M文件

（二）最佳平方逼近构造：可逆 唯一解 a_k^* $k=0,\cdots,n$, $S^* = a_0^*\varphi_0 + \cdots + a_n^*\varphi_n$ 最佳平方逼近函数

$$I(a_0,\cdots,a_n)=\int_a^b [f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)]^2 \rho(x)dx,$$ 求 $a_0,\cdots,a_n$ 使这个式子最小

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0 \quad k=0,1,\cdots,n \quad 即$$

$$2\int_a^b \left(f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)\right)\cdot\varphi_k(x)\rho(x)dx = 0$$

即

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)\rho(x)dx\right] a_j = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\rho(x)dx \quad k=0,\cdots,n$$

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j,\varphi_k)_\rho\, a_j = (f,\varphi_k)_\rho \quad k=0,\cdots,n$$

Gram

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)_\rho & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)_\rho \\ \vdots & & \\ (\varphi_n,\varphi_0)_\rho & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)_\rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0)_\rho \\ \vdots \\ (f,\varphi_n)_\rho \end{pmatrix}$$ 线性方程组

可逆 $\Leftrightarrow$ $\varphi_0,\cdots,\varphi_n$ 线性无关

3. 最佳平方逼近 $[a,b]$ $\rho(x)$ 内积 基底(线性无关)

（三）最佳平方逼近重要性质：

$(f-S^*, \varphi_k)_\rho = 0$

$k=0,\cdots,n$

(1) $(S^*, \varphi_k)_\rho = (f, \varphi_k)_\rho \quad \forall k=0,\cdots,n$

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k)_\rho a_j^* = (f, \varphi_k)_\rho$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j, \varphi_k\right)_\rho = (f, \varphi_k)_\rho$$

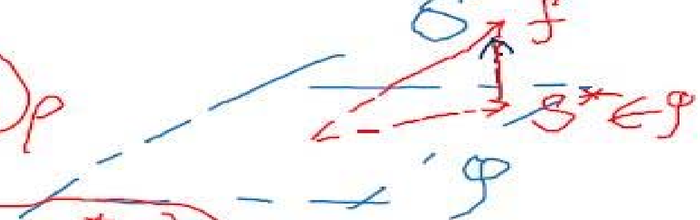
(2) $(f-S^*, S)_\rho = 0 \quad \forall S \in \varphi$

(3) $\|f-S^*\|_\rho^2 \le \|f-S\|_\rho^2 \quad \forall S \in \varphi$

$$\|f-S\|_\rho^2 = (f-S, f-S)_\rho = (f-S^*+S^*-S, f-S^*+S^*-S)_\rho$$

$$= (f-S^*, f-S^*)_\rho + 2(f-S^*, S^*-S)_\rho + (S^*-S, S^*-S)_\rho$$

$$\ge (f-S^*, f-S^*)_\rho = \|f-S^*\|_\rho^2$$



S^* 是 f 在 φ 的正交投影

(4) $\delta(x) = f(x) - S^*(x)$ $\quad \|\delta(x)\|^2 = \|f\|_\rho^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^* (\varphi_k, f)_\rho$ 误差

（四）正交函数族最佳平方逼近

令$\varphi = span\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}$为加权$\rho$正交的函数族，则最佳平方逼近简化为：

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)_\rho}{(\varphi_k, \varphi_k)_\rho} \qquad S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, \varphi_k)_\rho}{(\varphi_k, \varphi_k)_\rho} \varphi_k$$

$$\| S^* - f \|_\rho^2 = \| \delta \|_\rho^2 = \| f \|_\rho^2 - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(f, \varphi_k)_\rho}{\sqrt{(\varphi_k, \varphi_k)_\rho}} \right)^2 \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{*2} \| \varphi_k \|_\rho^2 \leq \| f \|_\rho^2 .$$ Bessel 不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(f, \varphi_k)_\rho}{(\varphi_k, \varphi_k)_\rho}}_{a_k^*} \varphi_k$$ 广义付立叶级数 a_k^* 广义一系数

（四）正交函数族最佳平方逼近：相关结果

定理： $f \in C[a,b], \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 正交多项式族，则

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - S_n^* \right\|_2 = 0$$

除了平方收敛

定理：$f \in C^2[a,b], \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 勒让德正交多项式族，则 $\forall \varepsilon > 0$,

n充分大时，$\left\| f - S_n^* \right\|_\infty \le \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

S_n^* 最佳平方逼近

（四）正交函数族最佳平方逼近：勒让德多项式

"首1"　　$\rho(x)\equiv 1$

定理：所有最高项系数为1的n次多项式中，勒让德多项式在[−1,1]与0的平方误差最小

证明：$\tilde{P}_n$ 为首1　　$\tilde{Q}_n$是任一首1 n次——

$$\|\tilde{Q}_n\|_2^2 = (\tilde{Q}_n, \tilde{Q}_n) = (\tilde{Q}_n-\tilde{P}_n+\tilde{P}_n,\ \tilde{Q}_n-\tilde{P}_n+\tilde{P}_n)$$

$$= \|\tilde{Q}_n-\tilde{P}_n\|^2 + \|\tilde{P}_n\|^2 + 2(\tilde{Q}_n-\tilde{P}_n, \tilde{P}_n) \quad 0$$

小于n次

$$\geq \|\tilde{P}_n\|_2^2$$

例：求多项式$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在[−1,1]上的最佳二次平方逼近多项式

$\rho(x)\equiv 1$

$\|f(x)-Q_2(x)\|_2^2$ 最小

$$2\left(\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}Q_2(x)\right)=2\tilde{f}(x)\qquad \tilde{f}(x)\text{首1的3次}$$

Q_2解出来　$\tilde{f}(x)=$ 除 $\tilde{P}_3$ 首1 3次 LRD多项式

（四）正交函数族最佳平方逼近：

例：求多项式$f(x)=e^x$在$[-1,1]$上的最佳三次平方逼近多项式

$$S_3^* = \sum_{k=0}^{3} \frac{(e^x, P_k(x))}{(P_k, P_k)} P_k$$

P_k k次LRD

（四）正交函数族最佳平方逼近：一般区间

一般区间$[a,b]$上的勒让德多项式（或其他正交多项式）

$[-1,1]$ $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$ $t\in[-1,1]$

$t=\frac{2x-a-b}{b-a}$

$[-1,1]\longrightarrow[a,b]$

$Q_n(x)=P_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$ P_n在$[-1,1]$上LRD

$[a,b]$

（五）切比雪夫级数

$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$[-1,1]$　T_k 切比一

$$f(x)=\frac{C_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^*T_k(x),\quad C_k^*=\frac{(f,T_k)_\rho}{(T_k,T_k)_\rho}$$

$$C_n^*(x)=\frac{C_0^*}{2}+\sum_{k=0}^{n}C_k^*T_k(x)$$

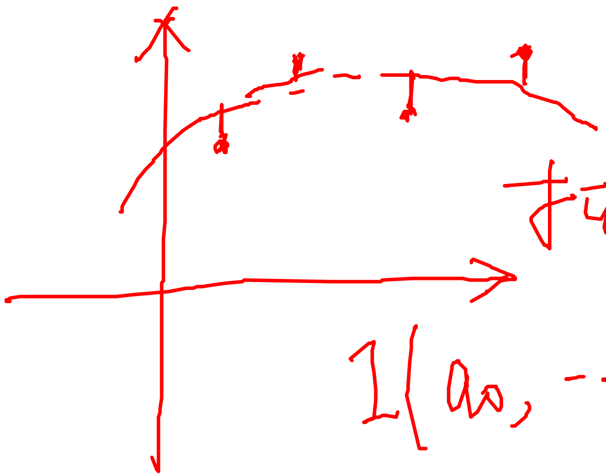
$f(x)-C_n^*(x)\approx C_{n+1}^*T_{n+1}(x)$ 无穷范数最小

$\therefore$ $C_n^*(x)$ 可作近似最佳一致逼近

4.曲线拟合的最小二乘法

（一）最小二乘问题描述：$y_i=f(x_i)$　$i=0,\cdots,m$，$\varphi=\mathrm{span}\{\varphi_0\cdots\varphi_n\}$　W_i 权

找 $S^*\in\varphi$ 使 $\sum_{i=0}^{m}(S^*(x_i)-y_i)^2W_i=\min_{S\in\varphi}\sum_{i=0}^{m}(S(x_i)-y_i)^2W_i$　$\|S^*-f\|_w^2$



拟合不足插值　$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j$

$$I(a_0,\cdots a_n)=\sum_{i=0}^{m}W_i\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)}_{S}-f(x_i)\Big)^2$$

找 $a_0,\cdots a_n$ 使 $I(a_0\cdots a_n)$ 最小

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0$$

4.曲线拟合的最小二乘法

（二）构造：$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{m} w_i\left[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i)-f(x_i)\right]\varphi_k(x_i)=0$ $k=0,\cdots,n$

令 $\begin{cases}(\varphi_j,\varphi_k)_w=\sum_{i=0}^{m}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)w_i\\(f,\varphi_k)_w=\sum_{i=0}^{m}f(x_i)\varphi_k(x_i)w_i\end{cases}$ 则

离散内积 x_i, w_i

$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_k,\varphi_j)_w a_j=(f,\varphi_k)_w$ $k=0,\cdots,n$

Grammer 可逆 a_j^* $\sum_{j=0}^{n}a_j^*\varphi_j(x)$ 所求

$G=\left[(\varphi_k,\varphi_j)_w\right]_{j,k=0}^{n}$

4.曲线拟合的最小二乘法

（三）法方程与Haar条件：

$m \geq n$

$(m \geq n)$

定义：$\varphi_0, \cdots \varphi_n$ 的任意线性组合在点集上 $\{x_i, i=0 \cdots m\}$ 上至多有 n 个不同零点，则称 $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ 在 $[a,b]$ 满足 Haar 条件

若 $c_0\varphi_0 + \cdots + c_n\varphi_n$ 在 $\{x_0, \cdots x_m\}$ 上为 0，则该函数为 0 函数

Haar条件

$m \geq n$

定理 $\varphi_0 \cdots\cdots \varphi_n$ 在 $\{x_0, \cdots, x_m\}$ 满足Haar条件

则 G 可逆

4.曲线拟合的最小二乘法

（例）：

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4	4.5	6	8	8.5
w_i 权	2	1	3	1	1

$S(x)=a_0+a_1x$

11:29 回来

$m=4$ $n=1$

求 $S(x)\in span\{1,x\}$

最小二乘拟合 $\begin{cases}\varphi_0=1\\ \varphi_1=x\end{cases}$

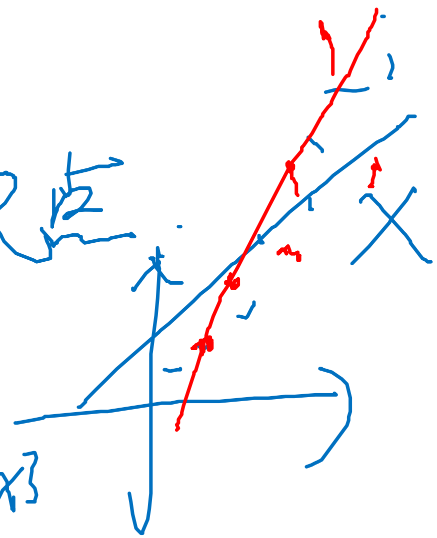
$(f,g)_w=\sum_{i=0}^{4} f(x_i)g(x_i)w_i$

$S_1^*=a_0+a_1x=2.5648+1.2037x$

用 $y=ae^{bx}$ 这种类型逼近上述散点 (x_i,y_i)

"线性化" $\ln y=\ln a+bx$

$\ln y=Y=A+bx$ A, b $span\{1,x\}$



（四）正交多项式最小二乘拟合 (x_i, y_i) w_i $\underline{(f,g)_w} = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i)$

把 $\{1, x, \cdots x^n\}$ 在 $(\cdot,\cdot)_w$ 下 Smit 正交化

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \vdots \\ \underbrace{P_n(x) = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x^n, \varphi_j)_w}{(\varphi_j, \varphi_j)_w}}\varphi_j \end{cases}$$

$P_0 \cdots P_n$ 在 $(\cdot,\cdot)_w$ 正交

$$S^*(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(f, P_j)_w}{(P_j, P_j)_w} P_j$$ 最小二乘拟合函数

（四）正交多项式最小二乘拟合（续）（3.5节和3.6节不讲）

第四章.数值积分与数值微分

$f'(x)$

第1、第2节：数值积分概念与牛顿-科特斯公式

$\int_0^1 e^{x^2}dx=?$

（一）：概念与机械求积公式

$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，计算定积分$\int_a^b f(x)dx$：

回顾黎曼积分：$a \le x_0 < \cdots < x_n \le b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

黎曼和

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i,$$ 则可用 $$\sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i \approx \int_a^b f(x)dx.$$

特例：$(1)n=0$：中点公式（矩形公式　　）：$\int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a)$,

a, b点

$(1)n=1$：梯形公式：$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\frac{a+b}{2} + f(b)\frac{a+b}{2}$

（定义）机械求积公式：形如$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$的数值积分公式,

x_k称为积分点，A_k称为求积系数，或积分权，x_k与A_k与$f(x)$无关

第1、第2节：数值积分概念与牛顿-科特斯公式

（二）：插值型积分公式

$a \le x_0 \cdots x_n \le b$

$L_n(x)$ 是 x_i 上 n 阶拉格朗日插值

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$L_n \sim f$

$$\int_a^b L_n(x)dx \sim \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \boxed{\int_a^b l_k(x)dx}$$

A_k 权

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k$$ 插值型

第1、第2节：数值积分概念与牛顿-科特斯公式

（三）：牛顿-科特斯公式（等距L插值型公式）

$[a,b]$ n等分 $\quad x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \quad k=0,\cdots,n$

牛-科 在 x_k L插值型积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) C_k^{(n)} (b-a)$$ 其中 $C_k^{(n)}(b-a) = \int_a^b l_k(x)dx$

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{\quad} dx$$

$x = a + \frac{t}{n}(b-a)$

$$\frac{\frac{b-a}{n}}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j} dt$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j) dt$$

（三）：牛顿-科特斯公式（等距L插值型公式）

科特斯积分公式系数表：

n	$C_k^{(n)}$					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$=1$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$			$=1$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$=1$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	$=1$

若干特例：

$n=1$: $\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2}$ 梯形

$n=2$: $\int_a^b \cdots \approx f(a)\frac{b-a}{6} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{3}(b-a) + f(b)\frac{b-a}{6}$ 辛普森公式

$n=4$: $\int \approx f(a)\frac{7}{90}(b-a) + f(x_1)\frac{16}{45}(b-a) + \cdots$ 柯特斯公式

（四）：逼近或拟合型公式

介绍 $f(x) \approx \tilde{f}(x)$ 则 $\int_a^b f(x) \approx \int_a^b \tilde{f}(x)$

例如 $\tilde{f}(x)$ 可以是 ~~插~~ 样条. 最佳平方逼近等

（五）机械求积公式：形如 $\underbrace{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)}$ 的数值积分公式，

x_k 称为积分点，A_k 称为求积系数，或积分权，x_k 与 A_k 与 $f(x)$ 无关

（六）：代数精度：若某个求积公式对于次数不超过m的多项式可以精确求积，而对于m+1次多项式无法精确积分，称该积分公式具有m次代数精度

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k$$

机械求积公式具有m次代数精度的具体公式：

$f(x)=1$: $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b 1\,dx = b-a$

$f(x)=x$: $\sum_{k=0}^{n} x_k A_k = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$f(x)=x^2$: $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 A_k = \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$f(x)=x^m$ $\sum_{k=0}^{n} x_k^m A_k = \int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$

$f(x)=x^{m+1}$ 不能精确积分 卡

（六）：代数精度

上述各种求积公式的代数精度：

代数精度 m

中点 $\int_a^b f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$ $m=1$

梯形法 $f(a)\frac{a+b}{2}+f(b)\frac{a+b}{2}$ $m=1$

练习

辛普森法：$f(a)\frac{b-a}{6}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{3}(b-a)+f(b)\frac{1}{6}(b-a)$

$m=3$

柯特斯： $m=5$

P135 1 (3) 2 (2) 3

P95 13 15 17

作业