§5 角动量　角动量守恒定律

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理。

一、质点的角动量定理和角动量守恒定律

1. 质点的角动量

质点作圆周运动时，运动状态的描述

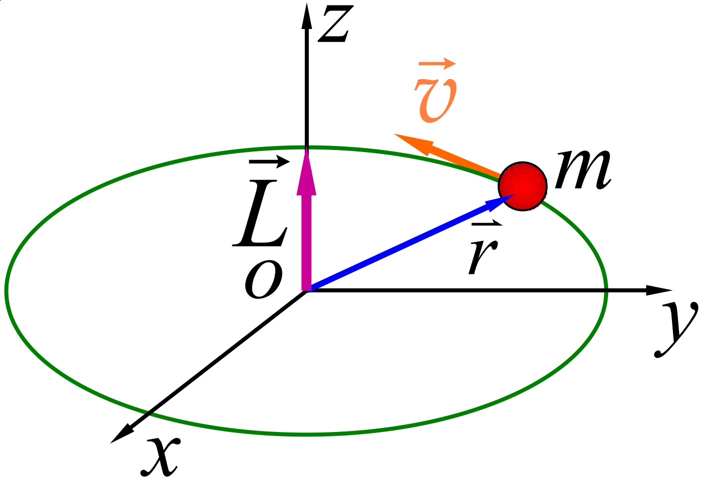
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

——其方向不断随时间而变化。

若定义一个物理量——

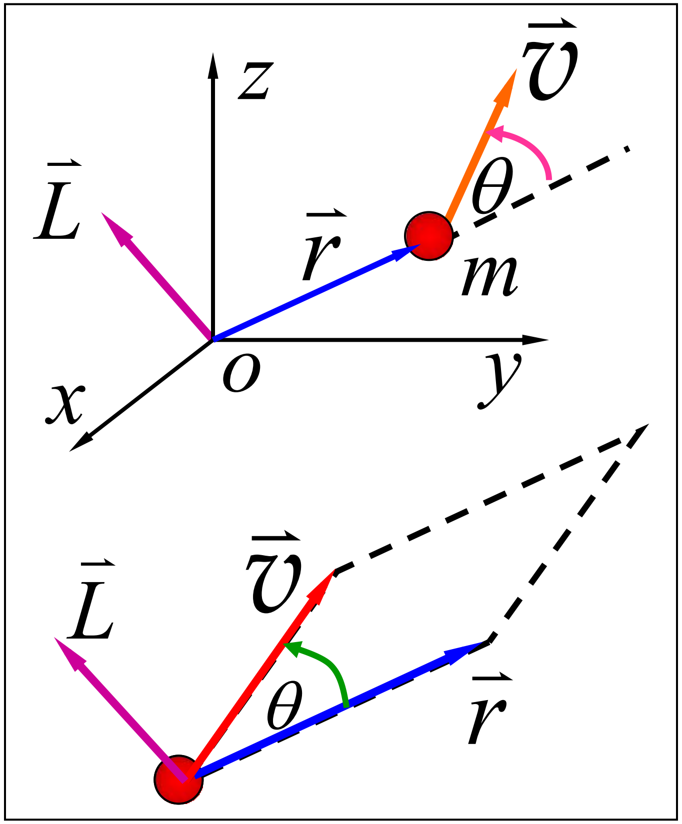
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

——称为质点的角动量，其方向不随时间而变化。



一般而言

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 O 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

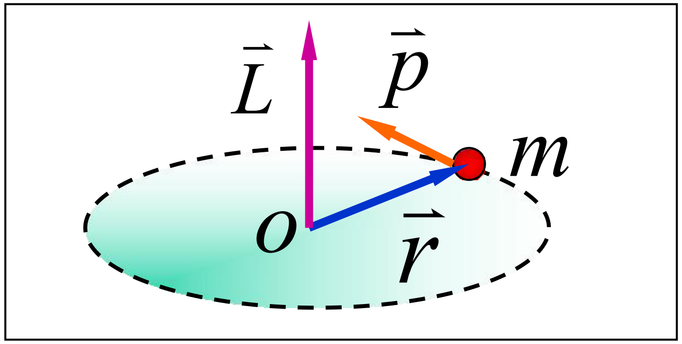


$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则。

➢ 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量



$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}=J\vec{\omega}$$

2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

——作用于质点的合力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率。

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

3. 质点的角动量守恒定律

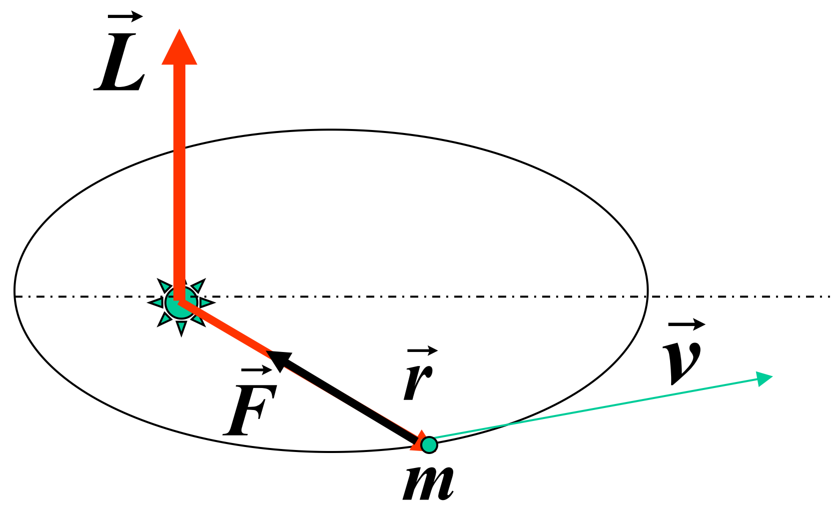
$$\vec{M}=0 \Longrightarrow \vec{L}=\text{恒矢量}$$

——质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量。

***自然界的普适规律。

$$\vec{M}=0 \quad \text{的条件是} \begin{cases} \vec{F}=0 \\ \text{或 } \vec{F} \text{ 过固定点：有心力} \\ \text{（如行星受的万有引力）} \end{cases}$$

例. 证明开普勒第二定律：行星对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。



【解】因为是有心力场，
所以力矩 M=0,

角动量守恒：$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=$常矢量

所以 $m\vec{v}$ 与 $\vec{r}$ 始终在同一平面内。

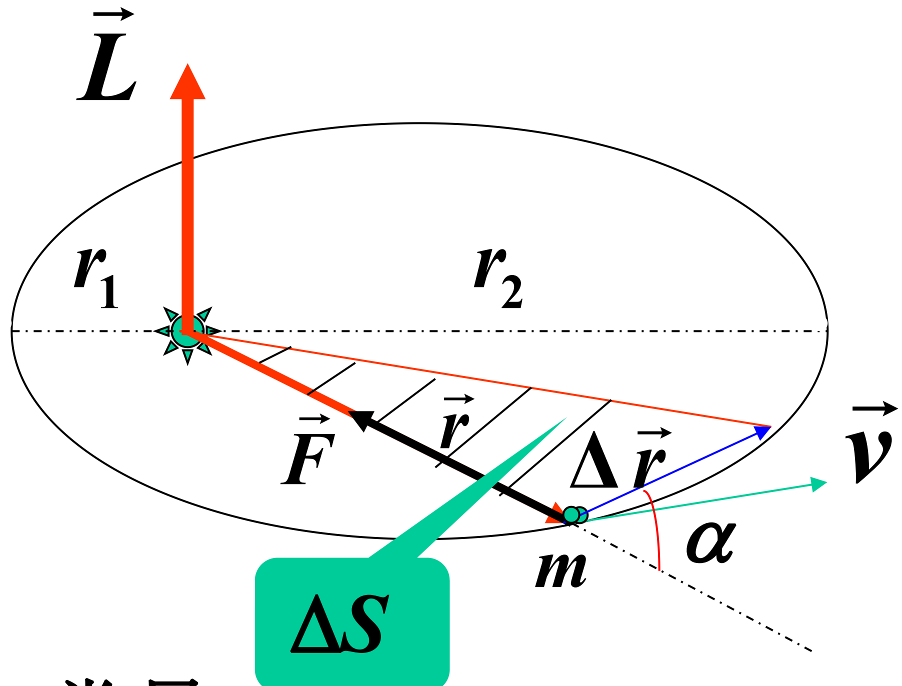
若经 Δt 时间，$\Delta S=\frac{1}{2}r\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|$

扫面速度：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

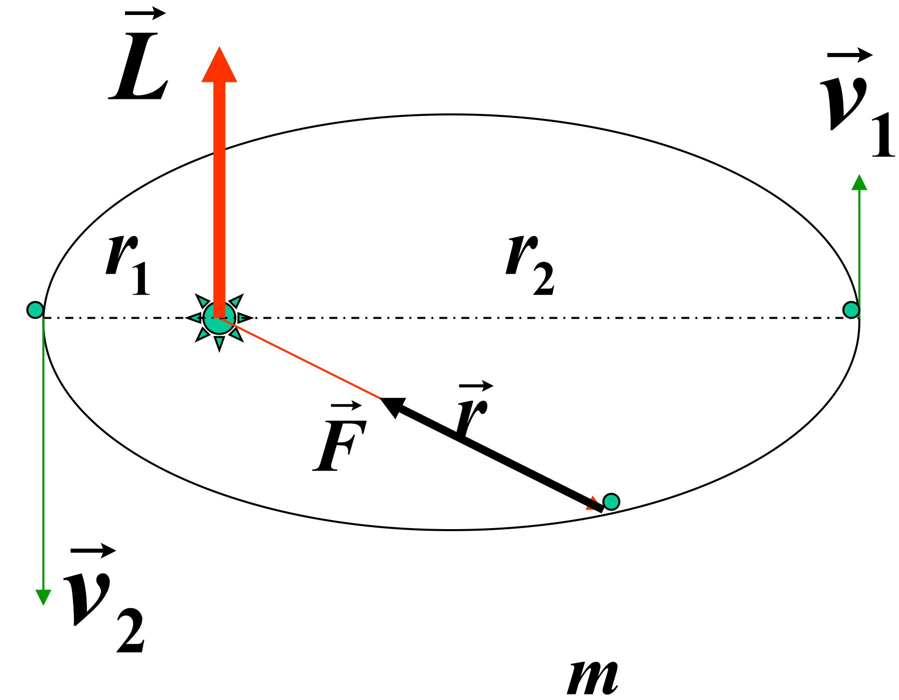
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|=\text{常量}$$

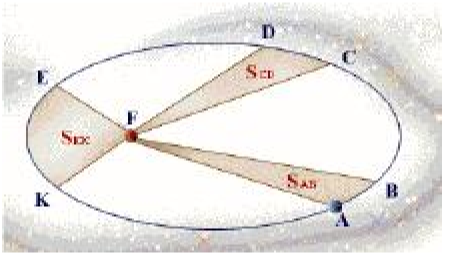


所以地球人造卫星
在近地点速度大，
在远地点速度小。

1970年，我国发射
了第一颗地球人造
卫星。



近地点高度为 266 km, 速度为 8.13 km/s;
远地点高度为 1826 km, 速度为 6.56 km/s;



计算出椭圆的面积,根据“扫面速度”，
就可以得到绕行周期为 ______分钟。（课下算一下）

例1 一半径为 R 的光滑圆环置于竖直平面内。一质量为 m 的小球穿在圆环上，并可在圆环上滑动。小球开始时静止于圆环上的点 A（该点在通过环心 O 的水平面上），然后从 A 点开始下滑。设小球与圆环间的摩擦略去不计。求小球滑到点 B 时对环心 O 的角动量和角速度。

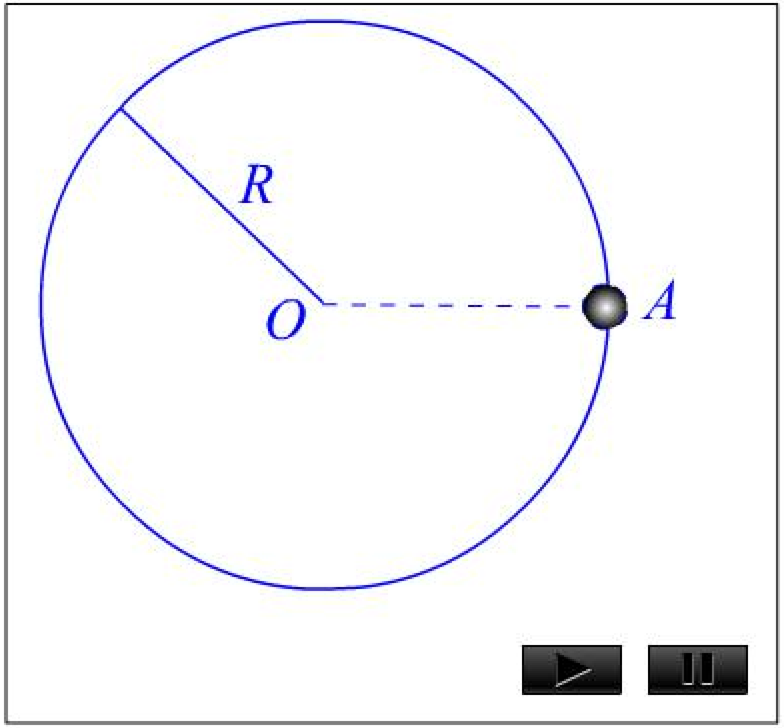
解 小球受重力和支持力作用，支持力的力矩为零，重力矩垂直纸面向里

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

$$M = mgR\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mgR\cos\theta$$

由质点的角动量定理

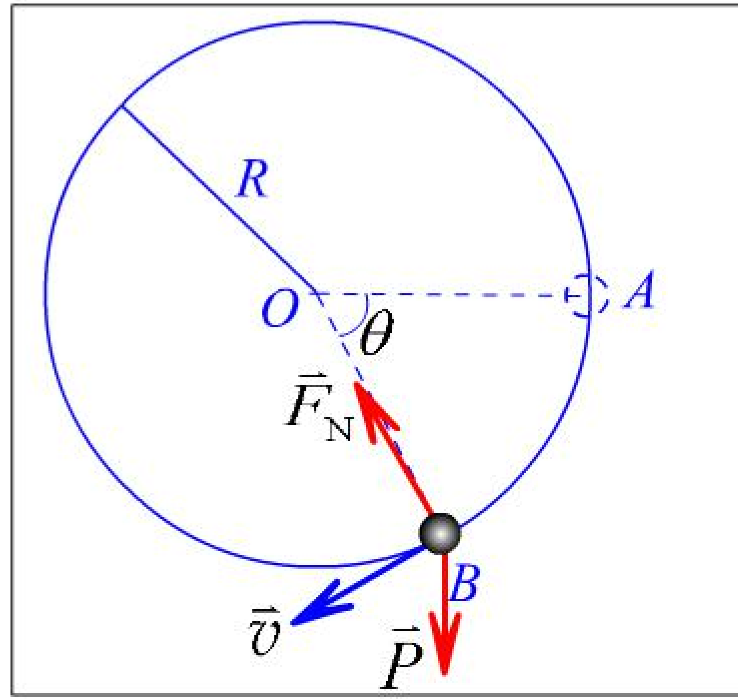
$$M = mgR\cos\theta = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$



$$\mathrm{d}L = mgR\cos\theta\,\mathrm{d}t = mgR\cos\theta\,\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta} = mgR\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega}$$

考虑到 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\quad L = mRv = mR^2\omega$

得 $L\mathrm{d}L = m^2 gR^3 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$



由题设条件积分上式

$$\int_0^L L\mathrm{d}L = m^2 gR^3 \int_0^\theta \cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$L = mR^{3/2}(2g\sin\theta)^{1/2}$$

$$\because\ L = mR^2\omega \qquad \therefore\ \omega = \left(\frac{2g}{R}\sin\theta\right)^{1/2}$$

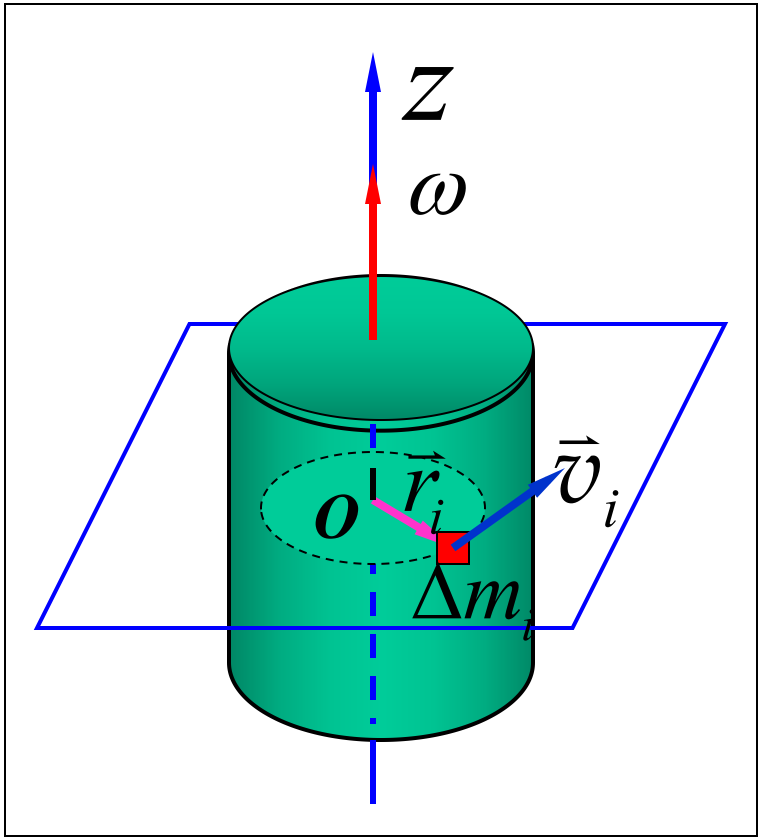
二、 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

$$L_i = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_i v_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$



$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$

——描述刚体定轴转动的状态。

$\vec{L}$、J、$\vec{\omega}$ 应该具有同轴性。

2. 刚体定轴转动的角动量定理

$$\vec{M} = J\vec{\beta} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\vec{\omega}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}\left(J\vec{\omega}\right)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1}$$

**对于非刚体而言，定轴转动的角动量定理可以表述为

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = J_2\vec{\omega}_2 - J_1\vec{\omega}_1}$$

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ ，则 $\vec{L}=J\vec{\omega}=$常量

讨论：

- 守恒条件 $M=0$

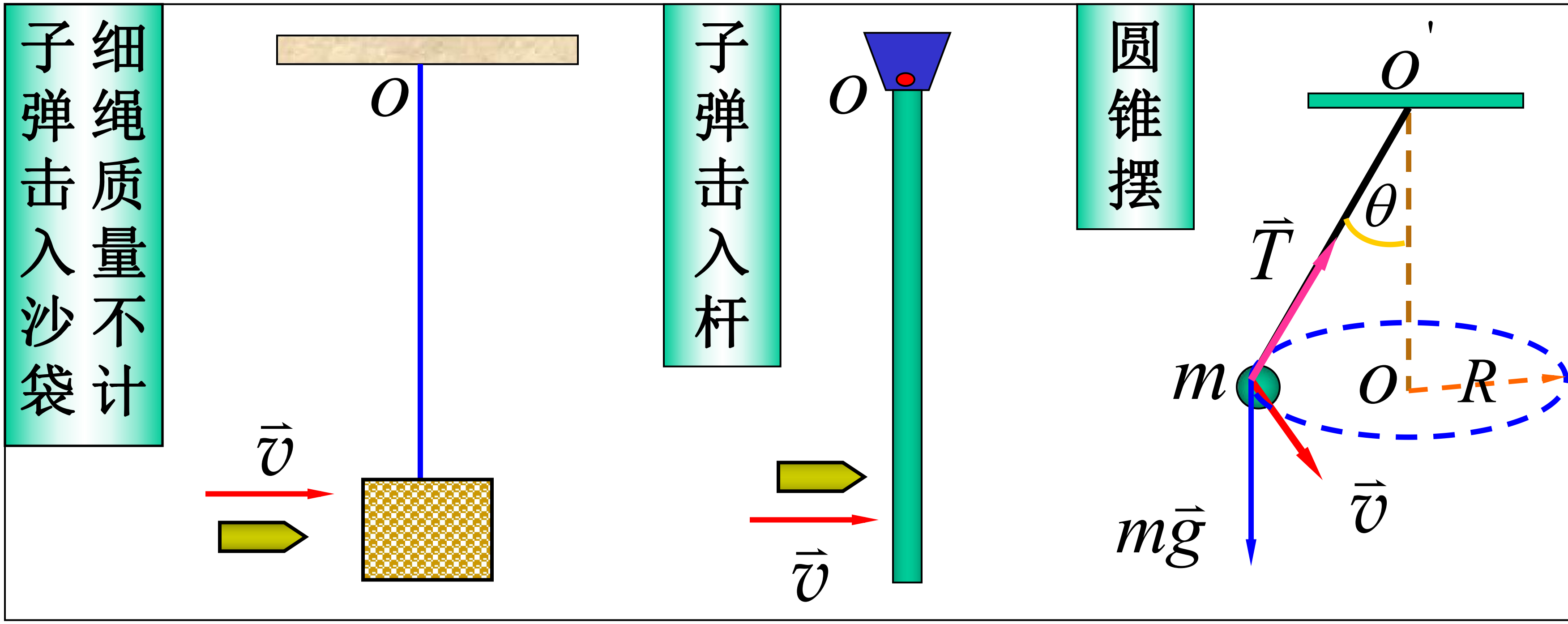
  若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L=J\omega$ 不变。

- 内力矩不改变系统的角动量。
- 在冲击等问题中，$\because M_{内} >> M_{外}$ $\therefore L\approx$常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律。

- 有许多现象都可以用角动量守恒来说明

$$J\vec{\omega} = \text{常量}$$

讨 论：

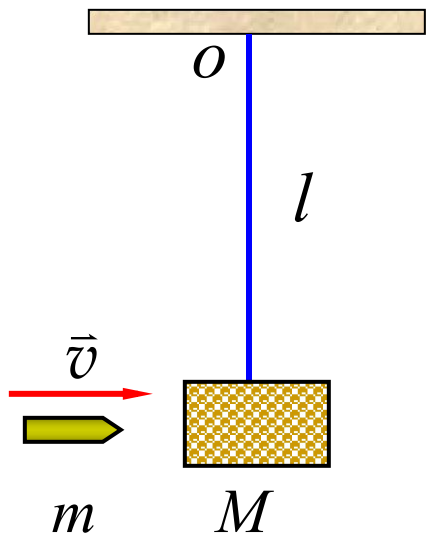


以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒？
机械能不守恒。	机械能不守恒 。	机械能守恒 。

求沙箱升高的最大高度h

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

细绳质量不计
子弹击入沙箱



动量守恒 ？

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？ （不）

$$mv = (m+M)v'$$

$$mvl = (m+M)v'l$$

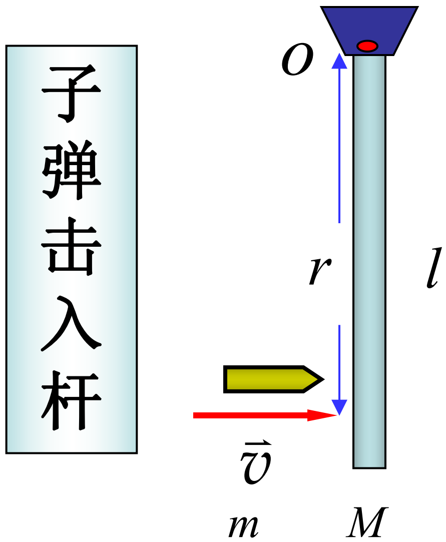
$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gh$$

守恒定律的条件

过程问题

求杆的最大摆动角度 ϕ

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$



以子弹和杆为系统

动量守恒　？　（不）

角动量守恒　？

机械能守恒　？（不）

$$rmv = (mr^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

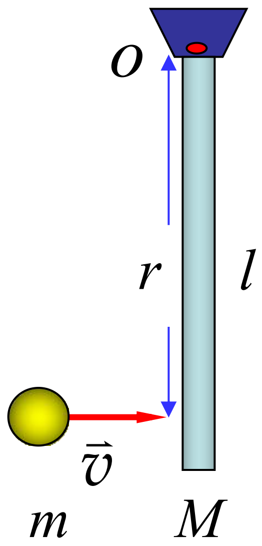
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2 + mr^2)\omega^2 = mgr(1-\cos\phi) + Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}J\omega^2}$$

求杆的最大摆动角度 ϕ

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

小球与杆弹性碰撞



以弹性球和杆为系统

动量守恒 ？（不）

角动量守恒 ？

机械能守恒 ？

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

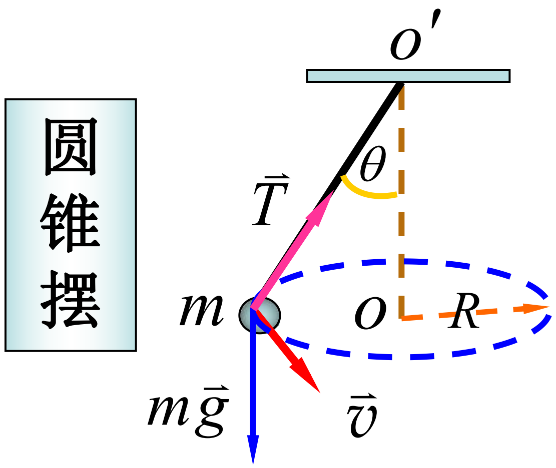
$$rmv=rmv'+(\frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2)\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\phi)$$

守恒定律的条件

过程问题



圆锥摆系统

动量守恒　？　（不）

角动量守恒　？

机械能守恒　？

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

对O'点　$\sum \vec{M} \neq 0,\ \vec{L} \neq$ 恒矢量

对O点　$\sum \vec{M} = 0,\ \vec{L} =$ 恒矢量　　$L = Rmv$

$$\sum W_{外} = 0 \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 = C$$

守恒定律的条件

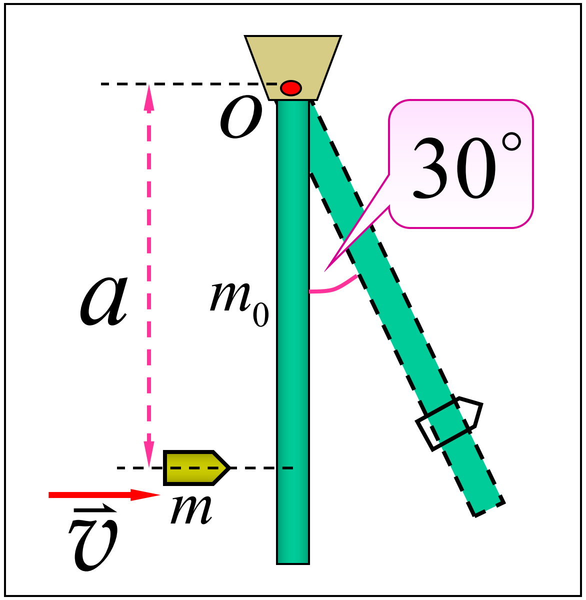
$\vec{M}$，$\vec{L}$ 是对哪一点?

例2 一长为 l ，质量为 m_0 的竿可绕支点O自由转动 。一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30°。问子弹的初速率为多少？

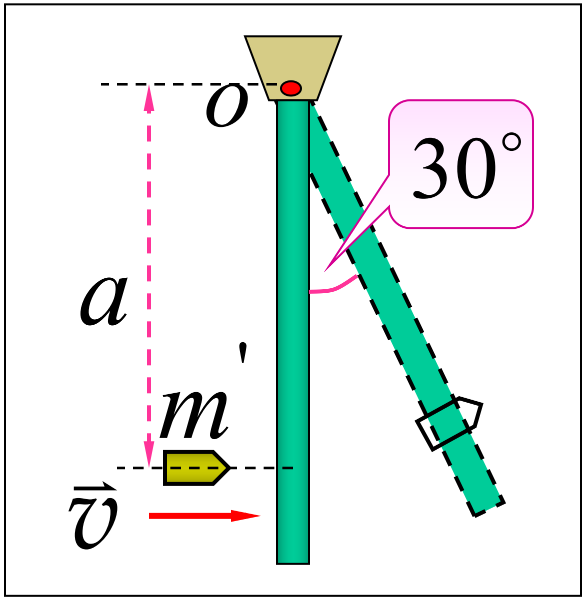
解 把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒

$$mva = (\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m_0 l^2 + 3ma^2}$$



射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega^2 =$$

$$= mga\left(1-\cos 30^\circ\right) + m_0 g\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

$$v = \frac{\sqrt{g\dfrac{(2-\sqrt{3})}{6}(m_0 l + 2ma)(m_0 l^2 + 3ma^2)}}{ma}$$

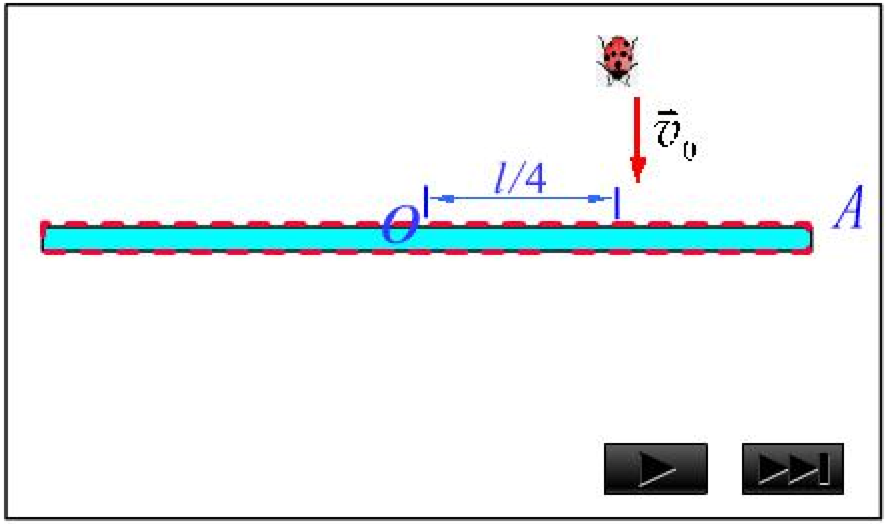
选讲

**例3 质量很小长度为l 的均匀细杆，可绕过其中心 O并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动。当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率v_0垂直落在距点O为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点A 爬行。设小虫与细杆的质量均为m。问：欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

解：小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

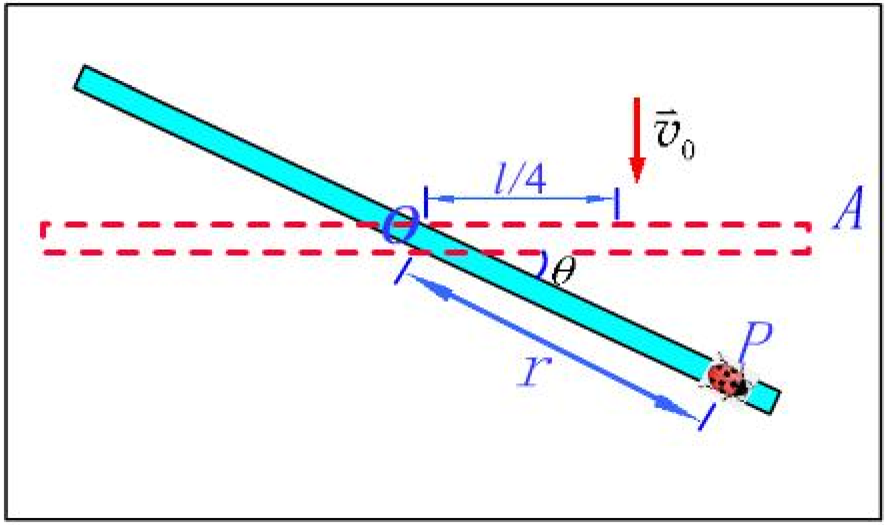
$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



选讲

由角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$



即 $mgr\cos\theta=$

$$=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2+mr^2)$$

$$=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

考虑到 $\theta=\omega t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$$

质点运动学

1、理想模型：质点、质点系

2、运动的描述：

位置矢量 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

位移矢量 $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)$ $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{v} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

加速度 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $\vec{a} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

矢量性、瞬时性、相对性

常见的运动

掌握

匀变速直线运动

- 沿 x 轴运动(一维)
- 初位置x_0,初速度v_0
- 加速度 a 恒定

$$v = v_0 + at$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\right)$$

抛体运动

- 以仰角θ 抛出
- 初位置设为原点
- 初速度 v_0
- 加速度 $a_x=0,a_y=-g$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0{}^2\cos^2\theta}$$

圆周运动

- 圆周半径 R
- 线速度 v

$$\omega = v/R, \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n + R\alpha\vec{e}_r$$

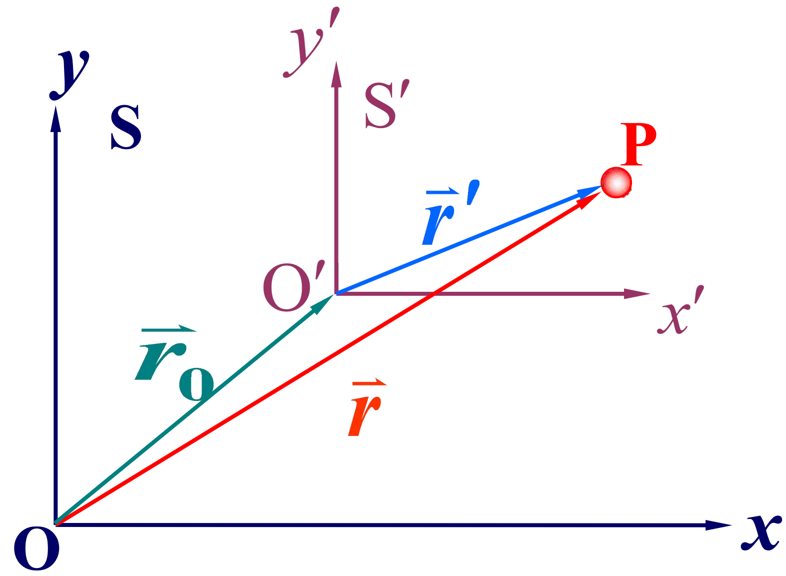
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

3. 相对运动

位矢关系： $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

速度关系： $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$

加速度关系： $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$



$\vec{a}_0 = 0$ → 伽利略变换式

$\vec{v}$:绝对速度

$\vec{v}'$:相对速度

$\vec{v}_0$:牵连速度

伽利略变换式成立的条件：长度与时间的测量与参考系的选择无关（即绝对时空观）

4. 质点运动学两类基本问题

♣ 已知运动方程，求质点在任一时刻的速度和加速度

♣ 已知加速度以及初始速度和初始位置，求任一时刻的速度及运动方程

正问题： $\vec{r}$ ⇒ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ⇒ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ ——求导

反问题： $\vec{r} = \int \vec{v}dt$ ⇐ $\vec{v} = \int \vec{a}dt$ ⇐ $\vec{a}$ ——积分

牛顿定律

1、牛顿运动定律

第一定律　　惯性、惯性系、力的概念

第二定律　　$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}, \vec{p}=m\vec{v}$

当 m 为常量时 $\vec{F}=m\vec{a}$

第三定律　　$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

解题思路:

（1）选对象

（2）看运动（轨迹、速度、加速度）

（3）查受力（隔离物体、画示力图）

（4）列方程（注意标明坐标的正方向；有时还要从几个物体的运动关系上补方程）

（5）验结果　（量纲？特例？等）

动量定理及动量守恒

力的时间积累效应

(1) 冲量 $\vec{F}dt$　　　　动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

(2) 动量定理: $\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

(3) 动量守恒定律: $\vec{F}_{外} = 0$时 $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \vec{p}_i' + \vec{p}_j'$

1）只适用于惯性系

2）若某方向的合外力为零，则沿该方向动量守恒

3）当内力 >> 外力时，动量近似守恒（碰撞、冲击和爆炸）

动能定理及功能原理

力的空间积累效应

(1) 功

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

(2) 动能

质点的动能 $$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

质点系的动能 $$E_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}mv_i^2$$

(3) 动能定理

质点的动能定理

$$A=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

质点系的动能定理

$$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$$

刚体的定轴转动

1、刚体、刚体的平动

2、刚体绕定轴转动

3、角速度矢量 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

4、刚体的转动动能 $E=\frac{1}{2}\omega^2\sum\Delta m_k r_k^2=\frac{1}{2}J\omega^2$

5、刚体的转动惯量 $J=\sum\Delta m_k r_k^2$ $J=\int r^2 dm$

6、刚体的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$ $L=J\omega$

7、力矩的功 $\mathrm{d}A=M\mathrm{d}\theta$ $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta$

8、转动定律

$$\vec{M} = J\vec{\beta}$$

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = \frac{dL}{dt}$$

9、转动动能定理

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2) = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

10、定轴转动刚体的角动量定理

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L} = \mathrm{d}(J\vec{\omega})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$

11、定轴转动刚体的角动量守恒定律

若 $\vec{M} = 0$

则 $\vec{L} = J\vec{\omega} =$ 恒矢量

质点运动与刚体定轴转动的对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度 加速度	$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角速度 角加速度	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	J
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$L=J\omega$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\alpha$
动量定理	$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\,\mathrm{d}t$ $\int\vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0$	角动量定理	$\mathrm{d}L=M\,\mathrm{d}t$ $\int M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$
功	$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$
功率	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩的功率	$P=M\omega$
动能	$E_K=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_K=\frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$\int M\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

※ 定轴转动的动力学问题

- 第一类：求刚体转动的角加速度，应用转动定律。对质点列牛顿定律方程，对刚体列转动定律方程，再由角量与线量的关系，联立求解。
- 第二类：刚体与质点的碰撞、打击问题。选系统，当受合外力矩等于零时，可用系统角动量守恒。列方程时，注意角动量中各项的正负。对在有心力场作用下绕力心转动的问题，可直接用角动量守恒定律。
- 第三类：在刚体所受的合外力矩不等于零时，应用刚体的转动动能定理。对仅受保守力矩作用的刚体转动问题，也可用机械能守恒定律。
- 另 外：实际问题中常常有多个复杂过程，要分成几个阶段进行分析，分别列出方程，进行求解。