应用随机过程

竞争型指数分布过程

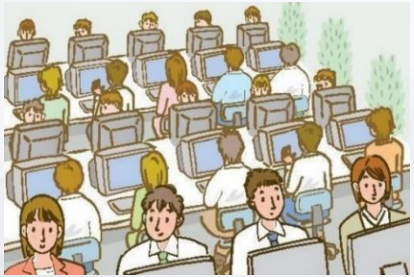
授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

问题引出

背景：假设网吧中每个人的上网时间都服从某种指数分布。那么，网吧中任何一个人完成上网离开网吧，此时网吧中的状态就发生改变。现实世界中很多服务系统与此类似。

任务：此时状态发生改变这一事件服从什么样的概率分布?



竞争型指数分布定义

竞争型指数分布

1. X_1定义为事件1的发生时刻，$X_1 \sim \exp(\mu_1)$
2. X_2定义为事件2的发生时刻， $X_2 \sim \exp(\mu_2)$

相互独立

3. X定义为任意事件先发生的时刻

$X = \min\{X_1, X_2\}$

两个事件的发生呈现一种竞争的关系

X服从什么样的概率分布?

竞争型指数分布的推导

两变量竞争

$X = \min(X_1, X_2)$的概率分布为

$$P\{X > x\} = P\{\min(X_1, X_2) > x\}$$

X_1, X_2相互独立

$$= P\{X_1 > x, X_2 > x\}$$

X_1, X_2服从指数分布

$$= e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x}$$

$$= e^{-(\mu_1 + \mu_2)x}$$

$$F(x) = 1 - P\{X > x\} = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)x}$$

X服从参数为$\mu_1 + \mu_2$的指数分布，$X \sim \exp(\mu_1 + \mu_2)$

指定某事件先发生的概率分布

- 对于两个竞争型随机变量，第一个事件先发生的概率分布如何计算

定义 $I=\begin{cases}1 & X_1<X_2\\ 0 & X_1\geq X_2\end{cases} \longrightarrow \{I=1,X>x\}\Leftrightarrow\{x<X_1<X_2\}$

$$P\{I=1,X>x\}=P\{x<X_1<X_2\}$$

$$=\iint\limits_{x<X_1<X_2}\mu_1 e^{-\mu_1 x_1}\mu_2 e^{-\mu_2 x_2}d\,x_1 dx_2$$

$$=\int_x^\infty \mu_1\,e^{-\mu_1 x_1}\int_{x_1}^\infty \mu_2 e^{-\mu_2 x_2}\,dx_2 dx_1$$

$$=\int_x^\infty \mu_1\,e^{-\mu_1 x_1}e^{-\mu_2 x_1}dx_1=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

指定某事件先发生的边缘概率

- 边缘分布$P(I=1)$如何计算

$$P\{I=1, X>x\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

令x等于0

$$P\{I=1\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

第二个事件首先发生的边缘分布又是什么呢

三变量竞争的解题思路

- 推广到三个变量的竞争型指数分布

X_1　　X_2　　X_3

$\min(X_1, X_2)$　　X_3

$\min(\min(X_1, X_2), X_3)$

三个变量竞争型指数分布的概率分布

三变量竞争的概率分布

三变量竞争

$X=\min(X_1,X_2,X_3)$的概率分布

$P\{X>x\}=P\{\min(X_1,X_2,X_3)>x\}$

由解题思路转化

$=P\{\min(\min(X_1,X_2),X_3)>x\}$

$\min(X_1,X_2)$, X_3 相互独立

$=P\{\min(X_1,X_2)>x,X_3>x\}$

$\min(X_1,X_2)$, X_3均服从指数分布且相互独立

$=e^{-(\mu_1+\mu_2)x}e^{-\mu_3 x}=e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$

$F(x)=1-P\{X>x\}=1-e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3))x}$

X服从参数为$\mu_1+\mu_2+\mu_3$的指数分布， $X\sim\exp(\mu_1+\mu_2+\mu_3)$

三变量竞争的概率分布

- 推广到三个变量情况，某一个事件首先发生的概率分布如何计算

假设第一个事件首先发生，定义

$$Z=\min(X_2,X_3)\ \xrightarrow[\mu_Z=\mu_2+\mu_3]{Z\sim\exp(\mu_2+\mu_3)}\ I=\begin{cases}1 & X_1<Z\\ 0 & X_1\geq Z\end{cases}$$

$$\{I=1,X>x\}\Leftrightarrow\{x<X_1<Z\}$$

$$P\{I=1,X>x\}=P\{x<X_1<Z\}$$

由两变量情况得到

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_Z}e^{-(\mu_1+\mu_Z)x}$$

$\mu_Z=\mu_2+\mu_3$

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$$

三变量竞争的边缘概率分布

- 三变量边缘分布$P(I=1)$如何计算

$$P\{I=1, X>x\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)x}$$

$$\Big\downarrow \text{令}x\text{等于}0$$

$$P\{I=1\}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

第二个事件首先发生的边缘分布又是什么呢？第三个呢？

多变量的竞争型指数分布

推广到一般的情况

对于每一个随机变量，$X_i \sim \exp(\mu_i)$，且相互独立

$X = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$

X服从参数为$\mu_1 + \cdots + \mu_n$的指数分布

任意事件先发生的概率分布

$$I_i = \begin{cases} 1, \min\{X_1, \cdots, X_n\} = i \\ 0\ \text{,其他情况} \end{cases}$$

$$P\{I_i = 1\} = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \cdots + \mu_n}$$

指定事件先发生的边缘概率分布

竞争型指数分布的应用

竞争型指数分布在现实中的应用案例

1

高速公路收费服务

2

排队购票服务

3

理发店理发服务

谢谢听课

授课教师

赵毅