第十章 双线性函数

§ 10.4 对称双线性函数

一、对称双线性函数

二、反对称双线性函数

三、正交基

四、双线性度量空间

一、对称双线性函数

1. 定义

设 $f(\alpha,\beta)$ 为数域F上线性空间V上的一个双线性函数，如果对V中任意向量 α,β 均有

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为对称双线性函数.

2. 对称双线性函数的有关性质

命题1 数域 F上n 维线性空间 V上双线性函数是对称的（反对称的）$\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)$ 在V的任意一组基下的度量矩阵是对称的（反对称的）.

证： 任取V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X,\quad \beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y.$$

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij},\quad A=(a_{ij})$$

则 $$f(\alpha,\beta)=X^T AY.$$

$$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)\Leftrightarrow X^T AY=Y^T AX$$

$$=(Y^T AX)^T=X^T A^T Y$$

$$\Leftrightarrow f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$$

$$\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$$

$$\Leftrightarrow A=A^T.$$

同样 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)\Leftrightarrow f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$

$$\Leftrightarrow X^T AY=-Y^T AX=-X^T A^T Y$$

$$\Leftrightarrow A^T=-A$$

例. $f: V\times V \to F,\quad (\alpha,\beta)\mapsto f(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$

$$f(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=f(\beta,\alpha)$$

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\varepsilon_i,\varepsilon_j).$$

$f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}.$$

$A^T=A$ 且 A 为正定矩阵.

定理5 设V是数域F上n 维线性空间. $f(\alpha,\beta)$ 是V上对称双线性函数，则存在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ ，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的度量矩阵为对角形.

证：只需证能找到一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, i\neq j$$

1）若 $\forall\alpha,\beta\quad f(\alpha,\beta)=0$，则 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0.$

2）若 $f(\alpha,\beta)$不全为0，先证必有 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\neq 0.$

否则，若 $\forall \alpha \in V$, $f(\alpha,\alpha)=0$, 则对 $\forall \alpha,\beta \in V$ 有

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\beta)]$$
$$=\frac{1}{2}[0-0-0]=0.$$

所以这样的 ε_1 是存在的.

对 $\dim V=n$ 用归纳法.

① $n=1$ 时成立.

② 假设 $\leq n-1$ 维数上述结论也成立.

将 ε_1 扩充为V的一组基 $\varepsilon_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$.

令 $$\varepsilon_i{}' = \eta_i - \frac{f(\varepsilon_1,\eta_i)}{f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1, \quad i = 2,\cdots,n.$$

则 $$f(\varepsilon_1,\varepsilon_i{}') = f\left(\varepsilon_1,\eta_i - \frac{f(\varepsilon_1,\eta_i)}{f(\varepsilon_1,\eta_1)}\varepsilon_1\right) = 0.$$

易证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2{}',\cdots,\varepsilon_n{}'$ 仍是V的一组基.

考察由 $\varepsilon_2{}',\varepsilon_3{}',\cdots,\varepsilon_n{}'$ 生成的线性子空间

$$L(\varepsilon_2{}',\varepsilon_3{}',\cdots,\varepsilon_n{}')$$

$\forall \alpha \in L(\varepsilon_2{}',\varepsilon_3{}',\cdots,\varepsilon_n{}')$, 有 $f(\varepsilon_1,\alpha) = 0$ 且

$$V = L(\varepsilon_1) \oplus L(\varepsilon_2{}',\varepsilon_3{}',\cdots,\varepsilon_n{}')$$

把 $f(\alpha,\beta)$ 看成 $L(\varepsilon_2',\varepsilon_3',\cdots,\varepsilon_n')$ 上的双线性函数，

仍是对称的.

由归纳假设，$L(\varepsilon_2',\varepsilon_3',\cdots,\varepsilon_n')$ 有一组基 $\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

满足 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \qquad i,j=2,3,\cdots,n \qquad i\neq j.$

由于 $V=L(\varepsilon_1)\oplus L(\varepsilon_2',\varepsilon_3',\cdots,\varepsilon_n').$

故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是V的一组基，且满足

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \qquad i,j=2,3,\cdots,n \qquad i\neq j.$$

注

若 $f(\alpha,\beta)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

则对 $\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X=\sum x_i\varepsilon_i,$

$$\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y=\sum y_i\varepsilon_i\in V$$

$$f(\alpha,\beta)=X'DY=d_1x_1y_1+d_2x_2y_2+\cdots+d_nx_ny_n.$$

推论1 设V是复数域上 n 维线性空间. $f(\alpha,\beta)$ 为V上对称双线性函数.则存在V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，

对 $\forall\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n \in V$$

$$f(\alpha,\beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r.$$

$$r = 秩\big(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\big) \quad 0 \le r \le n$$

推论2 设V是实数域上 n 维线性空间. $f(\alpha,\beta)$ 为V上对称双线性函数.则存在V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,

对 $\forall\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$,

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n \in V$$

$$f(\alpha,\beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r.$$

$$r = \text{秩}\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) \right)$$

p 为正惯性指数.

3. 二次齐次函数

定义 线性空间V上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，当 $\alpha=\beta$ 时，V上函数 $f(\alpha,\alpha)$ 称为与 $f(\alpha,\beta)$ 对应的**二次齐次函数**.

① 给定V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

设 $f(\alpha,\beta)$ 的度量矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$\forall\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\in V$，

有 $f(\alpha,\alpha)=X^TAX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$. （1）

式中 x_ix_j 的系数为 $a_{ij}+a_{ji}$.

② 不同双线性函数可能导出同一个二次函数.

如：设两个双线性函数 $f(\alpha,\beta),g(\alpha,\beta)$ 在基

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$,

$A\neq B.$ 但可 $a_{ij}+a_{ji}=b_{ij}+b_{ji}$.

如：
$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&1&-2\\-2&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-4&1&2\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

则 $f(\alpha,\beta),g(\alpha,\beta)$ 对应的二次齐次函数相同.

③一个对称双线性函数只能导出一个二次型.

此时， $f(\alpha,\alpha)=X'AX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j.\qquad a_{ij}=a_{ji}$

此即为以前学过的二次型.

而二次型与对称矩阵1-1对应.

命题3 $f(\alpha,\beta)$ 为V上反对称双线性函数

$$\Leftrightarrow \text{ 对 } \forall \alpha \in V \quad f(\alpha,\alpha)=0.$$

证: $"\Rightarrow"\ f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha) \Rightarrow f(\alpha,\alpha)=0. \quad \forall \alpha \in V$

$"\Leftarrow"\ f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)$

$$= f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\alpha,\alpha)+f(\beta,\beta)$$

$$\Rightarrow f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=0$$

$$\Rightarrow f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$$

二、反对称双线性函数

1. 定义

设 $f(\alpha,\beta)$ 为数域F上线性空间V上的一个双线性函数，如果对V中任意向量 α,β 均有

$$(f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha))$$

则称 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称双线性函数.

2. 反对称双线性函数的有关性质

定理6 设 $f(\alpha,\beta)$ 为F上 n 维线性空间V上反对称双线性函数（即 $\forall\alpha,\beta\in V$，$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$ ）则存在V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r},\eta_1,\cdots,\eta_s$ 使

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1 & i=1,\cdots,r \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 & i+j\neq 0 \\ f(\alpha,\eta_k)=0 & \forall\alpha\in V,k=1,2,\cdots,s \end{cases} \qquad (2)$$

$$2r+s=n$$

即 $f(\alpha,\beta)$在这组基下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证：首先 f 是反对称的，$\because \forall \alpha \in V, f(\alpha,\alpha)=0$

若 $f(\alpha,\beta)$ 为零函数，则 V的任意一组基皆可取作 $\eta_1,\cdots,\eta_s$. 结论成立.

①. $n=2$ 时，若 $f(\alpha,\beta)$ 不是零函数.

则必有 $\varepsilon_1,\beta \in V$ 使得 $f(\varepsilon_1,\beta)\neq 0$ 且 ε_1,β 线性无关，

否则若有 $\beta = k\varepsilon_1$，则

$f(\varepsilon_1,k\varepsilon_1)=kf(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=0$，与 $f(\varepsilon_1,\beta)\neq 0$ 矛盾.

$\because f(\varepsilon_1,\lambda\beta)=\lambda f(\varepsilon_1,\beta)$.

所以可取适当 λ_0, 使 $f(\varepsilon_1,\lambda_0\beta)=1.$

令 $\varepsilon_{-1}=\lambda_0\beta.$ 即有 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1})=1.$

②.假设维数$\le n-2$时结论成立. 同理,

将 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1}$扩充为V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\beta_3',\cdots,\beta_n'.$

令 $\beta_i=\beta_i'-f(\beta_i',\varepsilon_{-1})\varepsilon_1+f(\beta_i',\varepsilon_1)\varepsilon_{-1}.$ 则

$$f(\beta_i,\varepsilon_1)=f(\beta_i',\varepsilon_1)-f(\beta_i',\varepsilon_{-1})f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+f(\beta_i',\varepsilon_1)f(\varepsilon_{-1},\varepsilon_1)$$

$$=f(\beta_i',\varepsilon_1)-f(\beta_i',\varepsilon_1)=0.$$

同理，$f(\beta_i,\varepsilon_{-1})=0.$

易证：$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\beta_3,\beta_4,\cdots,\beta_n$ 仍为V的一组基.

$$\because\quad (\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\beta_3,\beta_4,\cdots,\beta_n)$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\beta_3',\beta_4',\cdots,\beta_n')\begin{pmatrix} 1 & 0 & -f(\beta_3',\varepsilon_{-1}) & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -f(\beta_3',\varepsilon_1) & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

令 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -f(\beta_3',\varepsilon_{-1}) & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -f(\beta_3',\varepsilon_1) & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，则 $|C|\neq 0.$

于是 $V = L(\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}) \oplus L(\beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n).$

由归纳假设，$f(\alpha, \beta)$ 看作 $L(\beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n)$ 上双线性函数仍是反对称的．于是有 $L(\beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n)$ 的基 $\varepsilon_2, \varepsilon_{-2}, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-r}, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 满足（2）．

由于 $f(\varepsilon_1, \beta_i) = f(\varepsilon_{-1}, \beta_i) = 0.$

$\therefore \forall \alpha \in L(\beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n)$，都有 $f(\varepsilon_1, \alpha) = f(\varepsilon_{-1}, \alpha) = 0.$

故 $\varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \cdots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-r}, \cdots, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 满足（2）．

三、正交基

定义 $f(\alpha,\beta)$为V上对称双线性函数，若 $f(\alpha,\beta)$ 非退化的，则有V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,满足

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\neq 0 \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \quad i\neq j \end{cases} \quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

这样的基叫做V的对于 $f(\alpha,\beta)$ 的正交基.

附

$f(\alpha,\beta)$ 为V上反对称双线性函数，若 $f(\alpha,\beta)$ 非退化的，则有V的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r}$，使

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1 & i=1,\cdots,r \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 & i+j\neq 0 \end{cases} \qquad 2r=n$$

所以具有非退化反对称双线性函数的线性空间一定是偶数维的.

四、双线性度量空间

定义 设V是数域F上的一个线性空间，在V上定义了一个非退化的双线性函数. 则称 V为一个**双线性度量空间**.

特别地，$F=R, \dim V=n$. $f(\alpha,\beta)$ 为V上非退化对称双线性函数时，V称为一个**准欧式空间**.

当 $f(\alpha,\beta)$是非退化反对称线性函数时, V称为**辛空间**.