（三）高斯勒让德公式

$[-1,1]\quad \rho\equiv 1\quad \int_{-1}^{1} f\,dx=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

算法(1) $[a,b],\rho(x)$ φ_n 的 n 次正交 各项的 0 点 即为高斯点

$0,\cdots,n$ $n+1$ 点 $0,\cdots,n-1,n$

x_j 是 φ_{n+1} 的 0 点

$A_j\quad j=0,\cdots,n$

$I_n(x^j)=I(x^j)$

算法(2) $\int_a^b P_{n-1}(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx=0$

即 $\int_a^b x^k\varphi_n(x)\rho(x)dx=0$

$k=0,1,\cdots,n-1$

n 个方程：$\varphi_n(x)$ n 个 0 点 解出来

$A_k=I_n(x^k)=\int_a^b x^k dx\quad k=0,\cdots,n-1$

$A_0\cdots A_{n-1}$ 解出来

$R_n[f]=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}P_{n+1}^2(x)dx$

$=\frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}f^{(2n+2)}(\eta)$

$n=1$ 时 $R_1=\frac{f^{(4)}(\eta)}{135}$

$R_{Simpson}=-\frac{1}{90}f^{(4)}(\eta)$

任意[a,b]区间上的高斯积分点和权：

$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}dt \approx \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{b-a}{2}\hat{x}_j+\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}\hat{A}_j$

P122

$\{\hat{x}_j,\hat{A}_j$ 是 $[-1,1]$ 高斯 $\quad [a,b]:\ x_j=\frac{b-a}{2}\hat{x}_j+\frac{a+b}{2}$

$A_j=\frac{b-a}{2}\hat{A}_j$

复合的高斯公式：

$\int_a^b f=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f\approx\sum_{i=0}^{n-1} GS^p(f)\quad (0,1,\cdots,p)$

$2p+2$ 阶

$R[f]=\sum_{i=0}^{n-1}R_i[f]=\sum_{i=0}^{n-1}C_i h^{2p+3}f^{(2p+2)}(\eta_i)=h^{2p+2}(b-a)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(2p+2)}(\eta_i)}{n}\to f^{(2p+2)}(\eta)$

（四）高斯切比雪夫公式

$[-1,1]$ $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k$

$$\begin{cases} x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), & k=0,1,\cdots,n \\ A_k=\frac{\pi}{n+1} \end{cases}$$

通常，用 n 表示高斯点个数

$x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ $k=1,\cdots,n$ $A_k=\frac{\pi}{n}$

$R_n[f]=\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta)$

$\int_a^b f=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$

复合：

$R[f]=\sum_{i=0}^{n-1} h^{m+2} f^{(m+1)}(\eta_i)$

$=Ch^{m+1}f^{(m+1)}(\eta)$

$=O(h^{m+1})$

$\approx\sum_{i=0}^{n-1} Q_i(f)$ $I_i(f)$

梯形、Simpson

P 高斯

代数精度 m

3 高斯点，代精 5，余项 h^7，整体 h^6

（五）无穷区间高斯公式

$[0,+\infty)$ “收缩” $\rho(x)=e^{-x}$ $\quad L_n(x)=e^{x}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$

x_k 为 $L_{n+1}(x)$ 的 0 点

$$A_k=\frac{[(n+1)!]^2}{[L'_{n+1}(x_k)]^2}\qquad k=0,1,\cdots,n$$

$$R[f]=\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}f^{(2n+2)}(\xi)$$

$(-\infty,+\infty)$ $\quad \rho(x)=e^{-x^2}$ $\quad$ Hermite $\quad H_n(x)$

x_k $\underline{H_{n+1}\text{ 的 0 点}}$ $\qquad A_k=2^{n+1}(n+1)!\dfrac{\sqrt{\pi}}{[H'_{n+1}(x_k)]}$

$$R[f]=\frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\qquad k=0,\cdots,n$$

5. 自适应积分方法

adaptive

(3 解)

Indicator

11:31 回来

奇异性积分 → 变步长积分格点 → 后验误差估计 → 自适应

$\int_\alpha^1 x^{-2}\,dx \quad \alpha \approx 0 \quad \alpha > 0$

α 细 粗

$I = \int_a^b f\,dx \qquad h = b-a$

辛 $S_1(f) = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$

$I(f) - S_1(f) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$ (1)

$n=2. \quad h_2 = \frac{h}{2} \qquad S_2[a,b] = S_1\left[a,\frac{a+b}{2}\right] + S_1\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$R(f) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f - S_1\left[a,\frac{a+b}{2}\right] + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f - S_1\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

$= -\frac{(b-a)/2}{180}\left(\frac{h_2}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi_1) - \frac{\frac{b-a}{2}}{180}\left(\frac{h_2}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi_2)$

$= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{4}\right)^4 \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2} = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{4}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$ (2)

5. 自适应积分方法（续）

假定 $f^{(4)}(\xi)$ 与 $f^{(4)}(\eta)$ 差别不大 则 $f^{(4)}(\xi)\approx f^{(4)}(\eta)$

(1) − (2) 得 $\left|S_1[a,b]-S_2[a,b]\right| \approx \frac{15}{16}\times\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$

$\approx 15\left|I(f)-S_2[a,b]\right|$

Indicator 指示子

$\therefore \quad \left|I(f)-S_2[a,b]\right| \approx \frac{1}{15}\left|S_1[a,b]-S_2[a,b]\right|$

若要 $\left|I(f)-S_2[a,b]\right| < \varepsilon$ 只要

$\left|S_1[a,b]-S_2[a,b]\right| < 15\varepsilon$ 后验

$h_3=\frac{h_2}{2}=\frac{h}{4}$

若不然 则对 $[a,\frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2},b]$ 用 Simpson

5. 自适应积分方法（再续）

得到 $S_3[a,\frac{a+b}{2}]$，$S_3[\frac{a+b}{2},b]$ 分别考察

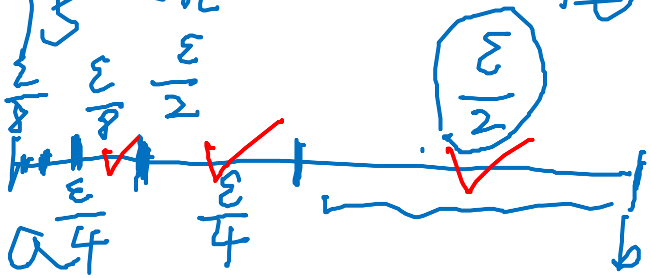
$$\underline{\left|I[a,\tfrac{a+b}{2}]-S_3[a,\tfrac{a+b}{2}]\right|}<\frac{\varepsilon}{2} \quad 与 \quad \left|I[\tfrac{a+b}{2},b]-S_3[\tfrac{a+b}{2},b]\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Indicator

对满足区间不再细分，不满足再细分

最后用龙贝格方法求出相应区间近似值

$$\frac{16}{15}S_n(\alpha,\beta)-\frac{1}{15}S_{n-1}(\alpha,\beta)$$



7. 多重积分（了解）

（一）矩形区域上的机械求积公式

$R: [a,b]\times[c,d]$ $\qquad \iint_R f\,dx\,dy = \sum f(x_i,y_j)A_{ij}$

(x_i,y_j) 积分点 $\qquad A_{ij}$ 权

(x_i, w_i) 是 $[a,b]$ 上点权，(y_j, v_j) 是 $[c,d]$ 上的

$$A_{ij} = w_i v_j$$

（二）非矩形区域上的机械求积公式

的"先外层 再内层"

$$I = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f\,dy\right] dx = \int_a^b F(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} F(x_i)A_i$$

先 x 后 y

（三）高维积分难点介绍

$[-1,1]^{100}$ "维数灾难"

- sparse grid
- 蒙特卡洛法（与维数无关）

8. 数值微分（了解）

$f'(a) \approx$ $x_i \; f(x_i)$

（一）几种常见数值微分公式

$f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 向前差分法 $O(h)$

$f'(a) \approx \dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 向后 —— $O(h)$

$f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 中心 —— $O(h^2)$

（二）中点公式的误差

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)h^2 + O(h^3)$

$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + f''(a)h^2 + O(h^3)$

$\left| f'(a) - \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2a} \right| \le O(h^2)$

8. 数值微分

（三）数值微分的病态性介绍

$$\tilde f(x) = f(x) + \varepsilon$$

$$\frac{\tilde f(a+h) - \tilde f(a)}{h} = \frac{f(a+h)+\varepsilon_1 - f(a) - \varepsilon_2}{h}$$

"不稳定"

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{h}$$

$Ch = \frac{|\varepsilon_2-\varepsilon_1|}{h}$

得到一个 h_0

$$\left| f'(a) - \frac{\tilde f(a+h)-\tilde f(a)}{h} \right| \le \left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| + \frac{|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{h}$$

$$\le Ch + \frac{|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{h}$$

"病态"

tradeoff

h 很小时 Ch 很小，但 $\frac{|\varepsilon_1-\varepsilon_2|}{h}$ 可能很大

（四）插值型公式

$f(x) \approx L_n(x)$ L 插值

则 $f'(x) \approx L_n'(x)$

（四）插值型公式：两点公式

（四）插值型公式：三点公式

（五）三次样条微分公式

$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ $f(x_i) = y_i$

S_T $S(x)$ 三次样条插值函数

$S'(x) \approx f'(x)$

$\| S^{(k)}(x) - f^{(k)} \|_\infty \le C_k \| f^{(4)} \|_\infty h^{4-k}$

$k = 0, 1, 2$

作业 11

~~14 (1)(2)(3)~~

16

$k=1$ 时 $\| S'(x) - f'(x) \|_\infty \le C_1 \| f^{(4)} \|_\infty h^3$

（六）外推

$$Df(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$$

$$= \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_\ell h^{2\ell} \cdots$$

$$D_m(h) = \frac{4^m D_m\left(\frac{h}{2}\right) - D_m(h)}{4^m - 1}$$