第四次作业答案

1 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-1}^{1} e^x \sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x(\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} x(\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} (x+\pi)(\sin(x+\pi))^{2n+1}\mathrm{d}x \\ &= -\pi\int_0^{\pi} (\sin x)^{2n+1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

符号为负.

(2) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x}\sin x\mathrm{d}x - \int_0^1 e^x \sin x\mathrm{d}x$，符号为负.

(3) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+\pi}\mathrm{d}x$，符号为正.

2 证明下列极限成立：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x = 0$;

(2) 设$f(x)$是区间$[-1,1]$上的连续函数，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x} = f(0).$$

证明：(1) 等价于证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2n+1}\mathrm{d}x = 0$. 证明可参见课程讲义.

(2) 任取实数$0<\delta<1$，我们有

$$\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x > \delta\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)^n, \quad \int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x < (1-\delta^2)^n.$$

因此我们有

$$0 < \frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x} < \frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\delta^2)^n}{\delta(1-\frac{\delta^2}{4})^n} = 0.$$

由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x} = 1.$$

由$f(x)$的有界性可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^{1}f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta}f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}.$$

由积分第一中值定理我们有

$$\min_{x\in[-\delta,\delta]}f(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-\delta}^{\delta}f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-\delta}^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leqslant\max_{x\in[-\delta,\delta]}f(x).$$

由函数$f(x)$的连续性即可证明.

3 试找出区间$[-1,1]$上满足以下条件的所有连续函数$f(t)$：任一取定$x\in(0,1)$，下列等式成立

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

解：等式两边对变量x进行求导得$f(x)=-f(x)$. 因此$f(x)\equiv 0$.

4 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续可导，证明：
(1) 任一取定$x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|+\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

(2) 当$f(a)\neq f(b)$时，(1)中不等式严格成立.
证明：由绝对值的性质可知

$$\left||f(x)|-\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\right|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\right|,$$

以及

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b(f(x)-f(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t.$$

由牛顿-莱布尼茨公式可知

$$|f(x)-f(t)|=\left|\int_t^x f'(u)\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_a^b|f'(u)|\mathrm{d}u,$$

等式成立当且仅当f的导数在区间上恒等于零. 证明完毕.

5 设实数轴上连续函数$f(x)$在零点处可导，且对于任一实数x满足

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x).$$

证明：$f(x)\equiv cx$，其中c是一个实常数.
证明：由连续函数变上限积分可导以及函数$\frac{1}{x}$在非零点可导推出函数$f(x)$在非零点可导. 由题中条件可知$f(x)$是可导的. 对等式

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x)$$

两边同时求导我们可知$f(x)=xf'(x)$. 因此函数$\dfrac{f(x)}{x}$在非零点处的导数为零，函数$\dfrac{f(x)}{x}$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上均为常数. 又$f'(0)$存在，故两常数相等. 证明完毕.

6 设$P_n(x)$为$n\geqslant 1$次多项式. 证明

$$\int_a^b |P_n'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2n \max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|P_n(x)|\}.$$

证明：设$P_n(x)$是一个n阶多项式，$P_n'(x)$在区间$[a,b]$上的k个不同根从小到大依次为$a_1,a_2,\cdots,a_k$，其中$k\leqslant n-1$. 因此有

$$\begin{aligned}\int_a^b |P_n'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^{a_1} |P_n'(x)|\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} |P_n'(x)|\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_k}^{b} |P_n'(x)|\mathrm{d}x \\ &= |P_n(a_1)-P_n(a)| + |P_n(a_2)-P_n(a_1)| + \cdots + |P_n(b)-P_n(a_k)| \\ &\leqslant 2(k+1)\max_{x\in[a,b]}|P_n(x)| \leqslant 2n \max_{x\in[a,b]}|P_n(x)|.\end{aligned}$$

7 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续可导且$f(a)=f(b)=0$. 证明：

(1) $\displaystyle\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$;

(2) 若$\displaystyle\int_a^b f^2(x)=1$,则

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [xf(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4}.$$

证明：(1) 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b x\mathrm{d}\left(\frac{f^2(x)}{2}\right) \\ &= \left.\frac{xf^2(x)}{2}\right|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由Cauchy-Schwartz不等式有

$$\left|\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |xf(x)f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [xf(x)]^2\mathrm{d}x.$$

8 计算下列定积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

(2) $\displaystyle\int_0^2 \left|1-x^2\right|\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x (a>0)$;

(4) $\int_0^1 \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x$;

(12) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(1-x)\mathrm{d}x$;

(13) $\int_1^{1+n} \ln[x]\mathrm{d}x$;

(14) $\int_0^1 \tan^{2n} x\mathrm{d}x$;

(15) $\int_0^\pi x^2\operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x$;

(16) $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\int_0^2 |1-x^2|\mathrm{d}x = (x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 + (\frac{x^3}{3}-x)\Big|_1^2 = \frac{2}{3}+\frac{4}{3} = 2$.

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x &= a\int_0^1 \arctan t\mathrm{d}\left(\frac{-2}{1+t^2}\right)\\ &= -\frac{\pi a}{4} + 2a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{ax}{x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

(4) $\int_0^1 \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}$.

(5) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x &= a\int_1^0 t\mathrm{d}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\\ &= 4a\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\\ &= 4a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - 4a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}\\ &= 2a\left(\arctan t - \frac{x}{x^2+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi a}{2} - a.\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x = \int_1^0 (1-t^2)t\mathrm{d}(1-t^2) = 2\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{4}{15}.$

(7) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\mathrm{d}t = \frac{\pi a^4}{16}.$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x = \arcsin^2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{5\pi^2}{144}.$

(9) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x &= x\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\\ &= \ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

(10) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 x^5e^x\mathrm{d}x = 2e - 10\int_0^1 x^4e^x\mathrm{d}x\\ &= 2e - 10e + 40\int_0^1 x^3e^x\mathrm{d}x\\ &= 2e - 10e + 40e - 120\int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x\\ &= 2e - 10e + 40e - 120e + 240\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x\\ &= 2e - 10e + 40e - 120e + 240e - 240\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\\ &= 240 - 88e.\end{aligned}$$

(11) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x &= \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\mathrm{d}x\\ &= \cdots = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.\end{aligned}$$

(12) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x - \int_1^2 \mathrm{d}x = 0.$
(13) $\int_1^{1+n} \ln[x]\mathrm{d}x = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln n!.$
(14) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{2n} x\mathrm{d}x &= \int_0^1 \tan^{2n-2} x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(\tan 1)^{2n-1}}{2n-1} - \frac{(\tan 1)^{2n-3}}{2n-3} + \frac{(\tan 1)^{2n-5}}{2n-5} + \cdots + (-1)^{n-1}\tan 1 + (-1)^n.\end{aligned}$$

(15) $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x^2\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{4}.$
(16) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x &= -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= \cdots = (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m\mathrm{d}x \\ &= (-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

9 求下列定积分：
(1) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

(2) $\int_0^{8\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$
解：(1) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 2x\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.$
(2) $\int_0^{8\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 8\int_0^\pi |\sin x|\mathrm{d}x = 16.$

10 证明如下命题：
(1) 设$f(x)$是区间$[0,\pi]$上的连续函数且满足

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0.$$

则$f(x)$在区间$[0,\pi]$上至少有两个零点.
(2)设$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数且满足

$$\int_a^b x^n f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

则$f(x)$在区间$[a,b]$上至少有$N+1$个零点.
证明：(1) 如果$f(x)$在区间$[0,\pi]$上没有零点，不妨设$f(x) > 0$. 则有

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x > 0,$$

与题目条件矛盾. 如果$f(x)$在区间$[0,\pi]$上只有一个零点a，不妨设

$$f(x)<0, x<a, \quad f(x)>0, x>a.$$

(如果在点a两侧不变号则与没有零点的情况类似)，则

$$0<\int_0^\pi f(x)\sin(x-a)\mathrm{d}x=\cos a\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\sin a\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0,$$

导出矛盾. 故假设不成立，因此命题得证.
(2) 假设$f(x)$在区间$[a,b]$上只有k个零点$a_1,a_2,\cdots,a_k$，其中$k<N+1$. 不妨设$f(x)$在零点两侧变号，则函数$f(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$是一个在区间$[a,b]$ 上不变号的函数. 因此

$$0\neq\int_a^b f(x)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)x^k\mathrm{d}x+\cdots+c_1\int_a^b f(x)x\mathrm{d}x+c_0\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

导出矛盾. 故假设不成立，命题得证.

11 计算Fejer积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

解：若$n=2k+1$，则

$$\sin(2k+1)x=[\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x]+[\sin(2k-1)x-\sin(2k-3)x]+\cdots+[\sin 3x-\sin x]+\sin x.$$

因此

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}=2\cos 2kx+2\cos 2(k-1)x+\cdots+2\cos 2x+1.$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2kx)^2\mathrm{d}x+\cdots+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x)^2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}.$$

类似地对于偶数n也可得$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{2}$.

12 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

解：类似上题，当n为奇数时积分等于$\frac{\pi}{2}$. 当$n=2k$为偶数时，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int[\cos(2k-1)x+\cdots+\cos 3x+\cos x]\mathrm{d}x=2\sum_{i=1}^k\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}.$$

13 设$f(x)$是区间$[0,\pi]$上的连续二阶可微函数且满足

$$f(\pi)=2, \quad \int_0^\pi(f(x)+f''(x))\sin x\mathrm{d}x=5,$$

求$f(0)$.
解:计算得

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f''(x)\sin x\mathrm{d}x &= \int \sin x\mathrm{d}(f'(x))\\ &= -\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}(f(x))\\ &= f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此$f(0)=3$.

14 设$f(x)$是区间$[0,1]$上的连续函数且$0\leqslant f(x)<1$，证明

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证明：由于$\sqrt{x}$是正实轴上的凹函数，由定积分的黎曼和极限形式可知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2.$$

由Cauchy-Schwartz不等式可知

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{f(x)}{1-f(x)}}\sqrt{1-f(x)}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1-f(x)}\right)\left(\int_0^1 (1-f(x))\mathrm{d}x\right).$$

命题得证.

15 证明：对于任一正实数x，存在唯一一个正实数ξ_x满足

$$\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t = xe^{\xi_x^2}.$$

并求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\xi_x}{x}$.
证明：由积分第一中值定理和函数e^x的单调性不难证明ξ_x的存在唯一性. 由洛必达法则我们有

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{(2x^2+1)e^{x^2}} = 0,\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t},\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}+2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{2xe^{x^2}} = 1.\end{gathered}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\xi_x^2}{x^2} = 1,$$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\xi_x}{x}=1$.

16 利用定积分第一中值定理证明以下不等式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\alpha)} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(1+\alpha)}(\alpha > 0)$;

(2) $\dfrac{\pi^2}{64} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2\tan^2 x} < \frac{\pi^2}{32}$.

证明：(1) 由于x^α在区间$[0,1]$上非负，由积分第一中值定理可知存在$\xi \in [0,1]$满足

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}(1+\alpha)}.$$

又$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \leqslant 1$，因此不等式得证.

(2) 由积分第一中值定理可知，存在$\xi \in (0, \dfrac{\pi}{4})$满足

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2\tan^2 x} = \frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi}\cdot\frac{\pi^2}{32}.$$

又$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1+\xi^2\tan^2\xi} < 1$，因此命题得证.

17 利用定积分第二中值定理证明：

(1) $\left|\displaystyle\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a} \quad (0 < a < b)$;

(2) $\left|\displaystyle\int_a^b \sin x^2 \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a} \quad (0 < a < b)$.

证明：(1) $\left|\displaystyle\int_a^b \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}$.

(2) $\left|\displaystyle\int_a^b \sin x^2 \mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2a}\left|\int_{a^2}^{\xi^2}\sin x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{a}$.

18 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导并且满足

$$f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明：存在$\xi \in (0,1)$满足$f(\xi) = f'(\xi)$.

证明：由积分第一中值定理可知

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}f(x)\mathrm{d}x = e^{-\eta}f(\eta), \quad \eta \in (0, \frac{1}{2}).$$

因此有$e^{-1}f(1) = e^{-\eta}f(\eta)$. 对函数$e^{-x}f(x)$使用Rolle中值定理即完成证明.

19 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调，$g(x)$是实数轴上以T为周期的连续函数且

$$\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明：我们不妨设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增. 由

$$\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$$

的性质可知函数$g(x)$在有限闭区间上的积分值有界，取正实数M满足所有积分取值都在区间$[-M,M]$上. 因此

$$\left|\int_a^b g(\lambda x)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\mathrm{d}x}{\lambda}\right| \leqslant \frac{M}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(\lambda x)\mathrm{d}x = 0.$$

因此我们不妨设$f(a)\geqslant 0$. 此时由积分第二中值定理我们有

$$\left|\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right| = \left|f(b)\int_\xi^b g(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{|f(b)M|}{\lambda}.$$

由此命题得证.

20 求由下列曲线所围成平面图形的面积：
(1) $x=y^2, y=x^2$;
(2) $y=\sin x, y=\cos x, x=0, x=2\pi$;
(3) $y^2=x^2(1-x^2)$;
(4) $y^2=x, x^2+y^2=1$(在第一、四象限的部分).
解：(1) $S=\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.
(2) $S=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x = 4\sqrt{2}$.
(3) $S=2\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{x^2(1-x^2)}\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{4}{3}$.
(4) $S=2\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right)$.

21 求由下列曲线所围成平面图形的面积：
(1) 旋轮线(拱线) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$与$x$ 轴；
(2) 圆的渐伸线$x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$与直线$x=a$;
(3) 椭圆的渐屈线$x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t, y=\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t(c^2=a^2-b^2>0)$.
解：(1) 我们有

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)\mathrm{d}(a(t-\sin t))-a(t-\sin t)\mathrm{d}(a(1-\cos t))] \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}[(1-\cos t)^2-t\sin t+\sin^2 t]\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}\left(4\pi-\int_0^{2\pi}t\sin t\mathrm{d}t\right) = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a(\cos t+t\sin t)\mathrm{d}(a(\sin t-t\cos t))-a(\sin t-t\cos t)\mathrm{d}(a(\cos t+t\sin t))+\frac{1}{2}\int_{-2\pi a}^{0}a\mathrm{d}y\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}[(\cos t+t\sin t)t\sin t+(t\cos t-\sin t)t\cos t]\mathrm{d}t+\pi a^2\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t+\pi a^2=\frac{4\pi^3a^2}{3}+\pi a^2.\end{aligned}$$

(3) $S=\dfrac{c^4}{2ab}\displaystyle\int_0^{2\pi}(3\sin^2 t\cos^4 t+3\cos^2 t\sin^4 t)\mathrm{d}t=\dfrac{3\pi c^4}{8ab}$.

22 求下列曲线所围平面图形的面积(其中参数$a>0$):
(1) 双扭线$\rho^2=a\cos 2\theta$;
(2) 三叶线$\rho=a\sin 3\theta$;
(3) 笛卡尔叶形线$\rho=\dfrac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$.

解：(1) $S=\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}a\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a$.
(2) $S=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\sin^2 3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{3}{2}\dfrac{\pi a^2}{6}=\dfrac{\pi a^2}{4}$.
(3) 我们有

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{\tan^6\theta+2\tan^3\theta+1}\mathrm{d}(\tan\theta)\\&=\frac{3a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}=\frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

23 求心形线的一段$\rho=a(1+\cos\theta)\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$与$\theta=\dfrac{\pi}{2}$和极轴所围图形绕极轴旋转一周所得立体的体积.

解：我们有

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{2a} y^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2(1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta \mathrm{d}(a(1+\cos\theta)\cos\theta) \\
&= \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\sin^3\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \pi a^3 \int_0^1 (1+x)^2(1+2x)(1-x^2)\mathrm{d}x \\
&= \pi a^3 \int_0^1 (x^2+2x+1)(1+2x-x^2-2x^3)\mathrm{d}x \\
&= \pi a^3 \int_0^1 (1+4x+4x^2-2x^3-5x^4-2x^5)\mathrm{d}x \\
&= \pi a^3 \left(1+2+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi a^3}{2}.
\end{aligned}
$$

24 求下列曲线的弧长：
(1) 星形线$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;
(2) 阿基米德螺线$r = a\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$;
(3) 抛物线$y = ax^2(-1 \leqslant x \leqslant 1)$;
(4) 圆的渐伸线$x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$.
解：(1) 我们有

$$
\begin{aligned}
L &= 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t|\mathrm{d}t = 6a.
\end{aligned}
$$

(2) 我们有

$$
\begin{aligned}
L &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\right]\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right).
\end{aligned}
$$

(3) 我们有

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(2ax)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-2a}^{2a} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4a}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right]\Big|_{-2a}^{2a} \\
&= \sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2a}\ln\left(2a + \sqrt{4a^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

(4) $L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\mathrm{d}t = 2\pi^2 a.$

25 证明曲线$\rho = a\sin^n \dfrac{\theta}{n}(0 \leqslant \theta \leqslant n\pi)$的弧长为

$$L = \begin{cases} \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & n = 2k; \\ \\ \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & n = 2k+1. \end{cases}$$

证明：我们有

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{n\pi} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\ &= a\int_0^{n\pi} \sqrt{\sin^{2n}\frac{\theta}{n} + \sin^{2n-2}\frac{\theta}{n}\cos^2\frac{\theta}{n}}\mathrm{d}\theta \\ &= 2na\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

由Wallis公式我们即得结论.

26 求下列曲线绕x轴旋转一周所得曲面的侧面积：
(1) $y^2 = 2px(0 \leqslant x \leqslant 1)$;
(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
(4) $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$;
(5) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;
(6) $y = a\cosh\dfrac{x}{a}, |x| \leqslant b$.
解：(1) 我么有

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 2\pi\sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^1 \sqrt{2px + p^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\pi}{3p}\left.(2px + p^2)\sqrt{2px + p^2}\right|_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{3p}[(p^2 + 2p)\sqrt{p^2 + 2p} - p^3]. \end{aligned}$$

(2) 当$a>b$时，我们有

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\sqrt{[\mathrm{d}(a\cos t)]^2+[\mathrm{d}(b\sin t)]^2} \\
&= 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 4\pi b\int_0^1 \sqrt{a^2-(a^2-b^2)x^2}\mathrm{d}x \\
&= 4\pi b\sqrt{a^2-b^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi b\sqrt{a^2-b^2}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}+2\pi b\sqrt{a^2-b^2}\frac{a^2}{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \\
&= 2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.
\end{aligned}$$

当$a<b$时，我们有

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\sqrt{[\mathrm{d}(a\cos t)]^2+[\mathrm{d}(b\sin t)]^2} \\
&= 4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 4\pi b\int_0^1 \sqrt{a^2+(b^2-a^2)x^2}\mathrm{d}x \\
&= 4\pi b\sqrt{b^2-a^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}+x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi b\sqrt{b^2-a^2}\frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}+2\pi b\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right) \\
&= 2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).
\end{aligned}$$

(3) 我们有

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{[\mathrm{d}(a\cos^3 t)]^2+[\mathrm{d}(a\sin^3 t)]^2} \\
&= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{12\pi a^2}{5}.
\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \ \pi[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})]\Big|_{-1}^1 \\
&= 2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)).
\end{aligned}$$

(5) 我们有

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{[\mathrm{d}(at-a\sin t)]^2+[\mathrm{d}(a-a\cos t)]^2} \\
&= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi a^2\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}(1-\cos t)\mathrm{d}t \\
&= 8\pi a^2\int_0^\pi \sin t(1-\cos 2t)\mathrm{d}t = 16\pi a^2\int_0^\pi \sin^3 t\mathrm{d}t \\
&= 16\pi a^2\int_{-1}^1(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{64\pi a^2}{3}.
\end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-b}^b a\cosh\frac{x}{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi a\int_{-b}^b \cosh^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x = 2\pi a^2\int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}}\cosh^2 x\mathrm{d}x \\
&= 2\pi a^2\int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}}\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi ab+2\pi a^2\int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi ab+\frac{\pi a^2}{2}(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}) \\
&= 2\pi ab+\pi a^2\sinh\frac{2b}{a}.
\end{aligned}$$

27 求下列曲线绕极轴旋转一周所得曲面的侧面积：
(1) 心形线$\rho = a(1+\cos\theta)$;
(2) 双扭线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

解：(1) 我们有

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi} \rho(\theta)\sin\theta\sqrt{[\mathrm{d}(\rho(\theta)\cos\theta)]^2+\mathrm{d}(\rho(\theta)\sin\theta)]^2} \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= -2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)\sqrt{1+\cos\theta}\mathrm{d}(1+\cos\theta) \\
&= \frac{4\sqrt{2}\pi a^2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{32\pi a^2}{5}.
\end{aligned}
$$

(2) 我们有

$$
\begin{aligned}
S &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\theta)\sin\theta\sqrt{\rho^2(\theta)+[\rho'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta+\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta = 4\pi a^2.
\end{aligned}
$$

28 设曲线C的极坐标方程为$\rho(\theta), 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$且C上任意两点距离不超过1，证明曲线$C$在上半平面所围区域面积不大于$\frac{\pi}{4}$.

证明：由极坐标形式面积公式

$$
S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^2(\theta)+\rho^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}\theta.
$$

由两点距离不大于1的题设和勾股定理可知$\rho^2(\theta)+\rho^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1$. 命题得证.

29 指出下述计算中的错误：

$$
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int_{-1}^{1} t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t = -2,
$$

其中$t=\frac{1}{x}$.

解：函数$t=\frac{1}{x}$在区间$[-1,1]$上并不是单调连续的，因此不能进行题中的变量替换.

30 计算下列瑕积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln^n x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$.

解：(1) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\int_1^0\frac{\mathrm{d}(1-u^2)}{u(1+u^2)}=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x|_{-1}^1=\pi$.

(3) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{u^3}{u^2+1}d\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right)=2\int_0^{+\infty}\frac{u^4\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}\\&=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}-4\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}+2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\&=\left.\frac{u}{2(u^2+1)^2}\right|_0^{+\infty}+\left.\frac{3u}{4(u^2+1)}\right|_0^{+\infty}+\left.\frac{3}{4}\arctan x\right|_0^{+\infty}-\left.\frac{2u}{u^2+1}\right|_0^{+\infty}\\&=\frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

(4) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n\ln^n x\mathrm{d}x&=\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln^n x\mathrm{d}(x^{n+1})\\&=-\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{n-1}x\mathrm{d}x\\&=\cdots=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\&=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

(5) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\mathrm{d}(2\sqrt{x})=-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=-4$.

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}\mathrm{d}u}{1+u^2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{t^4+1}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^2+2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.\end{aligned}$$

31 讨论下列瑕积分的敛散性：

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$;

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}(\alpha>0,\beta>0)$;

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]^p\mathrm{d}x(p>0)$;

(4) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left|\ln(x^2)\right|^{-p}\mathrm{d}x(p>0)$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^1 x^p\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q \mathrm{d}x(p>0,q>0)$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：(1) 在零点处，$\dfrac{1}{\sin x}$等价于$\dfrac{1}{x}$，因此积分发散.

(2) 在0点处，函数$\dfrac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}$等价于函数$\dfrac{1}{x^\alpha}$，在$\dfrac{\pi}{2}$点处，函数$\dfrac{1}{\sin^\alpha x\cos^\beta x}$等价于函数$\dfrac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^\beta}$. 因此积分收敛当且仅当$0<\alpha<1, 0<\beta<1$.

(3) 做变量替换$t=\dfrac{1}{x}$，则$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}[\ln(\ln\frac{1}{x})]^p\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{[\ln(\ln t)]^p}{t^2}\mathrm{d}t$. 因此积分收敛.

(4) 在点-1处函数$\left|\ln(x^2)\right|^{-p}$与$\dfrac{1}{(x+1)^p}$同阶，因此积分收敛当且仅当$0<p<1$.

(5) 在零点处，$\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}\ln(1+\frac{1}{x})}$分解为$\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$和$\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$的乘积，前者在零点右侧单调趋向于零，后者积分在零点附近有界，由Dirichlet判别法积分收敛.

(6) 在零点处，$x^p\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^q$极限为零. 在1点处，$x^p\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^q$等价于$(1-x)^q$极限为零，因此积分收敛.

(7) 在零点处，$\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$等价于$x^\alpha$，在1点处，$\dfrac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$等价于$\dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$. 因此积分收敛当且仅当$\alpha>-1$.

32 讨论下列广义积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^\beta}\mathrm{d}x(\beta>0)$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)^\alpha}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^\beta}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\sin\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$.

解：(1) 当$\alpha=0$时积分自然收敛. 当α非零时，在无穷远点处由Dirichlet判别法积分收敛. 在零点处$\dfrac{\sin\alpha x}{x^\beta}$等价于$\dfrac{\alpha}{x^{\beta-1}}$，积分收敛当且仅当$0<\beta<2$.

(2) 在零点处，$\dfrac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}$等价于$x|\ln x|^\alpha$，在无穷远点处，$\dfrac{x|\ln x|^\alpha}{x^2+1}$等价于$\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x}$. 因此积分收敛当且仅当$\alpha<-1$.

(3) 在无穷远点处，$\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)^\alpha}{[\ln(1+\frac{1}{x})]^\beta}$等价于$x^{\beta-\alpha}$. 因此积分收敛当且仅当$\beta<\alpha-1$.

(4) 做变量替换可知$\displaystyle\int_0^{+\infty}x\sin e^x\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\ln u\sin u}{u}\mathrm{d}u$. 由Dirichlet判别法积

分收敛.
(5) 由课堂讲义可知，积分收敛当且仅当$0 < p < 2$.

33 讨论下列广义积分的收敛性与绝对收敛性：
(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ln x|^p \frac{\sin x}{x^q} \mathrm{d}x$;
(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^p) \,\mathrm{d}x$;
(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$;
(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta} \mathrm{d}x$.
解：(1) 此积分可能奇异点为0,1和正无穷远点. 在零点处，$|\ln x|^p \dfrac{\sin x}{x^q}$等价于$|\ln x|^p x^{1-q}$. 因此在零附近积分收敛当且仅当$q < 2$或$q = 2$且$p < -1$.
在无穷远处当$q < 0$时易证积分发散. 当$q > 0$时由Dirichlet判别法可证积分收敛. 当$q = 0$且$p < 0$时也可证积分收敛.
在1点处，$|\ln x|^p \dfrac{\sin x}{x^q}$等价于$\sin 1 |x-1|^p$，积分收敛当且仅当$p > -1$. 因此积分收敛当且仅当$0 < q < 2, p > -1$或$q = 0, -1 < p < 0$. 当$1 < q < 2, p > -1$时积分绝对收敛，其他情况条件收敛.
(2) 当$p = 0$时显然积分发散. 当$p > 0$时积分奇异点只有零点，此时积分通过变量替换转化为$\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t) t^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{d}t$. 由Dirichlet判别法当$p > 1$时此积分条件收敛，当$0 < p \leqslant 1$时此积分发散.
当$p < 0$时积分在0附近有界因此0不是奇异点. 当$p < -1$时积分绝对收敛，当$-1 \leqslant p < 0$ 时积分发散.
(3) 积分的奇异点只有无穷远点，且有$\left|\dfrac{\sin x}{x} e^{-x}\right| \leqslant \dfrac{1}{xe^x}$，因此积分是绝对收敛.
(4) 当$\beta \geqslant 0$时，$\dfrac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}$在零点处等价于$x^{\alpha+1}$，因此当$\alpha > -2$时积分在零点处积分绝对收敛，当$\alpha \leqslant -2$时积分在零点处积分发散. 当$\beta > \alpha$时，积分在无穷远处收敛，且当$\beta > \alpha + 1$时绝对收敛，当时$\beta \leq \alpha$时积分发散.
当$\beta < 0$时，$\dfrac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}$在零点处等价于$x^{\alpha+1-\beta}$，因此可知当$\alpha - \beta > -2$时在零点处积分绝对收敛，当$\alpha - \beta \leqslant 2$时在零点处积分发散. 在无穷远点处$\dfrac{x^\alpha \sin x}{1+x^\beta}$等价于$x^\alpha \sin x$，因此当$\alpha < 0$时积分收敛且$\alpha < -1$时绝对收敛，当$\alpha \geqslant 0$时发散.

34 设函数$g(x)$在$(a, b]$上连续，$g(x)(x-a)^2$在$(a, b]$上单调，并且
$$\lim_{x \to a^+} g(x)(x-a)^2 = 0.$$
证明瑕积分$\displaystyle\int_a^b g(x) \sin \frac{1}{x-a} \mathrm{d}x$收敛.
证明:我们有
$$g(x) \sin \frac{1}{x-a} = g(x)(x-a)^2 \frac{1}{(x-a)^2} \sin \frac{1}{x-a},$$
其中$g(x)(x-a)^2$单调趋向于零，而$\dfrac{1}{(x-a)^2} \sin \dfrac{1}{x-a}$积分有界，由Dirichlet判别法即可证明所需结论.

35 设$f(x)$是区间$[a,+\infty)$上的广义平方可积函数，其中$a>0$. 证明积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

收敛.
证明：使用Cauchy收敛准则判别，则

$$\left|\int_{X'}^{X''}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_{X'}^{X''}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{X'}^{X''}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由$f^2(x)$和$\dfrac{1}{x^2}$的可积性即完成证明.