§ 3 功与动能定理

力的空间累积效应: $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$积累 ⟶ A

一、功

力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量）

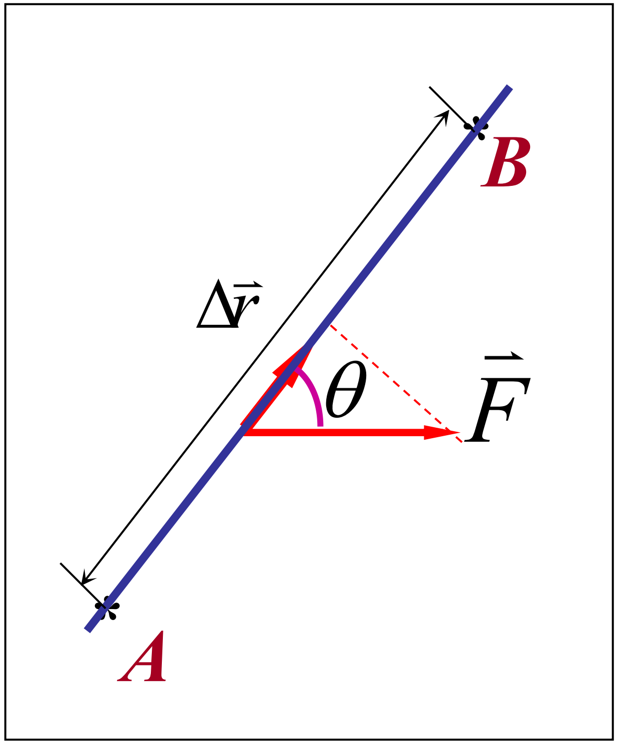
1. 恒力所做的功

$$A = F\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ, \quad A > 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ, \quad A < 0$$

$$\theta = 90^\circ \quad \vec{F} \perp \Delta\vec{r} \quad A = 0$$



2. 变力所做的功

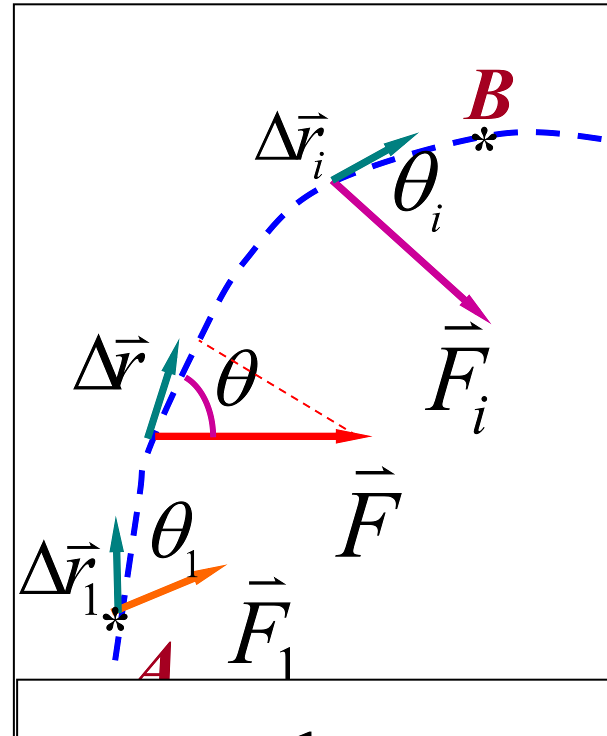
$$A \approx \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{i=1} F_i \left| \Delta \vec{r}_i \right| \cos \theta_i$$

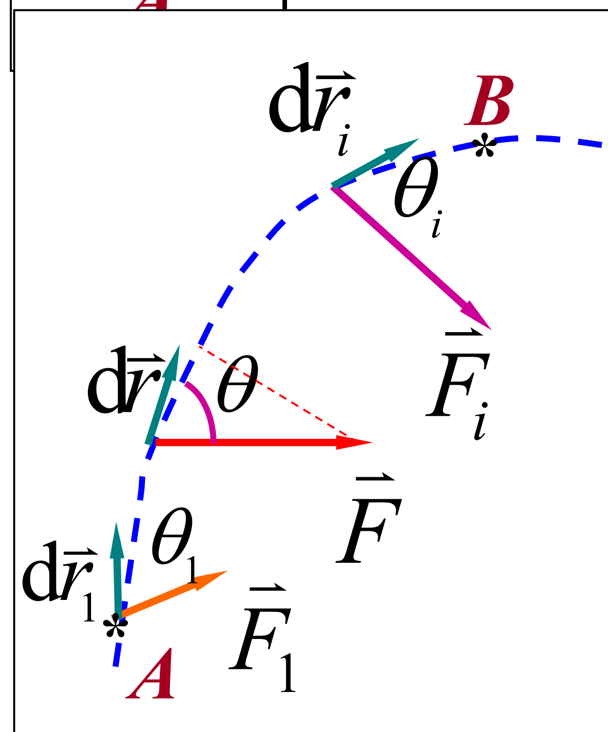
$$A = \lim_{\Delta \vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F \cos \theta \mathrm{d}s}$$

$$\mathrm{d}s = \left| \mathrm{d}\vec{r} \right|$$

➢元功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cos \theta \mathrm{d}s$

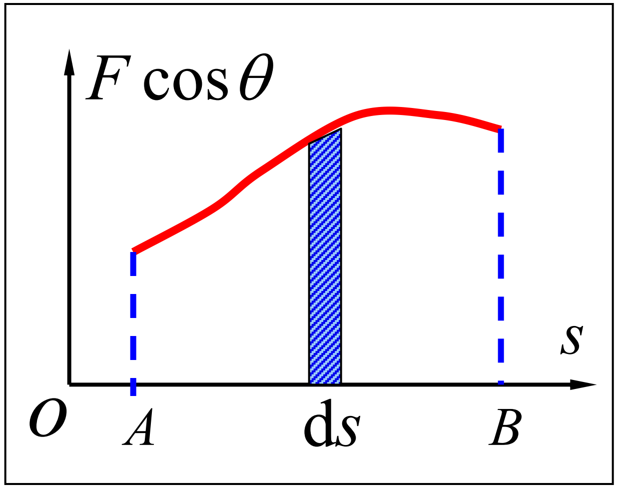




➢ 变力功的图示法

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \mathrm{d}s \cos\theta$$

$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \mathrm{d}s}$$



➢合力的功 = 分力的功的代数和

$$A = \int \sum \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum \int \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i A_i$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \vec{i} + \mathrm{d}y \vec{j} + \mathrm{d}z \vec{k} \end{cases}$$

$$A = \int F_x \mathrm{d}x + \int F_y \mathrm{d}y + \int F_z \mathrm{d}z$$

$$A = A_x + A_y + A_z$$

- 功的大小与参考系有关
- 功的单位 $1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$
- 做功的三个要素：力、物体、过程

3. 功率

平均功率 $\overline{P} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

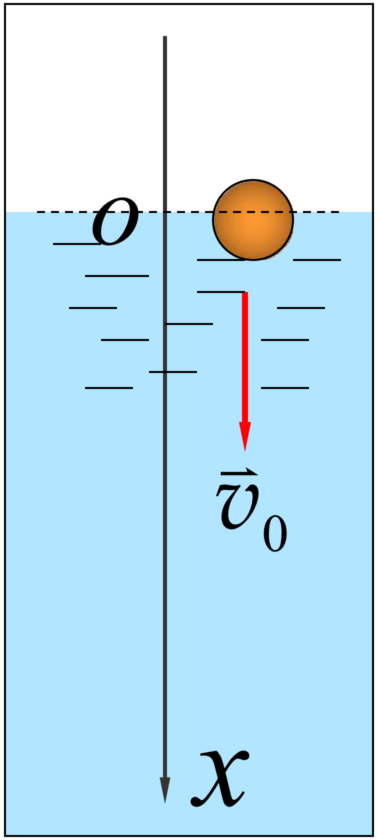
瞬时功率 $P = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$P = Fv\cos\theta$$

功率的单位：瓦特（**W**） $1\text{W} = 1\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad 1\text{kW} = 10^3\,\text{W}$

例 1 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 v_0。设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为 $F_r = -bv$，b 为一常量。求阻力对球做的功与时间的函数关系。

解 如图建立坐标轴



$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -bv\,dx = -\int bv \frac{dx}{dt} dt$$

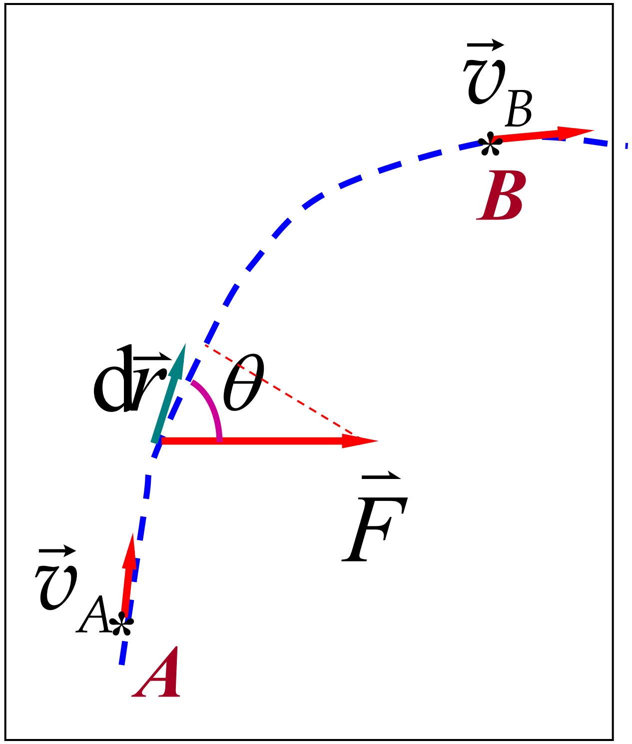
即 $$A = -b\int v^2\,dt$$

又由前面的例题知 $v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$

$$\therefore\ A = -bv_0^2 \int_0^t e^{-\frac{2b}{m}t} dt$$

$$A = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

二、质点的动能定理



$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$

而 $F_{\mathrm{t}}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$A=\int_{v_A}^{v_B} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_{\mathrm{A}}}^{v_{\mathrm{B}}} m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v$$

$$=\int_{v_A}^{v_B} mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

定义：动能（状态函数）—— $\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2}$

动能定理

——合外力对质点所做的功数值上等于该质点动能的增量。

$$\boxed{A = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^{2} - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^{2} = E_{\mathrm{kB}} - E_{\mathrm{kA}}}$$

注意：

- 功是过程量，动能是状态量。
- 功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系。对不同惯性系动能定理形式相同。

例 2 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上。起初把绳子放在与竖直线成 $30°$ 角处，然后放手使小球沿圆弧下落。试求绳与竖直线成 $10°$角时小球的速率。

解：

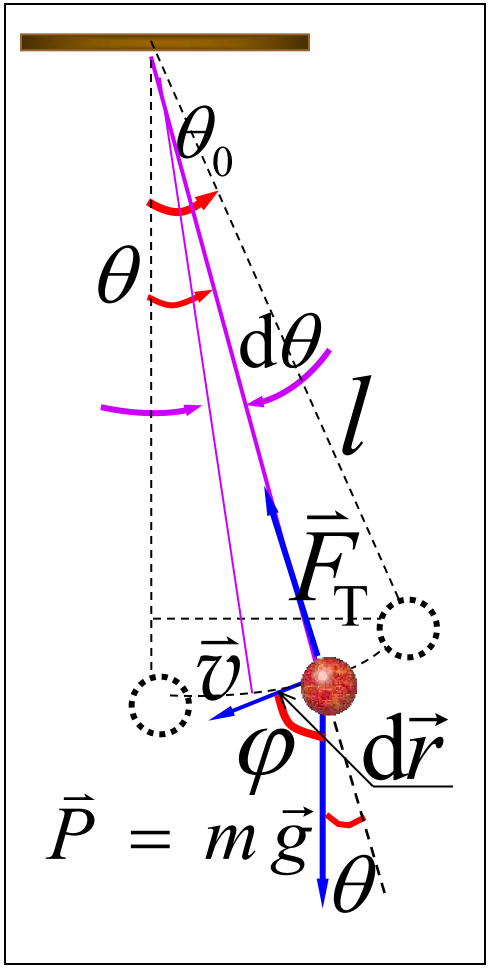
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$



$$m = 1.0\,\mathrm{kg} \qquad l = 1.0\,\mathrm{m}$$

$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

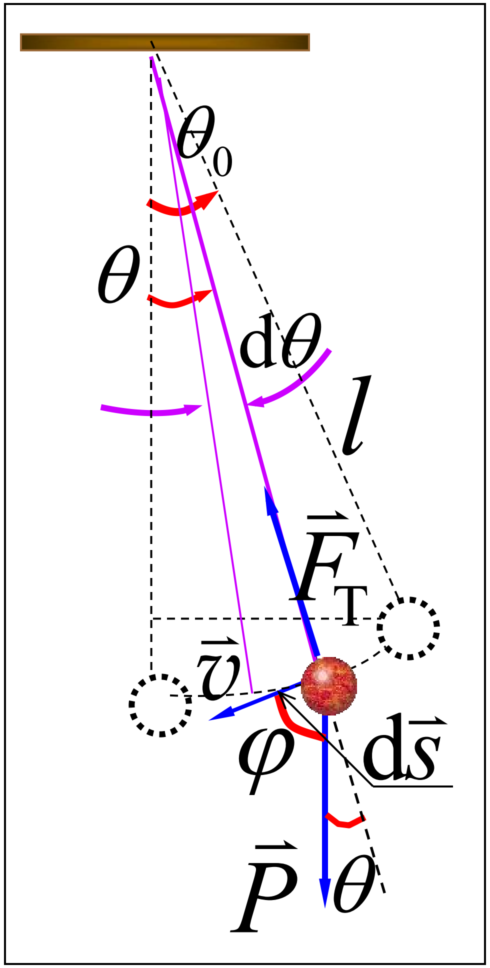
$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得 $$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= 1.53\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$



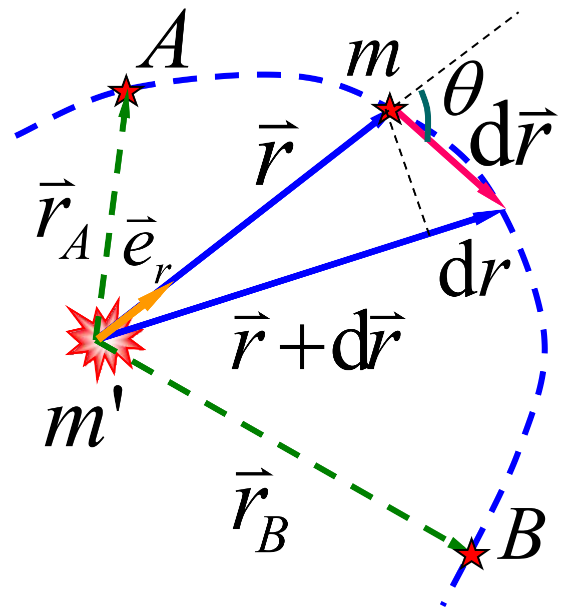
参考教材32页例2-5

§ 4 势能

一、万有引力、重力、弹性力做功的特点

1. 万有引力做功

以 m'为参考系，m 的位置矢量为 $\vec{r}$ 。



m' 对 m 的万有引力为

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r}$$

m移动$\mathrm{d}\vec{r}$时，$\vec{F}$做元功为

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \quad = -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

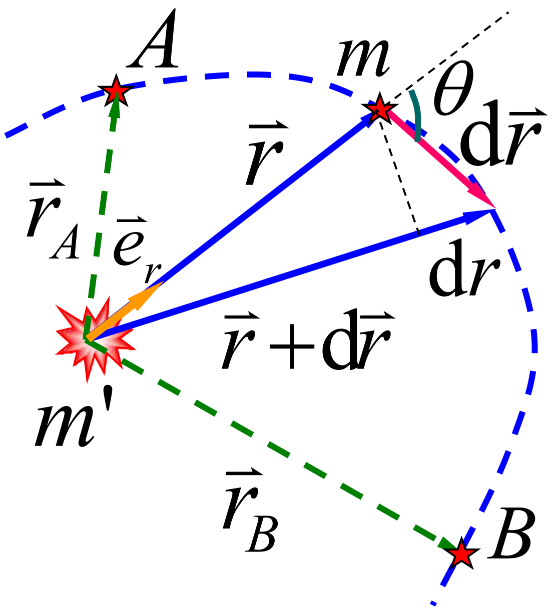
m从A到B的过程中 $\vec{F}$ 做功：

$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B -G\frac{m'm}{r^2}\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{e}_r\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\left|\vec{e}_r\right|\cdot\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta=\mathrm{d}r$$

$$A=\int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\boxed{A=Gm'm(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A})}$$



只与始末位置有关！

2 . 重力做功

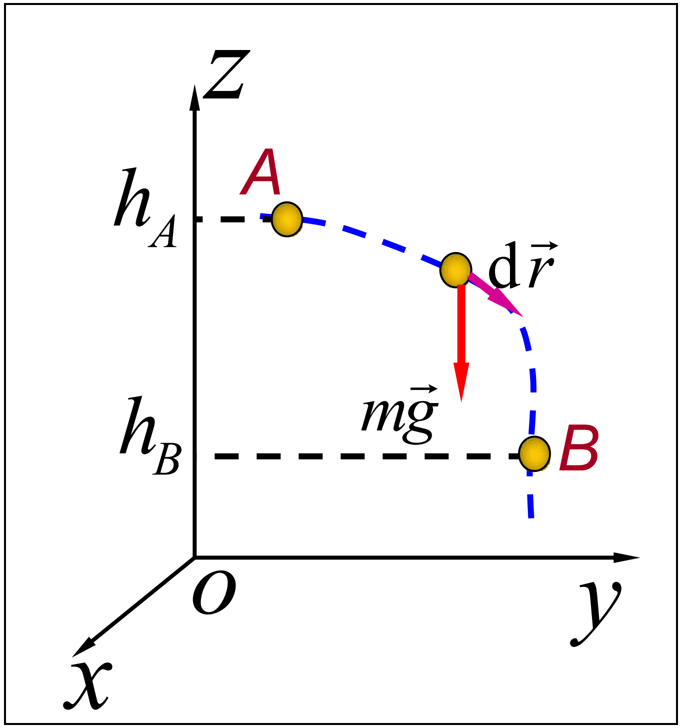
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

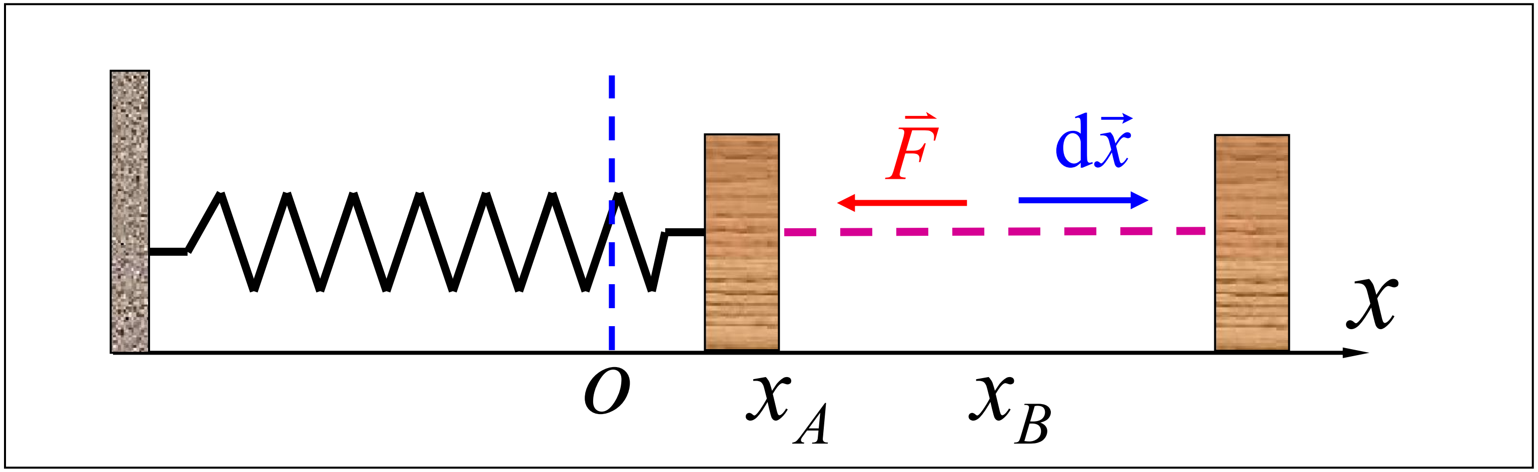
$$A = \int_A^B \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{h_A}^{h_B} -mg\mathrm{d}z$$

$$= -(mgh_B - mgh_A)$$

$$A = \oint -mg\mathrm{d}z = 0$$



3. 弹性力做功



$$\boxed{\vec{F} = -kx\vec{i}}$$

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x\vec{i}$$

$$A = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_A}^{x_B} -kx\mathrm{d}x$$

$$A = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$$

$$A = \oint -kx\mathrm{d}x = 0$$

二、保守力和非保守力

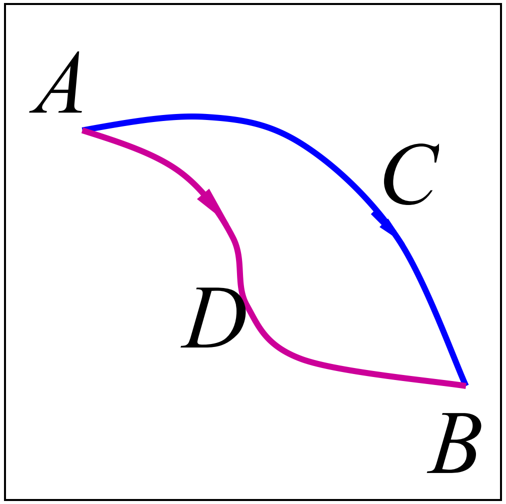
保守力: 力所做的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的始末相对位置。

引力功 $A = -\left[(-G\frac{m'm}{r_B}) - (-G\frac{m'm}{r_A})\right]$

重力功 $A = -(mgh_B - mgh_A)$

弹力功 $A = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{ADB}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

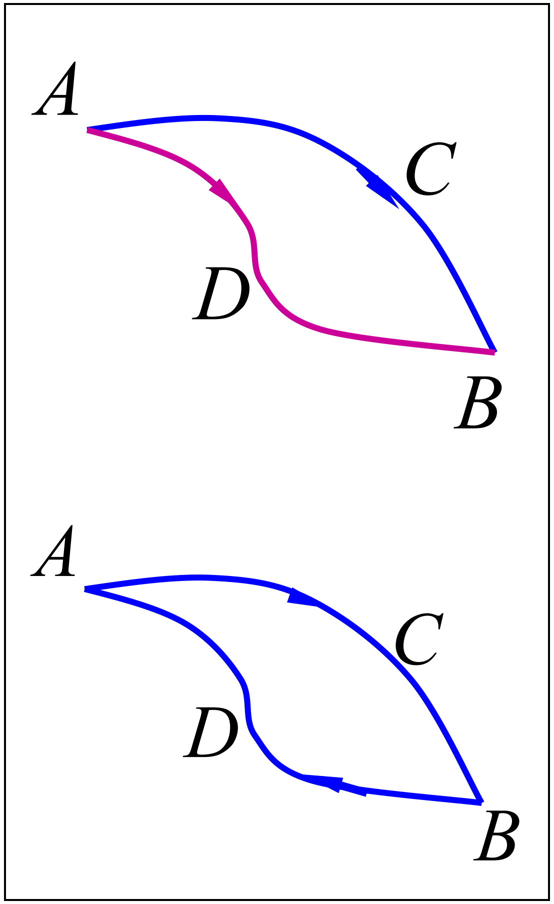


$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{ADB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$$\because \oint_{L} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{ACB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{BDA} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\therefore \oint_{L} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



物体沿闭合路径运动 一周时，

保守力对它所做的功等于零。

非保守力：力所做的功与路径有关 。（例：摩擦力）

常见的保守力:

- 万有引力 $F = F(r)\vec{e}_r$ (或有心力）
- 弹力 $\vec{f} = -k\vec{x}$（或位置的单值函数）
- 重力 $\vec{f} = m\vec{g}$（或恒力）

常见的非保守力（耗散力）：

- 摩擦力
- 爆炸力

三、势能

势能，与物体间相互作用及相对位置有关的能量。

重力功

$$A = -(mgh_B - mgh_A)$$

引力功

$$A = -\left[(-G\frac{m'm}{r_B}) - (-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

弹力功

$$A = -(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2)$$

重力势能

$$E_{\mathrm{p}} = mgh$$

引力势能

$$E_p = -G\frac{m'm}{r}$$

弹性势能

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2$$

保守力的功

$$A = \int_1^2 \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -(E_{\mathrm{p}2} - E_{\mathrm{p}1}) = -\Delta E_{\mathrm{P}}$$

讨论：

- 势能是位置的函数。 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$

- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关 。

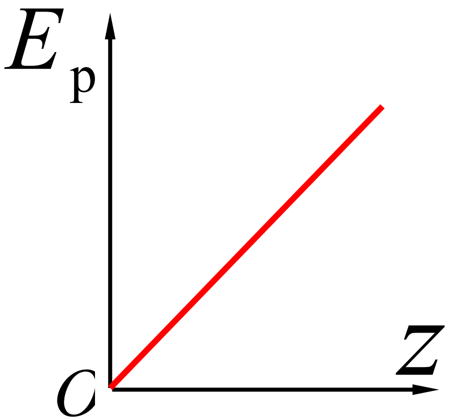
- 势能是属于系统的。

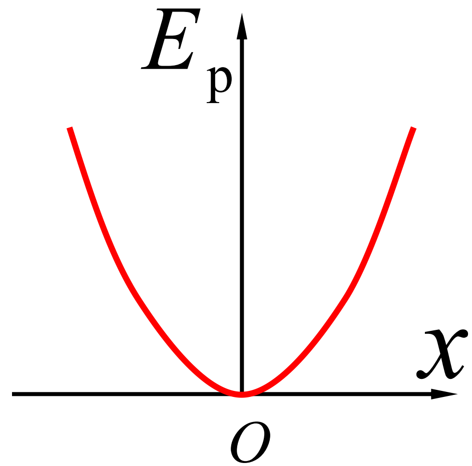
- 势能计算 $$\boxed{E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}} = -A = -\int_{初}^{末} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

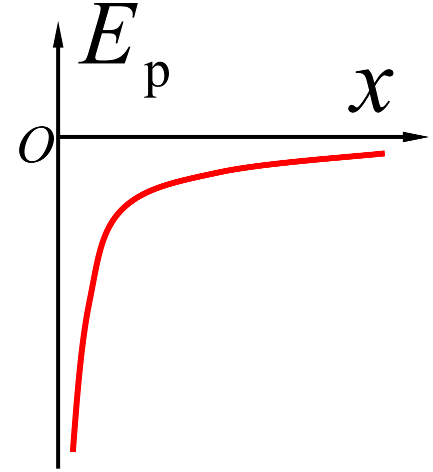
令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$ $$\boxed{E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

四、势能曲线

$$E_p = mgz \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_p = -G\frac{m'm}{r}$$







重力势能曲线　　弹性势能曲线　　引力势能曲线

$z = 0,\quad E_p = 0$　　$x = 0,\quad E_p = 0$　　$r \to \infty,\quad E_p = 0$

<u>补充题1：</u> 一人从10m深的井中提水，起始时桶和水共重10kg，由于水桶漏水，每升高1m要漏去0.2kg的水。求将水桶匀速地从井中提到井口，人所做的功。

$$W=\int_0^A \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_0^{10}(10-0.2z)g\cdot \mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{10}(98-1.96z)\mathrm{d}z=882(J)$$

变力做功问题，课后看教材30页例2-4

补充题2： 一质量为2kg的物体，在变力 $\vec{F}=6t\vec{i}$ 的作用下作直线运动，如果物体从静止开始运动，求前两秒此力所作的功。

$$A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int 6t\vec{i}\cdot\left(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}\right)$$

$$=\int 6t\mathrm{d}x=\int 6tvdt$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=3t\vec{i}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad v-0=\int 3t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2$$

$$W=\int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t=\int_0^2 9t^3\mathrm{d}t=36(J)$$