第三章 线性方程组

§5. 线性方程组有解判别定理

在有了向量和矩阵的理论准备之后,我们现在可以来分析一下线性方程组的问题,给出线性方程组有解的判别条件.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{1}$$

引入向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \quad (2)$$

于是线性方程组(1)可以改写成向量方程

$$\boldsymbol{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta} \qquad (3)$$

显然,线性方程组(1)有解的充分必要条件为向量$\boldsymbol{\beta}$可以表成向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\ldots\boldsymbol{\alpha_s}$的线性组合. 用秩的概念,方程组(1)有解的条件可以叙述如下;

定理 7.(线性方程组有解判别定理) 线性方程组的(1)有解的充分必要条件为它的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

与增广矩阵

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩.

证明. 先证必要性, 设线性方程组(1)有解, 就是说, $\boldsymbol{\beta}$可以经向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示, 由此推出, 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$等价, 因而有相同的秩. 这两个向量组分别矩阵$A$与$\tilde{A}$的列向量组. 因此, 矩阵$A$与$\tilde{A}$有相同的秩.

再证充分性, 设矩阵A与$\tilde{A}$有相同的秩, 就是说, 它们的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$有相同的秩, 令它们的秩为$r$. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots\boldsymbol{\alpha}_n$中的极大线性无关组是由$r$个向量组成, 无妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是它的一个极大线性无关组. 显然, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$也是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$的一个极大线性

无关组, 因此向量β可以经$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$线性表示, 当然它也可以$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$线性表出, 因此, 方程组(1)有解.

应该指出, 这个判别条件与以前的消元法是一致的. 我们知道, 用消元法解线性方程组(1)的第一步就是用初等行变换把增广矩阵化成阶梯形, 这个阶梯形矩阵在适当调动前n列的顺序之后可能有两种情形

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{r,r} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

或者 $$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{r,r} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & c'_{1,r+1} & \cdots & c'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & c'_{r,r+1} & \cdots & c'_{rn} & b'_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r, d_{r+1} \neq 0$. 在前一种情形, 我们说原方程组无解, 而在后一种情形方程组有解. 实际上, 把这个阶梯形矩阵中最后一列去掉, 那就是方程组(1)的系数矩阵A经过初等行变换化成的阶梯形. 这就是说, 当系数矩阵与增广矩阵的秩相等时, 方程组有解; 当增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩加1时, 方程组无解.

以上的说明也可以认为是判别定理的另一个证明.

根据 Cramer 法则, 也可以给出一般线性方程组的一个解法, 这个解法在理论上是有用的.

设线性方程组(1)有解, 矩阵A与$\tilde{A}$的秩都等于r, 而D是矩阵A的一个不为零的r阶子式(当然它也是$\tilde{A}$的一个不为零的子式), 为方便起见, 无妨D设位于A的左上角.

显然, 在这种情形下, A的前r行就是一个极大线性无关组, 第$r+1,\ldots,s$行都可以经它们线性表示. 因此, 方程组(1)与

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \tag{4}$$

同解.

当$r=n$时, 由 Cramer 法则, 方程组(4)有唯一解, 也就是方程组(1)有唯一解.

当$r<n$时, 将方程组(4)改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}\cdots-a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases} \tag{5}$$

(5) 作为$x_1,\dots,x_r$的一个方程组, 它的系数行列式$D\neq 0$. 由

Cramer 法则, 对于$x_{r+1},\dots,x_n$的任意一组值, 方程组(5), 也就是方程组(1), 都有唯一的解. $x_{r+1},\dots,x_n$就是方程组(1)的一组自由未知量. 对(5)用 Cramer 法则, 就可以解出$x_1,\dots,x_r$

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 + c'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 + c'_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{2n}x_n, \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\cdots \\ x_r = b'_r + c'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c'_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (6)$$

§6.线性方程组解的结构

一. 齐次线性方程组的基础解系

二. 一般线性方程组解的结构

在解决了线性方程组有解的判别条件之后，我们进一步来讨论线性方程组解的结构. 在方程组的解是惟一的情形下，当然没有什么结构问题. 在有多个解的情形下，所谓解的结构问题就是解与解之间的关系. 下面我们将证明，虽然在这时有无穷多个解，但是全部解都可以用有限多个解表示出来. 这就是本节要讨论的问题和要得到的主要结果. 下面的讨论当然都是对于有解的情况说的，这一点就不用每次都说明了.

上面我们提到，n元线性方程组的解是n维向量，在解不是惟一的情况下，作为方程组的解的这些向量之间有什么关系呢

我们先看齐次线性方程组的情形. 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

是一齐次线性方程组，它的解所成的集合具有下面两个重要性质：

1. 两个解的和还是方程组的解.

设 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}}$，$(l_1, l_2, \ldots, l_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 (1) 的两个解，这就是说，把它们代入方程组，每个方程成恒等式，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

这两个解的和

$$(k_1 + l_1, k_2 + l_2, \ldots, k_n + l_n)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

代入方程组，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j =$$

$$0 + 0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, s).$$

这说明(2)确实是方程组的解.

1. 一个解的倍数还是方程组的解

设$(l_1, l_2, \dots, l_n)^{\mathrm{T}}$ 是 方 程 组 (1) 的 一 个 解 ， 不 难 看 出 $(cl_1, cl_2, \dots, cl_n)^{\mathrm{T}}$仍是方程组(1)的一个解, 因为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(cl_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = c \cdot 0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

从几何上看, 这两个性质是清楚的. 在$n = 3$时, 每个齐次方程表示一个过原点的平面, 于是方程组的解, 也就是这些平面的交, 如果不只是原点的话, 就是一条过原点的直线或一个过原点的平面. 以原点为起点, 而端点在这样的直线或平面上的向量显然具有上述性质.

对于齐次线性方程组，综合以上两点即得，解的线性组合还是方程组的解. 这个性质说明，如果方程租有几个解，那么这些解的所有可能的线性组合就给出很多的解. 基于这个事实我们要问：齐次线性方程组的全部解是否能够通过它的有限的几个解的线性组合给出？回答是肯定的. 为此，我们给出下面的定义.

定义 7. 齐次线性方程组(1)的一组解$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$称为(1)的一个基础解系，如果

1) (1)的任一个解都能表成$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$的线性组合，

2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$线性无关.

因该注意，定义中的条件 2)是为了保证基础解系中没有多余的解. 事实上，如果$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$线性相关，也就是其中至少有

一个可以表成其它的解的线性组合，譬如说η_t可以表成$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{t-1}$的线性组合，那么$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{t-1}$显然也具有性质 1).

现在来证明齐次线性方程组的确有基础解系.

定理 8. 在含n个未知量的齐次线性方程组有非零解的情况下它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于$n-r$，这里r表示系数矩阵的秩（以下将看到，$n-r$也是自由未知量的个数）.

证明. 设方程组(1)的系数矩阵的秩为r，无妨设左上角的r阶子式不等于零. 于是按上一节最后的分析，方程组(1)可以改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} \cdots - a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (3)$$

如果$r = n$, 那么方程组没有自由未知量, 方程组(3)的右端全为零. 这时方程组只有零解, 当然也就不存在基础解系. 以下设$r < n$.

我们知道, 把自由未知量的任意一组值$(c_{t+1}, \ldots, c_n)$代入(3),

就唯一地决定了方程组(3)---也就是方程组(1)的一个解.

换言之, 方程组(1)的任意两个解, 只要自由未知量的值一样, 这两个解就完全一样. 特别地, 如果在一个解中, 自由未知量的值全为零, 那么这个解一定是零解.

在(3)中我们分别用$n-r$组数

$$(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1) \qquad (4)$$

来代自由未知量$(x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n)$，就得到方程组(3)—也就是方程组(1)的$n-r$个解：

$$\begin{cases} \eta_1=(c_{11},c_{12},\dots,c_{1r},1,0,\dots,0) \\ \eta_2=(c_{21},c_{22},\dots,c_{2r},0,1,\dots,0) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \eta_{n-r}=(c_{n-r1},c_{n-r2},\dots,c_{n-r,r},0,0,\dots,1) \end{cases} \qquad (5)$$

我们现在来证明，(5)就是一个基础解系. 首先证明$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$线性无关. 事实上，如果

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0,$$

即

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=(*,\dots,*,k_1,k_2,\dots,k_{n-r})=(0,\cdots,0,0,0,\cdots,0)$$

比较最后的$n-r$个分量, 得

$$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0.$$

因此, $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$线性无关.

再证明方程组(1)的任一个解都可以由$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$线性表出. 设

$$\eta=(c_1,\dots,c_r,c_{r+1},c_{r+2},\dots,c_n) \tag{6}$$

是(1)的一个解. 由于$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$是(1)的解, 所以线性组合

$$c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r}. \tag{7}$$

也是(1)的一个解. 比较(7)和(6)的最后$n-r$个分量得知, 自由未知量有相同的值, 从而这两个解完全一样, 即

$$\eta=c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r} \tag{8}$$

这就是说，任意一个解η都能表成$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$线性组合. 综合以上两点，我们就证明了$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$确为方程组(1)的一个基础解系，因而齐次线性方程组的确有基础解系. 证明中具体给出的这个基础解系是由$n-r$个解组成. 至于其他的基础解系，由定义，一定与这个基础解系等价，同时它们又是线性无关的，因而有相同个数的向量，这就是定理的第二部分.

由定义容易看出，任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系.

下面来看一般线性方程组的解的结构. 如果把一般线性方程组

例1. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

解: 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A)=2$, 故 $\dim S_A=2$. 原方程组与 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 \\ x_2 = \qquad\quad -x_4 \end{cases}$ 同解.

分别取 $x_3=1, x_4=0; x_3=0, x_4=1.$ 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是原方程组的通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意实数.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \tag{9}$$

的常数项换成 0, 就得到齐次方程组(1). 方程组(1)称为方程组(9)的**导出组**. 方程组(9)的解与它的导出组(1)的解之间有密切的关系:

1. 线性方程组(9)的两个解的差是它的导出组(1)的解.

设$(k_1, k_2, \dots, k_n)^T$, $(l_1, l_2, \dots, l_n)^T$是方程组(9)的两个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

这两个解的差是

$$(k_1 - l_1, k_2 - l_2, \dots, k_n - l_n)^T$$

代入方程组, 得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j - l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j =$$

$$b_i - b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

这说明$(k_1 - l_1, k_2 - l_2, \ldots, k_n - l_n)^{\mathrm{T}}$确实是方程组(1)的一个解.

2. 线性方程组(9)的一个解与它的导出组(1)的一个解之和还是这个线性方程组的解.

设$(k_1, k_2, \ldots, k_n)^T$是方程组(9)的一个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

又设$(l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$是导出组(1)的一个解, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

显然

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j =$$

$$b_i + 0 = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

由这两点我们很容易证明下面的定理

定理 9. 如果$\boldsymbol{\gamma}_0$是方程组(9)的一个特解，那么方程组(9)的任一个解$\boldsymbol{\gamma}$可以表成

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}, \qquad (10)$$

其中$\boldsymbol{\eta}$是导出组(1)的一个解. 因此，对于方程组(9)的任一个特解$\boldsymbol{\gamma}_0$，当$\boldsymbol{\eta}$取遍它的导出组的全部解时，(10)就给出(9)的全部解.

证明. 显然 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0)$，

由上面的 1，$\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0$是导出组的一个解. 令

$$\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\eta},$$

就得到定理的一个结论. 既然(9)的任一个解都能表成(10)的形式，由 2，在$\boldsymbol{\eta}$取遍(1)的全部解的时候

$\gamma = \gamma_0 + \eta$

就取遍(9)的全部解.

定理(9)说明了，为了找出一般线性方程组的全部解，我们只要找出它的一个特殊解以及导出组的全部解就行了. 导出组是一个齐次线性方程组，在上面我们已经看到，一个齐次线性方程组的解的全体可以用基础解系来表出. 因此，根据定理我们可以用导出组的基础解系来表出一般线性方程组的一般解：如果γ_0是方程组(9)的一个特解，$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$是其导出组的一个基础解系，那么(9)的任一个解$\gamma$可以表成

$$\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

推论. 在方程组(9)有解的条件下，解是唯一的充分必要条件是它的导出组(1)只有零解.

证明. 充分性：如果方程组(9)有两个不同的解, 那么它的差就是导出组的一个非零解. 反之, 如果导出组只有零解, 那么方程组有唯一解.

必要性：如果导出组有非零解, 那么这个解与方程组(9)的一个解(因为它有解)之和就是(9)的另一个解, 也就是说, (9)不止一个解, 因之, 如果方程(9)有唯一解, 那么它的导出组只有零解.

线性方程组的理论与解析几何中关于平面与直线的讨论有密切的关系, 我们来看线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \end{cases} \qquad (11)$$

(11)中每一个方程表示一个平面, 线性方程组(11)有没有解的问题就相当于这两个平面有没有交点的问题. 我们知道,

两个平面只有在平行而不重合的情形下没有交点. (11) 的系数矩阵与增广矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\qquad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}$$

它们的秩可能是 1 或者 2, 有三个可能的情形:

1. $\mathbf{r}(\mathbf{A})=\mathbf{r}(\widetilde{A})=\mathbf{1}$, 这就是$A$的两行成比例, 从而这两个平面平行, 又因为$\widetilde{A}$的两行也成比例, 所以这两个平面重合, 方程组有解.

2. $r(A)=1, r(\widetilde{A})=2$, 这就是说两个平面平行而不重合, 方程组无解.

3. $r(A)=2$, 此时$\widetilde{A}$的秩一定也是 2. 几何上就是这两个平面不平行, 因而一定相交, 方程组有解.

下面来看线性方程组的解的几何意义. 设$r(A)=2$, 这时一般解中有一个自由未知量, 碧如说x_3, 一般解的形式为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_1 x_3, \\ x_2 = d_2 + c_2 x_3, \end{cases} \tag{12}$$

从几何上看, 两个不平行的平面交成一条直线, 把(12)改写一下就是直线的点向式方程

$$\frac{x_1 - d_1}{c_1} = \frac{x_2 - d_2}{c_2} = x_3.$$

如果引入参数t, 令$x_3 = t$, (12)就成为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_1 t, \\ x_2 = d_2 + c_2 t \\ \quad x_3 = t \end{cases} \tag{13}$$

这就是直线的参数方程.

(11)的导出方程组是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

从几何上看，这是两个分别与(11)中平面平行的且过原点的平面，因而它们的交线过原点且与直线(12)平行．既然与直线(12)平行，也就是有相同的方向，所以这条直线的参数方程为

$$\begin{cases} x_1 = c_1 t, \\ x_2 = c_2 t, \\ x_3 = t. \end{cases} \qquad (15)$$

(13)与(15)正说明线性方程组(11)与它的导出组(14)的解之间的关系.

例2. 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 7 \\ 4x_1 + 11x_2 + 8x_3 \qquad\qquad + 5x_5 = 3 \end{cases}$$

解:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 4 & 11 & 8 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & -11 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & -11 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} & 4 & \frac{71}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \end{array}\right)$$

写成方程组的形式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{71}{2} + \dfrac{19}{2}x_4 - 4x_5 \\ x_2 = -11 - 4x_4 + x_5 \\ x_3 = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}x_4 \end{cases}$$

其中 x_4, x_5 为自由未知量. 令 $x_4 = x_5 = 0$, 得原方程组的一个特解

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{71}{2} \\ -11 \\ -\dfrac{9}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ 在导出组 $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{2}x_4 - 4x_5 \\ x_2 = -4x_4 + x_5 \\ x_3 = \dfrac{3}{4}x_4 \end{cases}$$ 中,

分别令 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 得出导出组的一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ -4 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此原方程组的解为

$\eta = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2$，其中 k_1, k_2 为任意常数.

例3. 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程组无解, 有唯一解, 有无穷多个解?在有无穷多个解时求出它的通解.

解: 对增广矩阵 $(A \mid b)$ 施行初等行变换将它变为行阶梯形矩阵

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{array}\right)$$

(1) 当 $\lambda=0$ **时，** $R(A)=1, R(A \mid b)=2$,**方程组无解；**

(2) 当$\lambda\neq 0$**且** $\lambda\neq -3$**时，**$R(A)=R(A \mid b)=3$,**方程组有唯一解；**

(3) 当$\lambda=-3$**时，** $R(A)=R(A \mid b)=2$,**方程组有无穷多个解.**

这时

$$\left(A \mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow[r_1-r_2]{-\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$$

由此得到通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

综上所述，可以得出用行初等变换法讨论mxn方程组 $Ax=b$ 的解的一般步骤：

第**1**步 写出方程组的增广矩阵$\left[A|b\right]$

用行初等变换将其变成梯矩阵。若梯矩阵最末的非零行，其首非零元，出现在最右一列的位置，则方程组无解，讨论结束；否则，进入下一步。

第**2**步 将第**1**步所得梯矩阵，用行初等变换变成简化梯矩阵。若非零行数等于n（未知数个数，亦即系数矩阵的列数），从末列可读得唯一解；若非零行数$r<n$，则可读出含无限多个的全部解(通解)的表达式，其中包含$n-r$个任意参数。

例 试讨论线性代数方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的解

Sol. 用行初等变换将增广矩阵$\overline{A}$ 变成梯矩阵，以判定方程组的相容性。在相容的情况下，再进一步求出其解。

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{r_{12}(-3) \\ r_{13}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{r_{23}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

最后这个是梯矩阵，非零行数$r=2$(这里$n=4$，故为$r<n$)，可以看出方程组是有解的，进一步变成简化梯矩阵，有

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{r_{21}(-1)}{\overset{r_2\left(-\frac{1}{4}\right)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

现在$n=4$，故无限多解的表达式中应含$4-2=2(n-r=2)$个任意参数，从简化梯矩阵可直接读出此通解式（含全部无限多个解的表达式）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathrm{R}$$

或令 $t_1 = 2c_1, t_2 = 4c_2$**，将通解general solution写成更简洁的形式：**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$