(32). 对任意 $k \geq 1$，设 $E_k \subset E$ 为可测集，$c_k \geq 0$，$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbb{1}_{E_k}$. 请证明

$$\int f\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda(E_k).$$

(33). 设 $(f_n)_{n\geq 1}$ 为 E 上非负单调递减可积函数列，且 f_n 收敛到可测函数 f，求证

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \int f d\mu.$$

(34). 设 E 为测度空间，$\{A_k\}_{k\geq 1}$ 为 E 中可测集.

(a) 请证明

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(b) 若 $\lambda(E) < \infty$，请证明

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(35). 设 g 为 E 上非负可积函数，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在可测集 $A \subset E$ 满足 $\lambda(A) < \infty$ 使得

$$\int_{E\setminus A} g\, d\lambda < \varepsilon.$$

(36). 设 f, g 为 E 上的可积函数，求证 $f \vee g, f \wedge g$ 也可积，其中 $f \vee g := \max\{f, g\}, f \wedge g := \min\{f, g\}$.

(37). 设 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为 E 上的可测函数列，且存在可积函数 g 使得 $f_n + g \geq 0$. 求证

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

(38). 设 $\lambda(E) < \infty$，$\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为 E 上的可测函数列，且 $\{f_n\}$ 依测度收敛到 f，同时存在常数 $M > 0$ 使得对任意 $n \geq 1$，$|f_n| \leq M$. 求证

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(39). 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上勒贝格可积函数，求证对任意 $a \in \mathbb{R}$，有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda.$$

(40). 设 f 为 E 上的可积函数. 求证对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对任何可测集 $A \subset E$，只要 $\lambda(A) < \delta$，就有

$$\left| \int_A f\, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

(41). 设 $C \subset [0,1]$ 为康托尔集，$\mathbb{1}_C$ 在 $[0,1]$ 上是否黎曼可积？若可积，求其积分.

(42). 设 F 为 $[0,1]$ 上的 Cantor-Lebesgue 函数. 求 $\int_0^1 F(x)\, dx$.

(43). 设 $p \geq 1$，求证

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}.$$

(44). 设 $G \subset [0,1]$ 为开集. 求证或用反例否证 $\mathbb{1}_G$ 是黎曼可积的.

(45). 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 对任意 $t \in \mathbb{R}$，定义函数 $f_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f_t(x) = f(x-t)$. 求证

$$\lim_{t \to 0} \|f - f_t\|_1 = 0.$$

(46). 设 $a > 0$，f 为 $[0,a]$ 上的勒贝格可积函数，求证

$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(y)}{y} dy dx = \int_0^a f(x) dx.$$

(47). (I). 求证

$$\int_{[0,1]} \left[\int_{[0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{[0,1]} \left[\int_{[0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

(II). 请解释为何上述结论与 Tonelli 定理和 Fubini 定理均不矛盾.

(48). 设 $f \in \mathrm{BV}([a,b])$，且 $\mathrm{V}_a^b(f) = 0$. 求证 f 为常值函数.

(49). 设 $f, g \in \mathrm{BV}([a,b])$. 求证 $f+g \in \mathrm{BV}([a,b])$.

(50). 证明若 $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$，则 $fg \in \mathrm{AC}([a,b])$.

(51). 设 f 为 $[a,b]$ 上的可微函数，若 f' 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，求证

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

(52). 设 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$，且 $f' \geq 0$ 几乎处处成立，证明 f 是单调递增的.

(53). 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调递增函数，且

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a),$$

求证 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

(54). 设 $[a,b]$ 为有界区间，$0 < p < q < \infty$，求证 $\mathscr{L}^q([a,b]) \subset \mathscr{L}^p([a,b])$.

(55). 设 $[a,b]$ 为有界区间，$1 \leq p \leq \infty$，$f, g \in \mathscr{L}^p([a,b])$. 求证

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$