第一题. (6 分)

(1) 给出贝叶斯公式;

(2) 给出随机变量的定义;

(3) 给出 Tchebychev 不等式.

第二题. (6 分)

甲乙两人玩篮球轮流投篮游戏，规定先投中者赢得游戏。设甲每次投中的概率为 $\frac{1}{3}$, 乙每次投中的概率为 $\frac{2}{3}$, 每次投中与否相互独立。设甲先投，求甲赢得游戏的概率。

第三题. (8 分)

盒中放有 10 个乒乓球，其中 8 个是新的. 第一次比赛从中任取两个来用，比赛后放回盒中. 第二次比赛时再从盒中取 2 个, 求第二次取出的球都是新球的概率.

第四题. (12 分)

设 A 为一实常数, 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} Axy, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求系数 A.

(2) 求 X, Y 的边缘概率密度函数.

(3) X, Y 是否独立? 为什么?

(4) 求 $P(Y \leq \frac{1}{2} | X = \frac{1}{4})$.

(5) 求 $E(\frac{Y}{X})$.

第五题. (14 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布. 令 $U = X - Y, V = \frac{Y}{X-Y}$.

(1) 求 (U, V) 的联合密度函数;

(2) 求 U, V 的边缘密度函数, 并判断 U 与 V 是否独立.

第六题. (12 分)

设 $X \sim N(0,1)$, 随机变量 Z 与 X 独立，$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}$. 考虑随机变量 $Y = ZX$.

(1) 求 Y 的分布.

(2) 求 (X, Y) 的协方差矩阵.

(3) 证明 (X, Y) 不服从正态分布.

第七题. (12 分)

设 $X_n, (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 是相互独立的随机变量, $\forall n, X_n$ 服从参数为 1 的柏松 Poisson 分布, $X_n \sim \pi(1)$. 令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(1) $X_1 + X_2$ 服从什么分布? (请给出证明)

(2) S_n 服从什么分布? (请给出证明).

设 $F_n(x)$ 是 S_n 的分布函数, 证明 $F_n(n) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

(3) 求 $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ 的分布函数的极限, 即对 $x \in \mathbb{R}$, 求 $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le x)$.

(4) 证明 $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.