基本练习 1

一.填空

1. 设$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+ax+b, g(x)=x^2-3x+1$，若$f(x)$除以$g(x)$后余式等于 $25x-5$，则$a=$________$b=$______.

2. 一元多项式$2x^4-x^3-5x^2+2x+2$在有理数域上的标准因式分解是____________________.

3. 已知多项式$f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$有一个根$1+i$，$f(x)$在有理数域上的标准因式分解是: ____________ -.

4. 当a,b适合条件__________时,$(x^2+1)|(x^3+ax+b)$.

设$f(x)$是一个三次首一多项式,若$f(x)$除以$x-1$余 1，除以$x-2$余 2，除以$x-3$余 3，则_

5. 当实数$t=$____________,多项式x^3+tx-2有重根.

6. 设p是素数,x^p+px+q和x^2+p的最大公因式是____________,

7. $x_1^3+x_2^3+x_3^3$用初等对称多项式$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$表示为

__________,

8. 设三次方程$x^3+px^2+qx+r(r\neq 0)$,以此方程的根的倒数为根的三次方程为_____________,

9. 方程$4x^4-7x^2-5x-1=0$的有理根为____________

10. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$____________,

11. 已知n阶行列式$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$的值为$c$,

$b_1,b_2,\ldots,b_k$为常数，则行列式

$$|B|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}}b_1^2 & \boldsymbol{a_{12}}b_1b_2 & \cdots & \boldsymbol{a_{1k}}b_1b_k \\ \boldsymbol{a_{21}}b_2b_1 & \boldsymbol{a_{22}}b_2^2 & \cdots & \boldsymbol{a_{2k}}b_2b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}}b_kb_1 & \boldsymbol{a_{k2}}b_kb_2 & \cdots & \boldsymbol{a_{kk}}b_k^2 \end{vmatrix}=\_\_.$$

12. 设行列式

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & \mathrm{y} \end{vmatrix},$$

其代数余子式$\boldsymbol{A_{11}}+\boldsymbol{A_{12}}+\boldsymbol{A_{13}}=\boldsymbol{1}$，则$|\mathrm{A}|=$________.

13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3,)$，如果$|A|=1$，那么$|B|=$

____________.

14. n阶行列式$|A|$的值为c，若将$|A|$的每个第(i,j)元素a_{ij}换成$(-1)^{i+j}a_{ij}$，则得到的行列式的值为__在此处键入公式。_________.

15. 若线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多解. 则$a=$_____.

16. 设向量组$(2,1,1,1)^T,(2,1,a,a)^T$，$(3,2,1,a)^T$，$(4,3,2,1)^T$线性相关，且$a\neq 1$，则$a=$____________

17. 令$\mu_1=(1,\quad 2,\quad 2)^T$，$\mu_2=(3,\quad 2,\quad 1)^T$是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解，$A$是一秩为2的$3\times 3$矩阵.则$Ax=b$的一般解为

____

18. 设向量组I: $\alpha_1=(1,2,-3)^T,\alpha_2=(3,0,1)^T,\alpha_3=(9,6,-7)^T$与向量组II: $\beta_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\beta_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\beta_3=(5,1,0)^{\mathrm{T}}$有相同的秩，则$a=$______.

19. 矩阵$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩为 3，则$k=$________.

二.选择最佳答案

20. 若多项式$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$互素，则（　　）

A. $f_1(x), f_2(x)$必互素;

B. $f_1(x), f_2(x)$互素，或$f_1(x), f_3(x)$互素，或$f_2(x), f_3(x)$互素;

C. 若$\left(f_1(x), f_2(x)\right)=d_1(x), \left(f_2(x), f_3(x)\right)=d_2(x)$,

则$\left(d_1(x), d_2(x)\right)=1$;

D. 存在$u(x), v(x)$使$f_3(x)=f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)$.

22. m, n是大于 1 的整数，则$x^{3m}+x^{3n}$除以x^2+x+1的余式为( ).

A. $x+1$, B. 0, C. 1, D. 2.

23. 设$f(x)$是数域F上的多项式，又K是包含F的数域，则( ).

A. $f(x)$在F上不可约，则$f(x)$在K上也不可约;

B. $f(x)$在K上可约，则$f(x)$在F上也可约;

C. $f(x)$在F上有重因子，则$f(x)$在K上必有重根;

D. $f(x)$在K上不可约，则$f(x)$在F上也不可约.

24. 以$\sqrt{2}-1+i$为根的次数最小的有理系数多项式的次数为( ).

A. 2, B. 3, C. 4, D. 6.

25.在关于x的多项式$f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}$中,一次项的系数是( ).

A. 1，B. 2，C. -1，D. -2.

26.如一个$n(n>1)$阶行列式中元素为 1 或-1，则其值为(   ).

A. 1，B. -1，C. 奇数，D. 偶数.

27.若$|A|$是n阶行列式，$|B|$是m阶行列式，它们的值都不为零，记$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}=|C|$，$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=|D|$，则$|C|:|D|$的值是(   ).

A. 1，B. -1，C. $(-1)^n$，D. $(-1)^{mn}$.

28.设n阶行列式$|a_{ij}|=c$，则$|ka_{ij}|$的值为(   ).

A. $k^n c$， B. c， C. kc，D. $-k^n c$

29.当(   )时，下列线性方程组有唯一解

$$\begin{cases} bx_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$$

A. $b\neq 1$，B. $b\neq 2$，C. $b\neq 3$，D. $b\neq -1$.

30.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则对于任意常数$k$,必有_____

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$线性无关. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$线性相关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$线性无关. (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$线性相关.

31.令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性方程组$AX=b$的三个解，$R(A)=3$．若

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，则$AX=b$的通解是(   )

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, (C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

32. 设$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$线性无关，下列向量组中哪一个是线性相关的(　　).

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

C. $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$　D. $\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_2+\alpha_3,\ 3\alpha_3+\alpha_1$

33. For a system of linear equations $Ax=b$, which statement in the following is correct（　　）

A. if $Ax=0$ only has zero solution, then $Ax=b$ has unique solution;

B. if $Ax=0$ has nonzero solution，then $Ax=b$ has infinitely many solutions;

C. $Ax=b$ has unique solution if and only if $|A|\neq 0$;

D. if $Ax=b$ has two different solutions，then $Ax=0$ has infinitely many solutions.

34. 已知任一 n 维向量均可由$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$线性表示，则$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$(　　).

A. 线性相关，**B.** 秩等于n，**C.** 秩小于n，**D.** 以上都不对.

35. 设A为n阶方阵且$|A|=0$，则(　　).

A. A中必有两行(列)元素成比例，

B. A中至少有一行(列)元素全为零，

C. A中至少有一行向量是其余各行向量的线性组合，

D. A中每一行向量是其余各行向量的线性组合.

36. 设 $\alpha_1=(1,4,1)^T,\alpha_2=(2,1,-5)^T,\alpha_3=(6,2,-16)^T,\beta=(2,t,3)^T$，当 $t=$ (　　)，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

A.1,　B.3,　C.6,　D.9.

37. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，(　　)也是该方程组的基础解系

A. $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3,4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,$

B. $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$

D. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1.$

三.计算题

38. 设 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ 与 $g(x)=x^2+x-2$，求其最大公因式$(f(x),g(x))$，以及$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

39. 当 c 是什么数时，多项式x^3+cx+1与x^2+cx+1有公根？

40. 试决定系数a，使-1是多项式x^5-ax^2-ax+1的二次或二次以上的重根.

41. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是实系数多项式$x^3+px+q$的根，计算$\sum\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

42. 求n阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

43. 设$|A|$是n阶行列式，$|A|$的第(i,j)元素$a_{ij}=\max\{i,j\}$，求$|A|$的值.

44. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1+a_{n-1} & \cdots & 1 & 1 \\ 1+a_n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

45. 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

答案：1.

46. 确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$, $\alpha_2=(1,a,1)^T$, $\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$, $\beta_2=(-2,a,4)^T$, $\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

47. 令 $a_1=\begin{bmatrix}3\\ \lambda\\ 1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}\lambda\\ 3\\ 0\end{bmatrix}, a_3=\begin{bmatrix}\lambda-3\\ \lambda-1\\ -1\end{bmatrix}$.

(1). λ 取何值，向量组 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 线性相关 ？

(2). 在 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 线性相关前提下，将 a_3 写成 a_1 和 a_2 的线性组合.

48. 已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

求（1）a,b为何值时，方程组有唯一解？

（2）a,b为何值时，方程组有无穷多组解，并用其导出组的基础解系求出其全部解。

49. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

（1）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$.（2）求 a, b 的值及方程组的通解.

50. 计算行列式： $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

51. 试确定k的值使得线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=-2 \\ x_1+kx_2+x_3=-2 \\ kx_1+x_2+x_3=k-3 \end{cases}$$

无解, 有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下，求出它的通解.

四.证明题

52. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三次多项式$x^3+px+qx+r$的 3 个根，证明这 3 个根的到数的平方和等于$\frac{q^2-2pr}{r^2}$.

53. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是数域F上的多项式,若$f(x)$可约，求证：$g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在F上也可约.

54. 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是复数域上的多项式,

若对任一实数c,$f(c)$总是实数，求证$f(x)$是实系数多项式.

55. 设$x_1,x_2,\cdots x_n$全不为0. 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}=x_1x_2\cdots x_n[1+a(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})].$$

56. 假设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵A的秩为$n-1$,且A中某元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，那么$\left(A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{in}\right)^T$是该方程组的基础解系.

57. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$与设向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$秩相等，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$可由$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$线性表示，试证这两组向量等价.

58. 证明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & \ldots & & & & \ldots & & \ldots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \ldots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{cases}$$

对任意常数$b_1,b_2,\ldots,b_s$都有解的充分必要条件是该方程组系数矩

阵的秩为s

59. 设在平面上有 3 条不同的直线:

$$L_1:\ ax + by + c = 0,$$

$$L_2:\ bx + cy + a = 0,$$

$$L_3:\ cx + ay + b = 0,$$

交于一点的充要条件是$a + b + c = 0$.

60. 设$n \geq 2$，证明：元素为 1 或-1的n阶行列式能被2^{n-1}整除.