主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2022 年春学期

数学分析 B 试题（A）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密 封 线

本题得分 ＿＿＿

一、（8 分）(1) 设 $x^0\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，写出 x^0 的去心邻域 $U_0(x^0,\delta)$ 的定义 (2) 写出二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ 的定义 (3) 用定义证明

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{xy-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(1) $U_0(x^0,\delta)=\{x \mid 0<\|x-x^0\|<\delta\}$ 　2

(2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\quad \forall(x,y)\in U_0((a,b),\delta)$

(或 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$)，　2

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

(3) $\left|\dfrac{xy-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right| = \left|\right.(x-1)(y-2)+2$

$=\dfrac{|2(xy-1)-(x+1)|}{|2(x+1)|} = \dfrac{|2((x-1)+1)((y-2)+2)-2-((x-1)+2)|}{|2(x-1)+4|}$

$=\dfrac{|2(x-1)(y-2)+4(x-1)+2(y-2)-(x-1)|}{|2(x-1)+4|}$

$=\dfrac{|2(x-1)(y-2)+3(x-1)+2(y-2)|}{2|(x-1)+2|}$

$\overset{|x-1|<1}{<}\dfrac{2|y-2|+3|x-1|+2|y-2|}{2(2-|x-1|)}\overset{|x-1|<1}{<}\dfrac{7\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}{2(2-1)}$

$<\dfrac{7}{2}\varepsilon$

$<\varepsilon$

取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\frac{2}{7}\varepsilon\}$ 　4

本题得分 ______

二、(8 分). 设二元函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}.$$

(1) 计算 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的 Hessi 矩阵. (2) 求 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式.

方法一: 计算 $f'_x,\ f'_y$, $f''_{xx},\ f''_{xy},\ f''_{yy}$

方法二:

(1) $$f(x,y)=\frac{((x-1)+1)((y-1)+1)}{(x-1)+(y-1)+2}=\left[1+(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)\right]\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\frac{(x-1)+(y-1)}{2}}\right\}$$

$$\{\ \}=1-\frac{(x-1)+(y-1)}{2}+\left(\frac{(x-1)+(y-1)}{2}\right)^2-\cdots$$

因此 $f(x,y)$ 的二阶 Taylor 多项式为

$$P_2(x,y)=1+\left\{(x-1)+(y-1)-\frac{(x-1)+(y-1)}{2}\right\}+\left(\frac{(x-1)+(y-1)}{2}\right)^2+\left((x-1)+(y-1)\right)\left(-\frac{(x-1)+(y-1)}{2}\right)+(x-1)(y-1)$$

$$=1+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\underbrace{\underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)\left\{(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+(y-1)^2\right\}+(x-1)(y-1)}_{-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)(y-1)-\frac{1}{4}(y-1)^2}}_{\frac{1}{2}[x-1,\ y-1]\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix}}$$

$$\therefore\ P_2(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)+\frac{1}{2}[x-1,\ y-1]\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-1\\ y-1\end{bmatrix}$$ 4

故 $$Hf(1,1)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ 4

本题得分 ______

三、(8 分). 求椭圆柱体 $x^2+2y^2\le 4$ 位于平面 $z=0$ 及椭圆抛物面 $x^2+2y^2=16-z$ 之间的立体的体积.

$$\iint\limits_{x^2+2y^2\le 4}\left[16-(x^2+2y^2)\right]dxdy$$

4

方法一. $= \int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}dy\,[16-x^2-2y^2]$

$=28\sqrt{2}\pi$

4分

方法二 $\xlongequal[y=\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta]{x=r\cos\theta}\iint\limits_{\substack{0\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi}}[16-r^2]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta$

6

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & r(-\sin\theta)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}r$$

$\therefore \int_0^2 dr\int_0^{2\pi}d\theta\,[16-r^2]\frac{1}{\sqrt{2}}r$

$=2\pi\int_0^2\left[\frac{16}{\sqrt{2}}r-\frac{1}{\sqrt{2}}r^3\right]dr$

$=\sqrt{2}\pi\left[\frac{16}{2}r^2\Big|_0^2-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2\right]$

$=\sqrt{2}\pi\left[\frac{16}{2}\times 2^2-\frac{1}{4}\times 2^4\right]$

$=28\sqrt{2}\pi$ 2

本题得分 ______

四、(8 分). 已知 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的连续可导函数. (1) 设 Γ 是函数 $y = f(x)$ 的图像, 它是 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线, 将第一型曲线积分 $\int_\Gamma \rho(x, y)\mathrm{d}s$ 化成关于变量 x 的定积分. (2) 设 Γ 按照以 $A(1, f(1))$ 为起点, 以 $B(0, f(0))$ 为终点定向成为定向曲线 $\vec{\Gamma}$, 将第二型曲线积分 $\int_{\vec{\Gamma}} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)dy$ 化为关于变量 x 的定积分.

(1) $\int_0^1 \rho(x, f(x)) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$ 4

(2) $\int_1^0 [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)]\, dx$

$= -\int_0^1 [P + Q f'(x)]\, dx$ 4

(积分限，符号错误扣2分)

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封 线

本题得分 ______

五、（8 分）. 设 $\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 是三维空间中的稳定流速场. 二元函数

$$x=h(y,z),\quad (y,z)\in D_{yz}$$

具有连续的偏导数，其图像是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ. 这里 D_{yz} 是 y - z 坐标平面上的有界闭区域. 速度场 $\vec{v}(x,y,z)$ 产生的从 x-轴正方向那一侧流向 x-轴负方向那一侧流过曲面 Σ 的流体的体积记为 W. 推导出用 D_{yz} 上的二重积分计算 W 的公式.

$$\vec{r}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h(y,z) \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad (y,z)\in D_{y\text{-}z}$$

4 $$W=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{D_{y\text{-}z}}\vec{v}\cdot(\vec{r}\,'_y\times\vec{r}\,'_z)\,dydz$$

± 取决于 $\vec{r}\,'_y\times\vec{r}\,'_z$ 的 ~~第~~ x 一方向上的分量的符号

$$\vec{r}\,'_y\times\vec{r}\,'_z=\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h'_y & 1 & 0 \\ h'_z & 0 & 1 \end{bmatrix}=(1,\ -h'_y,\ -h'_z)$$

因此，选"−"号

$$W=-\iint_{D_{yz}}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ h'_y & 1 & 0 \\ h'_z & 0 & 1 \end{vmatrix}dydz$$

$$\left(=-\iint_{D_{yz}}(P-Qh'_y-Rh'_z)\,dydz\right)$$

$$=\iint_{D_{yz}}(-P+Qh'_y+Rh'_z)\,dydz$$

4

本题得分 ______

七、(8 分). (1) 什么是"函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上**不**一致收敛于 $f(x)$"? (2) 证明 $\{x^n\}$ 在区间 $[-0.8, 0.5]$ 上一致收敛. (3) 证明 $\{x^n\}$ 在区间 $(-1, 0.2]$ 上不一致收敛.

(1) $\exists \varepsilon>0,\ \forall N,\ \exists n>N,\ \exists x\in I$

$$|f_n(x)-f(x)|\geq \varepsilon$$

2

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,\quad x\in(-1,1)$

由 $\sup\limits_{x\in[-0.8,0.5]} |x^n-0| = 0.8^n \to 0$

知 $x^n \rightrightarrows 0 \quad x\in[0.8, 0.5]$

3

(3) 由 $\sup\limits_{x\in(-1,0.2]} |x^n-0| = 1 \not\to 0$

知 $x^n \not\rightrightarrows 0 \quad x\in(-1, 0.2]$

3

或者由不一致收敛的定义.

取 $\varepsilon = 1/2$ $\forall N$, 取 $n=N+1$, $x=-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{N+1}}$

易见 $|x^n-0| = \left|-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{N+1}}\right|^{N+1} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

(3)

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

本题得分 ______

八、(8 分). (1) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛. (2) 写出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)\right),\quad x\in[a,b]$$

成立的一个充分条件.

(1) $\Rightarrow$ 令 $x=1\in[1,+\infty)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛

$\Leftarrow$ 由

$$u_n(x)=\frac{a_n}{n^x}=\frac{a_n}{n}\cdot\frac{1}{n^{x-1}}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$ 关于 x 一致收敛 $(x\in[1,+\infty))$

$\left\{\frac{1}{n^{x-1}}\right\}$ 单调一致有界 $x\in[1,+\infty)$

故 Abel 判别法 知 $\sum u_n(x)$ 一致收敛

3

(2) 若

$u_n(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 可导

$\exists x_0\in[a,b]$, 使 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

4

则

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}u_n(x)\right)$$

本题得分 ______

六、(8 分). 设三维空间中以坐标原点为球心，半径为 0.5 米的球面上有非均匀的质量分布，在球面上的点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)=x^2y^2$ 千克/平方米，计算分布在该球面上的总质量.

z^2

$$M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,dS \qquad \Sigma:\begin{cases}x=0.5\sin\varphi\cos\theta\\ y=0.5\sin\varphi\sin\theta\\ z=0.5\cos\varphi\end{cases} \quad \begin{matrix}0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le2\pi\end{matrix}$$

2

$$dS=\|\vec r_\varphi\times\vec r_\theta\|\,d\varphi\,d\theta=\underset{0.5}{r^2}\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

2

$(r\cos\varphi)^2$

$$\therefore M=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\,[r\sin\varphi\cos\theta]^2[r\sin\varphi\sin\theta]^2\,r^2\sin\varphi$$

$r^4\cos^2\varphi\sin\varphi$

$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\;r^6\sin^5\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$=r^4\cdot2\pi\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d(-\cos\varphi)$$

$$=2\pi r^4\left(-\frac13\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}r^4(-1)(-1-1)$$

$$=\frac43\pi r^4$$

$$=\frac43\pi\times0.5=\frac23\pi$$

4

或分成上下两部分，用直角坐标

$$M=2\iint_{\Sigma_上}\rho\,dS. \qquad \Sigma_上:\ z=\sqrt{(0.5)^2-(x^2+y^2)},\quad (x,y)\in D_{xy}:\ x^2+y^2\le0.5^2$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\left((0.5)^2-(x^2+y^2)\right)\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$$

本题得分 ______

九、(8 分). (1) 什么是"函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在开区间 (a,b) 上内闭一致收敛"? (2) 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 5^n$ 收敛，证明幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 在开区间 $(-5,5)$ 上内闭绝对一致收敛.

(1) 对任意闭区间 $[c,d] \subset (a,b)$，$\{f_n(x)\}$ 在 $x \in [c,d]$ 上一致收敛　3

(2) 对任意闭区间 $[c,d] \subset (-5,5)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n 5^n)\left(\frac{x}{5}\right)^n$$ 1

对 $\forall x \in [c,d]$

$$\left|\left(\frac{x}{5}\right)^n\right| = \left(\frac{|x|}{5}\right)^n \le \Big(\underbrace{\max\left(\frac{|c|}{5}, \frac{|d|}{5}\right)}_{=r}\Big)^n$$ 1

由 $[c,d] \subset (-5,5)$ 知

$$r < 1$$

由 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 5^n$ 收敛知 $\{a_n 5^n\}$ 有界

$$|a_n 5^n| \le M \quad n=1,2,\cdots$$ 1

故

$$|a_n x^n| \le M r^n \quad \forall x \in [c,d]$$

因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|$ 在 $x \in [c,d]$ 上一致收敛　2

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______ 密 封 线

本题得分 ______

十、(8分). (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数. (2) 给定函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1\\ x-1, & 1\le x\le 3\end{cases}$$

求多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使得 $P_n(x)$ 在 $[0,3]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)} = 1$ 故收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}} = 1$

在端点 ± 1 处不收敛 故收敛域为 $(-1,1)$. 2 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n \qquad x\in(-1,1)$$

于是对 $\forall x\in(-1,1)$

$$S(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{n+1}\right)''$$

$$= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}\right)'' = x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$ 2

(2) $f(x) = \frac{1}{2}\left\{(x-1)+|x-1|\right\}$. $\quad 0\le x\le 3$

$$= \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}|x-1| \qquad 0\le x\le 3$$

对 $0\le x\le 3$.

$$\frac{1}{2}|x-1| = \frac{3}{2}\left|\frac{x-1}{3}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{1+\underbrace{\left[\left(\frac{x-1}{3}\right)^2-1\right]}_{u}}$$

记 $g(u) = (1+u)^{\frac{1}{2}}$ 在 $u\in[-1,1]$ 上的 Taylor 展开为 2

$$g(u) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}u^k = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}u^k}_{S_n(u)}$$

于是令

$$P_n(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2}S_n\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2-1\right)$$ 即为所求

2