

# 第五章

## 图形变换与裁剪

### 投影变换

# 基本内容

- 1 三维图形的基本问题
- 2 平面几何投影
  - 平行投影
  - 透视投影

# 三维图形的基本问题（1/5）

## 1. 在二维屏幕上如何显示三维物体？

- 显示器屏幕、绘图纸等是二维的
- 显示对象是三维的
- 解决方法----**投影**
- 三维显示设备正在研制中

# 三维图形的基本问题（2/5）

## 2. 如何表示三维物体？

- 二维形体的表示----直线段,折线,曲线段,多边形区域
- 二维形体的输入----简单（图形显示设备与形体的维数一致）
- 三维形体的表示----空间直线段、折线、曲线段、多边形、曲面片
- 三维形体的输入、运算、有效性保证----困难
- 解决方法----各种用于形体表示的理论、模型、方法

# 三维图形的基本问题（3/5）

## 3. 如何反映遮挡关系？

- 物体之间或物体的不同部分之间存在相互遮挡关系
- 遮挡关系是空间位置关系的重要组成部分
- 解决方法----**消除隐藏面与隐藏线**

# 三维图形的基本问题（4/5）

## 4. 如何产生真实感图形

- 何谓真实感图形？
  - 逼真的
  - 示意的
- 人们观察现实世界产生的真实感来源于
  - 空间位置关系----近大远小的透视关系和遮挡关系
  - 光线传播引起的物体表面颜色的自然分布
- 解决方法
  - 建立光照明模型
  - 开发真实感图形绘制方法

# 三维图形的基本问题（5/5）

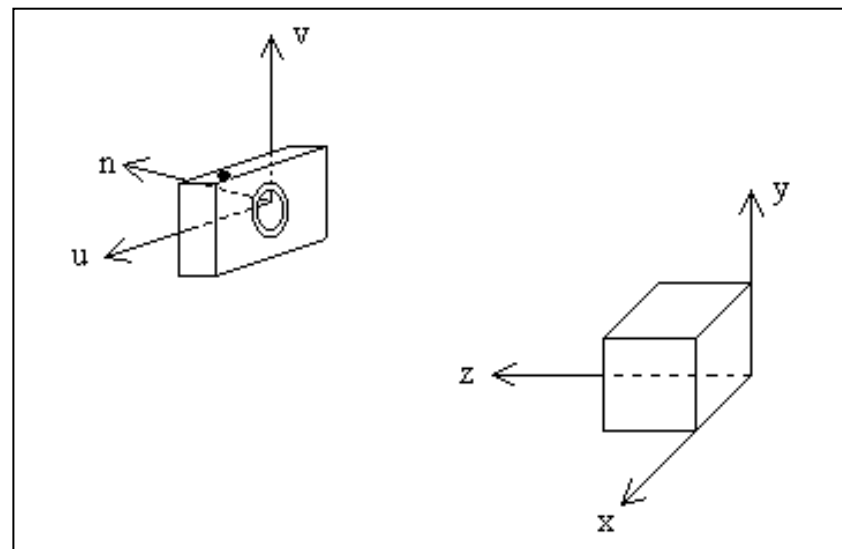
## 三维图形的基本研究内容

1. 投影
2. 三维形体的表示
3. 消除隐藏面与隐藏线
4. 建立光照明模型、研究真实感图形绘制方法

# 平面几何投影（1/17）

## ■ 照像机模型与投影

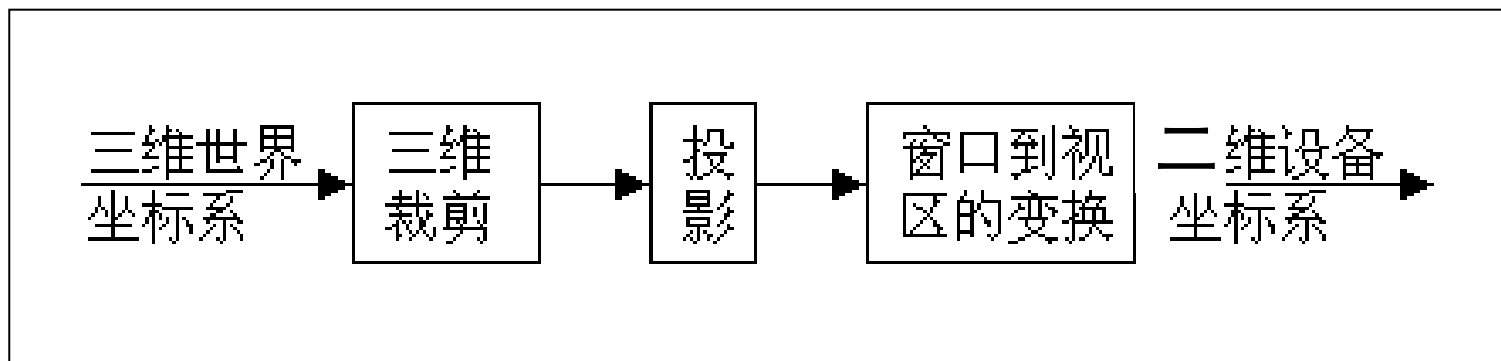
- 如何投影？
- 生活中的类比--如何拍摄景物？
  - 拍摄过程
    - 选景
    - 取景--裁剪
    - 对焦--参考点
    - 按快门--成像
  - 移动方式
    - 移动景物
    - 移动照相机
  - 两个坐标系





# 平面几何投影（2/17）

- 投影—照相机模型
  - 选定投影类型
  - 设置投影参数—拍摄方向、距离等
  - 三维裁剪—取景
  - 投影和显示—成像
- 简单的三维图形显示流程图



# 平面几何投影 (3/17)

## ■ 平面几何投影及其分类

### ■ 投影

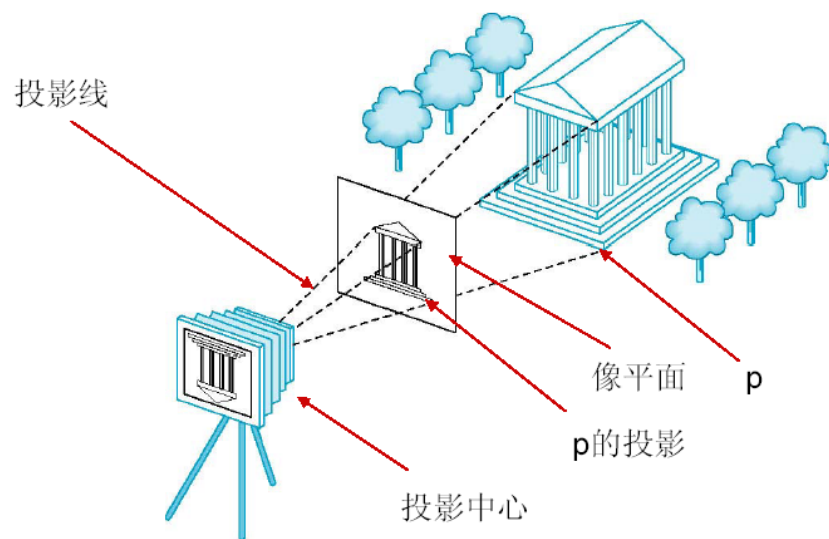
- 将 $n$ 维的点变换成小于 $n$ 维的点
- 将3维的点变换成小于3维的点

### ■ 投影中心(COP:Center of Projection)

- 视觉系统—观察点、视点
- 电影放映机—光源

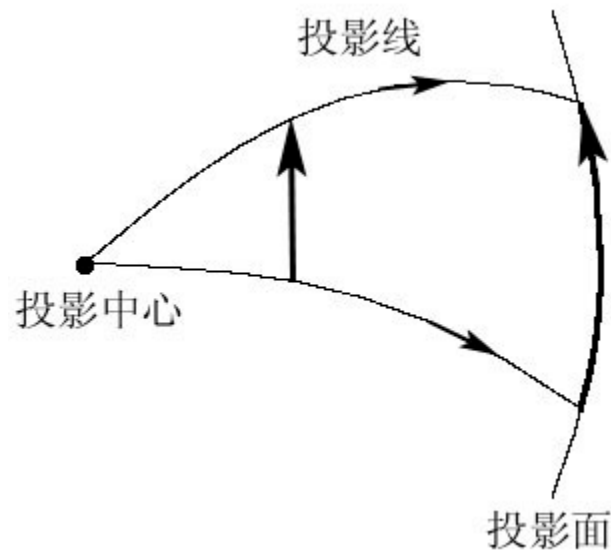
### ■ 投影面

- 不经过投影中心
- 平面--照相机底片
- 曲面—球幕电影,视网膜



# 平面几何投影（4/17）

- 投影线
  - 从投影中心向物体上各点发出的射线
  - 直线—光线
  - 曲线—喷绘
- 平面几何投影
  - 投影面是平面
  - 投影线为直线
- 投影变换
  - 投影过程
  - 投影的数学表示

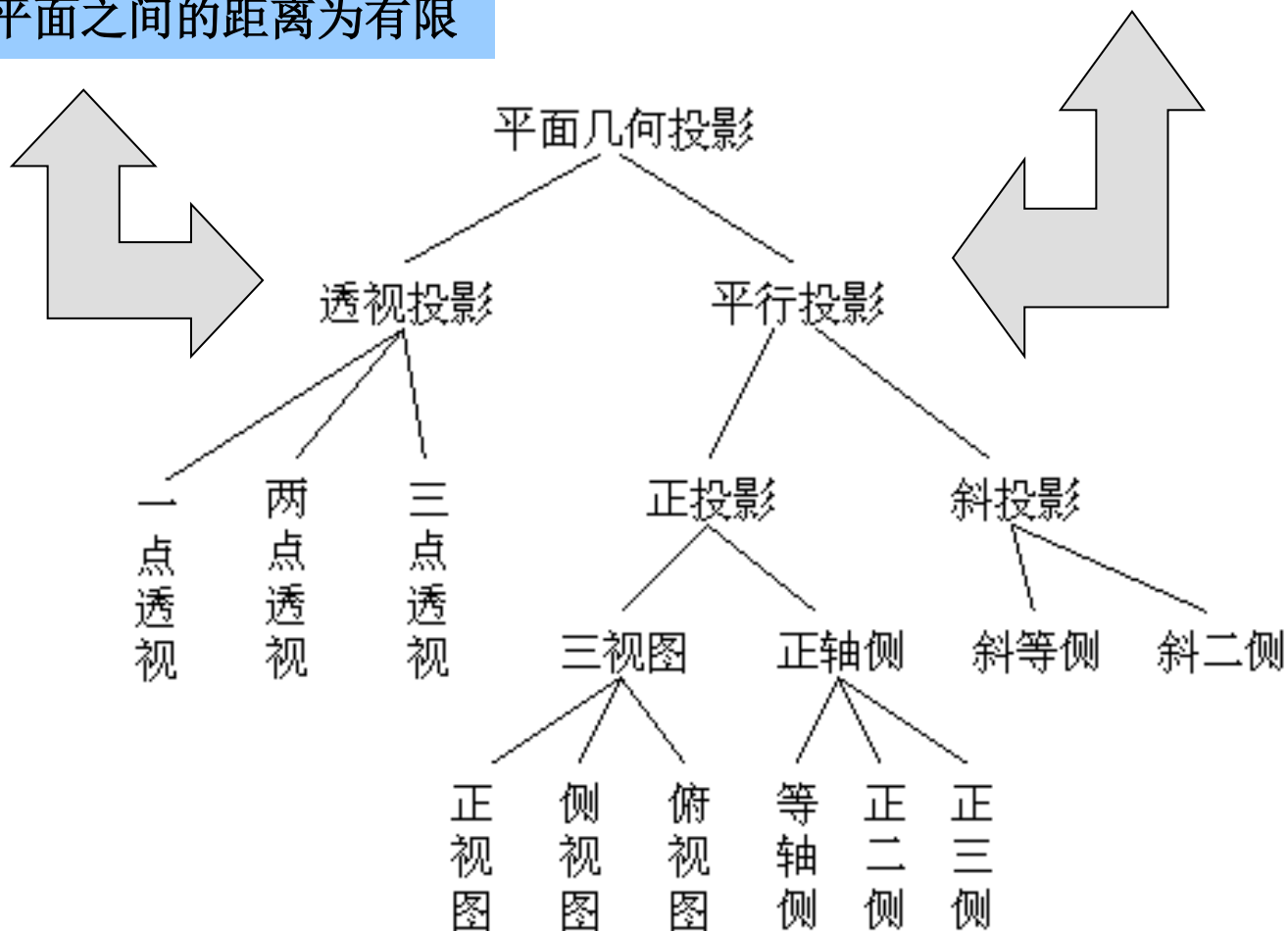


# 平面几何投影 (5/17)

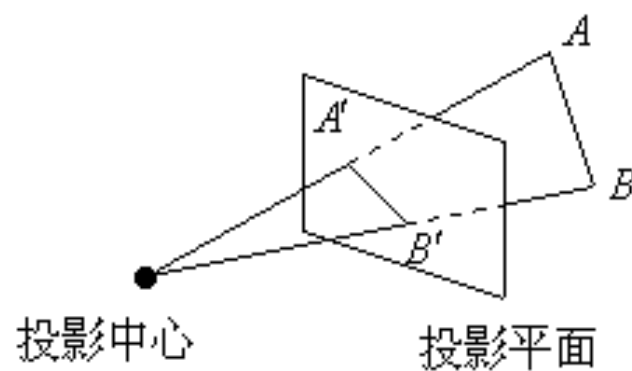
## ■ 投影分类

投影中心与投影平面之间的距离为有限

投影中心与投影平面之间的距离为无限

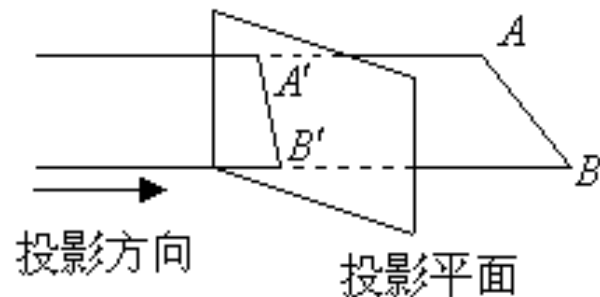


# 平面几何投影 (6/17)



(a)

透视投影



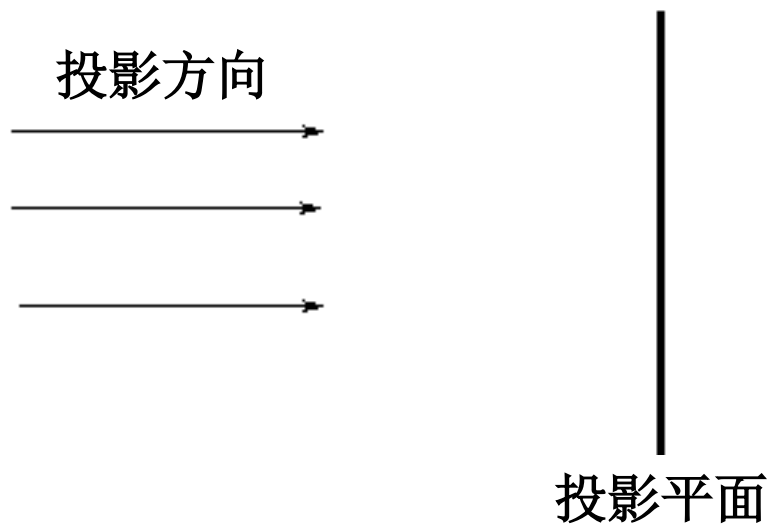
(b)

平行投影

# 平面几何投影（7/17）

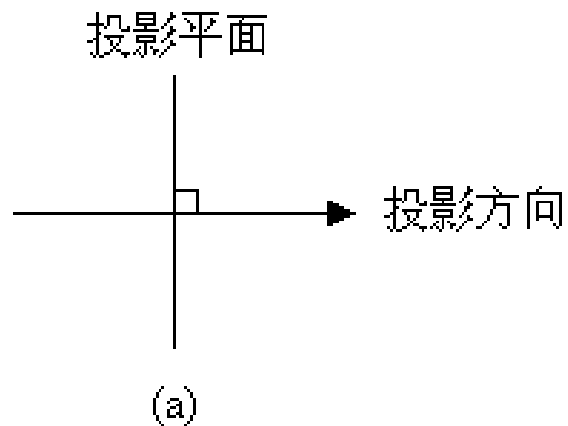
## ■ 平行投影

- 投影中心与投影平面之间的距离为无限
- 是透视投影的极限状态

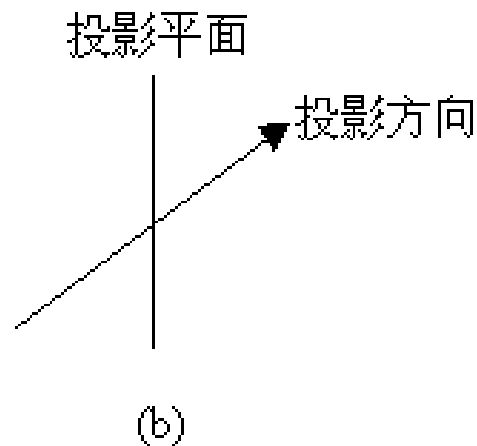


# 平面几何投影 (8/17)

## ■ 正投影与斜投影



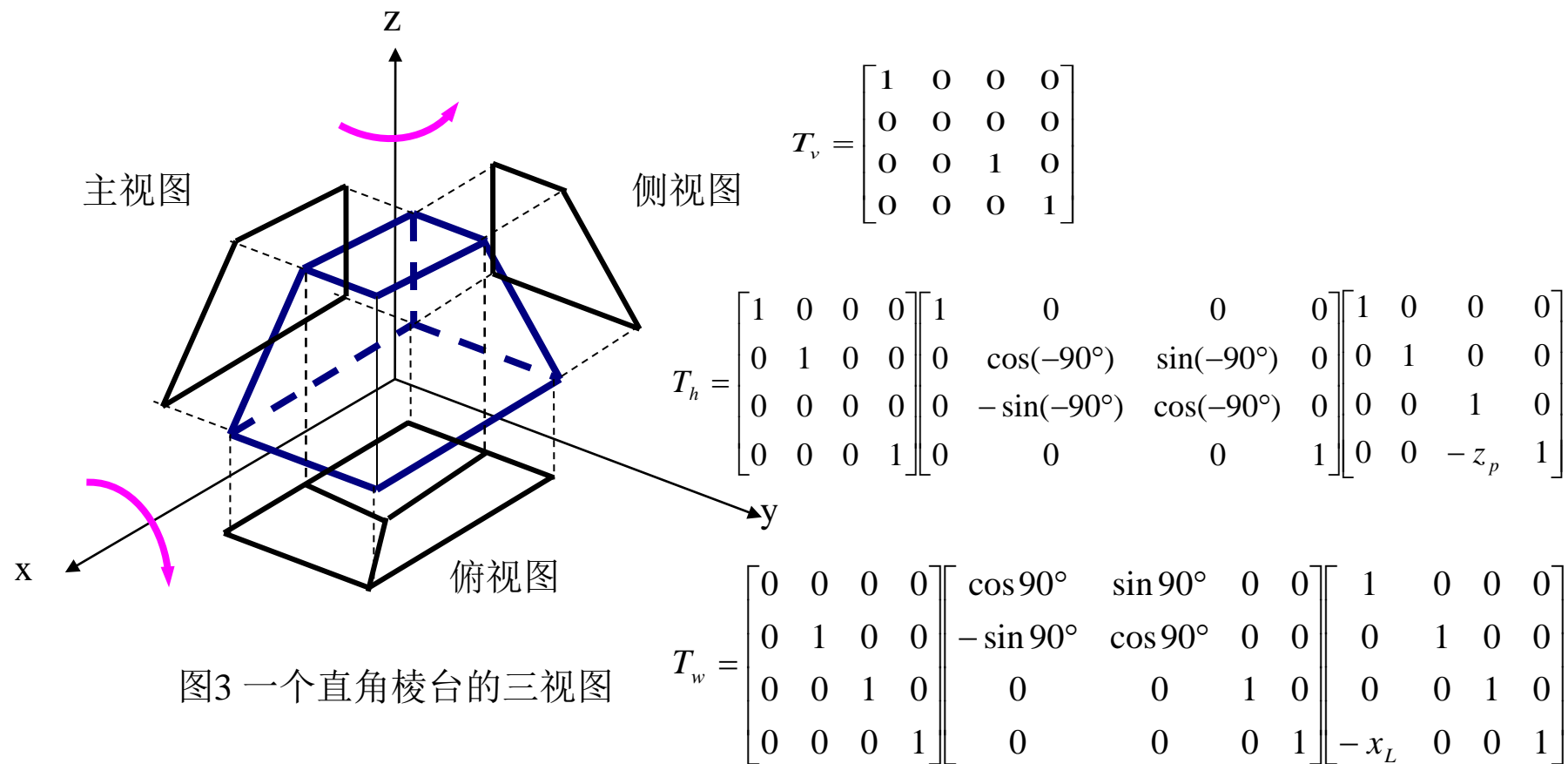
正平行投影



斜平行投影

# 平面几何投影 (9/17)

## ■ 三视图：正视图、侧视图和俯视图





# 平面几何投影 (10/17)

■ 解决:

■ 投影平面不垂直于任何一个坐标轴——正轴测投影

$$R_{yx} = R_y R_x = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = R_{yx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

投影方程:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T$$

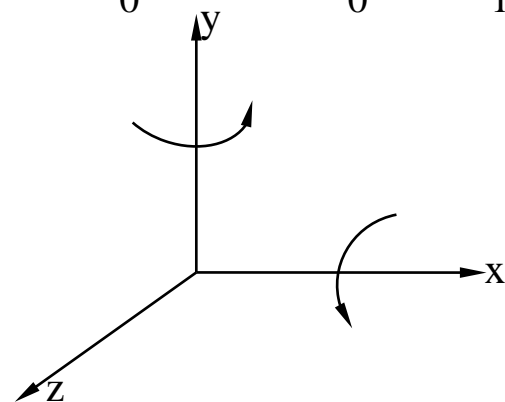
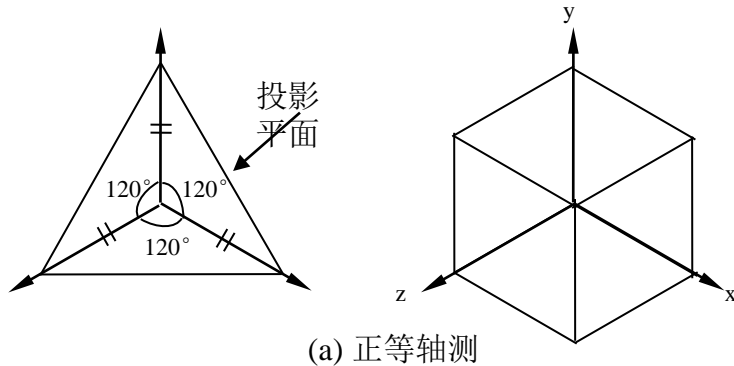


图5 正轴测投影平面的定义

# 平面几何投影 (11/17)



三个单位向量将投影成三个长度相等的平面向量，即三根坐标轴有相同的变形系数

$$T = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 正方体的正等轴测投影

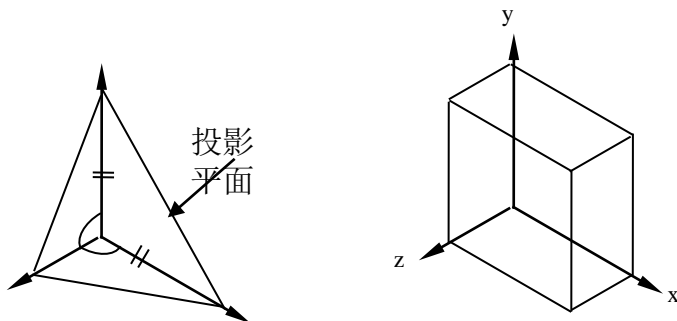
$$[x' \ y' \ z' \ 1]_x = [1 \ 0 \ 0 \ 1]T = [\cos \beta \ \sin \beta \sin \alpha \ 0 \ 1]$$

$$[x' \ y' \ z' \ 1]_y = [0 \ 1 \ 0 \ 1]T = [0 \ \cos \alpha \ 0 \ 1]$$

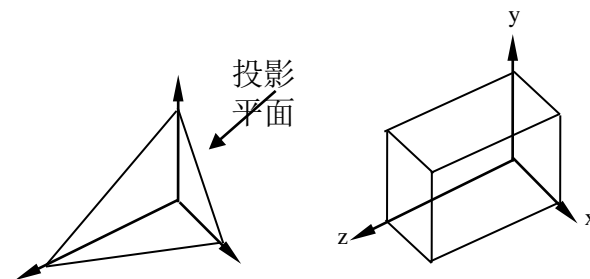
$$[x' \ y' \ z' \ 1]_z = [0 \ 0 \ 1 \ 1]T = [\sin \beta \ -\cos \beta \sin \alpha \ 0 \ 1]$$

# 平面几何投影 (12/17)

## 正方体的正轴测投影



(b) 正二轴测



(c) 正三轴测

# 平面几何投影（13/17）

## ■ 透视投影

- 投影中心与投影平面之间的距离为有限
- 参数：投影方向，距离
- 例子：室内白炽灯的投影，视觉系统

## ■ 特点：

- 产生近大远小的视觉效果，由它产生的图形深度感强，看起来更加真实。

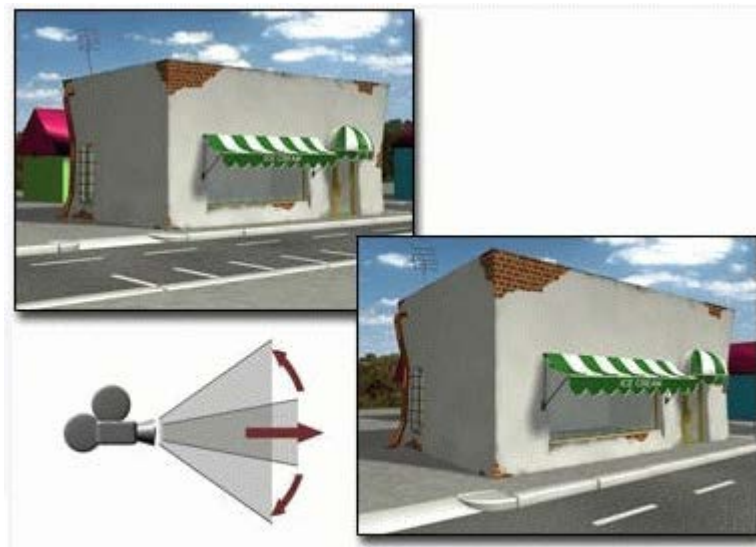
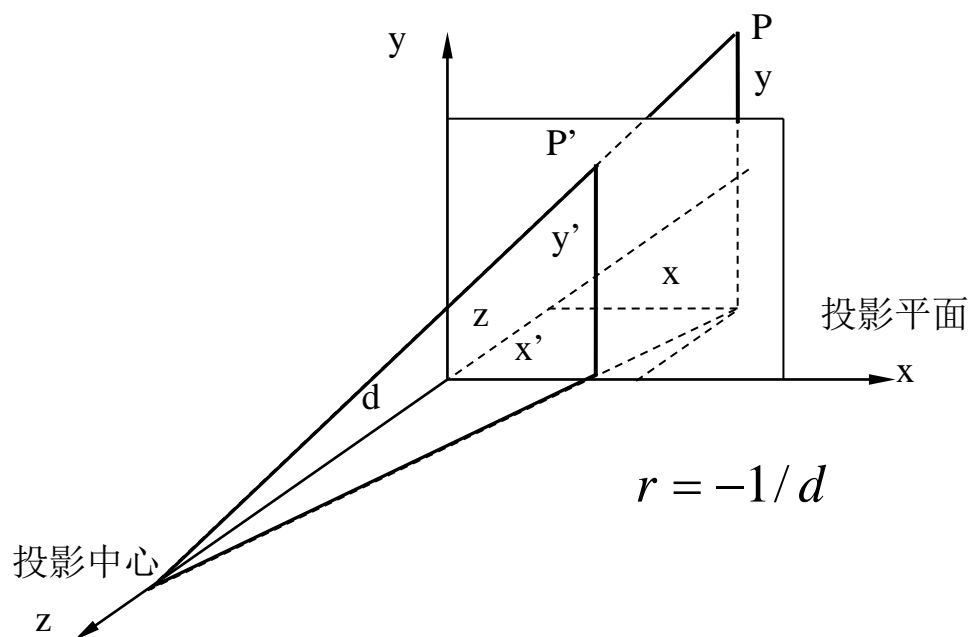
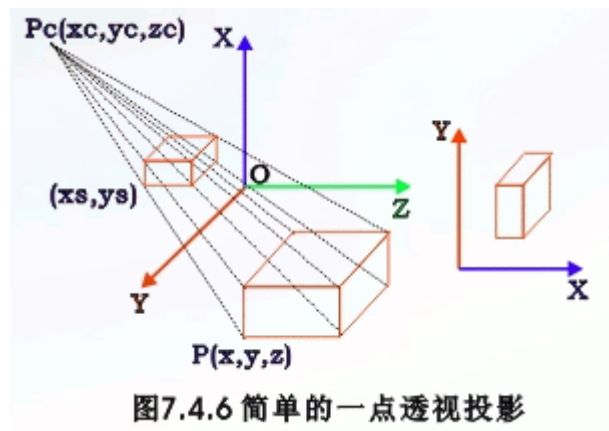


图7.4.5.n2 透视变换效果图

# 平面几何投影 (14/17)

## ■ 透视投影方程



$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{(|z| + d)} = \frac{x}{-z + d}$$

$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{(|z| + d)} = \frac{y}{-z + d}$$

$$x' = \frac{x}{(-z/d) + 1} \quad y' = \frac{y}{(-z/d) + 1}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{一点透视}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} x & y & z & rz + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz + 1} & \frac{y}{rz + 1} & \frac{z}{rz + 1} & 1 \end{bmatrix}$$

# 平面几何投影（15/17）

## ■ 灭点：

- 不平行于投影平面的平行线，经过透视投影之后相交于一点，称为灭点。

灭点的个数？

灭点的位置？

$$\begin{bmatrix} x & y & z & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & r \end{bmatrix}$$

无穷远点

灭点

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/r & 1 \end{bmatrix}$$

空间平行线可认为是相交于无穷远点，

灭点可以看成是无穷远点经透视投影后得到的点

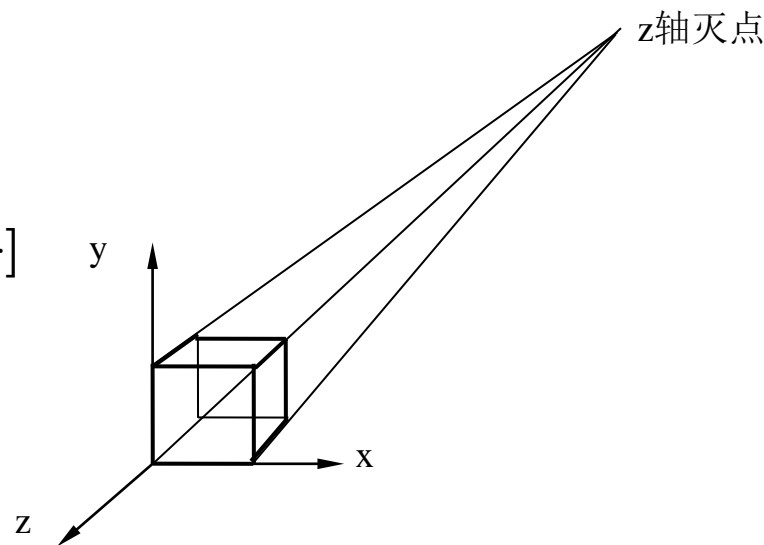


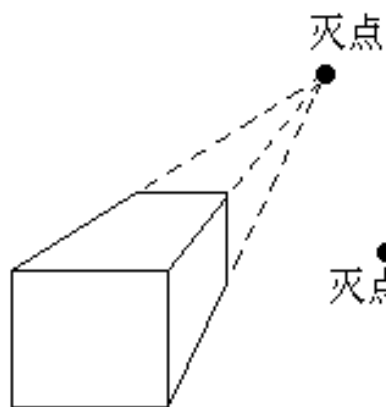
图7 正方体的一点透视及其灭点

# 平面几何投影（16/17）

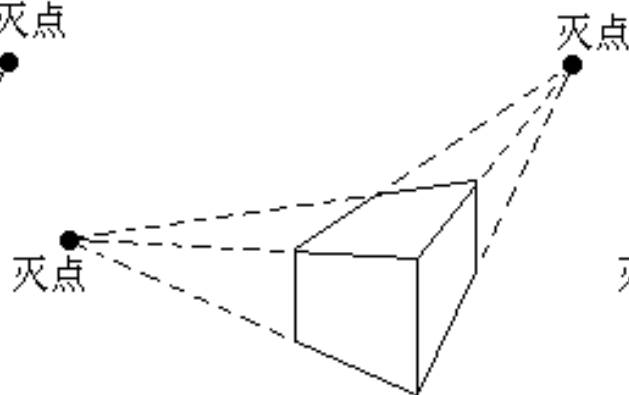
■ 主灭点:平行于坐标轴的平行线产生的灭点。

- 一点透视
- 两点透视
- 三点透视

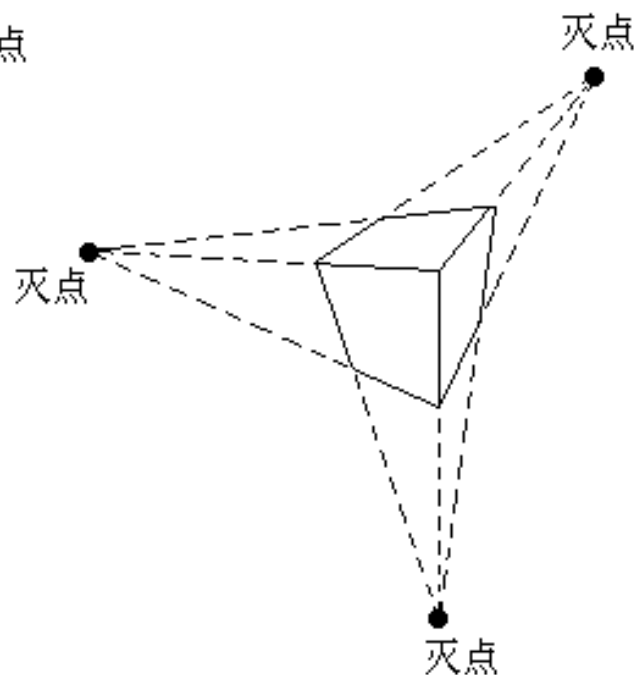
主灭点的个数由什么决定？



(a) 一点透视



(b) 两点透视



(c) 三点透视

# 平面几何投影 (17/17)

