第九章 欧式空间

补遗:

例1. 设$\mathcal{A}$是欧式空间V的一个变换，证明：如果$\mathcal{A}$保持内积不变，即对于$\alpha,\beta\in V,(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$，那么它一定是线性的，因而是正交变换.

证明. 我们欲证$\mathcal{A}(k\alpha+\beta)=k\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta.$

对于$\mathcal{A}V$中任一向量$\mathcal{A}\gamma$，我们有

$$(\mathcal{A}(k\alpha+\beta)-k\mathcal{A}\alpha-\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma)=$$

$$(\mathcal{A}(k\alpha+\beta),\mathcal{A}\gamma)-(k\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\gamma)-(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma)=$$

$$(k\alpha+\beta,\gamma)-k(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\gamma)-(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma)=$$

$$k(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)-k(\alpha,\gamma)-(\beta,\gamma)=0$$

令$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$是V中一标准正交基，由$\mathcal{A}$保持向量的

正交性知，$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n$仍是 V的一标准正交基，

取$\mathcal{A}\gamma$分别为$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n$，可得出:对于V中任一向量$\delta$(可表为$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n$的线性组合)有

$$(\mathcal{A}(k\alpha+\beta)-k\mathcal{A}\alpha-\mathcal{A}\beta, \delta)=0.$$

故 $\mathcal{A}(k\alpha+\beta)-k\mathcal{A}\alpha-\mathcal{A}\beta=0,$

$$\mathcal{A}(k\alpha+\beta)=k\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta$$

注：也可以直接计算内积

$$(\mathcal{A}(k\alpha+\beta)-k\mathcal{A}\alpha-\mathcal{A}\beta, \mathcal{A}(k\alpha+\beta)-k\mathcal{A}\alpha-\mathcal{A}\beta)$$

得出其等于零，推出结果.

问题. 已知R^4的子空间V_1的一个基

$\alpha_1 = (1,-1,1,-1)^T, \alpha_2 = (0,1,1,0)^T,$

求向量$\alpha = (1,-3,1,-3)^T$在V_1上的内射影.

解. 将α_1, α_2单位正交化得

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1, \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2,$$

并扩充成R^4的一标准正交基. α在这组标准正交基下的坐标分别为: $(\alpha, \beta_1) = 4$, $(\alpha, \beta_2) = -\sqrt{2}$,…,则

$$\alpha = 4\beta_1 - \sqrt{2}\beta_2 + \gamma =$$

$2\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma, \ \gamma \in V_1^{\perp} = L(\alpha_3, \alpha_4).$

故α在V_1上的内射影为

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = (2,-3,1,-2)^T$$

§6 实对称矩阵的标准形

一、实对称矩阵的特征值与特征向量

二、对称变换

三、实对称矩阵正交相似对角化

在第五章中我们得到，任意一个对称矩阵都合同于一个对角形矩阵，即，存在一个可逆矩阵C使得

$$C^T AC$$

成对角形．现在利用欧氏空间理论可以进一步加强第五章中关于对称矩阵的结果．这一节主要结果是：

对于任意一个n阶实对称矩阵A，存在一个n阶正交矩阵T，使

$$T^T \mathrm{AT} = T^{-1}AT$$

成对角形．

先讨论对称矩阵的一些性质，它们本身在今后也是非常有用的，我们把它们归纳成几个引理.

引理 1. 实对称矩阵A的特征值都是实数.

证明. 设λ_0是A的特征值，于是有非零向量

$\xi = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$，满足

$$A\,\xi = \lambda_0 \xi$$

令 $\overline{\xi}^T = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots \overline{x_n})^T$，其中$\overline{x}_i$是$x_i$的共轭复数，则

$\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\xi} = \overline{\lambda_0}\overline{\xi}.$

又 $\overline{\xi^T}\,A\,\xi = \overline{\xi^T}A^T\,\xi = (A\overline{\xi})^T\xi = \overline{(A\,\xi)}^T\xi,$

等式左方为$\overline{\xi^T}(\lambda_0\xi) = \lambda_0\overline{\xi^T}\xi$,右边为$\overline{\lambda_0}\overline{\xi^T}\xi$.

故 $\lambda_0\overline{\xi^T}\xi = \overline{\lambda_0}\overline{\xi^T}\xi$.

因ξ是非零向量,

$$\overline{\xi^T}\xi = \overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \cdots + \overline{x_n}x_n \neq 0$$

因而$\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$, 即$\lambda_0$为实数.

对于实对称矩阵A，在n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$上定义一个线性变换$\mathcal{A}$如下:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

显 然 在 标 准 正 交 基 :$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\dots,0)^T$ ，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\dots,0)^T,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\dots,1)^T$ **(2)**

下的矩阵就是$\boldsymbol{A}$.

引理 2. 设$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，$\mathcal{A}$的定义如上，则对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$，有

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) \qquad \textbf{(3)}$$

或 $$\boldsymbol{\beta}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

证明. 只要证明后一等式即可. 事实上，

$$\boldsymbol{\beta}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}).$$

等式(3)把实对称矩阵的特性反映到线性变换上，我们引入

定义 12. 欧氏空间中满足等式(3)的线性变换称为对称变换.

容易看出对称变换在标准正交基下的表示矩阵是实对称矩阵.

注. 令$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$是一组标准正交基,

$$\mathcal{A}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\mathcal{A}\eta_1, \mathcal{A}\eta_2, \dots, \mathcal{A}\eta_n)$$

$$= (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{(记为}A\text{)}$$

。 即

$$\mathcal{A}\eta_i = a_{1i}\eta_1 + a_{2i}\eta_2 + \cdots + a_{ni}\eta_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(\mathcal{A}\eta_i,\eta_j)=a_{ji}\ \left((\eta_i,\eta_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\right)$$

$$(\mathcal{A}\eta_i,\eta_j)=(\eta_i,\mathcal{A}\eta_j)=a_{ij},$$

故 $a_{ij}=a_{ji}$, $A=A^T$.

用对称变换来反映实对称矩阵，一些性质可以看得更清楚.

引理 3. 设$\mathcal{A}$是对称变换，V_1是$\mathcal{A}$ −子空间，则$V_1^\perp$也是$\mathcal{A}$ − 子空间.

证明. 设$\alpha\in V_1^\perp$，要证$\mathcal{A}\alpha\in V_1^\perp$,即$\mathcal{A}\alpha\perp V_1$. 任取$\beta\in V_1$,都有$\mathcal{A}\beta\in V_1$.因$\alpha\in V_1^\perp$,故$(\alpha,\mathcal{A}\beta)=0$.$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)=0$.即$\mathcal{A}\alpha\perp V_1$, $\mathcal{A}\alpha\in V_1^\perp$, $V_1^\perp$是$\mathcal{A}$ −子空间.

引理 4. 设A是实对称矩阵，则A的属于不同特征值的特征向量必正交.

证明. 设λ,μ是A的两个不同的特征值，α,β分别是属于λ,μ的特征向量：$A\alpha=\lambda\alpha, A\beta=\mu\beta$. 定义线性变换$\mathcal{A}$如(1)，于是$\mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha, A\beta=\mu\beta$，由$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$，有

$$\lambda(\alpha,\beta)=\mu(\alpha,\beta).$$

因$\lambda\neq\mu$，必有$(\alpha,\beta)=0$，α,β正交.

定理 7. 对于任一个n阶实对称矩阵. 存在一个n阶正交矩阵T，使得$T^TAT=T^{-1}AT$成对角形.

证明. 由于实对称矩阵与对称变换的关系，只要证明对称变换$\mathcal{A}$有个n特征向量做成标准正交基就行了.

我们对空间维数n做归纳法.

$n=1$，结论显然成立.

设$n-1$时定理的结论成立. 对n维欧式空间$\mathbf{R}^n$，实对称变换$\mathcal{A}$必有特征值λ_1(实对称变换$\mathcal{A}$特征值为实数，$\mathcal{A}$的特征多项式在实数域中必有根)及λ_1所属的特征向量α_1，将α_1单位化(但仍用α_1表示它)，作$L(\alpha_1)$的正交补，设为V_1. 由引理 3, V_1是$\mathcal{A}-$子空间，其维数为$n-1$. 又$\mathcal{A}|_{V_1}$显然也满足(3)，仍是对称变换，由归纳假设，$\mathcal{A}|_{V_1}$有$n-1$个特征向量$\alpha_2,\ldots,\alpha_n$作成的V_1的标准正交基，从而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是$\mathbf{R}^n$的标准正交基, 又是$\mathcal{A}$的$n$个特征向量，定理得证.

下面来看在给定一个实对称矩阵A之后，按什么办法求出正交矩阵T使T^TAT成对角形. 在定理的证明过程中我们看到，矩阵A按(1)式在$\mathbf{R}^n$中定义了一个线性变换，求正交矩阵T的问题就相当于在$\mathbf{R}^n$中求一组由A的特征向量给出的标准正交基. 事实上，设

$$\eta_1=\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \eta_n=\begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

是$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基，它们都是A的特征向量. 显然，由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$到$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$的过渡矩阵就是

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

T是一个正交矩阵，且

$$T^T AT = T^{-1}AT$$

就是对角形.

根据上面的讨论，实对称矩阵A相似对角化和正交矩阵T的实现可以按以下步骤进行.

1. 求出A的特征值，设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$是$A$的全部不同的特征值,

1. 对于每个λ_i，解齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

求出一个基础解系，这就是A的特征子空间V_{λ_i}的一组基. 由这组基出发，按定理 2 的方法求出V_{λ_i}的一组标准正交基$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{ik_i}$.

2. 因为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$两两不同，根据这一节引理 4，向量组$\eta_{11}, , \cdots, \eta_{1k_1}, \cdots, \eta_{r1}, , \cdots, \eta_{rk_r}$

还是两两正交的，又根据定理 7 以及 § 7.5 的讨论，它

们的个数等于空间的维数，因此，它们就构成$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基，并且也都是$\boldsymbol{A}$的特征向量，这样，正交矩阵$\boldsymbol{T}$也就求出了.

例 1. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一正交矩阵$\boldsymbol{T}$，使$\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$成对角形.

解. $$|\boldsymbol{\lambda E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \boldsymbol{\lambda} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \boldsymbol{\lambda} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3).$$

即得A的特征值为 **1(三重根),−3**.

求属于 **1** 的特征向量，把 **1** 代入

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

求得基础解系为

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,0,0)^T \\ \alpha_2 = (1,0,1,0)^T \\ \alpha_3 = (-1,0,0,1)^T \end{cases}$$

把它正交化，得

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 = (1.1,0,0)^T \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_1,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)^T \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = (-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1)^T \end{cases}$$

再单位化，得

$$\begin{cases} \eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)^T \\ \eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)^T \\ \eta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}})^T \end{cases}$$

这是属于三重特征值 1 的三个标准正交的特征向量.

再求属于-3的特征向量，用$\lambda = -3$代入(4)，求得基础解系为$(1, -1, -1, 1)^T$,

把它单位化，得

$$\eta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T.$$

特征向量$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4$构成$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基，所求的正交矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

应该指出，在定理 7 中，对于正交矩阵T我们还可以进一步要求$|T| = 1$.

事实上，如果求得的正交矩阵T的行列式为-1，那么令

$$S = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

那么$T_1 = TS$是正交矩阵，而且

$$|T_1| = |T||S| = 1.$$

显然 $T_1^T A T_1 = T^{-1} A T$.

如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

的矩阵$C = (c_{ij})$是正交的，那么称它为正交的线性替换，正交的线性替换当然是可逆的(非退化的).

用二次型的语言，定理 7 可以叙述为

定理 8. 任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \ , \ a_{ij} = a_{ji}$$

都可以经正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中平方项的系数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$就是矩阵的特征多项式的全部根.

最后我们指出，这一节的结果可以应用到几何上化简直角坐标系下二次曲面方程，以及讨论二次曲面分类.

在 直 角 坐 标 系 下 ， 二 次 曲 面 的 一 般 方 程 是 ：

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+d=0 \qquad (5)$$

令

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

则(5)可以写成

$$X^T AX+2B^T X+d=0.$$

经过转轴，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{12} & c_{22} & c_{23}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix},\ \text{或}\ X=CX_1$$

其中C为行列式为 1 的正交矩阵．在新坐标系中，曲面的方程就是

$$(CX_1)^T ACX_1 + 2(B^T C)X_1 + d = 0$$

由本节的结果，存在行列式为 1 的正交矩阵C使

$$C^T AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这就是说，可以作一个坐标轴旋转，使曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1^* x_1 + 2b_2^* y_1 + 2b_3^* z_1$$
$$+d = 0.$$

其中，$(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = (b_1, b_2, b_3)C$,

这时，再根据$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是否为零的情况，作适当的移轴与转轴把曲面方程化成标准方程．例如，当$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$全不为零时，做轴平移

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \dfrac{b_1^*}{\lambda_1} \\ y_1 = y_2 - \dfrac{b_2^*}{\lambda_2} \\ z_1 = z_2 - \dfrac{b_3^*}{\lambda_3} \end{cases}$$

于是曲面方程化为

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + d^* = 0,$$

其中，$d^* = d - \dfrac{{b_1^*}^2}{\lambda_1} - \dfrac{{b_2^*}^2}{\lambda_2} - \dfrac{{b_3^*}^2}{\lambda_3}$.

总结一下

(1)　由第五章和本节的学习，一个实二次型(对应的实对称矩阵)可经配平方，变量的线性替换(成对初等变换)，正交的线性替换(正交矩阵)化成标准形(对角矩阵)，用前两种变换化成的标准形一般不唯一，但用正交的线性替换实现的标准形唯一，其中平方项的系数$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$就是实对称矩阵的(或实对称线性变换)的特征值. 二次型的规范形永远唯一. 仅正交的线性替换一般不能把一个实二次型变为规范形.

(2) 对于两个实对称矩阵$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，若$\boldsymbol{T}$为正交矩阵，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$既相似又合同，若$\boldsymbol{T}$不是正交矩阵，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$仅合同.

(3) 实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的相似对角化过程，在求出$\boldsymbol{A}$的特征值的特征子空间的一组基后，要将这些向量标准正交化，把属于不同特征值的这些标准正交化后的向量按特征值排列的顺序排列成矩阵，即为所求的正交矩阵.

单选题 1分

设置

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A A与B相似又合同

B A与B相似但不合同

C A与B合同但不相似

D A与B既不相似又不合同

提交

已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$$

通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，

求参数a，及所用的正交矩阵.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂