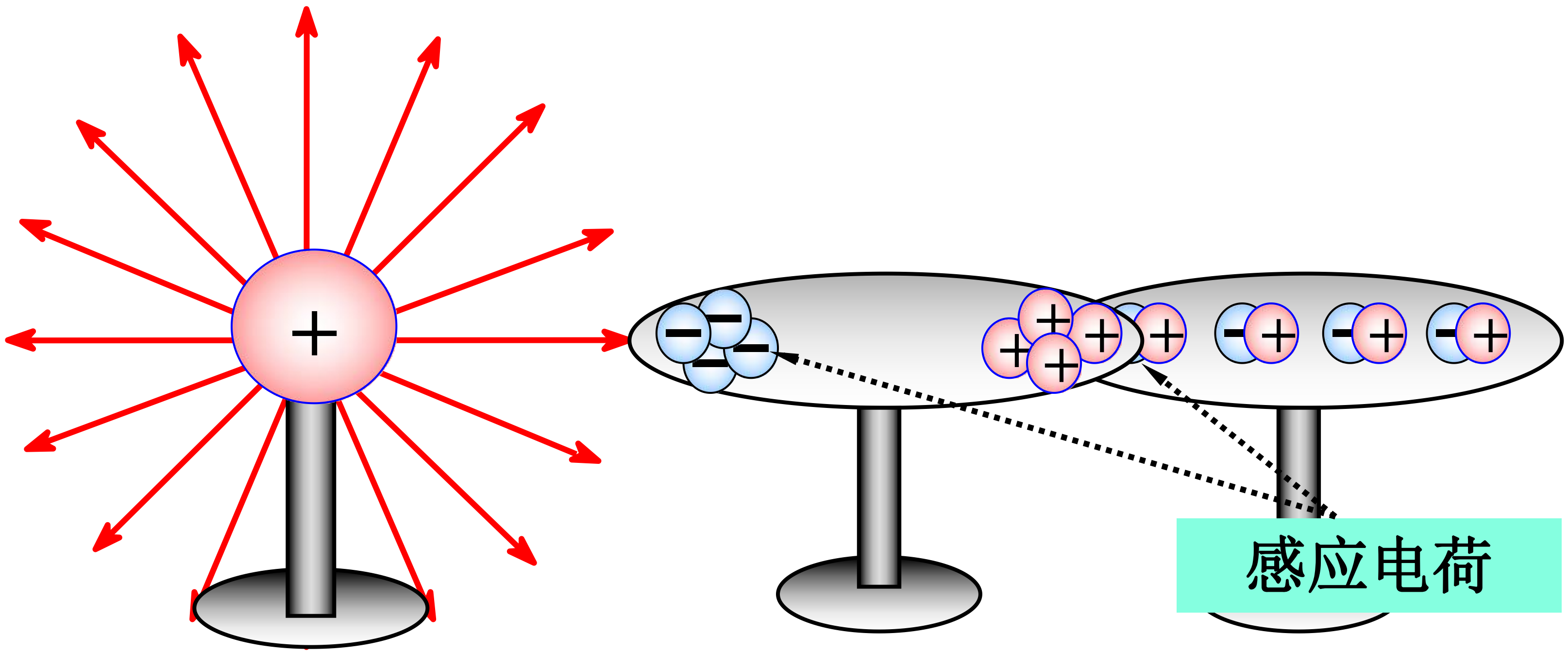
§6 静电场中的导体 电容

一、静电感应 静电平衡条件

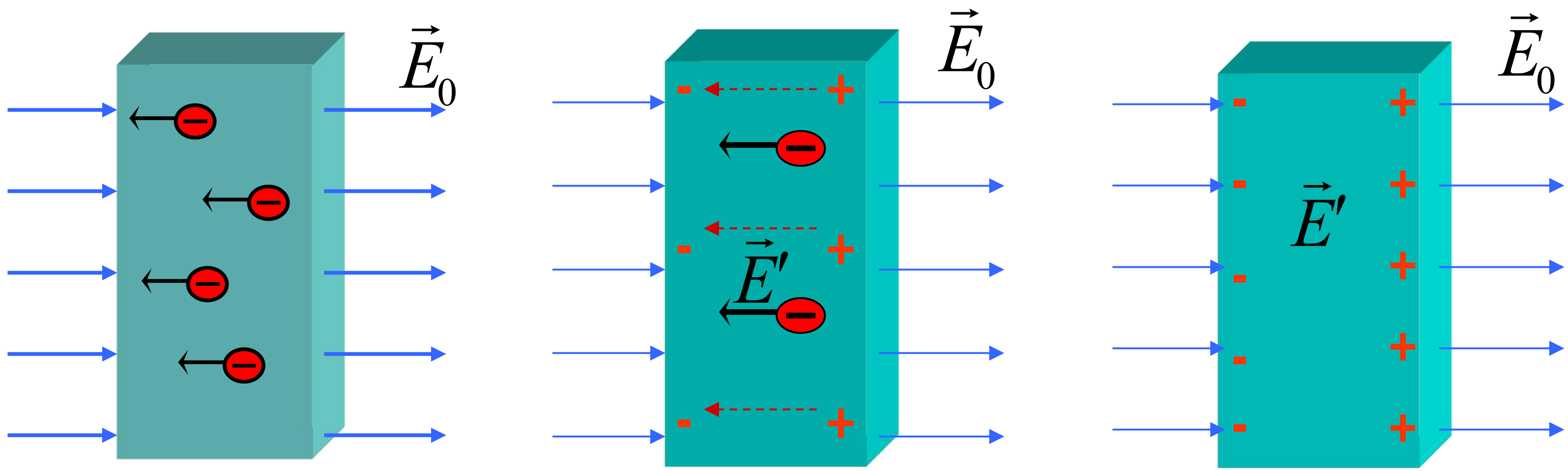
1. 静电感应



2. 静电平衡

导体的特点：有可以移动的自由电子。

导体在电场中，自由电子就要受到电场力而运动，这就改变了导体上原来的电荷分布。



$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$　　$\vec{F}=q\vec{E}=-e\vec{E}$　　$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$

静电感应　　　　静电平衡

导体的**静电平衡状态：**导体的内部和表面都没有电荷作任何宏观定向运动的状态.

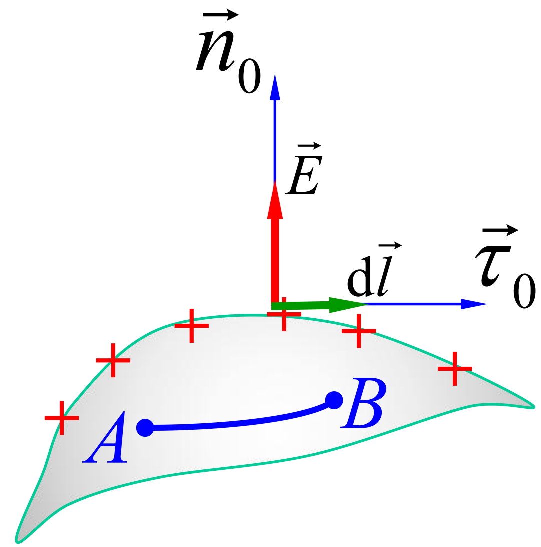
静电平衡条件

（1）导体内部任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向，都与导体表面垂直。

推论：

——导体是等势体



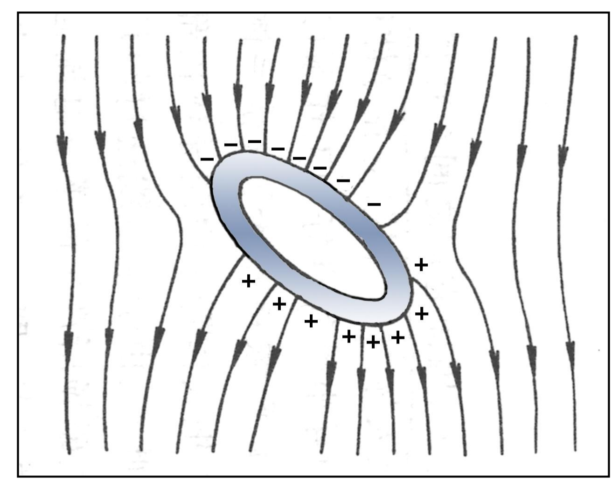
➢ 导体表面是等势面

$$\because \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$$

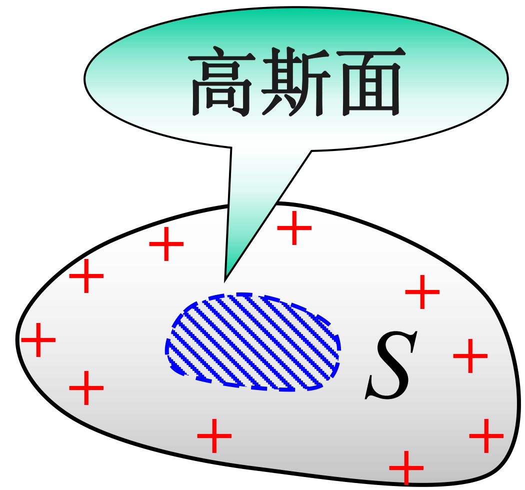
$$\therefore \mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

➢ 导体内各处电势相等

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



二、静电平衡时导体上电荷的分布



1. 实心导体

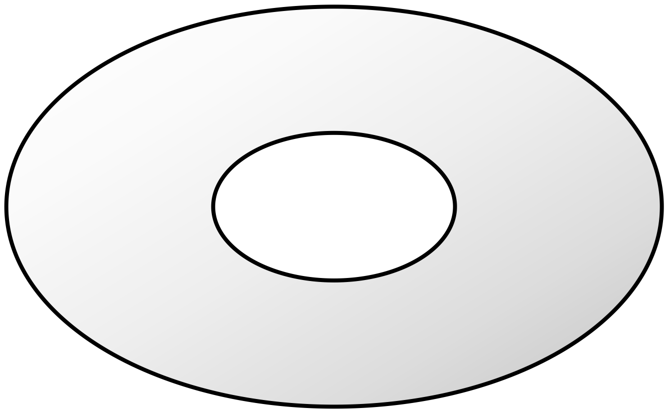
$$\because \vec{E}=0 \qquad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$$\therefore \sum_i q_i = 0$$

结论： 导体内部无电荷

2. 空腔导体

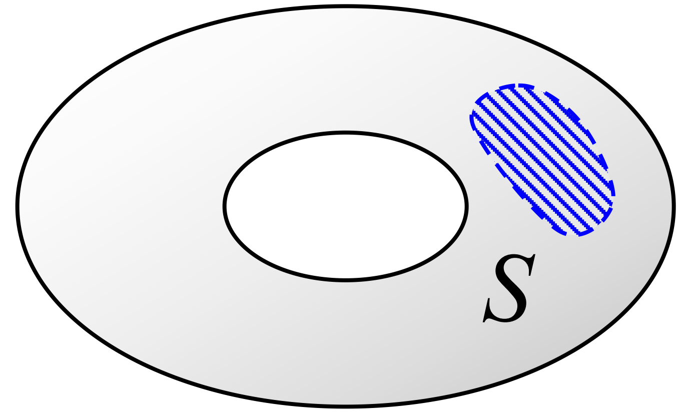
- 空腔内无电荷



电荷只能分布在空腔的外表面上（内表面无电荷）

➢ 对于空腔导体内取高斯面，有

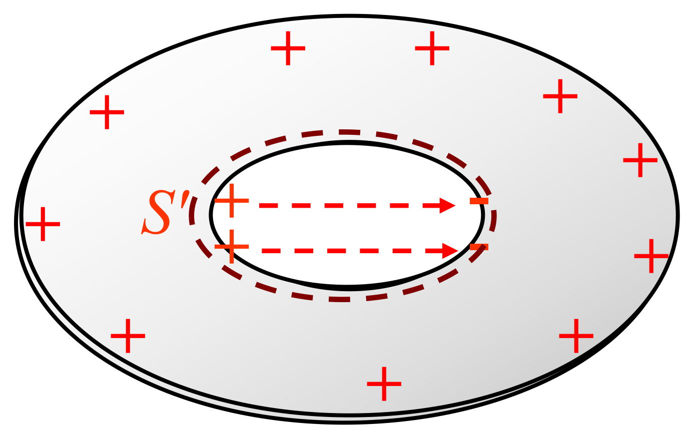
$$\because \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i = 0$$



——电荷只能分布在表面上

➢ 对于空腔的内表面，有

$$\because \oint_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i = 0$$



➢ 若内表面带等量异号的电荷，则

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$

——与“静电平衡状态的导体是等势体”相矛盾，故空腔的内表面不带电。

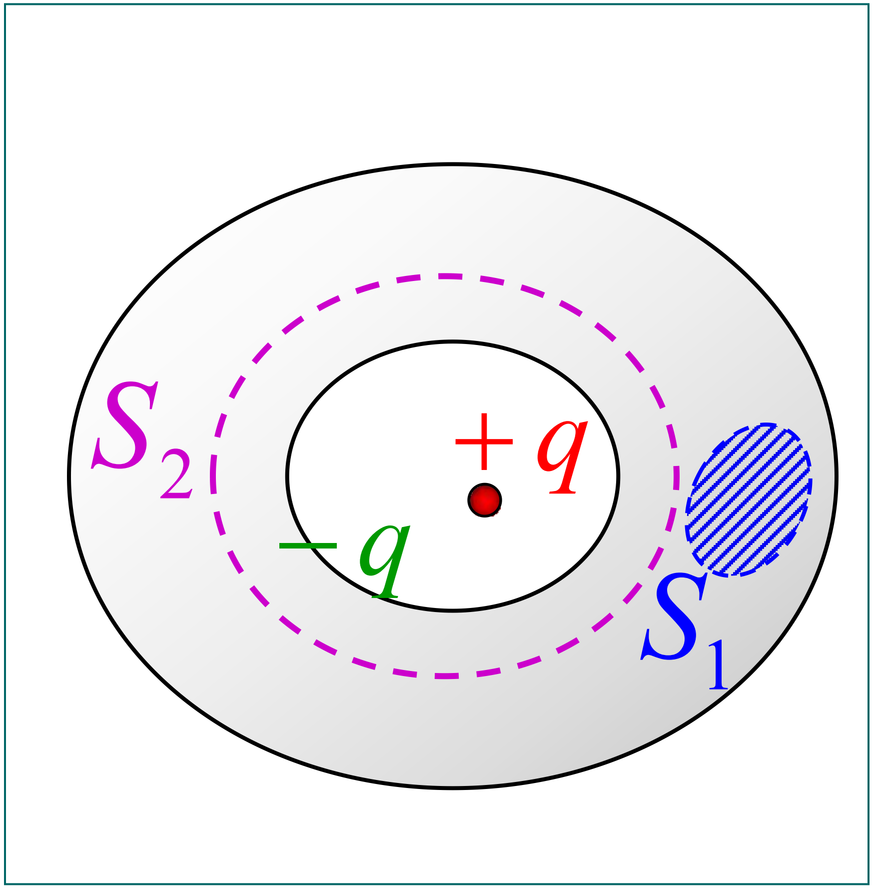
结论： 空腔内无电荷时，内表面无电荷，电荷分布在外表面，且腔内无电场线

空腔内有电荷

$$\because \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\therefore \quad \sum q_i = 0$$

——电荷只能分布在表面上。



内表面上有电荷吗？

$$\because \quad \sum q_i = q_{内} + q = 0$$

$$\therefore \quad q_{内} = -q$$

结论： 当空腔内有电荷$+q$时，内表面因静电感应出现等量异号的电荷$-q$，外表面同时出现等量同号的感应电荷$+q$。

3. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

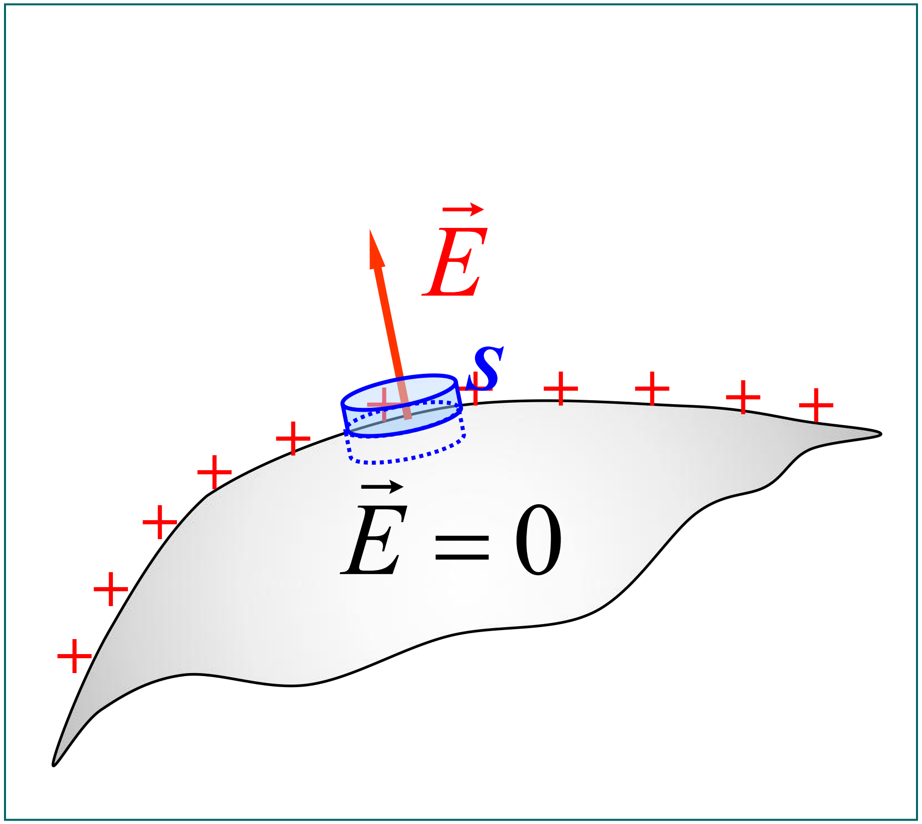
作圆柱形高斯面 **S**，使其一个底在导体内。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

σ 为表面电荷面密度

$$E S_{底} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

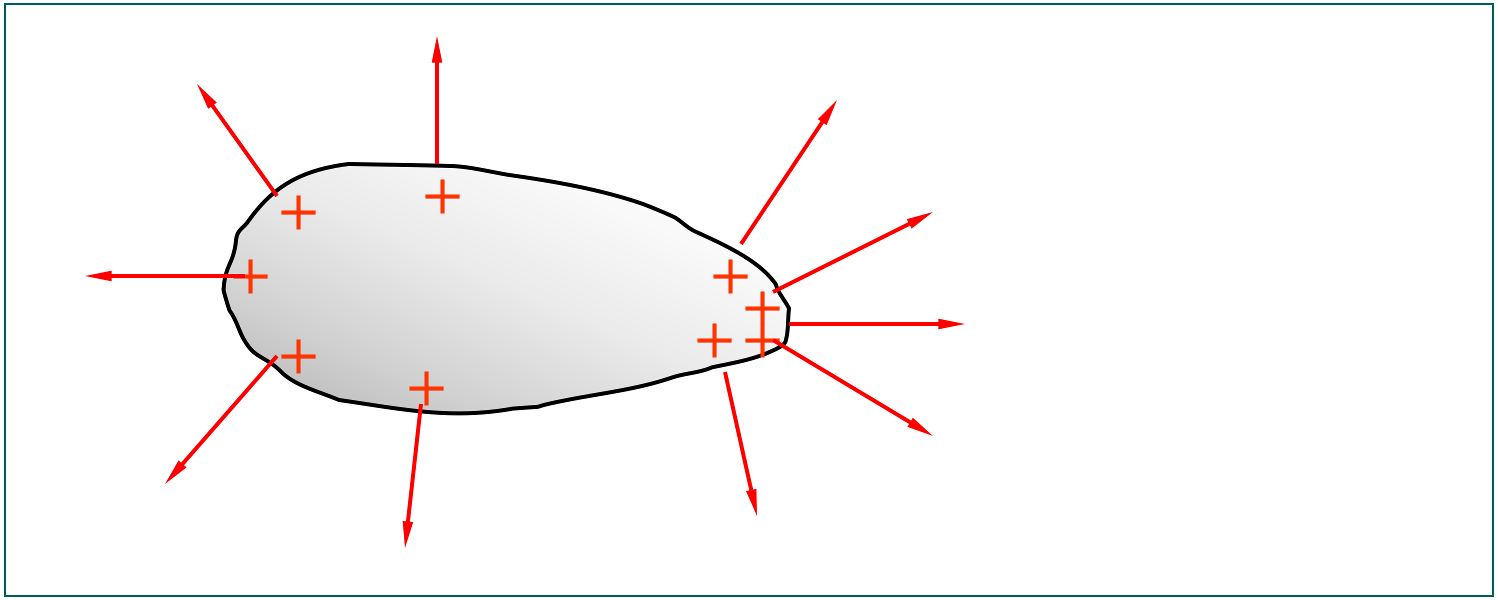
$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



结论：导体表面附近某处的电场强度大小与该处表面电荷面密度成正比。

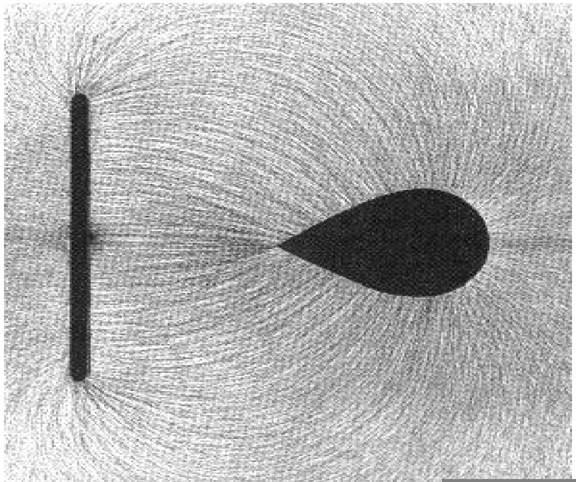
4. 导体表面电荷密度与导体表面曲率的关系

$$\sigma \sim \frac{1}{\boxed{\rho}}$$ 曲率半径

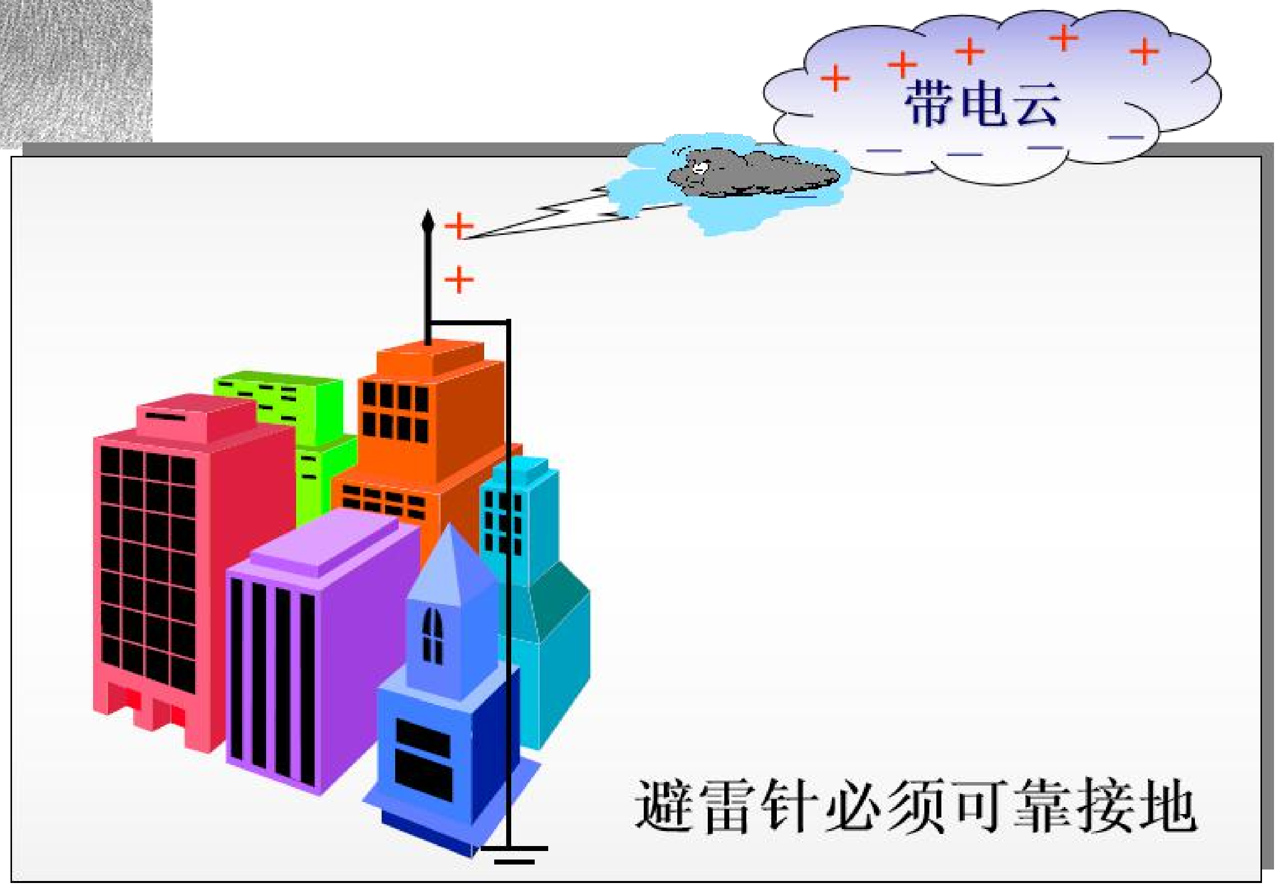


- 导体表面电荷分布密度与导体表面的曲率半径成反比。

尖端放电现象

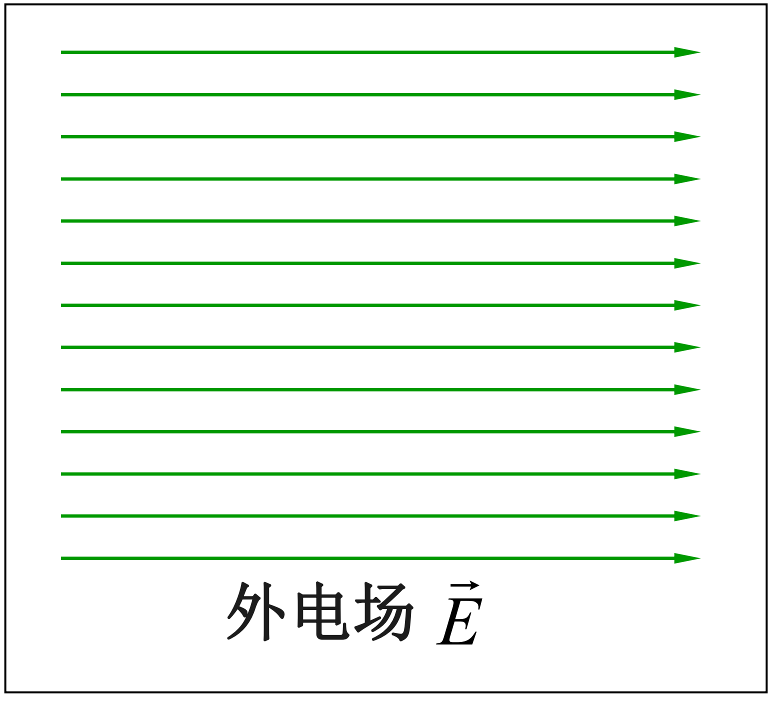


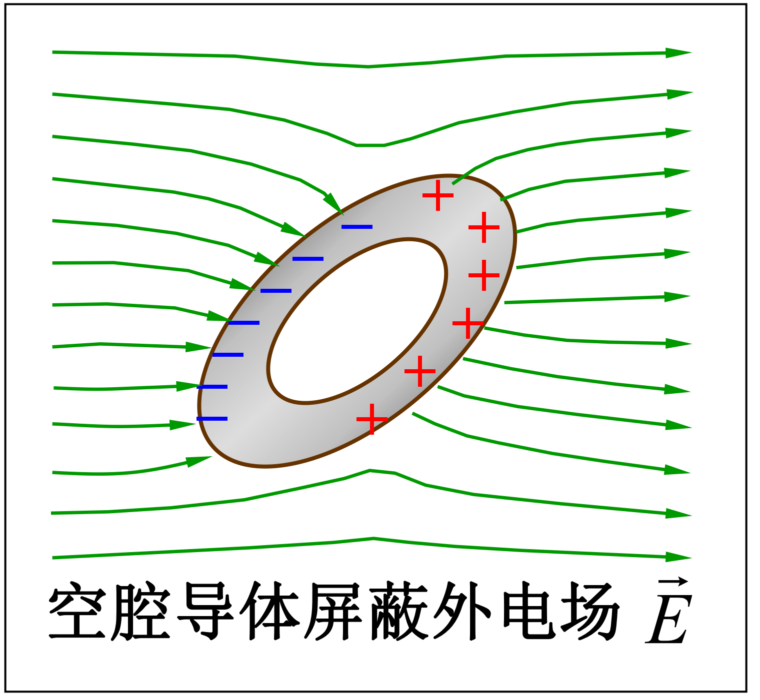
带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象.



5. 静电屏蔽

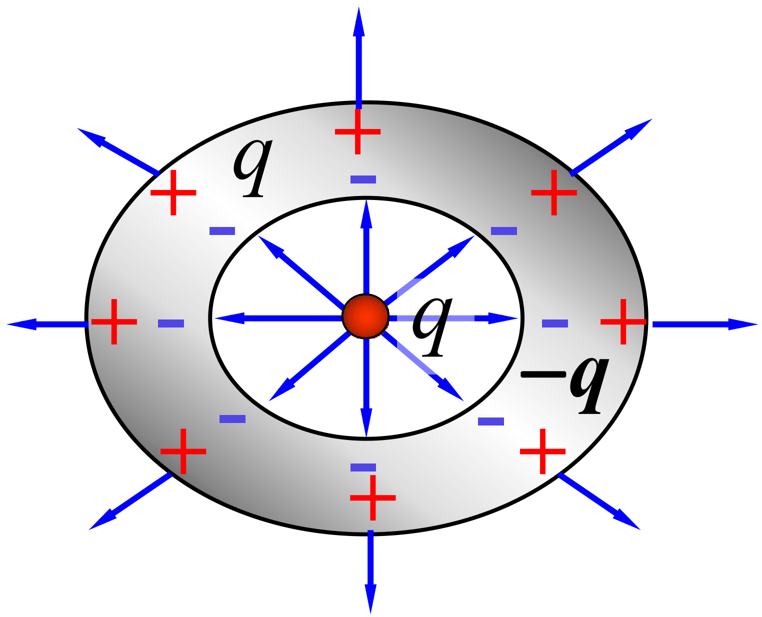
（1）屏蔽外电场

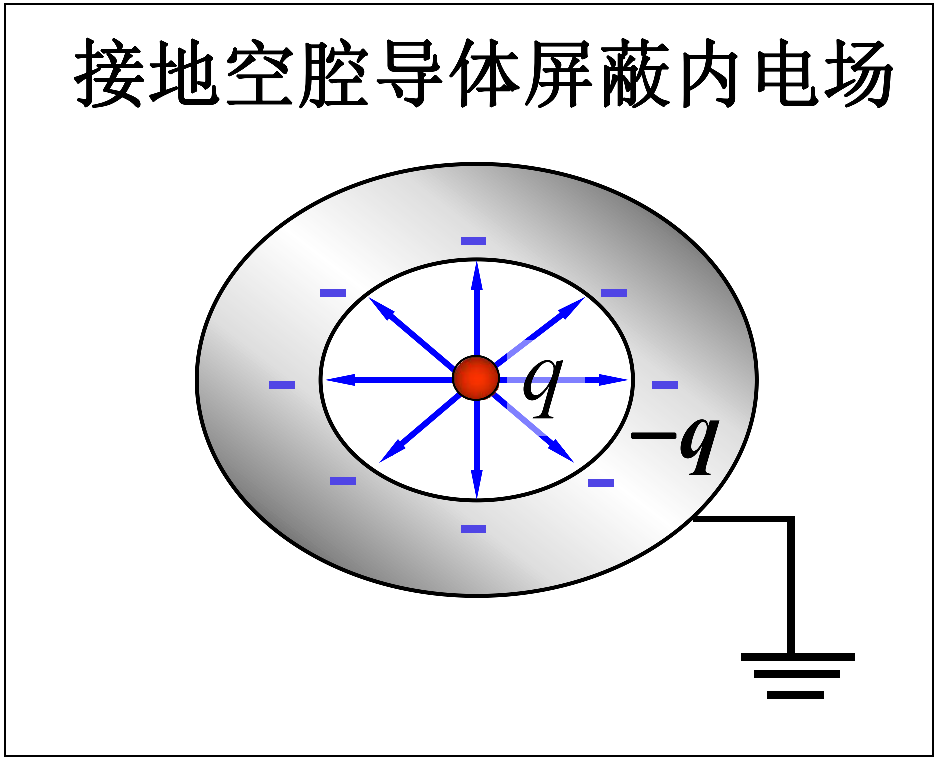




结论：空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响。此时，整个空腔导体和腔内的电势处处相等。

（2）屏蔽腔内电场



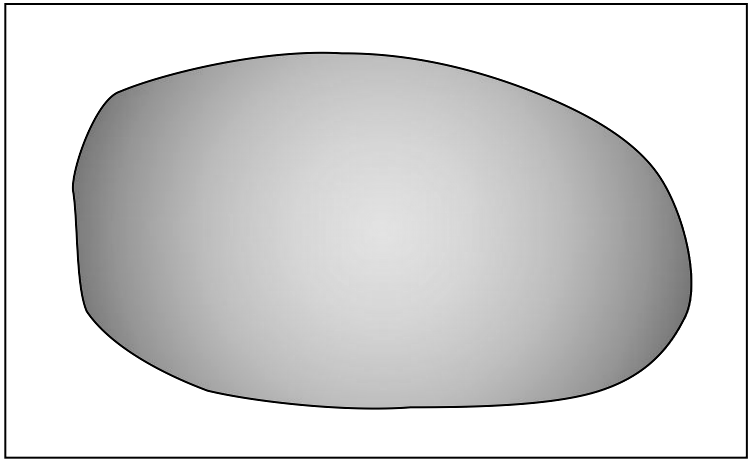


结论：接地空腔导体将使外部空间不受空腔内的电场影响。

综合以上两种情形可知：一个接地的封闭导体壳，可以起到<u>壳内外互不影响</u>的屏蔽作用。

三、孤立导体的电容

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$

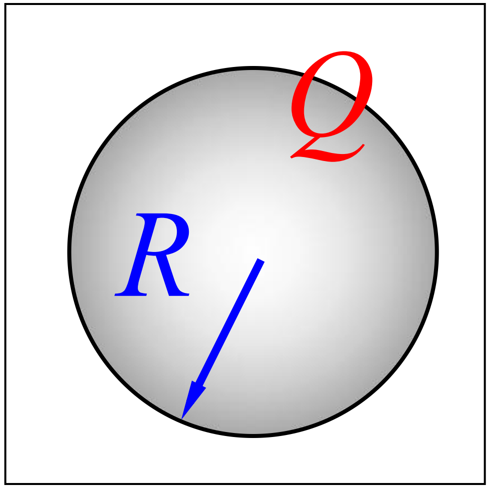


单位：法拉（F）

$$1\,\mathrm{F}=1\,\mathrm{C/V} \qquad 1\mathrm{F}=10^{6}\,\mu\mathrm{F}=10^{12}\,\mathrm{pF}$$

例如： 孤立的导体球的电容

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}=4\pi\varepsilon_0 R$$



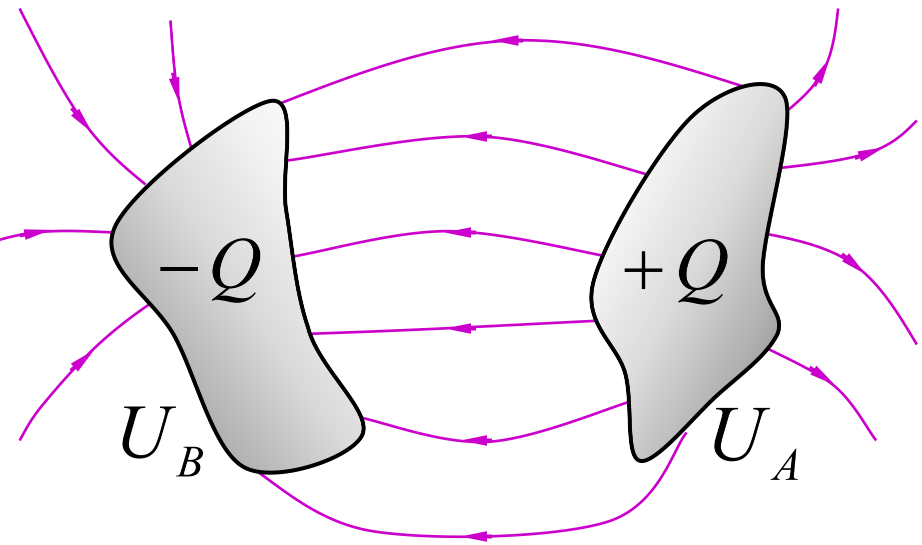
- 若是地球大小，$R=6.4\times10^{6}\,\mathrm{m}$，则

$$C\approx7\times10^{-4}\,\mathrm{F}$$ ——很小！

四、电容器

电容器由两个导体极板构成，串接在电路中，彼此带有等量异号的电荷。

以 —||— 符号表示。



电容器的电容

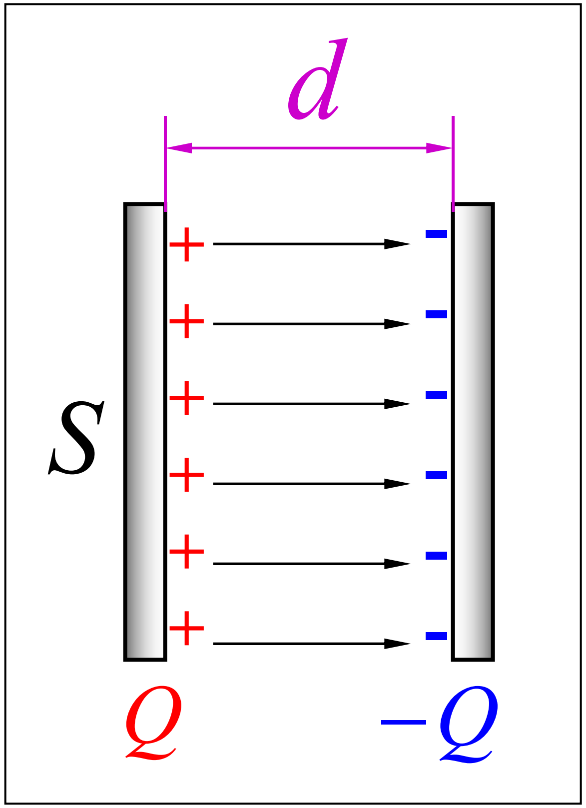
$$\boxed{C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{Q}{\Delta U}}$$

$$\Delta U=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电容器电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关。与所带电荷量无关。

五、电容器电容的计算

1. 平板电容器



两带电平板间的电场强度

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

两带电平板间的电势差

$$\Delta U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

平板电容器电容

$$\boxed{C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

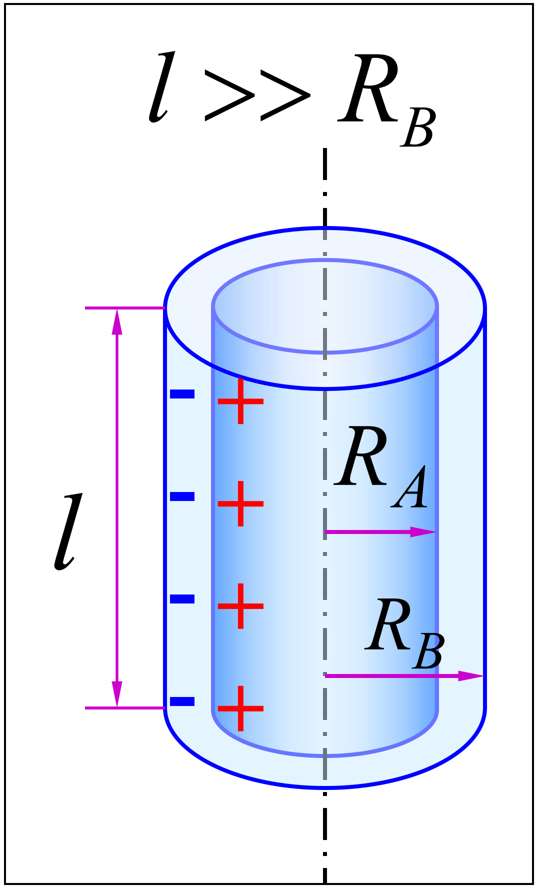
2. 圆柱形电容器

设两导体圆柱面单位长度上分别带电 $\pm\lambda$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad (R_A<r<R_B)$$

$$\Delta U=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda\,\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}=\left(2\pi\varepsilon_0 l\right)\Big/\ln\frac{R_B}{R_A}}$$



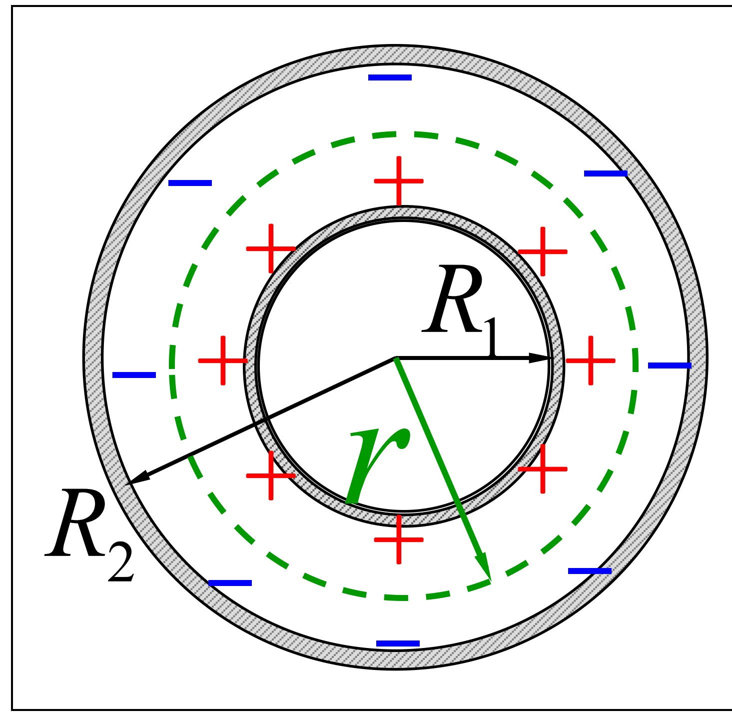
若 $d=R_B-R_A<<R_A$， 则 $\ln\frac{R_B}{R_A}=\ln\left(1+\frac{d}{R_A}\right)\approx\frac{d}{R_A}$

故 $C\approx\frac{2\pi\varepsilon_0 lR_A}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

3. 球形电容器的电容

球形电容器是由半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心金属球壳所组成.

解 设内球带正电（$+Q$），外球带负电（$-Q$）.



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$$

$$\Delta U = \int_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

$$R_2 \to \infty,\quad C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

孤立导体球电容

电容器电容的计算

步骤

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{Q}{\Delta U}$$

（1）设两极板分别带电$\pm Q$

（2）求两极板间的电场强度$\vec{E}$

（3）求两极板间的电势差ΔU

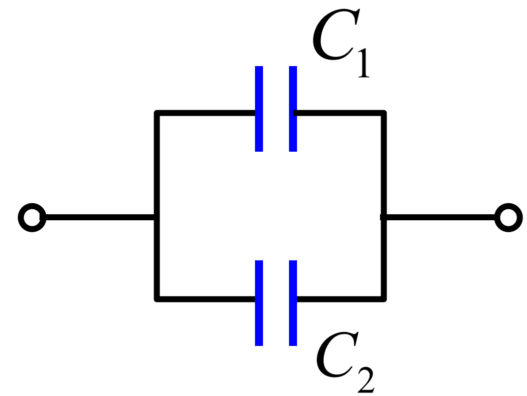
（4）由$C=Q/\Delta U$求C

设 $Q \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \Delta U \longrightarrow C=\dfrac{Q}{\Delta U}$

六、电容器的串联和并联

1. 电容器的并联

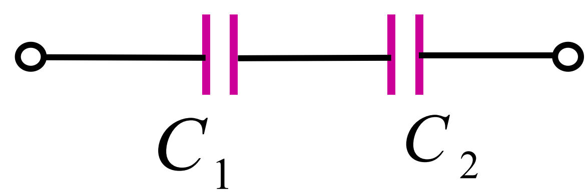
$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i$$



$$C=C_1+C_2$$

2. 电容器的串联

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

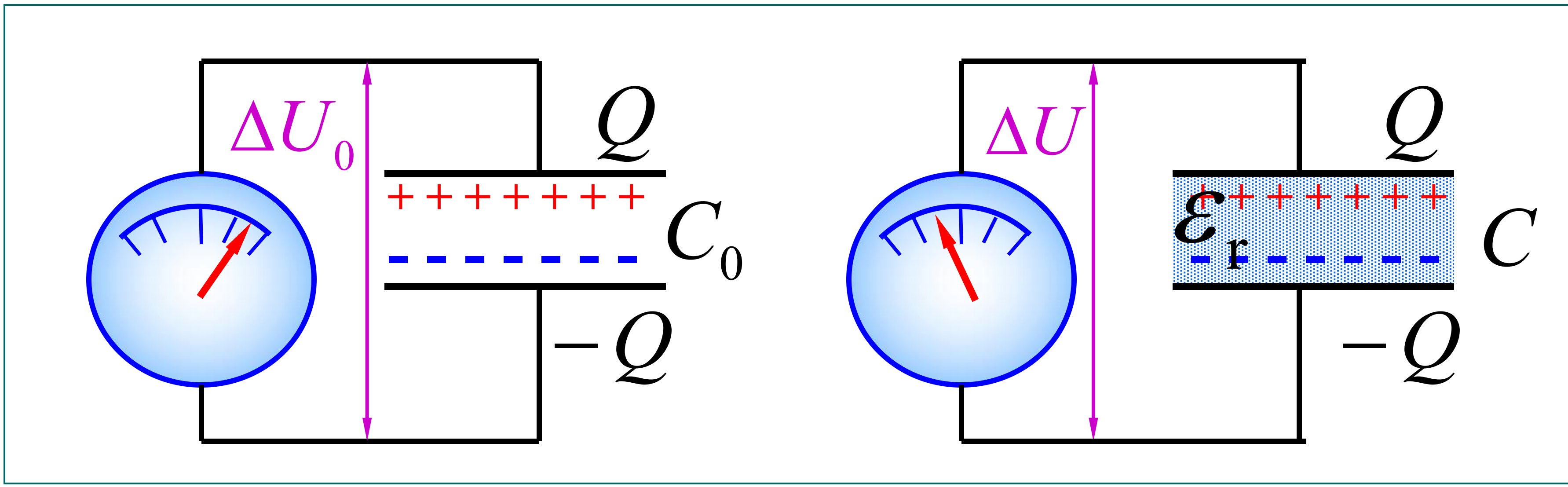


$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

§ 7 电介质对电场的影响

电介质——绝缘体——“不导电”的物质

一、电介质对电容的影响



$$\Delta U = \frac{1}{\varepsilon_r}\Delta U_0 \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad \boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

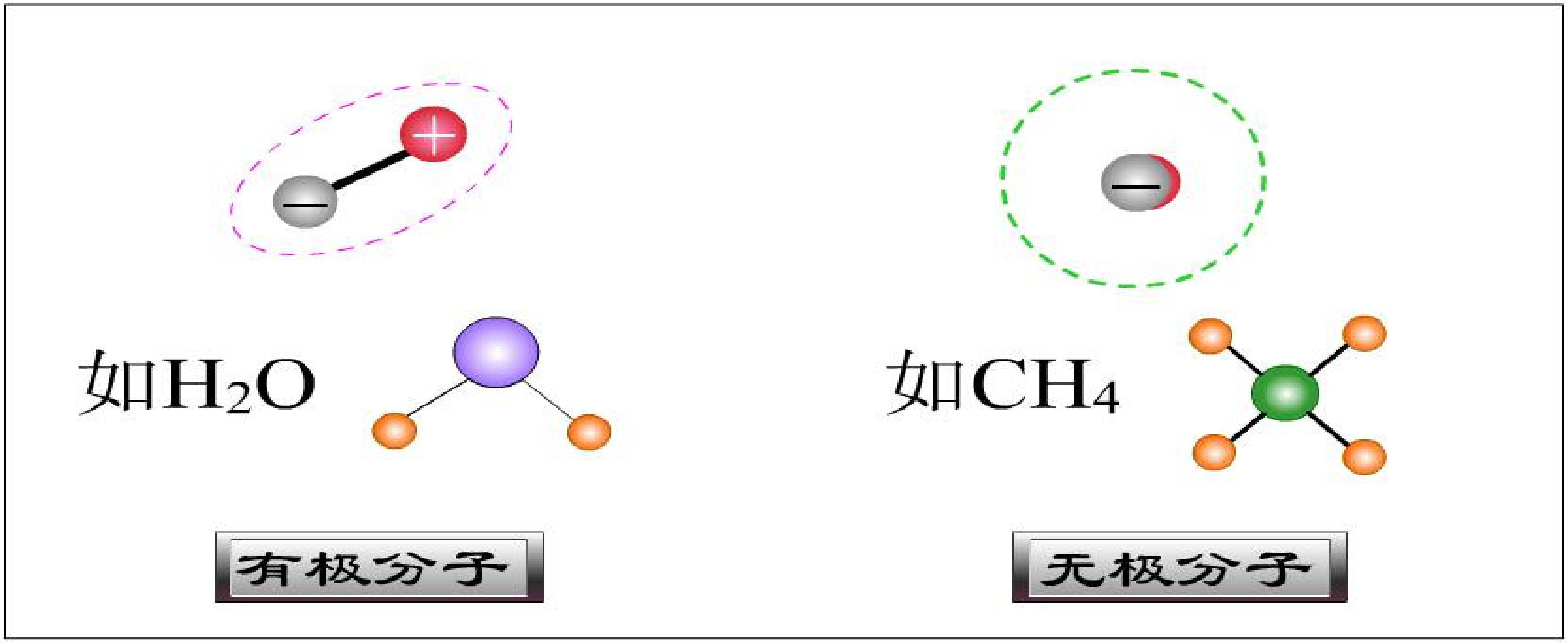
相对介电常数 $\varepsilon_r \geq 1$ 介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

选讲

**电介质的极化

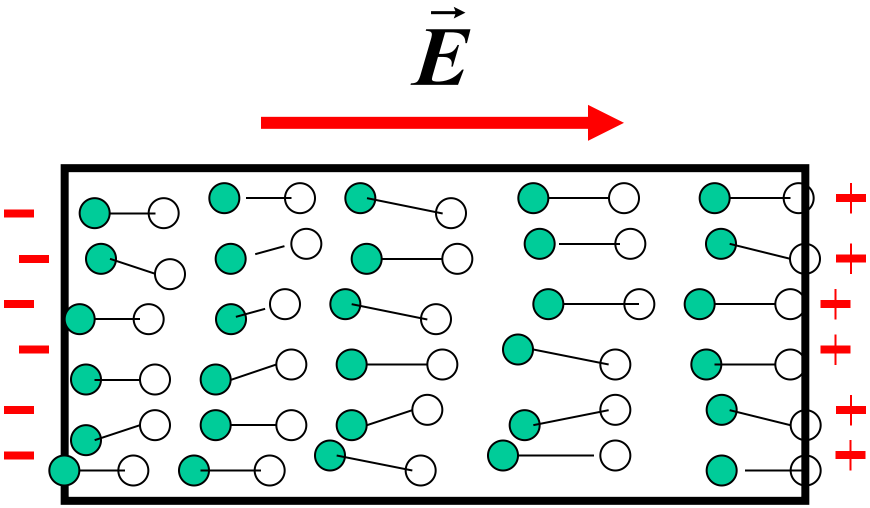
无极分子电介质：（氢、甲烷、石蜡等）

有极分子电介质：（水、有机玻璃等）



选讲

总之，不管哪种电介质，极化机制虽然不同，放到电场中都有极化现象，都会出现极化电荷（也叫束缚电荷）。



例如左图的左右表面上就有极化电荷。

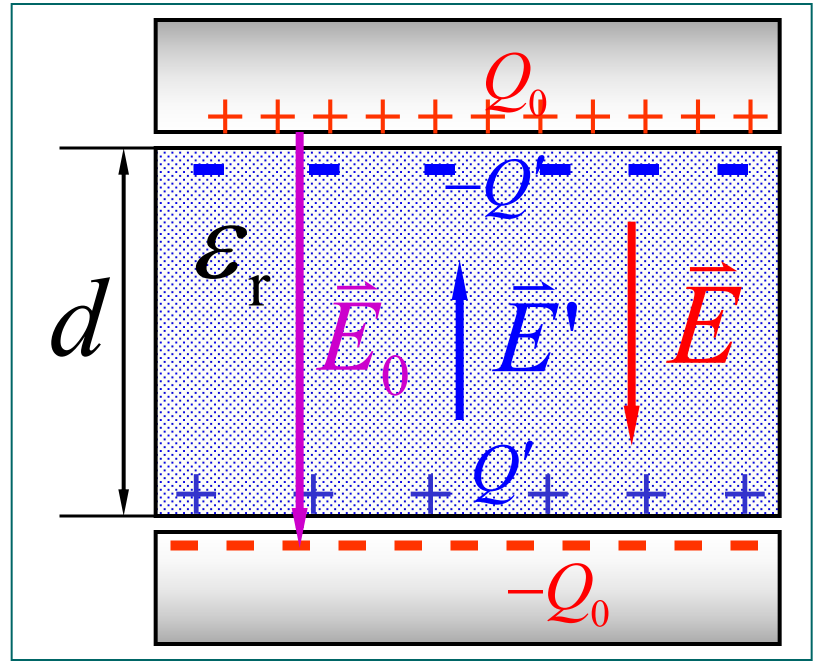
正是这些极化电荷的电场削弱了电介质中的电场。

二、电介质中的电场强度

$\vec{E}_0$ ——外电场的电场强度

$\vec{E}'$ ——极化电场的电场强度

$\vec{E}$ ——总电场的电场强度



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

$$E' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0$$

Q_0：导体上的自由电荷

Q'：电介质中的极化电荷

$$\boxed{E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0}$$

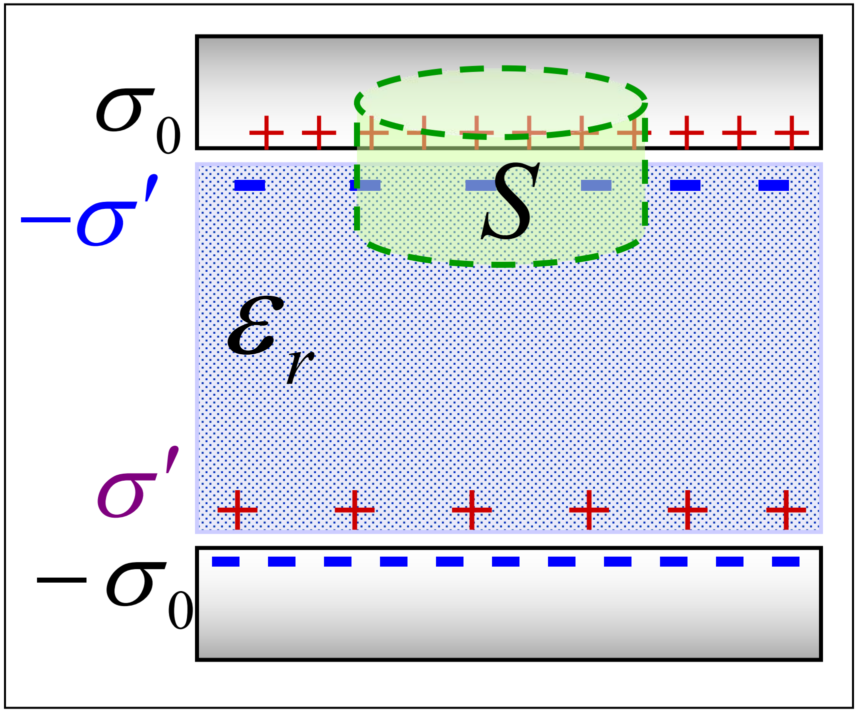
$$\boxed{E = E_0 / \varepsilon_r = \sigma_0 / \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\boxed{Q' = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_0}$$

三、有介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_0 + q')$$

$$= \left(q_0 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0\right)\Big/ \varepsilon_0 = \frac{q_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$



$$\oint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$$

定义：电位移矢量

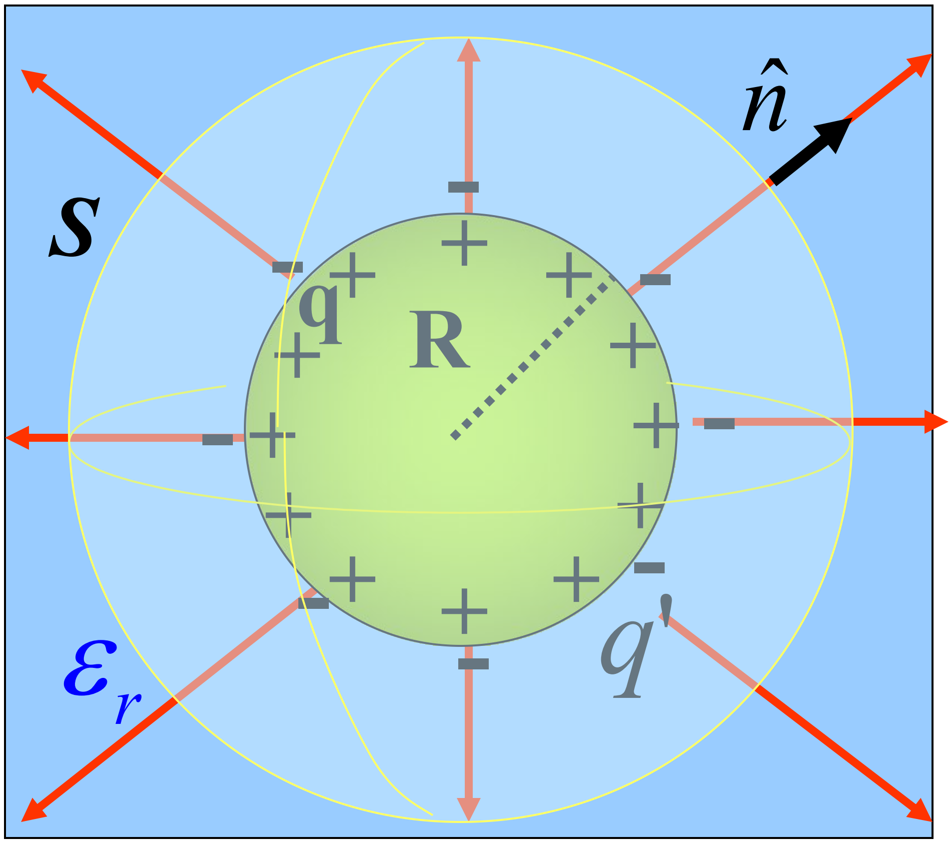
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

单位：C m^{-2}

有介质时的高斯定理：

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0}$$

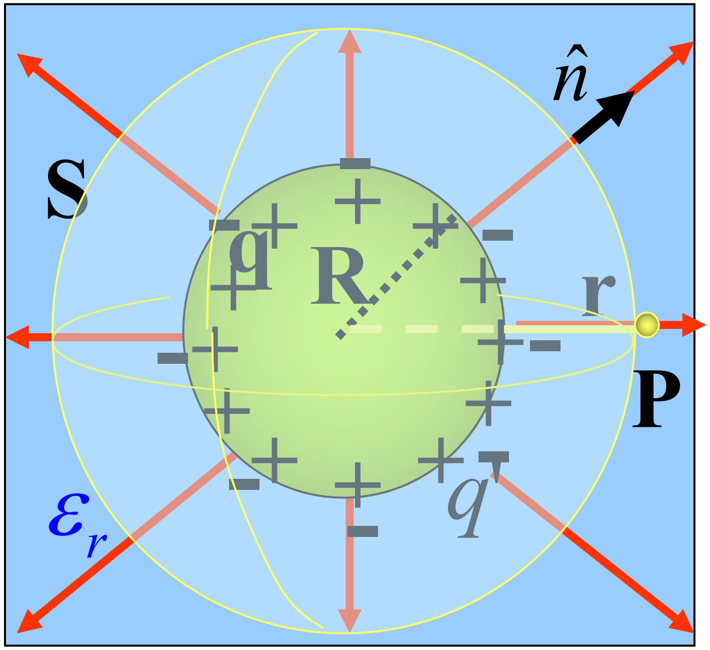
例：一导体带电球壳，带电q，周围充满无限大均匀介质，相对介电系数为 ε_r ，求球外一点P的场强、电势。



解：自由电荷与极化电荷都是球对称分布，故电场分布也是球对称分布。以半径r作高斯球面。

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 = q \qquad D\,4\pi r^2 = q$$

$$\boxed{\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$



$$\because \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

$$U = \int_p^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

§ 8 静电场的能量

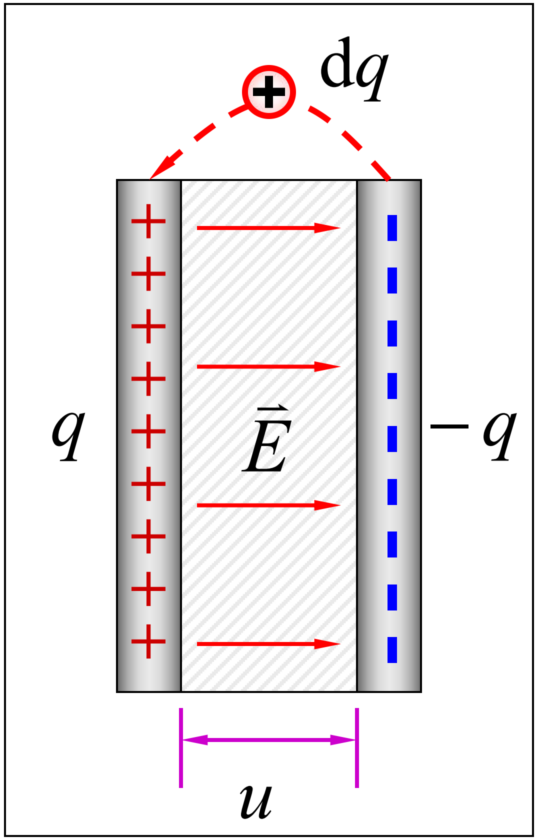
一、电容器的电能

$$\mathrm{d}W = u\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

由 $C = \dfrac{Q}{U}$ 得：

$$\boxed{W_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$$



二、静电场的能量密度

1. 均匀电场——以平板电容器为例

$$W_e=\frac{1}{2}Q\Delta U=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2Sd$$

能量密度：$w_\mathrm{e}=\dfrac{W_e}{Sd}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2=\dfrac{1}{2}ED=\dfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

电场空间所存储的能量：$W_e=w_\mathrm{e}V$

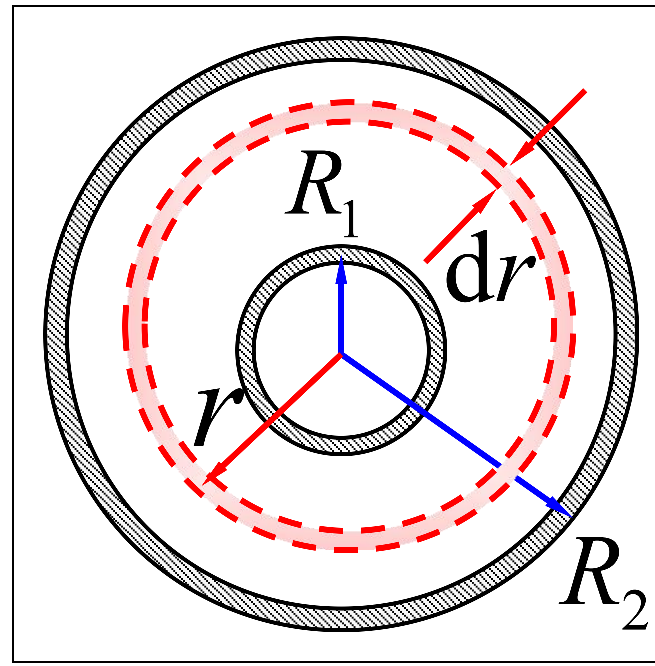
2. 非均匀电场

$$w_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad \mathrm{d}W_e=w_\mathrm{e}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$$

$$W_e=\int_V \mathrm{d}W_e=\int_V w_\mathrm{e}\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$$

例1 如图所示,球形电容器的内、外半径分别为R_1和R_2，所带电荷为$\pm Q$。若在两球壳间充以电容率为ε的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少?

解: $$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{r}_0 \quad (R_1>r>R_2)$$



$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$w_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e}=w_\mathrm{e}\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_e = \int \mathrm{d}W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2 - R_1}}$$

讨论： $$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = 4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2 - R_1}$$

——球形电容器电容

计算电容器中储存的电场能量，有以下两种方法：

$$Q \Downarrow E \Longrightarrow w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Longrightarrow W_e = \int_{V_{体}} w_e dV_{体}$$

$$Q \Downarrow \vec{E} \Longrightarrow \Delta U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \Longrightarrow W_e = \frac{1}{2} Q \Delta U$$

Thank God it's Friday!