图像处理 第三次作业

数学三班 李岳锴 200810301

第四章 结合约束项的图像分割模型

1. 写出结合先验约束项的图像分割模型的能量泛函，并解释能量泛函中各项的意义与作用。

$$E(\Phi)=\int_\Omega g(|\nabla I(\boldsymbol{x})|)\,|\nabla\Phi(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega \Phi(x)\,T(x)\,\mathrm{d}x+L\left(\Phi,\Phi_{\text{pre}}\right)$$

其中:

$$T\left(x\right)=p_1\left(x\right)+p_2\left(x\right)$$

$$p_1(X)=\lambda_1\int_\Omega K_\sigma\left(y-\boldsymbol{x}\right)\left|I(x)-f_1\left(y\right)\right|^2\mathrm{d}y$$

$$p_2\left(X\right)=-\lambda_2\int_\Omega K_\sigma\left(y-x\right)\left|I(X)-f_2\left(y\right)\right|^2\mathrm{d}y$$

$$L\left(\Phi,\Phi_{\text{pre}}\right)=\frac{\alpha}{2}\int_\Omega\left\|\Phi(X)-\Phi_{\text{pre}}(X)\right\|^2\mathrm{d}X$$

$f_1(y)$和$f_2(y)$是RSF模型中的两个局部强度近似函数.

> 令:
>
> $$|\nabla\Phi|_g=\int_\Omega g(|\nabla I(\boldsymbol{X})|)\,|\nabla\Phi(\boldsymbol{X})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$
>
> $$\langle\Phi,T\rangle=\int_\Omega\Phi(\boldsymbol{X})\,T(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$
>
> $$\left\langle\Phi-\Phi_{\text{pre}},\Phi-\Phi_{\text{pre}}\right\rangle=\left\|\Phi(\boldsymbol{X})-\Phi_{\text{pre}}(\boldsymbol{x})\right\|^2=\int_\Omega\left(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})-\Phi_{\text{pre}}(\boldsymbol{x})\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
>
> 正如我们所看到的，在我们的能量泛函中有三项。其中，$|\nabla\Phi|_g$是在**平滑图像轮廓和检测边缘时起作用的加权长度项**，$\langle\Phi,T\rangle$是**控制轮廓演化的目标图像数据项**，$\left\langle\Phi-\Phi_{\text{pre}},\Phi-\Phi_{\text{pre}}\right\rangle$是**先验约束项**，它是我们模型中最重要的一项，因为它**保证了活动轮廓在预分割曲线附近演化**，从而在根本上提高了模型对初始条件的鲁棒性。

2. 写出应用分裂Bregman极小化结合先验约束项的图像分割模型中能量泛函的过程。

在进行极小化之前，我们将该优化问题写成$L1$问题的标准形式：

$$\min_{\Phi} F(\Phi)=\min\left(|\nabla\Phi|_{\varepsilon}+\langle\Phi,T\rangle+\frac{\alpha}{2}\left\langle\Phi-\Phi_{\mathrm{pre}},\Phi-\Phi_{\mathrm{pre}}\right\rangle\right)$$

① 引入辅助变量$\mathbf{s}=(s_x,s_y)$，则原问题等价于解如下约束极小化问题：

$$\min_{\Phi,s}(|\mathbf{s}|_g+\langle\Phi,T\rangle+\frac{\alpha}{2}\|\Phi-\Phi_{pre}\|^2)\ s.t.\ \mathbf{s}=\nabla\Phi$$

② 引入二次约束函数，将①中约束极小化问题转化为无约束极小化问题：

$$\min_{\Phi,\mathbf{s}}(|\mathbf{s}|_g+\langle\Phi,T\rangle+\frac{\alpha}{2}\|\Phi-\Phi_{pre}\|^2+\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{s}-\nabla\Phi\|^2)$$

其中，λ为正常数.

③ 考虑到二次约束函数仅仅近似地对条件$s=\Phi(u)$进行约束,而事实上希望精确地或严格地强制该约束条件，因此考虑Split Bregman迭代算法：

$$\begin{aligned}(\Phi^{k+1},s^{k+1})&=\arg\min_{\Phi,\mathbf{s}}(|\mathbf{s}|_g+\langle\Phi,T\rangle+\frac{\alpha}{2}\|\Phi-\Phi_{pre}\|^2\\&+\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{s}-\nabla\Phi-\mathbf{h}^k\|^2)\\\mathbf{h}^{k+1}&=\mathbf{h}^k+\nabla\Phi^{k+1}-\mathbf{s}^{k+1}\end{aligned}$$

这样，将原L1正则问题转化为求解一系列无约束优化问题和Bregman迭代的问题.

④分别关于Φ和$\mathbf{s}$交替极小化：

$$\begin{aligned}\Phi^{k+1}&=\arg\min_{\Phi}(\langle\Phi,T^k\rangle+\frac{\alpha}{2}\|\Phi-\Phi_{pre}\|^2\\&+\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{s}^k-\nabla\Phi-\mathbf{h}^k\|^2).\\\mathbf{s}^{k+1}&=\arg\min_{\mathbf{s}}(|\mathbf{s}|_g+\frac{\lambda}{2}\|\mathbf{s}-\nabla\Phi^{k+1}-\mathbf{h}^k\|^2)\end{aligned}$$

对于第一步，因为已经将Φ从$L1$项中分离出来，关于Φ的优化问题现在是可微的，容易推出Φ^{k+1}满足的方程：

$$T^k+\alpha(\Phi^{k+1}-\Phi_{prere})-\lambda\Delta\Phi^{k+1}+\lambda\nabla\cdot(\mathbf{s}^k-\mathbf{h}^k)=0$$

对于第二步，利用向量值shrinkage算子显式地计算出$\mathbf{s}^{k+1}$：

$$\mathbf{s}^{k+1}=shrink_g\left(\mathbf{h}^k+\nabla\Phi^{k+1},\frac{1}{\lambda}\right)=shrink\left(\mathbf{h}^k+\nabla\Phi^{k+1},\frac{g}{\lambda}\right)$$

其中$\mathrm{shink}(\mathbf{x},\gamma)=\begin{cases}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\max(|\mathbf{x}|-\gamma,0),\mathbf{x}\neq0\\0,\mathbf{x}=0\end{cases}$

3. 写出带有强约束项的彩色图像分割模型的能量泛函，并说明与灰度图像分割模型的不同之处。

带有强约束项的彩色图像分割模型的能量泛函：

$$\min_{\phi} F(\phi) = \min_{\phi} \left(|\nabla \phi|_g + \langle \phi, T \rangle + \frac{\alpha}{2} \left\langle \phi - \phi_{\text{pre}}, \phi - \phi_{\text{pre}} \right\rangle \right)$$

其中：

$$|\nabla \Phi|_g = \int_\Omega g\left(|\nabla I\left(\boldsymbol{X}\right)|\right) \, |\nabla \Phi\left(\boldsymbol{X}\right)| \, \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$\langle \Phi, T \rangle = \int_\Omega \Phi\left(\boldsymbol{X}\right) T\left(\boldsymbol{X}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$T(\mathbf{x}) = \overline{e_1}(\mathbf{x}) + \overline{e_2}(\mathbf{x})$$

$$\overline{e_1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i1} \int_\Omega K_\sigma(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |I_i(\mathbf{x}) - f_{i1}(\mathbf{y})|^2 \mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$\overline{e_2}(x) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \lambda_{i2} \int_\Omega K_\sigma(\mathbf{y}-\mathbf{x}) |I_i(\mathbf{x}) - f_{i2}(\mathbf{y})|^2 \mathrm{d}\mathbf{y}$$

$$\left\langle \Phi - \Phi_{\text{pre}}, \Phi - \Phi_{\text{pre}} \right\rangle = \int_\Omega \left(\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}\right) - \Phi_{\text{pre}}\left(\boldsymbol{x}\right) \right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

> - 由于彩色图像具有三个色彩通道，在计算梯度时，需要对每个通道分别计算梯度再进行加权平均处理。例如：
>
> $$|\nabla I(\mathbf{x})|^2 = \{ \sum_{i=1}^{3} (\frac{\partial I_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial I_i}{\partial y})^2 \}(\mathbf{x})$$
>
> - 在处理彩色图像时，需要对每个色彩通道分别计算 f_{i1}， f_{i2}， λ_{i1}， λ_{i2}， 其余形式与标准的RSF均相同