第三次作业答案

1 设函数$f(x),g(x),h(x)$都在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，并定义

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}.$$

证明存在$\xi\in(a,b)$满足$F'(\xi)=0$. 问若$h(x)\equiv 1$，则上述结论与柯西中值定理有什么关系？若令$g(x)=x,\ h(x)\equiv 1$，则会有什么结论？

证明:由行列式的性质可知$F(a)=F(b)$. 由Rolle中值定理可知存在$\xi\in(a,b)$满足$F'(\xi)=0$. 当$h(x)\equiv 1$时，则有柯西定理的弱化形式

$$f'(\xi)(g(a)-g(b))=g'(\xi)(f(a)-f(b)).$$

若再有$g(x)\equiv x$，则可得拉格朗日中值定理.

2 证明下列恒等式：

(1) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\mathrm{sgn}x(|x|\geqslant 1)$;

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi(|x|\leqslant\dfrac{1}{2})$.

证明：(1) 对等式左侧在区间$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$上求导得

$$\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{x^4+2x^2+1}}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2}{1+x^2}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0.$$

因此我们只需证明等式在$x=\pm 1$时成立即可.

(2) 对等式左侧在区间$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$上求导得

$$-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}=0.$$

因此我们只需证明等式在$x=0$时成立即可.

3 求下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$;

解：由L'Hospital法则我们有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2(\sin\frac{\pi x}{2}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{\pi\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}-\frac{2}{\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$;

解：我们有

$$\lim_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim_{x\to+\infty}2\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\ln x=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln(1+(x-1))}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln(1+(x-1))}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;

解：$\lim\limits_{x\to0+0}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x=0$，因此$\lim\limits_{x\to0+0}x^{\sin x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$;

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+x)\ln(1+x)-x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$;

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^2}=0$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$;

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=-\dfrac{e}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\dfrac{1}{e}$.

(10) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$;

解：$\lim\limits_{x\to0+0}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x=0$.

(11) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{1-\cos x}$;

解：取对数我们有

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2}\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2}\ln\frac{x^2}{2}=0.$$

因此$\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^{1-\cos x}=1$.

(12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x-x\cos x}$;

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x-x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2(\sin x-x\cos x)}=\dfrac{3}{2}$.

(13) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{1-x}}$;

解：$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{1-x}}=\dfrac{1}{e}$.

(14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln(1+x)}{x^2}$;

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

(16) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ a,b为正实数;

解：$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1+x^a}{1+x^b}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x^a-x^b}{\ln x}}=1.$

(17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}(\tan x)^{\tan 2x}$;

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\tan x)^{\tan 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\tan x-1)\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\dfrac{1}{e}.$

4 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界，$f'(x)$存在且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=b$. 求证：$b=0$.

证明：使用反证法. 假设b是正实数. 则存在$M>a$满足当$x>M$时$f'(x)>\frac{b}{2}$成立. 则当$x>M$时，有

$$f(x)>f(M)+\frac{b}{2}(x-M).$$

这与函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上有界矛盾. 若b是负实数我们也可类似导出矛盾. 因此$b=0$.

5 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$(k有限或$\pm\infty$). 求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$.

证明：由洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^xf(x))'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)).$$

6 写出下列函数带皮亚诺余项形式的麦克劳林展开：

(1) $\cos\left(x^2\right)$;

解：记$u=x^2$，则

$$\cos u=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}.$$

(2) $\sin^3 x$;

解：$\sin^3 x=\sin x\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)=\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\sin x\cos 2x}{2}=\dfrac{3\sin x}{4}-\dfrac{\sin 3x}{4}$. 因此

$$\sin^3 x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{3}{4}\cdot(1-9^n)x^{2n+1}.$$

(3) (3) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$;

解：我们有

$$\frac{1}{(1+x)^2}=-\left(\frac{1}{1+x}\right)'=(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

(4) $\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$.

解：$\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}=-(x^3+2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-1-3x-3x^2-4\sum_{n=3}^{\infty}x^n$.

7 写出下列函数的带皮亚诺余项的麦克劳林展开至所指定的阶数：

(1) $\dfrac{x}{\sin x}\quad(x^4)$;

解：我们有

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}&=1+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right)+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}\right)^2+o(x^4)\\&=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

(2) $\ln(\cos x+\sin x)\quad(x^4)$;

解：我们有

$$\begin{aligned}2\ln(\cos x+\sin x)=\ln(1+\sin 2x)&=\ln(1+2x-\frac{4x^3}{3}+o(x^4))\\&=2x-\frac{4x^3}{3}-2x^2+\frac{8x^4}{3}+\frac{8x^3}{3}-4x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

因此

$$\ln(\cos x+\sin x)=x-x^2+\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^4}{3}+o(x^4).$$

(3) $\dfrac{x}{2x^2+x-1}\quad(x^3)$;

解：我们有

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x^2+x-1}=-\frac{x}{1-x-2x^2}&=-x[1+x+2x^2+(x+2x^2)^2+o(x^2)]\\&=-x-x^2-3x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

(4) $\ln\dfrac{1+x}{1-2x}\quad(x^n)$;

解：$\ln\dfrac{1+x}{1-2x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-(-1)^n}{n}x^n$.

(5) $\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)\quad(x^6)$;

解：我们有

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2+x^3)&=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)\\&=-x^4+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+o(x^4).\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\quad(x^4)$;

解：我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x^3} \\
&= (1+x-x^3-x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4))(1-x^3+o(x^4)) \\
&= (1+x-x^3-x^4)(1+x+x^2+o(x^4)) \\
&= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4).
\end{aligned}
$$

8 确定实常数a,b满足当$x\to 0$时，
(1) $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$为x的5阶无穷小量；
(2) $f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1-bx}$是$x$的3阶无穷小量.
解：(1) 做Maclaurin展开有

$$
\begin{aligned}
(a+b\cos x)\sin x-x &= \left(a+b-\frac{bx^2}{2}+\frac{bx^4}{24}+o(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-x \\
&= (a+b-1)x-\frac{1}{6}(a+4b)x^3+\left(\frac{a+b}{120}+\frac{b}{12}+\frac{1}{24})x^5+o(x^5\right).
\end{aligned}
$$

故当$a=\dfrac{4}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$时为5阶无穷小.
(2) 做Maclaurin展开有

$$
\begin{aligned}
e^x-\frac{1+ax}{1-bx} &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-(1+ax)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3+o(x^3)) \\
&= (1-a-b)x+\left(\frac{1}{2}-ab-b^2\right)x^2+\left(\frac{1}{6}-ab^2-b^3)x^3+o(x^3\right).
\end{aligned}
$$

故当$a=b=\dfrac{1}{2}$时为3阶无穷小.

9 求下列极限：
(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;
解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0.$
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;
解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{2(2x)^6}=\dfrac{1}{128}.$
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x})$;
解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=1.$
(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1.$
(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}}=\sqrt[3]{e}.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$;

解：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\left(1-\dfrac{1}{6x^2}\right)=-\dfrac{1}{6}.$

10 设函数$f(x)$在零点的某个邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0.$$

(1) 求$f(0), f'(0), f''(0)$;

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$.

解：(1) $\dfrac{\sin 3x}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{9}{2}+\dfrac{f(0)}{x^2}+\dfrac{f'(0)}{x}+\dfrac{f''(0)}{2}+o(1)$. 因此

$$f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9.$$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=\dfrac{9}{2}.$

11 设函数$f(x)$在零点的某个邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

(1) 求$f(0), f'(0), f''(0)$;

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，因此$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2.$

12 设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上有直到n阶导数，且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A, \lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=B.$$

求证$B=0$.

证明：若B为正实数，则可证明对于$0\leqslant i\leqslant n-1$，则

$$\lim_{x\to}f^{(i)}(x)=+\infty,$$

与题干假设矛盾. 同理可证B不是负实数.

13 设$P(x)$为n次多项式. 证明：

(1) 若$P(a), P'(a),\cdots,P^{(n)}(a)$皆为正数，则$P(x)$在$(a,+\infty)$上无零点；

(2) 若$P(a), P'(a), \cdots, P^{(n)}(a)$正负号相间，则$P(x)$在$(-\infty, a)$上无零点.
证明：(1) 由于$P(x)$是n次多项式，因此有

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

因此对$x > a$，有$P(x) > 0$.
(2) 证明方法同上.

14 设函数$f(x)$在$(0, +\infty)$上三阶可导，而且有

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f'''(x)| \leqslant M_3, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

求证$f'(x)$和$f''(x)$在$(0, +\infty)$上有界.
证明：对$x > 0$和$h > 0$，有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}h^3,$$
$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + 2f''(x)h^2 + \frac{4f'''(\eta)}{3}h^3.$$

则

$$f(x+2h) - 4f(x+h) = -3f(x) - 2f'(x)h + \frac{4f'''(\eta)}{3}h^3 - \frac{2f'''(\xi)}{3}h^3.$$

因此

$$f'(x) = \frac{4f(x+h) - f(x+2h) - 3f(x)}{2h} + \frac{2f'''(\eta)}{3}h^2 - \frac{f'''(\xi)}{3}h^2.$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant 4\frac{M_0}{h} + M_3h^2 = \frac{2M_0}{h} + \frac{2M_0}{h} + M_3h^2, \quad \forall h > 0.$$

因此

$$|f'(x)| \leqslant 3\sqrt[3]{4M_0^2M_3}.$$

类似地可证明$|f''(x)|$有界.

15 求证：
(1) $0 < x - \ln(1+x) < \frac{1}{2}x^2 (0 < x \leqslant 1)$;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$存在.
证明：(1) 由$1 > \frac{1}{1+x}$可知$x - \ln(1+x) > 0$. 由$\frac{1}{1+x} > 1 - x$可知

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

(2) 由(1)中不等式可知

$$0 < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

由单调增序列有界收敛原理可知所求极限存在有限.

16 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且$f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在$c\in(a,b)$满足

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明：使用反证法. 假设

$$f''(x)<\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

成立. 则由拉格朗日余项的Taylor有

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4},$$
$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.$$

则

$$|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi)-f''(\eta)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}(|f''(\xi)|+|f''(\eta)|)<|f(b)-f(a)|.$$

因此假设不成立.

17 设函数$f(x)$在$[-1,1]$三阶可导且有

$$f(0)=f'(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(-1)=0.$$

证明：存在$\xi\in(-1,1)$满足$f'''(\xi)\geqslant 3$.
证明：由麦克劳林公式得

$$f(1)=f(0)+f'(0)1+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi)}{6},\quad \xi\in(0,1),$$
$$f(-1)=f(0)-f'(0)1+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\eta)}{6},\quad \eta\in(-1,0).$$

因此

$$f(1)-f(-1)=\frac{f'''(\xi)+f'''(\eta)}{6}=1.$$

则$f'''(\xi)$和$f'''(\eta)$中必有一数大于等于3.

18 若函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义并满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|^2,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

求证：$f(x)\equiv$常数.
证明：由条件可知

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f(x+\frac{(i-1)(y-x)}{n})-f(x+\frac{i(y-x)}{n})\right|\leqslant k\frac{|x-y|}{n}.$$

当n趋向于正无穷大时，不等式右侧趋向于零. 故$|f(x)-f(y)|\equiv 0$.

19 设函数$f(x)$在点x_0的一个邻域内阶连续可导且$f^{(n+1)}(x_0)$，证明在x_0点附近有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n$$

且$\lim\limits_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

证明：由泰勒展开可知

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\theta f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n+1}+o((x-x_0)^n).$$

由Peano余项Taylor展开的唯一性易见

$$\lim_{x\to x_0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

20 设$f(x)$在区间$[0,2]$上二阶可导且满足$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1$，证明

$$|f'(x)|\leqslant 2.$$

证明:由泰勒展开可知

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(2-x)^2,$$
$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\eta)}{2}x^2.$$

因此

$$2|f'(x)|\leqslant|f(0)|+|f(2)|+\frac{|f''(\xi)|}{2}(x-2)^2+\frac{|f''(\eta)|}{2}x^2\leqslant 4.$$

命题得证.

21 设$x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x_n=\sin x_{n-1}$，证明$x_n$与$\sqrt{\dfrac{3}{n}}$是等价无穷小.

证明：易见$\{x_n\}$是一个单调减有界序列且经计算可得极限为零. 只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{3}{x_n^2}}=1$$

即可. 由Stolz定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{3}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{3}{x_{n+1}^2}-\frac{3}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4}{3x_n^2-3\sin^2x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{6(x_n-\sin x_n)}.$$

由于$\sin x_n=x_n-\dfrac{x_n^3}{6}+o(x_n^3)$，因此此极限等于1. 证明完毕.

22 确定a,b，当$x\to 0$时下列函数为尽可能高阶无穷小量:

(1) $\cot x-\dfrac{1+ax^2}{x+bx^3}$;

解:我们有

$$\begin{aligned}\cot x-\frac{1+ax^2}{x+bx^3}&=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\tan x}-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}\right)\\&=\frac{1}{x}\left[\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4+o(x^4)\right)-(1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+o(x^4))\right].\end{aligned}$$

则当$a=-\dfrac{2}{5}, b=-\dfrac{1}{15}$时取到最高阶无穷小量.
(2) $\cos x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.
解：我们有

$$\begin{aligned}\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}&=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)-(1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6))\\&=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)-(1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+(ab^2-b^3x^6+o(x^6)).\end{aligned}$$

则当$a=-\dfrac{5}{12}, b=\dfrac{1}{12}$时可得最高阶无穷小量.

23 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：
(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1, \quad x\in[-1,2]$;
解：$y'=5x^4-20x^3+15x^2$，因此y在区间内的驻点为0和1. 而

$$y(0)=1, y(1)=2, y(-1)=-10, y(2)=-7.$$

因此最大值为2，最小值为-10.
(2) $y=2\tan x-\tan^2 x, \quad x\in[0,\pi/2)$;
解：$y'=2\sec^2 x-2\tan x\sec^2 x$，因此$y$在区间上先升后降，驻点是$\dfrac{\pi}{4}$，最大值是1.
(3) $y=\sqrt{x}\ln x, \quad x\in(0,+\infty)$;
解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\ln x}$，因此$y$在区间$(0,+\infty)$上先降后升，驻点是$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，最小值是$-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{e}}$.

24 讨论方程$x^3-px+q=0$有三个不同实根的条件.
解：我们设$y=x^3-px+q$，则求导得$y'=3x^2-p$，因此函数y在下面两个区间$\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)$和$\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}},+\infty\right)$上单调增，区间$\left(-\sqrt{\dfrac{p}{3}},\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)$上单调减. 因此$y$有三个根当且仅当$y\left(-\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)>0$且$y\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}}\right)<0$. 亦即$4p^3>27q^2$.

25 讨论方程$\ln x-mx=0$有两个实根的条件.
解：设$y=\ln x-mx$，则$y'=\dfrac{1}{x}-m$. 则函数y在区间$(0,+\infty)$上先升后降驻点为$\dfrac{1}{m}$. 则y有两个根当且仅当$y\left(\dfrac{1}{m}\right)>0$. 亦即$m<\dfrac{1}{e}$.

26 设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且满足

$$f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)=0, \quad x\in[a,b],$$

其中$c(x)<0$.
(1) 证明$f(x)$不能在区间(a,b)内取到正的最大值或负的最小值;
(2) 若$f(a)=f(b)=0$，证明$f(x)$在区间$[a,b]$上恒等于零.
证明：(1) 若函数$f(x)$在点$x_0\in(a,b)$取得正的最大值，则有

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)\leqslant 0.$$

则
$$f''(x_0)+b(x_0)f'(x_0)+c(x_0)f(x_0)<0$$
与题中假设矛盾. 类似地，函数$f(x)$在区间(a,b)内部不存在负的最小值.
(2) 若$f(x)$在区间(a,b)内有非零值，则在区间内部存在正的最大值或负的最小值，与(1)矛盾.

27 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，证明$2\sin x+\tan x\geqslant 3x$.
证明：不等式两侧求导分别为$2\cos x+\sec^2 x$和3，因此我们需要证明
$$2\cos x+\sec^2 x\geqslant 3,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$
当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时$\cos x>0$，则
$$2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\geqslant 3\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=3.$$
因此原不等式成立.

28 当$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，证明$(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$.
证明：设$f(x)=(\sin x)^{\cos x}$，$g(x)=(\cos x)^{\sin x}$. 易见
$$f(0)=0,\quad g(0)=1,\quad f(\frac{\pi}{4})=g(\frac{\pi}{4}).$$
因此只需证明$f(x)$单调增而$g(x)$单调减. 对$f(x)$和$g(x)$求导在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上求导得
$$\begin{aligned}f'(x)&=f(x)(-\sin x\ln\sin x+\cot x\cos x)>0,\\ g'(x)&=g(x)(\cos x\ln\cos x-\tan x\sin x)<0.\end{aligned}$$
证明完毕.

29 设$f(x)$是(a,b)上的凸函数，$g(x)$是(c,d)上的单调上升凸函数，且$f(x)$的值域包含在(c,d)内. 求证：$g(f(x))$是(a,b)上的凸函数.
证明：由于$g(x)$是单调上升的，因此有
$$g(f(\lambda x+(1-\lambda)y))\leqslant g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))\leqslant \lambda g(f(x))+(1-\lambda)g(f(y)).$$
因此$g(f(x))$是凸函数.

30 求四次多项式是凸函数的条件.
解：设$p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，则$p(x)$是凸函数当且仅当
$$p''(x)=12ax^2+6bx+2c\geqslant 0$$
亦即$a>0,3b^2-8ac\leqslant 0$.

31 设$f(x)>0$且$f''(x)$存在. 证明：$\ln f(x)$是凸函数的充分必要条件为
$$\begin{vmatrix} f(x) & f'(x)\\ f'(x) & f''(x)\end{vmatrix}\geqslant 0.$$

证明:计算得

$$(\ln f(x))'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)}.$$

因此$(\ln f(x))''$非负等价于题中条件.

32 证明下列不等式：
(1) $|a|^p + |b|^p \geqslant 2^{1-p}(|a|+|b|)^p (p>1)$;
(2) $|a|^p + |b|^p \leqslant 2^{1-p}(|a|+|b|)^p (0<p<1)$.
证明：(1) 当$p>1$时，函数x^p在$(0,+\infty)$是凸函数，因此对$|a|$和$|b|$取平均后取p次方小于等于取p次方后取平均.
(2) 当$0<p<1$时，函数x^p在$(0,+\infty)$是凹函数，故不等式方向相反.

33 证明Bernoulli不等式：若$0<\alpha<1$，则

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x, \quad \forall x > -1.$$

若$\alpha<0$或$\alpha>1$，则

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x, \quad \forall x > -1.$$

证明:当$0<\alpha<1$时，函数$(1+x)^\alpha$在区间$(-1,+\infty)$上是凹函数，因此在零点的切线在函数图像上方. 当$\alpha>1$或$\alpha<0$时，函数$(1+x)^\alpha$在区间$(-1,+\infty)$上是凸函数，因此在零点的切线在函数图像下方.

34 对于正数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，证明

$$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^n} \leqslant \frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{(n+x_1+x_2+\cdots+x_n)^n}.$$

证明:只需要证明

$$\frac{n+x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{x_1x_2\cdots x_n}}.$$

不等式变形可得

$$1+\frac{1}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \leqslant \sqrt[n]{\frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{x_1x_2\cdots x_n}}.$$

只需要证明两边取对数后不等式成立. 利用函数$f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$的凸性.

35 求下列函数曲线的渐近线：
(1) $y = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$;
(2) $y = x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}$.
解：(1) 计算得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$且$\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-\dfrac{x}{2}\right) = -1$. 因此所求渐近线为$y=\dfrac{x}{2}-1$及$x=-1$.
(2) 渐近线为$y=0$和$x=0$.

36 计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;

解：$\int(1+x^{-\frac{5}{4}})\mathrm{d}x=x-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+C.$

(2) $\displaystyle\int\left(3^{x+1}+3^{-x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$;

解：$\int\left(3^{x+1}+3^{-x}+\dfrac{1}{3}e^x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3^{x+1}}{\ln 3}-\dfrac{3^{-x}}{\ln 3}+\dfrac{1}{3}e^x+C.$

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

解：$\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)\mathrm{d}x=-(\cot x+\tan x)+C.$

(4) $\displaystyle\int\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$;

解：由$\sqrt{1-\sin 2x}=|\cos x-\sin x|$可知

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=f(x)+C,$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+\cos x+4k\sqrt{2}, & x\in\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right];\\ -\sin x-\cos x+(4k+2)\sqrt{2}, & x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right].\end{cases}$$

(5) $\displaystyle\int(x+|x|)\mathrm{d}x$;

解：$\int x+|x|\mathrm{d}x=f(x)+C$，其中

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & x\geq 0.\end{cases}$$

37 用换元法计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

解：我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\int\csc^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

因此$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=-\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

(2) $\displaystyle\int x(1+x^2)^5\mathrm{d}x$;

解：$\int x(1+x^2)^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(1+x^2)^5\mathrm{d}(1+x^2)=\dfrac{(1+x^2)^6}{12}+C.$

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$;

解：$\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=2\sqrt{1+\sin^2 x}+C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x(a^2>b^2)$;

解：我们有

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sin^2 x)}{2\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 x}}=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

解：令$t=\sqrt{x}$，则

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln(1+t)+C.$$

即

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

38 用分部积分法计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

解：$\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int xd(-\cot x)=-x\cot x+\int \cot x\mathrm{d}x=-x\cot x+\ln|\sin x|+C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

解：由拆分得

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

则

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C,$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}+\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+C.$$

因此

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2-\frac{\arctan x}{x}+C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$;

解：由分部积分

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(e^{\arctan x})}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(e^{\arctan x})=\frac{(1+x)e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

因此

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(1+x)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

39 对下列不定积分建立递推公式：

(1) $I_n = \int x^m \ln^n x \mathrm{d}x$;

解：由分部积分法我们有

$$I_n = \int \ln^n x \mathrm{d}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m \ln^{n-1} x \mathrm{d}x.$$

因此$I_n = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1}I_{n-1}$.

(2) $I_n = \int x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

解：由分部积分法我们有

$$I_n = \int x^n \mathrm{d}(-e^{-x}) = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$$

因此$I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$.

(3) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

解：令$x = \sin u$，则

$$I_n = \int \frac{\sin^n u \cos u \mathrm{d}u}{\cos u} = \int \sin^n u \mathrm{d}u.$$

又

$$\int \sin^n u \mathrm{d}u = \int \sin^{n-1} u \mathrm{d}(-\cos u) = -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)\int \cos^2 u \sin^{n-2} u \mathrm{d}u,$$

$$I_n = -\sin^{n-1} u \cos u + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

因此

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{\sin^{n-1} u \cos u}{n} = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

(4) $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x^2}}$;

解：令$x = \tan u$，则

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cos^{n-1} u}{\sin^n u}\mathrm{d}u = \int \csc u \cot^{n-1} u \mathrm{d}u.$$

又

$$\int \csc u \cot^{n-1} u \mathrm{d}u = -\int \cot^{n-2} u \mathrm{d}(\csc u) = -\cot^{n-2} u \csc u - (n-2)\int \csc^3 u \cot^{n-3} u \mathrm{d}u,$$

$$I_n = -\cot^{n-2} u \csc u - (n-2)I_n - (n-2)I_{n-2}.$$

因此

$$I_n = -\frac{\cot^{n-2} u \csc u}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

40 定义$I(m,n)=\int\cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x$，证明：

(1) $I(m,n)=-\dfrac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+\dfrac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$;

(2) $I(n,n)=-\dfrac{\cos 2x\cos^{n-1}x\sin^{n-2}x}{4n}+\dfrac{n-1}{4n}I(n-2,n-2)$.

证明：(1) 由分部积分法

$$\begin{aligned}I(m,n)&=\int\cos^m x\sin^{n-1}x\mathrm{d}(-\cos x)\\&=-\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x+\int\cos x\mathrm{d}(\cos^m x\sin^{n-1}x)\\&=-\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x-mI(m,n)+(n-1)I(m,n-2)-(n-1)I(m,n).\end{aligned}$$

由此我们证明了(1).

(2) 我们类似可以证明

$$I(m,n)=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}I(n,n)&=-\frac{\cos^{n+1}x\sin^{n-1}x}{2n}+\frac{n-1}{2n}I(n,n-2)\\&=-\frac{\cos^{n+1}x\sin^{n-1}x}{2n}+\frac{n-1}{2n}\frac{\cos^{n-1}x\sin^{n-1}x}{2n-2}+\frac{n-1}{2n}\frac{n-1}{2n-2}I(n-2,n-2)\\&=-\frac{\cos 2x\cos^{n-1}x\sin^{n-2}x}{4n}+\frac{n-1}{4n}I(n-2,n-2).\end{aligned}$$

41 计算下列有理函数的不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$;

解：我们分拆得

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x^3+2x^2+4x+6}{x^4+2x^2+1}.$$

因此

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\int\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{(3x+4)\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

由

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

我们可知

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3-4x}{2(x^2+1)}-4\arctan x+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{2x+1}\mathrm{d}x$;

解：$\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{2x+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{7}{8x+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{7}{8}\ln(8x+4)+C.$

(3) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$;

解：令$u=x+1$，则

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3u+2}{(u^2+1)^2}\mathrm{d}u = -\frac{3}{2(u^2+1)} + \frac{u}{u^2+1} + \arctan u + C.$$

因此

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x = \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) - \frac{3}{2(x^2+2x+2)} + C.$$

(4) $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-x-2}\mathrm{d}x$;

解：由$x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x^2-1)$可知

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C.$$

(5) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$;

解：经分解得

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

而

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

故

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

42 计算下列三角函数有理式的不定积分：

(1) $\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$;

解：$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\ln(1+\cos^2 x) + C.$

(2) $\int \sin 5x \sin 3x \mathrm{d}x$;

解：$\int \sin 5x \sin 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

(3) $\int \frac{\sin^5 x\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$;

解：我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x &= -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cos x)\\ &= -\int (\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 1)\mathrm{d}(\cos x)\\ &= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$;
解：我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令$u=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x &= -2\int \cot^2 u\mathrm{d}u \\ &= -2\int (\csc^2 u-1)\mathrm{d}u \\ &= 2u+2\cot u+C \\ &= -x+2\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C. \\ &= -x+2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}+C.\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+2}$;
解：令$u=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

因此

$$\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+2}=\int \frac{2du}{(2u+1)(u^2+1)}.$$

经拆分我们有

$$\int \frac{2du}{(2u+1)(u^2+1)}=\int \frac{8\mathrm{d}u}{5(2u+1)}-\frac{2}{5}\int \frac{(2u+1)\mathrm{d}u}{u^2+1}.$$

因此

$$\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+2}=\frac{4}{5}\ln\left|2\tan\frac{x}{2}+1\right|-\frac{4}{5}\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|+\frac{x}{5}+C.$$

43 计算下列无理函数的不定积分：
(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}}$;

解：令$x=-2+\tan u$，则

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}} &= \int \frac{\sec^2 u\mathrm{d}u}{(\tan u-1)\sec u} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sin u-\cos u} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}\sin(u-\frac{\pi}{4})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.
\end{aligned}
$$

因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{\arctan(x+2)}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

(2) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$;

解：令$t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$，则$x=\frac{2(1-t^3)}{1+t^3}$，因此

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2} = \int \frac{t(1+t^3)^2}{(4t^3)^2}\mathrm{d}(\frac{4}{1+t^3}) = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}.$$

即

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(\frac{2+x}{2-x})^2}+C.$$

44 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$;

解:由分部积分可得

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x &= \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(-\frac{1}{2(1+x^2)}) \\
&= -\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \\
&= -\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)}+\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+C.
\end{aligned}
$$

(2) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$;

解：由分部积分

$$
\begin{aligned}
\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x &= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2}) \\
&= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C.
\end{aligned}
$$

(3) $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x$;

解：令$u=x^2$，则

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{u^2-1}{u^4+1}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(u+\frac{1}{u})}{(u+\frac{1}{u})^2-2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}+C.$$

(4) $\int \frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x$;

解：我们有$\int \frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}-\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+1}$.

经分拆我们有

$$\frac{1}{x^4-x^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right).$$

我们有

$$\int \frac{x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)+\sqrt{3}\arctan(2x+\sqrt{3})+C,$$

$$\int \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1)-\sqrt{3}\arctan(2x-\sqrt{3})+C.$$

故

$$\int \frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan(2x+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\arctan(2x-\sqrt{3})-\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$$

(5) $\int \frac{1}{\tan^2 x+2}\mathrm{d}x$;

解：经变形得

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+1}-\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+2}=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$$

(6) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

解：由$\sin^2 x=\frac{1}{2}[(\cos^2 x+\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)]$我们有

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}\int(\cos x-\sin x)\cos x\mathrm{d}x.$$

我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}&=\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{2}\int \frac{(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}\\&=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int(\cos x-\sin x)\cos x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{4}+C.\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln|\sin x + \cos x| - \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} \mathrm{d}x;$

解：$\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{1+(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} \mathrm{d}x;$

解:令$t = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$，则$x = \dfrac{2t^2-1}{t^2-1}$，故有

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \mathrm{d}x = -2 \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

因此

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} \mathrm{d}x = \frac{2}{t} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.$$

45 计算Poisson积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \mathrm{d}x \quad (-1 < r < 1).$$

解：令$u = \tan \dfrac{x}{2}$，故有$\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$.因此Poisson积分变形为

$$2(1-r^2) \int \frac{\mathrm{d}u}{(1+r)^2 u^2 + (1-r)^2} = 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r} \cdot u\right) + C.$$