第三章 命题逻辑的推理理论

①有效推理

- **前提：** 已知的命题公式。
- **结论：** 从前提出发应用推理规则推出来的命题公式。
- **推理：** 是从前提推出结论的思维过程。

◆ 数理逻辑关心的是推理形式的有效性问题。

- **推理的形式结构：**

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$。

或

(2) 前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$。

结论：B。

定义 1: 设 A_1，A_2，…，A_k，B 是命题公式，若对于 A_1，A_2，…，A_k 和 B 中出现的命题变元的任意一组赋值

(1) 或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为假；

(2) 或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真；则称推理

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$

是有效推理，并称 B 是有效结论。

注 1： 在形式逻辑中并不关心结论 B 是否真实，而只在乎由给定的前提 A_1，A_2，…，A_k，能否推出结论 B 来。只注意推理的形式是否正确。因此，有效结论并不一定是正确的，只有正确的前提经过正确的推理得到的逻辑结论才是正确的。

定理 1： $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$ 是有效推理当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$

为重言式。

● 判断推理是否正确，就是判断是否会出现 T 推出 F 的情况。如出现则推理错误，否则正确。

◆ 判断推理是否正确的方法

(1) 真值表法：

(2) 等值演算法：利用定理 1。

(3) 主析取范式法：利用定理 1。

例 1： 判断下列推理是否正确。

(1) $((P \vee Q) \wedge \sim P) \Rightarrow Q$;

(2) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \sim R)) \Rightarrow (\sim R \Rightarrow P)$。

注 2： 当命题变元比较少时，用这 3 个方法比较方便。此时采用推理的第一种形式结构“$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$”。当命题变元比较多时，我们通常采用下面③中构造证明法。采用推理的第二种形式结构“前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$；结论：B。”

② 推理定律---重言蕴含式

(1) $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律

(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律

(3) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

(4) $(A \Rightarrow B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A$ 拒取式

(5) $(A \vee B) \wedge \sim B \Rightarrow A$ 析取三段论

(6) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ 假言三段论

(7) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ 等价三段论

(8) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

$(A \Rightarrow B) \wedge (\sim A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

(9) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (\sim B \vee \sim D) \Rightarrow (\sim A \vee \sim C)$ 破坏性二难

③ 自然推理系统

从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的命题公式是推理的结论。

(公理推理系统不讲)

定义 2： 自然推理系统 P 由下述 3 部分组成:

1. 字母表

⑴ 命题变元符号：$P, Q, R, \cdots, P_1, P_2, \cdots$。

⑵ 联接词：～，∧，∨，⇒，⇔。

⑶ 括号与逗号：（ ），。

2. 合式公式

3. 推理规则

⑴ 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提。

⑵ 结论引入规则：已证明的结论可以作为后续证明的前提。

⑶ 置换规则：在证明的任何步骤，公式中的子公式都可以用与之等值的公式置换。

⑷ 假言推理规则：

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \underline{\quad A \quad} \\ \therefore\ B \end{array}$$

⑸ 附加规则：

$$\begin{array}{c} \underline{\quad A \quad} \\ \therefore\ A \vee B \end{array}$$

⑹ 化简规则：

$$\begin{array}{c} \underline{\quad A \wedge B \quad} \\ \therefore\ A \end{array}$$

⑺ 拒取式规则：

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ \sim B \\ \hline \therefore \ \sim A \end{array}$$

⑻ 假言三段论规则：

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \hline \therefore \ A \Rightarrow C \end{array}$$

⑼ 析取三段论规则：

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \sim B \\ \hline \therefore \ A \end{array}$$

⑽ 构造性二难推理规则：

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ C \Rightarrow D \\ A \vee C \\ \hline \therefore \ B \vee D \end{array}$$

⑾ 破坏性二难推理规则：

$$\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ C \Rightarrow D \\ \sim B \vee \sim D \\ \hline \therefore \ \sim A \vee \sim C \end{array}$$

⑿ 合取引入规则：

$$\begin{array}{c} A \\ \underline{\quad B \quad} \\ \therefore\ A \wedge B \end{array}$$

④ 在自然推理系统 P 中构造证明

- **构造证明：**就是由一组 P 中的公式作为前提，利用 P 中的规则，推出结论。
- **构造证明法中推理的形式结构 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$ 的书写方法：**

  前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$。

  结论：B。
- **证明方法：**

  (1) 直接证明法

  (2) 附加前提证明法

  (3) 反证法

(a) 直接证明法

就是由一组前提，利用一些公认的推理规则，推出有效结论。

例 2：在自然推理系统 P 中构造证明下面推理的证明：

前提：$P \vee Q,\ Q \Rightarrow R,\ P \Rightarrow S,\ \sim S$;

结论：$R \wedge (P \vee Q)$。

例 3：构造推理的证明：若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天必须备课。我今天没备课。所以，明天不是星期一和星期三。

(b) 附加前提证明法

- $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge B) \Rightarrow C$。

理由：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

$\equiv \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\sim B \vee C)$

$\equiv (\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee \sim B) \vee C$

$\equiv \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge B) \vee C$

$\equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge B) \Rightarrow C$。

例 4：在自然推理系统 P 中构造证明下面推理的证明：

前提：$(P \wedge Q) \Rightarrow R$, $\sim S \vee P$, Q;

结论：$S \Rightarrow R$。

(c) 反证法

- $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B = 1 \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \sim B) = 0$。

  理由：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B$

  $\equiv \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B$

  $\equiv \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \sim B)$。

例 5： 在自然推理系统 P 中构造证明下面推理的证明：

前提：$(P \land Q) \Rightarrow R$， $\sim R \lor S$， $\sim S, P$;

结论：$\sim Q$。