第九章 欧氏空间

§1 定义与基本性质

§2标准正交基

§3 同构

§4 正交变换

§5 子空间

§6实对称矩阵标准形

§7最小二乘法

§8酉空间简介

小结与习题

§9.2 标准正交基

一、正交向量组

二、无关向量组的单位正交化

三、正交矩阵

引入

在解析几何里，我们使用直角坐标系，也就是说在三维空间中存在标准正交基底$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$. 在抽象的欧氏空间中，我们也要引进标准正交基底的概念，讨论空间一组基低的标准正交化的过程，以及标准正交基底之间的过渡矩阵，正交矩阵.

标准正交基，单位正交化，正交矩阵

定义 5. 欧式空间V中一组非零向量, 如果它们两两正交, 就称为一正交向量组.

注: 由单个非零向量所成的向量组也是正交向量组.

以下讨论的正交向量组都是非空的.

命题. 正交的向量组必是线性无关的.

证明. 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$是一正交向量组, 考虑

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

用α_i与等式两边做内积，即得

$$k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

由$\alpha_i \neq 0$，$(\alpha_i, \alpha_i) > 0$，必有$k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$.

这就证明了$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$线性无关.

这个结论表明，在n维欧氏空间V中一个正交向量组所含向量的数目不会超过n. 这个事实的几何意义也很清楚，平面上找不到三个两两正交的非零向量，空间中找不到四个两两正交的非零向量.

在解析几何学里，我们使用的是直角坐标系研究问题

它有很好的度量性质，在欧氏空间中，情况也如此.

定义 6. 在n维欧氏空间V中，由n个向量组成的正交向量组称为**正交基**；由单位向量组成的正交基称为**标准正交基.**

对一组正交基进行单位化就得到一组标准正交基.

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$是一组标准正交基，由定义，有

$$\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \begin{cases} 1, \text{当} i = j \\ 0, \text{当} i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

显然，(1)式完全刻画了标准正交基的性质，换言之，一组基为标准正交基的充要条件是：它的度量矩阵是Identity，因为度量矩阵正定的的，根据第五章关于正定二次型的结果，正定矩阵合同于恒等矩阵．这说明在n维欧氏空间中存在一组基，它的度量矩阵是恒等矩阵．由此可以断言，在n维欧氏空间V中，标准正交基是存在的.

在标准正交基下，向量的坐标可以通过内积简单的标识出来．即

$$\alpha = (\varepsilon_1, \alpha)\varepsilon_1 + (\varepsilon_2, \alpha)\varepsilon_2 + \cdots + (\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n \quad (2)$$

事实上，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

用ε_i与等式两边做内积，即得

$$x_i = (\varepsilon_i, \alpha) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

在标准正交基下，内积有特别简单的表示，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n,$$

那么

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)x_i y_j = X^T Y. \qquad (3)$$

应该指出，内积表达式(3)，对于任一组标准正交基都是一样的. 这说明所有的标准正交基在欧氏空间中有相同的地位. 在下一节，这一点将得到进一步说明.

下面我们讨论标准正交基的求法.

定理 1. n维欧氏空间V中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

证明. 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$是一正交向量组，我们对$n-m$做归纳法.

当$n-m=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$就是一组正交基了.

假设$n-m=k$时定理成立，也就是说，可以找到向量$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$，使得

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$$

成为一组正交基.

现在来看$n-m=k+1$的情形. 因为$m<n$，所以一定有向量β不能被$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性表出，作向量

$$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m,$$

这里$k_1,k_2,\ldots,k_m$是待定系数，用α_i与α_{m+1}作内积，得:

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

取

$$k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \ i = 1, 2, \dots, m.$$

有 $(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$

由β的选取知，$\alpha_{m+1} \neq 0$，因此，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 是一正交向量组. 根据归纳假设，$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 可以扩充成一正交基，定理得证.

注意：定理的证明实际上也给出一个具体的扩充正交向量组的方法. 如果我们从任一个非零向量出发，按

证明中的步骤逐个地扩充，最后就得到一组正交基，再单位化，就得到一组标准正交基.

在求欧氏空间V的正交基时，常常是已经有了空间的一组基，对于这种情况，有下面的结果.

定理2. 对于n维欧氏空间V中任意一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$，都可以找到一组标准正交基$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$，使

$$\mathrm{L}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_i)=\mathrm{L}(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_i), i=1,2,\ldots,n.$$

证明. 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是一组基，我们来逐个求出向量$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$.

首先，可取$\eta_1=\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|}$，一般地，假定已经做出$\eta_1,\eta_2,\dots,$

η_m，它们是单位正交的，具有性质

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_i)=L(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_i),i=1,2,\dots,m.$$

下一步求η_{m+1}.

因为$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m)=L(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$，所以$\varepsilon_{m+1}$不能被$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$线性表出．按定理 1 中的证明方法，作向量

$$\delta_{m+1}=\varepsilon_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_{m+1},\eta_i)\eta_i,$$

显然$\delta_{m+1}\neq 0$．且$(\delta_{m+1},\eta_i)=0,i=1,2,\dots,m.$

令

$$\eta_{m+1} = \frac{\delta_{m+1}}{|\delta_{m+1}|}.$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}$ 就是一单位正交向量组．同时 $\mathrm{L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m+1}) = \mathrm{L}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1})$．由归纳法原理，定理 2 得证.

应该指出，定理中要求

$$\mathrm{L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = \mathrm{L}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

就相当于由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过度矩阵是上三角形的.

解释

标准正交基中第 i 个向量 η_i 的求出只涉及基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 中的前 i 个向量 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i$，即 η_i 可写成 $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i$ 的线性组合：

$$\eta_i = c_{1i}\varepsilon_1 + c_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + c_{ii}\varepsilon_i,\quad i = 1,2,\ldots,n.$$

因而

$$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

把一组线性无关的向量标准正交化的过程也称为 Gram-Schimidt 正交化过程.

归纳

把$\mathbf{R}^n$中一组线性无关的向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$标准正交化的过程可以列表如下：

令

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

$$\boldsymbol{\delta}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\delta}_1)}{(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_1)}\boldsymbol{\delta}_1,$$

$$\boldsymbol{\delta}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\delta}_1)}{(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_1)}\boldsymbol{\delta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\delta}_2)}{(\boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_2)}\boldsymbol{\delta}_2,$$

$$\dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots,$$

$$\boldsymbol{\delta}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\delta}_1)}{(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_1)}\boldsymbol{\delta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\delta}_2)}{(\boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_2)}\boldsymbol{\delta}_2, - \cdots - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\delta}_{m-1})}{(\boldsymbol{\delta}_{m-1}, \boldsymbol{\delta}_{m-1})}\boldsymbol{\delta}_{m-1}.$$

再单位化，令

$$\eta_1 = \frac{\delta_1}{|\delta_1|},$$

$$\eta_2 = \frac{\delta_2}{|\delta_2|},$$

$$\eta_3 = \frac{\delta_3}{|\delta_3|},$$

$$\cdots, \quad \cdots, \quad \cdots, \quad \cdots,$$

$$\eta_m = \frac{\delta_m}{|\delta_m|},$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$就是一标准正交的向量组.

例1. 把 $\boldsymbol{\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,0,0,1)^T,}$

$\boldsymbol{\alpha_3=(1,0,1,0)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T}$

变成单位正交的向量组.

解. 先正交化，得

$$\boldsymbol{\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)^T,}$$

$$\boldsymbol{\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T,}$$

$$\boldsymbol{\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T,}$$

$$\boldsymbol{\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\beta_3}$$

$$\boldsymbol{=(1,-1,-1,1)^T.}$$

再单位化，得

$$\eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T,$$

$$\eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)^T,$$

$$\eta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}})^T,$$

$$\eta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T.$$

由于标准正交基在欧氏空间中占有特殊的地位，下面讨论从一组标准正交基到另一组标准正交基的基变换公式.

问题. 将 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T,\alpha_3=(1,0,1)^T$

标准正交化

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

例2.设欧式空间$\mathbf{R}^3$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的度量矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix},$$

求$\mathbf{R}^3$的一组标准正交基(写成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合).

解. A是一正定矩阵，将A合同为I_3. 对(A,I)作一系列合同变换(初等变换),

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&&\\1&2&3&&1&\\1&3&6&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&&\\0&1&2&\mathbf{-1}&1&\\0&2&5&\mathbf{-1}&&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&1&&\\0&1&\mathbf{0}&\mathbf{-1}&1&\\0&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}&1\end{array}\right)$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\1&-2&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\&1&-2\\&&1\end{pmatrix}$

则 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$. 取

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

引申与应用

在线性空间R^n中，对于向量

$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T,\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)^T$

定义内积

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

在上述定义内积的欧氏空间中，对于R^n中任意一组基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，将其排成矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=A$，则$A^TA$是一正定矩阵，它就是基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$的度量矩阵($A^TA$中的元素$a_{ij}=a_{ji}=(\alpha_i,\alpha_j)$).

对于正定矩阵A^TA，存在唯一的上三角矩阵P，使得

$P^TA^TAP = E$，以E为度量矩阵的基底必是标准正交基. 此时AP的列向量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，即

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$$

就是将$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$标准正交化得到的标准正交基.

因此将$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$标准正交化也可这样来实现..

(1) 作A^TA，这里，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

(2) 作矩阵$\begin{pmatrix} A^T A \\ \hline E \\ \hline A \end{pmatrix}$，对$A^T A$作成对第三种(消法)初等变换，将其变为对角矩阵$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.但对该矩阵的第二行、第三行只作列初等变换，记这有限次初等变换对应的初等矩阵的积为Q. 则有：$Q^T A^T A Q = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$，而

$$\begin{pmatrix} A^T A \\ \hline E \\ \hline A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q^T A^T A Q \\ \hline EQ = Q \\ \hline AQ \end{pmatrix}$$

令$R = \mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{d_1}}, \frac{1}{\sqrt{d_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{d_n}})$,

$P = QR.$

(3)求$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P.$

将上面的(3)略作变化：

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)P^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

就给出了习题 14 的结论与证明，即

定理. 设A为一n阶实矩阵，且$|A|\neq 0$，则A可分解为

$$A=QT$$

其中是Q正交矩阵，T是一主对角线上元素大于零的上三角矩阵. 并且，这一分解是唯一的.

例3. 设

$\alpha_1=(1,0,0,1)^T,\alpha_2=(0,2,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,-1,0)^T$是$R^4$中的向量，将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$标准正交化.

解. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，令

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix},A^TA=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&5&-1\\1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A^T A \\ E \\ A \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hdashline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccc}
2 & 0 & 0 \\
0 & 5 & -1 \\
1 & -1 & \frac{3}{2} \\
\hline
1 & & -\frac{1}{2} \\
 & 1 & \\
 & & 1 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccc}
2 & 0 & 0 \\
0 & 5 & -1 \\
1 & -1 & \frac{13}{10} \\
\hline
1 & & -\frac{1}{2} \\
 & 1 & \frac{1}{5} \\
 & & 1 \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 2 & \frac{2}{5} \\
0 & 1 & -\frac{4}{5} \\
1 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{5}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{13}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{130}}{26}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{130}}{65}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{130}}{13}\end{pmatrix}$$

则 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{130}}{26}\\0&\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{130}}{65}\\0&0&\frac{\sqrt{130}}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{130}}{26}\\0&\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{130}}{65}\\0&\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{-4\sqrt{130}}{65}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{130}}{26}\end{pmatrix}$$

设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$与$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是欧氏空间V中的两组标准正交基，它们之间的过渡矩阵是$A = (a_{ij})$，即

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$是标准正交基，所以

$$(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases}1, \text{当} i=j\\ 0, \text{当} i\neq j\end{cases} \tag{4}$$

矩阵 A 的各列就是 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的坐标，按公式(3),(4)式可以表示为

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1, \text{当} i=j\\ 0, \text{当} i\neq j\end{cases} \tag{5}$$

(5)式相当于一个矩阵等式

$$A^TA=E, \tag{6}$$

或者 $$A^{-1}=A^T$$

定义7. n阶实系数矩阵A称为正交矩阵,如果$A^TA=E$.

因此，由一组标准正交基到另一组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反之，如果第一组基是标准正交基，同时过渡矩阵是正交矩阵，那么第二组基一定也是标准正交基.

由$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$可得出$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，及

$$a_{i1}a_{ji}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1, 当 i=j\\0, 当 i\neq j\end{cases} \qquad (7)$$

(5)式是矩阵的列与列之间的关系，(7)式则是矩阵的行与行之间的关系，这两种关系等价.