应用随机过程

连续马尔科夫过程极限概率

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

连续马链极限概率的存在性

连续马链稳态分布

1 连续马链嵌入时刻发生转移的过程可由离散马链表示

2 若这个离散马链不可约且周期回归，对应的连续马链就有极限概率

3 连续马链每个状态都存在极限概率，且极限概率独立于初始状态

连续马链极限概率

定义$P_j = \lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t)$

$$\frac{d}{dt}\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = 0$$

矩阵形式

$$\lim_{t\to\infty} P'(t) = 0$$

前向Kolmogorov方程

$$\lim_{t\to\infty} P(t)Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & . & . \\ P_0 & P_1 & P_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & q_{02} & . & . \\ q_{10} & -v_1 & q_{12} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

连续马链极限概率

$$[P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad . \quad .]\begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & q_{02} & . & . \\ q_{10} & -v_1 & q_{12} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & & & & \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad .]$$

$$PQ = 0,\ P = (P_0 P_1 P_2 \ . \ . \ )$$

$$\sum_{0}^{\infty} P_j = 1$$

$$Pe = 1$$

矩阵形式为 $\begin{cases} PQ = 0 \\ Pe = 1 \end{cases}$

连续马链极限概率

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & q_{02} & . & . \\ q_{10} & -v_1 & q_{12} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . \end{bmatrix}$$

第j行的表达式

$$P'_{ij} = \boxed{\sum_{k \neq j} P_k q_{kj}} - \boxed{P_j v_j} = 0 \quad j \in S$$

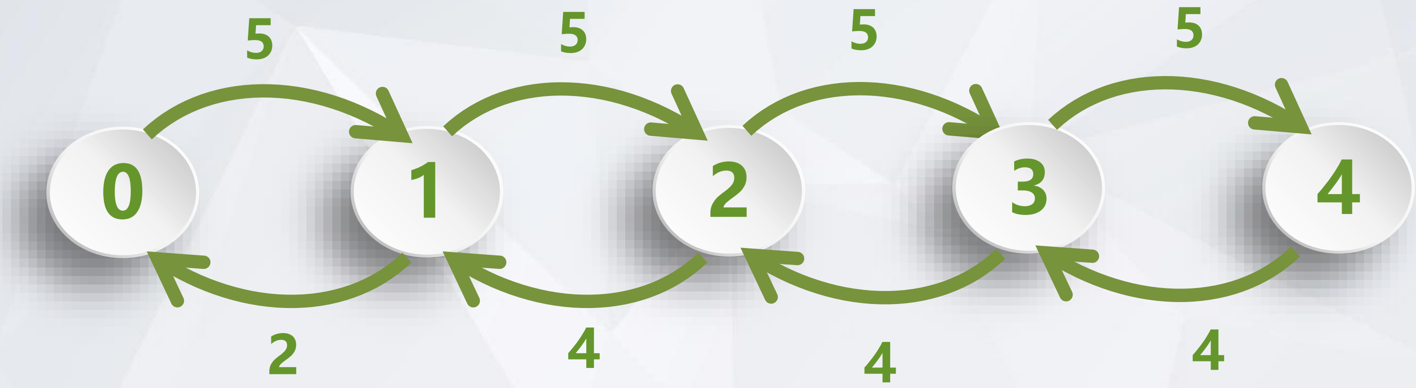
状态j的输入速率　状态j的输出速率

对于每一个处于稳态分布的状态j，
转移进j状态的速率等于j状态转移出的速率。

案例一

一家理发店有两个理发师，两个顾客等待位置。顾客以平均每小时5人的速率光临理发店。每个理发师平均每小时服务2个顾客。如果顾客到达理发店发现等待位置已满员时，他就离开。假设顾客到达的过程服从泊松分布，理发师的服务时间服从指数分布，并且到达过程与服务时间相互独立。求长期来看理发店里有的人数的概率分布？

案例一



$$Q=\begin{bmatrix} -5 & 5 & & & \\ 2 & -7 & 5 & & \\ & 4 & -9 & 5 & \\ & & 4 & -9 & 5 \\ & & & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} PQ=0 \\ Pe=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0=0.0649 \\ P_1=0.1622 \\ P_2=0.2027 \\ P_3=0.2534 \\ P_4=0.3168 \end{cases}$$

案例二

如果状态空间$S=\{0,1,\ldots\}$, $|i-j|>1$时$q_{ij}=0$, 这个随机过程被称为出生消失过程。处在状态 i 时，转移速率为

$$q_{i,i+1}=\lambda_i \quad i=0,1,2\ldots$$

$$q_{i,i-1}=\mu_i \quad i=1,2,3\ldots$$

$$q_{ij}=0 \qquad \text{otherwise}$$

λ_i被称为出生率， μ_i 被称为消失率。

那么这个出生消失过程的极限概率如何计算?

案例二

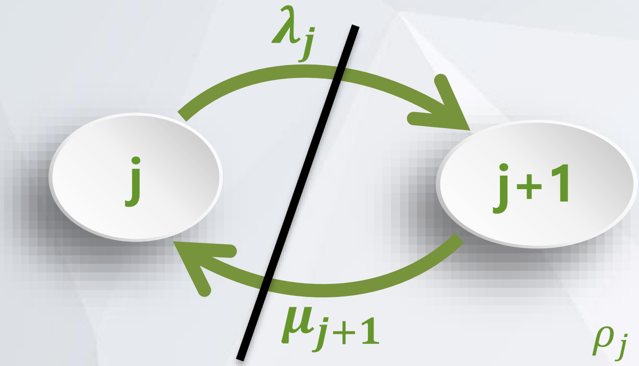
如果将状态空间S划分为两个集合A和B，满足$A \cup B = S$且$A \cap B = \emptyset$。r_{AB}表示从A到B的全部转移比率，则在稳定状态时，有$r_{AB} = r_{BA}$。

$$r_{AB} = \sum_{i\in A} P_i \sum_{j\in B} p_{ij} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} P_i p_{ij}$$

$$r_{AB} = \sum_{i\in B} P_j \sum_{i\in A} p_{ji} = \sum_{j\in B}\sum_{i\in A} P_j p_{ji}$$

$$\boxed{\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} P_i p_{ij} = \sum_{j\in B}\sum_{i\in A} P_j p_{ji}}$$

案例二



$$\boxed{\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} P_i p_{ij} = \sum_{j\in B}\sum_{i\in A} P_j p_{ji}}$$

$$\lambda_j P_j = \mu_{j+1} P_{j+1}, \mathrm{j} = 0, 1, \dots\dots$$

$\rho_j = \lambda_j / \mu_{j+1}$

$$P_{j+1} = \rho_j P_j, \mathrm{j} = 0, 1, \dots\dots$$

$$P_j = \rho_{j-1} \dots \rho_0 P_0, \quad \mathrm{j} = 1, 2, \dots\dots$$

所有状态极
限概率求和

$$P_0\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j-1} \dots \rho_0\right] = 1$$

案例二

$$P_0\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{j-1}\ldots\rho_0\right]=1$$

若 $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{j-1}\ldots\rho_0=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_{j-1}\ldots\lambda_0}{\mu_j\ldots\mu_1}<\infty$

则$P_0>0, P_{\mathrm{j}}>0\ (j\geq 0)$

求得P_0,其他P_j可递归计算得到

思考问题

对于案例一理发店理发人数这一随机过程，如何利用案例二的方法计算它的极限概率？并比较这二者得到的计算结果。

谢谢听课

授课教师 赵毅