


# 第九章 欧氏空间

 § 1 定义与基本性质     § 6 对称矩阵的标准形

 § 2 标准正交基

 § 7 向量到子空间的  
距离—最小二乘法

 § 3 同构

 § 4 正交变换

 § 8 酉空间介绍

 § 5 子空间

小结与习题

# § 9.7 向量到子空间的距离

---

一、向量到子空间的距离

二、最小二乘法



# 一、向量到子空间的距离

## 1. 向量间的距离

**定义** 长度  $|\alpha - \beta|$  称为向量  $\alpha$  和  $\beta$  的距离,  
记为  $d(\alpha, \beta)$ .

**基本性质**

- (i)  $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$
- (ii)  $d(\alpha, \beta) \geq 0$ , 并且仅当  $\alpha = \beta$  的等号才成立;
- (iii) (三角形不等式)  $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ .



证明. 1) 显然.

---

$$2) d(\alpha, \beta)^2 = (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \geq 0$$

$$(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = 0 \iff \alpha = \beta$$

$$\begin{aligned} 3) d(\alpha, \beta) &= |\alpha - \beta| = |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \\ &\leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta| = d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta). \end{aligned}$$



## 2. 向量到子空间的距离

(1) 设  $\alpha$  为一固定向量，如果  $\alpha$  与子空间  $W$  中每个向量垂直，称  $\alpha$  垂直于子空间  $W$ ，记作  $\alpha \perp W$ 。

**注：**

如果  $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ，则

$$\alpha \perp W \Leftrightarrow \alpha \perp \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

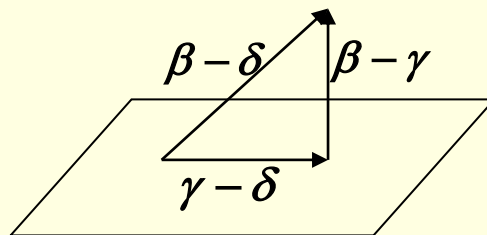


(2) 向量到子空间中的各向量的距离以垂线为最短.

如图示意, 对给定  $\beta$ , 设  $\gamma$  是  $W$  中的满足

$\beta - \gamma \perp W$  的向量, 则 对  $\forall \delta \in W$  有

$$|\beta - \gamma| \leq |\beta - \delta|.$$



证明:  $\beta - \delta = (\beta - \gamma) + (\gamma - \delta),$

---

因  $W$  是子空间,  $\gamma \in W, \delta \in W,$

则  $\gamma - \delta \in W,$  故  $\beta - \gamma \perp \gamma - \delta.$

由勾股定理

$$|\beta - \gamma|^2 + |\gamma - \delta|^2 = |\beta - \delta|^2,$$

所以  $|\beta - \gamma| \leq |\beta - \delta|.$



## 二、最小二乘法

问题提出:

实系数线性方程组

$$AX = b, A = (a_{ij}) \in R^{n \times s}, b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad (1)$$

可能无解, 即任意  $x_1, x_2, \dots, x_n$  都可能使

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i)^2 \quad (2)$$

不等于零.





设法找实数组  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  使 (2) 最小,

这样的  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  称为方程组 (1) 的**最小二乘解**,

此问题叫**最小二乘法问题**.

**最小二乘法的表示:**

设

$$Y = \left[ \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right]^T = AX. \quad (3)$$



用距离的概念, (2) 就是  $|Y - B|^2$ .

由 (3), 设  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ , 则

$$Y = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s,$$

要找  $X$  使 (2) 最小, 等价于找子空间

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

中向量  $Y$  使  $B$  到它的距离 ( $|Y - B|$ ) 比到  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  中其它向量的距离都短.



设  $C = B - Y = B - AX$ ,

为此必  $C \perp L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

这等价于

$$(C, \alpha_1) = (C, \alpha_2) = \dots = (C, \alpha_s) = 0, \quad (4)$$

$$\text{即 } \alpha_1^T C = 0, \alpha_2^T C = 0, \dots, \alpha_s^T C = 0,$$

这样 (4) 等价于

$$A^T (B - AX) = 0 \quad \text{或} \quad A^T AX = A^T B \quad (5)$$

这就是最小二乘解所满足的代数方程.



附.  $A^T A X = A^T B$  在实数域上有解的证明

欲证:  $r(A^T A, A^T B) = r(A^T A)$

$$r(A^T A) \leq r(A^T A, A^T B) = r(A^T (A, B)) \leq r(A^T)$$

但,  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A)$  ( $A^T A X = 0$  与  $A X = 0$  同解).

$$\text{故: } r(A^T A) \leq r(A^T A, A^T B) \leq r(A^T A)$$



## 例题

已知某种材料在生产过程中的废品率  $y$  与某种化学成份  $x$  有关. 下列表中记载了某工厂生产中  $y$  与相应的  $x$  的几次数值:

$y(\%)$	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
$x(\%)$	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2

找出  $y$  对  $x$  的一个近似公式.



**解：**把表中数值画出图来看，发现它的变化趋势

近于一条直线．因此我们决定选取  $x$  的一次式  $ax + b$  来表达．当然最好能选到适当的  $a, b$ ，使得下面的等式

$$3.6a + b - 1.00 = 0, \quad 3.7a + b - 0.9 = 0$$

$$3.8a + b - 0.9 = 0, \quad 3.9a + b - 0.81 = 0,$$

$$4.0a + b - 0.60 = 0, \quad 4.1a + b - 0.56 = 0,$$

$$4.2a + b - 0.35 = 0 \quad \text{都成立.}$$



实际上是不可能的. 任何  $a, b$  代入上面各式都发生些误差. 于是想找到  $a, b$  使得上面各式的误差的平方和最小, 即找  $a, b$  使

$$(3.6a + b - 1.00)^2 + (3.7a + b - 0.9)^2 + (3.8a + b - 0.9)^2 + (3.9a + b - 0.81)^2 + (4.0a + b - 0.60)^2 + (4.1a + b - 0.56)^2 + (4.2a + b - 0.35)^2 \quad \text{最小}.$$

易知



$$A = \begin{pmatrix} 3.6 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 3.8 & 1 \\ 3.9 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 4.1 & 1 \\ 4.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.90 \\ 0.90 \\ 0.81 \\ 0.60 \\ 0.56 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

最小二乘解  $a, b$  所满足的方程就是

$$A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - A^T B = 0,$$





即为

$$\begin{cases} 106.75a + 27.3b - 19.675 = 0 \\ 27.3a + 7b - 5.12 = 0 \end{cases}$$

解得

$$a = -1.05, \quad b = 4.81 \quad (\text{取三位有效数字}).$$



## § 9.8 酉空间介绍

---

欧式空间是专对实数域上线性空间而讨论的, 酉空间实际就是复数域上的欧式空间.



**定义 14** 设 $V$ 是复数域上的线性空间, 在 $V$ 上定义了一个二元复函数, 称为内积, 记作 $(\alpha, \beta)$ , 它具有以下性质:

1)  $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ , 这里 $\overline{(\beta, \alpha)}$ 是 $(\beta, \alpha)$ 的共轭复数;

2)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ ;

3)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;

4)  $(\alpha, \alpha)$ 是非负实数, 且 $(\alpha, \alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$ .

这里 $\alpha, \beta, \gamma$ 是 $V$ 中任意的向量,  $k$ 为任意复数, 这样的线性空间称为**酉空间**.



**例** 在线性空间 $C^n$ 中,对向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

定义内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n. \quad (1)$$

显然, 内积 (1) 满足定义 14 中的条件。这样,  $C^n$  就称为一个酉空间。

由于酉空间的讨论与欧氏空间的讨论很相似, 有一套平行的理论, 因此这儿只简单地列出重要的结论, 而不详细论证。

首先由内积的定义可得到:



$$1)(\alpha, k\beta) = \overline{k}(\alpha, \beta).$$

$$2)(\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma).$$

---

和在欧氏空间中一样, 因为 $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 故可定义向量的长度.

3) $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ 叫做向量 $\alpha$ 的长度, 记为 $|\alpha|$ .

4)柯西-布涅柯夫斯基不等式仍然成立, 即对任意的向量 $\alpha, \beta$ 有

$$|\alpha, \beta| \leq |\alpha||\beta|,$$

当且仅当 $\alpha, \beta$ 线性相关时, 等号成立.

注意: 酉空间中的内积 $(\alpha, \beta)$ 一般是复数, 故向量之间不易定义夹角. 但我们仍引入

## § 9.7 向量到子空间的距离



5) 向量  $\alpha, \beta$ , 当  $(\alpha, \beta) = 0$ , 时称为正交或互相垂直.

在  $n$  维酉空间中, 同样可以定义正交基和标准正交基并且关于标准正交基也有下述一些重要性质:

6) 任意一组线性无关的向量可以用施密特过程正交化并扩充成为一组标准正交基.

7) 对  $n$  级复矩阵  $A$ , 用  $\bar{A}$  表示以  $A$  的元素的共轭复数作元素的矩阵. 如  $A$  满足  $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T = I$ , 就叫做酉矩阵, 它的行列式的绝对值等于 1.

两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.



类似于欧氏空间的正交变换和对称矩阵，可以引进酉空间的酉变换和埃尔米特矩阵。它们也分别具有正交变换和对称矩阵的一些重要性质，我们把它列举在下面：

8) 酉空间  $V$  的线性变换  $\mathcal{A}$ ，如果满足

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta),$$

就称为  $V$  的一个 **酉变换**。酉变换在标准正交基下的矩阵是 **酉矩阵**。



9)如矩阵 $A$ 满足

$$\overline{A^T} = A,$$

则叫**埃尔米特(Hermite)矩阵**.

在西空间 $C^n$ 中令

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

**$\mathcal{A}$ 也是对称变换.**





10)  $V$  是酉空间,  $V_1$  是子空间,  $V_1^\perp$  是  $V_1$  的正交补, 则

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp$$

又设  $V_1$  是对称变换的不变子空间, 则  $V_1^\perp$  也是不变子空间.

11) 埃尔米特矩阵的特征值为实数, 它的属于不同特征值的特征向量必正交.



12)若 $A$ 是埃尔米特矩阵, 则有酉矩阵 $C$ , 使

$$C^{-1}AC = \bar{C}' AC$$

是对角形矩阵

13)设 $A$ 为埃尔米特矩阵, 二次齐次函数

$$f(x_1, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j = X' A \bar{X}$$

叫做埃尔米特二次型. 必有酉矩阵 $C$ , 当 $X = CY$ 时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 y_1 \bar{y}_1 + d_1 y_1 \bar{y}_2 + \cdots + d_1 y_n \bar{y}_n.$$

