### 第一章

非线性方程的数值解法





#### 非线性方程根的概念

$$f(x) = 0$$

(1.1.1)

下面先讨论单个方程,

在方程(1.1.1)中,若函数f(x)是n次多项式,则称方程(1.1.1)为 n次**多项式方程**;若f(x)是超越函数,则称方程为**超越方程**。理论上已证明,当 $n \leq 4$  时,多项式方程的根可用求根公式表示;当 $n \geq 5$  时,方程的根一般不能用解析式表示。对于方程(1.1.1),在实际应用中,一般不需要得到求根的解析表达式,只有得到满足一定精度要求的根的近似值就可以了。现在,我们讨论求方程(1.1.1)的单实根 $\alpha$ 的问题,若对多个根都有兴趣,则可根据已求得的根 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ ,利用

$$f_m(x) = \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)}$$

就能求出第m+1个根 $\alpha_{m+1}$ 。

#### 非线性方程根的概念

#### 给定非线性方程f(x)=0

- 如果有 $\alpha$ 使得 $f(\alpha)=0$ ,则称 $\alpha$ 为f(x)=0的根或f(x)的零点.
- 设有正整数m使得 $f(x)=(x-\alpha)^mg(x)$ 目 $g(\alpha)\neq 0$  , 则当 $m\geq 2$ 时,称 $\alpha$ 为f(x)=0的m重根;当m=1时,称 $\alpha$ 为f(x)=0的单根.
- = 若 $\alpha$ 为f(x)=0的m重根,则  $f(\alpha)=f'(\alpha)=...=f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha)\neq 0$
- 这里只讨论实根的求法.



对方程(1.1.1) 求根大致分为三个步骤:

- (1) **根的存在性**:方程是否有根?如果有,有几个根?对于多项式方程,n次方程有n个根。
- (2) 根的隔离: 把有根区间分成较小的子区间,每个子区间或者有一个根,或者没有根。这样可以将有根子区间内的任一点都可看成该根的一个近似值。
- (3) 根的精确化:对根的某个近似值设法逐步精确化,使其满足一定的精度要求。

## 非线性方程求根的数值方法

- 二分法
- 迭代法

单点迭代法(不动点迭代, Newton迭代法) 多点迭代法(弦截法)

• 求根方法中最简单最直观的方法是二分法。若函数f(x)在[a,b]上连续,且f(a)f(b) < 0. 为了方便讨论,不妨假设f(a) < 0, f(b) > 0. 根据**连续函数根的存在性定理**,方程(1.1.1)在(a,b)上一定有实根.称(a,b)是方程的有根区间,这里假设(a,b)内只有一个根 $\alpha$ ,如图1.1所示.

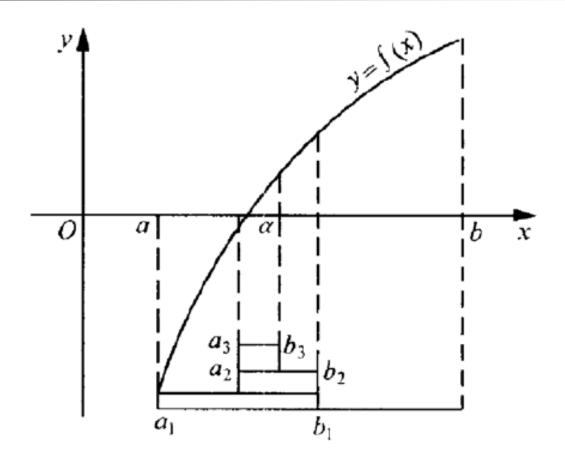


图1.1 二分法

#### 二分法的计算过程为:

(1) 若区间[a, b]的中点为 $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ,并计算中点的函数值 $f(x_0)$ ,判断:

若 $f(a)f(x_0) < 0$ ,则有根区间为 $[a,x_0]$ ,取 $a_1 = a,b_1 = x_0$ ,即新的有根区间为 $[a_1,b_1]$ ;

若 $f(a)f(x_0) = 0$ ,则 $x_0$ 即为所求的根 $\alpha$ ;

若 $f(a)f(x_0) > 0$ ,则有根区间为 $[x_0,b]$ ,取 $a_1 = x_0,b_1 = b$ ,即新的有根区间为 $[a_1,b_1]$ .

(2) 若区间[ $a_1, b_1$ ]的中点为 $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ,并计算中点的函数值 $f(x_1)$ ,判断:

若 $f(a)f(x_1) < 0$ ,则有根区间为 $[a_1,x_1]$ ,取 $a_2 = a_1,b_2 = x_1$ ,即新的有根区间为 $[a_2,b_2]$ ;

若 $f(a_1)f(x_1) = 0$ ,则 $x_1$ 即为所求的根 $\alpha$ ;

若 $f(a_1)f(x_1) > 0$ ,则有根区间为 $[x_1,b_1]$ ,取 $a_2 = x_1,b_2 = b_1$ ,即新的有根区间为 $[a_2,b_2]$ .

### \_二分法

此过程可以一直进行下去,则可得到一系列有根区间

$$[a,b]\supset [a_1,b_1]\supset [a_2,b_2]\supset \cdots\supset [a_n,b_n]\supset \cdots.$$

显然, $[a_n,b_n]$ 的区间长度为

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b - a}{2^n},$$

如图1.1所示. 这时,我们取最后一个区间的中点 $x_n$ 作为方程(1.1.1)的根的近似值

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad x \in [a_n, b_n], (1.1.2)$$

其误差估计式为

$$|a - x_n| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}, (1.1.3)$$

对给定的小数 $\epsilon > 0$ ,要使

只需令

 $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon,$ 

 $|a-x_n|<\epsilon$ ,

即

 $2^{n+1} > \frac{b-a}{\epsilon},$ 

所以

$$n = \left[\frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2}\right], (1.1.4)$$

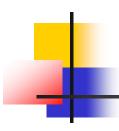
其中,[]表示取整数.

利用式(1.1.4),对给定的精度,可以预先确定出二分的次数.

二分法的优点是计算过程简单,收敛性可保证,对函数的性质要求低,只要求连续就可以了;它的缺点是计算收敛的速度慢,不能求偶数重根,也不能求复根和虚根,特别是函数值 $f(a_k)$ ,  $f(b_k)(k=0,1,2,\cdots)$ 每次均已计算出来,但没有利用上,只利用了它们的符号,显然是一种浪费.



#### 迭代法的一般理论



迭代法是一种逐次逼近的方法,它的基本思想是通过构造一个递推关系式(迭代格式),计算出根的近似值序列,并要求该序列收敛于方程的根.

# 迭代法

在实际应用中,求方程(1.1.1)的根的主要方法是**迭代法**,它的基本思想是通过构造一个递推关系式,即迭代格式,构造一个根的近似序列,并希望该序列能收敛于方程(1.1.1)的根。

一般来讲,我们总可以把方程(1.1.1)化成等价方程

$$x = \phi(x), \tag{1.2.1}$$

然后选定一个根的初始近似值 $x_0$ ,利用递推关系式

$$x_{i+1} = \phi(x_i), i = 0,1,2...,$$
 (1.2.2)

产生序列 $\{x_i\}$ . 如果该序列收敛于 $\alpha$ ,则 $\alpha$ 一定满足式(1.2.1),故 $\alpha$ 也是方程(1.1.1)的根。

由此可见**,迭代法所涉及的基本问题是迭代格式的构造**,通常迭代 法可分为单点迭代法和多点迭代法两种形式。

#### 迭代法

为产生迭代序列 $\{x_i\}$ ,仅需一个初始值 $x_0$ 的迭代法称为**单点迭代** 法,其一般形式为 $x_{i+1} = \phi_i(x_i)$ ,其中 $\phi_i$ 称为迭代函数。

多点迭代法的一般形式为

$$x_{i+1} = \phi_i(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n+1}), i = 0, 1, 2, \dots,$$
 (1.2.3)

其中, $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n+1}$ 为初始近似值。

若迭代函数 $\phi_i$ 随迭代次数i变化,则称迭代为**非定常迭代**,若 $\phi_i$ 不随迭代次数i变化,即 $\phi_i = \phi$ ,则称迭代为**定常迭代**。

然而我们所构造的迭代格式是否有意义,在于**迭代是否收敛**,对于一个收敛的迭代格式,其使用价值将依赖于迭代过程中的**收敛速 度和计算效率**。



#### 对于迭代法需要考虑一下几个主要问题

- 收敛性
- 收敛速度
- 计算效率

#### 迭代法的全局收敛性

■ 定义1 设 $\alpha$ 为f(x)=0的根,如果 $\forall x_0 \in [a, b]$ ,由迭代法产生的序列都收敛于根 $\alpha$ ,则称该迭代法是全局收敛的.

#### 迭代法的局部收敛性

■ 定义2 设方程 $x=\phi(x)$ 有根 $\alpha$ ,如果存在  $\alpha$ 的某个邻域  $\Delta$ :  $|x-\alpha| \le \delta$ ,对任意初值  $x_0 \in \Delta$ ,迭代过程所产生的序列均收敛于根 $\alpha$ ,则称该迭代法是局部收敛的.

#### 迭代过程的收敛速度

■ 定义3 设迭代过程 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  收敛于方程 $x = \phi(x)$ 的根 $\alpha$  , 记  $e_k = \alpha - x_k$  , 若  $\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0$ 

则称迭代过程是p阶收敛的.

特别地, 当p=1时, 称为线性收敛;

当p>1时,称为超线性收敛,

当p=2时,称为平方收敛.

p越大, 收敛越快.

# 效率指数

■ 定义3 称

$$EI = p^{\frac{1}{\theta}}$$

为效率指数. 其中p表示迭代的收敛阶,  $\theta$ 表示每步迭代的计算量.

EI越大, 计算效率越高.

#### 单点迭代法

■ 将方程f(x)=0改写成等价形式

$$x = \phi(x) \tag{1}$$

建立迭代公式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \tag{2}$$

在根的附近任取一点 $x_0$ , 可得一序列  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ . 若  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  收敛,即  $\lim_{k\to\infty}x_k=\alpha$ ,且 $\phi(x)$ 连续,则对(2)两端取极限有 $\alpha=\phi(\alpha)$ ,从而 $\alpha$ 为方程(1)的根,也称为 $\phi(x)$ 的不动点,这种求根算法称为不动点迭代法(Picard迭代法).  $\phi(x)$  称为迭代函数.

### 不动点迭代法

例如,求方程  $9x^2$  -

$$9x^2 - \sin x - 1 = 0$$

在[0,1]内的根,此时可将方程转化为等价方程

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{\sin x + 1}$$

于是,迭代公式为  $x_{i+1} = \frac{1}{3} \sqrt{\sin x_i + 1}, i = 0,1,2,...,$ 

其中,迭代函数  $\varphi(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\sin x + 1}$ .

在[0,1]内任取一个初始值  $x_0$ ,例如取 $x_0 = 0.4$ ,则迭代可以收敛于根  $\alpha = 0.391846907$ .

然而原方程还可以写成,  $x = \arcsin(9x^2 - 1)$ .

于是,迭代公式为  $x_{i+1} = \arcsin(9x_i^2 - 1), 0 = 1, 2, ...,$ 

对初始值  $x_0 = 0.4 \in [0,1]$ ,迭代却是发散的。因此,可以看出,**迭代公式 是否收敛,与迭代函数** $\varphi$  (x)**的形式有关**。什么情况下迭代收敛呢?

#### 不动点迭代法的整体收敛性

- 定理1.1 设 $\phi(x)$ 在[a,b]上具有一阶导数,且
- (1)当 $x \in [a, b]$ 时, $\phi(x) \in [a, b]$ ;
- $(1) \forall x \in [a, b]$ ,有 $|\phi'(x)| \leq L < 1$

则对任意初值 $x_0 \in [a, b]$ ,迭代过程  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 收敛于  $x = \phi(x)$ 在[a, b]上的惟一根.

#### 不动点迭代法的整体收敛性

- 定理1.2 设 *ϕ*(*x*)满足
  - (1)当 $x \in [a, b]$ 时, $\phi(x) \in [a, b]$ ;
  - $(2) \forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ,有

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$$
, L<1

则对任意初值 $x_0 \in [a, b]$ ,迭代过程  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 收敛于  $x = \phi(x)$ 在[a, b]上的惟一根,且有误差估计式

$$\left|\alpha - x_k\right| \le \frac{L}{1 - L} \left|x_k - x_{k-1}\right|$$

$$\left| \alpha - x_k \right| \le \frac{L^k}{1 - L} \left| x_1 - x_0 \right|$$

#### ■ 证 根的存在性

由(2)知 $\phi(x)$ 连续. 令 $f(x)=x-\phi(x)$ ,  $f(a)\leq 0$ ,  $f(b)\geq 0$ , 从而 f(x)=0在[a, b] 上有根 $\alpha$ , 即 $x=\phi(x)$ 在[a, b] 上有根 $\alpha$ . 根的唯一性

设 $x=\phi(x)$ 在[a,b] 上有两根 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1\neq\alpha_2$ ,  $|\alpha_1-\alpha_2|=|\phi(\alpha_1)-\phi(\alpha_2)|\leq L |\alpha_1-\alpha_2| = L<1$ 矛盾.故 $\alpha_1=\alpha_2$  序列的收敛性

 $|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \le L|x_k - \alpha| , |x_{k+1} - \alpha| \le L^{k+1}|x_0 - \alpha|$ 由0 $\le L < 1$ 有

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

#### 误差估计

$$\begin{split} |x_{k+1} - x_k| &= |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leq L |x_k - x_{k-1}| \\ |x_{k+2} - x_{k+1}| &= |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \leq L^2 |x_k - x_{k-1}| \\ & \cdots \\ |x_{k+p} - x_{k+p-1}| \leq L^p |x_k - x_{k-1}| \\ |x_{k+p} - x_k| &\leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq (L^p + L^{p-1} + \cdots + L) |x_k - x_{k-1}| \\ &= \frac{L - L^{p+1}}{1 - L} |x_k - x_{k-1}| \\ &= \frac{L - L^{p+1}}{1 - L} |x_k - x_{k-1}| \\ &\Rightarrow p \to \infty, \quad \maltese \qquad |\alpha - x_k| \leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}| \\ &|\alpha - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0| \end{split}$$

#### 例 求方程 $xe^x - 1 = 0$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \ln 2\right]$ 中的根。

解: 先将方程改写为  $x = e^{-x}$  ,构造迭代格式  $x_{i+1} = e^{-x_i}$  。 这里,迭代函数  $\varphi(x) = e^{-x}$  。

因为
$$\varphi'(x) = -e^{-x} < 0$$
,所以  $\varphi(x)$ 是单调下降函数。于是当  $x \in \left[\frac{1}{2}, \ln 2\right]$ 时有 
$$\frac{1}{2} = \varphi(\ln 2) \le \varphi(x) \le \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \ln 2,$$

即

$$\varphi(x) \in \left[\frac{1}{2}, \ln 2\right], \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, \ln 2\right].$$

而

$$|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| \le e^{-\frac{1}{2}} < 1,$$

所以,根据**定理1.1,**方程  $xe^{x}-1=0$  在  $\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$  上存在唯一的根,且迭代  $x_{i+1}=e^{-x_i}$  是收敛的。

取初值  $x_0 = 0.5$ ,用迭代公式  $x_{i+1} = e^{-x_i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \cdots$ ,计算,结果为  $x_0 = 0.50000$ ,  $x_1 = 0.606531$ ,,  $x_2 = 0.545239$ ,…,  $x_{23} = 0.567143$ .

#### 不动点迭代法的局部收敛性

- 定理1.3 若 $\phi(x)$ 在方程 $x=\phi(x)$ 的根 $\alpha$ 的邻域内有一阶连续的导数,且 $|\phi'(\alpha)| < 1$ ,则迭代过程  $x_{k+1}=\phi(x_k)$ 具有局部收敛性.
- 证 由连续函数性质,存在 $\alpha$ 的充分小邻域  $\Delta$ :  $|x-\alpha| \le \delta$ , 使当 $x \in \Delta$ 时,有  $|\phi'(x)| \le L < 1$

#### 由微分中值定理有

 $|\phi(x)-\alpha|=|\phi(x)-\phi(\alpha)|=|\phi'(\xi)||x-\alpha|<|x-\alpha|\leq\delta$ 故 $\phi(x)\in\Delta$ ,由定理1.1知对任意初值 $x_0\in\Delta$ 均收敛.

#### 不动点迭代法的局部收敛阶

■ 定理1.4 若 $\phi(x)$ 在方程 $x = \phi(x)$ 的根 $\alpha$ 的邻域 内有充分阶连续的导数,则迭代过程

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

$$\phi^{(j)}(\alpha) = 0, j = 1, 2, \dots, p - 1$$
$$\phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

#### • 证 充分性

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \phi(x_k) \\ &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_k - \alpha) + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(\alpha)(x_k - \alpha)^{p-1} \\ &+ \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi)(x_k - \alpha)^p \\ x_{k+1} - \alpha &= \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi)(x_k - \alpha)^p \end{aligned}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \frac{1}{p!} \left| \varphi^{(p)}(\alpha) \right| \neq 0$$



■ 必要性(反证法) 设迭代法 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 是p 阶局部收敛的,如果结论不成立,那么必有最小正整数 $p_0 \neq p$ ,使得

$$\phi^{(j)}(\alpha) = 0, j = 1, 2, \dots, p_0 - 1$$
  
 $\phi^{(p_0)}(\alpha) \neq 0$ 

由充分性的证明知此迭代法是 $p_0$ 阶局部收敛的, 矛盾. 必要性得证.

# 例 能不能用迭代法求解方程*x*=4-2<sup>x</sup>,如果不能时,试将方程改写成能用迭代法求解的形式.

■ 方程为x-4+ $2^x$ =0.设f(x)=x-4+ $2^x$ ,则f(1)<0,f(2)>0,f'(x)=1+ $2^x$  ln2>0,故方程f(x)=0仅在区间(1,2)内有唯一根.题中  $\phi(x)$ =4- $2^x$ , 当x ∈ [1,2]时, $|\phi'(x)|$ = $|-2^x$ ln2| $\geq 2$ ln2>1,由定理1.1不能用  $x_{k+1}$ =4- $2^{x_k}$ 来迭代求根.

把原方程改写为 $x=\ln(4-x)/\ln 2$ ,此时 $\phi(x)=\ln(4-x)/\ln 2$ ,则有 1°当 $x \in [1,2]$ 时, $\phi(x) \in [1,\ln 3/\ln 2] \subset [1,2]$ 

2° ∀x∈[1,2], 有  $|\phi'(x)| = \left| \frac{-1}{4-x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \right| \le \frac{1}{4-2} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2} < 1$ 

由定理1.1知可用迭代公式 $x_{k+1} = \ln(4-x_k)/\ln 2$ 来求解(1,2)区间内的唯一根.

# 例 设 $F(x)=x+c(x^2-3)$ ,应如何选取c才能使迭代 $x_{k+1}=F(x_k)$ 具有局部收敛性?

■ 方程x=F(x)的根为  $\alpha_1 = -\sqrt{3}$ ,  $\alpha_2 = \sqrt{3}$ , 函数F(x)在根附 近具有连续一阶导数,又F'(x)=1+2cx,解 $|F'(-\sqrt{3})|=|1-2\sqrt{3}c|<1$  得 $0<c<\frac{1}{\sqrt{3}}$  解 $|F'(\sqrt{3})|=|1+2\sqrt{3}c|<1$  得 $-\frac{1}{\sqrt{3}}<c<0$  从而使迭代 $x_{k+1}=F(x_k)$  具有局部收敛性,则 $|c|<\frac{1}{\sqrt{3}}$  ,且 $c\neq 0$ . 令  $F'(\sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}c = 0$ , 得  $c = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ . 这时  $F''(x) = 2c \neq 0$ 故当c取 $\pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时,为平方收敛,这时迭代收敛较快.



#### Newton迭代法

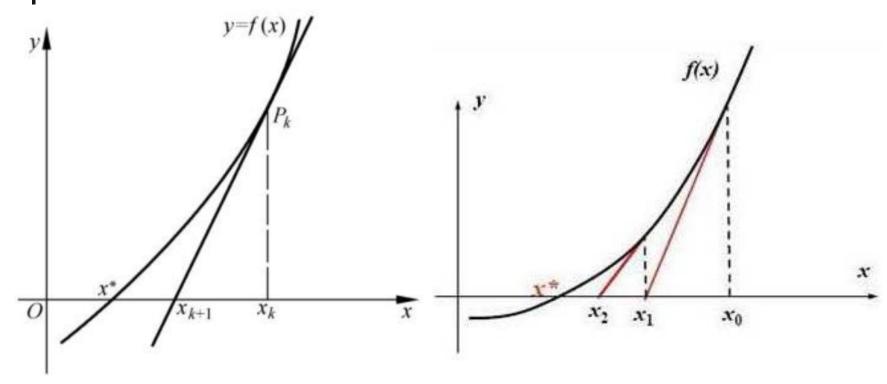
# Newton迭代法

• 设有方程f(x)=0,在f(x)=0的根 $\alpha$ 附近任取一点 $x_0$ 作为初始近似根,由迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
  $(k = 0, 1, 2, \dots)$ 

逐次逼近方程f(x)=0的根 $\alpha$ ,这种求根算法称为 Newton法(切线法),此公式称为 Newton迭代公式.

### Newton迭代法



Newton迭代法是局部收敛的方法。它是否收敛,与初值的选择有关。当初值 $x_0$ 的选取充分接近根 $\alpha$ 时,一般可保证迭代收敛。

#### Newton迭代法的局部收敛性及收敛阶

Newton法的迭代函数是  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  从而

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由此知若 $\alpha$ 是f(x)=0的一个单根,  $f(\alpha)$ =0,  $f'(\alpha)\neq0$ ,  $\varphi'(\alpha)$ =0,  $\varphi''(\alpha)$ = $f''(\alpha)/f'(\alpha)$ , 则在根 $\alpha$ 附近Newton 法是局部收敛的, 并且是二阶收敛的,即 p=2.

$$EI = 2^{\frac{1}{1+\theta_1}}$$

但如果 $\alpha$ 是f(x)=0的重根,则Newton法仅是局部线性收敛的,即 p=1.

#### 事实上,若 $\alpha$ 是f(x)=0的重根,设其重数为r,

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \dots + \frac{1}{(r - 1)!} f^{(r - 1)}(\alpha)(x - \alpha)^{r - 1} + \frac{1}{r!} f^{(r)}(\xi_1)(x - \alpha)^r}{f'(\alpha) + f''(\alpha)(x - \alpha) + \dots + \frac{1}{(r - 2)!} f^{(r - 1)}(\alpha)(x - \alpha)^{r - 2} + \frac{1}{(r - 1)!} f^{(r)}(\xi_2)(x - \alpha)^{r - 1}}$$

$$= x - \frac{1}{r} \frac{f^{(r)}(\xi_1)}{f^{(r)}(\xi_2)}(x - \alpha)$$

$$\varphi(x) - \varphi(\alpha) = (x - \alpha) - \frac{1}{r} \frac{f^{(r)}(\xi_1)}{f^{(r)}(\xi_2)}(x - \alpha)$$

$$\varphi'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{x - \alpha} = 1 - \frac{1}{r} \neq 0, \quad |\varphi'(\alpha)| < 1$$

例 设a为正实数,试建立求  $\frac{1}{a}$  的Newton迭代公式,要求在迭代函数中不用除法运算,并要求当取初值 $x_0$ 满足  $0 < x_0 < \frac{2}{a}$  时,此算法是收敛的.

■ 解 考虑方程  $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$  则  $\frac{1}{a}$ 为此方程的根,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,用Newton法求此方程根的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k (2 - ax_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

迭代函数不含除法运算.

$$1 - ax_{k+1} = 1 - ax_k (2 - ax_k) = (1 - ax_k)^2 (k = 0, 1, 2, \dots)$$

递推可得

$$1 - ax_k = (1 - ax_0)^{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

解得 
$$x_k = \frac{1}{a}[1-(1-ax_0)^{2^k}]$$
  $(k=0,1,2,\cdots)$ 

当 
$$0 < x_0 < \frac{2}{a}$$
 时, $|1 - ax_0| < 1$  ,从而  $\lim_{k \to \infty} (1 - ax_0)^{2^k} = 0$ 

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \frac{1}{a}$$

此算法收敛.

## Newton迭代法的全局收敛性

- 定理1.5 设f(x)在有根区间[a,b]上二阶导数存在, 且满足
- (1) f(a)f(b) < 0; (保证根的存在)
- $(2) f'(x) \neq 0, x \in [a, b];$  (单调, 根唯一)
- (3) f''(x)不变号,  $x \in [a, b]$ ; (凹向不变)
- (4) 初值 $x_0 \in [a, b]$ 且使 $f''(x_0) f(x_0) > 0$ ;

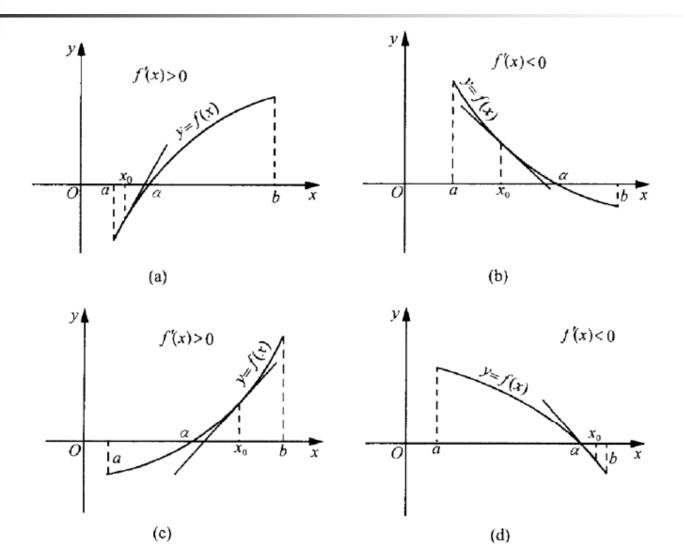
(保证
$$x \in [a,b]$$
时,  $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in [a,b]$ )

则 Newton 迭代法收敛于f(x)=0在[a, b]内的唯一根.

# 5

## Newton迭代法的全局收敛性

定理1.5几何解释

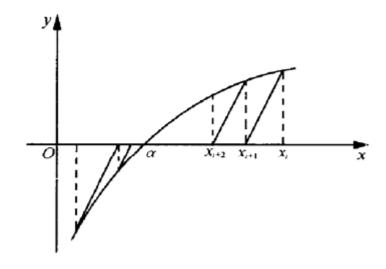


## 简化 Newton法

#### ■ 简化 Newton法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{C}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

一般地,取 $C = f'(x_0)$ . 若 $|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{c}\right| < 1$ , 是一阶收敛的.



## Newton下山法

#### Newton下山法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
 (0 < \lambda < 1),  $k = 0,1,2,\dots$ 

其中λ为下山因子, λ的选取应满足条件:

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|, \quad k = 0,1,2,\dots$$

保证所得序列是收敛的.

$$\phi(x) = x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}$$

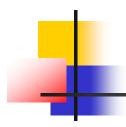
$$\phi'(x) = 1 - \lambda \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f'(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow \phi'(\alpha) = 1 - \lambda.$$

当λ≠1时,是一阶收敛的。

在实际中,可选择 $\lambda = \lambda_i$ ,  $0 < \lambda_i < 1$ ,每次迭代,选择不同的下山因子---单点非定常迭代

- 例如,用牛顿法求解方程  $x^3 x 1 = 0$ 在 x = 1.5 附近的一个根  $x^*$ 。
- 设取迭代值  $x_0 = 1.5$ ,用牛顿法公式  $x_{k+1} = x_k \frac{x_k^3 x_k 1}{3x_k^2 1}$  计算得:  $x_1 = 1.34783$ ,  $x_2 = 1.32520$ ,  $x_3 = 1.32472$ 。 迭代3次得到的结果  $x_3$ 有6位有效数字。

但是,如果改用  $x_0 = 0.6$ 作为迭代初值,则依牛顿法公式迭代一次得:  $x_1 = 17.9$ 。这个结果反而比  $x_0 = 0.6$  更偏离了所求的根 $x^* = 1.32472$ 



若用牛顿下山法解方程,当  $x_0 = 0.6$  时由牛顿法公式求得  $x_1 = 17.9$ ,它不满足条件 |  $f(x_{k+1}) | < | f(x_k) |$  ,通过 $\lambda$  逐次取半进行试算,当 $\lambda = \frac{1}{32}$ 时可求得 $x_1 = 1.140625$  此时  $f(x_1) = -0.656643$ ,而  $f(x_0) = -1.384$ ,显然 |  $f(x_1) | < | f(x_0) |$  由  $x_1$  计算  $x_2, x_3, \cdots$  时 $\lambda = 1$ ,均能使条件成立。计算结果如下:  $x_2 = 1.3618$  】  $f(x_2) = 0.1866$   $x_3 = 1.32628$   $f(x_3) = 0.00667$ 

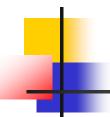
 $x_4$  即为 $x^*$ 的近似

一般情况下只要能满足条件成立,则可得到 $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0$ 从而使 $x_k$  收敛。

# 多点迭代法

#### ■ 建立迭代公式

$$x_{k+1} = \phi(x_{k-n+1}, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k)$$
 (3)



# 弦截法

## 弦截法

■ 在方程 f(x) = 0 的根  $\alpha$  附近任取两初始近似根  $x_0, x_1$  , 由迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$
  $(k = 0, 1, \dots)$  (1.4.1)

或改写为

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} x_k$$
 (1.4.2)

逐次逼近f(x) = 0的根 $\alpha$ ,这种求根算法称为弦截法(割线法).

## 弦截法 (割线法)

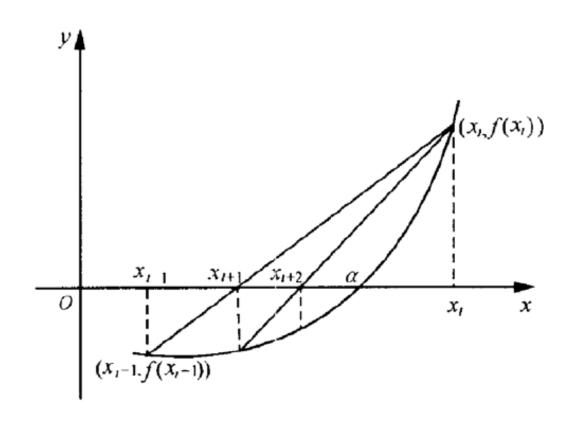


图 1.6 割线法

## 弦截法局部收敛性和收敛速度

■ 定理1.6 设f(x),f'(x)和f''(x)在包含方程f(x)=0的根 $\alpha$ 的某个区间上连续,并假设 $f'(\alpha)$ ≠0。则如果初始值 $x_0$ 和 $x_1$ 的选取充分接近根 $\alpha$ ,那么由分割线公式(1.4.1)或式(1.4.2)产生的迭代序列收敛于根 $\alpha$ ,收敛阶是

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

且有

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p} = \left| \frac{f''(a)}{2f'(a)} \right|^{p-1}$$
 (1.4.3)

## 割线法和Newton法的比较

■ 现在考虑割线法与Newton法的比较。割线法的收敛阶为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,且每次迭代仅计算一次f(x),其效率指数为

$$EI_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

而Newton迭代法的效率为

$$EI_2 = 2^{\frac{1}{1+\theta_1}}$$

由直接计算容易知道,若 $\theta_1 < 0.44$ ,则Newton迭代法的计算效率大于割线法,即

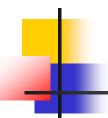
$$EI_2 > EI_1$$

## 割线法和Newton法的比较

■ 若  $\theta$  > 0.44,则Newton迭代法的计算效率小于割线法,即

$$EI_2 < EI_1$$

因此,对给定的f(x),若要判断是否用割线法或Newton迭代法去解方程f(x)=0,则非常合理的根据是估计 $\theta_1$ ,若 $\theta_1>0.44$ 就用割线法,否则使用Newton读代法。



## 重根情形的迭代法

### 已知根的重数r

#### 将Newton法修正为

vton;去修止力 
$$x_{k+1} = x_k - r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

它是求r重根 $\alpha$ 的二阶收敛格式.

$$e_{k+1} = \alpha - x_{k+1} = \alpha - x_k + r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{(\alpha - x_k)f'(x_k) + rf(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$记G(x) = (\alpha - x)f'(x) + rf(x)$$

$$G^{(j)}(x) = rf^{(j)}(x) + (\alpha - x)f^{(j+1)}(x) - jf^{(j)}(x)$$

由
$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{r-1}(\alpha) = 0$$
得
$$G^{(j)}(\alpha) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$G^{(r+1)}(\alpha) = -f^{(r+1)}(\alpha).$$

#### 在 $\alpha$ 处将 $G(x_k)$ , $f'(x_k)$ Taylor展开

$$e_{k+1} = \frac{\frac{1}{(r+1)!} G^{(r+1)}(\xi_1) e_k^{r+1}}{\frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(\xi_2) e_k^{r-1}} = \frac{G^{(r+1)}(\xi_1)}{r(r+1) f^{(r)}(\xi_2)} e_k^2$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = \frac{1}{r(r+1)} \left| \frac{G^{(r+1)}(\alpha)}{f^{(r)}(\alpha)} \right| \neq 0$$

从而它是具有二阶局部收敛的格式.

# 根的重数未知

#### 将Newton法修正为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$
  $k = 0,1,2,\cdots$ 

其中
$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$
.

u(x) = 0的单根就是f(x) = 0的r重根,故它是求 f(x) = 0重根的二阶局部收敛格式.

事实上,设 $\alpha$ 是f(x) = 0的r重根

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - \alpha)^r g(x)}{r(x - \alpha)^{r-1} g(x) + (x - \alpha)^r g'(x)}$$
$$= \frac{g(x)}{rg(x) + (x - \alpha)g'(x)}(x - \alpha)$$
$$x) = 0$$
的单根

 $\alpha$ 为u(x)=0的单根.

#### 例 方程 $x^4$ - $4x^2$ +4=0的根 $\alpha = \sqrt{2}$ 是二重根,用下列方法求根

- (1) Newton迭代法(1.3.11);
- (2)修正的Newton迭代法 (1.5.2);
- (3)修正的Newton迭代法 (1.5.4).

#### 解 三种方法的迭代公式:

Newton迭代法 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{4x_k}$$

修正的Newton迭代法 (1.5.2) 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

修正的Newton迭代法 (1.5.4) 
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k(x_k^2 - 2)}{x_k^2 + 2}$$

#### 取初值 $x_0=1.5$ ,计算结果如表:

DAILS IN THE STATE OF THE PARTY				
k	$x_k$	方法(1)	方法(2)	方法(3)
1	$x_1$	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	$x_2$	1.436607143	1.414215686	1.414211438
3	$x_3$	1.425497619	1.414213562	1.414213562

计算三步方法(2)和方法(3)均达到10位有效数字,而牛顿法只有线性收敛,要达到同样精度,需迭代30次.