练 习 1（2021）

一. 选择题

1. 复数域上的$n\times n$矩阵集合按通常的矩阵加法与数乘运算，对于实数域(　　)

(A)不构成其上的线性空间；　(B)构成其上的n维线性空间；

(C)　构成其上的$2n^2$维线性空间；(D)构成其上的n^2维线性空间；

2. 下列论述哪个正确(　　)

(A)如果$k_1=k_2=\cdots k_r=0$时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

(B)如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，且$\alpha_{r+1}$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$线性无关；

(C)如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则其中每个向量都不能由该向量组线性表示；

(D)　如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关，则其中每个向量都能由其余向量线性表示.

3. R^4中的全体反对称矩阵所成线性空间的维数为(　　).

(A) 6;　(B) 27;　(C) 9;　(D)3.

4. 与矩阵$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$乘法交换的$F^{3\times3}$中的矩阵按矩阵的加法与数乘(　　).

(A)不构成$F^{3\times3}$的线性子空间；　(B)构成$F^{3\times3}$的2维线性子空间；

(C)构成$F^{3\times3}$的4维线性子空间；(D)构成$F^{3\times3}$的3维线性子空间.

5.令U,V,X,Y都是R^3的线性子空间，$Y\subseteq X, X=U+V$，则(　).

(A) $Y=Y\cap U+Y\cap V$;　 (B)；$Y\neq Y\cap U+Y\cap V$

(C)若$U\subseteq Y$或$V\subseteq Y$，$Y=Y\cap U+Y\cap V$;(D)以上都不正确。

6. 令

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

则(　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$构成$R^4$的一个基;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,e_4$构成$R^4$的一个基，$e_4=(0\quad 0\quad 0\quad 1)^T$;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,e_2$构成 R^4的一个基，$e_2=(0\quad 1\quad 0\quad 0)^T$

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,e_4$构成 R^4的一个基.

7. 设$V_1,V_2,\dots,V_k$都是线性空间 V 的子空间，下面的陈述哪一个是错误的(　)

(A) $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k\Leftrightarrow$

$0=0+0+\cdots+0$;

(B)若$V_i\cap V_j=0, i\neq j=1,2,\dots,k$, 则

$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k$;

(C) $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k\Leftrightarrow$

$dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)=\sum dimV_i$;

(D)若$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k$，则

$V_i\cap V_j=0, i\neq j=1,2,\dots,k$.

二．填空

8.设$\mathbf{F}^3$的两个子空间

$$W_1=\{(a,a,c)^T|a,c\in R\},\ W_2=\{(a,2a,a)^T|a\in R\}.$$

则 $\dim(W_1\cap W_2)=$______, $\dim(W_1+W_2)=$________.

9. 在$\mathbf{F}^{2\times2}$中, 基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵为______________.

10.在$F[x]_3$中，向量α在基底：$1,x,x^2$下的坐标为$1,0,-1$，则α在基底：$1+x,x+x^2,x^2$下的坐标为____________. .

11.在$\mathbf{F}^{2\times2}$中, 令

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$$
$$F_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},F_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},F_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}.$$

求一2×2矩阵$A=$_________使A在上述两组基底$\{E_i\},\{F_i\}$下的坐标相等.

12. 令V_1是齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$解空间，V_2是齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\-x_1+x_2\qquad\ +x_4=0\end{cases}$的解空间．则

$\dim(V_1\cap V_2)=$___________, $\dim(V_1+V_2)=$___________.

13.令V_1是齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$解空间，V_2是齐

次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$的解空间. F^4是否是V_1与V_2的直和________?

14. 在 F^4 中，$\alpha_1 = (1,0,-1,0)^T, \alpha_2 = (0,1,2,1)^T, \alpha_3 = (2,1,0,1)^T$生成$R_1$，$\beta_1 = (-1,1,1,1)^T, \beta_2 = (1,-1,-3,-1)^T$，$\beta_3 = (-1,1,-1,1)^T$生成$R_2$；则$R_1 \cap R_2$的一个基为________，$R_1 + R_2$的一个基为________.

三．综合题

15. 已知向量组

$\alpha_1 = (1,2,1,-2)^T, \alpha_2 = (2,3,1,0)^T, \alpha_3 = (1,2,2,-3)^T$；

$\beta_1 = (1,1,1,1)^T, \beta_2 = (1,0,1,-1)^T$，$\beta_3 = (1,3,0,-4)^T$，

设子空间$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，求子空间$V_1 \cap V_2$与$V_1 + V_2$的一组基及维数.

16. 在$F[x]$ 中求向量组$T = \{f(x) | degf(x) = n\}$一个极大无关组.

17. 设R, R_1, R_2都是线性空间$V(F)$的子空间，其中$R_1 \subseteq R_2$，且$R \cap R_1 = R \cap R_2, R + R_1 = R + R_2$，证明: $R_1 = R_2$.

18. 设R, L都是线性空间$V_n(F)$的真子空间，证明:

$$dimR \cap L \geq dimR + dimL - n.$$

19. 令$n \times n (n \geq 3)$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

1）确定a的值使齐次线性方程组$AX=0$有非零解;

2)设V_1,V_2分别是$AX=0$对于a的1)中的两个不同值的解空间,

证明：$F^n=V_1\oplus V_2$.