一. 填空

1. 在R^3中，$\alpha_1=(2,-3,1)^T,\alpha_2=(1,4,2)^T,\alpha_3=(5,-2,4)^T$,

则 $\dim(L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=$ __2_____. $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的 基 是 _$\alpha_1,\alpha_2(\alpha_3)$_____.

2. 在R^3中，$V_1=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2-2x_3=0\}$,

$V_2=\{(x_1,x_2,x_3)|2x_1+x_2=0,x_1+2x_3=0\}$,

$\dim(V_1+V_2)=$ __2_____.

3. 设$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}|a,b\in R\right\}$, U是(否)_yes_____$R^{2\times 2}$的子空间,

若是，$\dim U=$ _2____.

4. 设$U=\{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)|f=X^TAX$是$R$上n个变元的二次型$\}$,

U是(否)_yes_____ R上的线性空间，若是，$\dim U=$ _$\frac{n(n+1)}{2}$_____

5. 在R^3中的两组向量分别是

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ (1)

$\beta_1=(1,0,3)^T,\beta_2=(2,2,2)^T,\beta_3=(-1,1,4)^T$ (2)

γ在基(1)下的坐标为$(1,2,3)^T$.则基(1)到基(2)的过度矩阵为

_$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$__，$\gamma$在基(2)下的坐标为_$(-\frac{8}{9},\frac{20}{9},\frac{5}{9})^T$_____.

6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\ldots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$是否是$V$的一个基 _yes____，若$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$下的坐标为$(n,n-1,\ldots,2,1)^T$，则$\gamma$在基$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$下的坐标为________.

过度矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，坐标为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

7.若3×3矩阵A的特征值为1，2，−1，$B=A^3-5A^2$. 则B有特征值_$-4,-12,-6$______.

8. 令 A 是一 $n\times n$ 矩阵且$|A|\neq 0$，λ 是 A 的一特征值.则$(2A^*)^3+A^{-1}$必有特征值__$\frac{8|A|^3}{\lambda^3}+\frac{1}{\lambda}$____

9.若4×4矩阵A有特征值$1,-2,3$,和-3. 则A的行列式等于18;

$\mathrm{tr}(A)=-1$_.

10. λ－矩阵$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ 的 法 式 为

_$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$______.

11.在复数域上n阶方阵A的特征值全为 1, 且只有一个线性无关的特征向量，则 A 的 Jordan 标准形为

_$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$______.

12. 矩 阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的 法 式 为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$

____,

有理标准形为$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

二.选择题

13.设$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,在$R^{2\times 2}$中定义一个变换$\sigma: A\to BA$，则(C)

(A) σ是$R^{2\times 2}$的线性变换，但不是满射;

(B) σ是$R^{2\times 2}$的线性变换，但不是单射;

(C) σ是$R^{2\times 2}$的可逆线性变换;

(D) σ不是线性变换.

14.三维几何空间R^3的全体线性变换所成线性空间维数为(C)

(A) 3;　(B) 6;　(C) 9;　(D) 27

15. 设$\sigma\in L(V)$, W_1, W_2是的任意两个子空间，则$\sigma(W_1\cap W_2)$与$\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$的关系是(B)

(A) $\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)=\sigma(W_1\cap W_2)$;

(B) $\sigma(W_1\cap W_2)\sqsubseteq\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$;

(C) $\sigma(W_1\cap W_2)\sqsupseteq\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$;

(D)无法确定.

16. 设$\sigma\in L(V)$, $W_1,\ldots,W_n$都是σ的一维不变子空间，且$V= W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_n$，则在中存在一组基使$\sigma$在该基下的表示矩阵为(A)

(A)对角矩阵;　(B)反对称矩阵;

(A)非对角上三角矩阵;　(D)可逆矩阵.

17. 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V}), \boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{s} < n)$都是$\boldsymbol{\sigma}$的不变子空间，且$\mathrm{V} = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{W}_s$，则在中存在一组基使$\boldsymbol{\sigma}$在该基下的表示矩阵为(B)

(A)对角矩阵;　(B)准对角矩阵;

(C)反对称矩阵;　(D)可逆矩阵.

18. 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间V的一组基，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}(\mathrm{V})$,

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

则$\dim(\boldsymbol{\sigma})^{-1}(\mathbf{0})$为(C)

(A)3;　(B) 2;　(C) 1;　(D)0

19. 设矩阵$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 已知矩阵$A$相似于 B，则

$\mathrm{r}(\mathrm{A} - 2\mathrm{E})$与$\mathrm{r}(\mathrm{A} - \mathrm{E})$之和为(C)

(A) 2.　(B) 3.　(C) 4.　(D) 5

19.令λ_1, λ_2是矩阵A的两个不同特征值,它们对应的两个特征向量分别是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.则$\boldsymbol{\alpha}_1, A(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的条件是(B)

(A)$\lambda_1 \neq 0$,　(B) $\lambda_2 \neq 0$,　(C)$\lambda_1 = 0$, (D) $\lambda_2 = 0$.

20..令$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则在实数域上与$A$合同的矩阵为(D)

(A)$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

21. 设V是复数域上的线性空间，$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathrm{L}(\mathrm{V})$且$\boldsymbol{\sigma\tau} = \boldsymbol{\tau\sigma}$,则(C).

(A) $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$的特征向量完全相同; (B)$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$有有限多个公共特征向量;

(C)$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$有无限多个公共特征向量;　(D)$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$未必有公共特征向量.

22.设V是实数域上的线性空间，$\sigma,\tau\in L(V)$且$\sigma\tau=\tau\sigma$,则(D).

(A) σ,τ的特征向量完全相同; (B)σ,τ有有限多个公共特征向量;

(C)σ,τ有无限多个公共特征向量;　(D)σ,τ未必有公共特征向量.

三.计算与证明题

23. 在$F^{2\times 2}$中，求从基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$
$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵, 并分别求$\gamma=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$在上面两个基下的矩阵.

解. 令: $\varepsilon_1=E_{11},\varepsilon_2=E_{12},\varepsilon_3=E_{21},\varepsilon_4=E_{22}$, 有:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&1\\3&0&0&1\\1&1&-1&-2\end{pmatrix},$$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

代入到上一式得基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

设$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则γ在基$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$下的坐标为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, 即, γ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

类似求得γ在基$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. 在F^4中, 令$\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\alpha_2 = (3, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 0, 1, -1)^T$,

$\beta_1 = (2, 5, -6, -5)^T$, $\beta_2 = (1, 2, -7, 3)^T$,

求$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$与$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$的一个基.

解. 因$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$, 求下

列矩阵列向量的一个极大无关组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2}$是$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3})+\mathbf{L}(\boldsymbol{\beta_1,\beta_2})$的一个基，维数为4；而$\dim\big(\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3})\cap\mathbf{L}(\boldsymbol{\beta_1,\beta_2})\big)=1$，求其基底，即求：$\boldsymbol{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2}$的解，解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

得解$(3,-1,-2,1,0)^T$，故$3\boldsymbol{\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=\beta_1}=(2,5,-6,-5)^T$为$\mathbf{L}(\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3})\cap\mathbf{L}(\boldsymbol{\beta_1,\beta_2})$的基.

25. 在$\mathbf{F}^2$中，$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$是$\mathbf{F}^2$的一个线性变换.

(1)求证：当$\mathbf{F}=\mathbf{R}$时，$\mathbf{R}^2$中没有$\boldsymbol{\sigma}$的真不变子空间；

(2)当$\mathbf{F}=\mathbf{C}$时，求出$\boldsymbol{\sigma}$的所有不变子空间.

证明.设W为$\mathbf{R}^2$中非平凡$\boldsymbol{\sigma}-$子空间，$\dim W=1$. 令(a,b)为

的生成元，则$k(a,b)=\sigma(a,b)=(a,b)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，从而

$$\begin{cases}(k-1)a-2b=0\\ a+(k-2)b=0\end{cases}\qquad (*)$$

有非平凡解，

$\begin{vmatrix}k-1 & -2\\ 1 & k-2\end{vmatrix}=0$，$k^2-3\mathrm{k}+4=0.$

在实数域里，该方程无根，故不存在k，使$k(a,b)=\sigma(a,b)$，

R^2中没有σ的真不变子空间；

在复数域里，该方程有两个根：

$$k_1=\frac{3+i\sqrt{7}}{2},k_2=\frac{3-i\sqrt{7}}{2},$$

代入(*)式，求得：$(a,b)=\left(4,1+i\sqrt{7}\right)$，或$\left(4,1-i\sqrt{7}\right)$，

故C^2中有两个σ的真不变子空间：

$W_1=\mathrm{L}\left(4,1+i\sqrt{7}\right),W_2=\mathrm{L}\left(4,1-i\sqrt{7}\right).$

26.设V是4维线性空间，φ在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

验证：$U=\mathrm{L}(\varepsilon_1+2\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4)$是否为$\varphi-$子空间.

解. 直接计算知：$\varphi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2$,

$$\varphi(\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4)=\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4,$$

故$U=\mathrm{L}(\varepsilon_1+2\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3+2\varepsilon_4)$是$\varphi-$子空间.

27. 令 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$．求 $B+2I$ 的特征值与所属的特征向量.

解. 先求$\boldsymbol{A}$的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$.因$|A|=7$.A^{*}的特征值为$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\boldsymbol{\lambda_i}}$ $\boldsymbol{i=1,2,3}$,即:$\lambda_1=\lambda_2=7$,$\lambda_3=1$.

$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为:$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，属于$\lambda_3=7$的特征向量为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.则$B+2I=P^{-1}A^{*}P+2I$的特征向量分别为$P^{-1}\alpha_i$ $(\boldsymbol{i=1,2,3})$.即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$,

28. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是A的 2 重根. 求可逆矩阵P使得$\Lambda=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$是一对角矩阵$\Lambda$.

解. 直接计算$|\boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{A}|$求得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=1$,求得$\boldsymbol{x}=2,\boldsymbol{y}=-2$. 然后求解齐次线性方程组

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0\text{及}(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0,$$

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得解$(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})^{T}$,$(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})^{T}$；解$(\mathbf{6}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$得解$(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},-\mathbf{1},\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}})^{T}$.

则$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\end{pmatrix}$,$\Lambda=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & & \\ & \mathbf{2} & \\ & & \mathbf{6}\end{pmatrix}$