第二次作业答案

1 设$P_n(x)$是一个n次首一多项式. 记M为方程$P_n(x)=0$的最大实根. 求证

$$P_n'(M) \geqslant 0.$$

证明：我们使用反正法. 假设$P_n'(M)<0$，由导数的定义可知存在$M'>M$满足$P_n(M')<0$. 由极限

$$\lim_{x\to+\infty} P_n(x)=+\infty,$$

可知存在$M''>M'$满足$P_n(M'')=0$. 这与M是$P_n(x)$的最大实根矛盾. 故假设不成立，命题得证.

2 设函数$\varphi(x)$在点a连续. 我们定义函数

$$f(x)=|x-a|\varphi(x).$$

求函数$f(x)$在点a 处的左右导数并在什么条件下函数$f(x)$在点a处可导？
解：由右导数的定义可知

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a).$$

由左导数定义可知左导数为$-\varphi(a)$. 因此在a处可导当且仅当$\varphi(a)=0$.

3 设函数$f(x)$在点a处可导且$f(a)$不为零，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.
解: 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1)}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

4 求下列函数的导数：
(1) $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-2x^3$;
解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}-6x^2$.
(2) $y=x^2 2^x$;
解：$y'=2^{x+1}x+\ln 2x^2 2^x$.
(3) $y=\dfrac{2x-x^2}{1+x+x^2}$;
解：$y'=\dfrac{2-2x-3x^2}{(1+x+x^2)^2}$.
(4) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$;
解：$y'=-\dfrac{2x+\sin 2x}{(x\sin x-\cos x)^2}$.
(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x}$;
解：$y'=\dfrac{1}{3}(x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}})$.

(6) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$;

解：$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}=-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}(x-1)^2}$.

(7)$y=x^3\ln x-\dfrac{1}{n}x^n$;

解：$y'=x^2+3x^2\ln x-x^{n-1}$.

(8) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\ln x\right)$;

解：$y'=1+\dfrac{1}{x^2}+(1-\dfrac{1}{x^2})\ln x$.

(9) $y=\sec x$;

解：$y'=\tan x\sec x$.

(10) $y=\dfrac{\cos x}{x^4}\ln\dfrac{1}{x}$;

解：$y'=\dfrac{x\sin x+4\cos x}{x^5}\ln x-\dfrac{\cos x}{x^5}$.

5 求下列函数的导数：

(1) $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$;

解：$y'=(3x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x^2(x^2+a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

解：$y'=\dfrac{2x^2}{(1-x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)(1+x^3)^2}}$.

(3) $y=\ln(\ln x)$;

解：$y'=\dfrac{1}{x\ln x}$.

(4) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|$;

解：$y'=\dfrac{1}{a^2-x^2}$.

(5) $y=\ln(x+\sqrt{a+x^2})$;

解：$y'=\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}$.

(6) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;

解：$y'=\dfrac{1}{\sin x}$.

(7) $y=\cos^3 x-\cos 3x$;

解：$y'=3(\sin 3x-\cos^2 x\sin x)$.

(8) $y=\sin^n x\cos nx$;

解：$y'=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.

(9) $y=\cos(\cos\sqrt{x})$;

解：$y'=\dfrac{\sin(\cos\sqrt{x})\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

(10) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

解：$y'=\dfrac{\sin 2x\sin x^2-2x\sin^2 x\cos x^2}{\sin^2 x^2}$.

(11) $y=(e^x+e^{-x})^2$;

解：$y' = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$.
(12) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;
解：$y' = -\dfrac{1}{\sin x}$.

6 求下列函数的导数：
(1) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;
解：$y' = \dfrac{\operatorname{sgn}(-x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
(2) $y = \arccos(\sin x)$;
解：$y' = \operatorname{sgn}(-\cos x)$.
(3) $y = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$;
解：$y' = \arctan x$.
(4) $y = \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} + \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$;
解：$y' = \dfrac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.
(5) $y = \arctan(\tan^2 x)$;
解：$y' = \dfrac{4\sin 2x}{3+\cos 4x}$.
(6) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \left(\dfrac{x}{a}\right)^b \ (a, b > 0)$;
解：$y' = b^a a^{-b}\left[(b-a)x^{b-a-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x + \ln\dfrac{a}{b}x^{b-a}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\right]$.
(7) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;
解：$y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$.
(8) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;
解：$y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.
(9) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arctan\dfrac{x}{a}(a>0)$;
解：$y' = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \dfrac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{a^3}{2(x^2+a^2)}$.

7 求下列函数的导数：
(1) $\arcsin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$;
解：$\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' =$
$-\dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{x^4+2x^2}} = \dfrac{2\operatorname{sgn}(-x)}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$.
(2) $\sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}}}$;

解：$\left(\sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\cdot\left(x+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{\frac{1}{x}}}}.$

(3) $x^{e^x}+(e^x)^{\tan x}$;

解:$(x^{e^x}+(e^x)^{\tan x})'=x^{e^x}(\ln xe^x)'+e^{x\tan x}(x\tan x)'$

$=x^{e^x}(\frac{e^x}{x}+\ln xe^x)+e^{x\tan x}(\tan x+x\sec^2 x)$.

(4) $\ln\frac{e^x+3}{e^{2x}+e^x+1}$

解:$\left(\ln\frac{e^x+3}{e^{2x}+e^x+1}\right)'=\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x+3}\cdot\frac{e^x(e^{2x}+e^x+1)-(e^x+3)(2e^{2x}+e^x)}{(e^{2x}+e^x+1)^2}$

$=-\frac{e^{3x}+6e^{2x}+2e^x}{(e^x+3)(e^{2x}+e^x+1)}$.

(5) $\ln\sqrt[3]{\frac{2+\cos x}{3+\sin x}}$;

解：$(\ln\sqrt[3]{\frac{2+\cos x}{3+\sin x}})'=\frac{1}{3}\frac{3+\sin x}{2+\cos x}(\frac{2+\cos x}{3+\sin x})'=-\frac{1}{3}\frac{3\sin x+2\cos x+1}{(2+\cos x)(3+\sin x)}$.

(6) $\arctan\left(\ln\frac{1}{1+x^2}\right)$;

解：$\left(\arctan\left(\ln\frac{1}{1+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{1+\ln^2(1+x^2)}(-\ln(1+x^2))'=$

$-\frac{2x}{(1+\ln^2(1+x^2))(1+x^2)}$.

(7) $x^{\sin x}+(1+x^2)^{\cos x}$;

解：$(x^{\sin x}+(1+x^2)^{\cos x})'=x^{\sin x}\cdot(\ln x\sin x)'+(1+x^2)^{\cos x}\cdot(\ln(1+x^2)\cos x)'$

$=x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cos x)+(1+x^2)^{\cos x}$.

(8) $\begin{cases}x=\sqrt[4]{1-\sqrt{t}},\\ y=\sqrt{1-\sqrt[4]{t}}.\end{cases}$

解:$y_x=\frac{y_t}{x_t}=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[4]{t}}}}{\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{1-3\sqrt{t}+3t-t\sqrt{t}}}}\cdot\frac{\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt[4]{1-3\sqrt{t}+3t-t\sqrt{t}}}{\sqrt{1-\sqrt[4]{t}}\sqrt[4]{t}}$.

(9) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

解：$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y_x=0$，$y_x=-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

(10)$\begin{cases}x=e^{3\varphi}\cos\varphi,\\ y=e^{3\varphi}\sin\varphi.\end{cases}$

解:$y_x=\frac{y_\varphi}{x_\varphi}=\frac{e^{3\varphi}\cos\varphi+3e^{3\varphi}\sin\varphi}{-e^{3\varphi}\sin\varphi+3e^{3\varphi}\cos\varphi}=\frac{1+3\tan\varphi}{3-\tan\varphi}$.

8 设曲线的参数表示：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0)$.

(1) 求$y'(x)$;

(2) 证明曲线的切线被坐标轴所截的长度为一常数.

解：(1) $y'(x)=\frac{y_t}{x_t}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$.

(2) 点$(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$的切线与y轴交于$(0, a\sin t)$，与x轴交于$(a\cos t, 0)$，截距为a.

9 求下列二元方程表示的函数的导数：

(1) $x^3+y^3-xy=0$;

(2) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;
(3) $\sin x+\cos^2 y=\dfrac{1}{2}$;
(4) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.
解：(1) 方程两侧对x求导得

$$3x^2+3y^2y_x-y-xy_x=0.$$

则$y_x=\dfrac{y-3x^2}{3y^2-x}$.
(2) 方程两侧对x求导得

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{y_x}{x}-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{x+yy_x}{x^2+y^2}=0.$$

则$y_x=\dfrac{x+y}{x-y}$.
(3) 方程两侧对x求导得

$$\cos x-2\sin y\cos yy_x=0.$$

则$y_x=\dfrac{\cos x}{\sin 2y}$.
(4) 方程两侧对x求导得

$$4(x^2+y^2)yy_x-2x+2yy_x=0.$$

则$y_x=\dfrac{2x}{2y(2x^2+2y^2+1)}$.

10 证明曲线$y=a^x(a>0,a\neq 1)$的任一切线上从切点到与x轴交点之间的线段在x轴上的投影为一常数.
证明：曲线$y=a^x$在点(x,a^x)处切线的斜率为$\ln a\cdot a^x$，故投影长度为$\dfrac{1}{|\ln a|}$.

11 求下列函数的n阶导数：
(1) $y=\ln a^x(a>0,a\neq 1)$;
解：$y'=\ln a$, $y^{(n)}=0(n>1)$.
(2) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;
解：$y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.
(3) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$;
解：由莱布尼茨公式我们有

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right)^{(n)}(x+1)+n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\right)^{(n-1)}$$

即可计算此导数.
(4) $y=\sin^3 x$;
解：$y=\sin x\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\sin 3x-\sin x}{4}=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$.

$y^{(n)}=\dfrac{3\sin(x+\frac{n\pi}{2})-3^n\sin(3x+\frac{n\pi}{2})}{4}$.

(5) $y=e^x\sin x$;

解：$y^{(n)}=\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)^{(n)}=\mathrm{Im}((1+i)^ne^{(1+i)x})=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

(6) $y=\dfrac{x^n}{1-x}$;

解：$y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$.

(7) $y=\dfrac{x^n}{x^2-1}$;

解：当n是奇数时，我们有

$$y^{(n)}=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

当n是偶数时，我们有

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

(8) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；

解：由莱布尼茨公式可知

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\frac{(-1)^nn!\ln x}{x^{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\\&=\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}\cdot\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

12 证明切比雪夫多项式$T_n(x)=\dfrac{1}{2^n-1}\cos(n\arccos x)$满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0.$$

证明:正规化$T_n(x)$为$\cos(n\arccos x)$，则有

$$T_n'(x)=n\sin(n\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T_n''(x)=-n^2\cos(n\arccos x)\frac{1}{1-x^2}+n\sin(n\arccos x)\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

命题得证.

13 求由下列方程所确定的隐函数$y(x)$的二阶导数y''：

(1) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}(a>0)$;

(2) $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$.

解：(1) 方程两侧对x求两次导得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y_x=0,$$

$$-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}y_x^2+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y_{xx}=0.$$

则$y_{xx}=\frac{1}{3}(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}})$.
(2) 方程两侧对x求两次导得

$$3x^2+3y^2y_x-3ay-3axy_x=0,$$

$$6x+6yy_x^2+3y^2y_{xx}-3ay_x-3ay_x-3axy_{xx}=0.$$

因此

$$y_{xx}=\frac{6ay_x-6x-6yy_x^2}{3y^2-3ax}.$$

经计算得

$$y_{xx}=\frac{2a(ay-x^2)(y^2-ax)-2x(y^2-ax)^2-2y(ay-x^2)^2}{(y^2-ax)^3}.$$

14 求证：
(1) 若$y=x^{n-1}\ln x$，则$y^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$;
(2) 若$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，则$y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}(bc-ad)$;
(3) 若$y=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$，则$y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.
证明：(1) 运用归纳法，假设对k成立，则由莱布尼茨公式可知

$$(x^k\ln x)^{(k+1)}=x(x^{k-1}\ln x)^{(k+1)}+(k+1)\frac{(k-1)!}{x}=x\left(\frac{(k-1)!}{x}\right)'+(k+1)\frac{(k-1)!}{x}.$$

命题得证.
(2) 不妨设c不为零，则$y=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\dfrac{1}{cx+d}$. 经计算命题得证.
(3) 运用归纳法，假设对k成立，则由莱布尼茨公式可知

$$\left(x^ke^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}=x\left(\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right)'+(k+1)\left(\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right).$$

经计算命题得证.

15 设$a^2-3b<0$，证明实数方程$x^3+ax^2+bx+c=0$在实数上只有一个根.
证明：三次方程在实数上只可能有一个或三个根，若

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

有三个根，则由罗尔微分中值定理可知$P'(x)=3x^2+2ax+b$有两个根，这与判别式$4a^2-12b<0$ 矛盾.

16 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导. 求证：存在$\xi\in(a,b)$满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi).$$

证明：取$g(x)=\ln|x|$，对于$f(x)$和$g(x)$使用柯西中值定理.

17 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导. 求证：存在$\xi\in(a,b)$满足

$$2\xi(f(b)-f(a)=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证明：构造函数

$$G(x)=(x^2-a^2)(f(b)-f(a))-(b^2-a^2)(f(x)-f(a)).$$

不难验证$G(a)=G(b)=0$. 因此由Rolle中值定理存在$\xi\in(a,b)$满足$G'(\xi)=0$. 命题得证.

18 设f和g在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，其中$g'(x)$在(a,b)上无零点，证明存在$\xi\in(a,b)$满足

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

证明：构造函数

$$F(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(x)).$$

容易验证$F(a)=F(b)=0$. 由罗尔微分中值定理存在$\xi\in(a,b)$满足$F'(\xi)=0$. 命题得证.

19 设f在区间$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，其中$f'(x)$在(a,b)上无零点，证明存在$\xi,\eta\in(a,b)$满足

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

证明：由柯西中值定理可知存在$\eta\in(a,b)$满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

由拉格朗日中值定理可知存在$\xi\in(a,b)$满足$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 命题得证.

20 设$0<a<b$，$f(x)$在$[a,b]$上可导，证明存在$\xi\in(a,b)$满足

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明：设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$h(x)=\frac{1}{x}$，由柯西中值定理存在$\xi\in(a,b)$满足

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

命题得证.

21 用待定系数法证明如下命题：
(1) 设$f(x)$在区间$[a,b]$上三阶可导且$f(a)=f'(a)=f(b)=0$. 证明对于$x\in(a,b)$，存在$\xi\in(a,b)$满足

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-a)^2(x-b).$$

证明：对于$x \in (a,b)$，记

$$A = \frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}.$$

构造

$$F(t) = f(t) - \frac{A}{6}(t-a)^2(t-b).$$

则$F(a) = F(b) = F(x) = F'(a) = 0$，由罗尔微分中值定理存在$\xi \in (a,b)$满足

$$F^{(3)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) - A = 0.$$

命题得证.
(2) 设$f(x)$在区间$[0,1]$上五阶可导且$f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$，证明对于$x \in (0,1)$，存在$\xi \in (a,b)$满足

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{120}(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3.$$

证明：对于$x \in (0,1)$，不妨设x不等于$\dfrac{1}{3}$和$\dfrac{2}{3}$. 记

$$A = \frac{120f(x)}{(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)^3}.$$

构造

$$F(t) = f(t) - \frac{A}{120}(t-\frac{1}{3})(t-\frac{2}{3})(t-1)^3.$$

则有$F(1) = F(\frac{1}{3}) = F(\frac{2}{3}) = F(x) = 0$，$F'(1) = F''(1) = 0$. 由罗尔微分中值定理可知存在$\xi \in (0,1)$满足$F^{(5)}(\xi) = f^{(5)}(\xi) - A = 0$. 命题得证.
(3)* 设$f(x)$在区间$[a,b]$上二阶可导，证明对于$c \in (a,b)$，存在$\xi \in (a,b)$ 满足

$$\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证明：存在常数A满足

$$f(a)(b-c) + f(b)(c-a) + f(c)(a-b) = \frac{1}{2}A(b-a)(c-a)(b-c).$$

构造函数

$$F(t) = f(a)(b-t) + f(b)(t-a) + f(t)(a-b) - \frac{1}{2}A(b-a)(t-a)(b-t).$$

则函数$F(t)$满足$F(a) = F(b) = F(c) = 0$，因此存在$\xi \in (a,b)$满足$F''(\xi)$，即

$$f''(\xi)(a-b) + A(b-a) = 0.$$

故有$f''(\xi) = A$. 命题得证.

22* 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且在(a,b)上n次可导，设

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

证明存在$\xi \in (a,b)$满足

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

证明：存在常数A满足

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{A}{n!} \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

构造函数

$$F(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & t^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(t) \end{vmatrix} - \frac{A}{n!}(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_{n-1}) \prod_{n-1 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j),$$

则有$F(x_0) = F(x_1) = \cdots = F(x_n)$，因此存在$\xi \in (a,b)$满足$F^{(n)}(\xi) = 0$，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ x_0 & x_1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & 0 \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) & f^{(n)}(\xi) \end{vmatrix} = A \prod_{n-1 \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j).$$

故有$f^{(n)}(\xi) = A$. 命题得证.