第二章：插值法

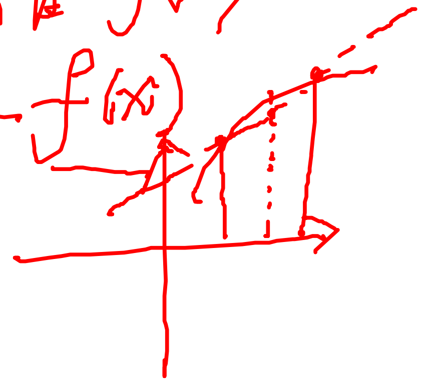
1. 问题引入: $[a,b]$ f 连续 有 $n+1$ 相异 $a=x_0<x_1 \cdots <x_n=b$

$y_i=f(x_i)$ $i=0,\cdots n$，给 $x\in[a,b]$ 估计 $f(x)$ 值

插值法：用一个便于计算 简单 $P(x)$ 去代替 $f(x)$

满足 $f(x_i)=P(x_i)$ "插值" 以 $P(x)$ 近似 $f(x)$

y_i



f 被插函数 x_i 插值点

P 插值函数 $P(x_i)=y_i$ 插值条件

P 可以多项式．三角函数．其它

2. 多项式插值与拉格朗日插值:

（一）多项式插值:

问题描述: $\mathcal{P}_n$ 表示 n 阶多项式全体 $\mathcal{P}_n=span\{1,x,\cdots,x^n\}$

找 $P_n(x)\in\mathcal{P}_n$ 使得 $P_n(x_i)=y_i=f(x_i)$ $i=0\cdots n$

（定理：存在唯一性）："存在性" $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

a_i 待定

$$\begin{cases} a_0x_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ \vdots \\ a_0x_n+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1, & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & \\ 1, & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$|A|$ 范德蒙德行列式 $|A|\neq 0$ 　解 $A^{-1}\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$P_n(x_i)=y_i$

"唯一性" $P_n(x)$，$Q_n(x)$ 都满足插值. 则令 $G_n=P_n-Q_n$

~~因为~~ x_i $G_n(x_i)=0$ 　G_n n次多项 有 n+1 个 0点

G_n 有 n 个 G_n' n-1 个 　　$G_n^{(n)}$ 有一个0点 $b_n=0$ $b_{n-1}=0$

$G_n=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ 　$G_n(x)\equiv 0$ 　$b_0=0$ $P_n\equiv Q_n$

2. 多项式插值与拉格朗日插值:

（二）拉格朗日插值:

问题描述: 对于某 $i \in [0, 1, \cdots, n]$，构造一个 n 次多项式 $l_i(x) \in P_n$ 满足 $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ $\quad j = 0 \cdots n$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

插值构造:

$$l_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) \qquad 0, \cdots i-1, i+1, \cdots n$$

$l_i(x_j) = 0 \quad j \neq i$

$l_i(x_i) = 1$

$$C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \qquad C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}} (x_i - x_j)}$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \qquad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

（定义：拉格朗日插值）:

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \delta_{ij} = f(x_j) = y_j$$

插值

$L_n(x)$ 称为拉格朗日插值多项式

$l_0 \cdots l_n$ 为节点 $x_0, \cdots x_n$ n次插值基函数

$P_n(x) \equiv L_n(x)$

2. 多项式插值与拉格朗日插值:

（二）拉格朗日插值（续）:

注意:

x_0 . x_1 x_2 $L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

插值函数l_i的其他表达:

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$$l_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\omega_{n+1}'(x_i)}$$

验证

$\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 l_i(x) = ?$

$n \geq 2$

$(x-1)^2$

性质:

$$\sum_{i=0}^{n} p(x_i) l_i(x) = p(x)$$

$\forall x \in [a,b]$. $\forall p \in P_n$

n次多项式 $p(x)$ 的 L 插值等于它自己

在只 n次多项式 的世界——满足在 x_i 上相等

特别地:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) \equiv x^k \quad 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

"多项式再生性"

2. 多项式插值与拉格朗日插值：

（三）拉格朗日插值误差估计：

（定理：误差估计）：

$f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连，$f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 存在

$a=x_0<x_1\cdots<x_n=b$，$L_n(x)$ 为节点上 L 插值多项式 则对 $\forall x\in[a,b]$ 插值误差

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\quad \xi\in[a,b]$$

证明. 若 $x=$ 某个 x_i，则 自动成立

∵ 考虑 $x\neq x_i$

$$\varphi(t)=R_n(t)-\frac{\omega_{n+1}(t)}{\omega_{n+1}(x)}R_n(x)$$ 关于 t 函数

$\varphi(t)$ 在 $x_0,x_1\cdots x_n$ 以及 x 上为 0

$$\varphi(x)=R_n(x)-\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(x)}R_n(x)=0$$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 0点 $\varphi'(t)$ 有 $n+1$ 0. $\varphi^{(n)}(t)$ 有2. $\varphi^{(n+1)}(t)$ 有一个 ξ

$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ $\quad \varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{R_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}(n+1)!$ = 结论□

2. 多项式插值与拉格朗日插值：

（三）拉格朗日插值误差估计（续）：

（推论）：令 $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$

则 $|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$

（推论）：令 $h = \max\limits_{1 \le j \le n} |x_j - x_{j-1}|$ 则

$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M_{n+1}$ （记住）

$n=1$ 时 $\frac{h^2}{8} M_2$

$n=2$ 时 $\frac{h^3}{12} M_3$

证明 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 则 $|x-x_k||x-x_{k+1}| \le \frac{1}{4}h^2$,

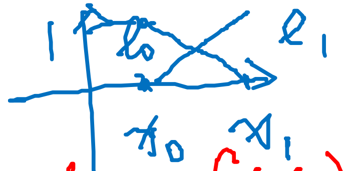
$|x - x_{k+2}| \le 2h \quad \cdots \quad |x - x_n| \le (n-k)h$

$|x - x_{k-1}| \le h \quad \cdots \quad |x - x_0| \le (k+1)h$

$|\omega_{n+1}(x)| \le \frac{1}{4}(k+1)!\,(n-k)! \cdot h^{n+1} \le \frac{n!}{4} h^{n+1}$ □

2. 多项式插值与拉格朗日插值：

（四）线性插值与抛物线插值：



$y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$

$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$

$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$

（a）线性插值（n=1）：

$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$

$R_1(x)=f(x)-L_1(x)$

$=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$ "L余项"

$|R_1(x)|\le\frac{h^2}{8}M_2$

$h=x_1-x_0$

（b）抛物线插值（n=2）：

x_0, x_1, x_2

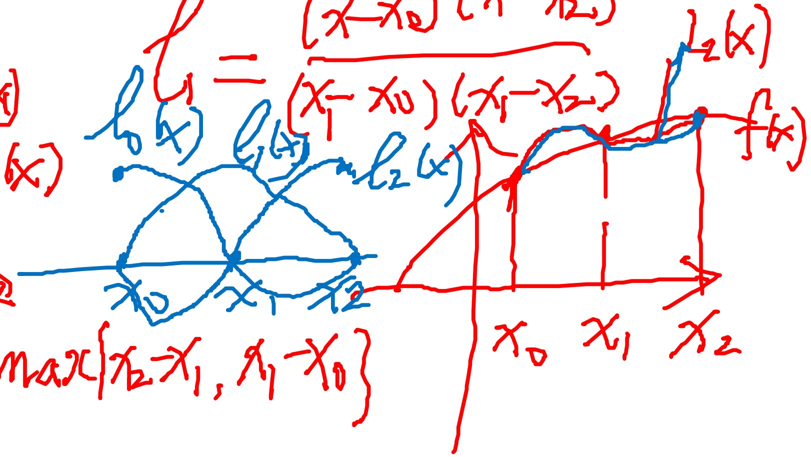
$y_0=f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$

$l_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$l_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

$l_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$



$R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$|R_2(x)|\le\frac{h^3}{12}M_3$

$h=\max\{x_2-x_1, x_1-x_0\}$

2. 多项式插值与拉格朗日插值：

（五）例题：

$\sin 0.32 = 0.314567$ $\sin(0.34) = 0.333487$

（例）：$\sin 0.36 = 0.352274$. 用线性插值估计

$\sin(0.3367)$ 并估计误差

$0.32 \quad 0.34$

0.3367

$L_1(x) = y_{0.32}\, l_0(x) + y_{0.34}\, l_1(x)$

令 $x = 0.3367$

$L_1(0.3367) = 0.330365$

$M_2 \approx 0.3335$

$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2} \left|(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)\right|$

$\le 0.92 \times 10^{-5}$

（例）：$\sum_{i=0}^{5} (x_i - x)^2 l_i(x) = 0$

$\sum_{i=0}^{5} (x_i^2 - 2x x_i + x^2) l_i(x) = \sum_{i=0}^{5} x_i^2 l_i(x) - 2x \sum_{i=0}^{5} x_i l_i(x) + x^2 \sum_{i=0}^{5} l_i$

$= x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$

$(y - x)^2$ 在 $x_0 \cdots x_5$ 上插值

$\sum_{i=0}^{5} (x_i - x)^2 l_i(x) = (x - x)^2 = 0$

P48

1.2

4.5

作业

一周一交作业

"再生性"

$$x^k - \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x) = (0)$$

$$0 \le k \le n$$

$$x^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(x) = (\omega_{n+1}(x))$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

令 $f(x) = x^{n+1}$ $\quad f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$

"余项"