线性方程组直接解法：预备知识：*A,B*表示矩阵，*x,y*表示向量

（a）矩阵的特征值、谱半径、行列式、迹

$Ax=\lambda x$　$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ A谱

$\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 谱半径，$|A|$　$tr(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$

（b）（定理）线性方程组*Ax=b*存在唯一解等价于

（1）$|A|\ne 0$　（2）A可逆　（3）A存在逆阵　$rank(A)=n$

（c）对称正定矩阵性质（定理）

(1) $|A|\ne 0$ A^{-1}也对称正定；(2) 所有顺序主子式正定 A_k

(3) 所有 $\lambda_i>0$

(4) 所有顺序主子式 $|A_k|>0$

（d）（定理）*A*是对称矩阵，若

（所有 $|A_k|>0$ 或 所有 $\lambda_i>0$），

则*A*正定

（一）高斯消元法：A表示矩阵，x表示向量

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, Ax = b$$

高斯消元法解方程组的 步骤：令$A^{(1)} = A, b^{(1)} = b,$

第一步：若$a_{11}^{(1)} \neq 0$,用$-m_{i1} = -a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}, i = 2, \cdots, n$乘以第一个方程加到第$i$个方程,得到等价线性方程组：

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, i, j = 2, \cdots, n, b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, i = 2, \cdots, n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}, A^{(2)}x = b^{(2)}$$

（一）高斯消元法：A表示矩阵，x表示向量

第二步：若 $a_{22}^{(2)} \neq 0$，用 $-m_{i2} = -a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}, i = 3,\cdots,n$ 乘以第二个方程加到第i个方程，得到等价线性方程组：

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, i, j = 3,\cdots,n, b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}a_2^{(2)}, i = 3,\cdots,n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}, A^{(3)}x = b^{(3)}$$

依次下去*k-1*次之后得到等价线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}, A^{(k)}x = b^{(k)}$$

照此进行$n-1$步，得到等价的线性方程组：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}, A^{(n)}x = b^{(n)}$$

此过程为消元：$A^{(n)}$是上三角矩阵

第三步：回代

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}, A^{(n)}x = b^{(n)}$$

“消元、回代”

回代得到求解公式：
$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \\ x_k = (b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j) \Big/ a_{kk}^{(k)}, k = n-1, \cdots, 1 \end{cases}$$

消元的

回代的

高斯消元法消元、回代总的乘除法次数为 $\boxed{\dfrac{n^3}{3} + n^2 - \dfrac{n}{3}} \approx \dfrac{n^3}{3}$

高斯消元法可以进行的条件：所有约化主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, \cdots, n$

（定理）高斯消元法过程中，所有约化主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, \cdots, n$ 的充分必要条件是，矩阵 A 的所有顺序主子式 $D_k \neq 0, k = 1, \cdots, n.$

证明:

$k=1$ 时成立 $a_{11}^{(1)} = D_1$

$k-1$ 时成立. k 时

$$D_k = a_{11}^{(1)} \times \cdots \times a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \cdot a_{kk}^{(k)}$$

$$= D_{k-1}\, a_{kk}^{(k)}$$

$$a_{kk}^{(k)} = D_k / D_{k-1} \quad (D_{k-1} \neq 0)$$

$a_{kk}^{(k)}$ 与 D_k 同不为0

推论: $a_{11}^{(1)} = D_1 \quad a_{kk}^{(k)} = D_k / D_{k-1} \quad k = 2, 3, \cdots, n$

（二）矩阵三角分解

第一步消元，相当于用$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -m_{n1} & & & & 1 \end{pmatrix}$左乘$A^{(1)}$，即

$L_1 A^{(1)} = A^{(2)}, L_1 b^{(1)} = b^{(2)}$，依次，$L_k A^{(k)} = A^{(k+1)}, L_k b^{(k)} = b^{(k+1)}$

因此，$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2 L_1 A = A^{(n)}$，上三角

$A = L_1^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}A^{(n)}$，令$U = A^{(n)}$，

$L_k^{-1} = (\; 1 \; \cdots \; m_{k+1,k} \; \cdots \; m_{nk})$

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -m_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = L_1^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$A = LU$

L单位下三角，U上三角

（二）矩阵三角分解

（定理：LU分解）A的所有顺序主子式$D_k \neq 0, k=1,\cdots,n$，则A可以分解为单位下三角阵L与上三角阵U的乘积，且这种分解是唯一的.

证 (1) 高斯可执行 $A = LU$ 乘除法: $\frac{n^3}{3}$

(2) 唯一 $L_1 \; U_1$, $L_2 \; U_2$

单下 上 单下 上

$A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

单位下三角 上三角

$L_1 = L_2$, $U_1 = U_2$ □

（三）列主元消元法

假设高斯消元法进行到第k步，得到$A^{(k)},b^{(k)}$，此时，

如果$a_{kk}^{(k)}=0$或者很小时，下一步消元无法有效实行，

此时可以选主元素$|a_{i_k,k}|=\max\limits_{k\le i\le n}|a_{ik}|\ne 0$,主元素$a_{ik}$所在

的行号为i_k，然后交换$(A^{(k)},b^{(k)})$第k与i_k行，再进行消元运算。

该方法称为列主元消元法

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

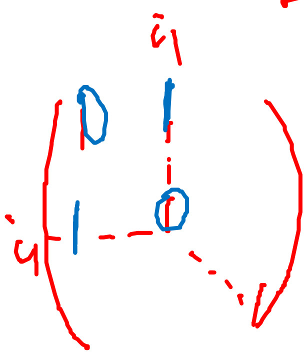
（三）列主元消元法对应的三角分解

11:25 回来

(定理) A非奇异，则存在排列矩阵P，使得 $PA=LU$，L为单位下三角阵， U为上三角阵

乘除法 $\frac{n^3}{3}$

证明： $L_1 I_{1,i_1} A^{(1)} = A^{(2)}$　　$I_{1,i_1} b^{(1)} = b^{(2)}$



I_{1,i_1}

$L_k I_{k,i_k} A^{(k)} = A^{(k+1)}$，　$L_k I_{k,i_k} b^{(k)} = b^{(k+1)}$

$$\underbrace{L_{n-1} I_{n-1,i_{n-1}} \cdots L_1 I_{1,i_1}}_{P} A = A^{(n)} = U \text{ 上三角}$$

$$\tilde{P} A = U$$

（三）列主元消元法对应的三角分解

A 4×4 阶

证明（续）：

$$U = A^{(k)} = L_3 I_{3,i_3} L_2 I_{2,i_2} L_1 I_{1,i_1} A$$

$$= \underbrace{L_3}_{\tilde{L}_3} \underbrace{(I_{3,i_3} L_2 I_{3,i_3})}_{\tilde{L}_2} \underbrace{I_{3,i_3} I_{2,i_2} L_1 I_{2,i_2} I_{3,i_3}}_{\tilde{L}_1} \underbrace{(I_{3,i_3} I_{2,i_2} I_{1,i_1})}_{P} A$$

$$=$$

$$\tilde{L}_3 \tilde{L}_2 \tilde{L}_1 P A = U$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & m_{31} & 1 & \\ 0 & m_{32} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{L}_2$ 仍然单位下三角

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & m_{32} & 0 & 1 \\ 0 & m_{31} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

同理 $\tilde{L}_3$，$\tilde{L}_1$ 也是

$$PA = \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \tilde{L}_3^{-1} U = LU$$

$P = I_{3,i_3} I_{2,i_2} I_{1,i_1}$　L 单位下三角

（四）三角分解法求解线性方程组、矩阵的逆、以及相对于高斯消元法的优势

1 解方程组 $A=LU$ $\quad Ax=b$ $\quad LUx=b$

$$\begin{cases} Ly=b \to \text{解 } y \\ Ux=y \to \text{解 } x \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=b_1, \quad y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k, \quad i=2,\cdots,n \\ x_n=\dfrac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i=\left(y_i-\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k\right)/u_{ii} \\ i=n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases}$$

$O(n^2)$ 乘除法

选主元：$PA=LU$ $\quad Ax=b$ $\quad PAx=Pb$

$LUx=Pb$

$$\begin{cases} Ly=Pb & \text{解 } y \\ Ux=y & \text{解 } x \end{cases}$$

2 $\quad Ax=b_i \quad 1\le i\le M \quad M$ 很大

高斯消元：乘除法 $\dfrac{n^3}{3}\times M \gg$ 三角分解：$\dfrac{n^3}{3}+O(n^2)M$

3 求逆 $\quad PA=LU \quad \underline{A^{-1}=U^{-1}L^{-1}P}$ $\quad n^3$ 乘除法

（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（不选主元）

A的所有顺序主子式$D_k \neq 0, k=1,\cdots,n$，则存在唯一的分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{n}{2}(n+1) = n^2$ 未知　列 n^2 方程

思路：第一行与第一列相等

$a_{1i} = u_{1i}$　$i=1,\cdots,n$ 得U第一行元素

$a_{i1} = l_{i1}u_{11}$　$l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$　$i=2,\cdots,n$

得 L 的第一列元素

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（不选主元）

设已进行 $r-1$ 步得到 U 第 $r-1$ 行，L 第 $r-1$ 列元素

则第 r 步由以下计算公式 $a_{ri}=\sum_{k=1}^{n} l_{rk}u_{ki}=\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}+u_{ri}$

得 $u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}$，$i=r,r+1,\cdots,n$

又 $a_{ir}=\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}+l_{ir}u_{rr} \Rightarrow l_{ir}=\left(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}\right)/u_{rr}$，$i=r+1,\cdots,n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14}\\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24}\\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34}\\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44}\end{pmatrix},$$

无需开辟新的存储单元。

乘除法次数约为 $\boxed{\frac{n^3}{3}}$，与高斯法相当

（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（选列主元）

当杜立特算法第$r-1$步分解已完成，有

作业 P177
2,3, 7. 8

$$A \to \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,r-1} & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,r-1} & u_{2r} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{r-1,1} & l_{r-1,2} & \cdots & u_{r-1,r-1} & u_{r-1,r} & \cdots & u_{r-1,n} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$