主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2022/2023 学年春季学期

数学分析 B 期中考试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　　学号　　班号　　学院

密　封　线

一 （3 分）（1）写出“$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛”的定义.（2）证明：若 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

解 （1）令 $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

（2）由 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 收敛及 Cauchy 准则，$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^+$ 使得 $\forall m,n>N$ 有：

$$|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon.$$

由于

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n|\leqslant|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|,$$

进而

$$|a_{m+1}+\cdots+a_n|<\varepsilon.$$

故由 Cauchy 准则，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

二、（3 分） 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义， $f(0)=0$， $f''(0)=3$. 令 $a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$. 证明:（1）若 $f'(0)=2$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. （2）若 $f'(0)=0$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

证明: $f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{f''(0)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)=\frac{f'(0)}{n}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)$

（1）若 $f'(0)=2$，则

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=2+\frac{3}{2}\frac{1}{n}+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\Big/\frac{1}{n}\to 2>1.$$

从而由极限保序性，$\exists N\in\mathbb{N}^+$ 使得对 $\forall n>N$ 都有 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}}>1$，$a_n>\frac{1}{n}$

由 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，及正项级数的比较判别法，知 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散

（2）若 $f'(0)=0$，则 $\frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{3}{2}+o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\right)^2\to\frac{3}{2}$

从而充分远以后 a_n 为正，且与 $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ 有相同的敛散性

再由 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，知 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

三 （3 分） 设函数序列

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

证明: (1) $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[\frac{1}{100}, 1]$ 上一致收敛. (2) $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0, \frac{1}{10}]$ 上不一致收敛.

证明：首先，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$，$0 \leqslant x \leqslant 1$

$|f_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值在 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 处取到

（1）当 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < \dfrac{1}{100}$，即 $n > (100^2-1)/2$ 时，

$$\sup_{\frac{1}{100} \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{100}\right) \to 0，故$$

$$f_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \left(x \in \left[\frac{1}{100}, 1\right]\right)$$

（2）当 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} < \dfrac{1}{10}$，即 $n > (10^2-1)/2$ 时

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \to \infty，故$$

$$0 \not\Leftarrow f_n(x) \quad \left(x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]\right)$$

四 （3 分） （1）设 $\{f_n(x)\}$ 是开区间 $(0,1)$ 上的函数序列，写出一个使得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

成立(等式两边有意义，且相等)的充分条件. (2) 构造开区间 $(0,1)$ 上的函数序列 $\{f_n(x)\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 都有意义，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

解 （1） $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在且在 $(0,1)$ 上为一致连续，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ 存在

（2） $f_n(x) = (1-x)^n$， $x \in (0,1)$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+}(1-x)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1，但$$

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty}(1-x)^n = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

五 （3 分）(1) $f(x)=|x-2|,\quad x\in[1,4]$．求在区间$[1,4]$上一致收敛于$f(x)$的多项式序列． (2) 函数$g(x)$的图像是连接三点$(0,1)$，$(\frac{1}{3},0)$，$(1,0)$的折线．求在区间$[0,1]$上一致收敛于$g(x)$的多项式序列.

解：由$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}u^n=\sqrt{1+u}$在$u\in[-1,1]$上一致收敛，记部分和多项式为

$$S_N(u)=\sum_{n=0}^{N}\binom{\frac{1}{2}}{n}u^n$$

(1) 由$|x-2|=2|\frac{x-2}{2}|=2\sqrt{1+\left[\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1\right]}$，其中$u=\left[\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1\right]$

于是$u\in[-1,1]$.故所求多项式序列可取为

$$2S_N\left(\left[\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1\right]\right),\quad N=1,2,\cdots$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{1}{2}\left[\left|-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right|+(-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]\\&=\frac{3}{2}\left[\left|x-\frac{1}{3}\right|-\left(x-\frac{1}{3}\right)\right],\qquad x\in[0,1]\end{aligned}$$

当$x\in[0,1]$时，$u=\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-1\right]\in[-1,1]$

故所求多项式序列可取为

$$-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}S_N\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-1\right),\quad N=1,2,\cdots$$

或者: 由

$$g(x)=1-3\cdot\mathrm{ReLU}(x)+3\cdot\mathrm{ReLU}(x-\tfrac{1}{3})$$

及

$$\mathrm{ReLU}(t)=\frac{1}{2}(t+|t|)$$

可得所求的多项式序列

六 （3 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ 的和函数.

解：收敛半径 $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}}=1$，且在 ± 1 处不收敛. 故

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^n,\quad x\in(-1,1)$$

对于 $x\in(-1,1)$，有

$$\begin{aligned}
S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'-\frac{x}{1-x}\\
&=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)'-\frac{x}{1-x}\\
&=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}\\
&=\frac{x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

七（3 分）设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(-2)^n$ 收敛．证明 (1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x\in[1,\frac{5}{3}]$ 上一致收敛. (2) 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x\in[-2,-1]$ 上一致收敛.

解：由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n$ 收敛可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R\geq 2$

（1） 由 Abel 第一定理及 $\left[1,\frac{5}{3}\right]\subset(-R,R)$ 即知（或写明细节）

（2） 由 Abel 第二定理即得．或

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n\left(\frac{x}{-2}\right)^n$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n$ 在 $[-2,-1]$ 上一致收敛，$\left(\frac{x}{-2}\right)^n$ 在 $[-2,-1]$ 上单调一致有界，及函数项级数一致收敛的 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n\left(\frac{x}{-2}\right)^n$ 在 $[-2,-1]$ 上一致收敛.

八 （3 分）周期为 2π 的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有表达式 $f(x)=x(\pi-x),\quad 0\leq x\leq\pi$．将 $f(x)$ 展开成正弦级数.
解：

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx(\text{由于}f(x)\text{为奇函数})$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nmx dx=\begin{cases}-\dfrac{8}{(2k-1)^3\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$f(x)$ 的正弦级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{(2k-1)^3\pi}\sin(2k-1)x$$

九 （3 分）（1）设 $x^0\in\mathbb{R}^n$， $E\subset\mathbb{R}^n$. 写出“ x^0 是 E 的边界点”及“ x^0 是 E 的聚点”的定义. (2) 写出“ x^0 是 E 的边界点，但不是 E 的聚点”的例子.

解 （1） x^0 是E的边界点：$\forall\delta>0$，$\cup(x^0,\delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $\cup(x^0,\delta)\cap E^C\neq\varnothing$

x^0 是E的聚点：$\forall\delta>0$，$\cup_0(x^0,\delta)\cap E\neq\varnothing$

（2）取$n=1$，$x^0=1$， $E=\{1\}$， 则

x^0 是E的边界点，但不是E的聚点

十（3 分). (1) 设 $f:\mathbb{R}^n\supset E\to\mathbb{R}^m$ 是 n 元 m 维向量值函数. 写出 $\lim\limits_{E\ni x\to x^0} f(x)=y^0$ 的定义. (2) 用定义证明 2 元 2 维向量值函数的极限

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(2,3)}\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ x_1x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$$

解 （1）这里，$x^0\in E'$. $\lim\limits_{E\ni x\to x^0} f(x)=y^0$ 的定义为: $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得.

$$\forall x:\quad \left.\begin{array}{r}x\in E\\ 0<\|x-x^0\|<\delta\end{array}\right\}\Longrightarrow\|f(x)-y^0\|<\varepsilon$$

（2）

$$\begin{aligned}\|f(x)-y^0\|&=\left\|\begin{bmatrix}x_1+x_2-5\\ x_1x_2-6\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}(x_1-2)+(x_2-3)\\ (x_1-2)(x_2-3)+2(x_2-3)+3(x_1-2)\end{bmatrix}\right\|\\ &=\sqrt{((x_1-2)+(x_2-3))^2+((x_1-2)(x_2-3)+2(x_2-3)+3(x_1-2))^2}\\ &\le\sqrt{2((x_1-1)^2+(x_2-3)^2)+(1|x_2-3|+2|x_2-3|+3|x_1-2|)^2}\quad\left(\left\|\begin{bmatrix}x_1-2\\ x_2-3\end{bmatrix}\right\|<1\text{从而}|x_1-2|<1\right)\\ &=\sqrt{2((x_1-1)^2+(x_2-3)^2)+3^2\times2(|x_2-3|^2+|x_1-2|^2)}\\ &=\sqrt{20}\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-3)^2}\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{20}}\right\}$，则当

$$\|x-x^0\|=\left\|\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-3)^2}<\delta$$

时

$$\|f(x)-y^0\|<\varepsilon$$

.

学院______ 班号______ 学号______ 姓名______

密 封 线

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

密 封 线

学院________ 班号________ 学号________ 姓名________

密 封 线