2020/2021秋季学期

高等代数与几何A期 末 试 题解析

一．填空（每空 1.5 分）

1. 点 $P(-1,3,4)$ 到平面 $3x+2y+z=-7$ 的距离是 __ _$\sqrt{14}$____

2. 若 A 为三阶可逆矩阵，且 $|A|=2$，则 $\left|(-2A^*)^T\right|=$__-32______

3.向量组: $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}3\\5\\2\\3\end{bmatrix}$, $v_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ 的秩是

__3____ ，极大线性无关组是 _$\alpha_1,\alpha_2(\alpha_3),\alpha_4;\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$______

4. 与矩阵$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$乘法交换的可逆矩阵的形状为

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}(ab \neq 0)$_______

5. 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$\phi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若$A\phi$与$\phi$线性相关，则

$\alpha =$ ___ -1 ___.

Sol. $A\phi = \lambda\phi$，由$\begin{cases} \alpha = \lambda\alpha \\ 2\alpha + 3 = \lambda \\ 3\alpha + 4 = \lambda \end{cases}$ 解得$\alpha = -1$，$\lambda = 1$.

6. 向量 $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 在向量 $\mathbf{v}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 上的投影向量是 $\underline{-\frac{1}{5}\mathbf{j}-\frac{2}{5}\mathbf{k}}$或

$\underline{<0,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}>}$

Sol. 投影向量等于$\frac{u\cdot v}{|v|^2}v=\frac{-1}{5}v.$

7.设x_1,x_2,x_3是多项式x^3-6x^2+5x-1的三个根，则

$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=$ $\underline{\quad 42 \quad}$.

Sol.

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2=$$

$$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$=2\sigma_1^2-6\sigma_2=72-30$$

二. 选择正确答案

8.令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}-2a_{21} & a_{32}-2a_{22} & a_{33}-2a_{23} \end{bmatrix}$ 及 $P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

如果 $P_2P_1A=B,$ ，则 $P_2=$(C)

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9. 设 A,B 为 n 阶方阵，则下列结论正确的是(A)

（A） $\mathrm{r}(A,AB)=\mathrm{r}(A)$ （B） $\mathrm{r}(A,BA)=\mathrm{r}(A)$

（C） $\mathrm{r}(A,B)=\max(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B))$ （D） $\mathrm{r}(A,B)=\mathrm{r}(A^T,B^T)$

解疑：（A）显然正确，$\begin{pmatrix}A & AB\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}A & 0\end{pmatrix}$等价，秩不变；

（B）令$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}A & BA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,BA)=2\neq 1=\mathrm{r}(A)$，$\mathrm{r}(A,BA)=\mathrm{r}(A)$不成立。

（C）令$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

$\mathrm{r}(A,B)=2\neq 1=\max(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B))$。

（D）令$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}A^T & B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，显然秩不相等。

10. 在R^3中$\xi = \mathrm{i} - \mathrm{j} + \mathrm{k}$, $\eta = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$.下列答案正确的是(D)_

(A)$\xi \perp \eta \Leftrightarrow a+b+c=0$, (B) $\xi \perp \eta \Leftrightarrow a-b+c=0$,

(C)$\xi \perp \eta \Leftrightarrow a+b-c=0$, (D)$\xi \perp \eta \Leftrightarrow b+c-a=0$

11. 设$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，则与$A$合同的矩阵是(C).

(A)$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}(B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(C)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

12. 令$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\neq 0_{3\times 3}$, B是一秩为 2 的 3 阶方阵.若有 $AB=0$, 则(　B　)

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$;

(B) $a=b$ 且 $a+2b\neq 0$;

(C) $a=b$;

(D) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$.

三．计算题

13. 令 $B=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，若 ***A*** 满足等式

$A(I-C^{-1}B)^T C^T=I$，求 ***A***.

解：$A(I-C^{-1}B)^T C^T=I$，$A(C(I-C^{-1}B))^T=I$，$A(C-B)^T=I$.

故 $A=((C-B)^T)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

14. 求 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \geq 2)$ 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \dots & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \dots & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \dots & \boldsymbol{a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

的行列式，并确定 a 的值使 A 的秩为 $n-1$

解： 将 $|A|$ 各列加至第一列，提出 $1+(n-1)a$，得

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \dots & a \\ a & a & 1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 1 \end{pmatrix}\right| = [1+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & 1 & a & \dots & a \\ 1 & a & 1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & 1 \end{vmatrix} = [1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

$n \geq 3$时$a = \dfrac{-1}{n-1}$, A的秩为$n-1$; $n = 2$时，$a = \pm 1$, A的秩为1.

---

15. 给定直线 L: $x = 1 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 - 3t$ 和一点 $P(-1,\ 1,\ 2)$.

(a) 求包含直线L和点P的平面$Ax + By + Cz + D = 0$的方程;

(b) 求出点P到直线L的距离.

解: (a) 点$P_0 = (1, 1, 2)$在直线L上且L的方向向量是$\mathbf{v} = \langle -1, 2, -3 \rangle$.

令$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \langle -2, 0, 0 \rangle$，则所求平面法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

故平面方程为: $-6(y-1) - 4(z-2) = 0$ 或 $3y + 2z = 7$.

(b) 点P到直线L的距离为

$$d = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{26}{7}}.$$

16. .设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的零点（使 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为零的三元向量），

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型.

解：考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$， 当 $a\neq 1$ 时只有零解

$x_1=x_2=x_3=0$ 为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的一个零点，此时规范型

$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，即 f 正定.

若$a=1$，上述线性方程组有非零解$X=t(-1,0,1)^T$， $f(x_1,x_2,x_3)$的零

为由向量$(-1,0,1)^T$生成的1维子空间, 且

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+2(x_1+x_3)^2,$$

易得f的规范型为$y_1^2+y_2^2$.若$f(x_1,x_2,x_3)=c$, $c>0$, 当$a\neq 1$时, 表示

椭球面；$a=1$时, 表示空间的椭 圆柱面.

四．证明题

17. 证明：

(1) 若 *n* 阶方阵 *A* 满足 $A^2 = A$，则 $I - 2A$可逆；

(2) *A*,*B* 为 *n* 阶方阵，则有：$\mathrm{r}(I - AB) \le \mathrm{r}(I - A) + \mathrm{r}(I - B)$.

证明：(1) $(I - 2A)^2 = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4A = I$,

$$(I - 2A)^{-1} = I - 2A.$$

(2) $I - AB = I - B + B - AB = (I - B) + (I - A)B$,

故：$\mathrm{r}(I - AB) \le \mathrm{r}(I - B) + \mathrm{r}\big((I - A)B\big) \le \mathrm{r}(I - B) + \mathrm{r}(I - A)$

18. 线性方程组$AX=\beta$有解的充要条件是线性方程组$\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$无解.

证明： “必要性”. 若$AX=\beta$有解，设C为它的一个解。则有$C^T A^T=\beta^T$. 将分块矩阵$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$的第一行乘以$-C^T$加至第二行得$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，这两个矩阵等价，故秩相同，应为$R(A)+1$. 但秩$\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix}=R(A)$，小于秩$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$，故$\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$无解.

“充分性”. 若$\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$无解，则，秩$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$=秩$\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} + 1$. 但

$R(A)+1$=秩$\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$=秩$(A, \beta)+1$，故$R(A)=R(A,\beta)$，方程组$AX=\beta$有解.

19. 实二次型$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2$, 其中

$l_i (i=1,2,\dots,p+q)$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一次齐次式，证明：

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$的正惯性指数$\le p$, 负惯性指数$\le q$.

证明：设实二次型$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$经可逆线性变换

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T^{-1}Y = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{s2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

化为规范形：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 - l_{k+1}^2 - \cdots - l_{k+r}^2,$$

则有：

$$\sum_{i=1}^{p} l_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} l_j^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{k+r} l_j^2. \qquad (*)$$

即$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$的正惯标为k，负贯标为r．设$l_i (i = 1, 2, \dots, p+q)$

关于$x_1, x_2, \dots, x_n$的一次齐次式为：$l_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (i = 1, 2, \dots, p+q)$.

若$k>p$, 令

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n=0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} t_{k+1,1}x_1+t_{k+1,2}x_2+\cdots+t_{k+1,n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ t_{n,1}x_1+t_{n,2}x_2+\cdots+t_{n,n}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

把两个线性方程组(1)与(2)合并得到一个含n个未知量，$p+(n-k)=n-(k-p)<n$个方程的齐次线性方程组，它有非零解，设其中之一为$(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$. 将其代入(*)式，由(1)与(2)得

$$-\sum_{j=p+1}^{p+q} l_j^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2.$$

这个等式成立当且仅当$-\sum_{j=p+1}^{p+q} l_j^2 = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 = 0$. 这就有

$$\begin{cases} t_{1,1}c_1 + t_{1,2}c_2 + \cdots + t_{1,n}c_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ t_{k1}c_1 + t_{k2}c_2 + \cdots + t_{kn}c_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

即$(c_1,c_2,\dots,c_n)^T$是以矩阵$T=(t_{ij})$为系数矩阵的齐次线性方程组$TX=0$的一个非零解. 但T是可逆矩阵, $TX=0$只有零解, 矛盾. 故$k\le p$. 同理, $r\le q$.