第十一章 格与布尔代数

格与布尔代数是代类数系统中的又一类重要代数系统。这两个代数系统与第 9 章讨论的代数系统之间存在着一个重要的区别:在格与布尔代数中,偏序关系具有重要的意义。为了强调偏序关系的作用,我们将分别从偏序关系和代数系统两个方面引入格的概念。

给格附加一定的限制后,格就转化为布尔代数,即布尔代数是一种特殊的格。布尔代数最初是作为为对逻辑思维法则的研究而出现的,创立者是英国哲学家和数学家布尔。自布尔之后,许多数学家对布尔代数的一般化作了许多努力,特别是斯通。他的工作可以说是对现代布尔代数的发展开创了一个新阶段。

1938 年,香农发表了《继电器和开关电路的符号分析》一文,为布尔代数在工艺技术中的应用开创了道路,从而出现了开关代数。为了给开关代数奠定基础,于是自然形成了二值布尔代数,即逻辑代数。自香农之后,人们应用布尔代数对电路作了大量研究,并形成了网络理论。

格与布尔代数不仅是代数学的一个分支,而且在近代解析几何,半序空间等方面也都有重要的作用,同时,格与布尔代数在计算机科学中也有十分重要的作用,可直接用于开关理论和逻辑设计、密码学、计算机理论科学等。

① 偏序关系与偏序集

(1) 关系

➢ 现实中的“关系”:

- 兄弟关系、长幼关系、同学关系、邻居关系，上下级关系等。

➢ 数学上的关系:

- 例如:集合中元素之间的联系,比如“3 小于 5”,“x 大于 y”,“点 a 在 b 与 c 之间”。

◆ 例如：火车票与座位之间的对号关系。

设 X 表示火车票的集合，Y 表示座位的集合，则对于任意的 $x\in X$ 和 $y\in Y$,

$$\text{必定有}\begin{cases} x\text{ 与 }y\text{ 有“对号”关系} \\ x\text{ 与 }y\text{ 没有“对号”关系} \end{cases}\text{二者之一。}$$

令 R 表示“对号”关系，则上述问题可以表示为 xRy 或 $x\not R y$。亦可表示为$\langle x, y\rangle\in R$ 或$\langle x, y\rangle\notin R$，因此我们看到对号关系是有序对的集合。

◆ 我们也常用关系对集合的某些元素或全体元素进行排序。例如，使用包含着字母对$\langle x, y\rangle$的关系对字母排序，其中 x 按照字典顺序排在 y 的前面。

关系的概念及记号

二元关系，简称关系：任一有序对的集合即确定了一个关 R，R 中任一有序对$\langle x, y\rangle$可记为 $\langle x, y\rangle\in R$ 或 $x\not R y$。不在 R 中的任一有序对$\langle x, y\rangle$可记为$\langle x, y\rangle\notin R$ 或 xRy。

例如：$R_1=\{<x_1, y_1>, <x_2, y_1>, <x_2, y_2>\}$；

$R_2=\{<x, y> \mid x, y$ 是实数且 $x>y\}$；

$R_3=\{<x, y> \mid x$ 是 y 的倍数且 $x, y \in\{1,2,3,4\}\}$

$=\{<4,4>, <4,2>, <4,1>, <3,3>, <3,1>, <2,2>, <2,1>, <1,1>\}$。

二元关系的记号：

设 R 是二元关系，则

$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x$ 与 y 具有 R 关系 $\Leftrightarrow xRy$。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，即 $R \subseteq A \times A$，如果对于每一个 $x \in A$，有 xRx（$\langle x, x\rangle \in R$），则称二元关系 R 是自反的。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，如果对于每个 $x, y \in A$，每当 xRy 和 yRx，必有 $x=y$，则称集合 A 上的关系 R 是反对称的。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，如果对于任意的 $x, y, z \in A$，每当 xRy，yRz 时就有 xRz，称关系 R 在 A 上是传递的。

例如：设 $A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1=\{<1, 1>, <2, 2>\}$；

$R_2=\{<1, 1>, <2, 2>, <3,3>, <1,2>\}$；

$R_3=\{<1, 1>, <2, 2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>\}$；

$R_4 = \{<1, 2>\}$。

R_1 不是自反的，是反对称的和传递的。

R_2 是自反的，是反对称的和传递的。

R_3 是自反的，不是反对称的，是传递的。

R_4 不是自反的，是反对称的，是传递的。

(2) 偏序关系

设 R 是集合 A 上的一个二元关系，如果 R 具有自反性，反对称性和传递性，那么称 R 为一个偏序关系；记为$\leqslant$，并称 $\langle A, \leqslant\rangle$为偏序集。

例如：

1. 实数集合$\mathbb{R}$关于它上面的小于等于关系做成一个偏序集$\langle\mathbb{R}, \leqslant\rangle$。
2. 正整数集$\mathbb{Z}^+$关于整除关系 D 做成一个偏序集$\langle\mathbb{Z}^+, D\rangle$。
3. 集合的包含关系使得所考虑的集合全体 S 做成一个偏序集$\langle S, \subseteq\rangle$.
4. 集合 $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$在 R 下做成一个偏序集$\langle \mathrm{A}, R\rangle$，这里

$$R = \{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <a, e>, <b, b>, <b, c>,$$

$$<b, e>, <c, c>, <c, e>, <d, d>, <d, e>, <e, e> \}。$$

(3) 哈斯(Hasse)图

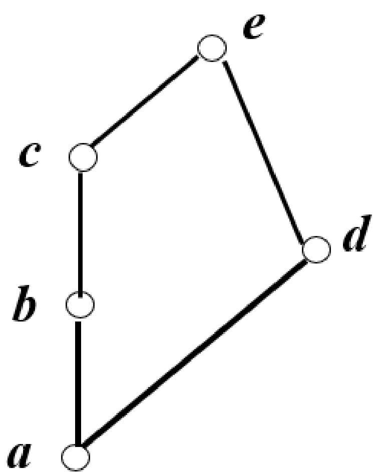
(1) 用小圆圈表示元素，且若 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$，则 y 画在 x 之上。

(2) 规定：若 $x \leqslant y (x\neq y)$ 且没有其它元素 $z (z\neq x, y)$，使得 $x \leqslant z$

且 $z \leqslant y$, 则在 x 与 y 之间用线段相连。

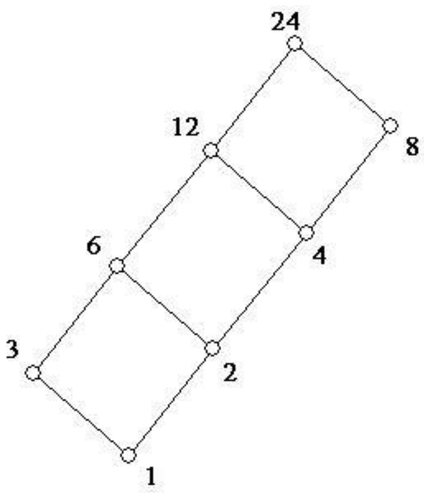
例如：集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$在 R 下做成一个偏序集$\langle A, R\rangle$，这里

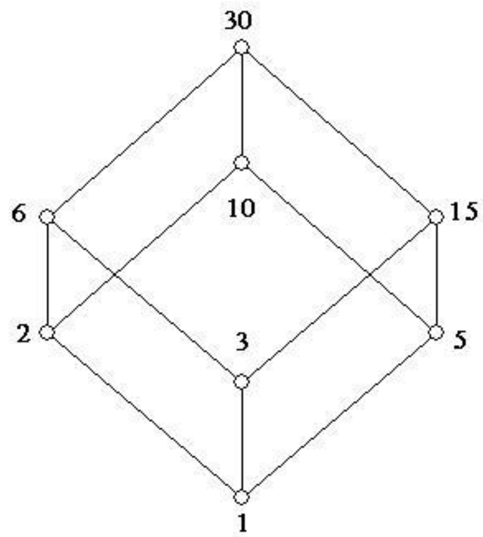
$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, e\rangle\}。$$



Hasse图

设 n 为正整数, S_n 是 n 的全部正因数的集合,则$\langle S_n, \mid\rangle$是偏序集。$\langle S_{24}, \mid\rangle$和 $\langle S_{30}, \mid\rangle$的 Hasse 图如下:

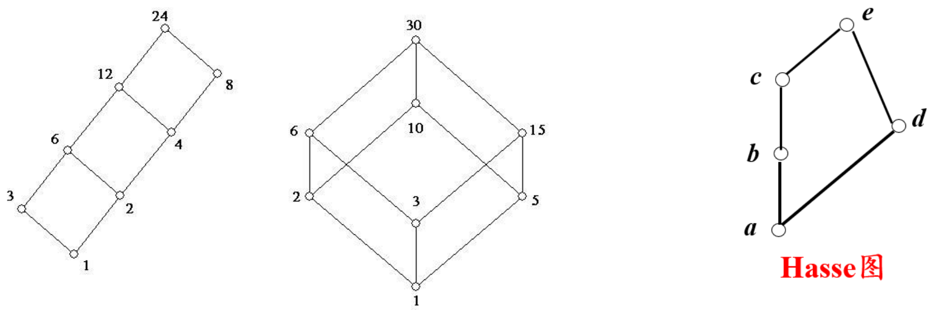




(4) 偏序集的最大元和最小元

设< A, ≤ >为偏序集,如果 A 中有一个元素 a, 对于所有的 A 中元素 x, 都有 $x \le a(a \le x)$, 则称 a 为该偏序集的最大元(最小元)。

✧ 最大(小)元一定唯一。



Hasse图

✧ 上图中偏序集的最大元和最小元是?

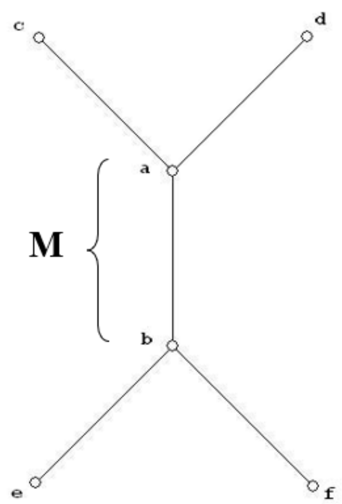
(5) 上界和下界

设< A, ≤ >为偏序集, $\varnothing \ne M \subseteq$ A, 若 A 中存在元素 a, 对 M 中任意元素 m, 都有 $m \le a\ (a \le m)$。则称 a 为 M 的一个上界(下界)。

例如:右边偏序集中, M 的上界为 a, c, d; 下界为 b, e, f

结论:

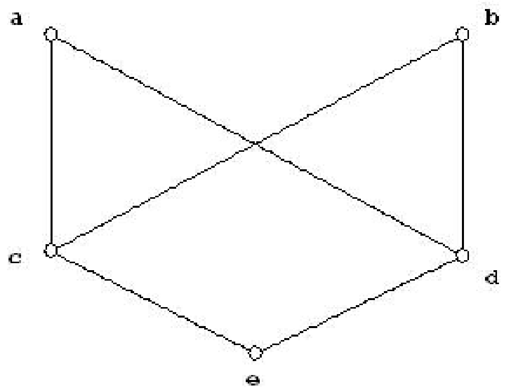
由定义可以看出, M 的上(下)界未必在 M 中。 另外 M 未必

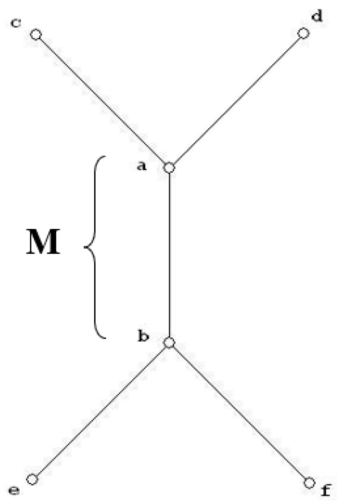


一定有上(下)界。

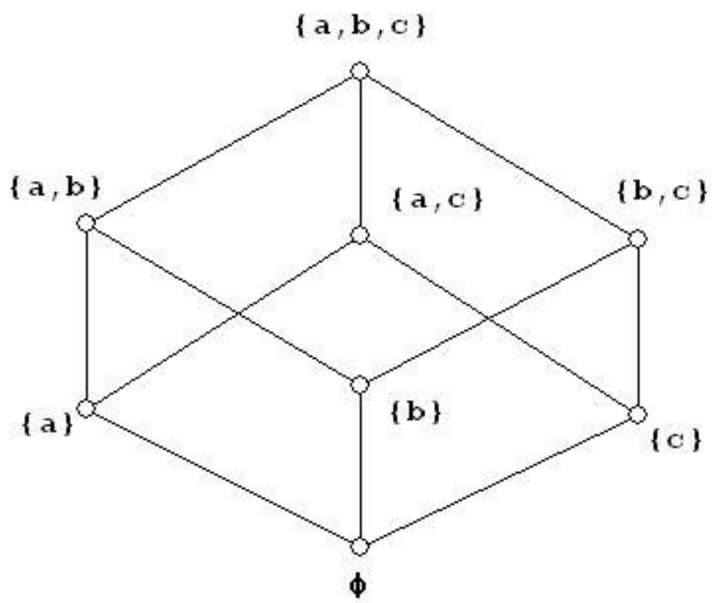
(6) 上确界和下确界

设$<A, \le>$为偏序集, $\varnothing \ne M \subseteq A$。 A 中元素 a，称为 M 的最小上界即上确界(最大下界即下确界), 如果 a 是 M 的一个上界(下界), 并且对 M 的任意一个上界(下界) x, 都有 $a \le x$ $(x \le a)$。





左边的偏序集，对于 M = {c，d}无上确界，下确界为 e。右边的偏序集，对于 M 上确界为 a，下确界为 b。



设$<P(\{a, b, c\}), \leq>$是$\{a, b, c\}$的幂集关于包含关系构成的偏序集,该偏序集的Hasse图如上图。

$M=\{\{a\},\{b\}\}$：上确界$\{\{a, b\}\}$，下确界为$\varnothing$。

$M=\{\{a\},\{a, b\}\}$：上确界$\{\{a, b\}\}$，下确界为$\{a\}$。

$M=\{\{a\},\{b, c\}\}$ 或 $M=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$：上确界$\{\{a, b, c\}\}$，下确界为$\varnothing$。

$M=\{\{a, b\},\{b, c\}\}$：上确界$\{\{a, b, c\}\}$，下确界为$\{b\}$。

② 格

定义 1: 设$<S, \leqslant>$是一个偏序集，如果对任意 $a, b\in S$，$\{a, b\}$都有最大下界和最小上界存在，则称$<S, \leqslant>$是格，简称 S 是格。若 S 为有限集，则称格 S 为有限格。且把由偏序关系定义的格称为偏序格。

在格$<S, \leqslant>$中，任取 $a, b\in S$，则$\{a, b\}$的最大下界和最小上界都是惟一存在的，且均属于 S。

- ✧ 用 $a\wedge b$ 表示$\{a, b\}$的最大下界，称为 a 与 b 的保交；
- ✧ 用 $a\vee b$ 表示$\{a, b\}$的最小上界，称为 a 与 b 的保联。

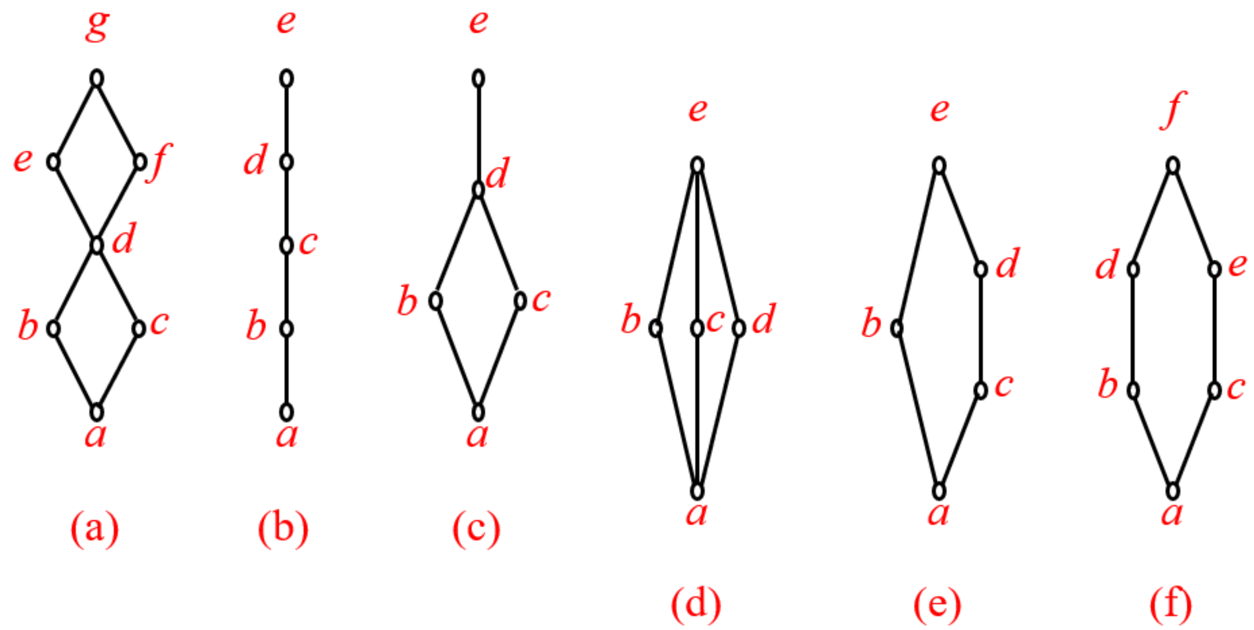
例 1:（1）考虑偏序集$<\mathbb{Z}^+, D>$，其中$\mathbb{Z}^+$是正整数，D 是一个整除关系，问此偏序集$<\mathbb{Z}^+, D>$是否是一个格？

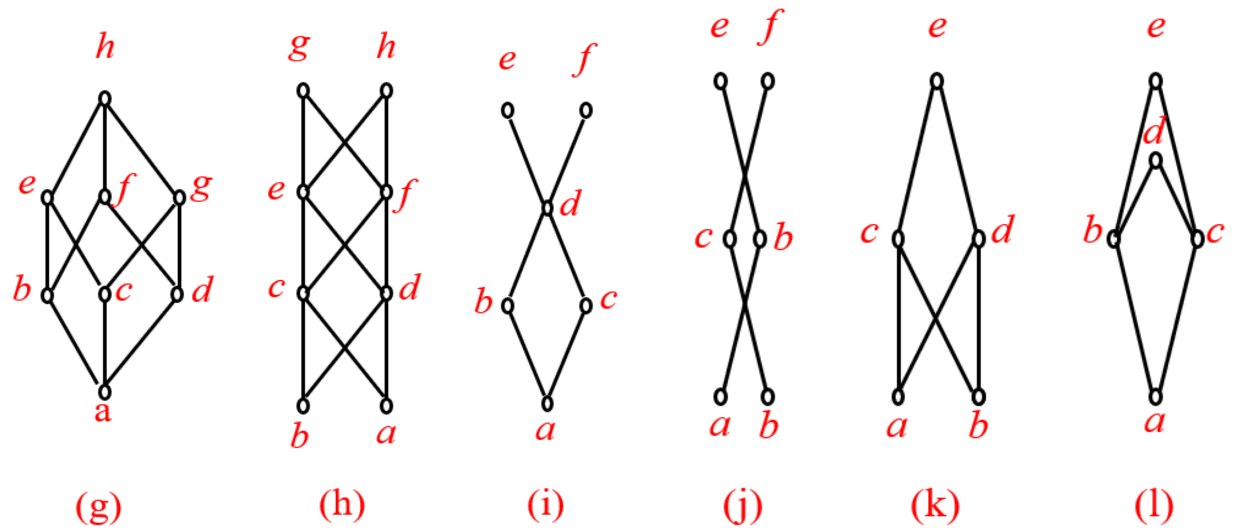
（2）设 A 是一个集合，P(A)是 A 的幂集，$\subseteq$ 是集合上的包含关系，问此偏序集$<P(A), \subseteq>$是否是一个格？

（3）考虑偏序集$<S_n, D>$，其中 D 是一个整除关系，S_n是 n 的所有

因子的集合，问此偏序集< S_n, D >是否是一个格？

例 2: 判断哈斯图如下图所示的几个偏序集是否是格。





定义 2: 设<S, ∗, ∘>是具有两个二元运算的代数系统，如果运算∗和∘满足交换律、结合律和吸收律，则称<S, ∗, ∘>为**格**。

把由代数系统定义的格称为代数格。

例 3： 设 A 是一个集合，P(A)是 A 的幂集，∩和∪分别是集合的交和并运算，试证明代数系统 <P(A), ∩, ∪>是一个格。

定理 1： 偏序格与代数格是等价的。

注意： 偏序格与代数格等价，今后就不再区分偏序格与代数格了，而把它们统称为格。

对于集合 L 的任何偏序关系“≤”，其逆关系“≥”也是集合 L 上的偏序关系；

对 L 的任意子集 T, T 在偏序集<L, ≤ >中的最大下界和最小上界分别是<L, ≥>中的最小上界和最大下界。

因此偏序集<L, ≤ >是格当且仅当<L, ≥>是格，我们称此两个格为对偶格；

格< L, ≤ >的保联运算与保交运算分别是对偶格< L, ≥>的保交运算和保联运算。

对于格< L, ≤ >的任何命题，将保联运算与保交运算分别换成对偶格<L, ≥>的保交运算和保联运算，将命题中的“≤”换成对偶格<L, ≥>中的“≥”，得到的一个关于对偶格<L, ≥>中的命题，称

这个命题为对偶命题。

容易证明，关于格<L, ≼ >的任何真命题，其对应的对偶命题在对偶格<L, ≽>中也是真命题，把这个原理称为对偶原理。

性质： 设<L, ≼ >是格，“≽”是“≼”的逆关系。则对任意 $a, b, c, d \in$ L，有

（1）自反性：$a \preccurlyeq a$；　$a \succcurlyeq a$。

（2）反对称性：$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$；

$a \succcurlyeq b$ 且 $b \succcurlyeq a \Rightarrow a = b$。

（3）传递性：$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$；

$a \succcurlyeq b$ 且 $b \succcurlyeq c \Rightarrow a \succcurlyeq c$。

（4）$a \wedge b \preccurlyeq a$；　$a \vee b \succcurlyeq a$；

$a \wedge b \preccurlyeq b$；　$a \vee b \succcurlyeq b$。

（5）$c \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq b \Rightarrow c \preccurlyeq a \wedge b$；

$c \succcurlyeq a$ 且 $c \succcurlyeq b \Rightarrow c \succcurlyeq a \vee b$。

（6）交换律：$a \wedge b = b \wedge a$；　$a \vee b = b \vee a$。

（7）结合律：$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$；

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$。

（8）吸收律：$a \wedge (a \vee b) = a$；

$a \vee (a \wedge b) = a$。

（9）幂等律：$a \wedge a = a$；$a \vee a = a$。

（10）$a\leqslant b \Leftrightarrow \quad a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$。

（11）$a\leqslant b$ 且 $c\leqslant d \Rightarrow a\wedge c\leqslant b\wedge d$;

$a\leqslant b$ 且 $c\leqslant \mathrm{d} \Rightarrow a\vee c\leqslant b\vee d$。

（12）保序性：$a\leqslant b \Rightarrow a\wedge c\leqslant b\wedge c$；　$a\leqslant b \Rightarrow a\vee c\leqslant b\vee c$。

（13）分配不等式：

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c);$$

$$a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\ \vee\ (a\wedge c)\text{。}$$

（14）模不等式：

$$a\leqslant c \Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge \mathrm{c}\text{。}$$

定义 3：设$<L, *, \circ>$是一个格，如果对任意 $a, b, c\in L$，都有

$$a*(b\circ c)=(a*b)\circ(a*c)\quad ,$$

$$a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c),$$

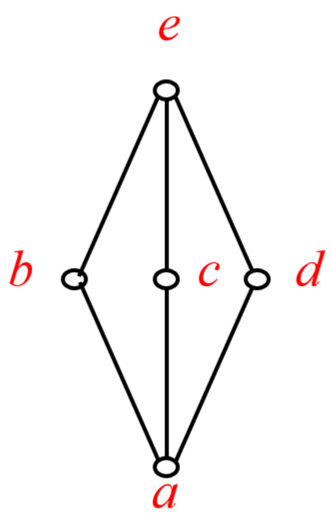
即运算满足分配律，则称$<L, *, \circ>$是一个**分配格**。

例 4：（1）设 A 为任意一个集合，格$<P(A), \cap, \cup>$是否是分配格？

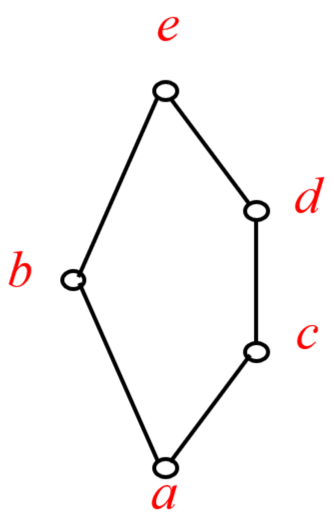
（2）设 P 为命题公式集合，$\wedge$与$\vee$分别是命题公式的合取与析取运算，格$<P, \wedge, \vee>$是否是分配格？

定理 2：所有链都是分配格。

例 5：说明下图所示的两个格都不是分配格。



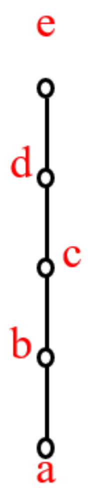
(a)



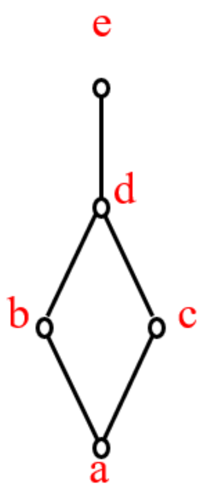
(b)

例 6:（1）四个元素以下的格都是分配格；

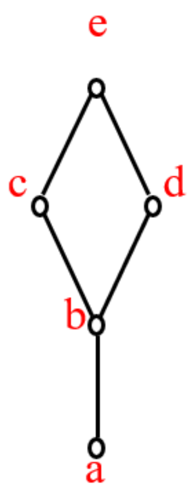
（2）五个元素的格仅有两个格是非分配格(例 5 (a)和(b))，其余三个格(下图 (c), (d)和(e))都是分配格。



(c)



(d)



(e)

定理 3: 设< L, ∗, ∘>是分配格，对于任何 $a, x, y \in$ L，如果 $a*x = a*y$

且 $a \circ x = a \circ y$，则 $x = y$。

定义 4: 设<L, ≤ >是一个格，若存在元素 $a \in$ L，使得对任意 $x \in$ L，都有：

$$a \leqslant x \text{ (或 } x \leqslant a\text{)},$$

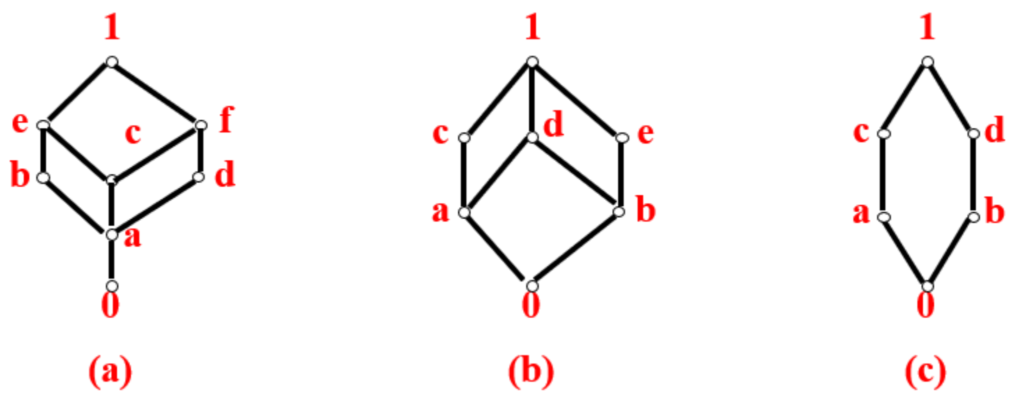
则称 a 为格< L, ≤ >的全下界(或全上界)，分别记 0 (或 1)，具有全上界和全下界的格称为有界格。

显然，对任意 $x \in$ L，有

$$1 \wedge x = x \wedge 1 = x \text{ (幺元)}，\ 1 \vee x = x \vee 1 = 1 \text{ (零元)};$$

$$0 \wedge x = x \wedge 0 = 0 \text{ (零元)}，\ 0 \vee x = x \vee 0 = x \text{ (幺元)}。$$

例如下三个都是有界格。



在格<L, ≤ >中，全下界和全上界分别是集合 L 的最小元和最大元，由于最大元和最小元的唯一性，有下面的定理：

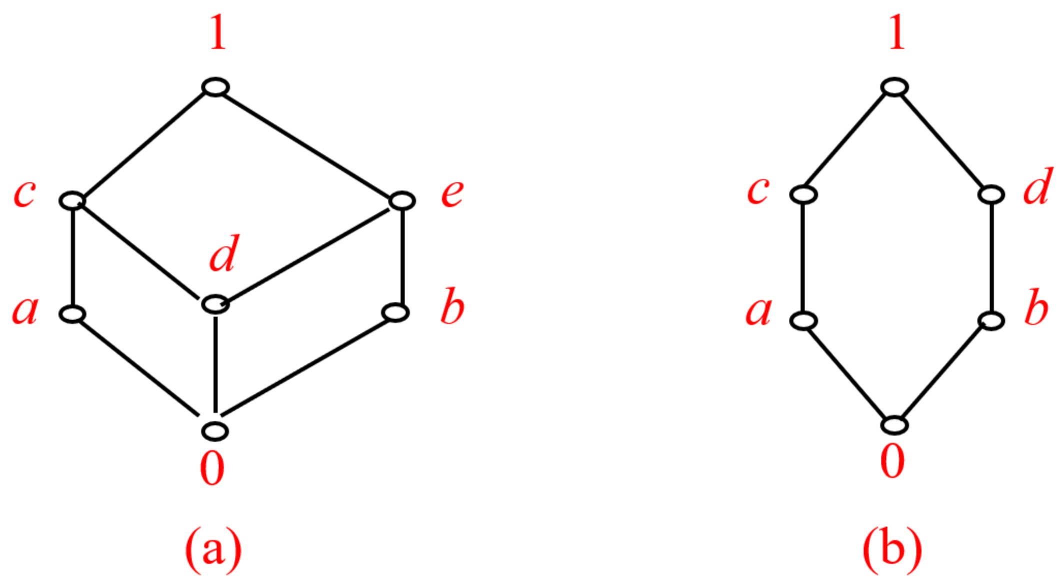
定理 4: 设<L, ≼ >是一个格，若格<L, ≼ >的全上界和全下界存在，则必唯一。

定义 5: 设< L, ∧, ∨ >为有界格，1 和 0 分别为它的全上界和全下界，a∈L。如果存在 b∈L，使得

$$a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1,$$

则称 b 为 a 的补元，记为 a'。若有界格< L, ∧, ∨>中的所有元素都存在补元，则称< L, ∧, ∨>为有补格。

例 7: 如下图有界格，求其所有元素的补元(如果有的话)。



定理 5: 在有界分配格 (既是有界格又是分配格，简称为有界分配格) <L, ∧, ∨ >中，如元素 a∈L 有补元存在，则此元素的补元必唯一。

推论： 在有补分配格(既是有补格又是分配格，简称为有补分配格) $<L, \wedge, \vee>$中，每个元素都存在唯一的补元。

定义 6： 称有补分配格$<L, \wedge, \vee>$为**布尔格**。

③ 布尔代数

在有补分配格中，每个元都有补元，而且补元唯一。可以将求元素的补元作为一种一元运算，则此布尔格$<L, \wedge, \vee>$可记为

$$<L, \wedge, \vee, ', 0, 1>。$$

此时，称$<L, \wedge, \vee, ', 0, 1>$为布尔代数。因此有：

定义 7： 一个布尔格$<L, \wedge, \vee>$称为**布尔代数**。若一个布尔代数的元素个数是有限的，则称此布尔代数为有限布尔代数，否则称为无限布尔代数。

布尔代数是有补分配格。有补分配格$<L, \wedge, \vee>$必须满足它是格、有全上界和全下界、分配律成立、每个元素都有补元存在。显然，全上界 1 和全下界 0 可以用下面的同一律来描述：

同一律：在 L 中存在两个元素 0 和 1，使得对任意 $a \in L$，有

$$a \wedge 1 = a，a \vee 0 = a。$$

补元的存在可以用下面的互补律来描述。

互补律：对任意 $a \in L$，存在$a' \in L$，使得

$$a \wedge a' = 0,\ a \vee a' = 1。$$

格可以用交换律、结合律、吸收律来描述。

因此，一个有补分配格就必须满足交换律、结合律、吸收律、分配律、同一律、互补律。

另外，可以证明，由交换律、分配律、同一律、互补律可以得到结合律、吸收律。所以布尔代数有下面的等价定义：

定义 8： 设 $< B, *, \circ >$ 是代数系统，其中 $*$，$\circ$ 是 B 中的二元运算，如果对任意 $a, b, c \in B$，满足

（1）交换律： $a*b = b*a$，$a\circ b = b\circ a$；

（2）分配律： $a\circ(b*c) = (a\circ b) * (a\circ c)$，

$$a * (b\circ c) = (a*b)\circ(a*c);$$

（3）同一律：在 B 中存在两个元素 0 和 1，使得对任意 $a \in B$，有

$$a*1 = a,\ a\circ 0 = a;$$

（4）互补律：对任意 $a \in B$，存在 $a' \in B$，使得

$$a*a' = 0,\ a\circ a' = 1。$$

则称 $< B, *, \circ >$ 为布尔代数。通常将布尔代数 $< B, *, \circ >$ 记为

$$< B, *, \circ, ', 0, 1 >。$$

为方便起见，也简称 B 是布尔代数。