应用随机过程

离散型随机变量的生成函数

授课教师: 赵毅

哈尔滨工业大学(深圳)理学院

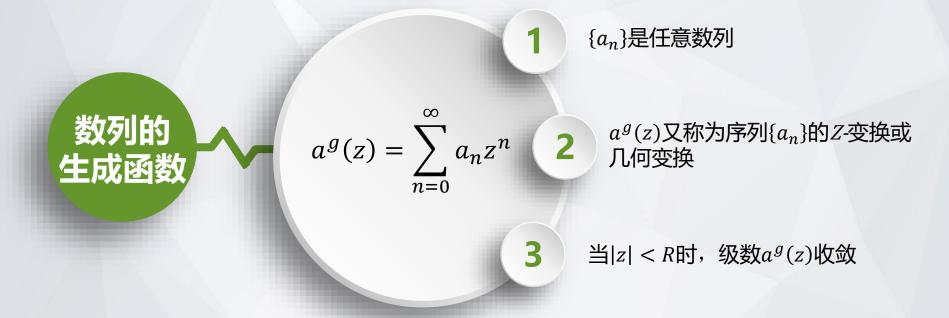








生成函数的定义







 $a_n = Prob\{X = n\}$ 是随机变X的 概率分布函数

$$P_X(z) = a^g(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$= E[z^X]$$

 $P_X(z)$ 称为离散型随机变量X的概率 生成函数

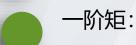
当|z| < 1时,级数 $a^g(z)$ 收敛



随机变量的矩与概率生成函数



定义 $P_X(z)$ 的k阶导数为 $P_X^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} P_X^{(k)}(z)$



$$P_X^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$



$$E[X] = P_X^{(1)}(1)$$



$$P_X^{(2)}(z) = \frac{d}{dz} P_X^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$



$$P_X^{(2)}(1) = E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X]$$



$$E[X^2] = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1)$$



二项随机变量的概率生成函数



$$P\{X=j\} = a_j = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \qquad j = 0,1, \dots n$$

其中q = 1 - p,试利用概率生成函数求均值和方差。

解: 随机变量 X的概率生成函数为

$$P_X(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j q^{n-j} z^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p z^j q^{n-j} = (pz+q)^n$$

对 $P_X(z)$ 求一阶导数和二阶导数

$$P_X^{(1)}(z) = n(pz+q)^{n-1}p$$
, $P_X^{(2)}(z) = n(n-1)(pz+q)^{n-2}p^2$

我们得到

$$E[X] = P_X^{(1)}(1) = np, E[X^2] = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1) = n(n-1)p^2 + np$$

 $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = npq$







几何随机变量的概率生成函数

令 X 为参数是 p 的几何随机变量,则

$$P\{X = n\} = a_n = pq^n$$
 $n = 0,1,\cdots$,
其中一次伯努利试验中成功的概率为 p , 且 $q = 1 - p$, 试求 X 的概率生成函数,均值和方差。

解: X的概率生成函数为

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} pq^n z^n = \frac{p}{1 - qz}$$

求心均值、方差



随机变量和的概率生成函数



令 X_1, \dots, X_k 为k个独立、非负、取整数值的随机变量,其中 X_i 的概率生成函数为 $P_i(z)$ 。令S为这k个随机变量的和。那么X的概率生成函数怎么求呢?

S是这k个随机变量的卷积





随机变量S的概率生成函数为 $P_S(z) = P_1(Z) \cdots P_k(z)$



负二项随机变量的概率生成函数

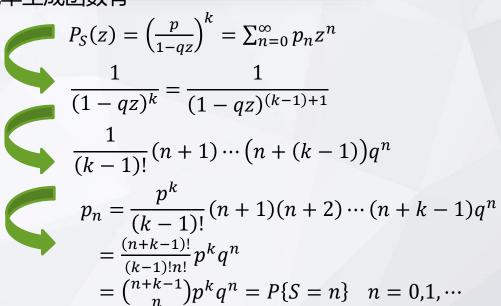
令 S为负二项随机变量,则 $S = X_1 + \cdots + X_k$,其中 X_1, \cdots, X_k 独立同分布,且都服从几何分布 $\{pq^n\}$,其中每一次伯努利试验成功的概率为p。试利用概率生成函数求S的概率分布。

解: 由随机变量和的概率生成函数有

为将频域转变为时域

利用Z-5的逆变换

利用Z-1,整理得到S的 概率分布





思考问题

随机变 量和

$$P_S(z) = P_1(z) \cdots P_k(z)$$

复合随机变量定义为 $S_N = X_1 + \cdots X_N$,其中N是一个非负,取整数值的随机变量,且概率生成函数为 $\pi_N(z)$

$$P_S(z) =$$
?





概率生成 函数

- 01 定义
- 02 $E[X] = P_X^{(1)}(1)$
- 03 $E[X^2] = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1)$
- 04 随机变量和的概率生成函数



生成函数表



The Sequence $\{a_n\}$ Generating Function $a^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

1.
$$\{\alpha a_n\}$$
 $\alpha a^g(z)$

2.
$$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$$
 $\alpha a^g(z) + \beta b^g(z)$, where $b^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

3.
$$\left\{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right\}$$
 Convolution $a^g(z)b^g(z)$

4.
$$\{a^n\}$$

and k is a positive integer

5.
$$\left\{\frac{1}{k!}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)a^n\right\}$$
 $\frac{1}{(1-az)^{k+1}}$

6.
$$\{b_n\}$$
, where $b_n = 0$ if $n > k$ $z^k a^g(z)$ $= a_{n-k}$ if $n \ge k$

7.
$$\{b_n\}$$
, where $b_n=0$ if $n<0$
$$=a_{n+k}$$
 if $n\geq 0$
$$\frac{1}{z^k}[a^g(z)-a_0-a_1z-\cdots-a_{k-1}z^{k-1}]$$
 and k is a positive integer

$$8. \quad \left\{ \sum_{m=0}^{n} a_m \right\} \qquad \frac{1}{1-z} a^g(z)$$

9.
$$\{b_n\}$$
, where $b_n = a_0$ if $n = 0$ $(1-z)a^g(z)$

$$= a_n - a_{n-1} \quad \text{if } n \ge 1$$

10.
$$\{A^n\}$$
, where A is a square matrix
$$\sum_{n=0}^{\infty} (zA)^n = [I - Az]^{-1},$$
 where I is an identity matrix

谢谢听课

授课教师

赵毅