第十一章 格与布尔代数

格与布尔代数是代数系统中的又一类重要代数系统。这两个代数系统与第 9 章讨论的代数系统之间存在着一个重要的区别:在格与布尔代数中,偏序关系具有重要的意义。为了强调偏序关系的作用,我们将分别从偏序关系和代数系统两个方面引入格的概念。

给格附加一定的限制后,格就转化为布尔代数,即布尔代数是一种特殊的格。布尔代数最初是作为对逻辑思维法则的研究而出现的,创立者是英国哲学家和数学家布尔。自布尔之后,许多数学家对布尔代数的一般化作了许多努力,特别是斯通。他的工作可以说是对现代布尔代数的发展开创了一个新阶段。

1938 年,香农发表了《继电器和开关电路的符号分析》一文,为布尔代数在工艺技术中的应用开创了道路,从而出现了开关代数。为了给开关代数奠定基础,于是自然形成了二值布尔代数,即逻辑代数。自香农之后,人们应用布尔代数对电路作了大量研究,并形成了网络理论。

格与布尔代数不仅是代数学的一个分支,而且在近代解析几何,半序空间等方面也都有重要的作用,同时,格与布尔代数在计算机科学中也有十分重要的作用,可直接用于开关理论和逻辑设计、密码学、计算机理论科学等。

① 偏序关系与偏序集

(1) 关系

- 现实中的“关系”：
  - 兄弟关系、长幼关系、同学关系、邻居关系，上下级关系等。
- 数学上的关系：
  - 例如:集合中元素之间的联系,比如“3 小于 5”,“x 大于 y”，“点 a 在 b 与 c 之间”。

◆ 例如：火车票与座位之间的对号关系。

设 X 表示火车票的集合，Y 表示座位的集合，则对于任意的 $x\in X$ 和 $y\in Y$，

$$\text{必定有}\begin{cases} x\text{ 与 }y\text{ 有“对号”关系} \\ x\text{ 与 }y\text{ 没有“对号”关系} \end{cases}\text{二者之一。}$$

令 R 表示“对号”关系，则上述问题可以表示为 xRy 或 $x\not{R}y$。亦可表示为$\langle x, y\rangle\in R$ 或$\langle x, y\rangle\notin R$，因此我们看到对号关系是有序对的集合。

◆ 我们也常用关系对集合的某些元素或全体元素进行排序。例如，使用包含着字母对$\langle x, y\rangle$的关系对字母排序，其中 x 按照字典顺序排在 y 的前面。

关系的概念及记号

二元关系，简称关系：任一有序对的集合即确定了一个关系 R，R 中任一有序对$\langle x, y\rangle$可记为 $\langle x, y\rangle\in R$ 或 xRy。不在 R 中的任一有序对$\langle x, y\rangle$可记为$\langle x, y\rangle\notin R$ 或 $x\not{R}y$。

例如：$R_1 = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_1>, <x_2, y_2>\}$；

$R_2 = \{<x, y> \mid x, y$ 是实数且 $x > y\}$；

$R_3 = \{<x, y> \mid x$ 是 y 的倍数且 $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$

$= \{<4,4>, <4,2>, <4,1>, <3,3>, <3,1>, <2,2>, <2,1>, <1,1>\}$。

二元关系的记号：

设 R 是二元关系，则

$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow x$ 与 y 具有 R 关系 $\Leftrightarrow xRy$。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，即 $R \subseteq A \times A$，如果对于每一个 $x \in A$，有 xRx（$\langle x, x\rangle \in R$），则称二元关系 R 是自反的。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，如果对于每个 $x, y \in A$，每当 xRy 和 yRx，必有 $x = y$，则称集合 A 上的关系 R 是反对称的。

✧ 设 R 为定义在 A 上的二元关系，如果对于任意的 $x, y, z \in A$，每当 xRy，yRz 时就有 xRz，称关系 R 在 A 上是传递的。

例如：设 $A = \{1, 2, 3\}$，R_1，R_2, R_3 是 A 上的关系，其中

$R_1 = \{<1, 1>, <2, 2>\}$；

$R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3,3>, <1,2>\}$；

$R_3 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>\}$；

$R_4 = \{<1, 2>\}$。

R_1 不是自反的，是反对称的和传递的。

R_2 是自反的，是反对称的和传递的。

R_3 是自反的，不是反对称的，是传递的。

R_4 不是自反的，是反对称的，是传递的。

(2) 偏序关系

设 R 是集合 A 上的一个二元关系，如果 R 具有自反性，反对称性和传递性，那么称 R 为一个偏序关系；记为$\leqslant$，并称 $\langle A, \leqslant\rangle$为偏序集。

例如：

1. 实数集合$\mathbb{R}$关于它上面的小于等于关系做成一个偏序集$\langle\mathbb{R}, \leqslant\rangle$。
2. 正整数集$\mathbb{Z}^+$关于整除关系 D 做成一个偏序集$\langle\mathbb{Z}^+, D\rangle$。
3. 集合的包含关系使得所考虑的集合全体 S 做成一个偏序集$\langle S, \subseteq\rangle$.
4. 集合 $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$在 R 下做成一个偏序集$\langle \mathrm{A}, R\rangle$，这里

$$R = \{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <a, e>, <b, b>, <b, c>,$$
$$<b, e>, <c, c>, <c, e>, <d, d>, <d, e>, <e, e> \}。$$

(3) 哈斯(Hasse)图

(1) 用小圆圈表示元素，且若 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$，则 y 画在 x 之上。

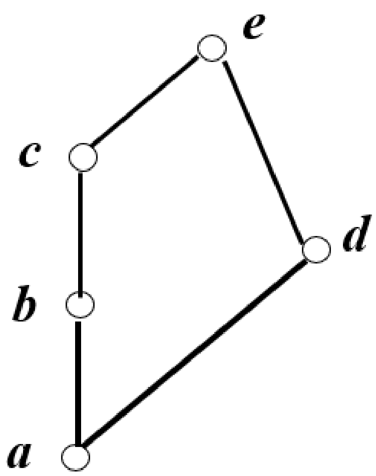
(2) 规定：若 $x \leqslant y(x\neq y)$ 且没有其它元素 $z(z\neq x, y)$，使得 $x \leqslant z$

且 $z \leqslant y$, 则在 x 与 y 之间用线段相连。

例如：集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$在 R 下做成一个偏序集$\langle A, R\rangle$， 这里

$$R = \{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <a, e>, <b, b>, <b, c>,$$

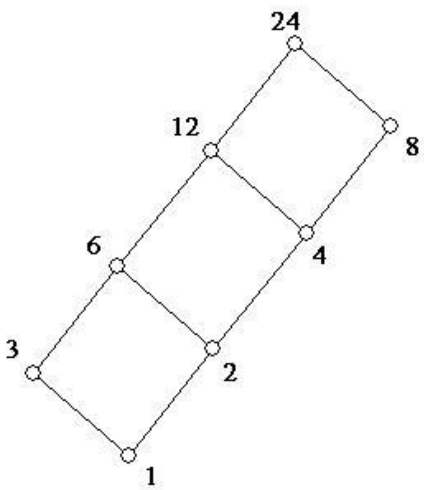
$$<b, e>, <c, c>, <c, e>, <d, d>, <d, e>, <e, e> \}。$$

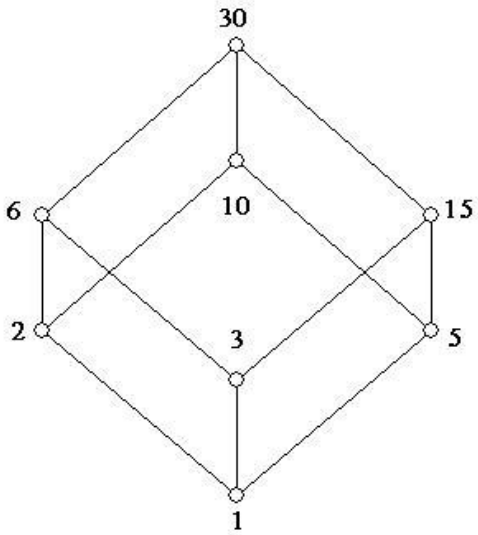


Hasse图

设 n 为正整数, S_n 是 n 的全部正因数的集合,则$< S_n, \mid >$是偏序集。

$<S_{24}, \mid >$和 $<S_{30}, \mid>$的 Hasse 图如下:

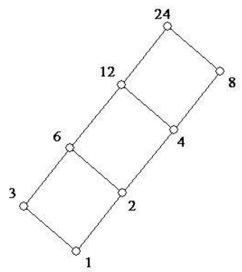


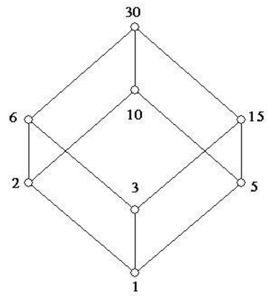


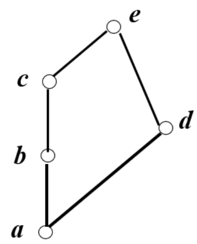
(4) 偏序集的最大元和最小元

设$<A, \le>$为偏序集,如果 A 中有一个元素 a, 对于所有的 A 中元素 x, 都有 $x \le a(a \le x)$, 则称 a 为该偏序集的最大元(最小元)。

✧ 最大(小)元一定唯一。







Hasse图

✧ 上图中偏序集的最大元和最小元是?

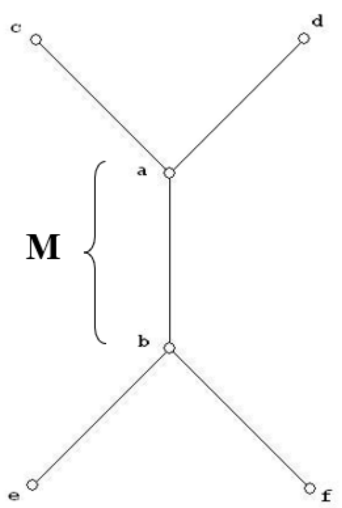
(5) 上界和下界

设$<A, \le>$为偏序集, $\varnothing \ne M \subseteq A$, 若 A 中存在元素 a, 对 M 中任意元素 m, 都有 $m \le a\ (a \le m)$。则称 a 为 M 的一个上界(下界)。

例如：右边偏序集中，M 的上界为 a, c, d; 下界为 b, e, f

结论:

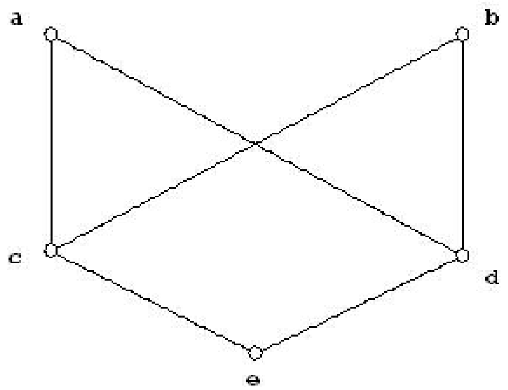
由定义可以看出, M 的上(下)界未必在 M 中。 另外 M 未必

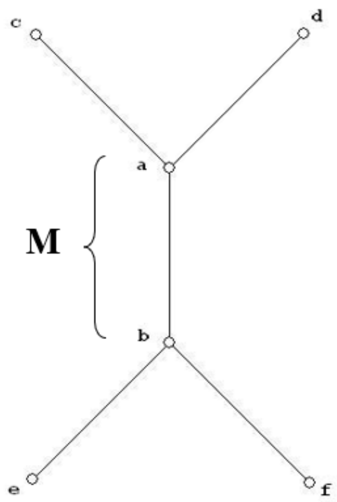


一定有上(下)界。

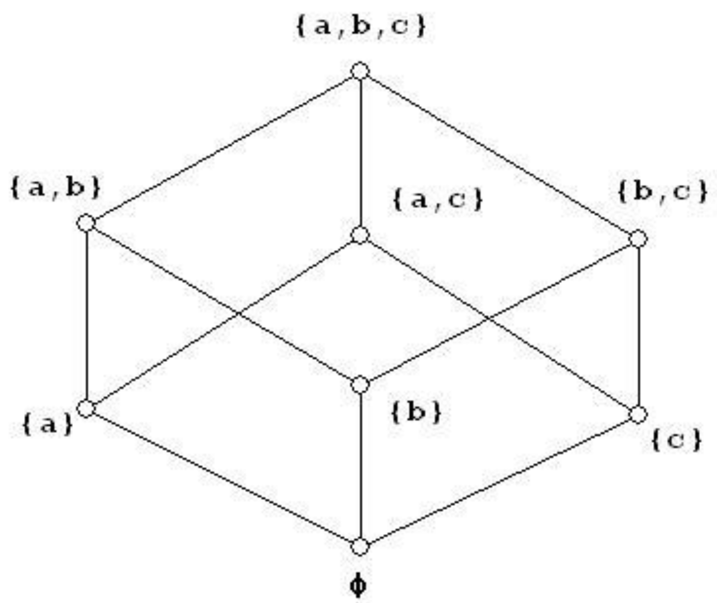
(6) 上确界和下确界

设$<A, \leq>$为偏序集，$\varnothing \neq M \subseteq A$。 A 中元素 a，称为 M 的最小上界即上确界(最大下界即下确界)，如果 a 是 M 的一个上界(下界)，并且对 M 的任意一个上界(下界) x，都有 $a \leq x$ ($x \leq a$)。





左边的偏序集，对于 M = {c，d}无上确界，下确界为 e。右边的偏序集，对于 M 上确界为 a，下确界为 b。



设< $\mathscr{P}(\{a, b, c\}), \leq$ >是$\{a, b, c\}$的幂集关于包含关系构成的偏序集,该偏序集的 Hasse 图如上图。

M = $\{\{a\},\{b\}\}$：上确界$\{a, b\}$，下确界为$\varnothing$。

M = $\{\{a\},\{a, b\}\}$：上确界$\{a, b\}$，下确界为$\{a\}$。

M=$\{\{a\},\{b, c\}\}$ 或 M=$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$：上确界$\{a, b, c\}$，下确界为$\varnothing$。

M=$\{\{a, b\},\{b, c\}\}$：上确界$\{a, b, c\}$，下确界为{b}。

② 格

定义 1: 设< S, $\leqslant$ >是一个偏序集，如果对任意 a, b∈S，$\{a, b\}$都有最大下界和最小上界存在，则称< S, $\leqslant$ >是格，简称 S 是格。若 S 为有限集，则称格 S 为有限格。且把由偏序关系定义的格称为偏序格。

在格< S, $\leqslant$ >中，任取 a, b∈S，则$\{a, b\}$的最大下界和最小上界都是惟一存在的，且均属于 S。

✧ 用 $a \wedge b$ 表示$\{a, b\}$的最大下界，称为 a 与 b 的保交；

✧ 用 $a \vee b$ 表示$\{a, b\}$的最小上界，称为 a 与 b 的保联。

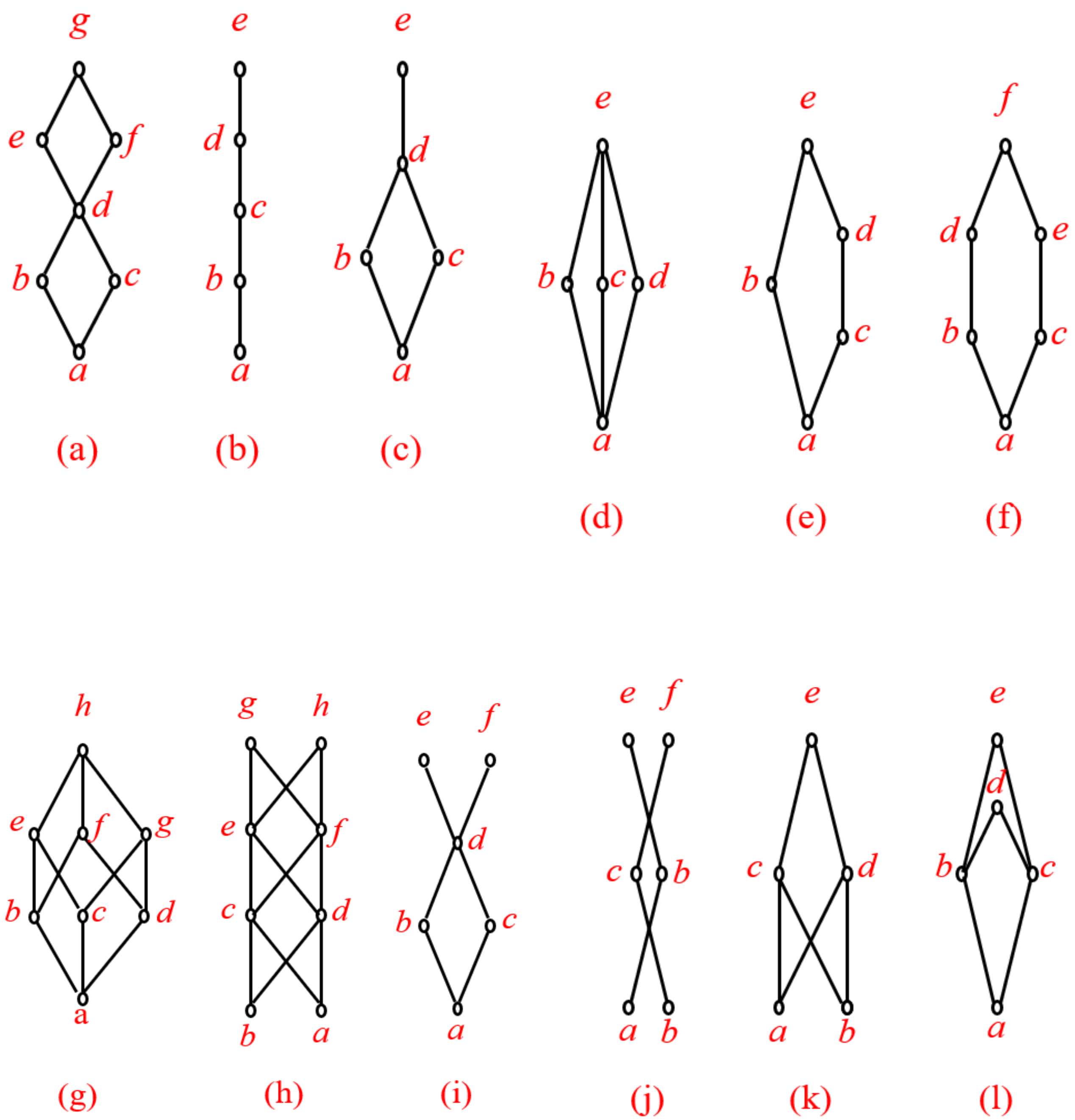
例 1:（1）考虑偏序集< $\mathbb{Z}^+$, D >，其中$\mathbb{Z}^+$是正整数，D 是一个整除关系，问此偏序集< $\mathbb{Z}^+$, D >是否是一个格？

（2）设 A 是一个集合，$\mathscr{P}$(A)是 A 的幂集，$\subseteq$ 是集合上的包含关系，问此偏序集< P(A), $\subseteq$ >是否是一个格？

（3）考虑偏序集< S_n, D >，其中 D 是一个整除关系，S_n 是 n 的所有

因子的集合，问此偏序集$< S_n, D >$是否是一个格？

例 2：判断哈斯图如下图所示的几个偏序集是否是格。



定义 2： 设$\langle S, *, \circ\rangle$是具有两个二元运算的代数系统，如果运算$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律，则称$\langle S, *, \circ\rangle$为格。

把由代数系统定义的格称为代数格。

例 3： 设 A 是一个集合，$\mathcal{P}(A)$是 A 的幂集，$\cap$和$\cup$分别是集合的交和并运算，试证明代数系统$\langle \mathcal{P}(A), \cap, \cup\rangle$是一个格。

定理 1: 偏序格与代数格是等价的。

注意： 偏序格与代数格等价，今后就不再区分偏序格与代数格了，而把它们统称为格。

对于集合 L 的任何偏序关系“$\leqslant$”，其逆关系“$\geqslant$”也是集合 L 上的偏序关系；

对 L 的任意子集 T, T 在偏序集$\langle L, \leqslant\rangle$中的最大下界和最小上界分别是$\langle L, \geqslant\rangle$中的最小上界和最大下界。

因此偏序集$\langle L, \leqslant\rangle$是格当且仅当$\langle L, \geqslant\rangle$是格，我们称此两个格为对偶格；

格$\langle L, \leqslant\rangle$的保联运算与保交运算分别是对偶格$\langle L, \geqslant\rangle$的保交运算和保联运算。

对于格$\langle L, \leqslant\rangle$的任何命题，将保联运算与保交运算分别换成

对偶格<L, ≽>的保交运算和保联运算，将命题中的“≼”换成对偶格<L, ≽>中的“≽”，得到的一个关于对偶格<L, ≽>中的命题，称这个命题为对偶命题。

容易证明，关于格<L, ≼ >的任何真命题，其对应的对偶命题在对偶格<L, ≽>中也是真命题，把这个原理称为对偶原理。

性质： 设<L, ≼ >是格，“≽”是“≼”的逆关系。则对任意 $a, b, c, d \in L$，有

（1）自反性：$a \preccurlyeq a$；　$a \succcurlyeq a$。

（2）反对称性：$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$；

$a \succcurlyeq b$ 且 $b \succcurlyeq a \Rightarrow a = b$。

（3）传递性：$a \preccurlyeq b$ 且 $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$；

$a \succcurlyeq b$ 且 $b \succcurlyeq c \Rightarrow a \succcurlyeq c$。

（4）$a \wedge b \preccurlyeq a$；　$a \vee b \succcurlyeq a$；

$a \wedge b \preccurlyeq b$；　$a \vee b \succcurlyeq b$。

（5）$c \preccurlyeq a$ 且 $c \preccurlyeq b \Rightarrow c \preccurlyeq a \wedge b$；

$c \succcurlyeq a$ 且 $c \succcurlyeq b \Rightarrow c \succcurlyeq a \vee b$。

（6）交换律：$a \wedge b = b \wedge a$；　$a \vee b = b \vee a$。

（7）结合律：$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$；

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$。

（8）吸收律：$a \wedge (a \vee b) = a$；

$$a \vee (a \wedge b) = a。$$

（9）幂等律：$a \wedge a = a$；$a \vee a = a$。

（10）$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$。

（11）$a \leqslant b$ 且 $c \leqslant d \Rightarrow a \wedge c \leqslant b \wedge d$；

$a \leqslant b$ 且 $c \leqslant \mathrm{d} \Rightarrow a \vee c \leqslant b \vee d$。

（12）保序性：$a \leqslant b \Rightarrow a \wedge c \leqslant b \wedge c$； $a \leqslant b \Rightarrow a \vee c \leqslant b \vee c$。

（13）分配不等式：

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c);$$

$$a \wedge (b \vee c) \geqslant (a \wedge b) \vee (a \wedge c)。$$

（14）模不等式：

$$a \leqslant c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge \mathrm{c}。$$

定义 3： 设$<L, *, \circ>$是一个格，如果对任意 $a, b, c \in L$，都有

$$a*(b \circ c) = (a*b) \circ (a*c) \quad ,$$

$$a \circ (b*c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

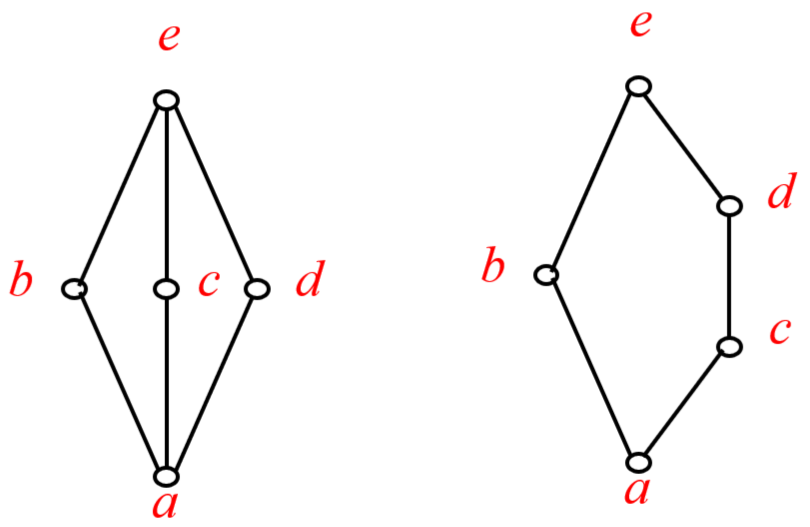
即运算满足分配律，则称$<L, *, \circ>$是一个分配格。

例 4：（1）设 A 为任意一个集合，格$<P(A), \cap, \cup>$是否是分配格？

（2）设 P 为命题公式集合，$\wedge$与$\vee$分别是命题公式的合取与析取运算，格$<P, \wedge, \vee>$是否是分配格？

定理 2： 所有链都是分配格。

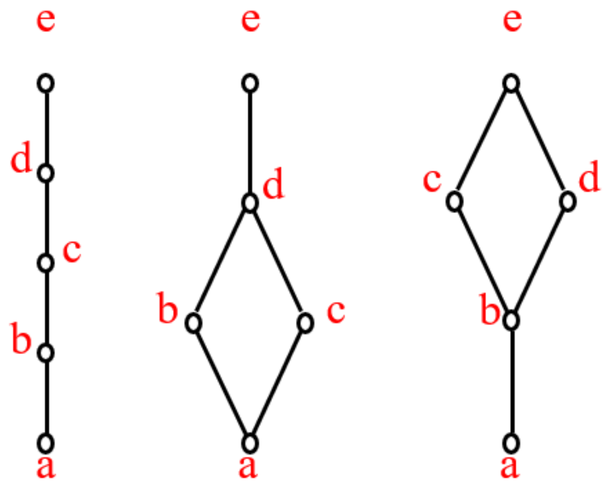
例 5： 说明下图所示的两个格都不是分配格。



(a) (b)

例 6：（1）四个元素以下的格都是分配格；

（2）五个元素的格仅有两个格是非分配格(例 5 (a)和(b))，其余三个格(下图 (c), (d)和(e))都是分配格。



(c) (d) (e)

定理 3: 设$<L, *, \circ>$是分配格，对于任何 $a, x, y \in L$，如果 $a*x = a*y$ 且 $a \circ x = a \circ y$，则 $x = y$。

定义 4: 设$<L, \leqslant>$是一个格，若存在元素 $a \in L$，使得对任意 $x \in L$，都有：

$$a \leqslant x \ (或\ x \leqslant a),$$

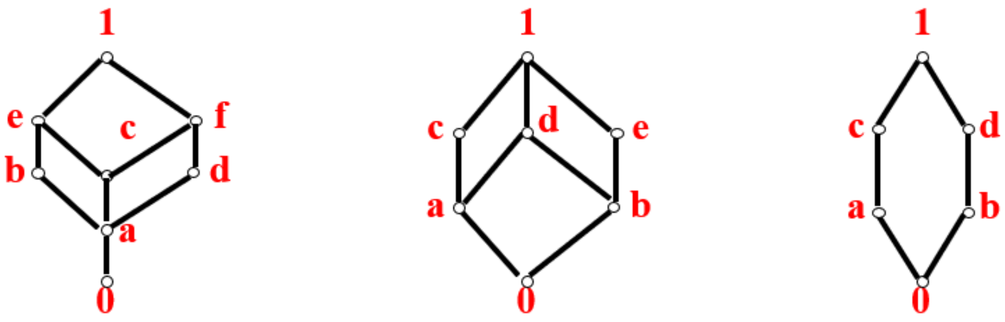
则称 a 为格$<L, \leqslant>$的全下界(或全上界)，分别记 0 (或 1)，具有全上界和全下界的格称为有界格。

显然，对任意 $x \in L$，有

$$1 \wedge x = x \wedge 1 = x\ (幺元),\ 1 \vee x = x \vee 1 = 1\ (零元);$$

$$0 \wedge x = x \wedge 0 = 0\ (零元),\ 0 \vee x = x \vee 0 = x\ (幺元)。$$

例如下三个都是有界格。



(a) (b) (c)

在格$<L, \leqslant>$中，全下界和全上界分别是集合 L 的最小元和最大元，由于最大元和最小元的唯一性，有下面的定理：

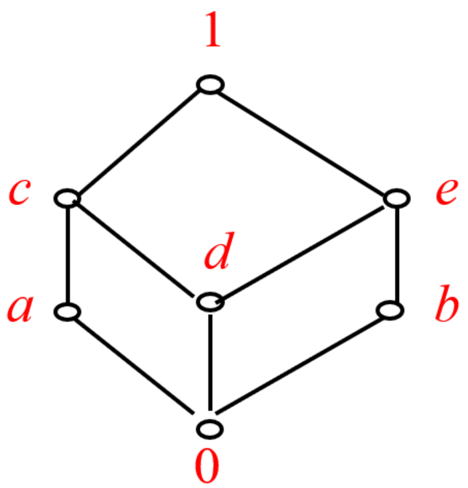
定理 4: 设$<L, \leqslant>$是一个格，若格$<L, \leqslant>$的全上界和全下界存在，则必唯一。

定义 5: 设$<L, \wedge, \vee>$为有界格，1 和 0 分别为它的全上界和全下界，$a \in L$。如果存在 $b \in L$，使得

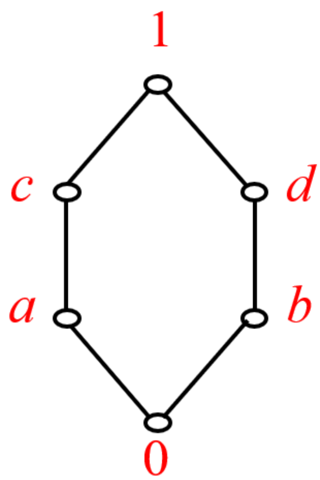
$$a \wedge b = 0, \quad a \vee b = 1,$$

则称 b 为 a 的补元，记为 a'。若有界格$<L, \wedge, \vee>$中的所有元素都存在补元，则称$<L, \wedge, \vee>$为有补格。

例 7: 如下图有界格，求其所有元素的补元(如果有的话)。



(a)



(b)

定理 5: 在有界分配格（既是有界格又是分配格，简称为有界分配格）

$<L, \wedge, \vee>$中，如元素 $a \in L$ 有补元存在，则此元素的补元必唯一。

推论： 在有补分配格(既是有补格又是分配格，简称为有补分配格) $<L, \wedge, \vee>$中，每个元素都存在唯一的补元。

定义 6： 称有补分配格$<L, \wedge, \vee>$为布尔格。

③ 布尔代数

在有补分配格中，每个元都有补元，而且补元唯一。可以将求元素的补元作为一种一元运算，则此布尔格$<L, \wedge, \vee>$可记为

$$<L, \wedge, \vee, ', 0, 1>。$$

此时，称$<L, \wedge, \vee, ', 0, 1>$为布尔代数。因此有：

定义 7： 一个布尔格$<L, \wedge, \vee>$称为布尔代数。若一个布尔代数的元素个数是有限的，则称此布尔代数为有限布尔代数，否则称为无限布尔代数。

布尔代数是有补分配格。有补分配格$<L, \wedge, \vee>$必须满足它是格、有全上界和全下界、分配律成立、每个元素都有补元存在。显然，全上界 1 和全下界 0 可以用下面的同一律来描述：

同一律：在 L 中存在两个元素 0 和 1，使得对任意 $a \in L$，有

$$a \wedge 1 = a，a \vee 0 = a。$$

补元的存在可以用下面的互补律来描述。

互补律：对任意 a∈L，存在a'∈L，使得

$$a \wedge a' = 0，a \vee a' = 1。$$

格可以用交换律、结合律、吸收律来描述。

因此，一个有补分配格就必须满足交换律、结合律、吸收律、分配律、同一律、互补律。

另外，可以证明，由交换律、分配律、同一律、互补律可以得到结合律、吸收律。所以布尔代数有下面的等价定义：

定义 8： 设$< B, *, \circ >$是代数系统，其中$*$，$\circ$是 B 中的二元运算，如果对任意 a, b, c∈B，满足

（1）交换律： $a*b = b*a$，$a\circ b = b\circ a$;

（2）分配律： $a\circ(b*c) = (a\circ b) * (a\circ c)$,

$$a* (b\circ c) = (a*b)\circ(a*c);$$

（3）同一律：在 B 中存在两个元素 0 和 1，使得对任意 a∈B，有

$$a*1 = a，a\circ 0 = a;$$

（4）互补律：对任意 a∈B，存在a'∈B，使得

$$a*a' = 0，a\circ a' = 1。$$

则称$< B, *, \circ>$为布尔代数。通常将布尔代数$< B, *, \circ>$记为

$$< B, *, \circ, ', 0, 1 >。$$

为方便起见，也简称 B 是布尔代数。