第二章 命题逻辑等值演算

① 等值式

给定两个命题公式 A 和 B。如果 A 和 B 的真值表相同，则称 A 和 B 是等值(等价)的或逻辑相等。记作 $A \equiv B$。

■ $A \equiv B$ 的充要条件是 $A \Leftrightarrow B$ 为重言式。

证： 若 $A \equiv B$ ，则 A, B 有相同的真值，即有 $A \Leftrightarrow B$ 的值永为 T。

若 $A \Leftrightarrow B$ 为重言式，则 $A \Leftrightarrow B$ 的值永为 T，故 A, B 的真值相同，即 $A \equiv B$。

i）方法一：真值表法

例 1： 证明：$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$ 。

例 2： 判断下面两个公式是否等值。

1）$\sim(P \vee Q)$ 与 $\sim P \wedge \sim Q$ 。

2）$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ 。

② 24 个重要的等值式

⑴ 否定律　　$P \equiv \sim\sim P$

⑵ 幂等律　　$P \equiv P \vee P$，$P \equiv P \wedge P$

⑶ 交换律　　$P \vee Q \equiv Q \vee P$，　$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

⑷ 结合律 $(P\lor Q)\lor R\equiv P\lor(Q\lor R)$

$(P\land Q)\land R\equiv P\land(Q\land R)$

⑸ 分配律 $P\lor(Q\land R)\equiv(P\lor Q)\land(P\lor R)$,

$P\land(Q\lor R)\equiv(P\land Q)\lor(P\land R)$

⑹ 德·摩根律 $\sim(P\lor Q)\equiv\ \sim P\land\sim Q$, $\sim(P\land Q)\ \equiv\ \sim P\lor\sim Q$

⑺ 吸收律 $P\lor(P\land Q)\equiv P$， $P\land(P\lor Q)\equiv P$

⑻ 零律 $P\lor 1\equiv 1$，$P\land 0\equiv 0$

⑼ 同一律 $P\lor 0\equiv P$，$P\land 1\equiv\ P$

⑽ 排中律 $P\lor\sim P\equiv 1$

⑾ 矛盾律 $P\land\sim P\equiv 0$

⑿ 蕴涵等值式 $P\Rightarrow Q\equiv\ \sim P\lor Q$

⒀ 等价等值式 $P\Leftrightarrow Q\equiv(P\Rightarrow Q)\land(Q\Rightarrow P)$

⒁ 假言易位 $P\Rightarrow Q\equiv\ \sim Q\Rightarrow\ \sim P$

⒂ 等价否定等值式 $P\Leftrightarrow Q\equiv\ \sim P\Leftrightarrow\ \sim Q$

⒃ 归谬论 $(P\Rightarrow Q)\land(P\Rightarrow\ \sim Q)\equiv\ \sim P$

其中 1 代表永真命题，0 代表永假命题，P, Q 和 R 代表任意的命题公式。

ii）方法二：等值演算法

■ **等值演算：** 由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程。

■ **等值演算的应用**

⑴ 证明两个公式等值。

⑵ 判断公式类型。

⑶ 解判定问题。

例 3： 用等值演算验证等值式

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)。$$

例 4： 用等值演算判断下列公式类型。

⑴ $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$。

⑵ $\sim(P \Rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$。

⑶ $P \wedge (((P \vee Q) \wedge \sim P) \Rightarrow Q)$。

- 求解实际问题的方法如下：

  ⑴ 先找出原子命题，便将其符号化。

  ⑵ 按题意写出命题公式。

  ⑶ 求成真赋值。

例 5： 某公司要从赵，钱，孙，李，周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件

⑴ 若赵去，则钱也去。

⑵ 李，周两人中必有一人去。

⑶ 钱，孙两人中去且仅去一人。

⑷ 孙，李两人同去或同不去。

⑸ 若周去，则赵，钱也同去。

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国。

③ 析取范式和合取范式

- **文字：** 命题变元或其否定。
- **简单析取式：** 仅由有限个文字构成的析取式。
- **简单合取式：** 仅由有限个文字构成的合取式。

简单析取式举例：

P，～Q，P∨～P，～P∨Q，～P∨～Q∨R，P∨～Q∨R。

简单合取式举例：

～P，Q，P∧～P，～P∧Q，～P∧～Q∧R，P∧～Q∧R。

注 1： 一个文字即是简单析取式，又是简单合取式。

定理 1： ⑴ 一个简单析取式是重言式⇔它同时含某个命题变元及它的否定式。

⑵ 一个简单合取式是矛盾式⇔它同时含某个命题变元及它的否定式。

- 析取范式：由有限个简单合取式构成的析取式。
- 合取范式：由有限个简单析取式构成的合取式。
- 范式：析取范式与合取范式的统称。

◆ 一个命题公式为析取范式当且仅当它具有形式

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geq 1),$$

其中 A_i $(i=1, 2, ..., n)$ 为简单合取式。

例如：$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim Q \wedge \sim R) \vee P$。

◆ 一个命题公式为合取范式当且仅当它具有形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad (n \geq 1),$$

其中 A_i $(i=1, 2, ..., n)$ 为简单析取式。

例如：$(P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q) \wedge R$。

注 2： (1) 形如 $\sim P \wedge Q \wedge R$ 的公式，即是一个简单合取式构成的析取范式，又是由三个简单析取式构成的合取范式。

(2) 形如 $P \vee \sim Q \vee R$ 的公式，即是一个简单析取式构成的合取范式，又是由三个简单合取式构成的析取范式。

定理 2： 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

◆ 求合取范式或析取范式的步骤：

(1) 消去 $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ 联结词。

(2) 消去双重否定符，内移否定符。

(3) 利用分配律、交换律。

例 6： 求 $((P\vee Q)\Rightarrow R)\Rightarrow P)$ 的析取范式和合取范式。

注 3： 例 6 显示析取范式不是唯一的，同样合取范式也是不唯一的。

为了使命题公式的范式唯一，我们进一步将简单合取式与简单析取式规范化。

◆ **极小项：** 含有 n 个命题变元的简单合取式，并满足

a) 每个命题变元与它的否定不能同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次。

b) 第 i 个命题变元或它的否定出现在从左算起的第 i 个位置上。

◆ **极大项：** 含有 n 个命题变元的简单析取式，并满足

a) 每个命题变元与它的否定不能同时存在，但两者之一必须出现且仅出现一次。

b) 第 i 个命题变元或它的否定出现在从左算起的第 i 个位置上。

注 4： n 个命题变元共有 2^n 个极小项(极大项)。

注 5：(1) 每个极小项的真值表里只有一个成真赋值。

(2) 每个极大项的真值表里只有一个成假赋值。

例如：2 个命题变元的 4 个极小项的真值表如下：

P　　Q	P∧Q	P∧∼Q	∼P∧Q	∼P∧∼Q
T　　T	T	F	F	F
T　　F	F	T	F	F
F　　T	F	F	T	F
F　　F	F	F	F	T

如果我们把极小项(极大项)的成真(假)赋值中的 T 取成 1，F 取成 0。那么每一个极小项(极大项)都对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数。

3 个命题变项 P，Q，R 的极小项编码

公式	成真赋值	对应十进制数	名称
∼P∧∼Q∧∼R	FFF	0	m_0
∼P∧∼Q∧R	FFT	1	m_1
∼P∧Q∧∼R	FTF	2	m_2
∼P∧Q∧R	FTT	3	m_3

$P\wedge\sim Q\wedge\sim R$	TFF	4	m_4
$P\wedge\sim Q\wedge R$	TFT	5	m_5
$P\wedge Q\wedge\sim R$	TTF	6	m_6
$P\wedge Q\wedge R$	TTT	7	m_7

3 个命题变项 P，Q，R 的极大项编码

公式	成假赋值	对应十进制数	名称
$P\vee Q\vee R$	FFF	0	M_0
$P\vee Q\vee\sim R$	FFT	1	M_1
$P\vee\sim Q\vee R$	FTF	2	M_2
$P\vee\sim Q\vee\sim R$	FTT	3	M_3
$\sim P\vee Q\vee R$	TFF	4	M_4
$\sim P\vee Q\vee\sim R$	TFT	5	M_5
$\sim P\vee\sim Q\vee R$	TTF	6	M_6
$\sim P\vee\sim Q\vee\sim R$	TTT	7	M_7

定理 3： 设 m_i 和 M_i 是命题变元 P_1, P_2, ⋯ , P_n 形成的极小项和极大项，则

(1) $m_i\wedge m_j \equiv 0$, $(i\neq j)$。

(2) $M_i\vee M_j \equiv 1$, $(i\neq j)$。

(3) $\sim m_i \equiv M_i$, $\sim M_i \equiv m_i$ 。

◆ **主析取范式：** n 个命题变元构成的析取范式中所有的简单合取式都是极小项。

◆ **主合取范式：** n 个命题变元构成的合取范式中所有的简单析取式都是极大项。

定理 4： 任一命题公式都存在与之等值的主析取范式与主合取范式，并且是唯一的。

求公式 A 主析取范式的步骤：

● **方法一：等值演算法**

（1）求出析取范式。

（2）去掉永假的合取项。

（3）对合取项补入没出现的命题变元。（P∨～P）

（4）去掉重复的合取项、合并相同变元。

● 方法二：真值表法

（1）写出 A 真值表。

（2）找出 A 的成真赋值。

（3）找出每个成真赋值对应的极小项，按顺序写出它们的析取。

求公式 A 主合取范式的步骤：

- **方法一：等值演算法**

（1）求出合取范式。

（2）去掉永真的析取项。

（3）对析取项补入没出现的命题变元。（$P\wedge\sim P$）

（4）去掉重复的析取项、合并相同变元。

- 方法二：真值表法

1）写出 A 真值表。

2）找出 A 的成假赋值。

3）找出每个成假赋值对应的极大项，按顺序写出它们的合取。

例 7： 求 $(P\wedge(P\Rightarrow Q))\vee Q$ 的主析取范式。

例 8： 求 $(P\wedge(P\Rightarrow Q))\vee Q$ 的主合取范式。

■ **主析(合)取范式的用途：**

⑴ 求公式的成真与成假赋值。

⑵ 判断公式类型。

⑶ 判断两个命题公式是否等值。

⑷ 解决实际问题。

例 9： 求 $(P \Rightarrow \sim Q) \Rightarrow R$ 的成真与成假赋值。

例 10： 某公司派小李或小张去上海出差。若派小李去，则小赵要加班。若派小张去，小王也得去。小赵没加班。问公司如何派？