应用随机过程

泊松过程性质

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

知识回顾

泊松过程的性质

01 $N(0)=0$

02 平稳增加, 独立增加

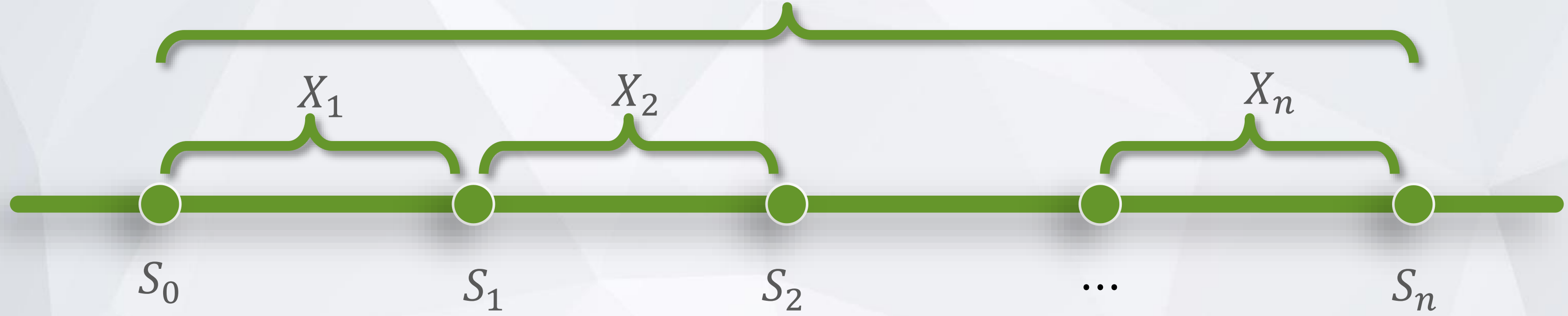
03 $P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$

04 $P\{N(h)\geq 2\}=o(h)$

$$\boldsymbol{P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

间隔时间分布

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$



$\{X_n\}$服从什么概率分布

间隔时间的概率分布

初始情况下第一次事件间隔时间的分布

$$\{X_1 > t\} \Leftrightarrow \{N(t) = 0\}$$ 恒等关系

$$P\{X_1 > t|s = 0\} = P\{X_1 > \mathrm{t}\}$$

$$= P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$$P\{X_1 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

$\{X_1\}$服从参数为λ的指数分布

间隔时间的概率分布

给定第一次事件发生在s时刻情况下第二次事件间隔时间分布

对于任意$s > 0$和$t > 0$，可给出

$$P\{X_2 > t | X_1 = s\} = P\{在时间(s, s+t]内发生0次事件 | X_1 = s\}$$

独立增加性质

$$= P\{在时间(s, s+t]内发生0次事件\}$$

平稳增加性质

$$= P\{在时间(0, t]内发生0次事件\} = e^{-\lambda t}$$

$$P\{X_2 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

$\{X_2\}$服从参数为λ的指数分布

间隔时间的概率分布

给定第$n-1$次事件发生在s时刻情况下第n次事件间隔时间间的分布

当$n>1$时，对于任意$s>0$和$t>0$，可给出

$$P\{X_n>t|X_{n-1}=s\}=P\{\text{在时间}(s,s+t]\text{内发生0次事件}|X_{n-1}=s\}$$

$\Big\downarrow$ 独立增加性质

$$=P\{\text{在时间}(s,s+t]\text{内发生0次事件}\}$$

$\Big\downarrow$ 平稳增加性质

$$=P\{\text{在时间}(0,t]\text{内发生0次事件}\}=e^{-\lambda t}$$

$$P\{X_n\le t\}=1-e^{-\lambda t}\quad(t>0)$$

$\{X_n\}$服从参数为λ的指数分布

到达时刻的概率分布

到达时刻S_n服从参数为(n,λ)的Erlang分布

$$\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$$ 恒等关系

$$P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

到达时刻的概率分布

对于S_n的概率密度函数，有

$$f_{S_n}(t)\Delta t \cong P\{t < S_n \le t + \Delta t\}$$

有$n-1$次事件发生在$(0,t]$内和有一次事件发生$(t, t+\Delta t)$内

$$= P\{(0,\Delta t]\text{内发生}n-1\text{次事件且}(t,t+\Delta t)\text{内发生一次事件}\}$$

独立增加性质

$$= P\{\text{在}(0,t]\text{内发生}n-1\text{次事件}\} \times P\{\text{在}(t,t+\Delta t)\text{内发生}1\text{次事件}\}$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\Delta t$$

$$f_{S_n}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda$$

案例描述

背景: 在一个繁忙的十字路口，行人经过路口的过程服从泊松过程，平均每分钟到达路口的人数为λ。

任务: 通过计算机模拟仿真人群通过十字路口这个随机现象。

解题思路

X_n服从指数分布

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad n = 1,2,\ldots$$

求解过程

给定累积分布函数$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda X}$，故$F_X$的取值范围为[0,1]。

产生[0, 1]区间服从均匀分布的随机数U

↓

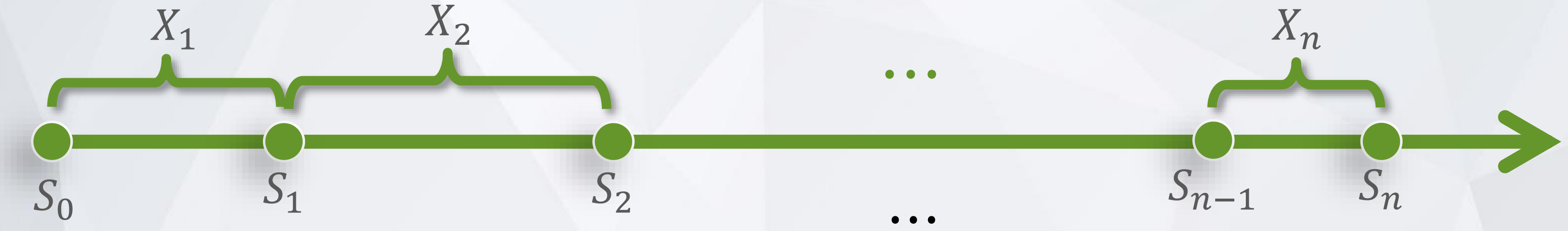
令$X = F^{-1}(U)$ 其中$X \sim F$

↓

$X = -(1/\lambda)log(1-U)$

$F_X(x) = U = 1 - e^{-\lambda X}$

到达时刻模拟图示



思考问题

接前面的案例，思考在给定观察时间t下，如何通过计算机模拟产生经过十字路口的人数 $N(t)$?

提示：$\{N(t) \geq n\} \Leftrightarrow \{S_n \leq t\}$

谢谢听课

授课教师 赵毅