2021 年秋统计学习题 03

设 T 为参数 θ 的估计，称

$$\mathrm{MSE}(T) := \mathbb{E}_\theta (T-\theta)^2$$

为 T 的均分误差（MES 为 mean squarred error 的首字母缩写）.

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布随机变量序列，期望为 μ，方差为 σ^2. 记

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(a). 设 a 为常数，证明对任意形如 aS^2 的 σ^2 的估计，有

$$\mathrm{MSE}(aS^2) = \mathbb{E}(aS^2 - \sigma^2)^2 = a^2 \operatorname{Var} S^2 + (a-1)^2\sigma^4.$$

(b). 证明

$$\operatorname{Var}(S^2) = \frac{1}{n}\left(\kappa - \frac{n-3}{n-1}\right)\sigma^4,$$

其中 $\kappa = \frac{\mathbb{E}(X-\mu)^4}{\sigma^4}$ 为 X 的峰度 (kurtosis).

(c). 设 X_i 服从正态分布. 证明

(i) $\mathrm{MSE}(S^{*2}) < \mathrm{MSE}(S^2)$.

(ii) $\kappa = 3$.

(iii) 形如 aS^2 的估计中，MSE 最小的是 $\frac{n-1}{n+1}S^2$.

(d). 不做正态性假设，证明当

$$a = \frac{n-1}{(n+1) + \frac{(\kappa-3)(n-1)}{n}}$$

时 $\mathrm{MSE}(S^2)$ 取得最小值.