讨论

下列各物理量中，与参考系有关的物理量是哪些？（不考虑相对论效应．）

（1） 质量　（2）动量　（3） 冲量

（4） 动能　（5）势能　（6）功

答　动量、动能、功．

第三章 刚体的定轴转动

§1 刚体、刚体的运动

一、刚体

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。

或：在受力或运动过程中任意两部分之间的距离和相对位置保持不变物体。

说明：

（1）刚体也是一个理想化模型。

（2）刚体可以看作是由“一系列”质点组成的，称为质点系或质元组。质元的运动遵守质点运动的规律性。

（3）刚体的选取具有相对性，某一物体有些情况下可以描述为刚体，有时则不能。

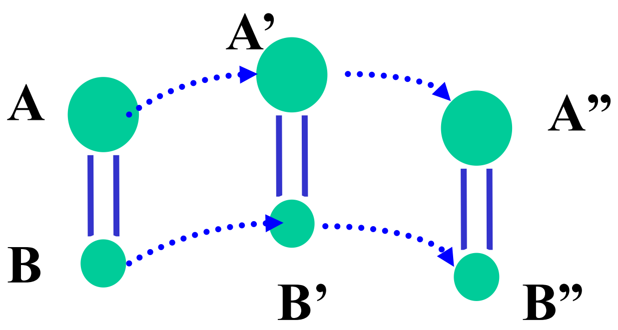
二、刚体的运动

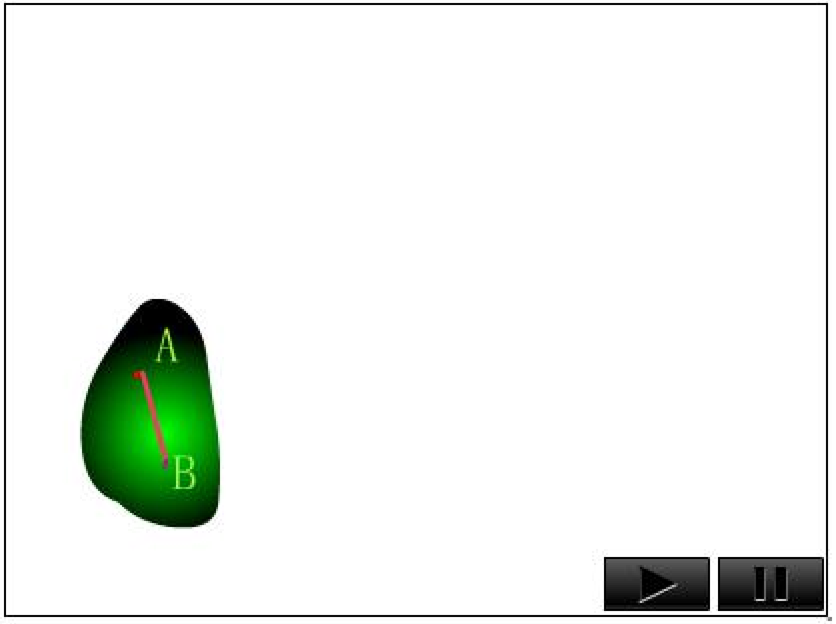
刚体的运动包括平动、转动、滚动 。

1. 平动

刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。或，在运动过程中刚体上的任意一条直线在各个时刻的位置都相互平行。

刚体的平动可以由其质心的质点运动来描述。或者任意质元运动都代表整体运动。

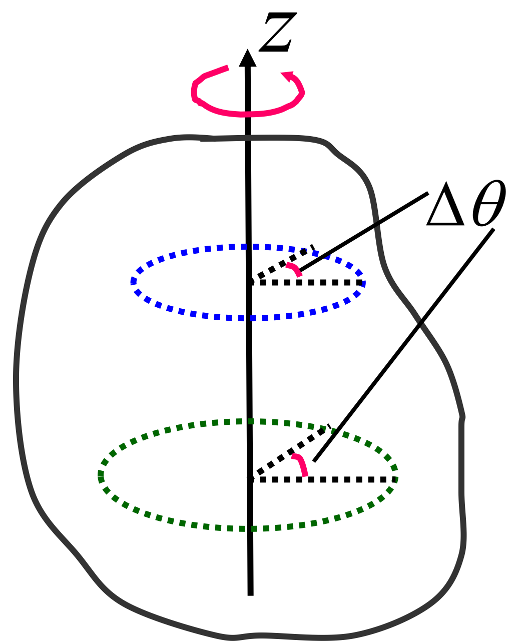




2. 转动

组成刚体的各质点都绕同一直线做圆周运动。

这条线为转轴。

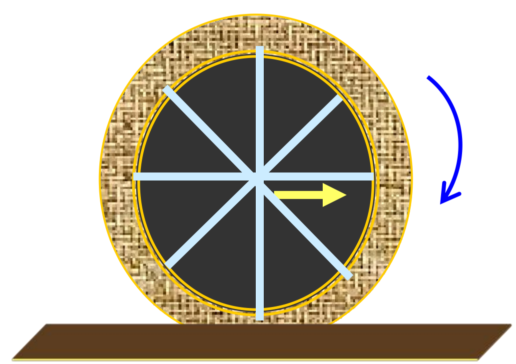


定轴转动：若转轴相对于给定的参考系在空间固定不动，则称刚体做定轴转动。

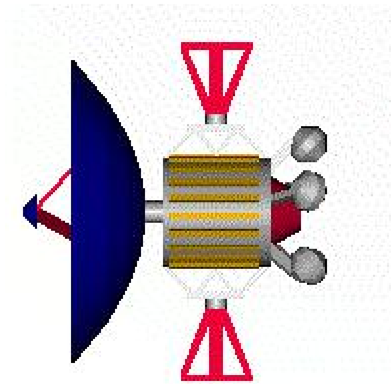
刚体的一般运动（如：运行的车轮），

可以描述为：随某点(基点)的平动 +

过该点的定轴转动。

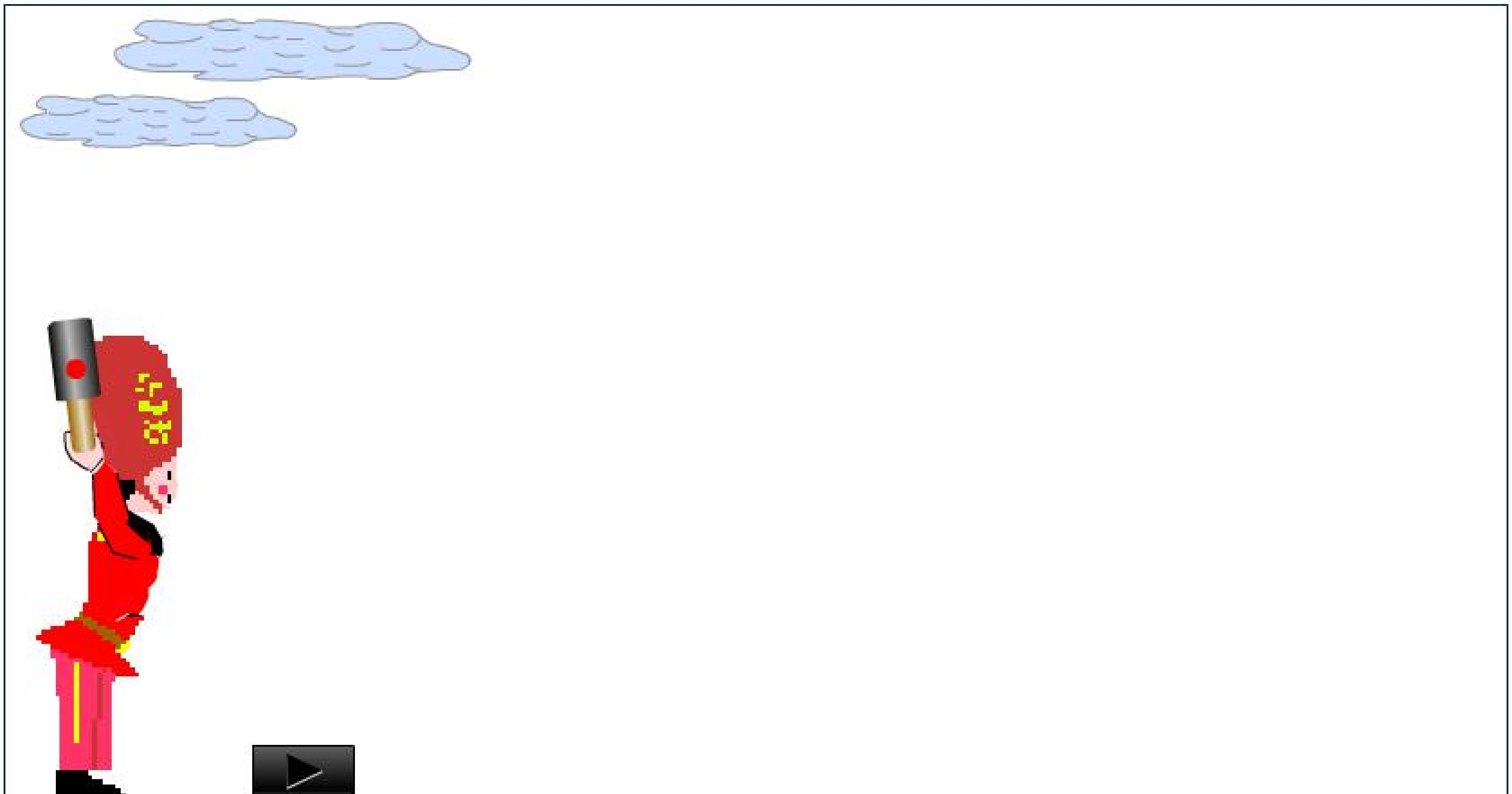


转动的例子——



滚动的例子——

刚体的一般运动 = 质心的平动 + 绕质心的转动



§ 2 刚体定轴转动的描述

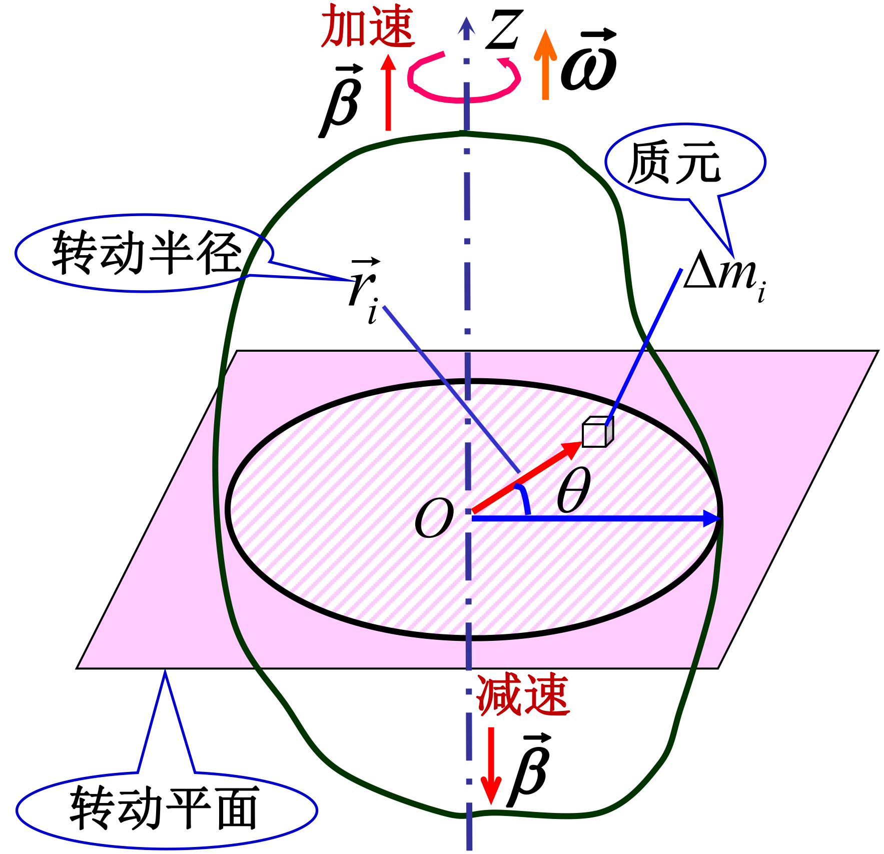
一、 定轴转动的描述

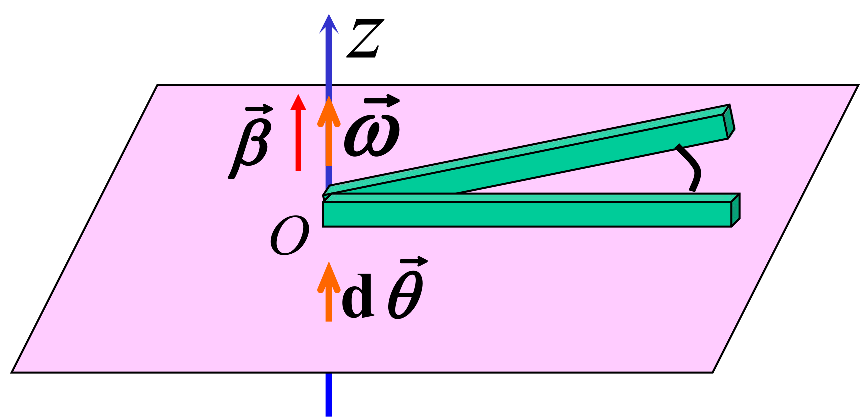
（1）研究刚体定轴转动的——转动平面、质元、转动半径。

（2）各质元都绕同转轴做圆周运动。圆面为转动平面。

（3）刚体上所有质元都具有相同的角位移$d\vec{\theta}$、相同的角速度$\vec{\omega}$、相同的角加速$\vec{\beta}$。

（4）运动描述仅需一个坐标 。



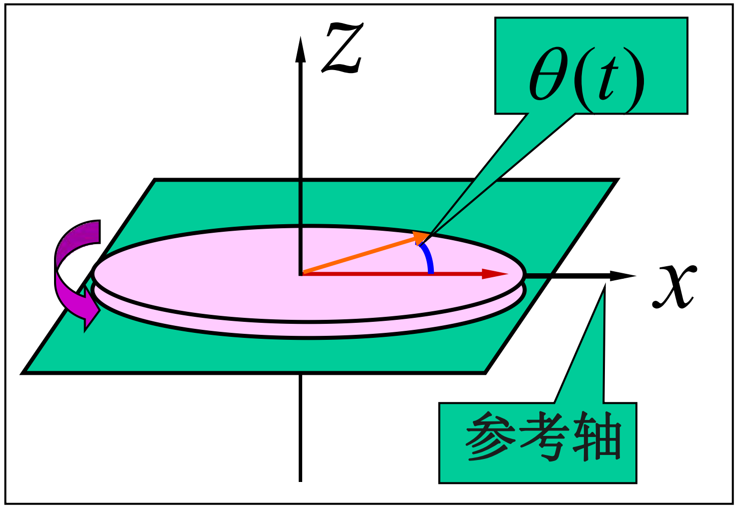


二、 刚体转动的角速度和角加速度

1. 角坐标 $\theta = \theta(t)$

约定：$\vec{r}$ 沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

$\vec{r}$ 沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

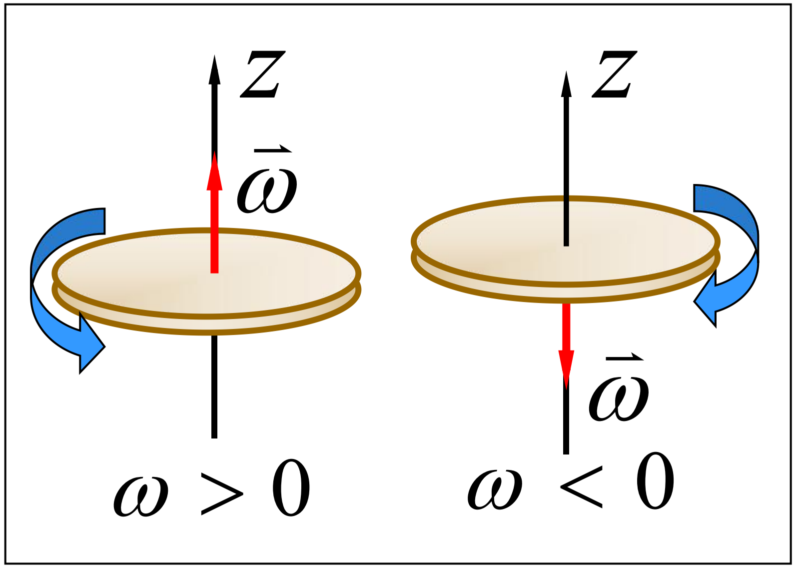


2. 角位移的大小

$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

3. 角速度的大小 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

刚体定轴转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示。



4. 角加速度的大小 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

5. 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角速度为恒量时，刚体做匀速转动 。

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动 。匀变速转动的角加速度为恒量。

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

三、刚体上某一质元的运动

$$d\vec{r}_i = d\vec{\theta} \times \vec{r}_i$$

$$|d\vec{r}_i| = ds_i = r_i d\theta$$

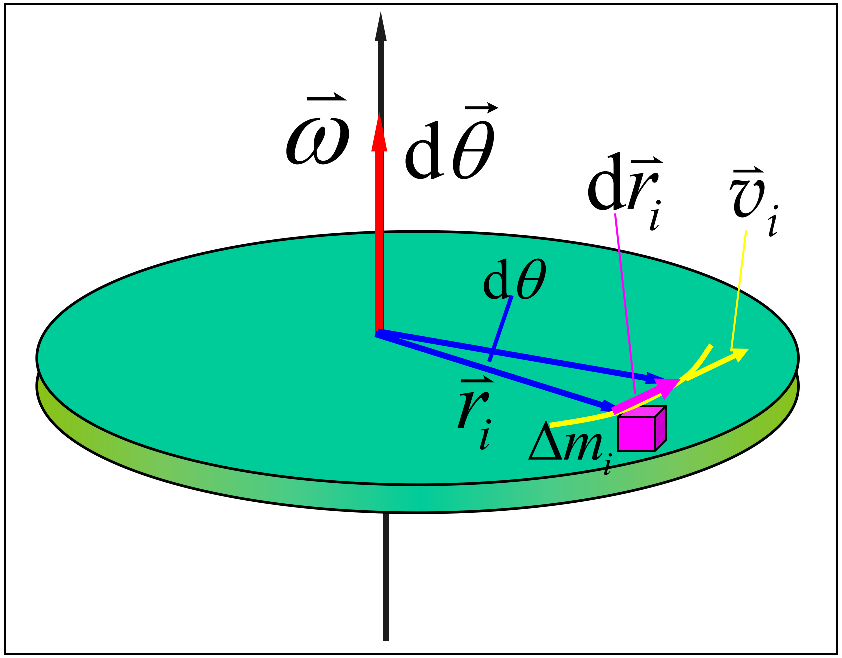
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

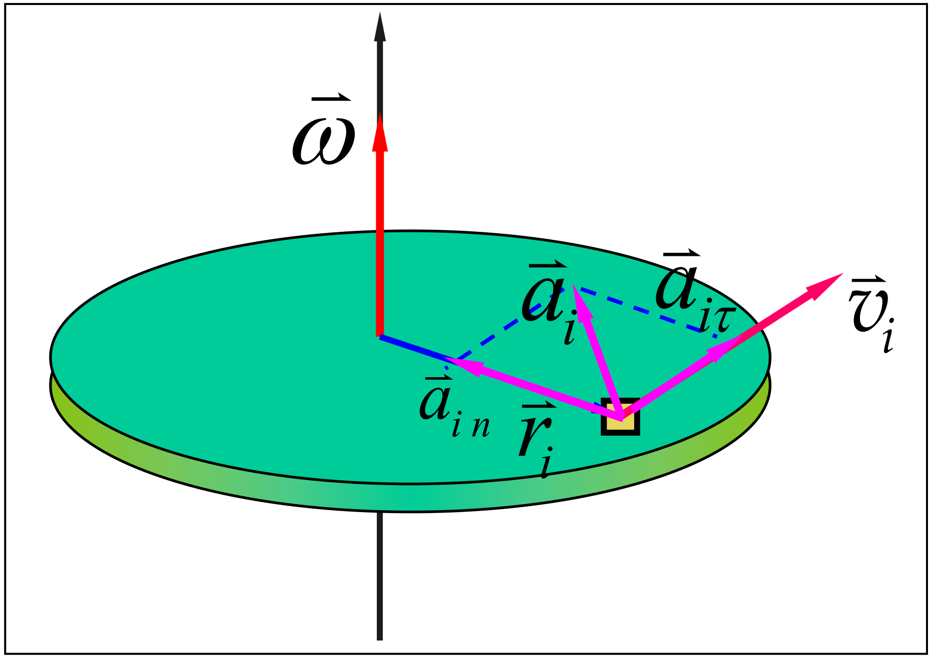
$$v_i = r_i \omega = v_{i\tau}$$

$$\vec{a}_i = a_{i\tau} \vec{\tau}_0 + a_{in} (-\vec{r}_0)$$

$$a_{i\tau} = \frac{dv_i}{dt} = r_i \beta$$

$$a_{in} = v_i \omega = \omega^2 r_i = \frac{v_i^2}{r_i}$$





§3 刚体定轴转动的转动定律

一、力矩

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内，$\vec{r}$ 为由点O 到力的作用点 P 的径矢。

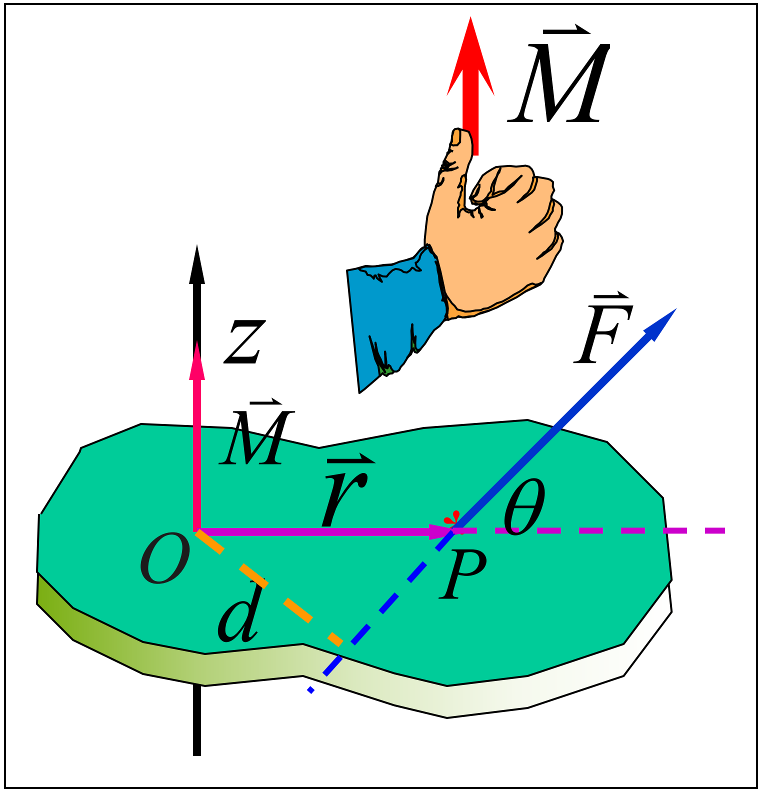
$\vec{F}$ 对转轴 Oz 的力矩

$$M = Fr\sin\theta = Fd$$

$d = r\sin\theta$：力臂

$$\theta = \vec{r}\,\hat{}\,\vec{F}$$

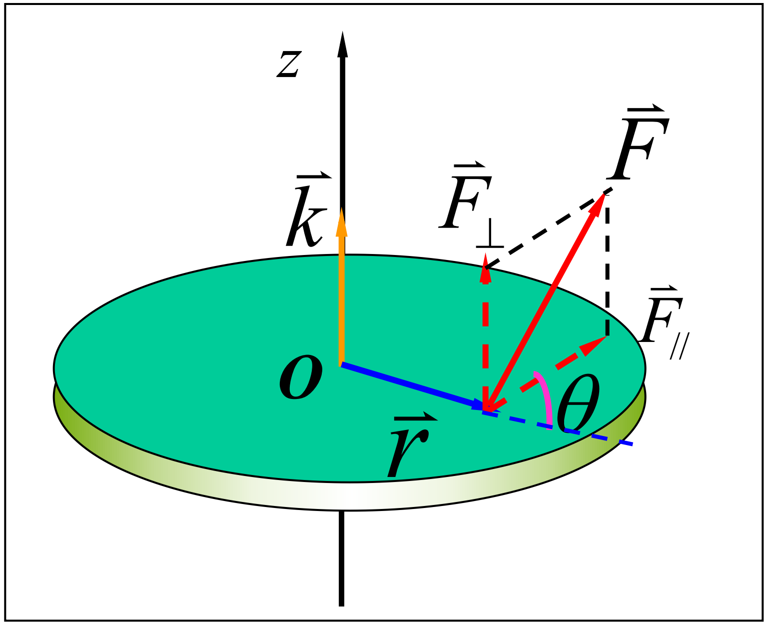
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



讨论：

（1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，把力分解为平行和垂直于转动平面的两个分量

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{//}$$



其中 $\vec{F}_{\perp}$ 对转轴的力矩为零，

故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩为

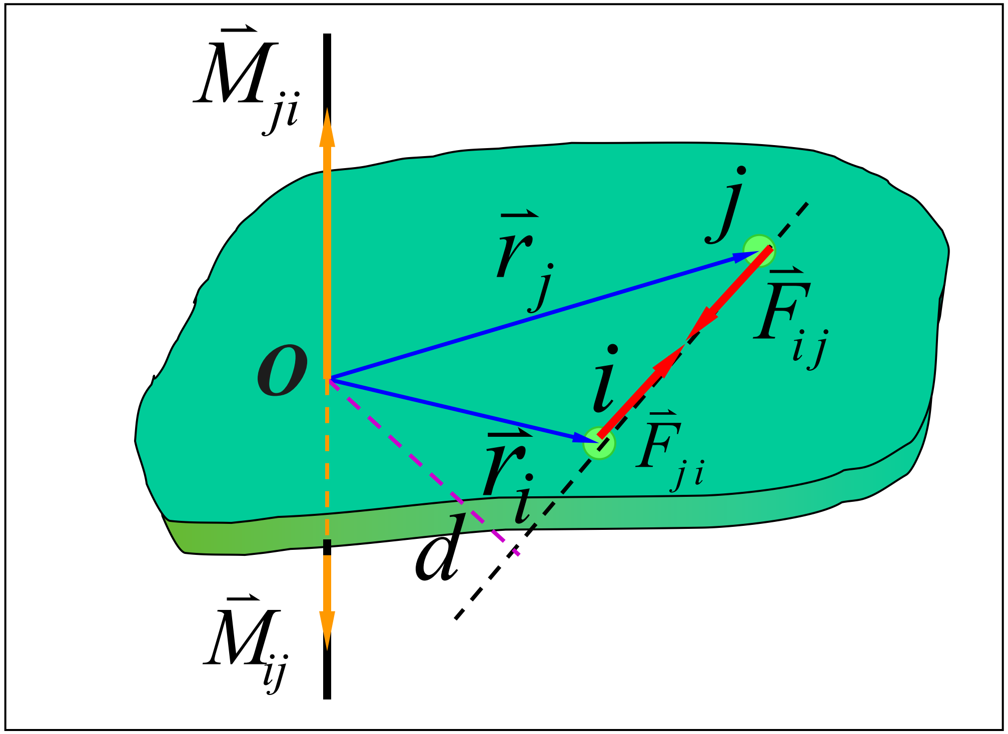
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_z = rF_{//} \sin\theta$$

（2）合力矩等于各分力矩的矢量和。

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$

（3）刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消。

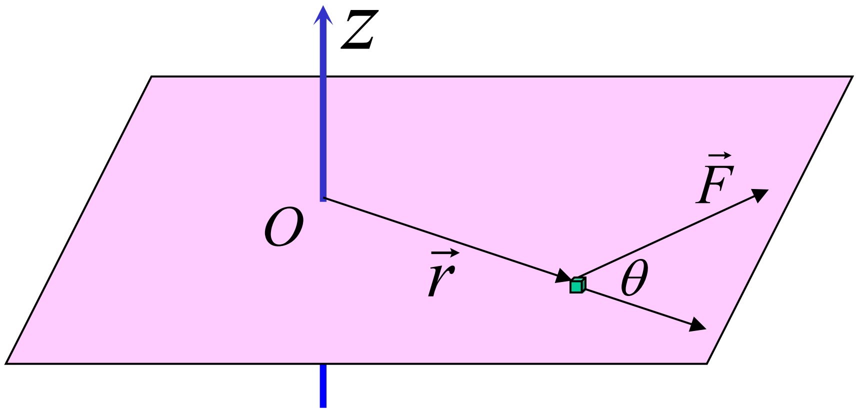


$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

（4）对于质点

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$$



二、转动定律

对于定轴转动的刚体而言，设 $\vec{F}_i$ 和 $\vec{f}_i$ 分别为作用于质元 Δm_i 上的外力和内力在转动平面内的分量。

Δm_i 为刚体内任意质元。

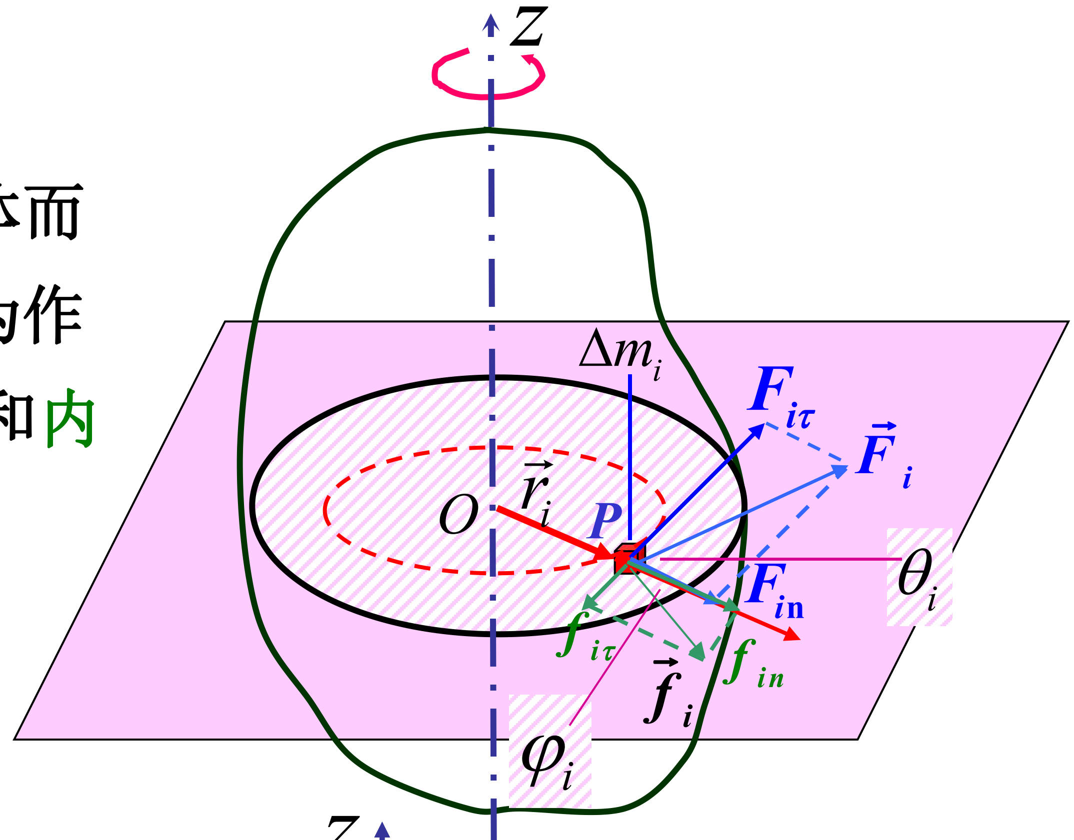
根据牛顿第二定律：

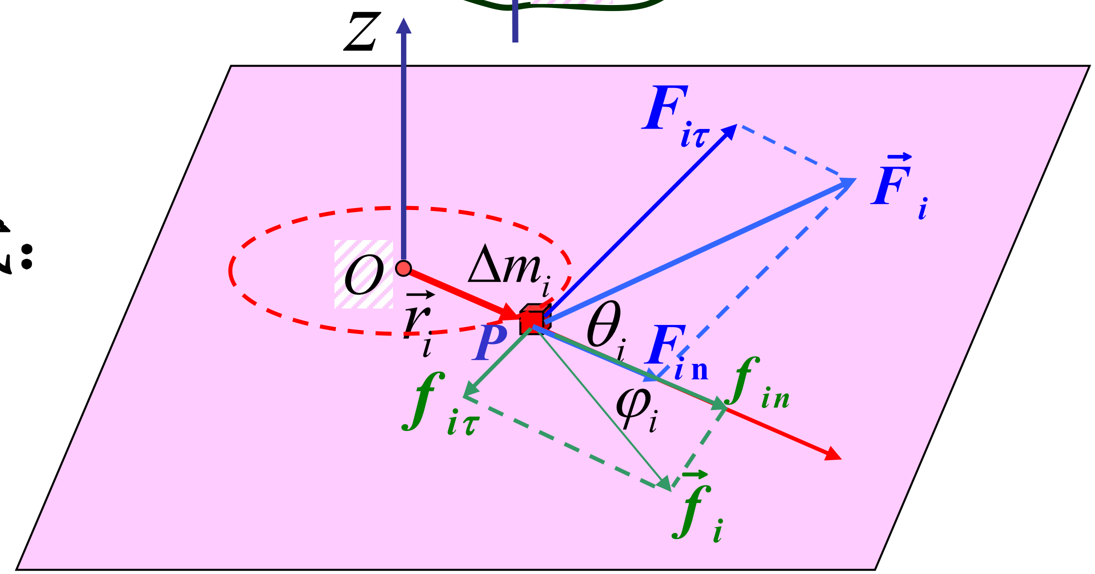
$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

自然坐标系下的分量式：

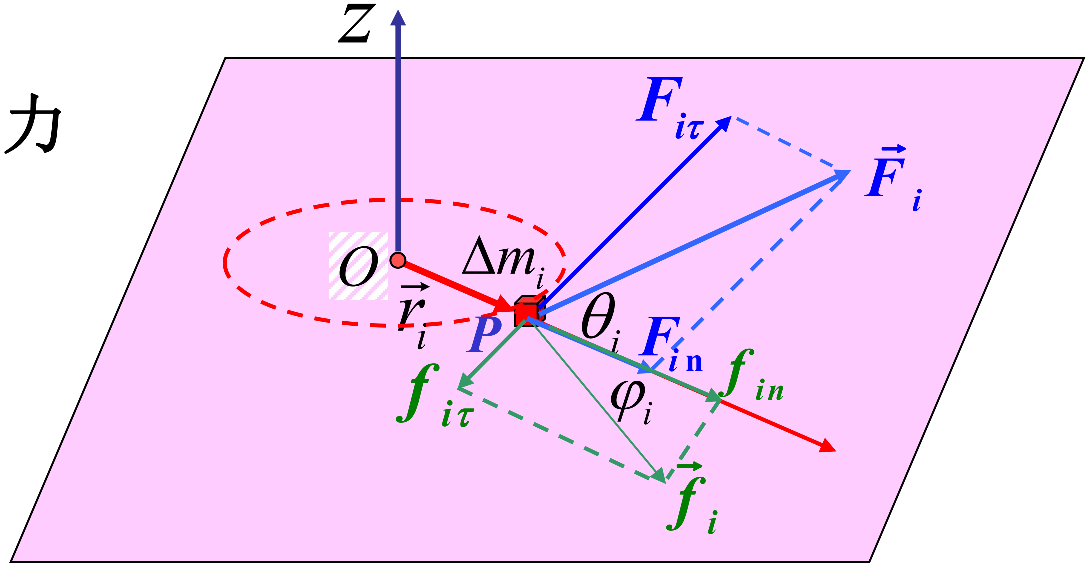
$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$$

$$F_{in} + f_{in} = \Delta m_i a_{in}$$





法向分量 $\vec{F}_{in}$ 和 $\vec{f}_{in}$ 对转轴力矩为零。



切向分量式两端同乘 r_i ，

并考虑到：$a_{i\tau} = r_i\beta$

$$(F_{i\tau} + f_{i\tau})r_i = \Delta m_i r_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 直至取遍整个刚体。

则对整个刚体，有： $\sum_i F_{i\tau} r_i + \sum_i f_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$

作用于刚体内每一质元上的内力矩的矢量和为零，即

$$\sum_i f_{i\tau} r_i = 0$$

$$\sum_i F_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

$\sum_i F_{i\tau} r_i$ 为作用于刚体内每一质元上的外力矩的矢量和。

$$M = \sum_i F_{i\tau} r_i$$

定义：刚体的转动惯量 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

则有： $M = J\beta$ 即： $\boxed{\vec{M} = J\vec{\beta}}$

刚体定轴转动的转动定律：刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

——刚体定轴转动的基本动力学规律。