第一次作业答案

1 第二章习题3(1)(2)(3)(4);
(1)对于$\epsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，当$n > N$时有$|\frac{\cos n}{n}| \leq |\frac{1}{n}| < \frac{1}{N} \leq \epsilon.$
(2)对于$\epsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}] + 1$，当$n > N$时有$|\frac{n}{n^3+1}| \leq |\frac{1}{n^2}| < \frac{1}{N^2} \leq \epsilon.$
(3)对于$\epsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\epsilon^2}] + 1$,当$n > N$时有

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} \leq \epsilon.$$

(4)对于$\epsilon > 0$，取$N = [\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}] + 1$,当$n > N$时有

$$|\frac{1-2n^2}{3n^2+1} + \frac{2}{3}| = |\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3n^2+1}| < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2} \leq \epsilon.$$

2 第二章习题10;
(1)$0 \leq |\cos n \sin \frac{a}{n}| \leq |\frac{a}{n}|$，由夹逼定理有$\lim\limits_{n\to\infty} \cos n \sin \frac{a}{n} = 0.$
(2)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n^5+n^3-2n}{2n^5-n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^4}}{2-\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n^5}} = \frac{7}{2}.$
(3)$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$
(4)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}} = a - 1$, 当$a \geq 1$;
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}} = 0$, 当$0 < a < 1$.
(5)$0 \leq |\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}| \leq |\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}|$，由夹逼定理有$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0.$
(6)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} = 0.$
(7)$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}) = \lim\limits_{n\to\infty} [(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})] = 1.$
(8)$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a+a^2+\cdots+a^n}{b+b^2+\cdots+b^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-a^n}{1-b^n} = \frac{a(1-b)}{b(1-a)}.$
(9)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
(10)$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k}| = |a| < 1$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$

4 求下列极限：
(1)$\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中$|x| < 1$;
解：$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$，因此

$$\lim_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$;
解:$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)})$;
解:$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=$
$\frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})$，因此

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)})=\frac{1}{4}.$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}}$
解:$3\cdot5\cdot17\cdots(2^{2^{n-1}}+1)=(2-1)\cdot(2+1)\cdot(2^2+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)=$
$2^{2^n}-1$，$2\cdot4\cdots2^{2^{n-1}}=2^{2^n-1}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{17}{16}\cdots\frac{2^{2^{n-1}}+1}{2^{2^{n-1}}}=2.$$

5 第二章习题14.
(1)$\ln x_n=\ln(1-\frac{1}{2})+\ln(1-\frac{1}{4})+\cdots+\ln(1-\frac{1}{2n})<-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

(2)因为有$\frac{2n+2}{n+1}\le x_n\le\frac{2n+2}{n}$，由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

(3)因为由$\sqrt[n]{n}\le\sqrt[n]{n\ln n}\le\sqrt[n]{n^2}$及$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=1.$$

6 设$S_n=1+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}$，证明$\lim_{n\to\infty}S_n=e.$

7 设$G_n=\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^n C_n^k}$，期中$C_n^k$是n次二项式展开中k次项系数，
求$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}$.
解：求对数后有

$$\ln\sqrt[n]{G_n}=\frac{(n-1)\ln n!-2[\ln 1!+\ln 2!+\cdots+\ln(n-1)!]}{n(n+1)}.$$

由Stolz定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{G_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-\ln n!}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{e}.$$

8 第二章习题16.
证明:由二次函数$x(2-Ax)$的最大值是$\frac{1}{A}$可知序列$\{x_n\}$是一个正实数有界序列且单调递增。由单调收敛原理可知序列$\{x_n\}$是收敛的，由递推关系可知其极限为$\frac{1}{A}$.

9 证明序列$\{\tan n\}$是发散的.
证明:假设序列$\{\tan n\}$是收敛于一有限实数的，则序列$\{\sec^2 n = 1+\tan^2 n\}$收敛于一正实数。因此序列$\{\cos^2 n = 1/\sec^2 n\}$ 和$\{\sin n\cos n = \tan n\cos^2 n\}$也是收敛的。亦即序列$\{\sin 2n\}$和$\{\cos 2n\}$是收敛的。运用课程讲义所举例题的方法，可证$\{\sin 2n\}$是发散的，由此导出矛盾。因此序列$\{\tan n\}$是发散的.

10 第二章习题17.
证明:由于函数$x(1-x)$的最大值是，因此若$q_{n+1}\le q_n$，则有

$$(1-q_n)q_{n+1}\le(1-q_n)q_n\le\frac{1}{4}$$

与题目假设$(1-q_n)q_{n+1}>\frac{1}{4}$不符。因此$\{q_n\}$是一个有界单调序列因此收敛。设$a=\lim\limits_{n\to\infty}q_n$，则有$a(1-a)\ge\frac{1}{4}$。因此$a$只能是$\frac{1}{2}$.

11 第二章习题19.
证明:对于任意自然数n，有

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)\ge\sqrt{a_nb_n}=a_{n+1}.$$

因此

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(a_n-b_n)\le 0\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\ge 1.$$

因此$\{a_n\}$是一个单调递增有上界的序列，$\{b_n\}$是一个单调递减有下界的序列，故$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都收敛。由递归关系式不难推出这两序列极限相等。

12 第二章习题22.
(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{\ln e}=1.$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2.$
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3n^2+3n+1}=\frac{4}{3}.$

13 设$0<a_1<1$和$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.
证明：由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-a_n$ 可知序列$\{a_n\}$是一个单调递减的正实数序列，故存在极限。由递归关系不难得出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。由Stolz定理可知

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

14 证明一单调序列收敛的充要条件是它有一收敛子列.
证明：(必要性)若单调序列$\{x_n\}$收敛，则显然其任一子列都收敛。
(充分性)若单调序列$\{x_n\}$有一子列$\{x_{n_k}\}$收敛于ξ，则对于$\epsilon>0$，存在自然数K，使得当$k\ge K$，有$|x_{n_k}-\xi|<\epsilon$。由序列单调性不难知当$n\ge n_K$，有$|x_n-\xi|<\epsilon$。因此$\{x_n\}$ 收敛于ξ.

15 第二章习题25.
证明：设A是一个有界无穷集，则从A中可选取出一个两两不同的序列$\{a_n\}$。由裴礼文习题集第8页例1.1.10知序列$\{a_n\}$中存在一单调子列$\{a_{n_k}\}$。由单调收敛原理可知此子列收敛于一个有限实数ξ，则ξ是集合A的一个聚点.

16 设f是闭区间$[a,b]$上的无界函数，证明存在区间中的一点，函数f在其任意小邻域内无界.
证明：假设f在每一点x在一个它的小邻域上有界，则f是一个局部有界函数。由有限覆盖定理可推出f在区间$[a,b]$上有界，与f的整体无界性矛盾。具体证明参见作业35题的证明。

17 第二章习题27.
证明：

18 第二章习题31.
(1)上极限是1，下极限是-1;
(2)上极限是$+\infty$，下极限是$-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
(3)上极限是1，下极限是0;
(4)上极限是$+\infty$，下极限是0.

19 设$\{a_n\}$是一有界序列，证明$\{a_n\}$收敛的充要条件是任给一有界序列$\{b_n\}$，等式
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)$$
成立.
证明:(必要性)若序列$\{a_n\}$收敛，则有
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)$$
且$\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$. 因此
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n).$$
(充分性)若对于任何序列$\{b_n\}$，下列等式
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n).$$
都成立，假设序列$\{a_n\}$不收敛，则存在互不相交的两个子列$\{a_{n_k}\}$ 和$\{a_{l_k}\}$分别收敛于上极限M 和下极限m。构造序列$\{b_n\}$如下
$$b_n=\begin{cases} M-m, & \text{if } n\in\{l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots\};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$
则可验证
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=M<\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n).$$
与序列$\{a_n\}$的性质矛盾。因此$\{a_n\}$必收敛。

20 第二章习题34.
证明:若序列$\{x_n\}$不收敛，则其上下极限不相等或同时为正无穷。则
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n}\ne 1,$$
与假设矛盾。

21 第二章习题35.
证明:假设l和L之间的一个实数η不是序列$\{x_n\}$任一子列的极限，则存在ϵ_0使得去心邻域$B^\circ(\eta,\epsilon_0)$中不含有序列$\{x_n\}$中的项。由$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ 可知存在N使得当$n>N$，$|x_{n+1}-x_n|<\epsilon_0$。由于l是序列$\{x_n\}$的下极限，因此存在一个大于N的自然数n_0满足$x_{n_0}\in[l,\eta-\epsilon_0]$。由于$|x_{n+1}-x_n|<\epsilon_0$，因此可知对于$n\geq n_0$都有$x_n\leq\eta-\epsilon_0$。这与$L$ 是序列$\{x_n\}$的上极限矛盾。

22 第三章习题13.
证明：设T是函数$f(x)$的一个正周期。若存在x_0满足$f(x_0)\neq 0$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0+nT)=f(x_0)$$

不等于零，与题设条件$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$矛盾。因此$f(x)$恒等于零.

23 第三章习题14.
证明:对于任一正实数x_0，则有$f(2^n x_0)=f(x_0)$。故有

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(2^n x_0)=l.$$

因此$f(x)$是一常值函数。

24 第三章习题16.
证明：若$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，则对于$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，当$-\delta<x<\delta$且$x\neq 0$时

$$|f(x)-\lim_{x\to 0}f(x)|<\epsilon.$$

取$\sqrt[3]{\delta}$，当$-\sqrt[3]{\delta}<x<\sqrt[3]{\delta}$且$x\neq 0$ 时，

$$|f(x^3)-\lim_{x\to 0}f(x)|<\epsilon.$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。反之亦然。当$x\to 0$，有$x^2\to 0^+$。因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$存在只能推出右极限$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$存在。

25 第三章习题17.
(1) 以$k\pi-\frac{\pi}{6}$为跳跃间断点.
(2) 以-1为第二类间断点.
(3) 以1为跳跃间断点.
(4) 以0为第二类间断点.

26 第三章习题19.
解：由于函数$f(x)$在0点处连续，因此有

$$1=\lim_{x\to 0^-}e^x=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\alpha.$$

故$\alpha=1$.

27 第三章习题22.
解：构造函数$\delta(x)$如下：

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

构造函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\delta(x-x_n)}{2^n}$，则$f(x)$就是我们所需的函数.

28 第三章习题24.
(1) 由于$||f(x)|-|f(x_0)||\le |f(x)-f(x_0)|$，由$f(x)$的连续性直接证明。
(2) $\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.
(3) $\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$.

29 讨论下述函数的间断点及其类型：
(1)$f(x)=x-[x]$;
解:以所有整数为跳跃间断点.
(2)$f(x)=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}}$;
解:$x=0,1$为可去间断点，$x=-1$为第二类间断点.
(3)$f(x)=\frac{1}{[\frac{1}{x}]}$;
解:$x=0$为可去间断点，$x=\pm\frac{1}{n}$为跳跃间断点.
(4)$f(x)=[x]+[-x]$;
解:所有整数都是可去间断点.
(5)$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq 0,\pm 1;\\ 1, & x=0,\pm 1.\end{cases}$
解：$x=0$为跳跃间断点，$x=1$为可去间断点，$x=-1$为第二类间断点.

30 求下列函数的极限：
(1)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$;
解：令$t=x-3$，则极限变为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3}-\sqrt{t}}{\sqrt{t(t+6)}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}}(a>0,a\neq 1)$;
解:当$a>1$时，极限为a；当$a<1$时，极限为1.
(3)$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;
解:当$x\to 7$时，$\sqrt{x+2}-3$等价于$\frac{x-7}{6}$，$\sqrt[3]{x+20}-3$等价于$\frac{x-7}{27}$，$\sqrt[4]{x+9}-2$等价于$\frac{x-7}{32}$，故有

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\frac{112}{27}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sqrt{\frac{1}{\sin x}+\sqrt{\frac{1}{\sin x}+\sqrt{\frac{1}{\sin x}}}}-\sqrt{\frac{1}{\sin x}-\sqrt{\frac{1}{\sin x}+\sqrt{\frac{1}{\sin x}}}}\right]$;
解:令$t=\frac{1}{\sin x}$，则极限变为

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}=1.$$

(5)$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$;
解：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdots\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\frac{1}{n!}$.
(6)$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+1})$;
解:经变形有

$$x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+1})=x^2(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}).$$

令$t=\frac{1}{x}$，则极限等于

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t}+1-2\sqrt{1+t}}{t^2}.$$

当时$t\to 0^+$，$\sqrt{1+2t}-1$等价于$t-\frac{t^2}{2}$，$\sqrt{1+t}-1$等价于$\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}$，故有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t}+1-2\sqrt{1+t}}{t^2}=-\frac{1}{4}.$$

(7)$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+1)(x+3)\cdots(x+2n-1)}-x)$;
解:令$t=\frac{1}{x}$，则极限等于

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt[n]{(1+t)(1+3t)\cdots(1+(2n-1)t)}-1}{t}=\frac{1}{n}(1+3+\cdots+2n-1)=n.$$

(8)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;
解:$1-\cos x^2$和$\frac{x^4}{2}$在$x\to 0$时是等价无穷小，因此当$x\to 0$，$\sqrt{1-\cos x^2}$等价于$\frac{x^2}{\sqrt{2}}$，$1-\cos x$等价于$\frac{x^2}{2}$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\sqrt{2}.$$

(9)$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x$;
解：由于$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2}=0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x=\lim_{x\to+\infty}[\sin x[\cos(\sqrt{x^2+1}-x)-1]+\cos x\sin(\sqrt{x^2+1}-x)]=0.$$

(10)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi\cos x}{2})}{\sin(\sin^2 x)}$;
解:由于$\cos(\frac{\pi\cos x}{2})=\sin[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)]$，故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi\cos x}{2})}{\sin(\sin^2 x)}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(11)$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{e^x-e^{-x}}-\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}}$;
解:当$x\to 0^+$时，e^x-e^{-x}等价于$2x$，$\tan x-\sin x$和$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$等价于$\frac{x^3}{2}$，故有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{e^x-e^{-x}}-\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x}}=1.$$

(12)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos ax}{\cos bx})^{\frac{1}{1-\cos cx}}(c\neq 0)$;
解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos bx}\cdot\frac{1}{1-\cos cx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos cx}$，当$x\to 0$时，$\cos ax-1$等价于$-\frac{a^2x^2}{2}$，$\cos bx-1$等价于$-\frac{b^2x^2}{2}$，$1-\cos cx$等价于$\frac{c^2x^2}{2}$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos cx}=\frac{b^2-a^2}{c^2},$$

故有
$$\lim_{x\to 0}(\frac{\cos ax}{\cos bx})^{\frac{1}{1-\cos cx}}=e^{\frac{b^2-a^2}{c^2}}.$$
(13)$\lim\limits_{x\to 0}[4x+3e^x-2e^{-x}-\ln(1-x)]^{\frac{1}{\tan 3x}}$;
解:当$x\to 0$时，$3e^x-3$等价于$3x$，$2e^{-x}$等价于$-2x$，$\ln(1-x)$等价于$-x$，$\tan 3x$等价于$3x$，因此
$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+3e^x-2e^{-x}-\ln(1-x)-1}{\tan 3x}=\frac{10}{3}.$$
故有
$$\lim_{x\to 0}[4x+3e^x-2e^{-x}-\ln(1-x)]^{\frac{1}{\tan 3x}}=e^{\frac{10}{3}}.$$
(14)$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}(a,b,c>0)$;
解:我们有
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1)\frac{1}{x}&=\frac{1}{a+b+c}(\lim_{x\to 0}\frac{a^{x+1}-a}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^{x+1}-b}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^{x+1}-c}{x})\\&=\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}.\end{aligned}$$
故有
$$\lim_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{a}{a+b+c}}b^{\frac{b}{a+b+c}}c^{\frac{c}{a+b+c}}.$$
(15) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x$.
解:此极限等于$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2x$，令$y=\ln x$，则有
$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2x=\lim_{y\to-\infty}e^yy^2=\lim_{z\to+\infty}\frac{z^2}{e^z}=0.$$
31 第三章习题28.
证明：对连续函数$\ln f(x)$运用连续函数介值性.

32 第三章习题33.
(1)对于$x_1<x_2$，有
$$kx_2-f(x_2)-(kx_1-f(x_1))\geq k(x_2-x_1)-|f(x_2)-f(x_1)|\geq k(x_2-x_1)-k|x_2-x_1|\geq 0.$$
(2)记$F(x)=x-f(x)$，不难验证对于$x_1<x_2$，有
$$F(x_2)-F(x_1)\geq(1-k)(x_2-x_1).$$
因此$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$。由连续函数的介值性可知零点存在.

33 第三章习题34.
证明：任取一实数a，由$f(x)$在无穷远处的极限性质可知存在一正实数M，使得$|x|>M$满足$f(x)>f(a)$。则函数$f(x)$在区间$[-M,M]$上的最小值即为函数$f(x)$在实数上的最小值。由有限区间上连续函数的性质可知$f(x)$的最小值点存在。

34 第三章习题36.
证明：任取$x_1 \in [a,b]$，则存在$x_2 \in [a,b]$满足

$$|f(x_2)| \le \frac{|f(x_1)|}{2},$$

存在$x_2 \in [a,b]$满足

$$|f(x_3)| \le \frac{|f(x_2)|}{2},$$

不断重复这一过程我们得到$[a,b]$上一序列$\{x_n\}$满足

$$|f(x_n)| \le \frac{|f(x_1)|}{2^{n-1}}.$$

由有界收敛子列定理定理存在$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$极限为ξ，由$f(x)$的连续性可知

$$f(\xi) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0.$$

35 设函数f在区间$[a,b]$上只有第一类间断点，证明f在$[a,b]$上有界.
证明：由于函数$f(x)$只有第一类间断点，故函数$f(x)$局部有界。对于任一$x \in [a,b]$，存在一个x的邻域$B(x,\delta_x)$满足f在此邻域上绝对值上界为M_x。故有

$$[a,b] = \bigcup_x B(x,\delta_x),$$

由有限覆盖定理存在有限个点$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$满足

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\delta_{x_i}).$$

则f在$[a,b]$上绝对值的一个上界是$\max\{M_{x_1}, M_{x_2}, \cdots, M_{x_n}\}$，即$f$在$[a,b]$ 上有界。

36 设$f_n(x) = x^n + x$，证明$f_n(x) = 1$在区间$[\frac{1}{2}, 1)$上只有一个根ξ_n，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$。
证明：函数$f_n(x) = x^n + x$在区间$[\frac{1}{2}, 1)$上都是严格单调增函数且满足

$$f_n(\frac{1}{2}) \le 1, \quad f_n(\frac{1}{2}) > 1.$$

由连续函数介值性可知$f_n(x)$在区间$[\frac{1}{2}, 1)$上有且只有一个根ξ_n。且对于$m > n$，有

$$f_m(\xi_n) = \xi_n^m + \xi_n < \xi_n^n + \xi_n = f_n(\xi_n) = 1.$$

因此$\{\xi_n\}$是一个严格单调增长序列且1是$\{\xi_n\}$的一个上界。对于$a < 1$，由

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + a) = a$$

可知存在一个自然数N使得$a^N + a < 1$，因此$\xi_N > a$，亦即$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n > a$。因此$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 1$.

37 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的间断点都是可去间断点，定义$g(x)=\lim\limits_{t\to x} f(t)$。证明$g(x)$是一个区间$[a,b]$上的连续函数。

38* 设函数$f(x)$在区间$[0,n]$上连续且满足$f(0)=f(n)$。证明区间$[0,n]$中至少存在n对不同(x,y)的满足$f(x)=f(y)$，其中$x-y$是非零整数。
证明:对于n做数学归纳法。当$n=1$时，结论显然成立。现假设结论对$n-1$的情况成立。我们将函数$f(x)$以n为周期延拓到实数轴上得一连续函数$F(x)$。由周民强数学分析习题演练1第142页例3.3.7可知，存在区间$[0,n]$上一个实数对(x,y)满足$|x-y|$ 等于1或$n-1$且$f(x)=f(y)$。若$|x-y|$等于$n-1$，由数学归纳法加上实数对$(0,n)$ 即得我们想证之结论。若$y-x$等于1，则我们有

$$F(y+n-1)=F(y).$$

因此存在区间$[y,y+n-1]$上$n-1$个实数对$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_{n-1},b_{n-1})$ 满足$|x_i-y_i|$ 为非零整数且$F(a_i)=F(b_i)$。定义

$$a_i'=\begin{cases} a_i, & \text{if } a_i\le n;\\ a_i-n, & \text{if } a_i>n.\end{cases}\qquad b_i'=\begin{cases} b_i, & \text{if } a_i\le n;\\ b_i-n, & \text{if } a_i>n.\end{cases}$$

实数对$(a_1',b_1'),(a_2',b_2'),\cdots,(a_{n-1}',b_{n-1}'),(0,n)$ 即为我们所找的n个实数对.

趣味思考题：桌面上两个煎饼，无论形状如何，相对位置如何，必可切一刀使它们面积同时二等分。
证明:设平面x轴上方有两个区域D_1和D_2，存在唯一一条与x轴夹角为θ的射线$l(\theta)$等分区域D_1，我们记在$l(\theta)$上方D_2 的面积为$U(\theta)$，记在$l(\theta)$下方D_2的面积为$L(\theta)$，定义函数$S(\theta)=U(\theta)-L(\theta)$。显然有$S(0)=-S(\pi)$，由介值性存在$0\le\xi\le\pi$满足$S(\xi)$。即射线$l(\xi)$同时平分区域$D_1$和$D_2$.