应用随机过程

更新过程定义

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）

知识回顾

泊松分布四条性质

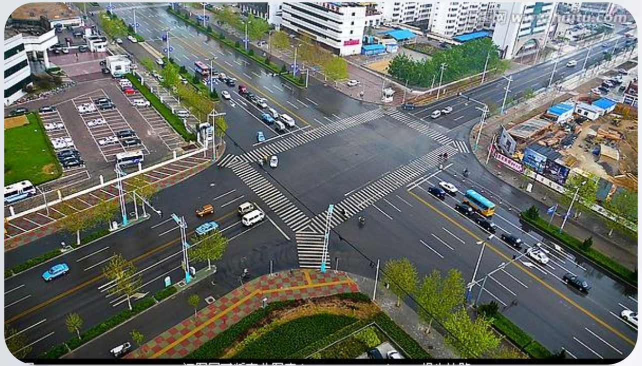
01 $N(0) = 0$

02 平稳增加、独立增加特性

03 $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

04 $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

知识回顾



泊松过程根据上述四条性质

泊松过程表达式

间隔时间服从指数分布

如果邻近事件之间的间隔时间不服从指数分布

这样的随机过程如何描述呢？

更新过程的定义

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个更新过程

1. X_n定义为第$(n-1)$和第n个事件的间隔时间，$n \geq 1$
2. $\{X_1, X_2, \cdots\}$为服从独立同分布F的随机变量
3. S_n定义为第n个事件的到达时刻，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
4. $\{N(t), t \geq 0\}$是一个计数过程 $N(t) = \max\{n | S_n \leq t\}$

更新次数概率分布函数

- 在更新过程中，$P\{N(t)=n\}=?\quad E[N(t)]=?$

为了计算$N(t)$的概率分布，需借助等价关系

$$\{N(t)\geq n\}\Leftrightarrow\{S_n\leq t\}$$

$$P\{N(t)\geq n\}=P\{S_n\leq t\}=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leq t\right\}=F_n(t)$$

其中F_n是F的n重卷积

更新次数概率分布函数

累积分布定义

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}$$

等价关系

$$P\{N(t)=n\}=P\{S_n\leq t\}-P\{S_{n+1}\leq t\}$$

F_n是F的n重卷积

$$P\{N(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t)$$

更新函数

- 定义$M(t)=E[N(t)]$，$M(t)$称为更新函数

$M(t)$和F_n的关系

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E[N(t)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t)=n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(t)-(F_{n+1}(t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)
\end{aligned}
$$

$P\{N(t)=n\}=F_n(t)-F_{n+1}(t)$

加减消元

更新密度函数

- 定义更新密度函数$m(t)=\frac{dM(t)}{dt}$

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

f_n是F_n的概率密度

更新函数拉普拉斯形式

对于更新函数$M(t)$和更新密度函数$m(t)$求Laplace变换：

$$m^e(s)=\int_0^\infty e^{-st}m(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}[f^e(s)]^n=\frac{f^e(s)}{1-f^e(s)} \qquad \cdots(1)$$

其中，$f^e(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$

$$M^e(s)=\int_0^\infty e^{-st}M(t)dt=\frac{1}{s}m^e(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{f^e(s)}{1-f^e(s)} \qquad \cdots(2)$$

公式(1)、(2)是更新过程中两个重要的公式

泊松过程的更新函数

- $N(t)$是一个参数为λ的泊松过程，利用更新函数来计算$E(N(t))$

泊松过程的间隔时间分布为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}(t>0)$$

Laplace变换

$$f^e(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$$

由公式(1)得

$$m^e(s)=\frac{f^e(s)}{1-f^e(s)}=\frac{\lambda}{s}$$

由公式(2)得

$$M^e(s)=\frac{1}{s}m^e(s)=\frac{\lambda}{s^2}$$

Laplace逆变换

$$M(t)=\lambda t=E[N(t)]$$

泊松过程是更新过程的一个特例

更新函数的应用

- 考虑一个更新过程，其间隔时间概率分布为$f(t) = te^{-t}(t \geq 0)$求该更新过程的更新函数

间隔时间分布的Laplace变换为

$$f^e(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

代入公式(1)

$$m^e(s) = \frac{f^e(s)}{1 - f^e(s)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

代入公式(2)

$$M^e(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{s^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

Laplace逆变换

$$M(t) = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)t + \left(\frac{1}{4}\right)e^{-2t}$$

课堂思考

泊松过程

间隔时间$\{X_n\}$是独立同分布的随机变量，均值为μ，$N(t)$独立于$\{X_n\}$，$S_{N(t)} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$

$$E\left[S_{N(t)}\right] = \mu E[N(t)]$$

$N(t) = max\{n|S_n \le t\}$表示在$(0, t]$更新次数，$S_{N(t)} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$表示$t$时刻之前最后一次更新时刻

$$E\left[S_{N(t)}\right] ❓= \mu E[N(t)]$$

更新过程

谢谢听课

授课教师

赵毅