应用随机过程

非均匀泊松过程应用

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

知识回顾

非均匀泊松过程的性质

01 $N(0) = 0$

02 满足独立增加特性

03 $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

04 $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$

The Multiserver Queue

Consider a service system with s identical servers. The arrivals to the system follow a nonhomogeneous Poisson process with intensity function $\lambda(t)$. The service time of each server follows an exponential distribution with parameter μ.

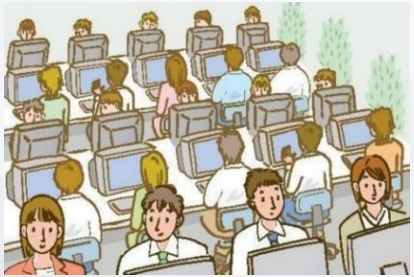
We define such system as a *M(t)/M/s* queue

Prerequisite: to address the time epoch S for the first service completion to occur, we need to review the Competing Exponential Random Variables.

问题引出

背景：假设网吧中每个人的上网时间都服从某种指数分布。那么，网吧中任何一个人完成上网离开网吧，此时网吧中的状态就发生改变。现实世界中很多服务系统与此类似。

任务：此时状态发生改变这一事件服从什么样的概率分布？



竞争型指数分布定义

竞争型指数分布

1. X_1定义为事件1的发生时刻，$X_1 \sim \exp(\mu_1)$
2. X_2定义为事件2的发生时刻， $X_2 \sim \exp(\mu_2)$

相互独立

3. X定义为任意事件先发生的时刻

$X = \min\{X_1, X_2\}$

两个事件的发生呈现一种竞争的关系

X服从什么样的概率分布？

竞争型指数分布的推导

两变量竞争

$X=\min(X_1,X_2)$的概率分布为

$$P\{X>x\}=P\{\min(X_1,X_2)>x\}$$

X_1,X_2相互独立

$$=P\{X_1>x,X_2>x\}$$

X_1,X_2服从指数分布

$$=e^{-\mu_1 x}e^{-\mu_2 x}$$

$$=e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

$$F(x)=1-P\{X>x\}=1-e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

X服从参数为$\mu_1+\mu_2$的指数分布，$X\sim\exp(\mu_1+\mu_2)$

指定某事件先发生的概率分布

- 对于两个竞争型随机变量，第一个事件先发生的概率分布如何计算

定义 $I=\begin{cases}1 & X_1<X_2\\0 & X_1\geq X_2\end{cases}$ $\longrightarrow$ $\{I=1,X>x\}\Leftrightarrow\{x<X_1<X_2\}$

$$P\{I=1,X>x\}=P\{x<X_1<X_2\}$$

$$=\iint\limits_{x<X_1<X_2}\mu_1e^{-\mu_1x_1}\mu_2e^{-\mu_2x_2}d\,x_1dx_2$$

$$=\int_x^{\infty}\mu_1\,e^{-\mu_1x_1}\int_{x_1}^{\infty}\mu_2e^{-\mu_2x_2}\,dx_2dx_1$$

$$=\int_x^{\infty}\mu_1\,e^{-\mu_1x_1}e^{-\mu_2x_1}dx_1=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

指定某事件先发生的边缘概率

- 边缘分布$P(I=1)$如何计算

$$P\{I=1, X>x\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

令x等于0

$$P\{I=1\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

第二个事件首先发生的边缘分布又是什么呢

三变量竞争的解题思路

- 推广到三个变量的竞争型指数分布

$X_1 \quad X_2 \quad X_3$

$\min(X_1, X_2) \quad X_3$

$\min(\min(X_1, X_2), X_3)$

三个变量竞争型指数分布的概率分布

三变量竞争的概率分布

三变量竞争

$X = \min(X_1, X_2, X_3)$的概率分布

$P\{X > x\} = P\{\min(X_1, X_2, X_3) > x\}$

由解题思路转化

$= P\{\min(\min(X_1, X_2), X_3) > x\}$

$\min(X_1, X_2), X_3$ 相互独立

$= P\{\min(X_1, X_2) > x, X_3 > x\}$

$\min(X_1, X_2), X_3$均服从指数分布且相互独立

$= e^{-(\mu_1+\mu_2)x} e^{-\mu_3 x} = e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$

$F(x) = 1 - P\{X > x\} = 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3))x}$

X服从参数为$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$的指数分布， $X \sim \exp(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$

三变量竞争的概率分布

- 推广到三个变量情况，某一个事件首先发生的概率分布如何计算

假设第一个事件首先发生，定义

$$Z=\min(X_2,X_3)\xrightarrow[\mu_Z=\mu_2+\mu_3]{Z\sim\exp(\mu_2+\mu_3)} I=\begin{cases}1 & X_1<Z\\ 0 & X_1\geq Z\end{cases}$$

$$\{I=1,X>x\}\Leftrightarrow\{x<X_1<Z\}$$

$$P\{I=1,X>x\}=P\{x<X_1<Z\}$$

由两变量情况得到

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_Z}e^{-(\mu_1+\mu_Z)x}$$

$\mu_Z=\mu_2+\mu_3$

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$$

三变量竞争的边缘概率分布

- 三变量边缘分布$P(I=1)$如何计算

$$P\{I=1, X>x\} = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$$

令x等于0

$$P\{I=1\} = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

第二个事件首先发生的边缘分布又是什么呢？第三个呢？

多变量的竞争型指数分布

- 推广到一般的情况

对于每一个随机变量，$X_i \sim \exp(\mu_i)$，且相互独立

$X = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$

X服从参数为$\mu_1 + \cdots + \mu_n$的指数分布

任意事件先发生的概率分布

$$I_i = \begin{cases} 1, \min\{X_1, \cdots, X_n\} = i \\ 0, 其他情况 \end{cases}$$

$$P\{I_i = 1\} = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \cdots + \mu_n}$$

指定事件先发生的边缘概率分布

竞争型指数分布的应用

竞争型指数分布在现实中的应用案例

1

高速公路收费服务

2

排队购票服务

3

理发店理发服务

Modeling for the Multiserver Queue

Let $X(t)$denote the number of customers in the system at time t and assume $X(0) = 0.$

Define $P_n(t) = P\{X(t) = n\}$

How to calculate $P_n(t)$?

Thought: to take an analogy to the derivation of Equation 2.1.1 for the Poisson process

We derive differential-difference equations characterizing $\{P_n(t)\}$.

First Service Completion

- ✓ k ($k \leq s$, s is the number of identical servers) servers are busy at the same time
- ✓ Service times are mutually independent and independent of the arrival process.

When k servers are busy simultaneously at any epoch, the time S for the first service completion to occur follows an exponential distribution with parameter kμ

$$S \sim exp(k\mu)$$

知识回顾

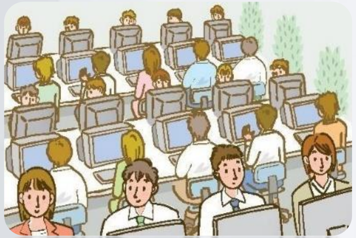
竞争型指数分布

对于每一个随机变量，$X_i \sim \exp(\mu_i)$，且相互独立

$X = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$

X服从参数为$\mu_1 + \cdots + \mu_n$的指数分布

$X \sim \exp(\mu_1 + \cdots + \mu_n)$



多服务排队系统

定义

$M(t)/M/s$ 排队系统

1. 系统有s个独立的服务器
2. 系统到达过程服从泊松过程，参数为$\lambda(t)$
3. 系统的服务时间服从参数为μ的指数分布

排队系统建模

- 定义$X(t)$为时刻t在系统中的顾客的人数，假设$X(0)=0$
- 定义 $P_n(t)=P\{X(t)=n\}$

解题思路

类比于均匀的泊松过程的推导过程

找到关于$P_n(t)$的微分形式

通过$P_n(t)$的微分形式，求解$P_n(t)$

排队系统建模

排队系统有如下等式关系

$$X(t+h) = X(t) + N(t,t+h) - S(t,t+h)$$

到达的人数 $N(t,t+h)$

t时刻在系统中服务的人数$X(t)$

完成服务人数 $S(t,t+h)$

$t+h$时刻在系统中服务的人数$X(t+h)$

系统到达离开过程概率

- 定义$N(t,t+h)$为在时间$(t,t+h]$内到达的人数

$$N(t,t+h)=N(t+h)-N(t)$$

$$\Big\downarrow \text{非均匀泊松过程性质}$$

$$P\{N(t,t+h)=1\}=\lambda(t)h+o(h)$$

$$P\{N(t,t+h)=0\}=1-\lambda(t)h+o(h)$$

- t时刻有k个服务器在工作，$S(t,t+h|k)$为$(t,t+h]$内完成服务的人数

$$P\{S(t,t+h|k)=1\}=k\mu h+o(h)$$

$$P\{S(t,t+h|k)=0\}=1-k\mu h+o(h)$$

系统中竞争性指数分布

- 要对系统人数建模，首先要知道第一个完成服务服从什么分布

$k(k \le s, s$是服务器的个数$)$个服务器同时在工作
且服务时间是相互独立的且独立于到达过程

竞争型指数分布

当k个服务器同时工作，那么第一个完成服务的服务时长S服从参数为$k\mu$的指数分布

$$S \sim \exp(k\mu)$$

系统人数的概率分布建模

- 考虑第一种情况$n=0$时

$$P_0(t+h)=P\{\mathrm{X}(t+h)=0\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t)=k,X(t+h)=0\}$$

全概率公式

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t+h)=0|X(t)=k\}P\{X(t)=k\}$$

讨论根据$X(t)$的不同的值列举可能出现的情况

$X(t)$	$N(t,t+h)$	$S(t,t+h\|k)$	$X(t+h)$	$P\{X(t)=k,X(t+h)=0\}$
0	1	-	1	
0	0	-	0	$P_0[1-\lambda(t)h+o(h)]$
1	0	1	0	$P_1(t)[1-\lambda(t)h+o(h)][\mu h+o(h)]$
1	0	0	1	

系统人数的概率分布建模

根据上表可以得出

$$P_0(t+h) = P_0\,(t)[1-\lambda(t)h+o(h)] + P_1\,(t)[1-\lambda(t)h+o(h)][\mu h+o(h)]$$

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1-\lambda(t)h] + P_1(t)\mu h + o(h)$$

两边减去$P_0(t)$

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -P_0(t)\,\lambda(t)h + P_1(t)\mu h + o(h)$$

两边除以h

$$[P_0(t+h) - P_0(t)]/h = -\lambda(t)P_0(t)\; + \mu P_1(t) + o(h)/h$$

取极限$h \to 0$

$$P_0{}'(t) = -\lambda(t)P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad \cdots(1)$$

系统人数的概率分布建模

- 考虑第二种情况$1 \le n < s$时

$$P_n(t+h) = P\{X(t+h)=n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t)=k, X(t+h)=n\}$$

全概率公式

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t+h)=n|X(t)=k\}P\{X(t)=k\}$$

讨论根据$X(t)$的不同的值列举可能出现的情况

系统人数的概率分布建模

$X(t)$	$N(t,t+h)$	$S(t,t+h\|k)$	$X(t+h)$	$P\{X(t)=k,X(t+h)=\text{n}\}$
n-1	1	1	n-1	
n-1	1	0	n	$P_{n-1}(t)[\lambda(t)h+o(h)][1-(n-1)\mu h+o(h)]$
n-1	0	1	n-2	
n-1	0	0	n-1	
n	1	1	n	$P_n(t)[\lambda(t)h+o(h)][n\mu h+o(h)]$=o(h)
n	1	0	n+1	
n	0	1	n-1	
n	0	0	n	$P_n(t)[1-\lambda(t)h+o(h)][1-n\mu h+o(h)]$
n+1	1	1	n+1	
n+1	1	0	n+2	
n+1	0	1	n	$P_{n+1}(t)[1-\lambda(t)h+o(h)][(n+1)\mu h+o(h)]$
n+1	0	0	n+1	

系统人数的概率分布建模

根据上表可以得出

$$P_n(t+h)=P_{n-1}(t)[\lambda(t)h+o(t)]+P_n(t)[1-\lambda(t)h-n\mu h+o(t)]$$

$$+P_{n+1}(t)[(n+1)\mu h+o(t)]+o(t)$$

分为两种情况讨论

$$P_n{}'(t)=\lambda(t)P_{n-1}(t)+(n+1)\mu P_{n+1}(t)-(\lambda(t)+n\mu)P_n(t)\quad 1\le n<s\qquad \cdots(2)$$

$$P_n{}'(t)=\lambda(t)P_{n-1}(t)+s\mu P_{n+1}(t)-(\lambda(t)+s\mu)P_n(t)\quad n>s\qquad \cdots(3)$$

$$P_0{}'(t)=-\lambda(t)P_0(t)+\mu P_1(t)\qquad \cdots(1)$$

系统人数的概率分布建模

- 系统内人数用微分方程(1) − (3)描述，写成矩阵形式（设$s = 3$）

$$
\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda(t) & \mu & & & \\ \lambda(t) & -(\lambda(t)+2\mu) & 2\mu & & \\ & \lambda(t) & -(\lambda(t)+3\mu) & 3\mu & \\ & & \lambda(t) & -(\lambda(t)+3\mu) & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \cdots (4)
$$

$$
\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{t}) \quad = \quad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t}) \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})
$$

Question Time

Consider the computer system for processing the service enquiry. The arrival process follows Poisson process with the intensity function $\lambda(t)$. Assume that the system has three waiting spaces and the exponential service time distribution with a rate μ. An arriving person seeing all waiting spaces occupied will leave and have no influence on the system.

Question: to obtain the probability that an arrival will be lost.

Consider a cafeteria in our university that serves lunch at noon. The cafeteria is self-service. Arrivals to the cafeteria can be modeled by Poisson process with parameter λ. Each customer's sojourn time follows a distribution function G. Once a customer finishes food selection, he joins a single waiting line leading to three cashiers. The service times at each cashier follows an exponential distribution with a rate μ.

Question: how to model the stochastic process in the cafeteria.

思考问题

自助餐厅就餐服务系统

1. 到达餐厅的顾客服从参数为λ的泊松过程
2. 每个顾客选餐逗留时间服从分布函数为G的分布
3. 顾客选好食物进入有三个收银员的收费柜台排队
4. 每个收银员的服务时间服从参数为μ的指数分布

谢谢听课

授课教师 赵毅