应用随机过程

离散马链定义

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

离散马链的定义

随机过程
$X = \{X_n, n = 0,1,\cdots\}$
是离散马链

1. X_n表示系统在n时刻的状态

2. X_n在集合S中取值，称集合S为状态空间，$S = \{0,1,\cdots\}$

3. $P\{X_{n+1} = j | X_n = i, \cdots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$（马尔科夫性）

转移概率矩阵

矩阵$P=\{p_{ij}\}$称为转移概率矩阵

1

$\forall n, P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=p_{ij}, \forall i,j\in S$

(时齐性)

2

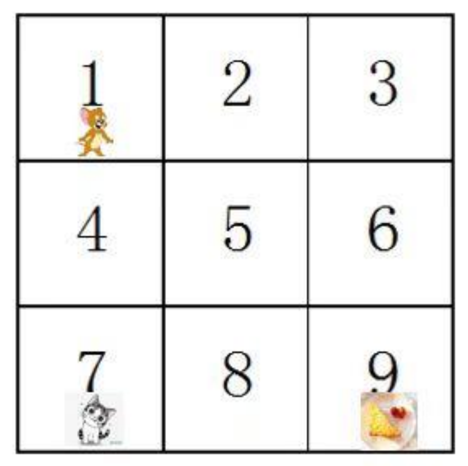
P包含所有转移概率

3

$Pe=e$，其中e是元素全为1的行向量

简单示例

（迷宫里的老鼠）如图所示，一只老鼠从1号方格出发，一只猫藏在7号方格，且9号方格里有一块奶酪。在缺乏学习的情况下，当老鼠在任一给定的方格里时，它会以$1/k$的概率移动到下一个方格里，其中k是相邻方格的数量。假设一旦老鼠找到奶酪或者遇到猫，它将永远停在那里。令X_n表示经过n次转移之后老鼠的位置，试给出马链$\{X_n|n=0,1,\cdots\}$的转移概率矩阵。



状态空间为$S=\{1,2,\cdots 9\}$，则转移概率矩阵：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0
2	1/3	0	1/3	0	1/3	0	0	0	0
3	0	1/2	0	0	0	1/2	0	0	0
4	1/3	0	0	0	1/3	0	1/3	0	0
5	0	1/4	0	1/4	0	1/4	0	1/4	0
6	0	0	1/3	0	1/3	0	0	0	1/3
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	1/3	0	1/3	0	1/3
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1

n步转移概率矩阵

矩阵$P^{(n)}=\{p_{ij}^{(n)}\}$称为n步转移概率矩阵

1

$\forall m, p_{ij}^{(n)}=P\{X_{n+m}=j|X_m=i\}, \forall i,j \in S$

2

当$n=1$时，$P^{(1)}=P$

3

当$n=0$时，$P_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases} \to P^{(0)}=I$

Chapman-Kolmogorov等式

Chapman-Kolmogorov等式 $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$

为我们提供了一个计算n步转移概率的方法，试证明之。

证明：设$\{X_n, n = 0,1,\cdots\}$为任一离散马尔科夫链，那么

$$p_{ij}^{(n+m)} = \mathrm{P}\{X_{n+m} = j | X_0 = i\}$$

概率可列可加性

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i\}$$

条件概率的定义

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k | X_0 = i\}$$

马尔科夫性

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{X_{n+m} = j | X_n = k\} P\{X_n = k | X_0 = i\}$$

n步转移概率的定义

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

矩阵形式

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)} \xrightarrow{\text{数学归纳}} \boxed{P^{(n)} = P^n}$$

谢谢听课

授课教师

赵毅