附加习题 2

一. 填空

1.令 $A=(a_{ij})$ 是一3阶实正交矩阵，其 $(1,1)-$ 位置元素 $a_{11}=1$，又令 $b=(1,0,0)^T$．则 $AX=b$ 的解是__$(1,0,0)^T$．

2. 设 $V=\{a\cos t+b\sin t|a,b\in\mathbf{R}\}$ 是二维实线性空间，对任意 $f,g\in\mathbf{V}^*$，定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(f,g) 是否是 V 上的内积_yes______，$h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度为_$\sqrt{25+24\sin 2}$_______.

3. $\mathbf{R}^2$ 中，从基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵是_$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1\\-4&1\end{pmatrix}$_，与 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 等价的标准正交基是_$(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5})^T$,__$(\frac{-1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5})^T$________.

4. 设 n 阶矩阵 A 的元素全为1，则 A 的 n 个特征值为_$n-1$ 个_0, n_______.

5. 设 A 为2阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的2维向量，$A\alpha_1=0, A\alpha_2=3\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为___1_____.

6. 若二次曲面方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$ ___1_____.

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯

性指数为$\mathbf{1}$，则a的取值范围为_[−2, 2]______.

8. 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是n维线性空间的一个基，由$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{i+1}, i=1,2,\ldots,n-1, \sigma(\alpha_n)=0$定义的线性变换σ在基下的矩阵为_$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$____，σ的有理标准形为_$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$____..

9. 设σ是欧式空间V到自身的一个非零映射，且$\forall \alpha,\beta \in V$, $k\in$ R,

有 $(\sigma(\alpha),\beta)=k(\alpha,\sigma(\beta))$，则$k=$ _± 1____.

10. 在线性空间$\mathbf{R}^4$中，对于$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，

$\beta=(y_1,y,y_3,y_4)^T$，定义$f(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$. 此时$(\mathbf{R}^4,f)$成一正交空间，$(\mathbf{R}^4,f)$中极大全迷向子空间维数为__1______.

11. 设V是一3维线性空间，V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$在$V^*$中的对偶基为$f_1,f_2,f_3$. 令$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3$, $\beta_3=-2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$. 则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$在$V^*$中的对偶基为（用$f_1,f_2,f_3$表出）_________.

12. 设V是一n维线性空间，$0\neq f\in V^*$，$\mathrm{ker}f$是V的_$n-1$_维子空间.

二. 选择最佳答案

13. 设A为4阶矩阵，且$A^2+A=0$，若$\mathrm{r}(A)=3$，则A相似于（ D ）

(A)$\mathrm{diag}(1,1,1,0)$, (B)$\mathrm{diag}(1,1,-1,0)$,

(C)$\mathrm{diag}(1,-1,-1,0)$, (D)$\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$.

14.设A,B为可逆矩阵,且A与B相似, 则下列论断错误的是(C)

(A)A^T与B^T相似, (B)A^{-1}与B^{-1}相似;

(C)$A+A^T$与$B+B^T$相似,, (D)$A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似,

$$\text{Count.}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

15. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充要条件为(B)

(A)$a=0,b=2$,(B)$a=0$,b为任意常数,

(C)$a=2,b=0$,, (D)$a=2$,b为任意常数.

16. 令$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 则(C)

(A) A与 B 相似且合同, (B) A与 B 相似但不合同

(C) A与 B 合同但不相似,(D) A与 B 既不相似又不合同.

17. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=PY$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中$P=(e_1,e_2,e_3)$,若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$,则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$X=QY$下的标准形为(A).

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$,(B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$, (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

18. 设V_1,V_2都是n维欧式空间V的子空间,且$\dim V_1<\dim V_2$.

下面结论正确的是（　D　）

(A)$V_1 \sqsubset V_2$, (B) $\dim(V_1^{\perp}+V_2)>n$

(C)$V_1^{\perp}\cap V_2 \neq \phi$,　(D)$V_1^{\perp}\cap V_2 \neq 0$.

19. 设A是实数域R上的二阶方阵, $|A|<0$, 那么A（ A ）

(A)可对角化, (B)不可对角化，(C)无法判定.

20. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$, 则的Jordan标准形中有（C）个1阶

Jordan块.

(A)3, (B)0, (C)1, (D)2.

21. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&3\\0&3&3\end{pmatrix}$,

$A_3=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则$A$相似于（ B ）

(A) A_1, (B) A_2, (C) A_3, (D) A_4.

22. 设B是n维线性空间V上的幂零变换, $B^l=0$, 但$B^{l-1}\neq 0$, 则B的Jordan标准形中必有（ D ）阶Jordan块.

(A)n, (B)1, (C)$t(<n)$, (D)l.

23. 设B是6维线性空间V上的幂零变换, $\mathrm{r}(B)=2$, 则B的Jordan标准形中Jordan块的个数为（ C ）.

(A)2,　(B)3,　(C)4,　(D)5.

24. 设$V=W\oplus W^{\perp}$, W是V的子空间. 定义$\rho: V\longrightarrow W$, $\rho(\alpha)=\alpha_1(\alpha=\alpha_1+\alpha_2)$. 则$\rho$是（ A ）

(A)幂等变换, (B)对称变换, (C)可逆变换, (D)正交变换.

四. 综合题

25. 在$\mathrm{R}^{n\times n}$中定义

$$(A,B)=\mathrm{tr}(AB^T),\quad \forall A,B\in \mathrm{R}^{n\times n},$$

(1) $\mathrm{R}^{n\times n}$在上述定义下是否成为欧式空间？给出证明;

(2) 求出这个欧氏空间的一组正交基.

证明. (1)对称性: $(A,B)=\mathrm{tr}(AB^T)=\mathrm{tr}(BA^T)$,

线性性: $((kA+C),B)=\mathrm{tr}\big((kA+C)B^T\big)=k\mathrm{tr}(AB^T)$

$+\mathrm{tr}(CB^T)=k(A,B)+(C,B)$,

正定性: $(A,A)=\mathrm{tr}(AA^T)$, 因AA^T对角线上元素为 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\ (\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{n})$, 显然$(A,A)=\mathrm{tr}(AA^T)>0$.

(2). 标准正交基为$\{E_{ij}|1\le i,j\le n\}$, 满足

$$\left(E_{ik},E_{lj}\right)=\mathrm{tr}\left(E_{ik}{E_{lj}}^T\right)=\begin{cases}1, 若k=j,i=l,\\0, 若k\neq j或i\neq l.\end{cases}$$

26. 设α是欧式空间的一个非零向量, $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in V$满足下列条件:

(1) $(\alpha,\beta_i)>0(i=1,2,\dots,n)$

(2) $\left(\beta_j,\beta_i\right)\le 0(j,i=1,2,\dots,n,i\neq j)$

求证: $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$线性无关.

证明. 观察$k_1\beta_1+k_1\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$, 不妨设$k_1,\dots,k_r\ge 0$, $k_{r+1},\dots,k_n\le 0$,写$\gamma=\sum_{i=1}^{r}k_i\beta_i=-\sum_{j=r+1}^{n}k_j\beta_j$, 则

$$0 \le (\gamma,\gamma) = \left(\sum_{i=1}^{r} k_i\beta_i, -\sum_{i=r+1}^{n} k_i\beta_i\right)$$
$$= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} k_i k_j \left(\beta_i, \beta_j\right) \le 0$$

故$(\gamma,\gamma) = 0$, $\gamma = 0$. 所以

$0 = (\alpha,\gamma) = (\alpha, \sum_{i=1}^{r} k_i\beta_i) = \sum_{i=1}^{r} k_i(\alpha,\beta_i) \ge 0$. 推出

$k_1, \dots, k_r = 0$, 同样, 由$(\alpha, \sum_{i=r+1}^{n} k_i\beta_i) = \sum_{j=r+1}^{n} k_j(\alpha,\beta_j) \le 0$,

得$k_{r+1} = \cdots = k_n = 0$, 结论得证.

27. 设V是n维欧式空间, 求证任一个n阶正定矩阵都是V中某一个基的度量矩阵, 并说明这样的基不唯一.

证明. 令A为n阶正定矩阵, 则存在可逆矩阵Q使得$A = Q^T Q$.

写$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $q_1, q_2, \dots, q_n$构成V的一个基, 且

$q_i^T q_j = \left(q_i, q_j\right) = a_{ij}$ (a_{ij}为A的(i,j)位置的元素), 故A是基底

$q_1, q_2, \dots, q_n$的度量矩阵.

事实上, 对任一正交矩阵P, A都是PQ的列向量为基底的度量矩阵.

如 E_2 既是基底$(1,0)^T$, $(0,1)^T$ 的度量矩阵, 也是基底$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}},)^T$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}},)^T$的度量矩阵.

28.对$x = (x_1, x_2)^T$, $y = (y_1, y_2)^T$, 规定

$$(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2,$$

证明(x,y)是$\mathbf{R}^2$的一个内积当且仅当$a > 0, ac > b^2$.

证明. 易见, 如上定义的$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$映射具有对称性, 线性性.

但(x,y)还需满足正定性: $(x,x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$

$$=a(x_1-\frac{b}{a}x_2)^2+\mathrm{c}-\frac{b^2}{a}\geq 0\Leftrightarrow\ a>0,ac>b^2$$

29. 设欧式空间的某组基的度量矩阵为G,V的一个正交变换在该基下的矩阵为A, 证明$A^TGA=G$.

证明. 设$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$是欧氏空间的一个基, 正交变换$\mathcal{A}$在该基下矩阵为$A$, 即

$\mathcal{A}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\mathcal{A}\beta_1,\mathcal{A}\beta_2,\dots,\mathcal{A}\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A$.

记等式右边的第i列为$\alpha_i=\mathcal{A}\beta_i(i=1,2,\dots,n)$. 另一面, 基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的度量矩阵为

$$G=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)^T(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n),$$

而 $((\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A)^T(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A=A^TGA$. 但$A^TGA$的$(i,j)$−位置的元素为$\alpha_i^T\alpha_j=(\alpha_i,\alpha_j)=(\mathcal{A}\beta_i,\mathcal{A}\beta_j)=(\beta_i,\beta_j)$, 为度量矩阵$G$的$(i,j)$−位置的元素, 故$A^TGA=G$.

30. 设σ是欧式空间V到自身的一个非零映射, 且$\forall\alpha,\beta\in V$, $k\in\mathrm{R}$, 有 $(\sigma(\alpha),\beta)=k(\alpha,\sigma(\beta))$, 求证：σ是一线性变换.

证明. 因σ是非零映射, 存在$0\neq\alpha\in V$, 使$\sigma(\alpha)\neq 0$, $\forall,\beta\in V$,

$$(\sigma(\alpha),\beta)=k(\alpha,\sigma(\beta))=k(\sigma(\beta),\alpha)=k^2(\beta,\sigma(\alpha))=$$

$$k^2(\sigma(\alpha),\beta)\Rightarrow k^2=1,k=\pm 1.$$

$\forall\alpha,\beta\in V$, $l\in\mathrm{R}$, 对任一$\gamma\in V$,

$$(\sigma(l\alpha+\beta)-l\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\gamma)=(\sigma(l\alpha+\beta),\gamma)-(l\sigma(\alpha),\gamma)$$

$$-(\sigma(\beta),\gamma)=k(l\alpha+\beta,\sigma(\gamma))-lk(\alpha,\sigma(\gamma))-k(\beta,\sigma(\gamma))$$

$$=kl(\alpha,\sigma(\gamma))+k(\beta,\sigma(\gamma))-lk(\alpha,\sigma(\gamma))-k(\beta,\sigma(\gamma))$$

$$=l(\sigma(\alpha),\gamma)+(\sigma(\beta),\gamma)-l(\sigma(\alpha),\gamma)-(\sigma(\beta),\gamma)=0.$$

因γ可取遍V中所有向量，$\sigma(l\alpha+\beta)-l\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0$.

即$\sigma(l\alpha+\beta)=l\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，σ是线性变换.

31. 设V是一个欧式空间,$\mathcal{A}$是V上一个变换,则以下几条等价:

(1) $\mathcal{A}$是一个正交变换;

(2) $|\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)|=|\alpha+\beta|$;

(3) $\mathcal{A}$既保持非零向量的夹角不变，又保持向量的长度不变.

证明. $(1)\Rightarrow(2)$显然.

$(2)\Rightarrow(1)$. 首先, 由$|\mathcal{A}(0)+\mathcal{A}(0)|=0$得$\mathcal{A}(0)=0$.令$\beta=0$, 有$|\mathcal{A}(\alpha)|=|\alpha|$. 则

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)|^2&=\big(\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta),\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)\big)\\&=\big(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\alpha)\big)+2\big(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta)\big)+(\mathcal{A}(\beta),\mathcal{A}(\beta))\\&=(\alpha,\alpha)+2\big(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta)\big)+(\beta,\beta),\end{aligned}$$

$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$.

故$\big(\mathcal{A}(\alpha),\mathcal{A}(\beta)\big)=(\alpha,\beta)$, $\mathcal{A}$为正交变换.

$(1)\Rightarrow(3)$显然. $(3)\Rightarrow(1)$:

由$\cos<\alpha,\beta>=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$及$\mathcal{A}$保持向量夹角与长度不变知$\mathcal{A}$保持向量内积不变，$\mathcal{A}$为正交变换.

32. 令 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$. 的特征根的和与积分别为1与−12.

(1)求a与b;

(2)求正交矩阵Q并用正交变换:$X=QY$化f为标准形.

解. $f=X^T\begin{pmatrix}a & & b\\ & 2 & \\ b & & -2\end{pmatrix}X$，由 $tr(A)=1|A|=-12$ 得 $a=1,b=\pm 2$. 取 $b=2$，求得 A 的特征值为：$\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=2$.

对应的特征向量为：$(1,0,-2)^T,(0,1,0)^T,(2,0,1)^T$.这三个向量已正交，只需单位化，得

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^T$，$\eta_2=(0,1,0)^T$,$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^T$.

所求正交矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，$f=-3y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

33.已知

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

可经正交变换 $X=QY$ 化为 $f=y_2^2+4y_3^2$. 求 a,b 及正交阵 Q.

解. $f=X^T\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}X$. 特征值显然为：$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.继而,$a=3,b=1$.

对应于 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ 的特征向量经单位化后为

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$，$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$,$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

34.令 A 是三阶实对称矩阵，满足 $A^2+2A=0$，$r(A)=2$，且有两个特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,1)^T$

(1)求A;

(2)求k使得$A+kE$正定.

解. (1) 由A满足多项式$A^2+2A=0$知A的特征值为$0,-2$，又$r(A)=2$，-2为 2 重根. 因α_1,α_2不正交，它们应是属于-2的特征向量. 应用属于不同特征值的特征向量正交的结论可得，特征值0的特征向量$\alpha_3=(0,1,-1)^T$，将α_1,α_2正交单位化，α_3单位化得:$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$.

则正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $A=Q\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q^T$.

(2) 取$k>2$.

35.设σ为欧式空间V上的反对称变换，求证: (1)若W是σ的不变子空间，则$W^{\perp}$也是σ的不变子空间；(2) $\sigma\pm E$是可逆变换；(3)$\tau=(\sigma-E)(\sigma+E)^{-1}$是正交变换；(4)若$\dim V=n$. 则σ为反对称变换的充要条件是σ在$V$的一标准正交基下的矩阵为反对称矩阵.

证明.(1)令$\alpha\in W,\beta\in W^{\perp}$，因$W$是σ的不变子空间,$\sigma\alpha\in W$.

$(\alpha,\sigma\beta)=-(\sigma\alpha,\beta)=0$，故$\sigma\beta\in W^{\perp}$.

(2). 令A是σ在V的一标准正交基下的矩阵，$A^T=-A$. 因σ的特征值为0或纯虚数，±1不是A的特征值，$|\pm E-A|\neq 0$,$E-A,-E-A$均可逆，故$\sigma\pm E$是可逆变换.

$$(3)\left((A-E)(A+E)^{-1}\right)^T(A-E)(A+E)^{-1}$$
$$=((A+E)^{-1})^T(A-E)^T(A-E)(A+E)^{-1}$$

$$= -(E-A)^{-1}(E+A)(A-E)(A+E)^{-1}$$

$$= (E+A)(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)^{-1} = E$$

注意：$E+A$与$A-E$乘法交换.

(4)设$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$是欧氏空间的一个基,反对称变换$\sigma$在该基下矩阵为$A$,即

$\sigma(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)A,\ A=(a_{ij})$. 因

$\left(\sigma(\beta_i),\beta_j\right)=a_{ji}=-\left(\beta_i,\sigma(\beta_j)\right)=-a_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$,

故$A=-A^T$，A为反对称矩阵.

反之,令$\sigma\in \mathrm{L(V)}$，在标准正交基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的矩阵$A=(a_{ij})$为反对称矩阵. 由$a_{ij}=-a_{ji}$，可得:$\left(\beta_i,\sigma(\beta_j)\right)=-\left(\sigma(\beta_i),\beta_j\right)$,

$i,j=1,2,\dots,n$.

$\forall\alpha,\beta\in V$，令$\alpha=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n$

$$\beta=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$$

$(\sigma(\alpha),\beta)=(\sum_{i=1}^n x_i\sigma(\beta_i),\sum_{i=1}^n y_i\beta_i)$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j\left(\sigma(\beta_i),\beta_j\right)=-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j\left(\beta_i,\sigma(\beta_j)\right)$$

$=-(\sum_{i=1}^n x_i\beta_i,\sum_{i=1}^n y_i\sigma(\beta_i))=-(\alpha,\sigma(\beta))$.

故σ为反对称变换.

36. 设$A,B,C,D\in R^{n\times n}$,且两两交换,并满足:$AC+BD=E,V=\{X\in \mathrm{F^n}|ABX=0\},V_1=\{X\in \mathrm{F^n}|BX=0\},V_2=\{X\in \mathrm{F^n}|AX=0\}$.求证: $V=V_1\oplus V_2$.

证明.令$X\in V$，$X=ACX+BDX$. 显然，$BDX\in V_2$(注意：A,B,C,D两两交换)，$ACX\in V_1$. 故$V=V_1+V_2$.若$X\in V_1\cap V_2$,

由$X=ACX+BDX=CAX+DBX$知：$X=0$，$V_1\cap V_2=0$，因而$V=V_1\oplus V_2$.

37.设A,B都是n阶正定矩阵，求证

(1)$|\lambda A-B|$的根都是正数;

(2)$|\lambda A-B|$的根都是1的充要条件是$A=B$.

证明.(1)对正定矩阵A，存在可逆矩阵P，使得$P^TAP=E$，此时，P^TBP仍为对称矩阵，存在正交矩阵Q使得

$$Q^TP^TBPQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\ Q^TP^TAPQ=E.$$

令$PQ=T$，$|\lambda A-B|=|T^T(\lambda E-\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n))T|$

$=|T^2||\mathrm{diag}(\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\dots,\lambda-\lambda_n|$.

因B正定，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n>0$，$|\mathrm{diag}(\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\dots,\lambda-\lambda_n|$全是正根, (1) 得证.

(2)若$|\lambda A-B|$的根都是1，意味B的特征值全为1，则有

$T^TAT=E=T^TBT$，故$A=B$.

反之,若$A=B$，存在可逆矩阵P使得

$$P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n),$$

$$|\lambda A-A|=|P^2||\mathrm{diag}(\lambda\lambda_1-\lambda_1,\lambda\lambda_2-\lambda_2,\dots,\lambda\lambda_n-\lambda_n|$$

$$=|P^2|\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n(\lambda-1)^n,$$

故$|\lambda A-B|$的根都是1.

38.设$f_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+5)^4,m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+5)^2$,

写出A的 Jordan 标准形.

解. $(1)d_{n-1}(\lambda)=m_A(\lambda)=d_n(\lambda)$,

$$J=\begin{pmatrix}2&&&&&\\&2&&&&\\&&-5&&&\\&&1&-5&&\\&&&&-5&\\&&&&1&-5\end{pmatrix};$$

$(2)d_{n-2}(\lambda)=\lambda+5, d_{n-1}(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+5)$,

$$J=\begin{pmatrix}2&&&&&\\&2&&&&\\&&-5&&&\\&&&-5&&\\&&&&-5&\\&&&&1&-5\end{pmatrix}.$$

39. A,B 都是 C上3阶方阵，求证 A相似于B 的充要条件是 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$且$f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. 当$A,B$都是$C$上4阶方阵，情况如何？

证明.只证充分性. 首先，$f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$都是三次多项式，$A,B$ 有相同的特征值. 若$f_A(\lambda)=m_A(\lambda)$，$A,B$的 Jordan 标准形都由 $m_A(\lambda)$的不可约因式及其方幂确定，则A与B相似；现考虑 $m_A(\lambda)\neq f_A(\lambda)$的情况，(1)$m_A(\lambda)$为一次多项式，则$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=m_A(\lambda)$，$A$有三重根且为纯量矩阵，由 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$知$B$也是纯量矩阵，且$A=B$. (2) $m_A(\lambda)$为二次多项式，$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\frac{f_A(\lambda)}{m_A(\lambda)}$, 是一次多项式，此时$A,B$的 Jordan 标准形有一个1阶 Jordan 块与一个2阶 Jordan 块，因A,B 的特征值相同，它们有相同的 Jordan 标准形，故相似.

40. 求以0为特征值的n阶 Jordan 块$J(0,n)^2$的 Jordan 标准形J，并

求可逆矩阵P,使$P^{-1}J(0,n)^2P=J$.

41.设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$

$+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，求证:

(1) $f(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵为：$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$;

(2) 若α,β正交且均为单位向量，f在正交变换下的标准形为

$2y_1^2+y_2^2$.

证明. (1) $f=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$$+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}^T(x_1,x_2,x_3)^T$$

$$+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}^T(x_1,x_2,x_3)^T$$

$=2(x_1,x_2,x_3)[\alpha\alpha^T+\beta\beta^T](x_1,x_2,x_3)^T$.

因$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$为对称矩阵，故为$f$对应的矩阵.

(3) 因$(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha$，$(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$,

α,β是$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的分别以2,1为特征值的特征向量，又

$r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le 2$, f的另一特征值为0，故f在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

42.某生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，并将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他部门，其缺额由招收的非熟练工补齐，新、老非熟练工经培训至年终考核有$\frac{2}{5}$称为熟练工，设第n年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为x_n, y_n,记为向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$,

(1)求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2)当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

解. $x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n)$，$y_{n+1} = \frac{3}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n)$，故

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

易于求得A的特征值为 $1,\frac{1}{2}$，对应的特征向量为:$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4+\frac{1}{2^n} & 4-\frac{4}{2^n} \\ 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{4}{2^n} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8-\frac{3}{2^n} \\ 2+\frac{3}{2^n} \end{bmatrix}.$$