一 （3 分）（1）写出 “$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛” 的定义.（2）设$a_n > 0$, $b_n > 0$, $n = 1,2,\ldots$, 且$a_n > b_n$. 用(1)中的定义证明：若$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛.

解答: (1) 令$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$，如果$\lim\limits_{N\to\infty} S_N$存在，则称$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

(2). 又令$S_N{}' = \sum_{n=1}^{N} b_n$. 则$S_N > S_N{}'$，且$S_N$，$S_N{}'$均为单增数列. 由单调数列有极限推出有解，及$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，知$S_N$有界. 从而$S_N{}'$有界. 再有单调有界推出有极限，知$S_N{}'$有极限. 从而$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛.

二 （3 分）（1）写出正项级数的达朗贝尔判别法和柯西判别法.（3）求一个正项级数，可由柯西判别法判定它为收敛，但不能用达朗贝尔判别法判定它为收敛.

解答: (1) 略

(2) 令

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n\text{为奇数} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n & n\text{为偶数} \end{cases}$$

则$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$，由柯西判别式$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛

但$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty > 1$，不能由达朗贝尔推出$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛

三 （3 分） 判断下列级数的敛散性: （1）$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$; （2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

解答: (1) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} < 0, \forall n$. (用比较判别法的极限形式)

$$-a_n = \mathrm{e}\left\{1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right\} \sim \mathrm{e}\left\{1 - n\ln(1+\frac{1}{n})\right\}$$

$$= \mathrm{e}\left\{1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\right]\right\} = \mathrm{e}\left\{\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

从而$\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n}{\frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}} = 1$，由$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散，知$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

(2) 由 Raabe 判别法

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(2^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) \to +\infty > 1$$

故$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

四（3 分（1）写出“函数序列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$f(x)$”的定义.（2）证明$\{x^n\}$在区间[0.1, 0.9]上一致收敛，但在区间[0.2, 1]上不一致收敛.

解答: (1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$，使$\forall x \in I, \forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(2) 记$f(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le 1\\ 1,\ x=1\end{cases}$ 则$\lim_{n\to\infty}x^n=f(x),\forall x\in[0,1]$

(i) $\forall n,\ \sup\limits_{x\in[0.1,0.9]}|x^n-f(x)|=(0.9)^n\to 0$

故$x^n\rightrightarrows f(x).(x\in[0.1,0.9])$

(ii) $\forall n,\sup_{x\in[0.1,0.9]}|x^n-f(x)|=1\nrightarrow 0$

故x^n不一致收敛到$f(x).(x\in[0.2,1])$

五（3 分）(1) 写出和差变换(Abel 变换)公式. (2) 设$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$存在，$\sum_{n=1}^{+\infty}n(a_n-a_{n-1})$收敛，证明$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

解答: (1) 记$S_k=\sum_{n=1}^{K}a_n$，则

$$\sum_{n=1}^{N}a_nb_n=\sum_{n=1}^{N-1}S_n(b_n-b_{n+1})+S_Nb_N$$

(2) 由$\sum_{n=1}^{N}n(a_n-a_{n-1})=N(a_N-a_{N-1})+\cdots+1\cdot(a_1-a_0)$

$$=Na_N-(a_{N-1}+\cdots+a_1+a_0)$$

故$\sum_{n=0}^{N-1}a_n=-\sum_{n=1}^{N}n(a_n-a_{n-1})+Na_N$

因此结论成立

六（3 分）设: (1) 函数序列$\{f_n(x)\}$在开区间$(-0.01,0)$上一致收敛于$f(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f_n(x)=c_n$.

证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$存在; (2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

证明: (1) 由一致收敛的 Cauchy 准则

$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$使

$$\left.\begin{matrix}\forall x\in(-0.01,0)\\ \forall m,n>N(\varepsilon)\end{matrix}\right\}: -\varepsilon<f_n(x)-f_m(x)<\varepsilon \quad (*)$$

不等式$(*)$两边取极限$\lim\limits_{x\to 0^-}$，由极限保序性

$$-\varepsilon\le c_n-c_m\le\varepsilon$$

故数列$\{c_n\}$是 Cauchy 列，故收敛;

(2) 由一致收敛的定义

$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$使

$$\left.\begin{matrix}\forall x\in(-0.01,0)\\ \forall n>N(\varepsilon)\end{matrix}\right\}: f_n(x)-\varepsilon<f(x)<f_n(x)+\varepsilon \quad (**)$$

不等式$(**)$两边分别取$\overline{\lim\limits_{x\to 0^-}}$和$\underline{\lim\limits_{x\to 0^-}}$，知$c_n-\varepsilon\le\overline{\lim\limits_{x\to 0^-}}f(x)\le c_n+\varepsilon$

再令$n\to+\infty$，故知$\overline{\lim\limits_{x\to 0^-}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}c_n$.同理$\underline{\lim\limits_{x\to 0^-}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}c_n$

七 （3 分） 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)x^n$$

的收敛半径和收敛域.

解答: $|a_n|\le 1+2=3$ 且 $a_{8k}=3$。故$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{8k}|}=1$

故收敛半径为$\mathrm{R}=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=1$

当$x=\pm1$时，$|a_nx^n|$都不是无穷小量，
故收敛为$(-1,1)$。

八 （3 分）求幂级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)x^n$$

的和函数.

解答: 由$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$知收敛半径为 1。
两端点±1处显然不收敛，故和函数定义域为$(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)x^n$$

$\forall x\in(-1,1)$，在$[0,x]$(或$[x,0]$)上一致收敛，故$\int_0^x$ 和$\sum$ 可以交换次序：

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t)\mathrm{d}t&=\int_0^x\left\{\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)x^n\right\}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{+\infty}x^{n+1}\\&=\frac{x^{2+1}}{1-x}=\frac{x^3}{1-x}\end{aligned}$$

故

$$S(x)=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'=\frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2},-1<x<1\text{ 。}$$

九 （3 分） （1）设$x^0\in\mathbb{R}^n,E\subset\mathbb{R}^n$. 写出“$x^0$是$E$的聚点”的定义. (2) 写出$\mathbb{R}^n$中开集和闭集的定义.

解答: (1) $\forall\varepsilon>0,\mathrm{U^o}(x^0,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$

(2) $E\subset\mathbb{R}^n$称为开集，如果$\forall x^0\in E,\exists\delta>0$,使$\mathrm{U}(x^0,\delta)\subset E$

$F\subset\mathbb{R}^n$称为闭集，如果$\forall\{x^n\}\subset F$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}x^n$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x^n\in F$

十、（3 分). (1) 写出二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的定义. (2) 用定义证明 $f(x,y)=x^2y+1$ 在点 $(1,2)$ 处连续.

解答: (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

(2)

$$\begin{aligned}&f(1+\Delta x,2+\Delta y)-f(1,2)\\&=((1+\Delta x)^2(2+\Delta y)+1)-(1^2\times 2+1)\\&=4\Delta x+\Delta y+2(\Delta x)^2+2\Delta x\Delta y+(\Delta x)^2\Delta y\end{aligned}$$

限制$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<1$，则$\begin{cases}|\Delta x|\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\le 1\\|\Delta y|\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\le 1\end{cases}$

从而

$$\begin{aligned}&|f(1+\Delta x,2+\Delta y)-f(1,2)|\\&\le 4|\Delta x|+|\Delta y|+2|\Delta x|+2|\Delta y|+|\Delta y|\\&\le 10\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{10}\}$

则当$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta$时，

$|f(1+\Delta x,2+\Delta y)-f(1,2)|<\varepsilon$