

# 离散数学

## 一、什么是离散数学？

- 离散数学是研究**离散量**的数学结构和相互间关系的若干个数学分支的总称。其研究对象主要是整数，图及命题逻辑。
- 离散数学包括数理逻辑，集合论，代数结构，组合数学，图论及初等数论等。

## 二、学习离散数学的目的？

- 离散数学是随着计算机科学的发展而逐步形成和发展起来的一门新型学科。作为一门课程开设于上世纪 70 年代初。它为计算机科学中的数据结构，编译理论，操作系统，算法分析，人工智能等提供了必要的数学知识。
- 通过学习离散数学，可以培养和提高自己的抽象思维和逻辑推理能力，获得解决实际问题能力，为以后的软硬件学习和研究开发工作打下坚实的数学基础。

**数理逻辑：**人工智能，数据库，形式语言及自动机，高级程序设计语言

**代数结构：**开关理论，逻辑设计和程序理论，语法分析

## 三、离散数学与计算机科学的关系

- 1) 离散数学是计算机科学的理论基础。
- 2) 计算机的理论模型是离散的图灵机。

# 第一部分 数理逻辑

- 推理由一系列的陈述句组成。逻辑研究的是有效的推理方法，数理逻辑就是用数学方法研究推理。
- 数理逻辑的主要内容：命题逻辑、一阶逻辑(谓词逻辑)。

## 第一章 命题逻辑的基本概念

命题逻辑是数理逻辑的基础部分，它的研究对象是命题。

### ① 命题

命题是一个**陈述语句**，它要么是真的，要么是假的，但不是两者都是。

**注 1：**能否分辨真假与是否知道真假是不同的。

如：某人的头发有一万根。

**例 1：**判断下列句子是否为命题。

- (1) 2 是素数。
- (2) 雪是黑色的。
- (3)  $1+101=110$ 。
- (4) 明年 10 月 1 日是晴天。
- (5) 这朵花真好看呀！

(6) 明天下午有会吗?

(7) 请关上门!

(8)  $x + y > 5$ 。

(9) 我正在说谎。

## ② 真值

命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值。真值只取两个值：真或假。且

$$\text{命题的真值} = \begin{cases} \text{真,} & \text{如果命题是真的;} \\ \text{假,} & \text{如果命题是假的。} \end{cases}$$

真命题表达的判断正确，假命题表达的判断错误。

我们将用大写字母 P, Q, R 或  $P_1, P_2, P_3 \dots$  表示简单陈述句表示的命题。用“T”或 1 表示真，用“F”或 0 表示假。于是命题 P 的真值为 T 或 F。

下面用  $P_1, P_2, P_3, P_4$  分别表示例 1 中 (1), (2), (3), (4) 的命题

$P_1$ : 2 是素数。

$P_2$ : 雪是黑色的。

$P_3$ :  $1+101 = 110$ 。

$P_4$ : 明年 10 月 1 日是晴天。

其中  $P_1$  的真值为 T,  $P_2$  的真值为 F,  $P_3$  和  $P_4$  的真值现在不知道。它们称为这些命题的符号化。

③ 真值表

为一个或多个命题提供所有可能的真值的表称为真值表。

$P$	$Q$	$P \mid Q$
$\overline{T}$	$\overline{T}$	$\overline{T}$
$\overline{T}$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$F$

④ 联结词

(1) 否定(not)

设  $P$  为任一命题， $P$  的否定是一个新的命题，称为  $P$  的否定式，记作  $\sim P$ 。 $\sim$  为否定联结词。

$P$	$\sim P$
$T$	$F$
$F$	$T$

例如：  $P$ ：3 是偶数。

$\sim P$ ：3 不是偶数。

(2) 合取(and)

设  $P, Q$  为两命题，复合命题“ $P$  并且  $Q$ ”（或“ $P$  和  $Q$ ”）称为  $P$  与  $Q$  的合取式，记作  $P \wedge Q$ ， $\wedge$  为合取联结词。

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

**注 2：**不包含任何联结词的命题，叫做原子命题。至少包含一个联结词的命题，叫做复合命题。

**注 3：**自然语言中的“既…又…”，“不但…而且…”，“虽然…但是…”及“一面…一面…”等都表示两件事情同时成立，因而可以符号化为  $\wedge$ 。

**注 4：**不要见到“和”，“与”就用  $\wedge$ 。

例如：“李文和李武是兄弟”，“王芳和陈兰是好朋友”仅是原子命题。

**例 2：**将下列命题符号化。

- 1) 李平既聪明又用功。
- 2) 李平虽然聪明，但不用功。
- 3) 李平不但聪明，而且用功。
- 4) 李平不是不聪明，而是不用功。

### (3) 析取(or)

设  $P, Q$  为两命题，复合命题“ $P$  或  $Q$ ”称为  $P$  与  $Q$  的析取式，记作  $P \vee Q$ ， $\vee$  为析取联结词。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

**注 5:** 联结词  $\vee$  表示的是一种相容性“或”，即允许  $P$  和  $Q$  同时为真。它与汉语的“或”的意义不全相同，因为汉语中的“或”可表示“排斥或”(只有一个为真)，也可表示“相容或”(可两个同时为真)。

例如：1) 张晓静爱唱歌或爱听音乐。(相容或)

设  $P$ : 张晓静爱唱歌;  $Q$ : 张晓静爱听音乐。所给命题是:  $P \vee Q$ 。

2) 张晓静是安徽人或江西人。(排斥或)

设  $P$ : 张晓静是安徽人;  $Q$ : 张晓静是江西人。

此时命题是:  $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$ 。它与  $P \vee Q$  不同。

(4) 蕴涵

设  $P, Q$  为两命题, 复合命题“如果  $P$ , 则  $Q$ ”称作  $P$  与  $Q$  的蕴涵式, 记作  $P \Rightarrow Q$ ,  $\Rightarrow$  为蕴涵联结词。

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

**注 6:** 在数学中,  $P \Rightarrow Q$  有许多不同的叙述方式。例如: “只要  $P$ , 就  $Q$ ”, “因为  $P$ , 所以  $Q$ ”, “ $P$  仅当  $Q$ ”, “只有  $Q$  才  $P$ ”, “除非  $Q$  才  $P$ ”, “除非  $Q$ , 否则非  $P$ ”, 等等。

**注 7:** 在自然语言中, “如果  $P$ , 则  $Q$ ”中的  $P$  与  $Q$  往往有某种内在的联系, 但在数理逻辑中,  $P \Rightarrow Q$  中的  $P$  与  $Q$  可以没有任何内在的

联系。

**注 8:**  $P \Rightarrow Q$  的逻辑关系为  $Q$  是  $P$  的必要条件,  $P$  是  $Q$  的充分条件。另外, 也称  $P$  是  $P \Rightarrow Q$  的前件,  $Q$  是  $P \Rightarrow Q$  的后件。

**例 3:** 将下列命题符号化, 并指出它们的真值。

- 1) 若  $2+2=4$ , 则太阳从东方升起。
  - 2) 若  $2+2 \neq 4$ , 则太阳从东方升起。
  - 3) 若  $2+2=4$ , 则太阳从西方升起。
  - 4) 若  $2+2 \neq 4$ , 则太阳从西方升起。
  - 5) 只要  $a$  能被 4 整除, 则  $a$  一定能被 2 整除。
  - 6)  $a$  能被 4 整除, 仅当  $a$  能被 2 整除。
  - 7) 除非  $a$  能被 2 整除, 否则  $a$  不能被 4 整除。
  - 8) 除非  $a$  能被 2 整除,  $a$  才能被 4 整除。
  - 9) 只有  $a$  能被 2 整除,  $a$  才能被 4 整除。
  - 10) 只有  $a$  能被 4 整除,  $a$  才能被 2 整除。
- 其中  $a$  是一个给定的正整数。

## (5) 等价

设  $P, Q$  为两命题, 复合命题“ $P$  当且仅当  $Q$ ”称作  $P$  与  $Q$  的**等价式**, 记作  $P \Leftrightarrow Q$ ,  $\Leftrightarrow$  为等价联结词。

$P \Leftrightarrow Q$  表示  $P$  与  $Q$  互为充分必要条件。



P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

容易证明  $P \Leftrightarrow Q$  与  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$  的逻辑关系完全一样。

**例 4:** 将下列命题符号化，并讨论它们的真值。

- 1)  $2+2=4$ ，当且仅当 3 是奇数。
- 2)  $2+2=4$ ，当且仅当 3 不是奇数。
- 3)  $2+2 \neq 4$ ，当且仅当 3 是奇数。
- 4)  $2+2 \neq 4$ ，当且仅当 3 不是奇数。
- 5) 两圆  $R_1, R_2$  的面积相等，当且仅当它们的半径相同。
- 6) 两角 A, B 相等当且仅当它们是对顶角。

**例 5:** 令 P: 北京比天津人口多。

Q:  $2+2 \neq 4$ 。

R: 乌鸦是白色的。

求下列复合命题的真值。

$$1) ((\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)) \Rightarrow R;$$

$$2) (Q \vee R) \Rightarrow (P \Rightarrow \sim R);$$

$$3) (\sim P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \sim R)。$$

## ⑤ 命题公式及其真值表

- **命题常量**：一个表示确定的命题的标识符。
- **命题变元**：一个表示任意命题的位置的标识符。真值可以变化，它不是命题。

例如：1) P：今天下雨。P 是命题常量。

2)  $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$ 。P, Q 是命题变元。

- **命题公式(合式公式, 公式)**：由命题常量, 命题变元, 联结词, 括号等组成的有意义的符号串。

- 当使用连接词 $\sim$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ 时, 命题公式的定义如下:

- 1) 单个命题常量或命题变元是命题公式。
- 2) 如果 A 是命题公式, 则 $\sim A$ 也是命题公式。
- 3) 如果 A, B 是命题公式, 则  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \Rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow B$  也是命题公式。
- 4) 有限次地应用 1) — 3) 组成的符号串是命题公式。

例如：P,  $\sim P$ ,  $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ ,  $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow (\sim R)$  是公式；

$PQ \Rightarrow R$ ,  $\sim(P \Rightarrow)$ ,  $\sim P \Rightarrow Q$  不是公式。

**注 9:** 1) 5 种联结词的优先级顺序:  $\sim$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ 。

2) 有些括号可以不写。例如:

$$((\sim P) \Rightarrow Q) \wedge (\sim R) \text{ 可写为 } (\sim P \Rightarrow Q) \wedge \sim R。$$

3) 同级运算从左至右依次进行。例如:

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \text{ 意思为 } (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R。$$

**例 6:** 求下例公式的真值表。

1)  $(\sim P \wedge Q) \Rightarrow \sim R。$

2)  $(P \wedge \sim P) \Leftrightarrow (Q \wedge \sim Q)。$

3)  $\sim(P \Rightarrow Q) \wedge Q \wedge R。$

由以上例子可以看出有一类命题公式不论各命题变元作何种取值, 其真值永为真 (假)。

**注 10:** 设 A 为任意命题公式。

1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真, 则称 A 为 **重言式** 或 **永真式**。

2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假, 则称 A 为 **矛盾式** 或 **永假式**。

3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 为 **可满足式**。

● 命题公式的类型

$$\text{命题公式} \begin{cases} \text{可满足式} \\ \text{矛盾式} \end{cases} \begin{cases} \text{重言式} \\ \text{非重言式} \end{cases}$$