线性方程组迭代法：Ax=b

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$　$k\to\infty$

$x^*=Bx^*+f$

（一）将$Ax=b$写成等价的方程组$x=Bx+f$，取$x^{(0)}$初值，定义迭代序列

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f,k=0,1,2,\cdots$，若$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$，称迭代法收敛，$x^*$为原线性方程组的解

$\varepsilon^0=x^{(0)}-x^*$

第k步误差$\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=B\varepsilon^{(k-1)}=B^2\varepsilon^{(k-2)}=\cdots=B^k\varepsilon^{(0)}$，寻求

$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon^{(k)}=0$，即$\lim\limits_{k\to\infty}B^k=0$的条件

$\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=Bx^{(k-1)}+f-(Bx^*+f)=B(x^{(k-1)}-x^*)$

$=B\varepsilon^{(k-1)}$

（二）向量序列收敛与矩阵序列收敛

定义 $x^{(k)}$向量序列 $x^*\in R^n$ 若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*$，$i=1,\cdots,n$ 称$x^{(k)}$收敛于x^*

记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$

$\|\cdot\|$为任一向量范数

定理 $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x^* \iff \lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$

定义：$A^{(k)}\in R^{n\times n}$　$A\in R^{n\times n}$ 若 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$　$i,j=1,\cdots,n$

称 $A^{(k)}$ 收敛于A 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$　$\|\cdot\|$为任一

定理 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A \iff \lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$　从属矩阵范数

（定理）$\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A_k x = 0, \forall x \in R^n$

证明："$\Rightarrow$" $\|A_k x\| \le \|A_k\| \, \|x\| \to 0$ 由 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|A_k\| = 0$

"$\Leftarrow$" $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lim\limits_{k\to\infty} A_k e_1 =$ 第一列 $\Rightarrow 0$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（定理）下列等价： $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0$

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$; (2) $\rho(B) < 1$; (3) 存在一从属范数 $\|\bullet\|_\varepsilon$ 使得 $\|B\|_\varepsilon < 1$

证明：(1) $\Rightarrow$ (2) λ 是 B 一特征值 若 $|\lambda| \ge 1$ 令 x_0 是 λ 一个特征向量

则 $Bx = \lambda x$ $B^2 x = \lambda B x = \lambda^2 x$ $B^k x = \lambda^k x$

$\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^k x = 0$ 与 $|\lambda| \ge 1$ 矛盾

$\therefore |\lambda| < 1$ $\rho(B) < 1$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $\|B\|_\varepsilon < \rho(B) + \varepsilon$ 只要取 $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(B)}{2}$ 即可

$\therefore \|B\|_\varepsilon < 1$

(3) $\Rightarrow$ (1) $\|B^k\|_\varepsilon \le \|B_\varepsilon\|^k \to 0$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

算3 →

$\rho(B) \le \|B^k\|^{\frac{1}{k}} \le \rho(B)+\varepsilon$ 要证

（定理）$\|\bullet\|$为任一矩阵范数，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B)$

证明 $\forall \varepsilon>0$　$\rho(B) \le \left[\rho(B^k)\right]^{\frac{1}{k}} \le \|B^k\|^{\frac{1}{k}}$

令一边 记 $B_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(B)+\varepsilon} B$　则 $\rho(B_\varepsilon) = \dfrac{\rho(B)}{\rho(B)+\varepsilon} < 1$

则 $\lim\limits_{k\to\infty} B_\varepsilon^k = 0$　$\lim\limits_{k\to\infty} \|B_\varepsilon^k\| = 0$　则 存 K　$k>K$

$\|B_\varepsilon^k\| < 1$　$\|B_\varepsilon^k\| = \dfrac{\|B^k\|}{(\rho(B)+\varepsilon)^k} < 1$　$\|B^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho(B)+\varepsilon$

（定理）$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$收敛的充分必要条件：$\rho(B)<1$

证明：$\varepsilon^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)}$　$\forall x^{(0)}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

$\Longleftrightarrow \rho(B)<1$

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$　(1) $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$　$\lambda = \pm\sqrt{6}$　$\rho(B)=\sqrt{6}$

(2) $B=\begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$　$\rho(B) = 0.9$ 收敛

$\|B\|_1 = 1.2 > 1$　$\|B\|_\infty = 1.1 > 1$

（例）

（三）误差与停止原则

定理：$x = Bx + f$ B满足 $\|B\| = q < 1$ $\|\cdot\|$ 某从属范数

则 (1) $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛 $\forall x^{(0)}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

(2) $\|x^{(k)} - x^*\| \le q^k \|x^{(0)} - x^*\|$

(3) $\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ 停止原则 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon$

(4) $\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

证明：(1) 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow$ 某 $\|B\| < 1$

(2) $x^{(k)} - x^* = B(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = B^k(x^{(0)} - x^*)$

$\therefore \|x^{(k)} - x^*\| \le \|B\| \|x^{(k-1)} - x^*\| \le \cdots \le \underbrace{\|B\|^k}_{q^k} \|x^{(0)} - x^*\|$

(3) $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|x^{(k+1)} - x^* + x^* - x^{(k)}\|$

$\ge \|x^{(k+1)} - x^*\| - \|x^* - x^{(k+1)}\| \ge (1-q)\|x^* - x^{(k)}\|$

$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{1}{1-q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \frac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ $\quad x^{(k+1)} - x^{(k)} = B(x^{(k)} - x^{(k-1)})$

（四）收敛速度

11:28回来

$$\varepsilon^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)} \qquad \|\varepsilon^{(k)}\| \le \|B^k\| \, \|\varepsilon^{(0)}\|$$

要 $\dfrac{\|\varepsilon^{(k)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \le \|B^k\| < \sigma$ （误差水平）

则 $\|B^k\|^{\frac{1}{k}} \le \sigma^{\frac{1}{k}}$

$\therefore \ln \|B^k\|^{\frac{1}{k}} \le \dfrac{1}{k} \ln \sigma$

$k \ge \dfrac{-\ln \sigma}{-\ln \|B^k\|^{\frac{1}{k}}}$ $\qquad R_k = -\ln \|B^k\|^{\frac{1}{k}}$ 平均收敛速度

$R(B) = -\ln \rho(B)$ 渐近收敛速度

$k \ge \dfrac{-\ln \sigma}{R(B)}$ $\qquad \dfrac{\rho(B)\downarrow \quad R(B)\uparrow}{k\downarrow}$ 收敛越快

雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法

$Ax=b \qquad x=Bx+f$

$$A=D-L-U=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵分裂

（一）雅可比(Jacobi)迭代法矩阵形式与分量形式

$Ax=b \qquad (D-L-U)x=b \qquad Dx=(L+U)x+b$

$x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b \qquad J=D^{-1}(L+U) \qquad f=D^{-1}b$

$x=Jx+f \qquad x^{(0)} \qquad x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+f$ Jacobi迭代法

分量

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

$i=1,2,\cdots n$

$J=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A$

（二）高斯塞德尔(Gauss-Seidel)迭代法矩阵形式与分量形式

$Ax=b \quad (D-L-U)x=b \quad (D-L)x=Ux+b$

$x=(D-L)^{-1}Ux+(D-L)^{-1}b \quad G=(D-L)^{-1}U, \quad f=(D-L)^{-1}b$

$x=Gx+f \quad x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$ GS法

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right] \quad i=1,\cdots,n,$$

$4x_1-x_2=2$

$-x_1+4x_2-x_3=6$

$-x_2+4x_3=2$

J法

$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(2+x_2^{(k)})$

$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(6+x_1^{(k)}+x_3^{(k)})$

$x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}[2+x_2^{(k)})$

GS法

$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}(2+x_2^{(k)})$

$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}(6+x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)})$

$x_3^{(k+1)}=\frac{1}{4}(2+x_2^{(k+1)})$

$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_n^{(k)}$ 不能新开辟

$x_1^{(k+1)}$ 一个空间 只更新

（三）收敛性

(1) J法收敛 $\Longleftrightarrow$ $\rho(J)<1$

(2) GS 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\rho(G)<1$

严格、弱对角占优，可约

定义 $a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ 称A严格对角占优

$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ 且至少有一个严格不等号 称A弱对角占优

定义 若存在置换阵P使 $P^TAP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

A_{11} r阶 A_{22} n-r阶 $n > r > 0$

称A为可约阵 否则称不可约

例 $\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$ 不可约

（定理）A严格对角占优或者不可约弱对角占优，则A非奇异

证明：只证严格对角占优 反证明 若A奇异

$Ax=0$ $\quad x \exists \neq 0$ $\quad x_k=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

第k行 $\quad a_{kk}x_k=-\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j$

$$|a_{kk}|\cancel{|x_k|} \le \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\cancel{|x_k|}$$

~~严格~~

$$|a_{kk}| \le \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$ 与A对角占优矛盾

∴ A 非奇异

（定理）A对称且对角线元素均为正，则

（1）J法收敛等价于A与2D-A均正定；不证

（2）若A正定，则GS法收敛 → 下次证

（例）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

证明 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时 GS 收敛

于J法收敛 只有 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时

作业 2 4 5 6

习证

A对称 $A_{ii}>0$

$|A_1|=1$ $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2>0$ $|A_3|=|A|=(1-a)^2(1+2a)>0$

$1-a^2>0$ $(1-a)^2(1+2a)>0$ $\Longleftrightarrow$ $-\frac{1}{2}<a<1$ GS收

两种方法：思考 ① $J=\begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ $\rho(J)<1$

② ?

（例：续）

（例：换行收敛）

（定理）A严格对角占优或者不可约弱对角占优，则Ax=b的J法和GS法都收敛

证明：只证 A 严格对角占优 GS法收敛

$G = (D-L)^{-1}U$　　$\rho(G) = ?$　　$\because |\lambda| < 1$　$\rho(G) < 1$ GS收敛

$|\lambda I - G| = |\lambda I - (D-L)^{-1}U| = |(D-L)^{-1}|\,|\lambda(D-L) - U|$

由于对角占优 $(D-L)$ 可逆

$|\lambda I - G| = 0 \iff |\lambda(D-L) - U| = 0$　令 $C = \lambda(D-L) - U$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

若 $|\lambda| \geq 1$ 则 $|c_{ii}| = |\lambda||a_{ii}|$

$> \lambda\left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right)$

$\geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |c_{ij}|$

则 C 是严格对角占优　$|C| \neq 0$　$|\lambda(D-L) - U| \neq 0$　与 λ 是特征值矛盾