

2023 年秋统计学习题 07

截止日期：2023.12.18

(1). 下面的 16 个数来自计算机的正态随机数生成器¹

5.3885 3.2387 0.2195 0.3231 -3.6310 -0.3892 1.7771 1.4031
-1.5357 -1.6683 4.9765 2.0393 -0.5556 -0.5957 -0.9547 1.0123

(a) 给出 μ 的 90%, 95%, 99% 的置信区间.

(b) 给出 σ^2 的 90%, 95%, 99% 的置信区间.

(2). 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ 未知. 常数 c 应取多少时才能保证区间 $(-\infty, \bar{X} + c]$ 是 μ 的 95% 的置信区间, 即求 c 使得

$$\mathbb{P}(-\infty < \mu \leq \bar{X} + c) = 0.95.$$

(3). 设 $L(x), U(x)$ 满足

$$\mathbb{P}(L(\mathbf{X}) \leq \theta) = 1 - \alpha_1, \quad \mathbb{P}(U(\mathbf{X}) \geq \theta) = 1 - \alpha_2,$$

且对任意 \mathbf{x} ,

$$L(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x}).$$

证明

$$\mathbb{P}(L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

¹本例使用 WPS 的电子表格, 命令为 `=norminv(rand(), μ , σ))`.

(4). 独立投掷硬币 10 次, 记硬币正面朝上的概率为 p , 假设检验问题为 $H_0: p = \frac{1}{2} \leftrightarrow p \neq \frac{1}{2}$. 如果正面出现 0 次或 10 次时拒绝检验原假设.

(I). 检验的显著性水平是多少?

(II). 如果 $p = 0.1$, 检验的势是多少?

(5). 设 X_1, \dots, X_n 为来自参数为 λ 的 Poisson 分布的样本.

(I). 考虑检验问题 $H_0: \lambda = \lambda_0 \leftrightarrow H_1: \lambda = \lambda_1$ ($\lambda_0 < \lambda_1$). 求检验的似然比.

(II). 利用 Poisson 分布的可加性解释如何确定上述假设检验问题的显著性水平为 α 的拒绝域.

(6). 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体 $X \sim B(1, \theta)$. 现在有假设检验

$$H_0: \theta = 0.48 \leftrightarrow H_1: \theta = 0.52.$$

检验方法如下: 若 $\sum_{i=1}^n x_i$ 较大则拒绝 H_0 . 利用中心极限定理进行近似计算, 求样本量应该至少为多大才能使两类错误发生的概率都约为 0.01.

(7). 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 $\text{Beta}(\mu, 1)$ 的样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为来自 $\text{Beta}(\theta, 1)$ 的样本, 且假设这两个样本之间也相互独立.

(I). 求 $H_0: \theta = \mu \leftrightarrow H_1: \theta \neq \mu$ 的广义似然比检验.

(II). 证明上述检验可以基于如下统计量

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \log X_i}{\sum_{i=1}^n \log X_i + \sum_{i=1}^m \log Y_i}.$$

(8). 假设基因频率是均衡的, 基因型 AA, Aa, aa 出现的频率分比为 $(1-\theta)^2$, $2\theta(1-\theta)$, θ^2 . Plato 等发表了如下 190 个人类样本中触珠蛋白型的数据:

Hp1-1	Hp1-2	Hp2-2
10	68	112

表 1 触珠蛋白型

请验证遗传模型的拟合优度.

- (9). Bhattacharjee 等为研究在盈月期间动物是否更易咬人而收集了某医疗结构处理被动物咬伤的病例. 月亮周期被划分为 10 个阶段, 每个阶段被咬伤的人数如下表所示. 29 日是盈月. 咬伤事件是否有时间趋势?

日期	2,3,4	5,6,7	8,9,10	11,12,13	14,15
人数	155	142	146	148	110

日期	16,17,18	19,20,21	22,23,24	25,26,27	28,29,1
人数	137	150	163	201	269