§3 狭义相对论时空观

一、 同时性的相对性

S系 $A(x_1,t_1)$ $B(x_2,t_2)$ $t_2 = t_1$ $x_2 \neq x_1$

不同地点同时发生两事件A、B.

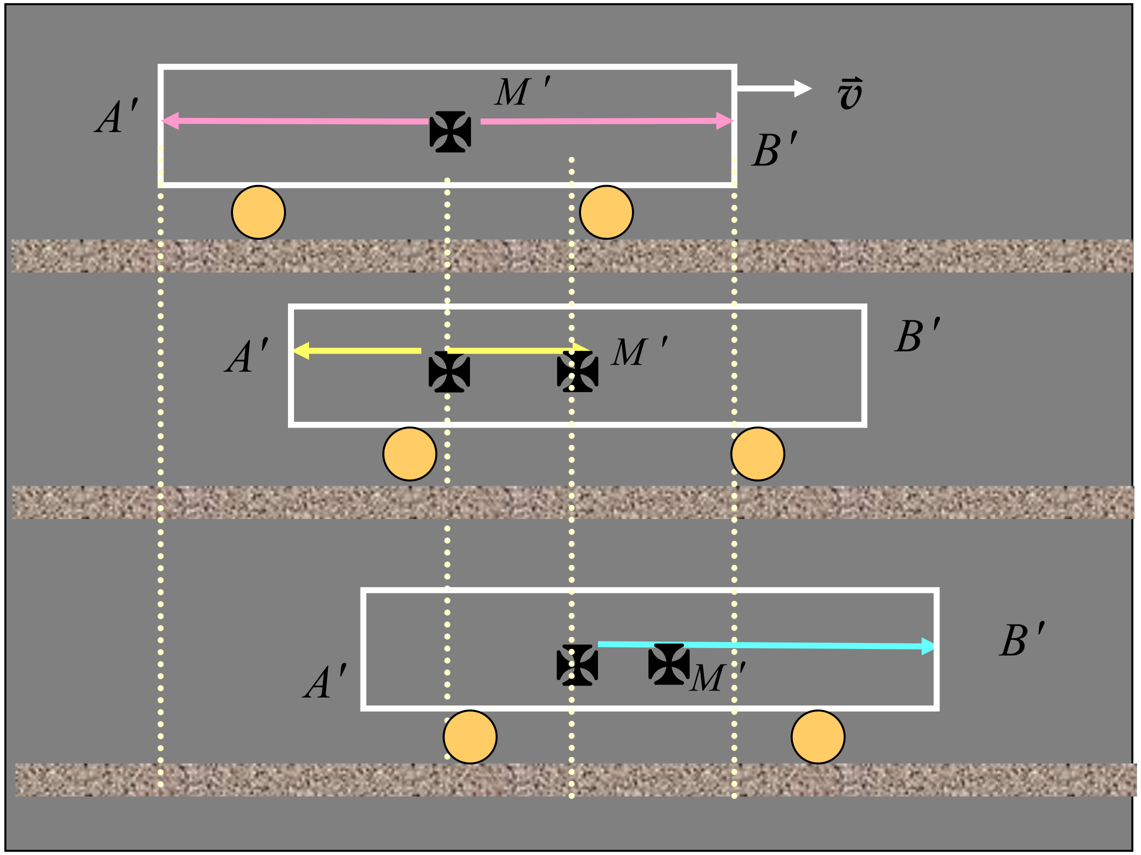
S'系 $A(x_1',t_1')$ $B(x_2',t_2')$ 时间 $t_2' \neq t_1'$

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq 0$$

火车参考系 S'

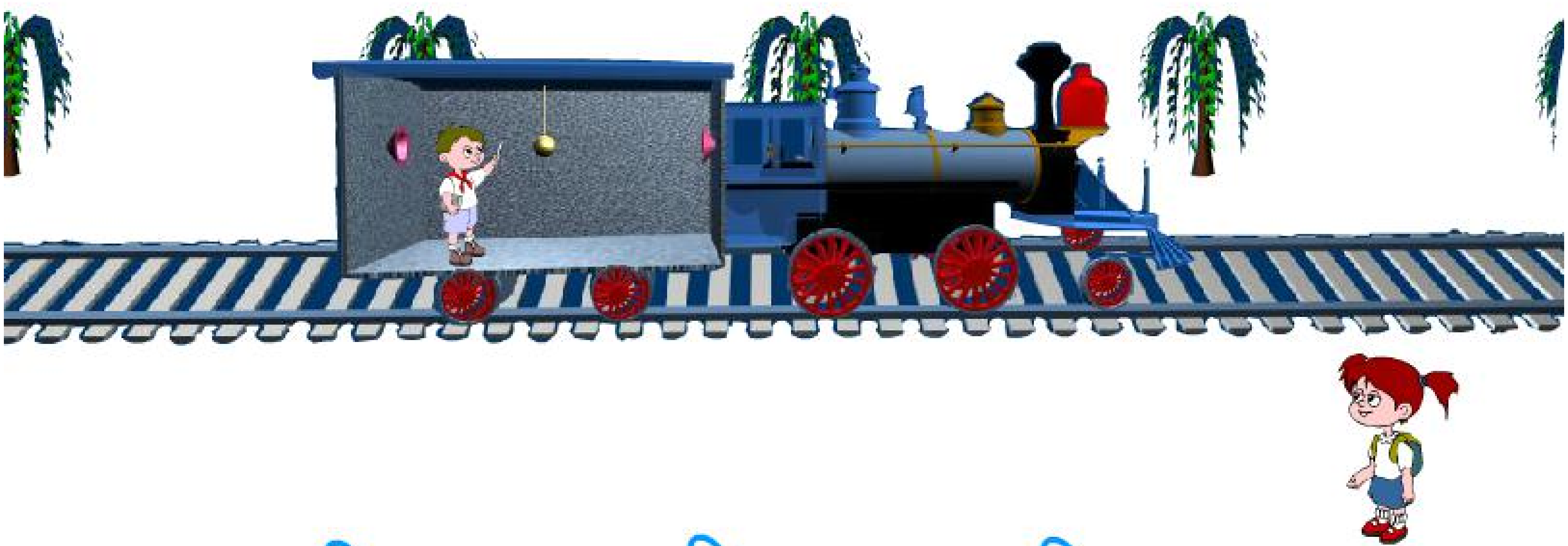
站台参考系 S



S'系中　A'　B'　同时

S系中　A' 先　B' 后

同时的相对性是建立在光速不变原理上的

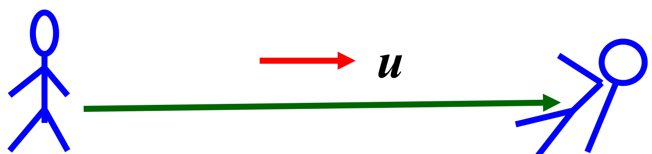


同时相对性：两个惯性系存在相对运动时，在其中一个惯性系中同时发生的两个事件，在另一个惯性系中不一定同时发生。

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad 若\ t_2 > t_1 \quad \begin{cases} \Delta t' > 0 \\ \Delta t' \le 0 \end{cases}$$

同时的相对性是否会改变相关事件的因果关系？

S系



甲开枪 (x_1, t_1)

乙中弹倒下 (x_2, t_2)

子弹速度 $u = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

（信号传递速度）

甲先开枪，乙后中弹倒下。即：$t_2 > t_1$

S'系中观察 是否会有 $t_2' < t_1'$，即：乙先中弹倒下，甲后开枪？

S'系中：

$$\Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[1 - \frac{v}{c^2}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)\right] > 0$$

$$(\because u < c)$$

即当 $t_2 > t_1$时，始终有 $t_2' > t_1'$

同时的相对性不会改变相关事件的因果关系

**洛仑兹变换符合因果时序

例. 事件P_1：张家生了个小A

事件P_2：李家生了个小B

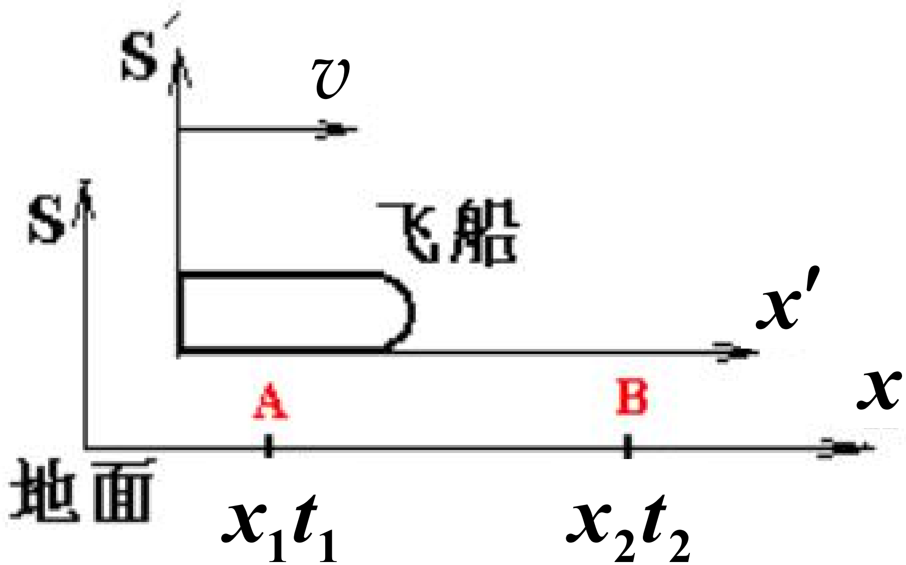
在S系，S'系中的时空坐标为:

$$S: \quad p_1(x_1,\ t_1) \qquad p_2(x_2,\ t_2)$$

$$S': \quad p_1(x_1',\ t_1') \qquad p_2(x_2',\ t_2')$$

若在地面S系看，
张家小A先出生，
$t_2 - t_1 > 0$。

在飞船S'系看，
必然也是张家
小A先出生吗？



根据 洛仑兹变换

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left[(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) - (t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)\right]$$

$$= \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c^2} . \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

由于这两个事件无因果关系，虽然 $t_2 - t_1 > 0$
但是, x_1、x_2 是可以取各种数值的,

对于 $x_2 - x_1$ 的不同情况来说，

$\Delta t'$(完全可以) > 0； $= 0$； < 0 。

即两事件的时序完全可能颠倒。

但是，若小A，小B是一母所生，

而且母亲是位旅行家，在 x_1、t_1 生了小A，

在 x_2、t_2 生了小B。

这时时序就不应颠倒了！

$$\Delta t' = \gamma (t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

我们将上式中的 $\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ 记作 u_x，

这时，它是有物理意义的：

——母亲旅行的平均速度。

在开炮——击中目标问题中，这是炮弹的飞行速度。

一般来说，这是信号（物质、能量）传播的速度。

$$\Delta t' = \gamma (t_2 - t_1)\left[1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

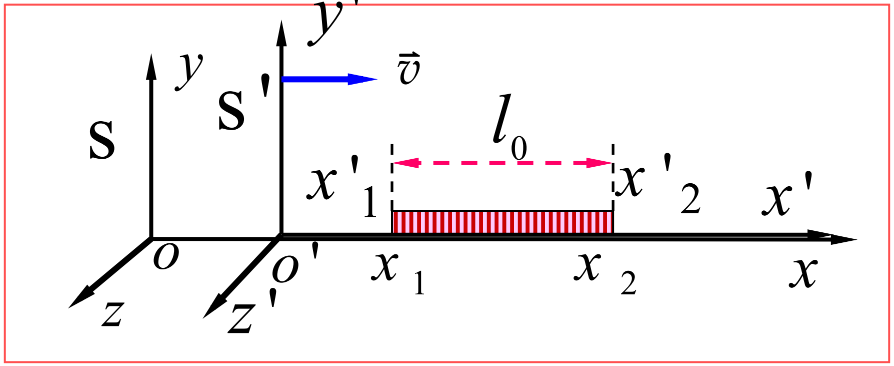
$$= \gamma (t_2 - t_1)(1 - \frac{v}{c^2} u_x)$$

由于 $u_x \leq c$ ， 而 $v < c$， 所以 $\left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right) > 0$

若 $t_2 > t_1$, 则 必有 $t_2' > t_1'$.

即对这种情况，在飞船上看也是小A先出生，
两事件的时序没有颠倒。

二、长度的相对性 （运动的尺收缩）



S'系: 尺**静止**放在 x' 轴上,

$$l_0 = l' = \left| x_2' - x_1' \right|$$

(**原长**：相对**静止**的参考系中测量的长度)

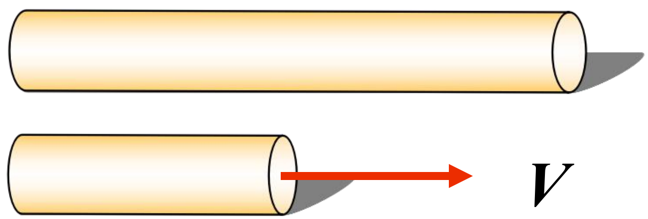
S系中： 观测者必须同时测 x_1 、x_2 ，$t_2 = t_1 = t$

得： $l = \left| x_2 - x_1 \right| = ?$

设　在S系中某时刻 t 同时测得棒两端坐标为 x_1、x_2，则S系中测得棒长 $l = x_2 - x_1$，l 与 l_0 的关系为：

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - vt) - (x_1 - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



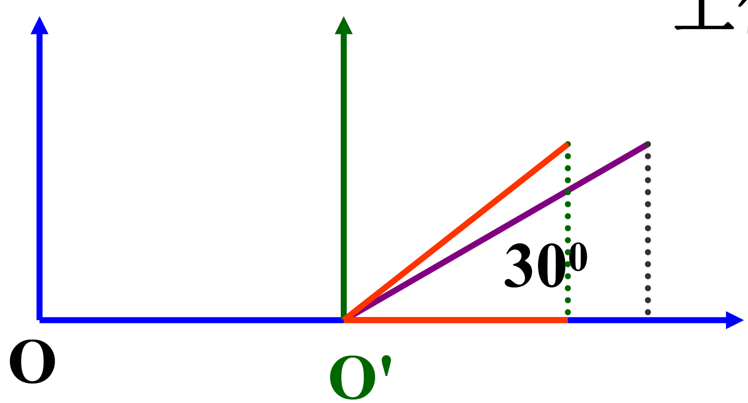
1 长度收缩　　$l < l_0$

2 如将物体固定于S系, 由S'系测量, 同样出现长度收缩现象.

结论：长度具有相对意义

例：一根米尺静止放在S'系中，与O'x'轴成30^0角，如果在S系中测的米尺与Ox轴成45^0角，那么，S '系相对与S系的速度v为多大？S系中测得的米尺的长度是多少？

解：x方向上米尺长度收缩，y方向上保持不变。



$$x = x_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$y = xtg45^0 = x_0tg30^0 = y_0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_0} = \frac{tg30^0}{tg45^0} = \sqrt{1-v^2/c^2} \qquad v^2 = \frac{2}{3}c^2 \Rightarrow v = 0.816c$$

$$l = \sqrt{2}y = \sqrt{2}l_0\sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}l_0 = 0.707l_0$$

三、 时间的相对性 (运动的时钟变慢)

S′系 $\quad A'(x_1', t_1') \quad B'(x_2', t_2')$

$x_1' = x_2' = x_0'$ 同一地点两事件时间间隔 $\tau_0 = \Delta t' = t_2' - t_1'$

原时：同一地点发生事件的时间间隔

S系 $\quad t_1 = \dfrac{t_1' + \dfrac{v}{c^2} x_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad t_2 = \dfrac{t_2' + \dfrac{v}{c^2} x_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\tau = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \tau_0 .$$

在所有参考系中，原时最短。运动的时钟变慢.

例： 问飞船上讲一节课用 1 小时，地球上用几小时？

$\frac{v}{c}$	飞船 $\tau_0 = t_2' - t_1'$	地球 $\tau = t_2 - t_1$
0.1	1 (小时)	1.005 小时
0.9998	1 (小时)	50 小时

FIGURE 40–10 A clock taken around the world on an airplane has been used to test time dilation.

1971年，美国空军用两组C_S（铯）原子钟绕地球一周，得到运动钟变慢：203±10ns，而理论值为：184 ± 23ns，在误差范围内二者相符。

“阿波罗号”上的宇航员飞行**8**天，比地球上的同事衰老的过程慢十万分之一秒！

例　在惯性系S中的同一地点发生两个事件，事件B比事件A晚4 s发生。在另一个惯性系S'中观察，事件B比事件A晚5s发生，问这两个参考系的相对速度多大？在S'系中这两个事件发生的地点相距多远？（设S'系以恒定速率u相对S系沿x轴运动。）

分析：这是相对论中同地不同时的两个事件的时空转换问题。根据时间延缓效应的关系式可以求出两个参考系的相对运动速度，从而可以求得在S'系中两个事件发生地点的间距。

解：两个参考系的相对速度为u，则根据题意

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4s;$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 5s$$

由时间延缓效应的关系式

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

可以得到： $1-\dfrac{u^2}{c^2} = \dfrac{16}{25}$　即： $u = \dfrac{3}{5}c$

设这两个事件在S'系中的时空坐标为 (x_1', t_1')和(x_2', t_2')

则由洛伦兹变换得到：

$$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\ x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由于这两个事件在S系发生在同一地点，即 $x_1=x_2$，于是有：

$$\left|x_2' - x_1'\right| = u\left|t_1' - t_2'\right| = 9\times 10^8 m$$

即在S'系中观察这两个事件发生在不同地点，他们在相对速度方向上相距9×10⁸m。

§4 狭义相对论动力学基础

动力学基础包括两个方面的内容：

1) 物理量的定义 （一个参考系中的问题）

2) 物理规律的变换 （两个参考系的问题）

如何定义物理量？

必须满足两个基本原则：

1) 基本规律在洛仑兹变换下形式不变

动量定理（守恒定律）动能定理（能量守恒）等

2) 低速时回到牛顿力学

一、相对论质量与动量

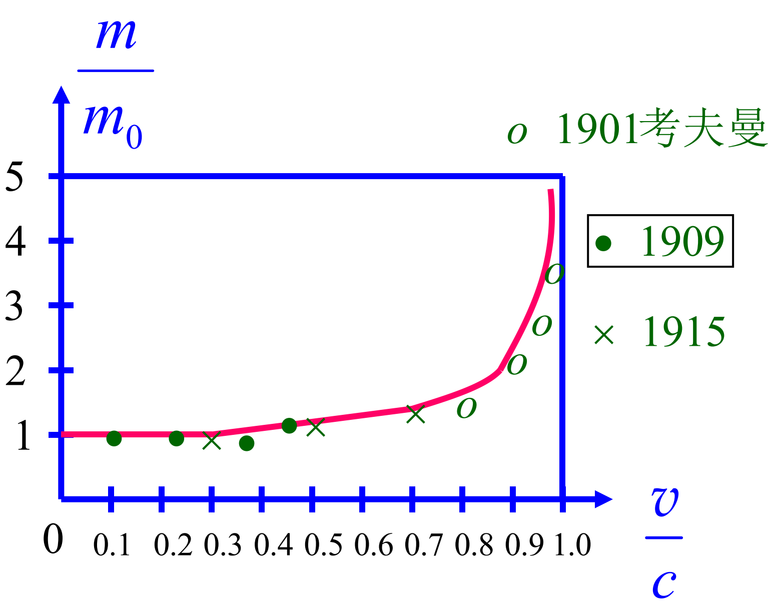
由力的定义式有： $\vec{F}$ 持续作用 ⟶ $\vec{P}$ 持续 ↗

但速度的上限是 c ⟶ m 随速率增大而增大

所以质量必须是 $m = m(\upsilon)$ 的形式

实验证明：

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}$$



1）合理性（速度愈高质量值愈大）

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

$\upsilon = 0.98c$ $\quad\quad$ $\upsilon = 0.99c$

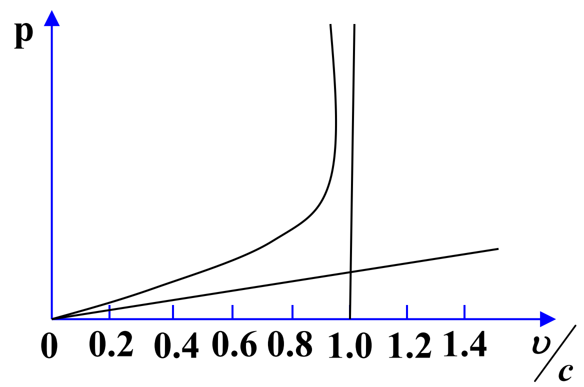
$m = 5m_0$ $\quad\quad$ $m = 7.09m_0$

2）特殊情况下可理论证明，归根结底是实验证明

3）由于空间的各向同性质量与速度方向无关

4）相对论动量

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$



二、相对论动力学的基本方程

$$\boxed{\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}} \qquad \boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}}$$

相对论中仍然保持了牛顿定律的原来框架。

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}$$

注意：1）

$$\upsilon \ll c,\quad m=m_0=const \quad \vec{F}=m_0\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=m_0\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}$$

2）方程虽保持了原牛顿定律的框架，但内容却有别

	经典力学	相对论力学
力的作用	产生 $\vec{a}$,改变速度	改变速度、质量
F长时间作用	$\upsilon \to \infty$	$\upsilon \uparrow m \uparrow, \upsilon < c, m \to \infty$
力的方向	决定于 $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	决定于 $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \vec{\upsilon}\dfrac{dm}{dt}$ 合矢量方向

三、相对论的能量

推导的基本出发是动能定理（力作功改变能量具有合理性）

令质点从静止开始，力所做的功就是动能表达式

推导：

$$A=\int Fdx=\int \frac{dP}{dt}dx=\int \upsilon dP$$

$$=\int \frac{m_0\upsilon}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}}d\upsilon=\int_0^{\upsilon} d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

$$A=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-m_0c^2$$

由动能定理

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

讨论：1）与经典动能形式完全不同,若电子速度为

$$\upsilon = \frac{4}{5}c \qquad E_k = \frac{2}{3}m_0c^2$$

2）当$v << c$时，可以证明

$$E_k = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}c^2 - m_0c^2 \approx (1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2})m_0c^2 - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2$$

四、相对论质能关系

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}\quad \begin{cases} E_k & \text{运动时的动能} \\ m_0c^2 & \text{静止时的能量} \end{cases}$$

$$E = E_k + m_0c^2 = mc^2$$

$$\boxed{E = mc^2}$$ 质能关系式

$\Downarrow$

为粒子以速率v运动时的总能量

质能关系预言：物质的质量就是能量的一种储藏。

核裂变能 $\Delta E = \Delta m_0 c^2 \longrightarrow$ 原子能公式

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$$

$$\boxed{E = mc^2}$$

讨论：

1. $E_{静} = m_0c^2$ 任何宏观静止的物体都具有能量

2 . 在相对论中，能量守恒和质量守恒统一起来。

$$\sum_i E_i = \sum_i m_i c^2 = 常量 \quad —— 能量守恒$$

$$\sum_i m_i = 常量 \quad —— 质量守恒$$

3 . 粒子相互作用中相对论质量 $\sum_i m_i(v)$ 守恒，

但其静止质量 $\sum_i m_{0i}$ 并不守恒。

4. $E = mc^2$ 可认为质量和能量是一个事物的两个方面

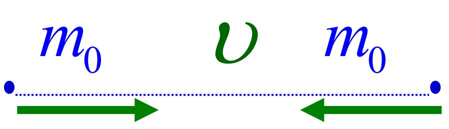
高能物理中，把质量按能量称呼

电子质量是 0.511MeV $\qquad m_0c^2 = 0.511\text{MeV}$

例 两个静止质量为m_0全同粒子以相同的速率υ相向运动，碰后复合**求：**复合粒子的速度和质量。

解：设复合粒子质量为M 速度为$\vec{V}$，碰撞过程，动量守恒

$$m\vec{\upsilon}-m\vec{\upsilon}=M\vec{V}$$



$$V=0$$ （碰后静止）

由能量守恒

$$2mc^2=M_0c^2$$

$$M_0=2m=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}>2m_0$$ 质量过剩

例：一个质子与一个中子结合成一个氘核时，质量亏损为：

$$\Delta m = \sum_i m_{0i} - M_0 = [(1.673 + 1.675) - 3.344] \times 10^{-27} = 4.0 \times 10^{-30} kg$$

相应的氘核的结合能：

$$E_B = \Delta m c^2 = 3.564 \times 10^{-13} J$$

聚合成1kg氘核所能释放出来的能量为：

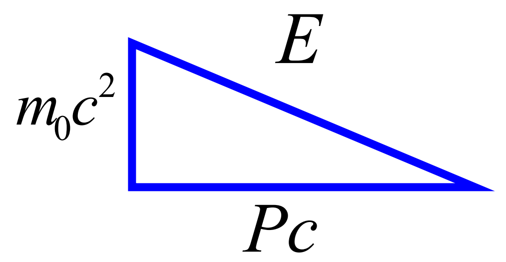
$$\frac{E_B}{m_{0d}} = \frac{3.56 \times 10^{-13}}{3.34 \times 10^{-27}} = 1.07 \times 10^{14} J/kg$$

相当于1kg汽油燃烧时所放出热量$4.6 \times 10^{7} J/kg$ 的230万倍。

五、相对论动量与能量的关系

由 $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}}$ 两边平方得 $m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0{}^2c^2$

$$E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4$$



$\because E = E_k + m_0c^2 \qquad \therefore E_k{}^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2c^2$

$\upsilon << c$，$E_k << m_0c^2$ $\qquad \boxed{E_k = \dfrac{p^2}{2m_0}}$

$$\boxed{E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4}$$

讨论：

可能存在“无质量”粒子 $(m_0 = 0)$

只具有动量、能量，没有静止质量， 所以也没有静能

光子能量 $$E = Pc$$

光子动量 $$P = \frac{E}{c}$$

光子质量 $$m = \frac{E}{c^2} = \frac{P}{c}$$