习题三

1. 沿下列路径计算积分$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z$。

(1) 自原点到$3+\mathrm{i}$的直线段；

(2) 自原点沿实轴至 3，再由 3 垂直向上至$3+\mathrm{i}$。

(3) 自原点沿虚轴至 i，再由 i 水平向右至$3+\mathrm{i}$。

解： (1) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^1 t^2(3+\mathrm{i})^3\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3$。

(2) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^3 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(3+\mathrm{i}y)^2\mathrm{i}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3$。

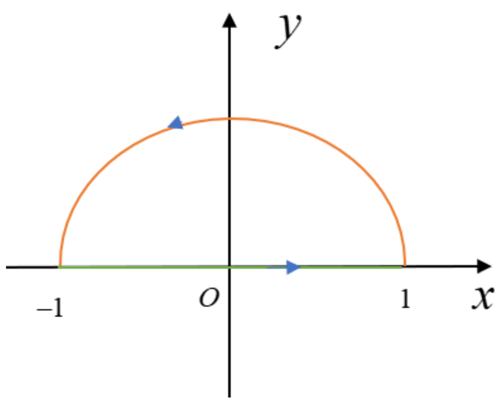
(3) $\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\int_0^1(\mathrm{i}y)^2\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_0^3(x+\mathrm{i})^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3$。

2. 分别沿 $y=x$ 与 $y=x^2$ 算出积分$\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z$的值。

解： (1) $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(x^2+\mathrm{i}x\right)(1+\mathrm{i})\mathrm{d}x=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$。

(2) $\int_0^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+\mathrm{i}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(x^2+\mathrm{i}x^2\right)(1+2x\mathrm{i})\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$。

3. 计算积分$\oint_C |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 是一条闭曲线，由直线段：$-1\le x\le 1, y=0$ 与上半单位圆周组成，取逆时针方向。



解： $\oint_C |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{-1}^{1}|x|\,x\,\mathrm{d}x$

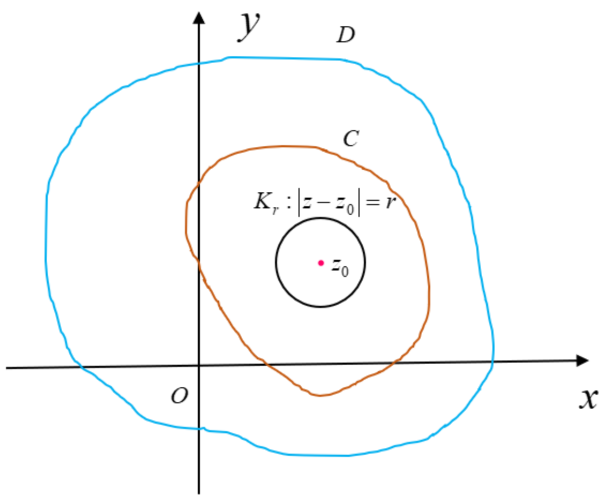
$=\pi\mathrm{i}$。

4. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内除 z_0 外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=M\ \ (M\in\mathbb{C}),$$

则对于任一属于 D 且围绕 z_0 的简单光滑闭曲线 C，恒有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz=M。$$



证： 设 $f(z)$在单连通区域 D 内除 z_0 外处处解析，且

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=M\ \ (M\in\mathbb{C})。$$

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$|(z-z_0)f(z)-M|<\varepsilon\ 。\qquad (*)$$

对于任一属于 D 且围绕 z_0 的简单光滑闭曲线 C，在 C 内作圆周

$$K_r:|z-z_0|=r,$$

使得 $r<\delta$。由复合闭路定理及$(*)$，得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz-M\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_r} f(z)\,dz-M\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_r} f(z)\,dz-M\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_r}\frac{1}{z-z_0}\,dz\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_r}\frac{(z-z_0)f(z)-M}{z-z_0}\,dz\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{K_r}\frac{|(z-z_0)f(z)-M|}{|z-z_0|}\,dS \\ &< \frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\oint_{K_r}\frac{1}{r}\,dS \\ &= \varepsilon\ 。\end{aligned}$$

由ε的任意性，知

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = M。$$

5. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+\mathrm{i})$，$f(3(1+\mathrm{i}))$。

解： $f(z)=\oint_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$

$$=\begin{cases}2\pi \mathrm{i}\left(3z^2+7z+1\right), & |z|<3;\\ 0, & |z|>3。\end{cases}$$

故

$$f'(1+\mathrm{i})=2\pi \mathrm{i}\left(3z^2+7z+1\right)'\Big|_{z=1+\mathrm{i}}=2\pi \mathrm{i}\left[6(1+\mathrm{i})+7\right]=2\pi \mathrm{i}(13+6\mathrm{i})。$$

$$f(3(1+\mathrm{i}))=0。$$

6. 直接得出下列积分的结果，并说明理由。

(1) $\oint_{|z|=1}\frac{3z+5}{z^2+2z+4}\,\mathrm{d}z$;

解： z^2+2z+4的零点$-1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}$在$|z|\le 1$外，故函数 $f(z)=\frac{3z+5}{z^2+2z+4}$ 在 $|z|\le 1$处处解析。由柯西积分定理，知

$$\oint_{|z|=1}\frac{3z+5}{z^2+2z+4}\,\mathrm{d}z=0。$$

(2) $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{\cos z}\,dz$;

解： 注意到 $\cos z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)=0 \Leftrightarrow e^{i2z}=-1 \Leftrightarrow z=z_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。

但是$|z_k|>1$。故函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{\cos z}$ 在$|z|\le 1$处处解析。由柯西积分定理，知

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\cos z}\,dz = 0\text{。}$$

7. 沿指定闭曲线的正向计算下列各积分。

(1) $\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}\,dz,\ C:|z-2|=1$;

解： $\oint_{|z-2|=1} \dfrac{e^z}{z-2}\,dz = 2\pi i\, e^z\Big|_{z=2} = 2\pi e^2 i$。

(2) $\oint_C \dfrac{\sin z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}\,dz,\ C:|z|=2$;

解： $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin z}{\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}\,dz = 2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0$。

(3) $\oint_C \dfrac{dz}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)},\ C:|z|=\dfrac{3}{2}$;

解： $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)}$

$$=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{4}}\frac{\frac{\mathrm{d}z}{(z+\mathrm{i})\left(z^2+4\right)}}{z-\mathrm{i}}+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{4}}\frac{\frac{\mathrm{d}z}{(z-\mathrm{i})\left(z^2+4\right)}}{z+\mathrm{i}}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})\left(z^2+4\right)}\right]_{z=\mathrm{i}}+2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z-\mathrm{i})\left(z^2+4\right)}\right]_{z=-\mathrm{i}}$$

$=0$ 。

(4) $\oint_C\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\mathrm{d}z$，其中 a 为 $|a|\neq 1$ 的任何复数，C：$|z|=1$；

解： 当 $|a|<1$ 时，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\mathrm{d}z=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left(\mathrm{e}^z\right)''\Big|_{z=a}=\pi\mathrm{e}^a\mathrm{i}\text{ 。}$$

当 $|a|>1$ 时，有

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\mathrm{d}z=0\text{ 。}$$

(5) $\oint_C\frac{3z+2}{z^4-1}\mathrm{d}z$，$C:\left|z-(1+\mathrm{i})\right|=\sqrt{2}$ 。

解： 注意到 $z^4-1=0\Leftrightarrow z=\pm 1,\ \pm\mathrm{i}$。这些零点仅 $z=1$ 和 $z=\mathrm{i}$ 在 C 内。

故

$$\oint_C\frac{3z+2}{z^4-1}\mathrm{d}z=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{3z+2}{z^4-1}\mathrm{d}z+\oint_{|z-\mathrm{i}|=0.1}\frac{3z+2}{z^4-1}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{|z-1|=0.1}\frac{\frac{3z+2}{(z+1)(z^2+1)}}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{|z-\mathrm{i}|=0.1}\frac{\frac{3z+2}{(z+\mathrm{i})(z^2-1)}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{3+2}{(1+1)(1^2+1)}+\frac{3\mathrm{i}+2}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})(\mathrm{i}^2-1)}\right)=\pi\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=\pi(-1+\mathrm{i})。$$

8. 计算积分$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z+2}$，其中$C$是圆周$|z|=1$正向，并由此证明：

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0。$$

解： 函数$f(z)=\frac{1}{z+2}$在$|z|\le 1$解析，故

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z+2}=0。$$

另一方面，将圆周$|z|=1$正向写成参数方程$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$-\pi\le\theta\le\pi$，有

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z+2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)}{(\cos\theta+2)+\mathrm{i}\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)[(\cos\theta+2)-\mathrm{i}\sin\theta]}{[(\cos\theta+2)+\mathrm{i}\sin\theta][(\cos\theta+2)-\mathrm{i}\sin\theta]}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-\sin\theta(\cos\theta+2)+\cos\theta\sin\theta+\mathrm{i}[(\cos\theta+2)\cos\theta+\sin^2\theta]}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{i}[(\cos\theta+2)\cos\theta+\sin^2\theta]}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{i}(1+2\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta。$$

因此， 有

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0。$$

9. 如果多项式$Q(z)$比多项式$P(z)$的次数至少高 2 次，证明：

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z=0\text{。}$$

证： 设$\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}$，$a_n\neq 0,\ b_m\neq 0,\ m-n\geq 2$。于是，

有

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|&=\left|\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}\right|\\&=\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{\left|a_n+a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|}{\left|b_m+b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|}\\&\leq\frac{1}{|z|^{m-n}}\frac{|a_n|+\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|}{|b_m|-\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|}\text{。}\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{z\to\infty}\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|=0,$$

$$\lim_{z\to\infty}\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|=0\text{。}$$

从而，当$R=|z|$充分大以后，有

$$\left|a_{n-1}\frac{1}{z}+\cdots+a_1\frac{1}{z^{n-1}}+a_0\frac{1}{z^n}\right|<\frac{|a_n|}{2},$$

$$\left|b_{m-1}\frac{1}{z}+\cdots+b_1\frac{1}{z^{m-1}}+b_0\frac{1}{z^m}\right|<\frac{|b_m|}{2}\text{。}$$

于是

$$\left|\oint_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z\right|\le\oint_{|z|=R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\mathrm{d}S<\oint_{|z|=R}\frac{1}{R^{m-n}}\frac{|a_n|+\frac{|a_n|}{2}}{|b_m|-\frac{|b_m|}{2}}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{R^{m-n}}\frac{\frac{3|a_n|}{2}}{\frac{|b_m|}{2}}2\pi R=\frac{1}{R^{m-n-1}}\frac{6\pi|a_n|}{|b_m|}<\frac{1}{R}\frac{6\pi|a_n|}{|b_m|}\to 0,\ R\to\infty。$$

即

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z=0。$$

10. 设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内一条正向的简单光滑闭曲线，它的内部含于 D。如果 $f(z)=g(z)$在 C 上所有点都成立。证明在 C 的内部所有点处 $f(z)=g(z)$也成立。

证：设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内一条正向的简单光滑闭曲线，它的内部含于 D。于是，$f(z)$与 $g(z)$在 C 上及 C 内处处解析。由柯西积分公式，在 C 的内部点 z 处，如果 $f(\zeta)=g(\zeta)$在 C 上所有点ζ都成立，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=g(z)。$$

11. 设 $f(z)$在单连通区域 D 内处处解析，且不为零，C 为 D 内任一条正向的简单光滑闭曲线。问：积分$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$是否为零？为什么？

解：$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=0$。

由于 $f(z)$在单连通区域 D 内处处解析，且不为零。故 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在单连通区域 D 内处处解析。对于 D 内任一条正向的简单光滑闭曲线 C，由柯西积分定理，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 0\text{。}$$

12. 设函数 $f(z)$在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $|z|=r,\ 0<r<1$ 的积分为零，那末 $f(z)$是否比须在 $z=0$ 解析？肯定请给出证明，否定请举出反例。

解： 否定。

如函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $|z|=r,\ 0<r<1$ 的积分为零，但函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 处不解析。

13. 设函数 $f(z)$在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析，$z_0\in D$，证明

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\text{。}$$

证： 设函数 $f(z)$在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析，则函数 $f'(z)$ 也在正向简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析。对于 $\forall z_0\in D$，由柯西积分公式，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, f'(z_0)\text{。}$$

再由高阶导数公式，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, f'(z_0)\text{。}$$

可见

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\text{。}$$

14. 设函数 $f(z)$在$|z|<1$内解析， 并且$|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$，证明

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n},\ n=1,2,\cdots\text{。}$$

证： 设函数 $f(z)$在$|z|<1$内解析，由高阶导数公式，得

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\quad 0<r<1\text{。}$$

取$r=\frac{n}{n+1}$，注意到$|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$，有

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|\mathrm{d}S$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\left|\frac{\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}\right|\mathrm{d}S$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}\oint_{|z|=\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}2\pi\frac{n}{n+1}=\frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n},\ n=1,2,\cdots。$$

15. 称 $P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n$ 是 Legendre 多项式。证明 Legendre 多项式有如下的积分表示

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 是任意内部包含点 z 的简单闭曲线。

证： 注意到函数 $f(z)=(z^2-1)^n$ 在 z 平面上处处解析，由高阶导数公式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}\left((\zeta^2-1)^n\right)\Big|_{\zeta=z}\\&=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z^2-1)^n。\end{aligned}$$

16. 设 C 为一内部包含实轴上线段 $[a,b]$ 的简单光滑闭曲线。函数 $f(z)$ 在 C 内及其上解析且在 $[a,b]$ 上取实值。证明对于任意两点 $z_1,z_2\in[a,b]$，总有点 $z_0\in[a,b]$ 使

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z。$$

证：设 C 为一内部包含实轴上线段$[a,b]$的简单光滑闭曲线。函数 $f(z)$ 在 C 内及其上解析且在$[a,b]$上取实值。对于任意两点$z_1,z_2\in[a,b]$，在 C 内作两个分别包含 z_1 和 z_2 的小圆周C_1和C_2，它们互不相交也互不包含。由复合闭路定理， 有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1}\frac{\frac{f(z)}{z-z_2}}{z-z_1}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\frac{f(z)}{z-z_1}}{z-z_2}\,\mathrm{d}z\\ &=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\right)\\ &=2\pi\mathrm{i}\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}。\end{aligned}\tag{1}$$

由于函数 $f(z)$ 在 C 内解析且在$[a,b]$上取实值，从而 $f(z)$ 在$[a,b]$上可导。对于 $z_1,z_2\in[a,b]$，由数学分析中的 Lagrange 中值定理,$\exists z_0\in[a,b]$，使

$$f(z_2)-f(z_1)=f'(z_0)(z_2-z_1)。\tag{2}$$

再有柯西积分公式，有

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z。\tag{3}$$

结合(1),(2),(3)，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,\mathrm{d}z=\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z 。$$

17. 设函数 $f(z)$ 在圆周$C:|z|=R(>0)$上及内部 D 处处解析，对于任意

的 $z\in D$，证明

① 函数 $g(\zeta)=\dfrac{R^2-z\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}f(\zeta)$ 在 C 上及内部解析;

② $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{R^2-z\overline{z}}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)\,d\zeta$。

证： 设函数 $f(z)$ 在圆周 $C:|z|=R(>0)$ 上及内部 D 处处解析。对于给定的 $z\in D$，及任意 ζ 在圆周 $C:|z|=R(>0)$ 上及内部 D，由于 $R^2-\zeta\overline{z}\neq 0$，函数 $g(\zeta)=\dfrac{R^2-z\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}f(\zeta)$ 在 C 上及内部解析。再由柯西积分公式，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{R^2-z\overline{z}}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)\,d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\dfrac{R^2-z\overline{z}}{(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\\&=\left.\frac{R^2-z\overline{z}}{(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)\right|_{\zeta=z}\\&=f(z)。\end{aligned}$$

18. 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数。

(1) 对于任意的 $z\in D$，证明

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,d\zeta。$$

(2) 设 $M=\max\limits_{\zeta\in C}\{|f(\zeta)|\}$, l 为 C 的长度，$d=\min\limits_{\zeta\in C}\{|\zeta-z|\}$。证明不等式

$$|f(z)|\le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}。$$

并进一步证明

$$|f(z)|\le M,\ z\in D。$$

证： 设函数 $f(z)$在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数。从而函数$[f(z)]^n$ 在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析。

(1) 由柯西积分公式，有

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta。$$

(2) 利用(1)，得

$$|f(z)|^n\le\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta-z|}\,\mathrm{d}S\le\frac{1}{2\pi}M^n\frac{1}{d}\oint_C\mathrm{d}S$$
$$=\frac{M^n l}{2\pi d}。$$

从而，有

$$|f(z)|\le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}},\ n=1,2,\cdots。$$

令 $n\to\infty$，得

$$|f(z)|\le M\lim_{n\to\infty}\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}=M。$$