

第二章 命题逻辑等值演算

① 等值式

给定两个命题公式 A 和 B 。如果 A 和 B 的真值表相同，则称 A 和 B 是等值(等价)的或逻辑相等。记作 $A \equiv B$ 。

■ $A \equiv B$ 的充要条件是 $A \Leftrightarrow B$ 为重言式。

证：若 $A \equiv B$ ，则 A, B 有相同的真值，即有 $A \Leftrightarrow B$ 的值永为 T 。

若 $A \Leftrightarrow B$ 为重言式，则 $A \Leftrightarrow B$ 的值永为 T ，故 A, B 的真值相同，即 $A \equiv B$ 。

例 1：证明： $P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$ 。

例 2：判断下面两个公式是否等值。

1) $\sim(P \vee Q)$ 与 $\sim P \wedge \sim Q$ 。

2) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ 与 $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ 。

② 24 个重要的等值式

(1) 否定律 $P \equiv \sim \sim P$

(2) 幂等律 $P \equiv P \vee P, P \equiv P \wedge P$

(3) 交换律 $P \vee Q \equiv Q \vee P, P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

(4) 结合律 $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

(5) 分配律 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R),$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(6) 德·摩根律 $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q, \sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

(7) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \equiv P, P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

(8) 零律 $P \vee 1 \equiv 1, P \wedge 0 \equiv 0$

(9) 同一律 $P \vee 0 \equiv P, P \wedge 1 \equiv P$

(10) 排中律 $P \vee \sim P \equiv 1$

(11) 矛盾律 $P \wedge \sim P \equiv 0$

(12) 蕴涵等值式 $P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

(13) 等价等值式 $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

(14) 假言易位 $P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P$

(15) 等价否定等值式 $P \Leftrightarrow Q \equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q$

(16) 归谬论 $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \sim Q) \equiv \sim P$

其中 1 代表永真命题，0 代表永假命题，P, Q 和 R 代表任意的命题公式。

■ **等值演算：**由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程。

■ **等值演算的应用**

(1) 证明两个公式等值。

(2) 判断公式类型。

(3) 解判定问题。

例 3: 用等值演算验证等值式

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)。$$

例 4: 用等值演算判断下列公式类型。

- (1) $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q。$
- (2) $\sim(P \Rightarrow (P \vee Q)) \wedge R。$
- (3) $P \wedge ((P \vee Q) \wedge \sim P) \Rightarrow Q。$

■ 求解实际问题的方法如下:

- (1) 先找出原子命题, 便将其符号化。
- (2) 按题意写出命题公式。
- (3) 求成真赋值。

例 5: 某公司要从赵, 钱, 孙, 李, 周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件

- (1) 若赵去, 则钱也去。
- (2) 李, 周两人中必有一人去。
- (3) 钱, 孙两人中去且仅去一人。
- (4) 孙, 李两人同去或同不去。
- (5) 若周去, 则赵, 钱也同去。

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国。

③ 析取范式和合取范式

- **文字**：命题变元或其否定。
- **简单析取式**：仅由有限个文字构成的析取式。
- **简单合取式**：仅由有限个文字构成的合取式。

简单析取式举例：

$P, \sim Q, P \vee \sim P, \sim P \vee Q, \sim P \vee \sim Q \vee R, P \vee \sim Q \vee R.$

简单合取式举例：

$\sim P, Q, P \wedge \sim P, \sim P \wedge Q, \sim P \wedge \sim Q \wedge R, P \wedge \sim Q \wedge R.$

注 1：一个文字即是简单析取式，又是简单合取式。

定理 1：(1) 一个简单析取式是重言式 \Leftrightarrow 它同时含某个命题变元及它的否定式。

(2) 一个简单合取式是矛盾式 \Leftrightarrow 它同时含某个命题变元及它的否定式。

- **析取范式**：由有限个简单合取式构成的析取式。
- **合取范式**：由有限个简单析式构成的合取式。
- **范式**：析取范式与合取范式的统称。

◆ 一个命题公式为析取范式当且仅当它具有形式

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n \quad (n \geq 1),$$

其中 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为简单合取式。

例如： $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim Q \wedge \sim R) \vee P$ 。

◆ 一个命题公式为合取范式当且仅当它具有形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \quad (n \geq 1),$$

其中 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为简单析取式。

例如： $(P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q) \wedge R$ 。

注 2： (1) 形如 $\sim P \wedge Q \wedge R$ 的公式，即是一个简单合取式构成的析取范式，又是由三个简单析取式构成的合取范式。

(2) 形如 $P \vee \sim Q \vee R$ 的公式，即是一个简单析取式构成的合取范式，又是由三个简单合取式构成的析取范式。

定理 2： 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

◆ 求合取范式或析取范式的步骤：

(1) 消去 $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ 联结词。

(2) 消去双重否定符，内移否定符。

(3) 利用分配律、交换律。

例 6： 求 $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Rightarrow P$ 的析取范式和合取范式。

注 3: 例 6 显示析取范式不是唯一的, 同样合取范式也是不唯一的。

为了使命题公式的范式唯一, 我们进一步将简单合取式与简单析取式规范化。

◆ **极小项:** 含有 n 个命题变元的简单合取式, 并满足

- a) 每个命题变元与它的否定不能同时存在, 但两者之一必须出现且仅出现一次。
- b) 第 i 个命题变元或它的否定出现在从左算起的第 i 个位置上。

◆ **极大项:** 含有 n 个命题变元的简单析取式, 并满足

- a) 每个命题变元与它的否定不能同时存在, 但两者之一必须出现且仅出现一次。
- b) 第 i 个命题变元或它的否定出现在从左算起的第 i 个位置上。

注 4: n 个命题变元共有 2^n 个极小项(极大项)。

注 5: (1) 每个极小项的真值表里只有一个成真赋值。

(2) 每个极大项的真值表里只有一个成假赋值。

例如: 2 个命题变元的 4 个极小项的真值表如下:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \sim Q$	$\sim P \wedge Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T

如果我们把极小项(极大项)的成真(假)赋值中的 T 取成 1, F 取成 0。那么每一个极小项(极大项)都对应一个二进制数, 因而也对应一个十进制数。

3 个命题变项 P, Q, R 的极小项编码

公式	成真赋值	对应十进制数	名称
$\sim P \wedge \sim Q \wedge \sim R$	FFF	0	m_0
$\sim P \wedge \sim Q \wedge R$	FFT	1	m_1
$\sim P \wedge Q \wedge \sim R$	FTF	2	m_2
$\sim P \wedge Q \wedge R$	FTT	3	m_3
$P \wedge \sim Q \wedge \sim R$	TFF	4	m_4
$P \wedge \sim Q \wedge R$	TFT	5	m_5
$P \wedge Q \wedge \sim R$	TTF	6	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	TTT	7	m_7

3 个命题变项 P, Q, R 的极大项编码

公式	成假赋值	对应十进制数	名称
$P \vee Q \vee R$	FFF	0	M_0
$P \vee Q \vee \sim R$	FFT	1	M_1
$P \vee \sim Q \vee R$	FTF	2	M_2
$P \vee \sim Q \vee \sim R$	FTT	3	M_3
$\sim P \vee Q \vee R$	TFF	4	M_4
$\sim P \vee Q \vee \sim R$	TFT	5	M_5
$\sim P \vee \sim Q \vee R$	TTF	6	M_6
$\sim P \vee \sim Q \vee \sim R$	TTT	7	M_7

定理 3: 设 m_i 和 M_i 是命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 形成的极小项和极大项, 则

- (1) $m_i \wedge m_j \equiv 0, (i \neq j)$ 。
- (2) $M_i \vee M_j \equiv 1, (i \neq j)$ 。
- (3) $\sim m_i \equiv M_i, \sim M_i \equiv m_i$ 。

◆ **主析取范式:** n 个命题变元构成的析取范式中所有的简单合取式都是极小项。

◆ **主合取范式:** n 个命题变元构成的合取范式中所有的简单析取式都是极大项。

定理 4: 任一命题公式都存在与之等值的主析取范式与主合取范式，并且是唯一的。

求公式 A 主析取范式的步骤:

● **方法一：等值演算法**

- (1) 求出析取范式。
- (2) 去掉永假的合取项。
- (3) 对合取项补入没出现的命题变元。 $(P \vee \sim P)$
- (4) 去掉重复的合取项、合并相同变元。

● **方法二：真值表法**

- 1) 写出 A 真值表。
- 2) 找出 A 的成真赋值。
- 3) 找出每个成真赋值对应的极小项，按顺序写出它们的析取。

求公式 A 主合取范式的步骤:

● **方法一：等值演算法**

- (1) 求出合取范式。
- (2) 去掉永真的析取项。
- (3) 对析取项补入没出现的命题变元。 $(P \wedge \sim P)$

(4) 去掉重复的析取项、合并相同变元。

● 方法二：真值表法

4) 写出 A 真值表。

5) 找出 A 的成假赋值。

6) 找出每个成假赋值对应的极大项，按顺序写出它们的合取。

例 7：求 $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \vee Q$ 的主析取范式。

例 8：求 $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \vee Q$ 的主合取范式。

■ 主析(合)取范式的用途：

- (1) 求公式的成真与成假赋值。
- (2) 判断公式类型。
- (3) 判断两个命题公式是否等值。
- (4) 解决实际问题。

例 9：求 $(P \Rightarrow \sim Q) \Rightarrow R$ 的成真与成假赋值。

例 10：某公司派小李或小张去上海出差。若派小李去，则小赵要加班。若派小张去，小王也得去。小赵没加班。问公司如何派？