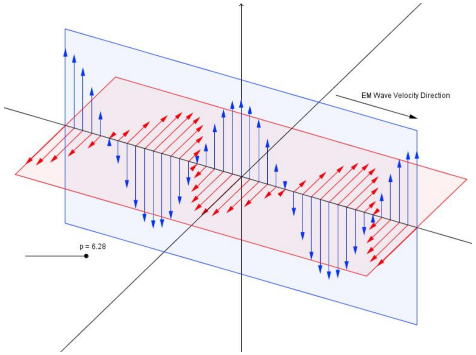
第十章　机械波

波动：振动的传播

机械波：机械振动在弹性介质中的传播

振动和波动的关系
- 振动——波动的成因
- 波动——振动的传播

波动的种类
- 机械波
- 电磁波
- 物质波



§1 机械波的产生和传播

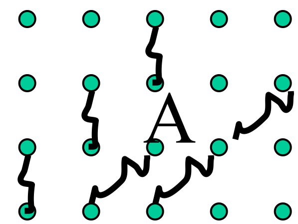
一、机械波的产生

1 波源 作机械振动的物体（声带、乐器等）

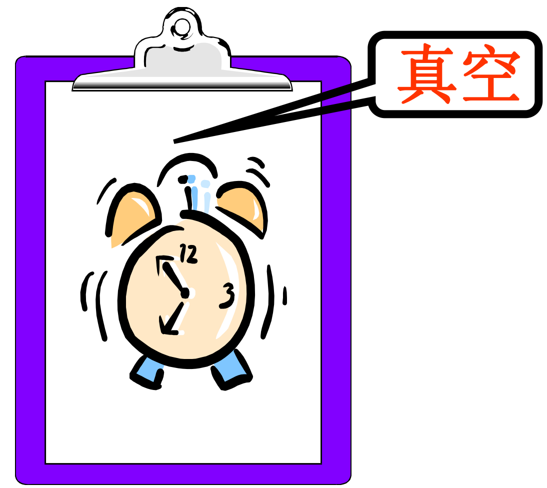
2 介质 能传播机械振动的媒质（空气、水、钢铁等）

****电磁波**

只需波源，可在真空中传播



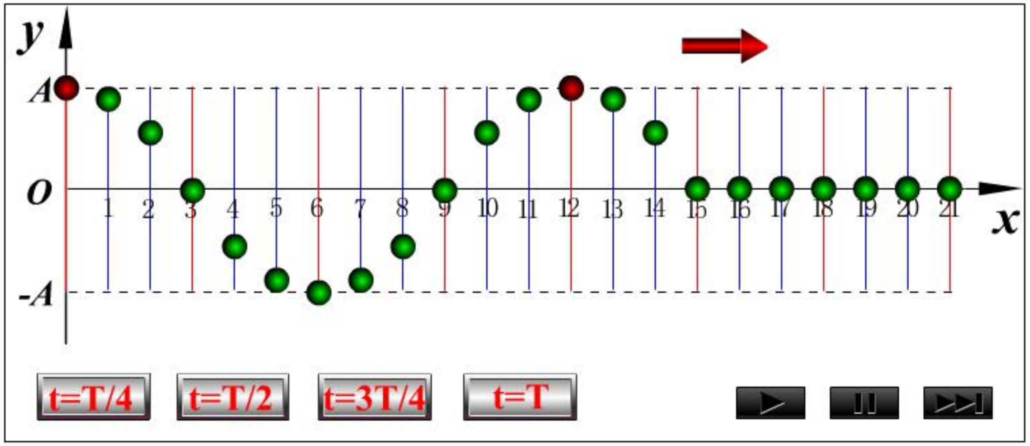
振源A振动通过弹性力传播开去



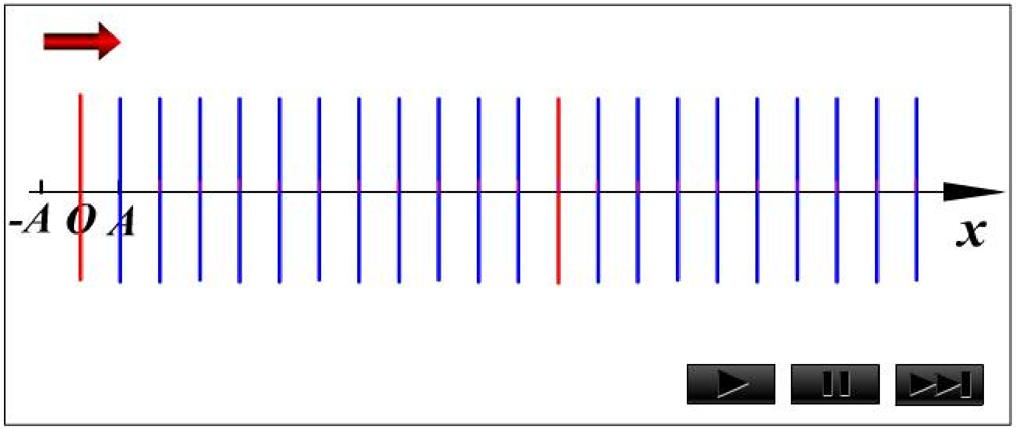
注意： 波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.

二、波的分类

横波：各质元振动方向与波传播方向垂直

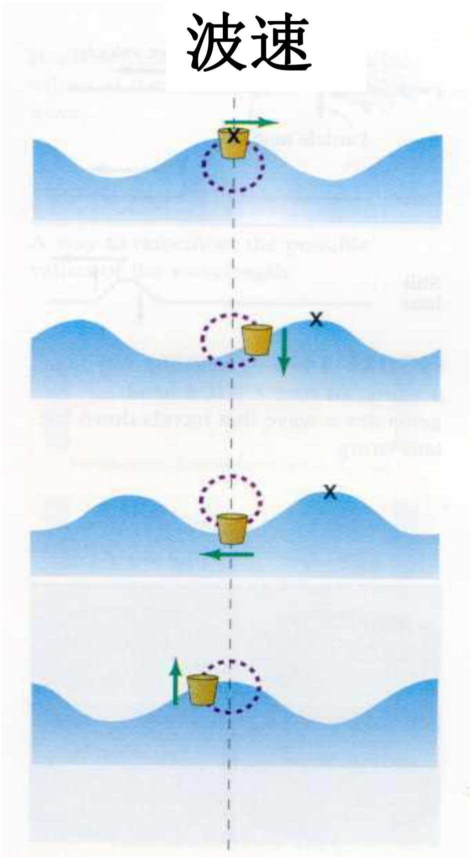


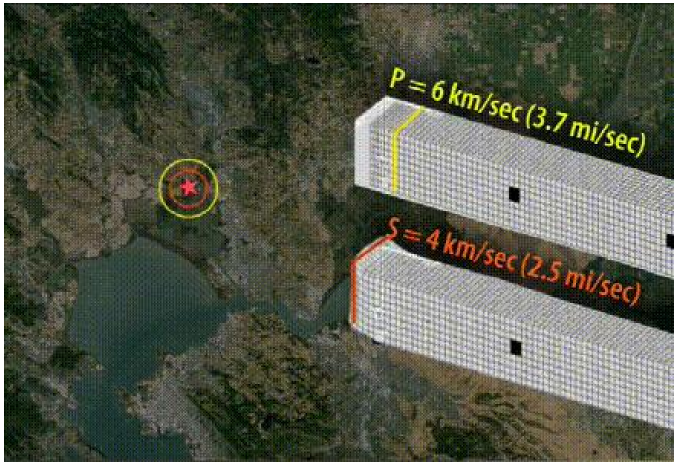
纵波：各质元振动方向与波传播方向一致



水表面的波既非横波又非纵波——在水的表面张力和重力共同作用下形成的。

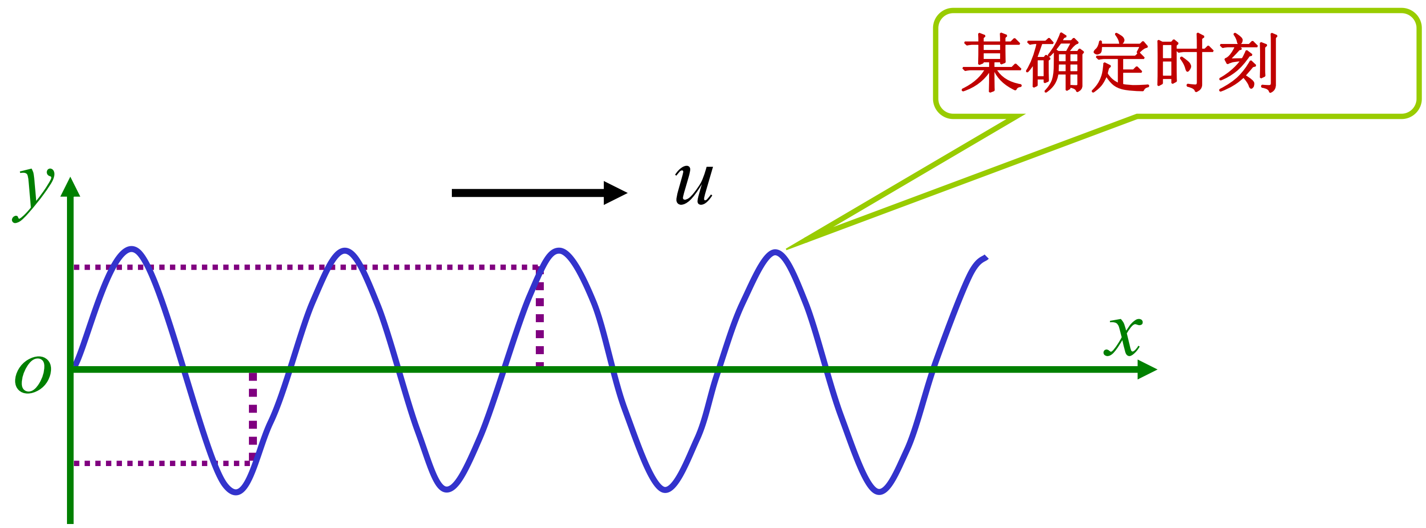
地震波为横波与纵波的混合波，破坏力更强的是其中的横波成分。





波形图：

某时刻各点振动的位移 y (广义：任一物理量)与相应的平衡位置坐标 x 的关系曲线



——上述波形图既可以表示横波，也可以表示纵波。

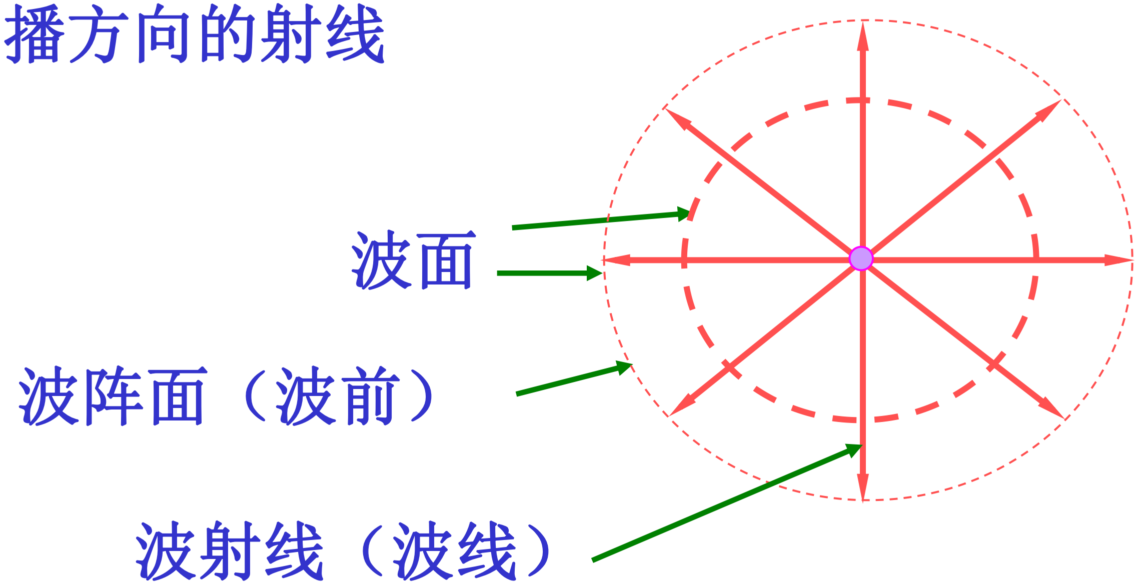
2. 波面与波线

波面：某时刻，同一波源向外传播的波到达的空间各点连成的面（同相位面）

波阵面：某时刻，传播在最前面的波面（又称波前）

波射线：描述波传播方向的射线

简称波线



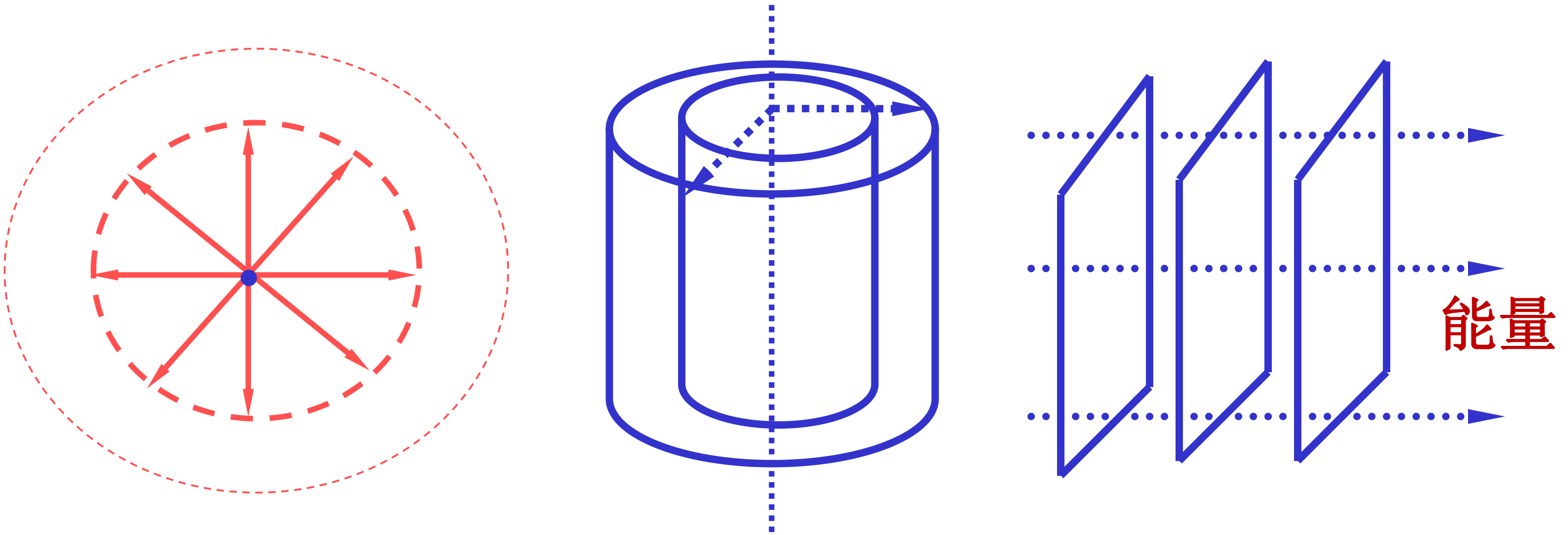
- 波射线垂直于波面
- 波射线是波的能量传播方向

在各向同性介质中——

点源：波面是球面 所以称为球面波

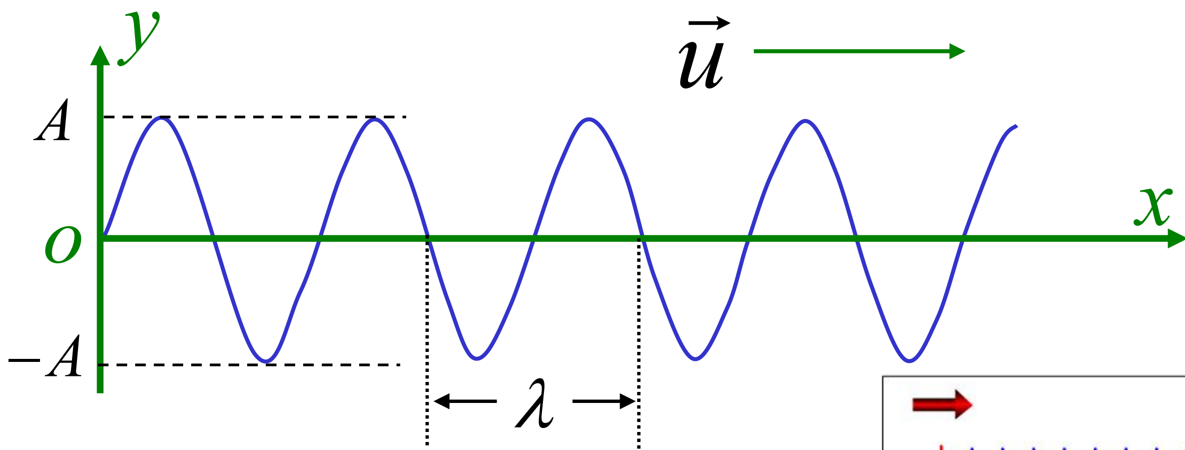
线源：波面是柱面 所以称为柱面波

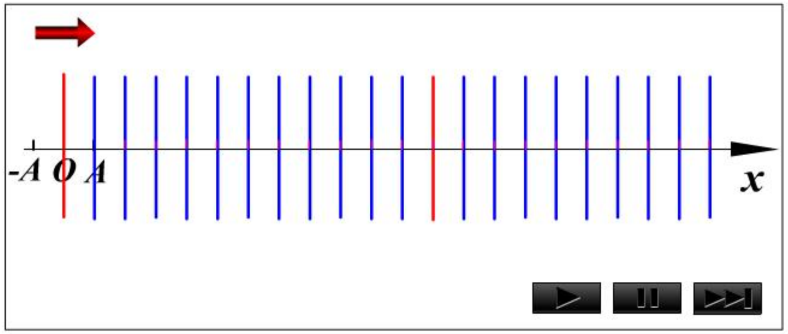
面源：波面是平面 所以称为平面波



球面波 柱面波 平面波

三、描述波的物理量





振幅： A 单位： m

周期： T 单位： s

频率： ν 单位： Hz $\nu = 1/T$ ——决定于波源的振动

波长： λ 单位： m

波速： u 单位： m/s $u = \lambda/T = \lambda\nu$

——由介质的性质决定，与弹性模量和密度有关

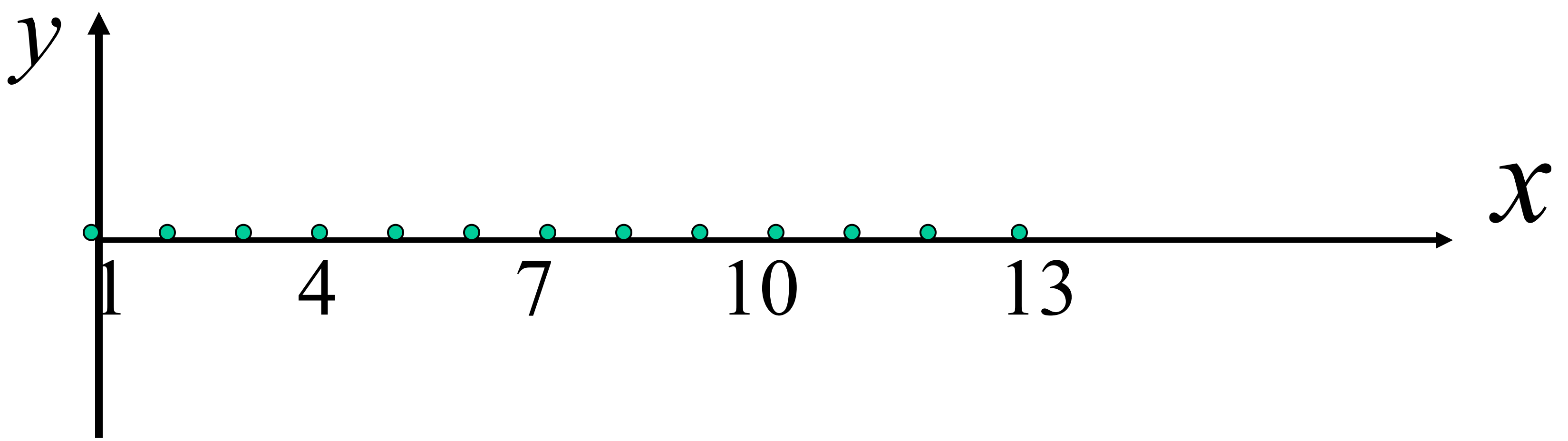
§2 平面简谐波

平面波：波面是平面的波(一维、能量不损失)

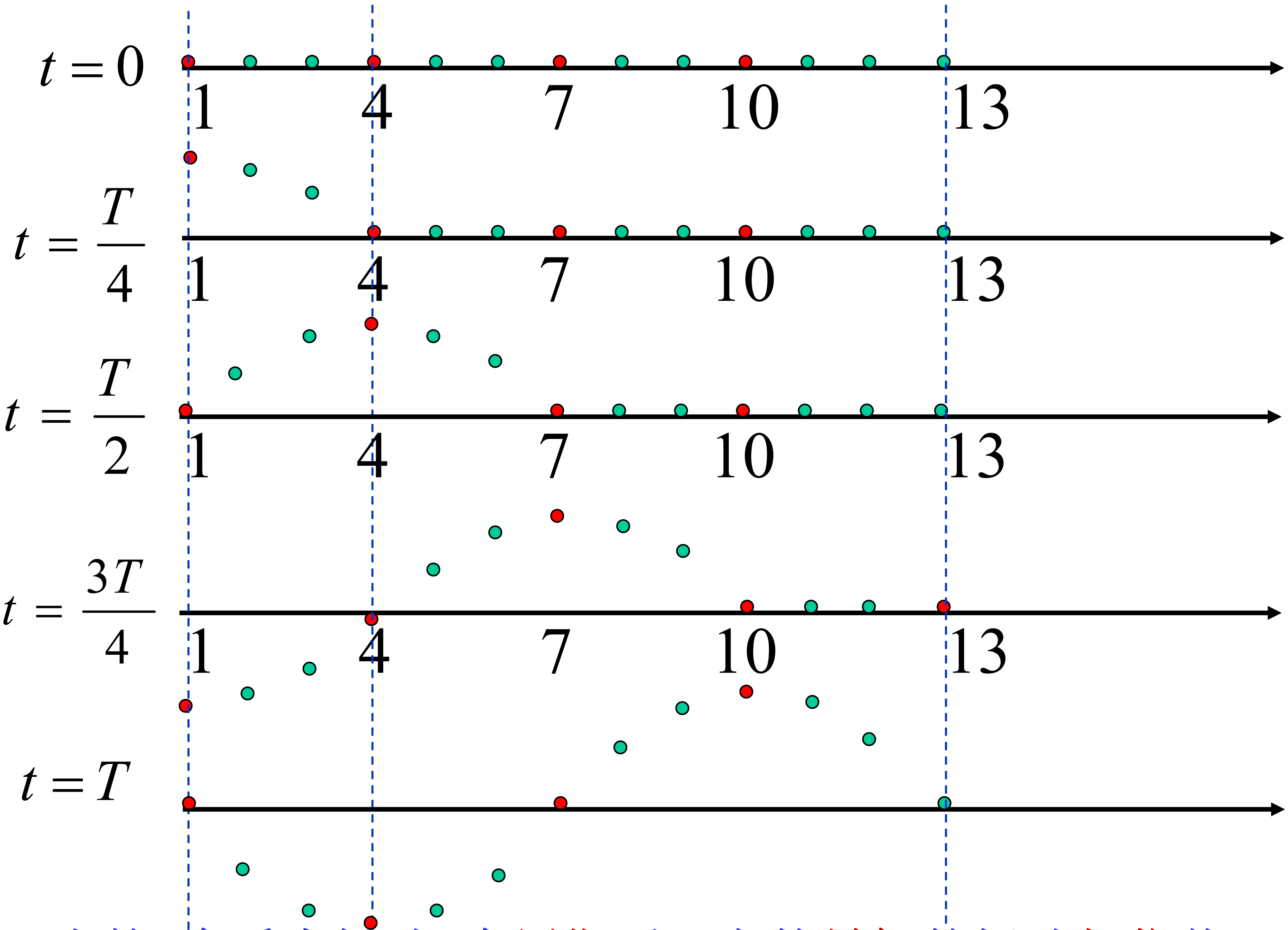
简谐波：波动传播到的各点均作简谐振动的波

一、平面简谐波的传播

以下以绳上横波为例，说明传播特征。



无外界干扰时，各质点均处在自己的平衡位置处。



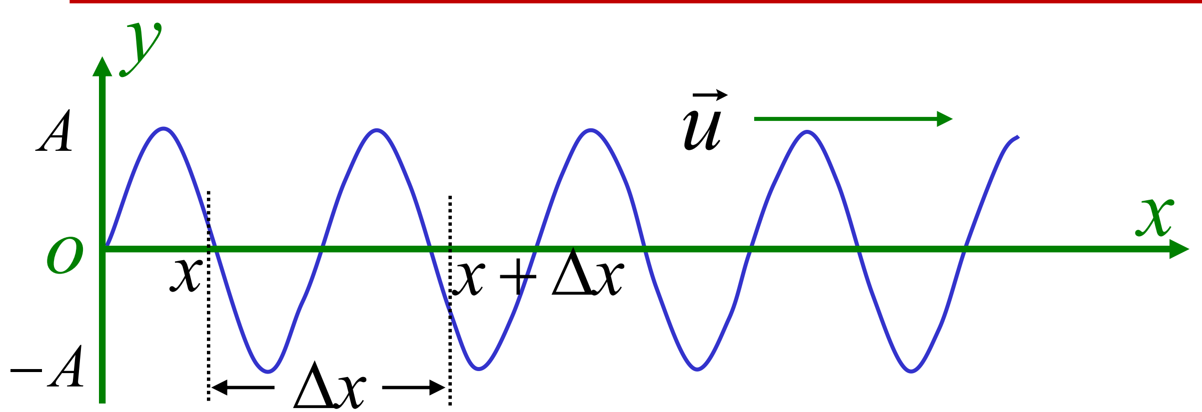
当第1个质点振动1个周期后，它的最初的振动相位传到第13个质点，即：第1个质点领先第13点2π相位。

- 波是**振动状态（能量）**的传播，不是介质中质点的传播，各质点均在自己的平衡位置附近作振动。

- **同时**看波线上各点沿传播方向，各点相位依次落后。

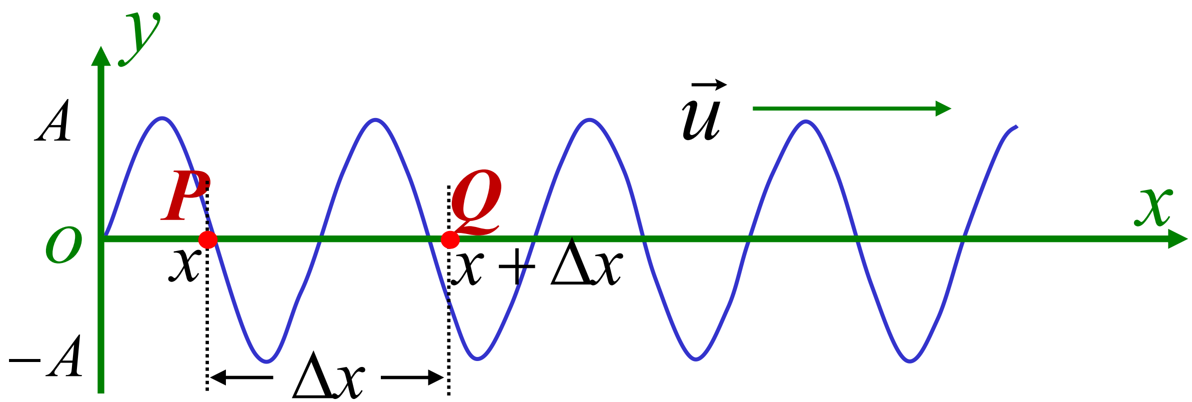
- 相距一个波长两点相位差是**2π**。如第13点和第1点，或说振动时间差1个**周期**，则相位差为**2π**。

$$\boxed{\text{相距 } \Delta x = \lambda \text{ 两点的相位差 } \Delta\varphi = 2\pi}$$



- 相距 Δx 的任意两点的相位差 $\boxed{|\Delta\varphi| = \dfrac{2\pi}{\lambda}|\Delta x|}$

二、平面简谐波波函数（余弦表达式）

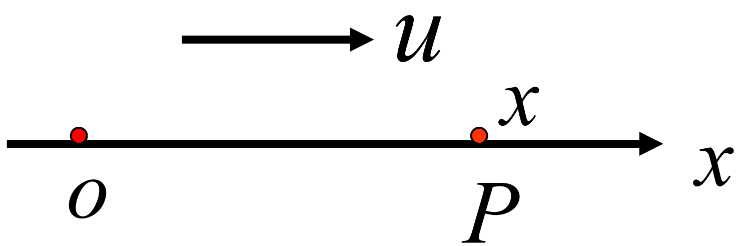


在波线后部 ***Q*** 点处***t*** 时刻的振动，是前部 ***P*** 点在

$$t-\frac{\Delta x}{u}=t-\frac{\Delta x}{\lambda}T$$ 时刻的振动

即 ***Q*** 点的振动落后于 ***P*** 点。

当波沿x轴正向传播时， P点的振动落后于O点

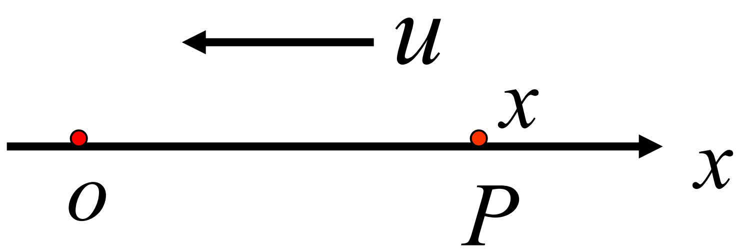


$$y_O = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$
$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$
$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$
$$= A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right]$$

由于P为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿x轴正方向传播的平面简谐波的表达式，也称波函数.

当波的传播方向与x轴反向时，P 点的振动超前于 O点



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

沿x轴负方向传播的平面简谐波的表达式

$$= A\cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right]$$

说明：

1. $y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$ 波沿x轴正向传播

$y = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$ 波沿x轴负向传播

**2. 角波数（简称波数）

角波数：2π长度内含的波长数目

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

平面谐波一般表达：$y = A\cos\left(\omega t \mp kx + \varphi\right)$

负（正）号代表向 x 正（负）向传播的简谐波。

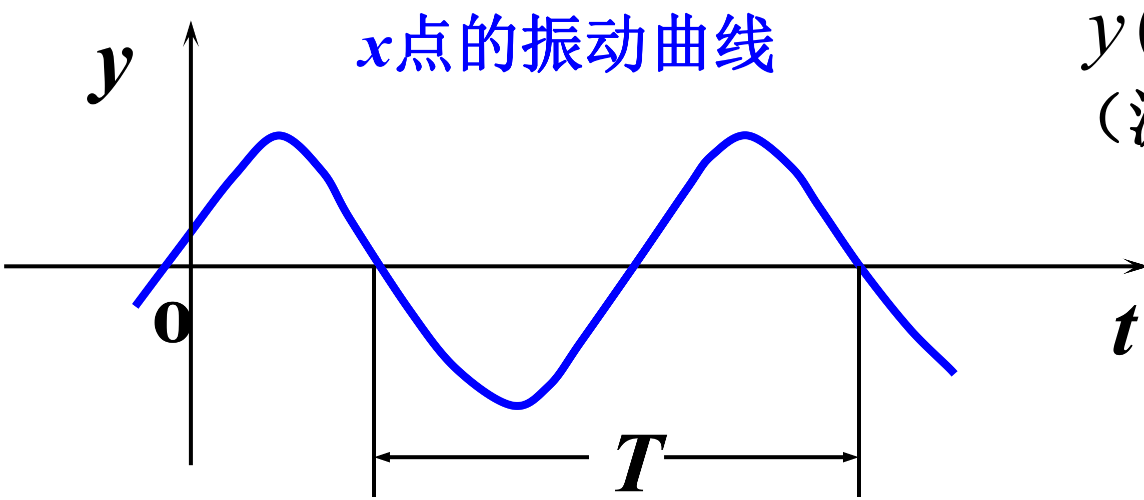
3. 波函数的物理意义

- 当坐标 x 确定，波动方程变成 y - t 关系，表示 x 点的振动，以与 x 轴同向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[\omega t + \left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]$$

令 $\varphi = \varphi_0 - \dfrac{2\pi}{\lambda}x$

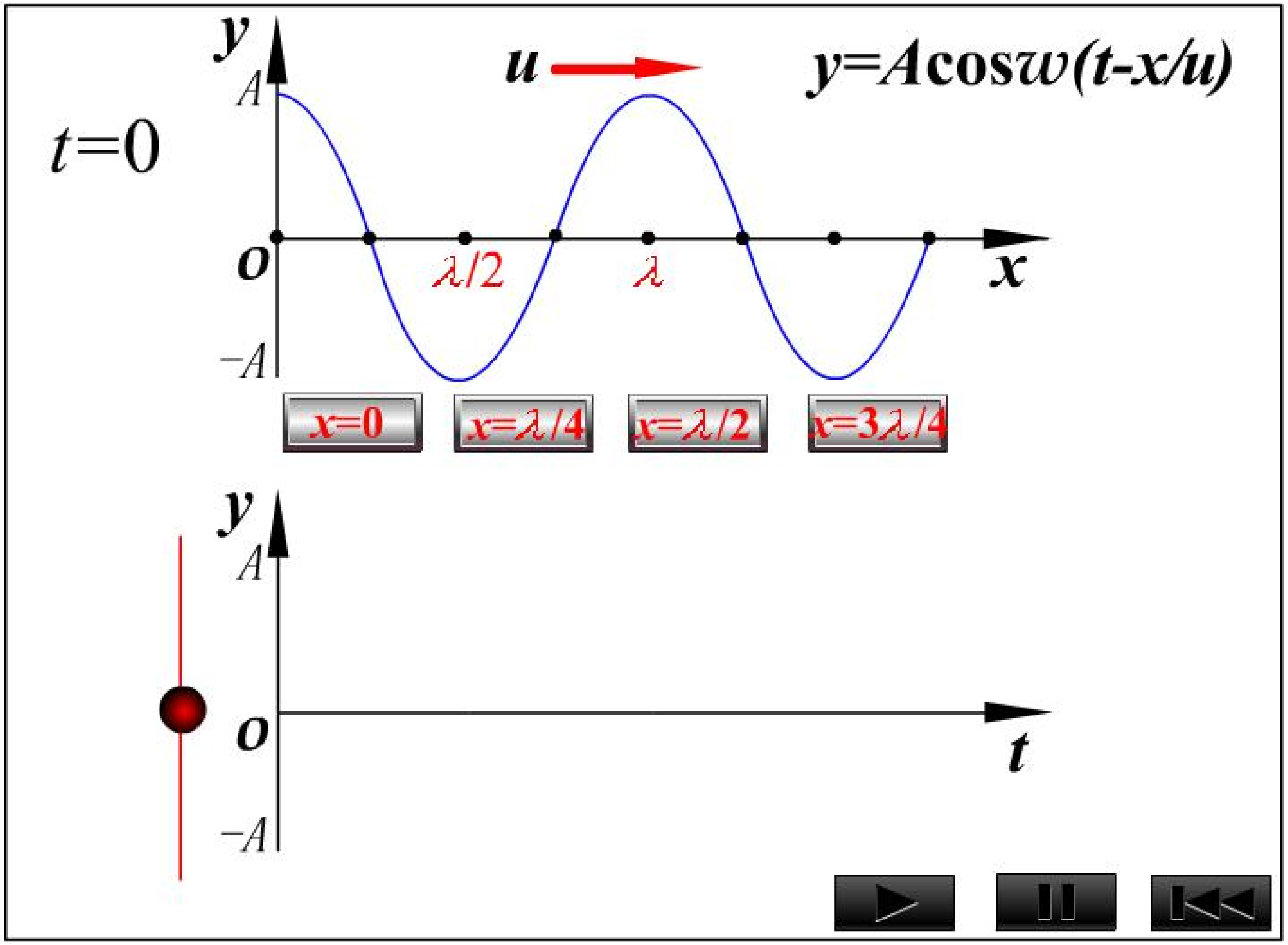
则 $y = A\cos(\omega t + \varphi)$



$$y(x,t) = y(x,t+T)$$

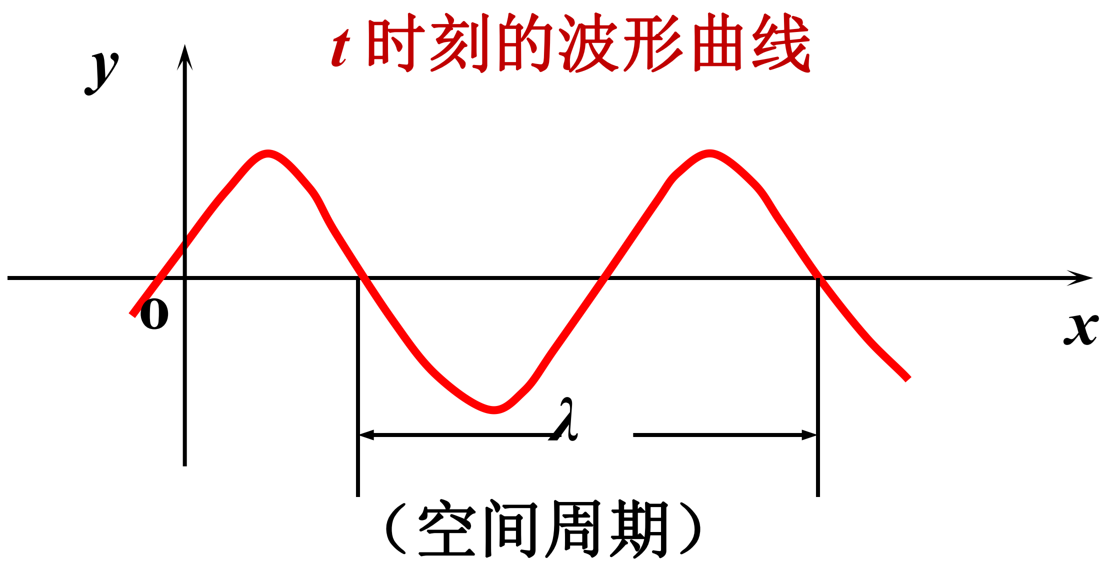
（波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐振动图



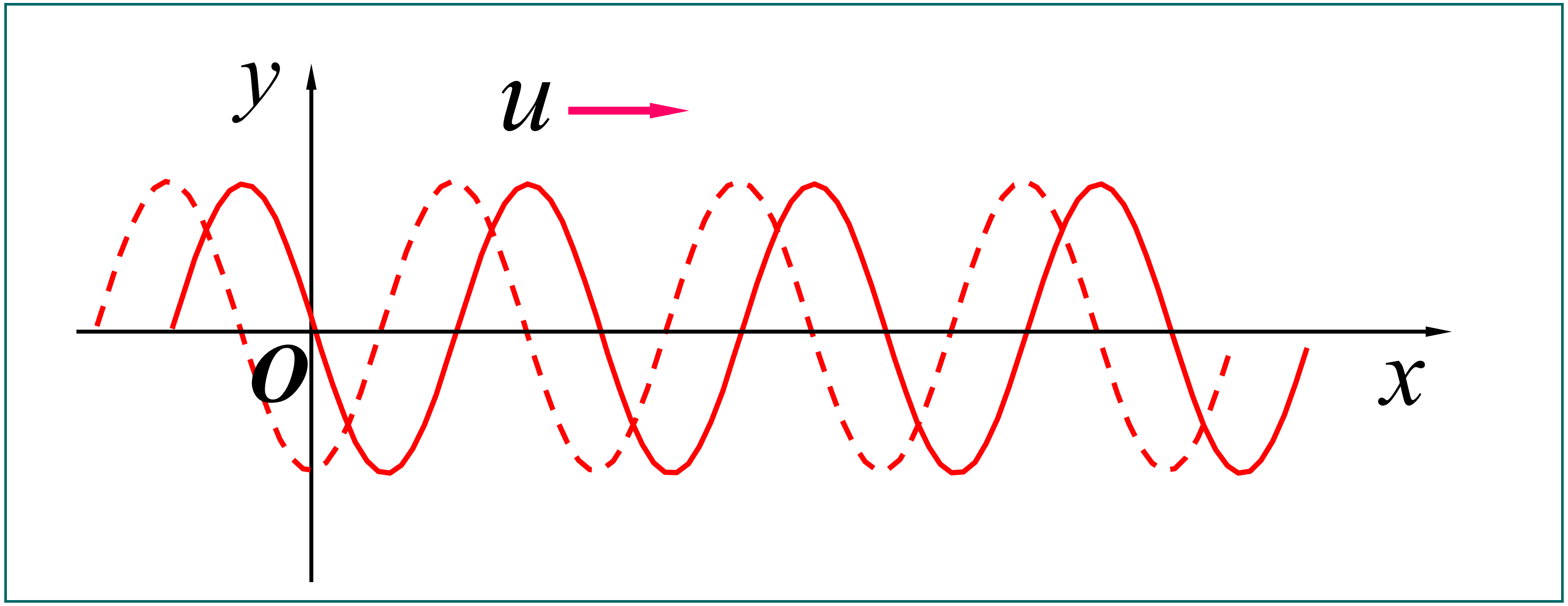
- 当时刻 t 确定，波动方程变成 y- x 关系表达了 t 时刻空间各点位移分布——波形图 (波形定格照片)，以与 x 轴同向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[-\frac{2\pi}{\lambda}x + \left(\omega t + \varphi_0\right)\right]$$



当 *x*、*t* 都变化时，方程表示在不同时刻各质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$



4. 波动传播到的各点媒质质元的振动速度和加速度

- 以沿 x 轴正向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

**三、波动方程的微分形式

√ 各向同性，无色散介质内，一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

介质中的波速

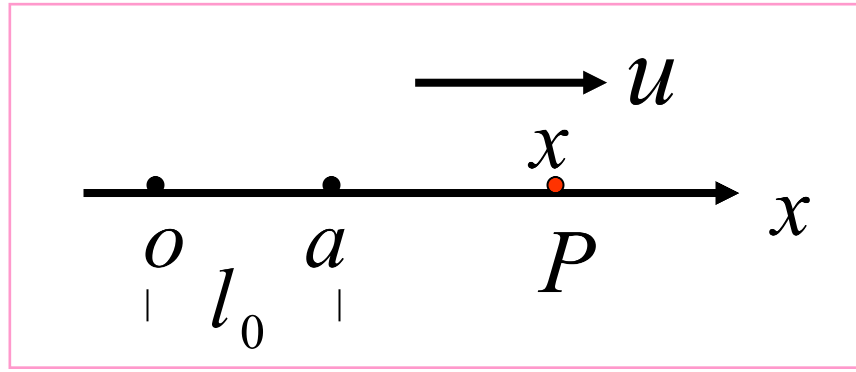
√ 解的形式之一 —— 特解：

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$ ——平面简谐波

例1 已知：波沿着x轴的正方向传播，波源 a 的振动形式为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

求：波函数的表达式



解： 任意一点 P 坐标为 x

解法一： P 点相位落后于波源 a 的振动相位 $\frac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|$

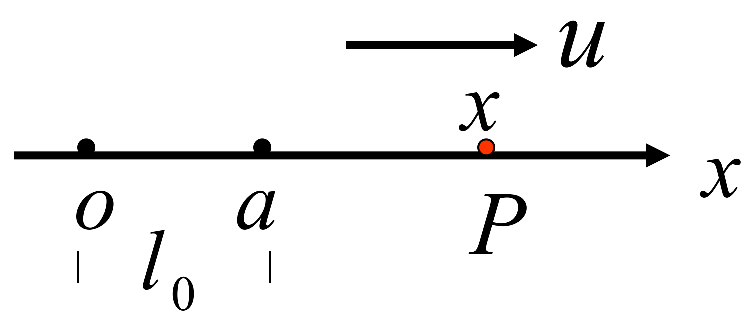
所以就在 a 点振动表达式的基础上改变相位因子就得到了 P 的振动表达式

$$y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|\right]$$

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(x - l_0)\right]}$$

解法二：

时间落后



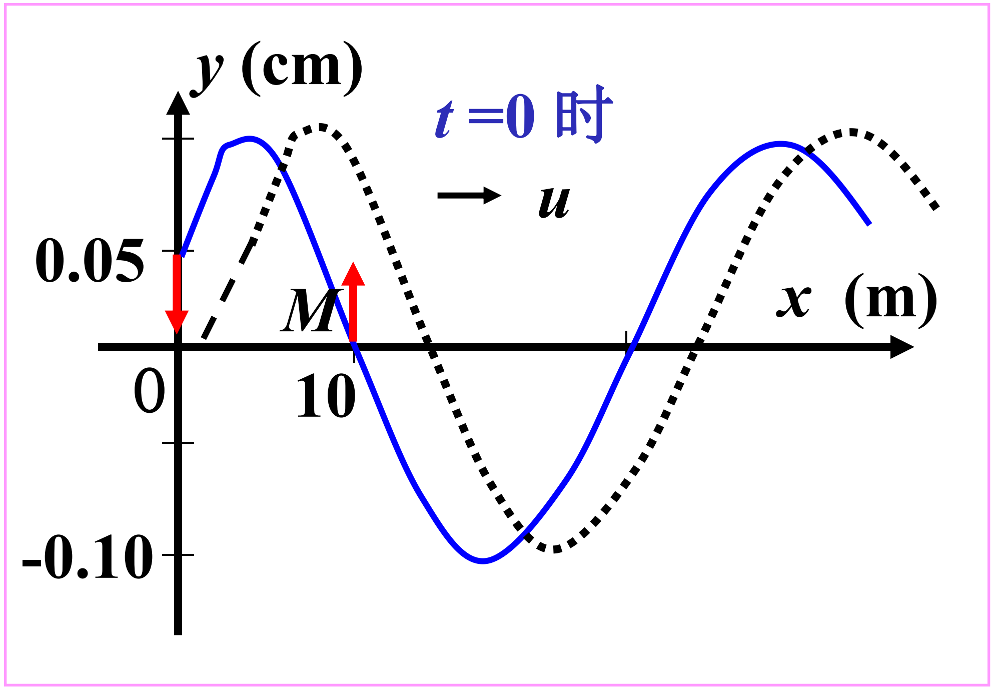
$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\left|\overline{Pa}\right|}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{\omega}{u}\left(x - l_0\right)\right]$$

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x - l_0\right)\right]}$$

例2　正向波在$t=0$时的波形图，波速u=1200m/s。

求：波函数和波长



解：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

由图 $A = 0.10(cm)$

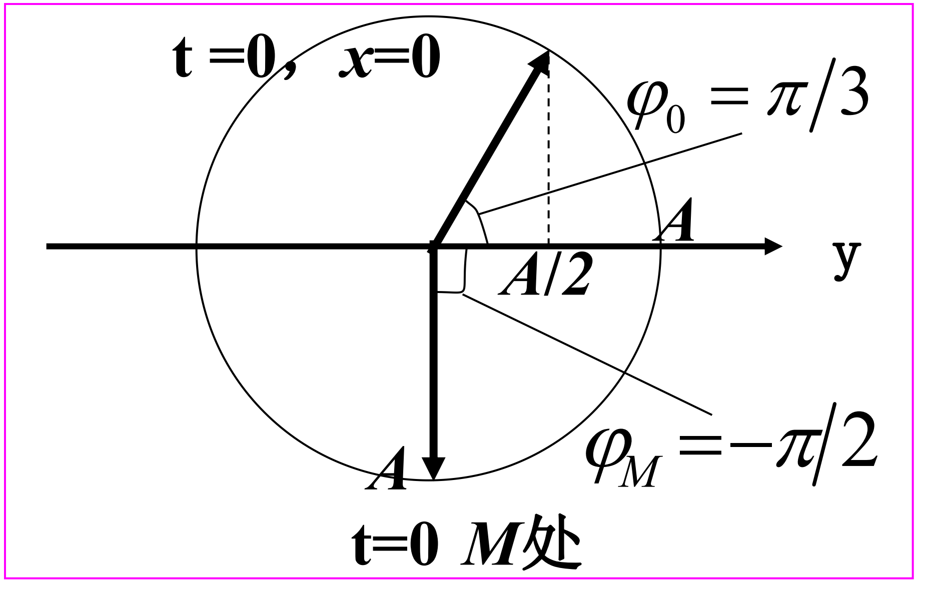
如何确定：ω,　φ_0

由初始条件：$y_0 = A/2,\ v_0 < 0$

$\Rightarrow \varphi_0 = \pi/3$

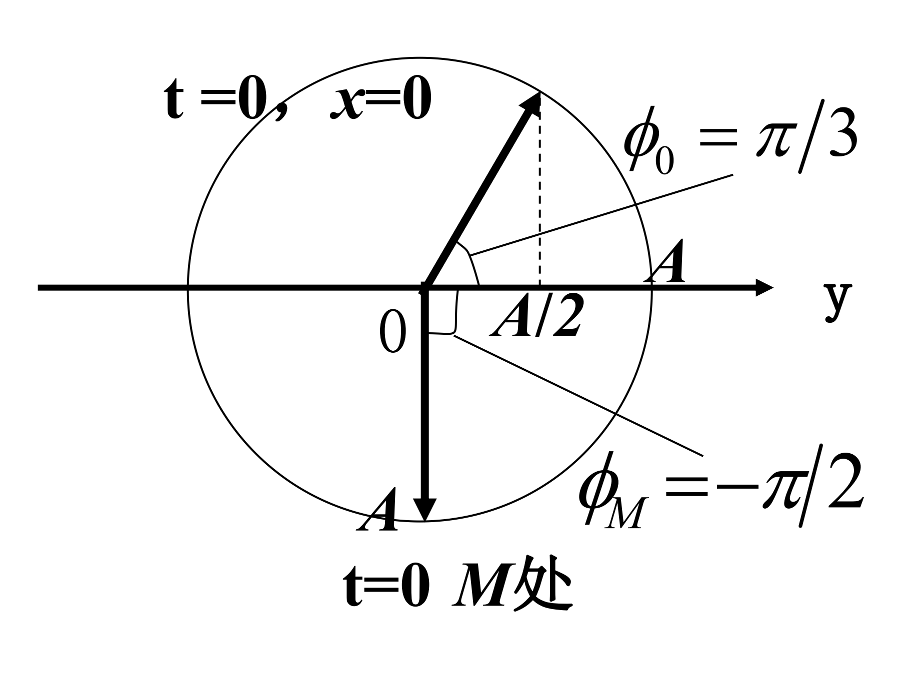
M点状态　$y_M = 0,\ v_M > 0$

$\Rightarrow \varphi_M = -\pi/2$



M **点与*O*点的相位差：**

$$\Delta\varphi=\varphi_0-\varphi_M=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$



M **点与*O*点的时间差：**

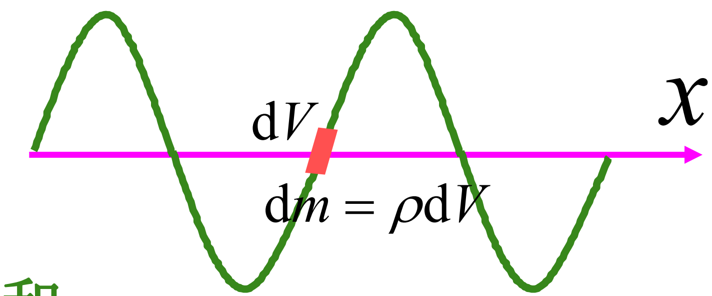
$$\Delta t=\frac{\overline{OM}}{u}=\frac{10}{1200}s=\frac{1}{120}s$$

则： $\omega=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=100\pi$ $\qquad\lambda=uT=u\dfrac{2\pi}{\omega}=24(m)$

$$y=0.10\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{1200}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$$

四、波的能量、能流

1. 波的能量



每个质元振动所具有的动能
每个质元形变所具有的势能
} 之和

以平面简谐波为例，波函数（$\varphi_0 = 0$）为：

$$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad v = -A\omega\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V\, A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

可以证明：$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}E_p$

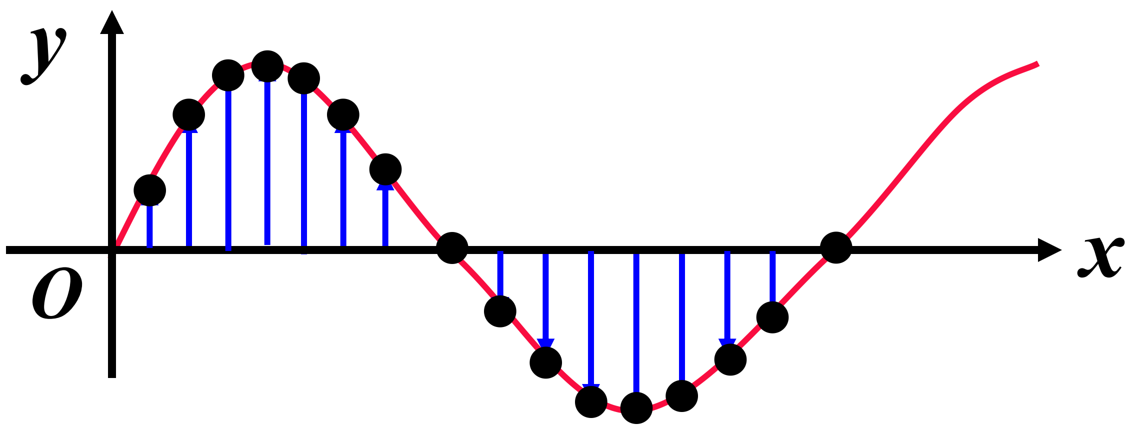
$$\boxed{\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p}$$

讨论 (1) 介质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随x, t作周期性变化，且变化是同相位的。

$$\mathrm{d}E = 2\mathrm{d}E_p = 2\mathrm{d}E_k = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

质元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.

质元的位移最大时，三者均为零.



(2) 任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量。任一体积元的机械能不守恒. 波动是能量传递的一种方式。

能量密度： 波传播所经历媒质中单位体积内的能量

$$w=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

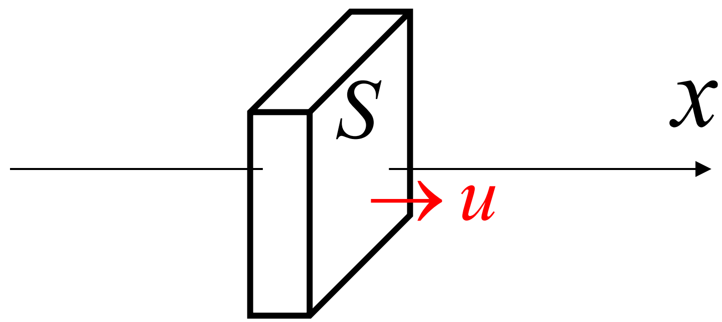
平均能量密度：

$$\bar{w}=\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2}w\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

2. 波的能流

能流（瞬时功率）

——单位时间内通过垂直于波传播方向某一面积的能量



$$P=\Delta E/\Delta t$$

$$P=wuS$$ 单位：瓦特（W）

平均能流 $\overline{P}=\overline{w}Su$

对于平面简谐波 $\overline{P}=\overline{w}Su=\frac{1}{2}\rho uA^2\omega^2S$

3. 能流密度(功率密度)——波的强度

——单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的平均能量。即通过单位面积的平均能流。（也称波的强度）

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}u$$

单位：**W m^{-2}**

对于平面简谐波 $I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho uA^2\omega^2$

- 能流密度(波的强度)为矢量，其方向与波速相同

**五、平面简谐波和球面简谐波的传播振幅

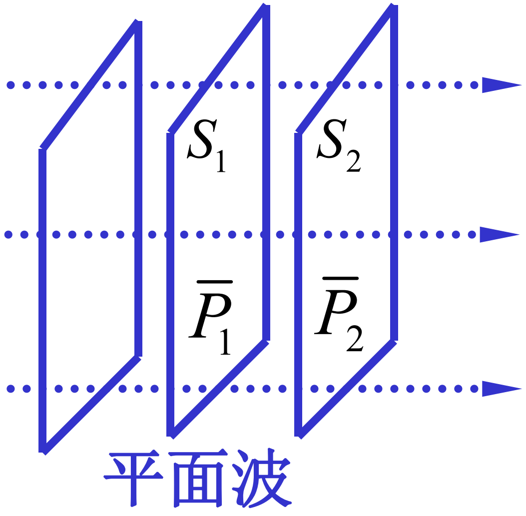
1. 平面简谐波的传播振幅

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2}\rho u A_1^2 \omega^2 S_1 \qquad \overline{P}_2 = \frac{1}{2}\rho u A_2^2 \omega^2 S_2$$

$$\because \overline{P}_1 = \overline{P}_2 \quad \therefore \ A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2$$

$$\because S_1 = S_2 \quad \therefore \ A_1 = A_2$$

——平面简谐波传播过程中振幅保持不变

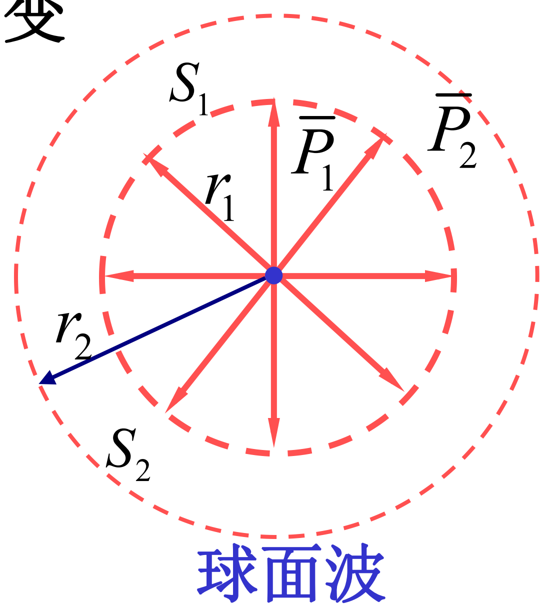


2. 球面简谐波的传播振幅

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2}\rho u A_1^2 \omega^2 S_1 \qquad \overline{P}_2 = \frac{1}{2}\rho u A_2^2 \omega^2 S_2$$

$$\because \overline{P}_1 = \overline{P}_2 \quad \therefore \ A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2$$

$$\therefore \ A_1^2 4\pi r_1^2 = A_2^2 4\pi r_2^2$$



$$\therefore\ A_1^{\ 2} r_1^{\ 2} = A_2^{\ 2} r_2^{\ 2} \qquad \therefore\ A_1 r_1 = A_2 r_2 \qquad \therefore\ \frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

——球面简谐波传播过程中振幅随距离而减小。

$$y = \frac{A_0 r_0}{r} \cos \omega \left[\left(t - \frac{r}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$