应用随机过程

离散马链的状态分类

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

可达互通的定义

可达互通

1

称状态i可达状态j，若$\exists n \geq 0$，使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，记为$i \to j$

2

若$j \to i$并且$i \to j$，则称状态i和状态j互通，记为$i \leftrightarrow j$

3

互通是一个等价关系，即满足

自反性：$i \leftrightarrow i, \forall i \geq 0$

对称性：$i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$

传递性：$i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$

闭类、可约的定义

闭类
可约

1

，若$i \leftrightarrow j$，称状态i和状态j在同一个等价类中

2

C称为一个闭类，若$\forall i \in C, j \notin C, p_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0$

3

若一个闭类中只有一个状态，则称该状态为吸收态

4

若马链中唯一的闭类就是其状态空间S，则该马链是不可约的，否则它是可约的

具体示例

考虑如下随机过程的马尔科夫转移概率矩阵（通常称其为随机游走），其中$p+q=1$，并且$p>0,q>0$。按照互通的等价关系，为其状态空间划分等价类。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & N\text{-}1 & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ N\text{-}1 \\ N \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

解：该马氏链有三个类，分别$\{0\},\{N\}$和$\{1,\cdots N-1\}$，并且$\{0\}$和$\{N\}$是两个闭类。

首次到达时刻及概率分布

首次到达时刻

1. T_{ij}表示从状态i首次到达状态j所需的转移次数

2. 定义$f_{ij}^{(n)}=P\{T_{ij}=n\}=$
$P\{X_n=j, X_{n-1}\neq j, \cdots X_1\neq j | X_0=i\}$

3. $f_{ij}^{(1)}=p_{ij}, f_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0,k\neq j}^{\infty} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$
$n=2,3,\cdots$

4. $f_{ij}=P\{T_{ij}<\infty\}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$称为$i$到$j$的到达概率

常返态、瞬态

常返态
瞬态

1

T_{jj}表示状态j的返回时间，$\mu_{jj}=E[T_{jj}]$表示状态j的平均返回时间

2

状态j称为瞬态，若$f_{jj}<1$

3

状态j称为常返态，若$f_{jj}=1$

而且，$\begin{cases}\text{称}j\text{为正常返态，}\mu_{jj}<\infty\\ \text{称}j\text{为零常返态，}\mu_{jj}=\infty\end{cases}$

推论

推论1：若状态i是常返态，并且$i \leftrightarrow j$，那么状态j也是常返的。

推论2：若状态i是常返态，并且$i \to j$，那么$j \to i$。

具体示例

对于具有如下转移矩阵的马尔科夫链，其状态空间仅包含0，1，2，3四种状态，判断该马链是否具有常返态。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方法一：定理：有限不可约马尔可夫链中的所有状态都是常返的。容易判断该马链是有限的，并且每两个状态之间都是互通的，故为不可约马尔科夫链。

方法二：推论1：若状态i是常返态，并且$i \boxed{\leftrightarrow} j$，那么状态$j$也是常返态。

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} \geq f_{00}^{(3)} \geq P\{X_3 = 0, X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 0\} + P\{X_3 = 0, X_2 = 1, X_1 = 3 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1。$$

故状态0是常返态。而且任意两状态互通，故所有状态均为常返态。

转移概率矩阵状态分解

符号定义

1. $T(i)$：$TO-LIST$，i可达的所有状态组成的集合
2. $F(i)$：$FROM-LIST$，所有可达i的状态组成的集合
3. $C(i)$：$C(i)=T(i)\cap F(i)$，若$C(i)=T(i)$，$C(i)$是闭类
4. $E_n(1\le n\le m)$记为闭类，T为所有非闭类的状态组成的集合

转移概率矩阵状态分解

1. 对于所有的状态i，列出$T(i), F(i)$，并求出$C(i)$
2. 列出闭类$E_n\ (1 \le n \le m)$以及非闭类T
3. 以$E_1, E_2, \cdots E_m, T$的顺序，依次写出马链的转移概率矩阵
4. 将每个闭类中的状态合并为一个状态，即每个闭类看作一个吸收态
5. 写出转移概率矩阵的标准型，$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$

应用示例

将如下离散马尔科夫过程的转移概率矩阵化为标准型

$$
\begin{array}{c}
1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10
\end{array}
\begin{bmatrix}
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0\\
0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3
\end{bmatrix}
$$

应用示例

状态空间划分为闭类及非闭类

	1	3	2	7	9	6	4	5	8	10
1	1/2	1/2								
3	1	0								
2			1/3	2/3	0					
7			0	1/4	3/4					
9			1	0	0					
6						1				
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1/3	0	1/3	1/3	0	0
8	0	1/4	0	0	0	0	1/4	0	1/4	1/4
10	0	0	1/3	0	0	0	0	1/3	0	1/3

将每个闭类看作一个吸收态

	E_1	E_2	E_3	4	5	8	10
E_1	1	0	0				
E_2	0	1	0				
E_3	0	0	1				
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1/3	0	1/3	1/3	0	0
8	1/4	0	0	1/4	0	1/4	1/4
10	0	1/3	0	0	1/3	0	1/3

谢谢听课

授课教师 赵毅