哈尔滨工业大学（深圳）2022/2023 学年春季学期

数学分析 B 期末考试题参考答案

一、 (5 分) 求柱体 $x^2+y^2\le 4$ 及球体 $x^2+y^2+z^2\le 16$ 相交的立体的体积.

解：设 D 是 xy 平面上的区域：$x^2+y^2\leqslant 4$.

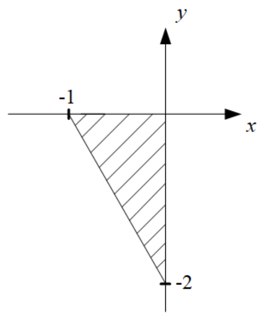
$$
\begin{aligned}
&2\iint\limits_{D}\sqrt{16-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&2\int_0^2 r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\sqrt{16-r^2}\\
=&\left(\frac{256}{3}-32\sqrt{3}\right)\pi.
\end{aligned}
$$

或者：

$$
\iiint\limits_{\Omega}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ =\ \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{16-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\ 1\,\mathrm{d}z.
$$

二、(5 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=-1$ 所围成的区域.

解：设 Ω 在 xy 坐标平面上的投影区域为 D_{xy}，如右图所示：



$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
=&\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{3\left(-1-x-\frac{1}{2}y\right)}^{0}\mathrm{d}z\ \cdot x\\
=&\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{2(-1-x)}^{0}\mathrm{d}y\int_{3\left(-1-x-\frac{1}{2}y\right)}^{0}\mathrm{d}z\ \cdot x\\
=&-\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

或是其他积分顺序.

三、(5 分) 空间曲线$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=x^2 \end{cases}$上点 A$(0,0,0)$与点 B$(1,1,-2)$之间的部分记为$\Gamma$. (1)曲线$\Gamma$上有质量分布，线密度函数为$\rho(x,y,z)=x^2(y+z)^{100}$，求$\Gamma$的质量. (2)一质点沿曲线$\Gamma$从 B 运动到 A，空间力场$\overrightarrow{F}$的直角坐标分量为

$$P(x,y,z)=1, Q(x,y,z)=xyz, R(x,y,z)=x(y+3),$$

求$\overrightarrow{F}$对该质点所做的功.

解：(1) 曲线Γ的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=x, \\ z=-x-x^2, \end{cases} \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

因此Γ的质量为：

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma} \rho(x,y,z)\mathrm{d}s \\
&=\int_{\Gamma} x^2(y+z)^{100}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma} x^2(-x)^{100}\mathrm{d}s \\
&=\int_0^1 x^{102}\sqrt{(x_x')^2+(y_x')^2+(z_x')^2}\,\mathrm{d}x \\
&=\int_0^1 x^{102}\sqrt{8x^2+4x+2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{M}.
\end{aligned}$$

(2) 注意：曲线Γ中x的方向是从 1 到 0.

$$\begin{aligned}
&\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}\bullet \mathrm{d}\vec{r}=\int_{\vec{\Gamma}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z \\
&=\int_1^0 (P\cdot x_x'+Q\cdot y_x'+R\cdot z_x')\mathrm{d}x \\
&=\frac{1583}{420}.
\end{aligned}$$

四、(5 分) 二元函数$x=h(y,z)=z\sin y$的定义域$D: y^2+z^2\leq 1$，曲面Σ是该二元函数的

图像. (1)将第一型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$化为平面区域$D$上的二重积分. (2)若$\Sigma$按指向$x$轴负方向定向, 成为有向曲面$\vec{\Sigma}$, 求出点$(x, y, z)\in\vec{\Sigma}$处的正的单位法矢量. (3)将第二型曲面积分

$$\iint\limits_{\vec{\Sigma}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为D上的二重积分.

解：(1)曲面Σ的方程为：

$$\begin{cases} x=h(y,z)=z\sin y, \\ y=y, \\ z=z, \end{cases} \qquad (y,z)\in D.$$

因此，第一型曲面积分可以化简为:

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S \\
&=\iint\limits_{D} f(z\sin y,y,z)\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(y,z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(y,z)}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&=\iint\limits_{D} f(z\sin y,y,z)\sqrt{1+(h_y')^2+(h_z')^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&=\iint\limits_{D} f(z\sin y,y,z)\sqrt{1+z^2\cos^2 y+\sin^2 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

(2)法矢量为：

$$\pm\vec{r}_y'\times\vec{r}_z'=\pm(1, -z\cos y, -\sin y),$$

故正的单位法矢量为：

$$\vec{n}=\frac{-(1, -z\cos y, -\sin y)}{\sqrt{1+z^2\cos^2 y+\sin^2 y}}=\frac{(-1, z\cos y,\sin y)}{\sqrt{1+z^2\cos^2 y+\sin^2 y}}.$$

或者：

$$F(x,y,z)=x-h(y,z)=0$$

此时法矢量可表示为：

$$\pm(F_x',F_y',F_z').$$

(3)记$\vec{u}=(P,Q,R)$,则有

$$\iint\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{u}\circ \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{u}\circ\vec{n})\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} (\vec{u}\circ\vec{n})\sqrt{1+z^2\cos^2 y+\sin^2 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D} [P(z\sin y,y,z)\cdot(-1)+Q(z\sin y,y,z)\cdot z\cos y+R(z\sin y,y,z)\cdot \sin y]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

或者：由于$\vec{n}$与$\vec{r}_y'\times\vec{r}_z'$反向，则有

$$\iint\limits_{\vec{\Sigma}} \vec{u}\circ \mathrm{d}\vec{S} = -\iint\limits_{D} \vec{u}\circ(\vec{r}_y'\times\vec{r}_z')\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=-\iint\limits_{D}\begin{vmatrix} P & Q & R\\ x_y' & y_y' & z_y' \\ x_z' & y_z' & z_z'\end{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D}\begin{vmatrix} P & Q & R\\ h_y' & 1 & 0 \\ h_z' & 0 & 1\end{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint\limits_{D}\begin{vmatrix} P & Q & R\\ z\cos y & 1 & 0 \\ \sin y & 0 & 1\end{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D} [P(z\sin y,y,z)\cdot(-1)+Q(z\sin y,y,z)\cdot z\cos y+R(z\sin y,y,z)\cdot \sin y]\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

五、(5 分) 设$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$是区域$D$上的三个有连续偏导数的函数，且存在 D 上的可微函数 $u(x,y,z)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$，证明：(1)在 D 上成立 $\frac{\partial}{\partial y}P=\frac{\partial}{\partial x}Q, \frac{\partial}{\partial z}Q=\frac{\partial}{\partial y}R, \frac{\partial}{\partial x}R=\frac{\partial}{\partial z}P$. (2) $\vec{\Gamma}$ 是 D 中从点(x_0,y_0,z_0)到点(x,y,z)的任一光滑定向曲线，证明$\int\limits_{\vec{\Gamma}} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)$.

解：由$\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$，有$u_x'=P,\ u_y'=Q,\ u_z'=R.$

(1)根据上述分析，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial y}P=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}Q=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

由于函数$P(x,y,z)$和$Q(x,y,z)$有连续的偏导数，可以得到$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$连续。因此得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},$$

即有$\frac{\partial}{\partial y}P=\frac{\partial}{\partial x}Q$.其余情况类推即可.

(2)设$\vec{\Gamma}$的参数方程为:

$$\begin{cases} x(t), \\ y(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ z(t), \end{cases}$$

即有$\begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.如此，可以得到：

$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

$= \int_{t_0}^{t_1} [P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)]\mathrm{d}t$

$= \int_{t_0}^{t_1} [u'_x \cdot x'(t) + u'_y \cdot y'(t) + u'_z \cdot z'(t)]\mathrm{d}t$

$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(x(t),y(t),z(t))]\mathrm{d}t$（复合函数求导法则）

$= u(x(t_1),y(t_1),z(t_1)) - u(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$（一元函数的牛顿－莱布尼茨公式）

$= u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0)$.

六 （5分）（1）写出“二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数”的定义.（2）求曲线 $L:\begin{cases} z = x^2 + 2xy + y^3 \\ x = 2 \end{cases}$ 在点 $(2,-1,-1)$ 处的切线的方程.

解：(1)$f'_y(x_0,y_0) = [f(x_0,y)]'_y\big|_{y_0} = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+\triangle y) - f(x_0,y_0)}{\triangle y}$.

(2)一个切矢量$(0,1,z'_y)\big|_{(2,-1,-1)} = (0,1,2x+3y^2)\big|_{(2,-1,-1)} = (0,1,7)$

故切线方程为

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{7}.$$

或

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^3 - z = 0, \\ G(x,y,z) = x - 2 = 0, \end{cases}$$

再按$(F'_x, F'_y, F'_z) \times (G'_x, G'_y, G'_z)$计算切矢量.

或

$$\begin{cases} F'_x\cdot(x-2)+F'_y\cdot(y+1)+F'_z\cdot(z+1)=0, \\ x=2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2(x-2)+7(y+1)+(-1)(z+1)=0, \\ x=2. \end{cases}$$

七、(5 分) 求函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ 在平面 $2x+3y+4z=1$ 上的最小值点.

解：（方法一：拉格朗日乘数法）令 $G(x,y,z)=2x+3y+4z-12$，做拉格朗日函数

$$L=f(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=4y+3\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=6z+4\lambda=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=2x+3y+4z-12=0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=\dfrac{144}{83}, \\ y=\dfrac{108}{83}, \\ z=\dfrac{96}{83}, \\ \lambda=-\dfrac{144}{83}. \end{cases}$$

本题的最小值点存在；最小值点是条件极值点。 由于条件极值点必满足上面方程，而上面方程有唯一解，故知：最小值点为$\left(\dfrac{144}{83},\dfrac{108}{83},\dfrac{96}{83}\right)$.

（方法二：解出约束，化为无条件极值问题）由$2x+3y+4z=12$ 解出

$$z=\frac{1}{4}(12-2x-3y).$$

代入得

$$H(x,y)=f\left(x,y,\frac{1}{4}(12-2x-3y)\right)=x^2+2y^2+3\times\frac{1}{16}(12-2x-3y)^2.$$

$$\begin{cases} H'_x=2x+\dfrac{3}{16}\times2\times(-2)(12-2x-3y)=0, \\ H'_y=2y+\dfrac{3}{16}\times2\times(-3)(12-2x-3y)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{144}{83}, \\ y_0=\dfrac{108}{83}. \end{cases}$$

$$H''_{xx}=2+\frac{3}{16}\times 2\times(-2)(-2)=\frac{7}{2},$$

$$H''_{xy}=\frac{3}{16}\times 2\times(-2)(-3)=\frac{9}{4},$$

$$H''_{xy}=4+\frac{3}{16}\times 2\times(-3)(-3)=\frac{59}{8}.$$

由于 Hessi 矩阵

$$H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{9}{4}\\ \frac{9}{4} & \frac{59}{8}\end{pmatrix}$$

正定，

$$z_0=\frac{96}{83}.$$

故最小值点为

$$\left(\frac{144}{83},\frac{108}{83},\frac{96}{83}\right).$$

（方法三：利用 Cauchy-Schwarz 不等式）

$$12=2x+3y+4z=2\cdot x+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{2}\,y\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}\,z\right)$$

$$=\left(2,\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(x,\sqrt{2}\,y,\sqrt{3}\,z\right)\leqslant\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2}\,y\right)^2+\left(\sqrt{3}\,z\right)^2}.$$

$$\therefore f(x,y,z)\geqslant\left(\frac{12}{\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}}\right)^2.$$

“=”成立，当且仅当

$$\left(x,\sqrt{2}\,y,\sqrt{3}\,z\right)=\lambda\left(2,\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right),$$

即

$$\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=\frac{3}{4}\lambda,\\ z=\frac{4}{3}\lambda.\end{cases}$$

八、(5 分) 设 $z=f(u,v), u=x^2+y^2, v=xy$. 求: (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; (2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot u'_x+f'_v\cdot v'_x=f'_u\cdot 2x+f'_v\cdot y$.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[f'_u\cdot 2x+f'_v\cdot y\right]$

$$\begin{aligned}
&=\left(\frac{\partial}{\partial y}f'_u\right)\cdot 2x+f'_u\cdot\frac{\partial}{\partial y}(2x)+\left(\frac{\partial}{\partial y}f'_v\right)\cdot y+f'_v\cdot\frac{\partial y}{\partial y}\\
&=\left[f''_{uu}\cdot u'_y+f''_{uv}\cdot v'_y\right]\cdot 2x+0+\left[f''_{vu}\cdot u'_y+f''_{vv}\cdot v'_y\right]\cdot y+f'_v\cdot 1\\
&=\left[f''_{uu}\cdot 2y+f''_{uv}\cdot x\right]\cdot 2x+\left[f''_{vu}\cdot 2y+f''_{vv}\cdot x\right]\cdot y+f'_v\\
&=4xyf''_{uu}+2x^2f''_{uv}+2y^2f''_{vu}+xyf''_{vv}+f'_v.
\end{aligned}$$

九、 (5 分) (1) 求二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的 Taylor 展开中，$\left(x-x_0\right)^5\left(y-y_0\right)^8$ 的系数. (2)求二元函数 $\sin(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处的 Hessi 矩阵.

解：(1)Taylor 展开式中所有 13 次单项式（13 次齐次多项式）为

$$\frac{1}{13!}\left[\left(x-x_0\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(y-y_0\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{13}f\left(x_0,y_0\right).$$

由二项式定理，其中$\left(x-x_0\right)^5\left(y-y_0\right)^8$为

$$\frac{1}{13!}\mathrm{C}_{13}^5\frac{\partial^{13}f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^5\partial y^8}\left(x-x_0\right)^5\left(y-y_0\right)^8.$$

故系数为

$$\frac{1}{13!}\mathrm{C}_{13}^5\frac{\partial^{13}f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^5\partial y^8}=\frac{1}{5!\,8!}\frac{\partial^{13}f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^5\partial y^8}.$$

(2)函数$z=\sin\left(x+y\right)$在此点处的 Hessi 矩阵为：

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin 3 & -\sin 3\\ -\sin 3 & -\sin 3\end{pmatrix}.$$

十、 (5 分) (1)写出“二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微”的定义. (2) 利用定义证明 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ 在点 $(2,1)$ 处可微.

解：(1)若存在 A 和 B，使得

$$\triangle z=f\left(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y\right)-f\left(x_0,y_0\right)=\begin{bmatrix} A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix}+R\left(\triangle x,\triangle y\right)$$

满足

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{R\left(\triangle x,\triangle y\right)}{\left\|\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix}\right\|}=\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{R\left(\triangle x,\triangle y\right)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}=0$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(2)证明可微性：

$$\begin{aligned}\triangle z&=f\left(2+\triangle x,1+\triangle y\right)-f\left(2,1\right)\\ &=\frac{2+\triangle x}{1+\triangle y}-\frac{2}{1}=\frac{\triangle x-2\triangle y}{1+\triangle y}=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle x\\ \triangle y\end{bmatrix}+R\left(\triangle x,\triangle y\right)\end{aligned}$$

其中

$$R\left(\triangle x,\triangle y\right)=\frac{\triangle x-2\triangle y}{1+\triangle y}-\left(\triangle x-2\triangle y\right)=\frac{-\triangle y\left(\triangle x-2\triangle y\right)}{1+\triangle y}.$$

若限制

$$\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}<\frac{1}{2},$$

则有

$$\begin{cases}\left|\triangle x\right|\leqslant\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2},\\ \left|\triangle y\right|\leqslant\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2},\\ \left|\triangle y\right|<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

此时有，

$$\left|R(\Delta x,\Delta y)\right|\le\frac{|\Delta y|\cdot|\Delta x|+2|\Delta y|^2}{1-|\Delta y|}\le\frac{3\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}=6\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2$$

故

$$\left|\frac{R(\triangle x, \triangle y)}{\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}}\right| \leqslant 6\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2},$$

从而

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{R(\triangle x, \triangle y)}{\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}} = 0.$$