# 应用随机过程

## 复合随机变量的概率生成函数

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

# 知识回顾

**概率生成函数**

$$P_X(z) = a^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = E[z^X]$$

1 $a_n = Prob\{X = n\}$是随机变$X$的概率分布函数

2 $P_X(z)$称为离散型随机变量$X$的概率生成函数

3 当$|z| < 1$时，级数$a^g(z)$收敛

# 知识回顾

生成函数性质

01 唯一性

02 独立性

03 $E[X] = P_X^{(1)}(1)$

04 $E[X^2] = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1)$

# 复合随机变量的概率生成函数

令$\{X_i\}$是一组相互独立、非负的整数随机变量，且母函数是$P_X(z)$。$N$也是非负的整数随机变量，母函数为$\pi_N(z)$。假设$N$与$\{X_i\}$相互独立。复合随机变量$S_N$定义为： $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$，试求$S_N$的概率生成函数$H_S(z)$。

解：由概率生成函数的定义有

$$H_S(z)=E[z^S]$$

双期望定理

$$=E_N\left[E[z^S|N]\right]=E_N\left[E[z^{X_1+X_2\ldots+X_N}|N]\right]$$

$N$与$\{X_i\}$相互独立

$$=E_N[E[z^{X_1+X_2\ldots+X_N}]]$$

$X_1$， $X_2$ …， $X_N$相互独立

$$=E_N[E[z^{X_1}]E[z^{X_2}]\ldots E[z^{X_N}]]$$

整理

$$=E_N[(P_X(z))^N]=\pi_N(P_X(z))$$

重要结论 $\boxed{H_S(z)=\pi_N(P_X(z))}$

# 复合随机变量的期望和方差



- 期望:

$$E[S_N|N] = E[X_1 + X_2 ... + X_N\ |N] = E[NX_1|N] = NE[X_1]$$

$$\Downarrow$$

$$E[S_N] = E\big[E[S_N|N]\big] = E\big[NE[X_1]\big] = E[N]E[X_1]$$

- 方差:

$$Var[Y] = E\big[Var[Y|N]\big] + Var\big[E[Y|N]\big]$$

$$\Downarrow$$

$$Var[S_N] = E\big[NVar[X_1]\big] + Var\big[NE[X_1]\big]$$

$$= Var[X_1]E[N] + E^2[X_1]Var[N]$$

# 案例分析



假设$N$是一个人在一年内去商店的次数，概率分布满足：$P\{N=n\}=(1-\theta)\theta^n$，$n=0,1\ldots$。每次去商店，有概率p的可能性买东西。是否购买与去商店是独立的，是否购买与去商店的次数也是独立的。现在我们想知道这个人一年内在商店购买东西的次数$S$。令$X_i=1$表示第$i$次进入商店并且购买了东西，0表示没有购买东西。则$S=X_1+X_2\ldots X_N$。试求复合随机变量$S$的概率生成函数，并利用概率生成函数求$S$的概率分布。

先求出$N$的母函数$\pi_N(z)$，

再求出$X_i$的母函数$P_X(z)$。

# 案例分析



解：$N$的概率生成函数$\pi_N(z)$：

$$\pi_N(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\theta)\theta^n z^n=\frac{1-\theta}{1-\theta z}$$

$X_i$的概率生成函数$P_X(z)$：

$$P_X(z)=(1-p)z^0+pz=q+pz$$

利用上述结论，$S$的概率生成函数$H_S(z)$：

$$H_S(z)=\pi_N\big(P_X(z)\big)=\frac{1-\theta}{1-\theta P_X(z)}=\frac{1-\theta}{1-\theta(q+pz)}$$

# 案例分析

对上式进行整理

$$\frac{1-\theta}{1-\theta(q+pz)}=\frac{\dfrac{1-\theta}{1-q\theta}}{1-\left(\dfrac{p\theta}{1-q\theta}\right)z}=\frac{\dfrac{1-(p+q)\theta}{1-q\theta}}{1-\left(\dfrac{p\theta}{1-q\theta}\right)z}=\frac{1-\boxed{\dfrac{p\theta}{1-q\theta}}}{1-\left(\boxed{\dfrac{p\theta}{1-q\theta}}\right)z}$$

令$Q=\frac{P\theta}{1-q\theta}$，则

$$H_S(z)=\frac{1-Q}{1-Qz}$$

我们观察到$H_S(z)$与几何分布的概率生成函数类似，于是我们得到

$$P\{S=k\}=(1-Q)Q^k,\quad k=0,1,\cdots$$

# 谢谢听课

授课教师 赵毅