigma^4\right]$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{E}(X_i-X_j)^2(X_k-X_l)^2-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 2\sigma^2-\frac{1}{2}\sigma^2\cdot 2\sigma^2+\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{E}(X_i-X_j)^2(X_k-X_l)^2-\sigma^4.$$

即通项为

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\sigma^2\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(X_k-X_l)^2-\sigma^2\right] \tag{7}$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{E}(X_i-X_j)^2(X_k-X_l)^2-\sigma^4,\quad i\neq j,\ k\neq l.$$

下面分类讨论 i,j,k,l 的取值.

(1) 设 $\{i,j\}=\{k,l\}$, 则通项为

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_i-X_j)^2-\sigma^2\right)\left(\frac{1}{2}(X_k-X_l)^2-\sigma^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{E}(X_i-X_j)^4-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}\left(2(\kappa+3)\sigma^4\right)-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{2}(\kappa+1)\sigma^4.$$

这种展开项共有 $2n(n-1)$ 个: 选定 i,j, $i\neq j$ 有 $n(n-1)$ 种方法,

因取 $k=i, l=j$ 或 $k=j, l=i$ 共2种方法，故一共有

$2n(n-1)$ 种方法

从而 $\{i,j\}=\{k,l\}$ 的项的总和为

$$\frac{1}{2}(k+1)\sigma^4\cdot 2n(n-1) = n(n-1)(k+1)\sigma^4. \quad (8)$$

(2). $\{i,j\}$ 与 $\{k,l\}$ 中有且仅有一个公共元，此时，根据(7)，(3)中的一般项为

$$\frac{1}{4}E(X_r-X_j)^2(X_r-X_l)^2-\sigma^4.$$

由于

$$\begin{aligned}
&(X_r-X_j)^2(X_r-X_l)^2\\
&=\left[(X_r-\mu)-(X_j-\mu)\right]^2\cdot\left[(X_r-\mu)-(X_l-\mu)\right]^2\\
&=\left[(X_r-\mu)^2-2(X_r-\mu)(X_j-\mu)+(X_j-\mu)^2\right]\\
&\qquad\times\left[(X_r-\mu)^2-2(X_r-\mu)(X_l-\mu)+(X_l-\mu)^2\right]\\
&=(X_r-\mu)^4-2(X_r-\mu)^3(X_l-\mu)+(X_r-\mu)^2(X_l-\mu)^2\\
&\qquad-2(X_r-\mu)^3(X_j-\mu)+4(X_r-\mu)^2(X_j-\mu)(X_l-\mu)\\
&\qquad-2(X_r-\mu)(X_j-\mu)(X_l-\mu)^2\\
&\quad+(X_j-\mu)^2(X_r-\mu)^2-2(X_j-\mu)^2(X_r-\mu)(X_l-\mu)+(X_j-\mu)^2(X_l-\mu)^2
\end{aligned}$$

利用 $X_r-\mu$, $X_j-\mu$, $X_\ell-\mu$ 的独立性, 可对上式两边求期望而得

$$E(X_r-X_j)^2(X_r-X_\ell)^2$$

$$= \underline{k\sigma^4+0+\sigma^2\sigma^2}-\underline{2\cdot 0+4\cdot 0-2\cdot 0}+\underline{\sigma^2\sigma^2-2\cdot 0+\sigma^2\sigma^2}$$

$$=(k+3)\sigma^4.$$

故通项为

$$\frac{1}{4}E(X_r-X_j)^2(X_r-X_\ell)^2-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}(k+3)\sigma^4-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}(k-1)\sigma^4.$$

这样的求和共有 $4n(n-1)(n-2)$ 项;

对通项 $(X_i-X_j)^2(X_k-X_\ell)^2$ 中的 i,j 先选定, 共有 $n(n-1)$ 种方法, 取定 k 为 i, ℓ 有 $(n-3)$ 种方法; 取定 k 为 j, ℓ 也有 $(n-3)$ 种方法, 共有 $2n(n-1)(n-3)$ 种方法, 由对称性, 也可以选取 ℓ 为 i 或 j, k 为不同于 i,j 的取法, 同样有 $2n(n-1)(n-3)$ 种方法, 故共有 $4n(n-1)(n-3)$ 种方法.

因此，满足$\{k,l\}\cap\{i,j\}$的元素个数为1的2项之总和为

$$4n(n-1)(n-3)\cdot\frac{1}{4}(k-1)\sigma^4=n(n-1)(n-2)(k-1)\sigma^4 \tag{9}$$

(3) i,j,k,l 各不相同，此时，由独立性，可得通项为

$$\frac{1}{4}E(X_i-X_j)^2(X_k-X_l)^2-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}E(X_i-X_j)^2\cdot E(X_k-X_l)^2-\sigma^4$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\sigma^2\cdot 2\sigma^2-\sigma^4 \tag{10}$$

$$=0.$$

(3)　(10)

因此，从(8)，(9)可得

$$Var(S^2)=\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left[n(n-1)(k+1)\sigma^4+n(n-1)(n-2)(k-1)\sigma^4\right]$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\left[(k+1)+(n-2)(k-1)\right]\sigma^4$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\left[(n-1)k-(n-3)\right]\sigma^4$$

$$=\frac{1}{n}\left[k-\frac{n-3}{n-1}\right]\sigma^4.$$

c)　先证明 ii)

ii)　设 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则 $Z\sim N(0,1)$，且

$$k=\mathbb{E}Z^4.$$

记 $\varphi(z)$ 为 Z 的概率密度函数，则

$$d\varphi(z)=-z\varphi(z)dz$$

所以

$$k=\mathbb{E}Z^4=\int_{-\infty}^{+\infty}-z^3d\varphi(z)$$

$$=-z^3\varphi(z)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}3z^2\varphi(z)dz$$

$$=3\mathbb{E}Z^2=3\operatorname{Var}Z=3.$$

i)　由讲稿中结论可知，在正态性假设条件下，

$$Var(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$$

或利用 b) 中的等式，取 $k=3$：

$$Var(S^2)=\frac{1}{n}\left(3-\frac{n-3}{n-1}\right)\sigma^4$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{3n-3-n+3}{n-1}\cdot\sigma^4$$

$$=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

在(1)中取 $a=1$ 可得

$$MSE(S^2)=\mathrm{Var}\,S^2=\frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

注意到

$$S^{*2}=\frac{n-1}{n}S^2,$$

可在(1)中取 $a=\frac{n-1}{n}$ 而得

$$MSE(S^{*2})=MSE\left(\frac{n-1}{n}S^2\right)$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\mathrm{Var}\,S^2+\left(\frac{n-1}{n}-1\right)^2\sigma^4$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n-1}\sigma^4+\frac{1}{n^2}\sigma^4$$

$$=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.$$

于是

$$MSE(S^2)-MSE(S^{*2})=$$

$$=\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2n-1}{n^2}\right)\sigma^4$$

$$=\frac{3n-1}{n^2(n-1)}>0.$$

由此可知

$$MSE(S^2)>MSE(S^{*2}).$$

iii) 记

$$\operatorname{Var} S^2 = A\sigma^4.$$

则

$$MSE(aS^2) = a^2 \cdot A\sigma^4 + (a-1)^2\sigma^4$$

$$= \left(Aa^2 + (a-1)^2\right)\sigma^4.$$

由 $\left(Aa^2+(a-1)^2\right)'_a = 2Aa + 2(a-1) = 0$

可得 $a = \frac{1}{A+1}$，此时 $MSE(aS^2)$ 取到最小值.

在正态性假设下，$A = \frac{2}{n-1}$. 故此时

$$a = \frac{1}{\frac{2}{n-1}+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

d) 由上面的计算可知

$$a = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(k - \frac{n-3}{n-1}\right)+1}$$

$$= \frac{n-1}{\frac{1}{n}\left[k(n-1)-n+3\right]+(n-1)}$$

$$= \frac{n-1}{\frac{1}{n}\left[k(n-1)-3(n-1)+2n\right]+(n-1)} = \frac{n-1}{(n+1)+\frac{(k-3)(n-1)}{n}}.$$