第九章习题解答

补充习题

1. 证明正交矩阵的实特征值为± 1.

证明. 设正交矩阵 A 的特征值为λ, 对应的特征向量为α, 由正交矩阵的性质, $(A\alpha, A\alpha) = (\lambda\alpha, \lambda\alpha) = (\alpha, \alpha)$, 则

$\lambda^2(\alpha, \alpha) = (\alpha, \alpha)$,因$\alpha \neq 0$, $(\alpha, \alpha)>0$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$.

2. 证明奇数维欧式空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值.

证明. 设旋转变换在$2k+1$维欧式空间的一标准正交基下的矩阵为 A, $|A| = 1$. 则

$$|E-A| = \left|A^TA-A\right| = \left|A^T-E\right||A| = (-1)^{2k+1}\left|E-A^T\right||A|$$

$$= -\left|(E-A)^T\right| = -|E-A|,$$

故$|E-A|=0, 1$ 是 A 的一个特征值.

3.证明第二类正交变换一定以-1 作为它的一个特征值.

证明. 设一第二类正交变换在一标准正交基下的矩阵为 A $|A|=-1$. 则

$$|-E-A| = \left|-A^TA-A\right| = \left|-A^T-E\right||A| = \left|-A^T-E\right||A|$$

$= \left|E-A^T\right||A| = -|-E-A|$, 故$|-E-A|=0$, -1 是 A 的一个特征值.

附加(书上12题). 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$是n维欧氏空间的一组向量，

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_r)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\alpha_r,\alpha_1) & (\alpha_r,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_r,\alpha_r)\end{pmatrix}$$

则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关当且仅当$|\Delta|\neq 0$.

证明. 必要性. 若$|\Delta|=0$, Δ的行向量线性相关，不妨设Δ的第l行可由其他行线性表示，则

$$(\alpha_l,\alpha_j)=k_1(\alpha_1,\alpha_j)+\cdots+k_{l-1}(\alpha_{l-1},\alpha_j)+k_{l+1}(\alpha_{l+1},\alpha_j)$$
$$+\cdots+k_r(\alpha_r,\alpha_j),\qquad (j=1,2,\ldots,r)$$

即有

$$(\alpha_l - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{l-1}\alpha_{l-1} - k_{l+1}\alpha_{l+1} - \cdots - k_r\alpha_r, \alpha_j) = 0$$

及 $(\beta, \beta) = 0$, 其中

$$\beta = \alpha_l - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{l-1}\alpha_{l-1} - k_{l+1}\alpha_{l+1} - \cdots - k_r\alpha_r.$$

故, $\alpha_l - k_1\alpha_1 - \cdots - k_{l-1}\alpha_{l-1} - k_{l+1}\alpha_{l+1} - \cdots - k_r\alpha_r = 0$

这与$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性无关矛盾.

充分性. 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$线性相关, 将上面的证明逆推回去, 就有$\Delta$的行向量线性相关, $|\Delta| = 0$, 矛盾.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$是n维欧式空间V中两个向量组，证明存在一正交变换$\mathcal{A}$，使

$$\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i,\qquad i=1,2,\dots,\mathrm{m}$$

的充分必要条件是：$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),i,j=1,2,\dots,m.$

证明.必要性显然，现证充分性.

设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$的一个极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$(为方便，不妨设前$r$个线性无关)，由$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$确定的度量矩阵

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \dots & (\alpha_1,\alpha_r)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\alpha_r,\alpha_1) & (\alpha_r,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_r,\alpha_r)\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵.

即$|\Delta| \neq 0$. 由$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j), i,j=1,2,\ldots,r$, 知

$$\Delta_1=\begin{pmatrix} (\beta_1,\beta_1) & (\beta_1,\beta_2) & \cdots & (\beta_1,\beta_r) \\ (\beta_2,\beta_1) & (\beta_2,\beta_2) & \cdots & (\beta_2,\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\beta_r,\beta_1) & (\beta_r,\beta_2) & \cdots & (\beta_r,\beta_r) \end{pmatrix}=\Delta$$

的行列式也不为零，故$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$也是$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的极大线性无关组. 对于其余的$m-r$个向量$\alpha_l(l>r)$,可写成

$\alpha_l=x_1\alpha_1+x_1\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r$, 同样, β_l可写成

$\beta_l=y_1\beta_1+y_1\beta_2+\cdots+y_r\beta_r$, 由于$(\alpha_l,\alpha_j)(j=1,2,\ldots,r)$

可用坐标表示为:

$(x_1, x_2, \dots, x_r)\Delta(0, \dots, 1, \dots 0)^T$ (1位于第j个位置)，同样，

$(\beta_l, \beta_j)(j = 1, 2, \dots, r)$也可用坐标表示为：

$(y_1, y_2, \dots, y_r)\,\Delta(0, \dots, 1, \dots 0)^T$,

因$(\alpha_l, \alpha_j) = (\beta_l, \beta_j)$, $(x_1, x_2, \dots, x_r)\Delta(0, \dots, 1, \dots 0)^T =$

$(y_1, y_2, \dots, y_r)\,\Delta(0, \dots, 1, \dots 0)^T \ \ (j = 1, 2, \dots, r)$,

由Δ的可逆性．可推得: $x_i = y_i (i = 1, 2, \dots, r)$.　(*)

将 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 单位正交化，得到单位正交向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$. 由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$到$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$的过渡矩阵是一上三角矩阵，设为$T$，即$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)T$. 令

$(\epsilon_1, \epsilon, \dots, \epsilon_r) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)T$，由$\left(\alpha_i, \alpha_j\right) = \left(\beta_i, \beta_j\right), i, j = 1, 2, \dots, m$, 可知$\epsilon_1, \epsilon, \dots, \epsilon_r$也是单位正交向量组.分别将$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$， $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ 扩充成V的两个标准正交基: $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n$与$\epsilon_1, \dots, \epsilon_r, \dots, \epsilon_n$. 由§7.3 知存在线性变换 $\mathcal{A}$, 使$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = \epsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 因 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n$ 与$\epsilon_1, \dots, \epsilon_r, \dots, \epsilon_n$都是标准正交基, 可推得$\mathcal{A}$保持内积, 因而是正交变换. 注意到

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r)=\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_r)T^{-1}$$

$$=(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_r)T^{-1}=(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_r)T^{-1}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r).$$

即有$\mathcal{A}(\alpha_i)=\beta_i(i=1,2,\dots,r)$. 对于其余的$\alpha_l$，$r<l\le m$，由(*)式及上面的讨论知：$\mathcal{A}(\alpha_l)=\beta_l(r<l\le m)$.

6.设A是n阶实对称矩阵，且$A^2=E$，证明存在正交矩阵T使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}$.

证明. 由定理 7，存在正交矩阵T使得 $T^{-1}AT$为对角矩阵，其对角线上元素为A的特征值. 因A的最小多项式为$\lambda^2=1$,

A的特征值为± 1，设A的特征值 1 的个数为r，则

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

7. 设$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$是一实二次型，$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$是$A$的特征多项式的根，且$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$. 证明对任一$X \in \mathrm{R}^n$，有： $\lambda_1 X^T X \le X^T AX \le \lambda_n X^T X.$

证明. 由书中定理 8，存在正交矩阵T，在变量代换$X = TY$，

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y^T T^{-1} ATY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$

因$(y_1, y, \dots, y_n)^T$是实向量，显然有：

$$\lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.) \le \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \le$$

$$\lambda_n(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)，即$$

$\lambda_1 Y^T Y \le Y^T T^{-1} ATY \le \lambda_n Y^T Y$，令$Y = T^{-1}X$即得结论.

8.设二次型$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$的矩阵为A，λ是A的特征多项式的根，证明$\mathbf{R}^n$中存在非零向量$(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)^T$使得

$$f(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)=\lambda(x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2).$$

证明. 因λ是A的特征根，$\mathbf{R}^n$中存在非零向量$X'=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)^T$使得$AX'=\lambda X'$. 则 $X'^TAX'=\lambda X'^TX$. 得到结论.

9. 1)设α,β是欧氏空间中两个不同的单位向量，证明存在一镜面反射$\mathcal{A}$使$\mathcal{A}(\alpha)=\beta$;

2)证明欧氏空间中任一正交变换可表成一系列镜面反射之积.

证明. 1)记 n维欧氏空间为 V. 当η为 V 的单位向量时,由

$\mathcal{A}(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$所确定的正交变换$\mathcal{A}$是一个镜面反射.

记 $\beta=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$, 直接验证知 $(\beta,\beta)=1$. 则 $\alpha-\beta=2(\eta,\alpha)\eta$, 因 α,β 是不同的单位向量, $(\eta,\alpha)\neq 0$, 解得 $\eta=\frac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)}$. 代入$(\eta,\alpha)$,有

$$(\eta,\alpha)=\left(\frac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)},\alpha\right)=\frac{1}{2(\eta,\alpha)}(1-(\beta,\alpha)),\ \text{即有}$$

$$2(\eta,\alpha)^2=1-(\beta,\alpha)$$

$$(\eta,\alpha)=\sqrt{\frac{1-(\beta,\alpha)}{2}},\ \eta=\frac{\alpha-\beta}{2(\eta,\alpha)}=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2(1-(\beta,\alpha))}}.$$

因此只要取$\eta=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2(1-(\beta,\alpha))}}$, 就有 $(\eta,\eta)=1$, 及$\mathcal{A}(\alpha)=\beta$.

注. 镜面反射$\mathcal{A}$在 V 的一标准正交基下的矩阵为

$$D = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1). \qquad (*)$$

事实上，令$\eta = \varepsilon_1$为单位向量，将ε_1扩充为 V 的一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. 则$\mathcal{A}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - 2(\varepsilon_1, \varepsilon_1)\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$,

$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i - 2(\varepsilon_i, \varepsilon_1)\varepsilon_i = \varepsilon_i, (i = 2, \dots, n)$. 立得结论.

(*)式也常称为镜面反射的标准形.

2) 设$\mathcal{A}$是n维欧氏空间 V 中任一正交变换. 我们用归纳法来证明这一结论，$n = 1$时，$\mathcal{A} = \pm 1$. 若$\mathcal{A} = -1$，$\mathcal{A}$即为镜面反射；若$\mathcal{A} = 1$，$\mathcal{A} = (-1)(-1)$，结论成立.

假设结论对$n-1$成立，现考虑n的情形.

取 V 的一标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$，不妨设$\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\eta\neq\varepsilon_1$(若$\mathcal{A}(\varepsilon_i)=\varepsilon_i, i=1,2,\dots,n$，即$\mathcal{A}=\mathcal{E}$，则$\mathcal{A}=\mathcal{D}\mathcal{D}$). 因$\eta$亦为单位向量，由 1)知存在镜面反射$\mathcal{S}_1$使得$\mathcal{S}_1(\eta)=\varepsilon_1$，则$\mathcal{S}_1\mathcal{A}(\varepsilon_1)=\varepsilon_1$.$\mathrm{L}(\varepsilon_1)$为$\mathcal{S}_1\mathcal{A}$ −子空间，$\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp}=\mathrm{L}(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$也是$\mathcal{S}_1\mathcal{A}$ −子空间. $\mathcal{S}_1\mathcal{A}|_{\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp}}$仍是欧式空间$\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp}$上的正交变换，$\dim(\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp})=n-1$. 由归纳假设，存在有限个$\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp}$上的镜面反射$s_2,\dots,s_m$使得$\mathcal{S}_1\mathcal{A}|_{\mathrm{L}(\varepsilon_1)^{\perp}}=s_2,\dots,s_m$.令$\mathcal{S}_i=1\oplus s_i$，$\mathcal{S}_i$是V上的镜面反射,$i=2,\dots,m$.则$\mathcal{S}_1\mathcal{A}=\mathcal{S}_2\dots\mathcal{S}_m$，$\mathcal{A}=\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\dots\mathcal{S}_m\left(\mathcal{S}_1^{-1}=\mathcal{S}_1\right)$.

10. 设A,B是两个n阶实对称矩阵，且B是正定的，证明存n

阶可逆矩阵T使$T^T\text{AT},T^TBT$同时为对角矩阵.

证明. 因B是正定矩阵，存在n阶可逆矩阵P使得$P^TBP=E$.

此时，P^TAP仍是实对称矩阵，存在n阶正交矩阵Q使得

Q^TP^TAPQ为对角矩阵，同时，$Q^TP^TBPQ=Q^TEQ=$

$Q^{-1}EQ=E$.

11.证明酉空间V中两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

证明. n阶方阵A称为酉矩阵，若A满足：$\overline{A}^T A = E$，其中“—表示复数的共轭. 令$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$，$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$是V中两组标准正交基，$A$是这两组基的过渡矩阵，即

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A.$$

上式右边的列向量为$\alpha_k = a_{1k}\varepsilon_1 + a_{2k}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nk}\varepsilon_n (k = 1, 2, \ldots, n)$. 则

$$\overline{a_{1k}}a_{1i} + \overline{a_{2k}}a_{2i} + \cdots + \overline{a_{nk}}a_{ni} =$$

$$(a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n, a_{1k}\varepsilon_1 + a_{2k}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nk}\varepsilon_n) =$$

$\begin{cases}1, & k=i\\0, & k\neq i\end{cases}$ (这一内积等于等式左边的内积(ϵ_i,ϵ_k)).这意味

$\overline{A}^T A = E$, A是酉矩阵.

12. 证明酉矩阵特征值的模为 1.

证明. 设U为酉矩阵, λ是它的任一特征值, X为属于λ的特征向量, 则有: $UX=\lambda X$, 两边转置并取共轭: $\overline{X^T U^T}=\bar{\lambda}\overline{X^T}$,

$\overline{X^T U^T}UX=\bar{\lambda}\overline{X^T}UX=\bar{\lambda}\overline{X^T}\lambda X=\lambda\bar{\lambda}\overline{X^T}X$, 而等式左边为$\overline{X^T}X$.

即: $\overline{X^T}X=\lambda\bar{\lambda}\overline{X^T}X$, 因$X\neq 0$, $\overline{X^T}X$为一正实数, $\lambda\bar{\lambda}=1$.

11. 1) 证明欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的;

2) 利用上述结果证明: 任一欧式空间都存在标准正交基.

证明. 1)设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$, $\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n$是欧式V中两组不同的基基, $A=\left(a_{ij}\right), B=(b_{ij})$分别是这两组基的度量矩阵, P为两组基的过渡矩阵, 即$\left(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n\right)=\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n\right)P$.

任取$\alpha,\beta\in V$, 他们在这两组基下的坐标分别记为:

$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T, Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$, 与

$X'=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)^T, Y'=(y'_1,y'_2,\dots,y'_n)^T$.

则$(\alpha,\beta)=X^TAY=X'^TP^TAP\,Y'$,另一方面,$(\alpha,\beta)=X'^TBY'$.

我们来考察矩阵P^TAP与B的$(i,j)-$位置的元素:

由度量矩阵B的定义,

$$\left(\epsilon_i,\epsilon_j\right)=b_{ij}=(0,\ldots 1,\ldots,0)B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \text{同时}$$

$$\left(\epsilon_i,\epsilon_j\right)=(0,\ldots 1,\ldots,0)P^TAP\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ik}a_{kl}p_{lj}$$

故$B=P^TAP$.

2) 证明略.

13. 证明上三角正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上元素为 ± 1.

证明. 设

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为正交矩阵，由$T^T T = E$得: ${a_{11}}^2 = 1, a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0.$

继而，${a_{22}}^2 = 1,\ a_{22} = \cdots = a_{2n} = 0, \ldots,\ {a_{nn}}^2 = 1.$

15. 设η是欧式空间中一单位向量，定义

$$\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha,\eta)\eta$$

证明：1) $\mathcal{A}$是正交变换, 2) $\mathcal{A}$是第二类的,

3)如果n维欧式空间中，正交变换$\mathcal{A}$以1作为一特征值，且属于特征值1的特征子空间V_1的维数为$\mathrm{n}-1$，那么$\mathcal{A}$是镜面反射.

证明. 1)令α,β是欧氏空间中任意两个向量,

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta) = (\alpha - 2(\alpha,\eta)\eta, \beta - 2(\beta,\eta)\eta) =$$

$$(\alpha,\beta) - 4(\alpha,\eta)(\beta,\eta) + 4(\alpha,\eta)(\beta,\eta)(\eta,\eta) = (\alpha,\beta)$$

$\mathcal{A}$保持内积，故为正交变换.

2)令$\eta=\varepsilon_1$，并扩充成为空间的一组标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$.

则$\mathcal{A}\varepsilon_1=-\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i(i=2,\dots,n)$．这样，$\mathcal{A}$在该基下的矩阵为$\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$，行列式为$-1$，$\mathcal{A}$是第二类的.

3)在$\mathcal{A}$以1为特征值的特征子空间V_1中取一标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1}$,($V_1$的维数为$\mathrm{n}-1$)，并扩充成$\mathrm{R}^n$的一标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n$．注意到$\mathrm{L}(\varepsilon_n)=\mathrm{L}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1})^{\perp}$，$\mathrm{L}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1})$是$\mathcal{A}-$子空间，则$\mathrm{L}(\varepsilon_n)$亦然．故$\mathcal{A}\varepsilon_n=k\varepsilon_n$，因$\varepsilon_n$是单位向量，必有$k=-1$．$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n$下的矩阵为$\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1)$．定义$\mathrm{R}^n$上的

变换$\mathcal{B}$：$\mathcal{B}\alpha = \alpha - 2(\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n$，$\forall \alpha \in \mathrm{R}^n$. 由 1)知$\mathcal{B}$为正交变换，且$\mathcal{B}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n$下的矩阵为$\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$，故$\mathcal{B} = \mathcal{A}$，即$\mathcal{A}$为镜面反射.

16. 证明反对称实矩阵的特征值为零或纯虚数.

证明. 设S是反对称实矩阵，λ是S的一特征值，X是属于λ的特征向量. 则 $SX = \lambda X$，两边取共轭转置：$\overline{X}^T\overline{S}^T = \bar{\lambda}\overline{X}^T$，

有：$-\overline{X}^T S = \bar{\lambda}\overline{X}^T$，$-\overline{X}^T SX = \bar{\lambda}\overline{X}^T X$，

$-\lambda\overline{X}^T X = \bar{\lambda}\overline{X}^T X \Rightarrow (\bar{\lambda} + \lambda)\overline{X}^T X = 0$，因$\overline{X}^T X > 0$，$\bar{\lambda} + \lambda = 0$，

得$\lambda = 0$或为纯虚数.

20. 设A是n阶实矩阵，证明：存在正交矩阵T使$T^{-1}AT$为上三角矩阵的充要条件是A的特征多项式的根全是实数.

证明. " ⇒ " $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，因$A,T$都是实矩阵，等式右边的上三角矩阵对角线上元素全为实数，且它的特征根就是$a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$. 相似矩阵的特征值相同，故，$A$的特征多项式的根全是实数.

“⇐ " 用归纳法证明. $\mathbf{n}=1$，结论显然成立. 假设结论对$\mathbf{n}-1$成立，现考虑n的情形.

设λ_1为A的一特征值，X为属于λ_1的特征向量，把X单位化，记为α_1(仍有$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$)，并将$\alpha_1$扩充成一标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. 则

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_n)=$$

$$(\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2,\dots,A\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ & A_1\end{pmatrix},$$

其中A_1为$\mathrm{n}-1$阶实矩阵. 进而($(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$是正交矩阵),

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ & A_1\end{pmatrix},$$

由归纳假设，存在$\mathrm{n}-1$阶正交矩阵Q使得$Q^{-1}A_1Q$为$\mathrm{n}-1$阶上三角矩阵. 令$P=\begin{pmatrix}1 & \\ & Q\end{pmatrix}$, P为n阶正交矩阵，且

$P^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P$为上三角矩阵.

23. 证明：如果$\mathcal{A}$是欧式空间V的一个正交变换，那么$\mathcal{A}$的不变子空间的正交补也是$\mathcal{A}$的不变子空间.

证明. 设$\mathbf{V}=\mathbf{U}\oplus\mathbf{U}^{\perp}$，$\mathbf{U}$是正交变换$\mathcal{A}$的不变子空间. 任取$\alpha\in\mathbf{U}$，因$\mathcal{A}$是可逆映射，且$\mathbf{U}$是$\mathcal{A}$的不变子空间，$\mathcal{A}\mathbf{U}=\mathbf{U}$，$\alpha$可写成$\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{U}$. 则$\mathcal{A}^{-1}\alpha=\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{U}$，即$\mathbf{U}$也是$\mathcal{A}^{-1}-$子空间. 对于$\mathbf{U}^{\perp}$中任一元素$\gamma$，$(\mathbf{U},\mathcal{A}\gamma)=(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{U},\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\gamma)=(\mathbf{U},\gamma)=0$，即$\mathcal{A}\gamma\in\mathbf{U}^{\perp}$. $\mathbf{U}^{\perp}$是$\mathcal{A}-$子空间.

25. 证明：向量$\boldsymbol{\beta}\in V_1$是向量$\alpha$在子空间$V_1$上的内射影的充要条件是，对任意的$\xi\in V_1$，$|\alpha-\boldsymbol{\beta}|\le|\alpha-\xi|$.

证 明． “ $\Rightarrow$ "． $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$， $\boldsymbol{\gamma}\in \boldsymbol{V_1}^{\perp}$． 对 任 意 的 $\boldsymbol{\xi}\in \boldsymbol{V_1}$，

$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\gamma}$.

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi})=\big((\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\gamma},(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{\gamma}\big)=$$

$$(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})\geq(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$$

(注: $(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\gamma})=0$)，即$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\leq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}|$.

“$\Leftarrow$ "现设$\boldsymbol{\beta}'$为$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{V_1}$上的内射影，由必要性证明与所给条件，应有:$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\leq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}'|$与$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}'|\leq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$，则$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}'|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$．因$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\gamma}\in \boldsymbol{V_1}^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\gamma}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$．则(注：$\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{V_1}$, $(\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0$)

$(\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})$.

推出: $(\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta})=0\Rightarrow\boldsymbol{\beta}'-\boldsymbol{\beta}=0,\boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}$.

26. 设V_1,V_2是欧式空间的两个子空间，证明:

$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明: 1)若$\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则 $\alpha\perp V_1,\alpha\perp V_2\Rightarrow\alpha\perp(V_1+V_2)$,

故$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$. 反之，若$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$, $\alpha\perp V_1,\alpha\perp V_2$

$\Rightarrow\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 所以，$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

2) 若$\alpha\in V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. $\alpha_i\in V_i^{\perp},i=1,2$. 易见，对任

一$\beta\in(V_1\cap V_2)$，$(\alpha,\beta)=0$，$\alpha\in(V_1\cap V_2)^{\perp}$，$V_1^{\perp}+V_2^{\perp}\sqsubseteq$

$(V_1\cap V_2)^{\perp}$. 但

$\dim(V_1^\perp + V_2^\perp) = \dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim(V_1^\perp \cap V_2^\perp) =$

$\dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp - \dim(V_1 + V_2)^\perp = 2\mathrm{n} - \dim V_1 - \dim V_2$

$-n + \dim(V_1 + V_2) = \mathrm{n} - \dim V_1 \cap V_2 = \dim(V_1 \cap V_2)^\perp,$

故$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$