# 练习2（2021春）

## 一. 填空

**1.** 在$R^3$中，$\alpha_1=(2,-3,1)^T,\alpha_2=(1,4,2)^T,\alpha_3=(5,-2,4)^T$，

则$\dim\big(L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\big)=$_______. $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的基是______.

**2.** 在$R^3$中，$V_1=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2-2x_3=0\}$,

$$V_2=\{(x_1,x_2,x_3)|2x_1+x_2=0,x_1+2x_3=0\},$$

$\dim(V_1+V_2)=$_______.

**3.** 设$U=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}|a,b\in R\right\}$, U是(否)_yes____ $R^{2\times2}$的子空间，

若是，$\dim U=$_____.

**4.** 设 $U=\left\{f(x_1,x_2,\dots,x_n)|f=X^TAX是R上n个变元的二次型\right\}$,

U是(否)______ R上的线性空间，若是，$\dim U=$________.

**5.** 在$R^3$中的两组向量分别是

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ (1)

$\beta_1=(1,0,3)^T,\beta_2=(2,2,2)^T,\beta_3=(-1,1,4)^T$ (2)

$\gamma$在基(1)下的坐标为$(1,2,3)^T$. 则基(1)到基(2)的过度矩阵为

_________，$\gamma$在基(2)下的坐标为_______.

**6.** 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\dots,,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$是否是$V$的一个基_____，若$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$下的坐标为$(n,n-1,\dots,2,1)^T$，则$\gamma$在基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$下的坐标为________.

**7.** 若$3\times3$矩阵$A$的特征值为1，2，−1，$B=A^3-5A^2$. 则$B$有特征值______.

8. 令 $A$ 是一 $n\times n$ 矩阵且 $|A|\neq 0$，$\lambda$ 是 $A$ 的一特征值．则 $(2A^{*})^{3}+A^{-1}$ 必有特征值______

9. 若$4\times 4$矩阵$A$有特征值$1,-2,3$,和$-3$．则$A$的行列式等于_____; $\mathrm{tr}(A)=$______.

10. $\lambda-$矩阵$\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & 1\\ 0 & \lambda-1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{pmatrix}$的法式为______.

11. 在复数域上$n$阶方阵$A$的特征值全为 1，且只有一个线性无关的特征向量，则$A$的 Jordan 标准形为______.

12. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$的法式为

______

有理标准形为_____.

## 二. 选择题

13. 设$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,在$R^{2\times 2}$中定义一个变换$\sigma$: $A\to BA$，则(　)

(A) $\sigma$是$R^{2\times 2}$的线性变换，但不是满射;

(B) $\sigma$是$R^{2\times 2}$的线性变换，但不是单射;

(C) $\sigma$是$R^{2\times 2}$的可逆线性变换;

(D) $\sigma$不是线性变换.

14. 三维几何空间$R^{3}$的全体线性变换所成线性空间维数为(　　)

(A)3;　(B) 6;　(C) 9;　(D)27

15. 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V}), \boldsymbol{W_1}, \boldsymbol{W_2}$是的任意两个子空间，则$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1} \cap \boldsymbol{W_2})$与$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1}) \cap \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_2})$的关系是(　　)

(A)$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1}) \cap \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_2}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1} \cap \boldsymbol{W_2})$;

(B)$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1} \cap \boldsymbol{W_2}) \sqsubseteq \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1}) \cap \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_2})$;

(C)$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1} \cap \boldsymbol{W_2}) \sqsupseteq \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_1}) \cap \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{W_2})$;

(D)无法确定.

16. 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V}), \boldsymbol{W_1}, \dots, \boldsymbol{W_n}$都是$\boldsymbol{\sigma}$的一维不变子空间，且$\mathrm{V} = \boldsymbol{W_1} \oplus \boldsymbol{W_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{W_n}$，则在中存在一组基使$\boldsymbol{\sigma}$在该基下的表示矩阵为(　　)

(A)对角矩阵;　(B) 反对称矩阵;

(A)非对角上三角矩阵;　(D) 可逆矩阵.

17. 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V}), \boldsymbol{W_1}, \dots, \boldsymbol{W_s} (\boldsymbol{s} < \boldsymbol{n})$都是$\boldsymbol{\sigma}$的不变子空间，且$\mathrm{V} = \boldsymbol{W_1} \oplus \boldsymbol{W_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{W_s}$，则在中存在一组基使$\boldsymbol{\sigma}$在该基下的表示矩阵为(　　)

(A)对角矩阵;　(B)准对角矩阵;

(C)反对称矩阵;　(D) 可逆矩阵.

18. 设$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_3}$是线性空间V的一组基，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V})$,

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_1}) = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_2}) = \boldsymbol{\alpha_2} + \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_3}) = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2} + 2\boldsymbol{\alpha_3}$.

则$\mathbf{dim}(\boldsymbol{\sigma})^{-1}(\mathbf{0})$为(　　)

(A)　3;　(B) 2;　(C) 1;　(D)0

19. 设矩阵$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.已知矩阵$\boldsymbol{A}$相似于 $\boldsymbol{B}$，则$\mathbf{r}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})$

与$\mathbf{r}(\mathbf{A}-\mathbf{E})$之和为(　　)

(A) 2.　　　(B) 3.　　　(C) 4.　　　(D) 5

19.令$\lambda_1,\lambda_2$是矩阵$\boldsymbol{A}$的两个不同特征值，它们对应的两个特征向量分别是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的条件是(　　)

(A) $\lambda_1\neq 0$,　(B) $\lambda_2\neq 0$,　(C) $\lambda_1=0$, (D) $\lambda_2=0$.

20.. 令 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $A$ 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

21. 设$\mathbf{V}$是复数域上的线性空间，$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{L}(\mathbf{V})$且$\boldsymbol{\sigma\tau}=\boldsymbol{\tau\sigma}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$的特征向量完全相同；　(B) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$有有限多个公共特征向量;

(C)$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$有无限多个公共特征向量；　(D) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$未必有公共特征向量.

22. 设$\mathbf{V}$是实数域上的线性空间，$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}\in\mathbf{L}(\mathbf{V})$且$\boldsymbol{\sigma\tau}=\boldsymbol{\tau\sigma}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$的特征向量完全相同；　(B) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$有有限多个公共特征向量;

(C)$\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$有无限多个公共特征向量；　(D) $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$未必有公共特征向量.

## 三. 计算与证明题

23. 在$\boldsymbol{F}^{2\times 2}$中，求从基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵, 并分别求$\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$在上面两个基下的矩阵.

24. 在$F^4$中，令$\alpha_1=(1,2,-1,-2)^T$，$\alpha_2=(3,1,1,1)^T$，

$\alpha_3=(-1,0,1,-1)^T$，

$\beta_1=(2,5,-6,-5)^T$，$\beta_2=(1,2,-7,3)^T$，

求$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+L(\beta_1,\beta_2)$与$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一个基.

25. 在$F^2$中, $\sigma(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$是$F^2$的一个线性变换.

**(1) 求证：当$F=R$时，$R^2$中没有$\sigma$的真不变子空间；**

**(2)当$F=C$时，求出$\sigma$的所有不变子空间.**

**26. 设$V$是4维线性空间，$\varphi$在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4$下的矩阵为**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

验证：$U=L(\varepsilon_1+2\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4)$是否为$\varphi-$子空间.

27. 令$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$．求$B+2I$的特征值与所属的特征向量.

**28. 设**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是$A$的 2 重根．求可逆矩

阵$P$使得 $\Lambda = P^{-1}AP$是一对角矩阵$\Lambda$.

**29.** 证明：有理数域**Q**上的线性空间定义中八条规则的第八条：

$\boldsymbol{k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta}$ 可由其他七条推出.

**30.** 设$\boldsymbol{V_1,V_2}$是$\boldsymbol{V}$的两个子空间，求证

$$\boldsymbol{V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2 \Leftrightarrow V_1 \sqsubseteq V_2}，或\boldsymbol{V_1 \sqsupseteq V_2}.$$

31. 设$\boldsymbol{V_1,V_2}$是$\boldsymbol{n}$维线性空间$\boldsymbol{V}$的两个子空间,且满足

$$\mathrm{dim}(\boldsymbol{V_1+V_2}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{V_1 \cap V_2}) + \mathbf{1},$$

求证: $\boldsymbol{V_1 \sqsubseteq V_2}$或$\boldsymbol{V_1 \sqsupseteq V_2}$.

32. 设$\boldsymbol{A \in F^{n\times n}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}}$,

$$\boldsymbol{V_1 = \{X|A_1X = 0\}, V_2 = \{X|A_2X = 0\}}$$

求证$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow \boldsymbol{F^n = V_1 \oplus V_2}$.

**33.** 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{V})$, $A$为$\boldsymbol{\sigma}$在$\boldsymbol{V}$的一组基下的表示矩阵，求证

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{A^2}) = \boldsymbol{r(A)} \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}) \oplus \boldsymbol{\sigma^{-1}}(\mathbf{0}).$$

**34.** 设$\boldsymbol{A \in F^{n\times n}}$, 且 $\mathbf{W} = \{\boldsymbol{f(A)|f(x) \in F[x]}\}$,

求**W**的一个基和维数.

35. 设**V**是**n**维线性空间,求证**V**的r维子空间有无穷多个,其中

$\mathbf{0 < r < n}$.

36. 设$\boldsymbol{\sigma,\tau} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{V_n})$,并且$\boldsymbol{\sigma}$在数域中**F**有**n**个互异的特征根,

求证：

(1) $\boldsymbol{\sigma}$有$\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$个不变子空间,

(2) $\boldsymbol{\sigma}$的特征向量都是$\boldsymbol{\tau}$的特征向量当且仅当$\boldsymbol{\sigma\tau = \tau\sigma}$.

37. 设$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t}$是$\boldsymbol{F^n}$的两组线性无关的列向量,令

$V_1=\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_s), V_2=\mathrm{L}(\beta_1,\dots,\beta_t)$,

求证$\dim(V_1\cap V_2)$等于齐次线性方程组

$(\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t)X=0$ 的解空间维数.

38. 设$A$的特征值为0, 1, 对应的特征向量为$(1,2)^T,(2,-1)^T$, 问$A$是否为对称矩阵？求$A$的迹, 行列式与$A$.

39. 设$A,B$为n阶矩阵, 且$AB$有n个不同的特征值，证明$AB$与$BA$相似于同一个对角矩阵.

40. 设$A,B$分别为$4\times3$和$3\times4$的矩阵，满足

$$BA=\begin{pmatrix}-9&-20&-35\\2&5&7\\2&4&8\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}9a-14&0&9a-15&18a-32\\6a+2b-9&1&6a+3b-9&12a+4b-19\\-2a+2&0&-2a+3&-4a+4\\-3a+6&0&-3a+6&-6a+14\end{pmatrix}$$

求$a,b$的值.