2021 年秋统计学习题 06 参考解答

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ, σ 未知. 常数 c 应取多少时才能保证区间 $(-\infty, \bar{X}+c]$ 是 μ 的 95% 的置信区间，即求 c 使得

$$\mathbb{P}(-\infty < \mu \le \bar{X} + c) = 0.95.$$

? 存疑

解 记 S^2 为样本方差，s^2 为样本方差的观测值，记 $t_{0.05}(n-1)$ 为分位点：

$$\mathbb{P}\left(T(n-1) > t_{0.05}(n-1)\right) = 0.05,$$

其中 $T(n-1)$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布. 由于

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1),$$

故

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} > -t_{0.05}(n-1)\right) = 0.95.$$

即

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} > \mu - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)\right) = 0.95.$$

故可取

小写

$$c = -\frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1).$$

3. 设 $L(x), U(x)$ 满足

$$\mathbb{P}(L(\mathbf{X}) \le \theta) = 1-\alpha_1, \quad \mathbb{P}(U(\mathbf{X}) \ge \theta) = 1-\alpha_2,$$

且对任意 $\mathbf{x}$,

$$L(\mathbf{x}) \le U(\mathbf{x}).$$

证明

$$\mathbb{P}(L(\cancel{\mathbf{x}}) \le \theta \le U(\cancel{\mathbf{x}})) = 1-\alpha_1-\alpha_2.$$

证明：记

$$A = \{L(X) \leqslant \theta\}, \quad B = \{U(X) \geqslant \theta\}.$$

由于 $L(x) \leqslant U(x)$ 对任意 x 都成立，故

$$A^c \cap B^c = \phi.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cup B^c) &= \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) \\ &= [1-\mathbb{P}(A)] + [1-\mathbb{P}(B)] \\ &= [1-(1-\alpha_1)] + [1-(1-\alpha_2)] = \alpha_1+\alpha_2.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L(X) \leqslant \theta \leqslant U(x)) &= \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= 1-\mathbb{P}((A\cap B)^c) = 1-\mathbb{P}(A^c \cup B^c) \\ &= 1-(\alpha_1+\alpha_2) \\ &= 1-\alpha_1-\alpha_2.\end{aligned}$$

3

4. 设 $X|P \sim \mathrm{B}(n,P), P \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$，即成功的概率 P 是一个服从 $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ 分布的随机变量，在条件 $P=p$ 时，随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

(a). 求 $\mathbb{E}X$.

(b). 求 $\mathrm{Var}\,X$.

(c). 证明 X 的方差可以写成

$$\mathrm{Var}\,X = n\mathbb{E}P(1-\mathbb{E}P) + n(n-1)\,\mathrm{Var}\,P.$$

解 (a) 由重期望公式

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|P))$$

$$= \mathbb{E}(nP) = n\mathbb{E}P$$

$$= \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

b)

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|P)) = \mathrm{Var}(nP) = n^2\,\mathrm{Var}(P)$$

$$= n^2\cdot\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|P)) = \mathbb{E}(nP(1-P))$$

$$= n\int_0^1 p(1-p)\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}dp$$

$$= \frac{n\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 p^{\alpha}(1-p)^{\beta}dp$$

$\propto$ 参数为 $\alpha+1, \beta+1$ 的 Beta 分布的 pdf

$$= \frac{n\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$\boxed{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}$

$$= \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

因此，由条件方差等式，可得

$$\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|P)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|P))$$

$$= \frac{n^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

(c).

$$\mathbb{E}[nP(1-P)]$$

$$= n\mathbb{E}(P-P^2) = n\mathbb{E}(\underset{\triangle}{\underline{P-(\mathbb{E}P)^2}} + \underset{\triangle}{\underline{(\mathbb{E}P)^2-P^2}})$$

$$= n[\mathbb{E}P-(\mathbb{E}P)^2] + n[(\mathbb{E}P)^2-\mathbb{E}P^2]$$

$$= n\mathbb{E}P\cdot[1-\mathbb{E}P] - n\mathrm{Var}P$$

因此，由 b) 中的计算以及条件方差等式可得

$$\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|P)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|P))$$

$$= n^2\mathrm{Var}P + \mathbb{E}(nP(1-P))$$

$$= n^2\mathrm{Var}P + n\mathbb{E}P\cdot[1-\mathbb{E}P] - n\mathrm{Var}P$$

$$= n\mathbb{E}P\cdot[1-\mathbb{E}P] + n(n-1)\mathrm{Var}P.$$