（定理）A对称正定，则x^*为$Ax = b$的解的充分必要条件是：x^*满足$\varphi(x^*) = \min\limits_{x\in R^n} \varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

证明："⇒" (3) ⇒ $\varphi(x) - \varphi(x^*) = \frac{1}{2}(A(x-x^*), (x-x^*)) \geq 0$

$$\varphi(x) \geq \varphi(x^*)$$

"⇐" $\varphi(\bar{x}) = \min\limits_{x\in R^n} \varphi(x)$ $\qquad \bar{x} \overset{?}{=} x^*$

(3) $\underline{\varphi(\bar{x})} - \underline{\varphi(x^*)} = \frac{1}{2}(A(\bar{x}-x^*), (\bar{x}-x^*))$

0 $\qquad \Rightarrow \bar{x} = x^*$ □

$Ax=b \Leftrightarrow$ 求 $\varphi(x)$ 最小值对应 $\bar{x}$

最速下降法： $\varphi(x)$ 最小值　设 $x^{(k)}$ 已确定

给一个向量 $p^{(k)}$　令 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha p^{(k)}$

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \min_{\alpha \in R} \varphi(x^{(k)} + \alpha p^{(k)})$$

$$\frac{d\, \varphi(x^{(k)} + \alpha p^{(k)})}{d\alpha} = \left(A(x^{(k)} + \alpha p^{(k)}) - b,\ p^{(k)}\right) = 0$$

$$\alpha_k = \frac{-(Ax^{(k)} - b,\ p^{(k)})}{(Ap^{(k)},\ p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

则 $\underline{\varphi(x^{(k+1)}) \le \varphi(x^{(k)})}$

最速下降法（续）：

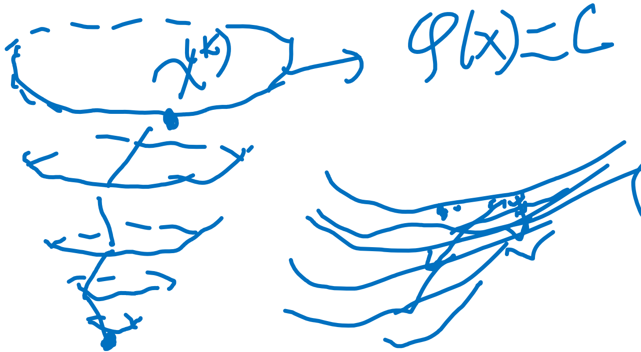
悟1)

取 $p^{(k)} = -\nabla\varphi(x^{(k)}) = -(Ax^{(k)}-b) = r^{(k)}$

$= b - Ax^{(k)}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$ “最速下降法” $x^{(k)}$ 残差

可证 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* = A^{-1}b$



$\varphi(x)=C$ 等高线

梯度与~~等~~等高线~~垂垂~~直

最速下降法收敛速度：

$$\|x^{(k)}-x^*\|_A \le \left(\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$$

$\|x\|_A^2 = (Ax,x)$

λ_1 A最大TZZ

λ_n A--小TZZ

2条件数

$$= \left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}-1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}-1}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$$

$$= \left(\frac{\mathrm{Cond}(A)_2-1}{\mathrm{Cond}(A)_2+1}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$$

共轭梯度法：

$x^{(0)}=0$ $p^{(0)}=r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$

$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)}$ $h_1]$ $p^{(0)}$ --- $p^{(k-1)}$ 构好

$x^{(k)}=\alpha_0 p^{(0)}+\alpha_1 p^{(1)}+\cdots+\alpha_{k-1}p^{(k-1)}$

找 α_k, $p^{(k)}$ 使 $\varphi(x^{(k+1)})=\min\limits_{x\in span\{p^{(0)},\cdots,p^{(k)}\}}\varphi(x)$

α, y

$x\in span\{p^{(0)}\cdots p^{(k)}\}$ 分解 $x=y+\alpha p^{(k)}$

由(2) 其中 $y\in span\{p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}\}$

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\cancel{\alpha(Ay,p^{(k)})}-\alpha(b,p^{(k)})+\frac{\alpha^2}{2}(Ap^{(k)},p^{(k)})$$

为使 $\varphi(x)$ 变为两个独立极小化问题 令

$(Ay,p^{(k)})=0$ $\forall y\in span\{p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}\}$ 即

$(Ap^{(j)},p^{(k)})=0$ $j=0,1,\cdots,p-1$

（定义：A-共轭向量组或A-正交向量组）

A对称正定 若 $p^{(1)} \cdots p^{(m)}$ 满足

$$(A p^{(i)}, p^{(j)}) = 0 \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, \ldots m$$

称 $p^{(i)}$ 对 A 共轭向量组 A 正交向量组

则

$$\min_{x \in \mathrm{span}\{p^{(0)} \ldots p^{(k)}\}} g(x) = \min_{y \in \mathrm{span}\{p^{(0)} \ldots p^{(k-1)}\}} g(y) + \min_{\alpha} \left[\frac{\alpha^2}{2} (A p^{(k)}, p^{(k)}) - \alpha (r, p^{(k)}) \right]$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} \qquad \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(A p^{(k)}, p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$

共轭梯度法

作业：P210，9

$P^{(0)}, P^{(1)}, \cdots, P^{(k)}$的选择

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

若 $p^{(0)}$ -- $p^{(k-1)}$ 已选好　如何选 $p^{(k)}$?

令 $\boxed{p^{(k)} = r^{(k)} + \beta_{k-1} p^{(k-1)}}$　让 $\boxed{(p^{(k)}, Ap^{(k-1)}) = 0}$

A正交？
共轭？

$$\Rightarrow \beta_{k-1} = -\frac{(r^{(k)}, A p^{(k-1)})}{(p^{(k-1)}, A p^{(k-1)})}$$

流程：$x^{(k)} \to r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \to \beta_{k-1} \to p^{(k)} \to \alpha_k \to x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$

$p^{(k-1)}$已知

---

* $r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - Ax^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)} \underline{= r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)}}$

* $(r^{(k+1)}, p^{(k)}) = (r^{(k)}, p^{(k)}) - \alpha_k (Ap^{(k)}, p^{(k)}) = 0$

* $(r^{(k)}, p^{(k)}) = (r^{(k)}, r^{(k)} + \beta_{k-1} p^{(k-1)}) = (r^{(k)}, r^{(k)})$

$$\therefore \alpha_k = (r^{(k)}, r^{(k)}) / (p^{(k)}, A p^{(k)})$$

（定理：双正交性） CG法得到的 $r^{(k)}$ 与 $p^{(k)}$ 满足

(1) $(r^{(i)}, r^{(j)}) = 0 \quad (i \neq j)$ (2) $(Ap^{(i)}, p^{(j)}) = 0 \quad i \neq j \quad i \neq 0$

证明： （若有时间）

A正交 A共轭

不证

可证 $\beta_k = \dfrac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$

证明：（若有时间）

共轭梯度法收敛速度：

$$\|x^{(k)} - x^*\|_A \le 2 \left(\frac{\sqrt{\mathrm{cond}(A)_2} - 1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)_2} + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_A$$

快于最速下降法

共轭梯度法是一种直接法，但是常用作迭代法

CG算法：

(1) $x^{(0)} \in R^n$ $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ $p^{(0)} = r^{(0)}$

(2) $k = 0、1\ 2、\cdots$

$$\alpha_k = (r^{(k)}, r^{(k)}) / (p^{(k)}\ A p^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)} \qquad \beta_k = \frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$$

(3) 若 $\boxed{r^{(k)}=0}$ 或 $\underline{(p^{(k)}, Ap^{(k)})=0}$ 停止

$\Downarrow$ $Ax^{(k)} - b = 0$

$x^{(k)}$为所求

$\Downarrow$

$p^{(k)} = 0$

$\Rightarrow \alpha^{(k)} = 0$

第七章：非线性方程、方程组数值解法

1. 基本问题

（一）问题描述与动机（方程求根、极值等）：

$f(x)=0$ 求根　$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1$　$xe^x=1$ ？求根

n次多项式 当 $n>5$ 时无求根公式 "$n\geq5$"

求极值（最值）问题 最终也转化为求根问题（导数为0）

定义：$f(x)=0$ 若 x^* 满足 $f(x^*)=0$ 称 x^* 为 $f(x)=0$ 一个根

若 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$, $g(x^*)\neq0$ 称 x^* 为 $f(x)=0$ m重根

m重根 $\Leftrightarrow f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$, $f^{(m)}(x^*)\neq0$

（二）求根的基本步骤：

（1）根的存在性，有几个根

（2）根的隔离：把某个根的大致区间找出来

（3）根的精确化：设计算法求近似根，满足一定精度

（三）单重根的二分法：f 在 $[a\ b]$ 连续 $\boxed{f(a)\cdot f(b)<0}$ 11:28 回来

则 f 在 $(a\ b)$ 有一根

(1) $[a\ b]$ 中点 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 若 $f(x_0)=0$ x_0为根 若不然 $f(x_0)\neq 0$

若 $\boxed{f(x_0)f(a)<0}$ 取 $[a_1,b_1]=[a,x_0]$ 若 $f(x_0)f(b)<0$ 取 $[a_1,b_1]=[x_0,b]$

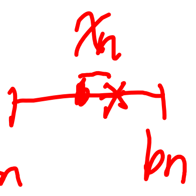
则 根在 $[a_1,b_1]$ 中 且 $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$

依次下去 $[a_n,b_n]=\begin{cases}[a_{n-1},x_{n-1}] & 若\ f(x_{n-1})\cdot f(a_{n-1})<0\\ [x_{n-1},b_{n-1}] & 若\ f(x_{n-1})f(b_{n-1})<0\end{cases}$

$\boxed{x_{n-1}}=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

则 $\boxed{x_n=\frac{a_n+b_n}{2}}$ 作为 x^* 近似值 且 $|b_n-a_n|=\frac{b-a}{2^n}$

"停止"



误差与停止原则：$|e_n|=|x_n-x^*|\leq\frac{b-a}{2^{n+1}}$

误差

若要 $|e_n|<\varepsilon$ 只要 $\boxed{\frac{b-a}{2^{n+1}}<\varepsilon}$ 即可

$n>\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}-1$

缺点：①不能求偶数重根 ②收敛慢 ③不能推广方程组

2. 迭代法

（一）问题描述：$f(x)=0 \Longleftrightarrow$ 同解 $x=\varphi(x)$ 则

$f(x^*)=0 \Longleftrightarrow x^*=\varphi(x^*)$ 称 $x^*=\varphi(x^*)$ 称 x^* 为 $\varphi(x)$ 不动点

例 $x^3-x-1=0$ ① $x=x^3-1$ $\quad \varphi(x)=x^3-1$

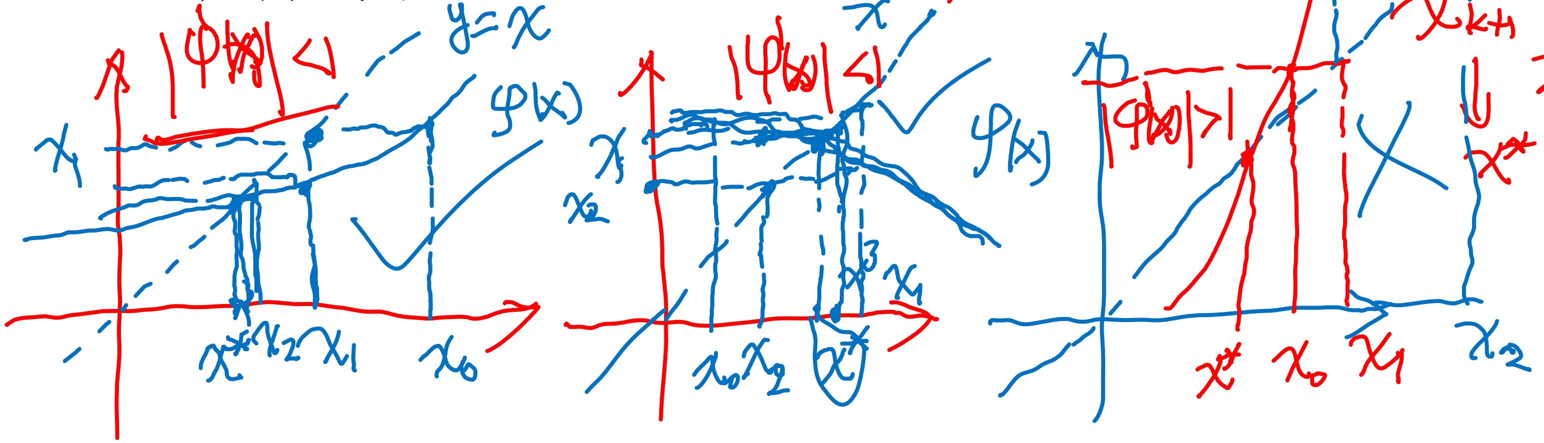
② $x=\sqrt[3]{1+x}$ $\quad \varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}$

更一般地 $x=x-f(x)$ $\quad \varphi(x)=x-f(x)$

（定义）：不动点迭代法 x_0 取定 $x_1=\varphi(x_0)$ $x_2=\varphi(x_1)\cdots$

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $k=0,1,2\cdots$ 若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ 则称 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，该方法称为不动点迭代法

（二）几何意义：



$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

若收敛 ↓

$x^*=\varphi(x^*)$

x^* 即为所求

（三）不动点存在性与迭代法的收敛性：　　$x.\ y \in [a.b]$　$y = \varphi(x)$

（定理：存在性）：①若$x \in [a,b]$时，$\varphi(x) \in [a,b]$，且$\varphi(x)$满足

② $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|$, $L < 1$,　$x, y \in [a,b]$,

则$x = \varphi(x)$在[a,b]内存在唯一的不动点x^*。　→ ② 压缩映射

证明：$F(x) = x - \varphi(x)$　若 $F(a)=0$　a为所求

$F(b)=0$　b为……

若 $F(a)\neq 0$ $F(b)\neq 0$　则 $F(a) = a - \varphi(a) < 0$　（$\varphi(a) > a$　$\varphi(x) \in [a.b]$）

$F(b) = b - \varphi(b) > 0$

介值定理 存在 x^*　$F(x^*) = 0$　$x^* = \varphi(x^*)$

若 $x_1^* = \varphi(x_1^*)$　$x_2^* = \varphi(x_2^*)$　则

$$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| \le L|x_1^* - x_2^*| \quad L<1$$

$\Rightarrow$ $x_1^* - x_2^* = 0$ $\Rightarrow$ $x_1^* = x_2^*$ “唯一” □

（三）不动点存在性与迭代法的收敛性（续）：

（定理：收敛性）：若(1) $x \in [a,b]$时，$\varphi(x) \in [a,b]$，且$\varphi(x)$满足

(2) $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|$，$L<1$，　$x,y \in$[a,b]

则对任何初值x_0，迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$都收敛于$x=\varphi(x)$不动点x^*，并且

$\in [a,b]$

停止准则

$$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|,\quad |x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

误差

证明：(a) $x_k=\varphi(x_{k-1})$　$x^*=\varphi(x^*)$　则 $|x_k-x^*|=|\varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*)|$

(2) $\le L|x_{k-1}-x^*|$

$\le L^2|x_{k-2}-x^*| \le \cdots \cdots \le L|x_0-x^*|$

令 $k\to\infty$　$0<L<1$　$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

(b) $|x_k-x^*| \le |x_k-x_{k+1}|+|x_{k+1}-x^*| \le |x_k-x_{k+1}|+L|x_k-x^*|$

$(1-L)|x_k-x^*| \le |x_k-x_{k+1}|$ ✓

(c) $|x_k-x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \le \frac{1}{1-L}L|x_k-x_{k-1}| \cdots \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$

$x_k=\varphi(x_{k-1})$

（三）不动点存在性与迭代法的收敛性（续）：

（推论：收敛性）：前面定理中，条件

$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|,\ \ L<1,\qquad x,y \in$[a,b]

可换成 $|\varphi'(x)| \le L < 1,\ x \in [a,b]$

$\xi \in (x,y)$

证明：$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| \le L|x-y|$

$0 < L < 1$

① $[a,b]$

② $|\varphi'(x)| < 1 \quad x \in [a\ b]$

（例）：求方程$xe^x - 1 = 0$在$[0.5, ln\ 2]$中的根

解：$x = e^{-x} = \varphi(x) \qquad = e^{-0.5} \qquad = \frac{1}{2}$

$\varphi(0.5) \quad \varphi(\ln 2)$

$\begin{cases} ① \ \varphi : [a\ b] \to [a\ b] \\ ② \ |\varphi'(x)| = |e^{-x}| < 1 \qquad x \in [0.5, \ln 2] \end{cases}$

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛

（例）：

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = x^3 - 1 = \varphi_1 & \times \\ x = \sqrt[3]{x+1} = \varphi_2 \end{cases} \quad 在[1,2]中$$

$$|\varphi_2'(x)| = \left|\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right| \le \frac{1}{3}\cancel{(1+1)}^{-\frac{2}{3}} \quad \frac{1}{3}2^{-\frac{2}{3}} < 1 \quad ✓$$

$$|\varphi_1'(x)| = |3x^2| \ge \boxed{3} \quad x \in [1,2]$$

不收敛

（四）局部收敛性：

（定义）：$\varphi(x)$有不动点x^*，如果存在x^*的某邻域 D: $|x-x^*|<\delta$，任意初值$x_0 \in D$,迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于x^*，则称该迭代法是局部收敛的

$D: |x-x^*|<\delta \quad x_0 \in D$

（定理：局部收敛性）：$x=\varphi(x)$的不动点为x^*，$\varphi(x)$在x^*某邻域内具有连续的一阶导数，且$|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛

证明：

思路 存在邻域 $D: |x-x^*|<\delta$ 使 $|\varphi'(x)|<1 \quad x\in D$

$\lim_{x\to x^*} \varphi'(x) = \varphi'(x^*)$ 则 $\forall \varepsilon>0$ 存在 δ $|x-x^*|<\delta$ 时

$|\varphi'(x) - \varphi'(x^*)| < \varepsilon$

$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1-|\varphi'(x^*)|}{2}$

$\because |\varphi'(x)| \le |\varphi'(x^*)| + \varepsilon \le \frac{1+|\varphi'(x^*)|}{2} < 1$

在 D 中 $|\varphi'(x)|<1$

$\varphi(x) \in U(x^*,\delta) = D$

$\varphi(x)\in D$? $|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x)-\varphi(x^*)| \le |\varphi'(\xi)|\,|x-x^*| \le |x-x^*| \le \delta$

（四）局部收敛性：

（例）：求$x^2 - 3 = 0$的根$x^* = 3$

P238、2, 3, 4