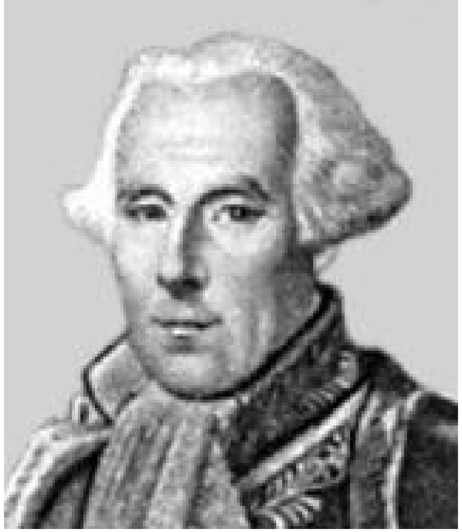
§3 毕奥—萨伐尔定律



让-巴蒂斯特·毕奥
法国物理学家、天文学家和数学家

菲利克斯·萨伐尔

法国物理学家和医生

拉普拉斯
法国分析学家、概率论学家和物理学家

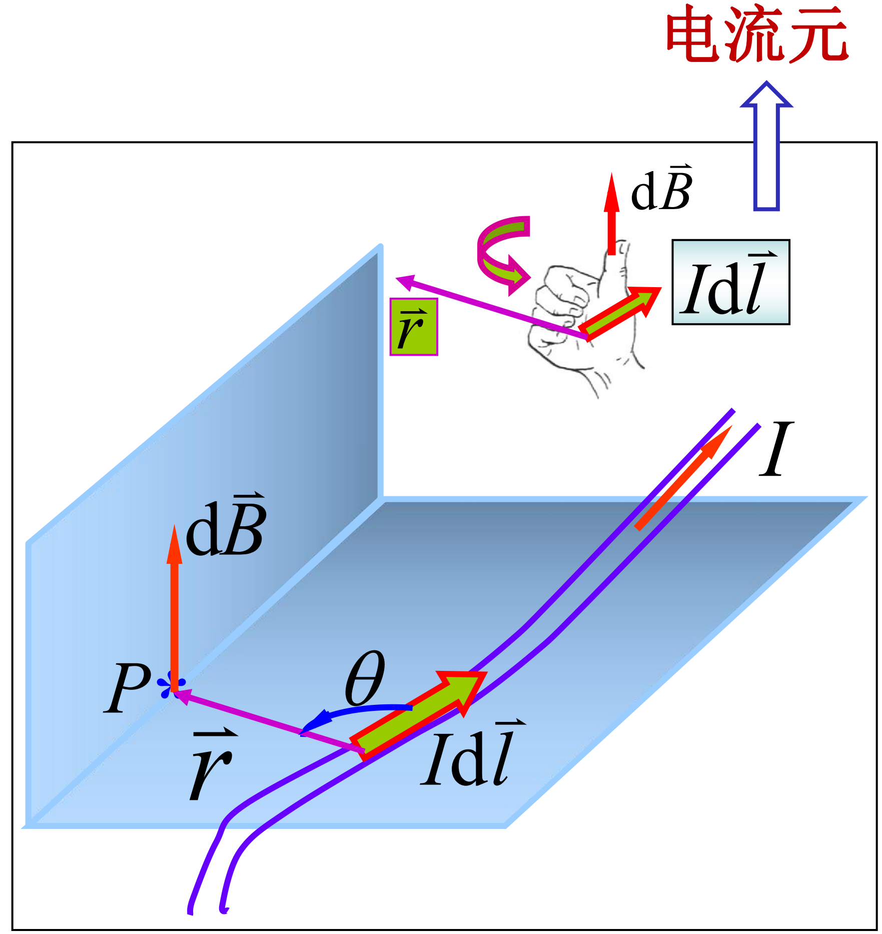
一、毕奥—萨伐尔定律

——电流元在空间产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} = r\vec{r}_0$$
$$\vec{r}_0 \equiv \vec{e}_r$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$



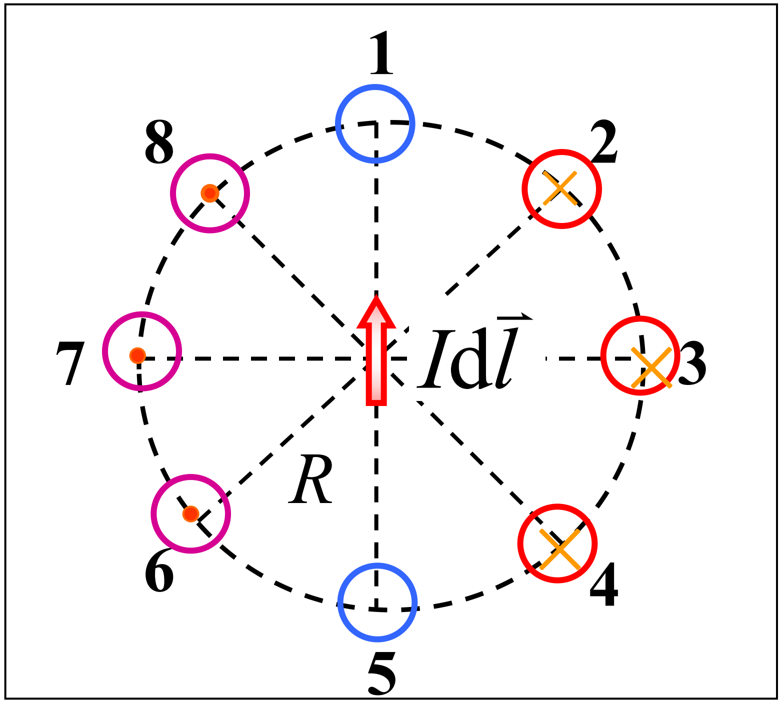
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot A^{-2}}$ ——真空磁导率

- 任意载流导线在点 P 处的磁感强度：

$$\vec{B} = \int_{(L)}\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{(L)}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

例 判断下列各点磁感强度的方向和大小.



1、5点：$\mathrm{d}B = 0$

3、7点：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi R^2}$

2、4、6、8 点：

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi R^2} \sin 45^0$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

毕奥—萨伐尔定律

二、毕奥—萨伐尔定律应用举例

例1 求有限长载流直导线外的磁场。

解：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}}$$

$\mathrm{d}\vec{B}$ 方向均沿 z 轴的负方向

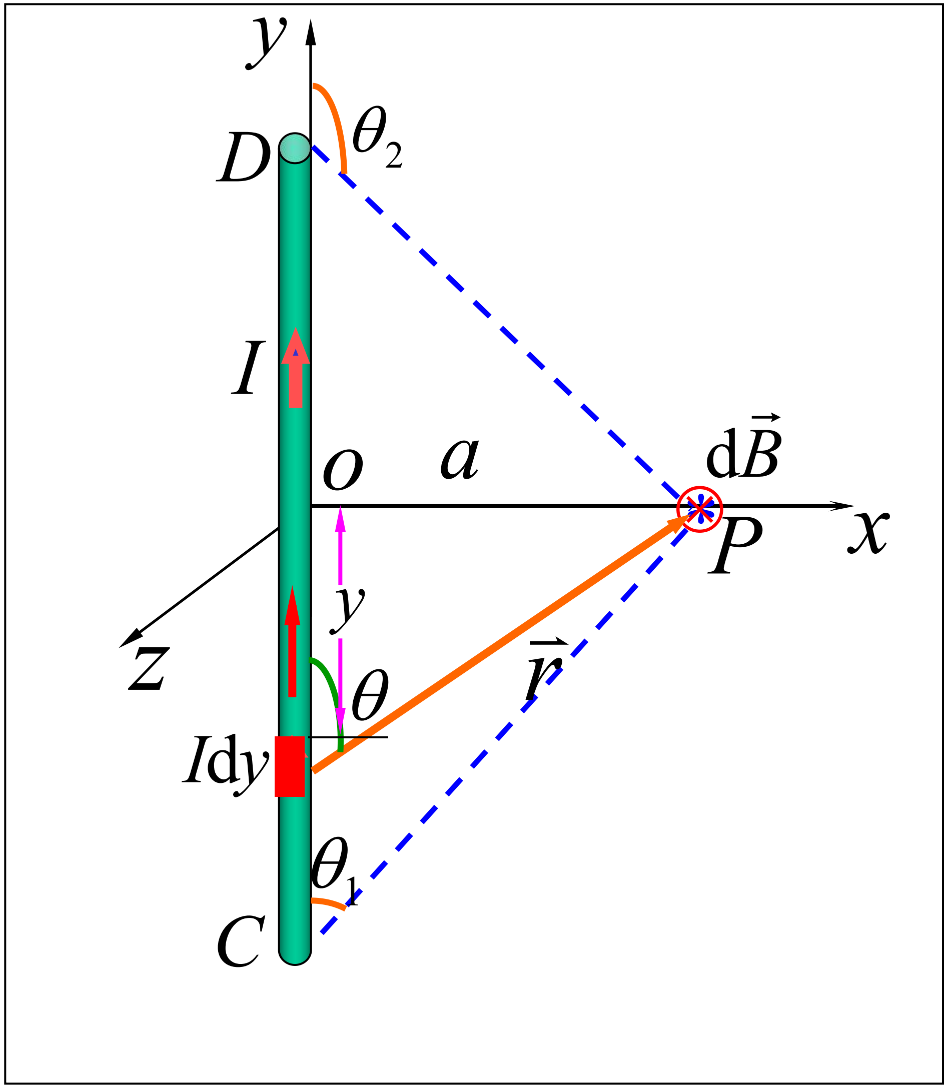
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y\sin\theta}{r^2}$$

$$r=a/\sin\theta$$

$$-y=a\,\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$\mathrm{d}y=a\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$



$$B = \int_C^D \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$ $\vec{B}$ 的方向沿 z 轴的负方向。

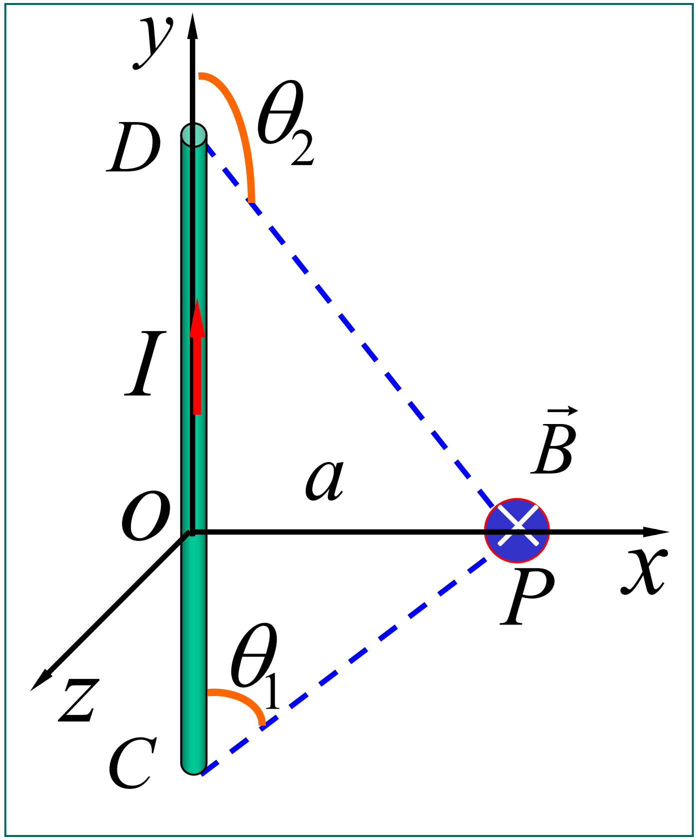
讨论：

（1）*P*点在载流长直导线的中垂线上

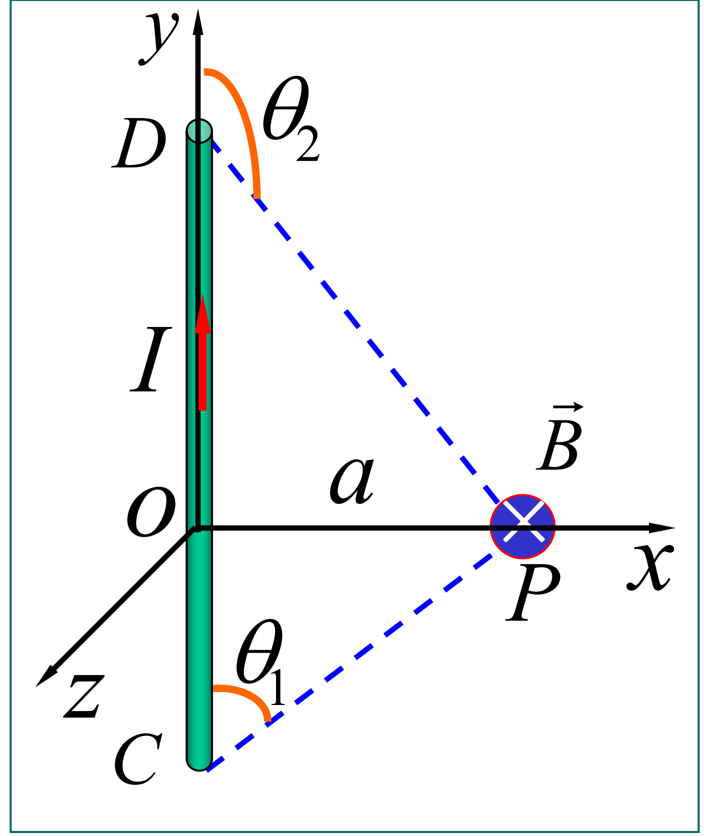
$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \quad \cos\theta_2 = -\cos\theta_1$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\theta_1$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

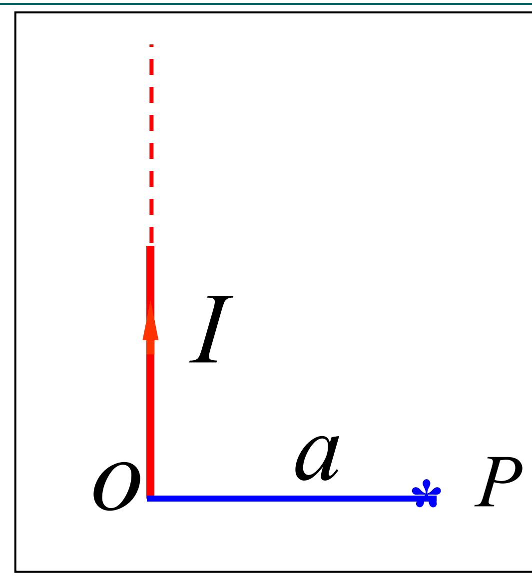


（2）无限长载流长直导线的磁场

$$\theta_1 \to 0, \quad \theta_2 \to \pi \qquad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

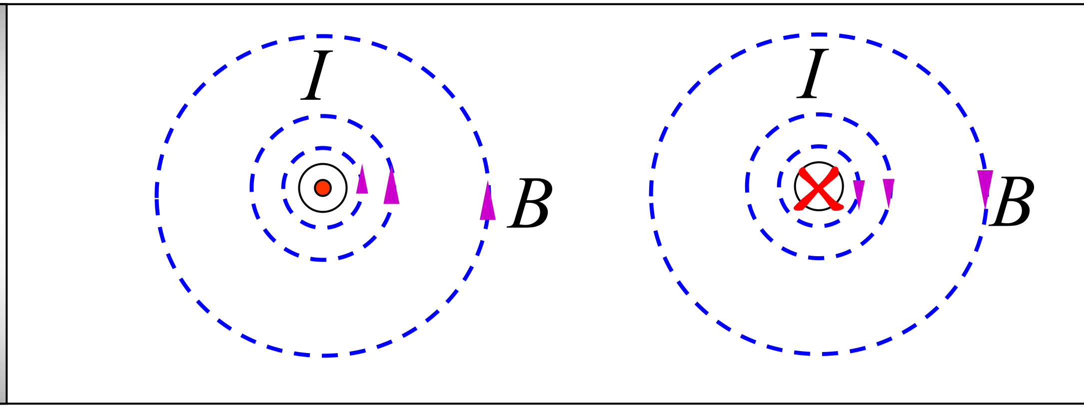
（3）半无限长载流长直导线的磁场

$$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 \to \pi \qquad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}}$$

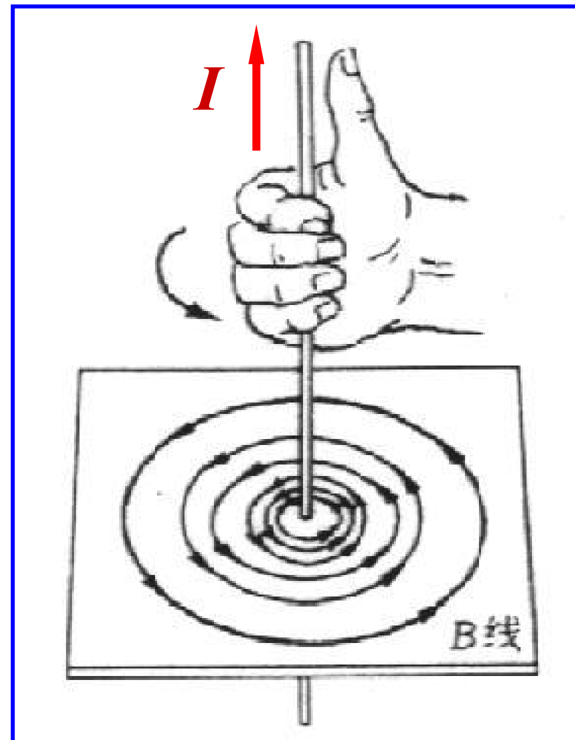


◆ 无限长载流长直导线的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



◆ 电流与磁感强度成右手螺旋关系

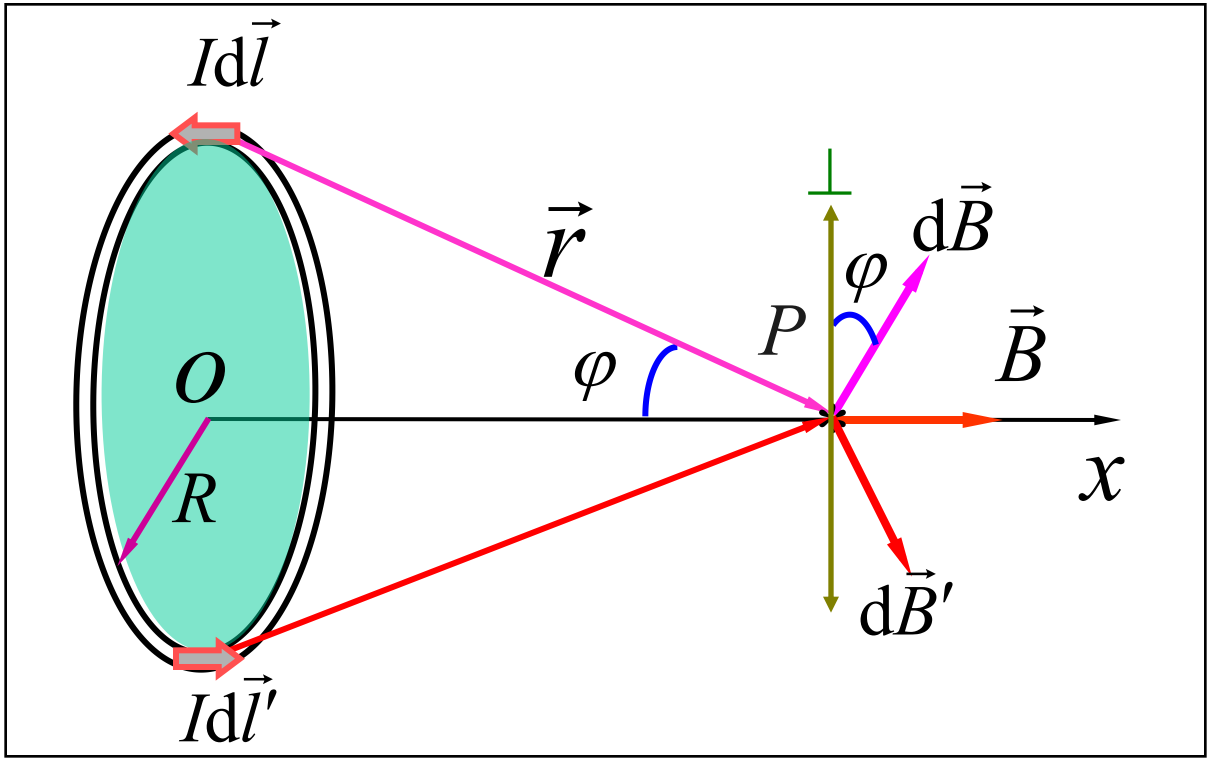


例2 真空中，半径为 R 的载流导线，通有电流 I，称圆电流。**求**其轴线上一点 P 的磁感强度的大小和方向。

解:

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$



根据对称性分析知: $B_\perp=0,\quad B_x=\int\mathrm{d}B_x$

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cos\alpha$$

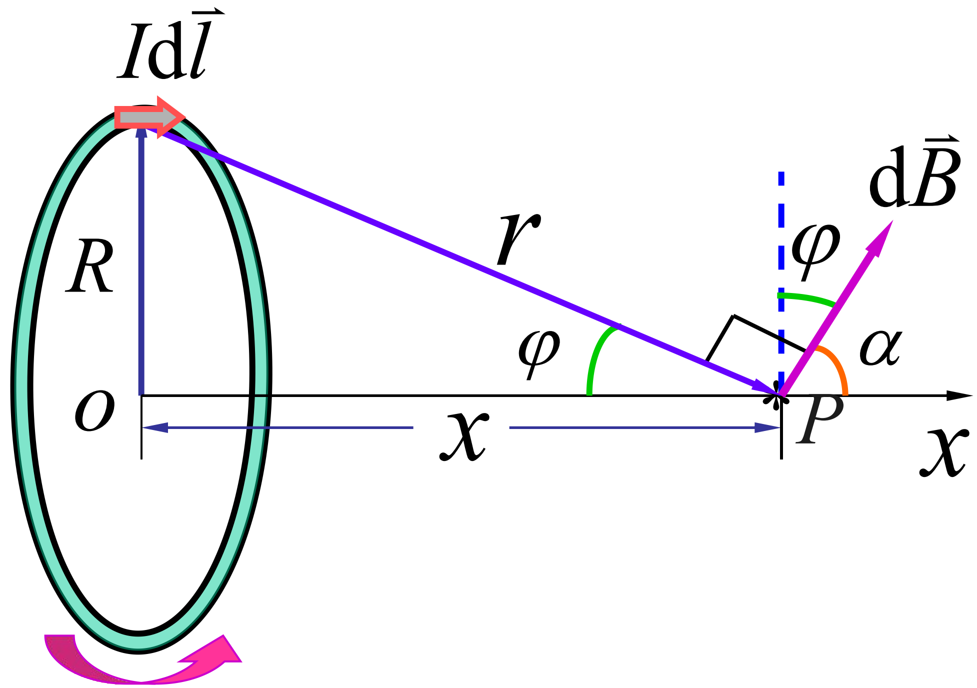
$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \sin\varphi = R/r$$

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{r^3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{r^3}$$



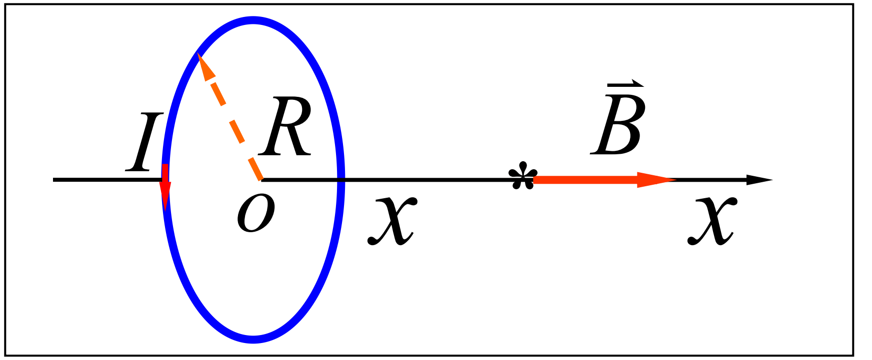
$$r^2 = R^2 + x^2$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i}$$



讨论:

（**1**）若 $x = 0$ $$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

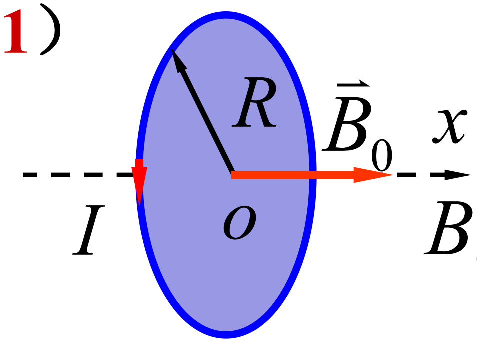
（**2**）$$\vec{B} = B_x \vec{i} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

** $\vec{m} = I\vec{S} = I\pi R^2 \vec{i}$ ——称为磁矩

当 $x >> R$ 时： $$\vec{B} = B_x \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{x^3}$$

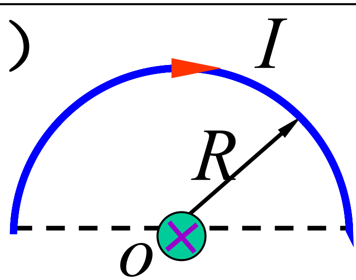
（3）几个特例

（1）



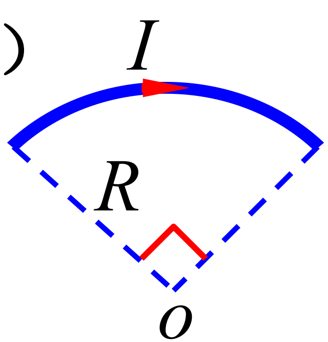
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

（2）



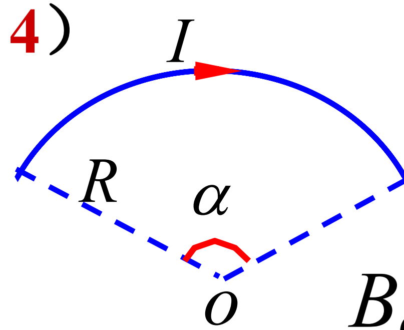
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

（3）



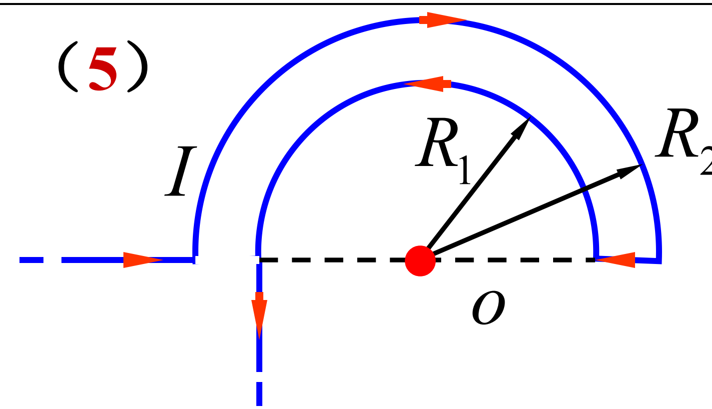
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

（4）



$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\alpha}{2\pi}$$

（5）

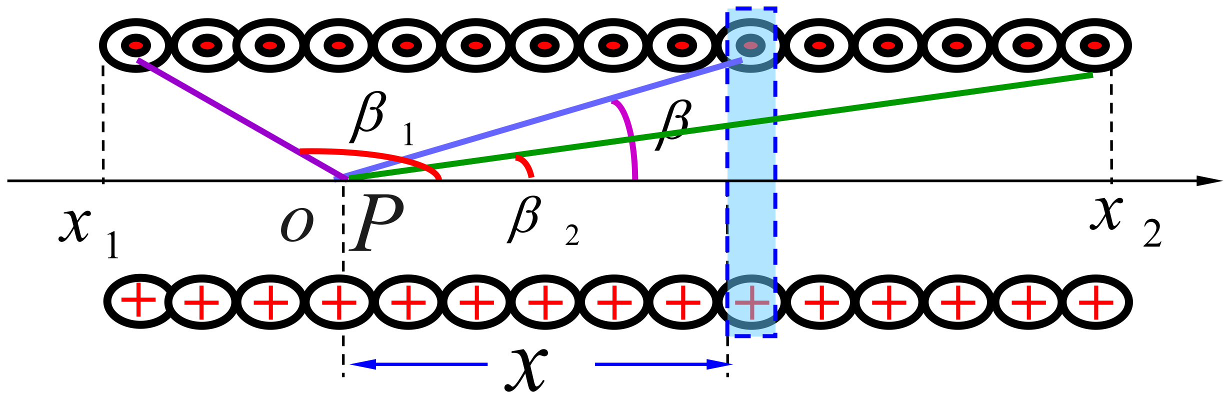


$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

例3 载流直螺线管的磁场

有一长为l，R的载流密绕直螺线管，总匝数为N，通有电流I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.

$$n=\frac{N}{l}$$



解 由圆形电流磁场公式

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 In\,\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$x=R\operatorname{ctg}\beta$$

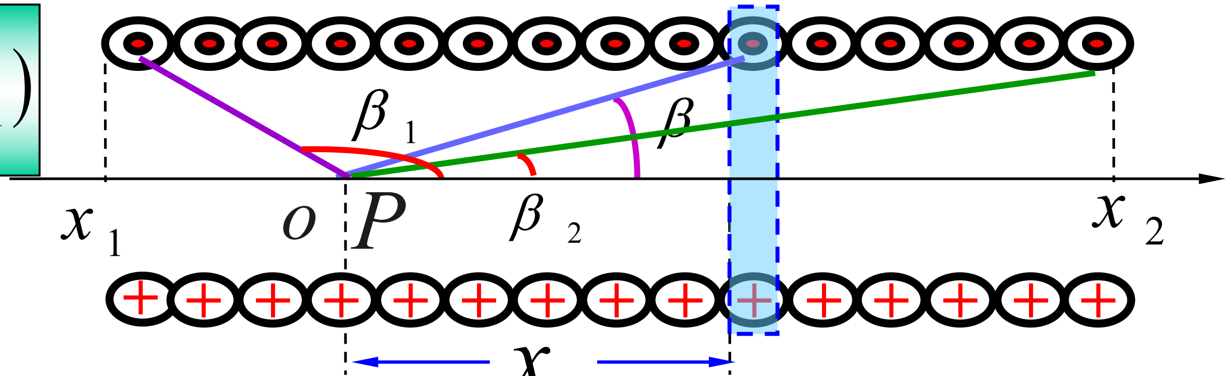
$$\mathrm{d}x=-R\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$R^2+x^2=R^2\csc^2\beta$$

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$



（1）*P*点位于管内

轴线中点

$$\beta_1=\pi-\beta_2 \qquad \cos\beta_1=-\cos\beta_2$$

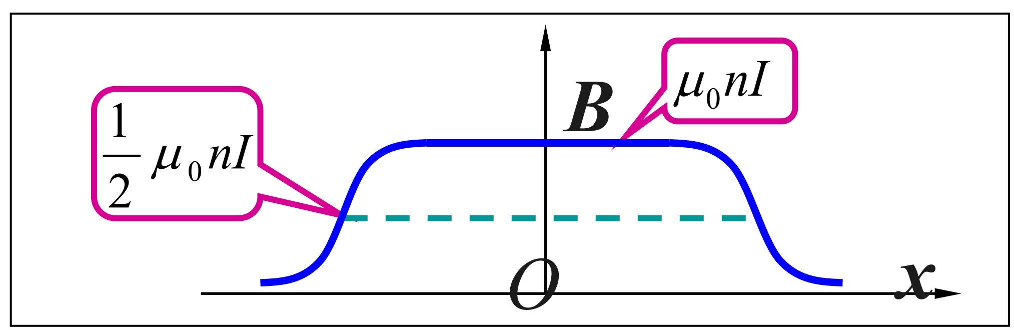
$$\cos\beta_2=\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+R^2}} \qquad B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{\left(l^2/4+R^2\right)^{1/2}}$$

(2) 无限长的螺线管

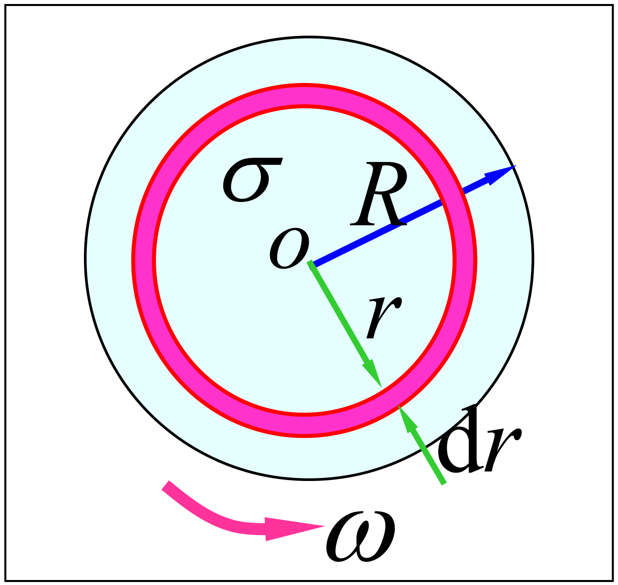
$$\beta_1=\pi,\beta_2=0 \qquad B=\mu_0 nI$$

（3）半无限长螺线管

$$\beta_1=\frac{\pi}{2},\beta_2=0 \qquad B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$



例4 半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ，并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度。



解： 圆电流的磁场

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

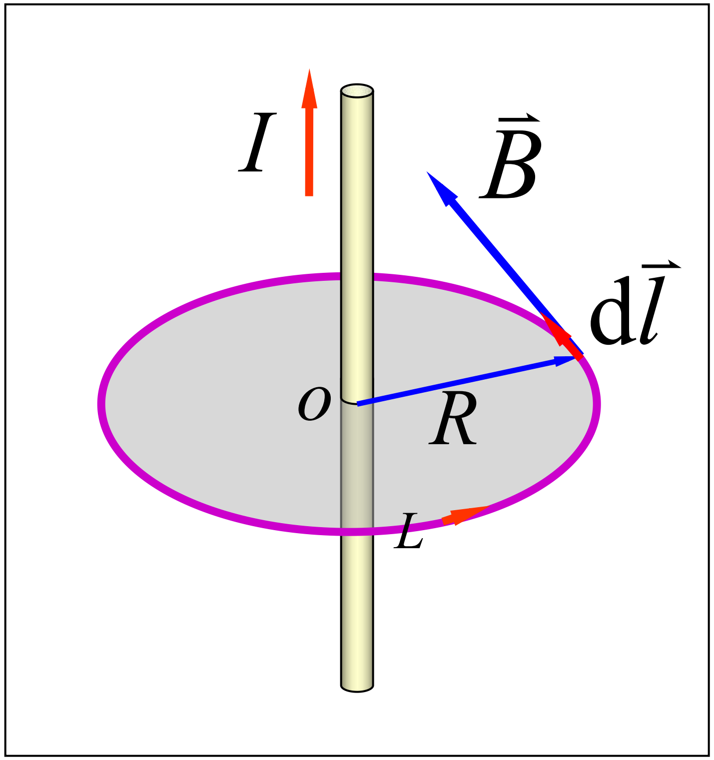
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

$$\begin{cases} \sigma > 0, & \vec{B}\ \text{向外} \\ \sigma < 0, & \vec{B}\ \text{向内} \end{cases}$$

§4 安培环路定理

对于载流长直导线外，若选某一条磁感应线为闭合回路，则



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\left|\mathrm{d}\vec{l}\right| \neq 0$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$$

一、安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{L内}} I_i}$$

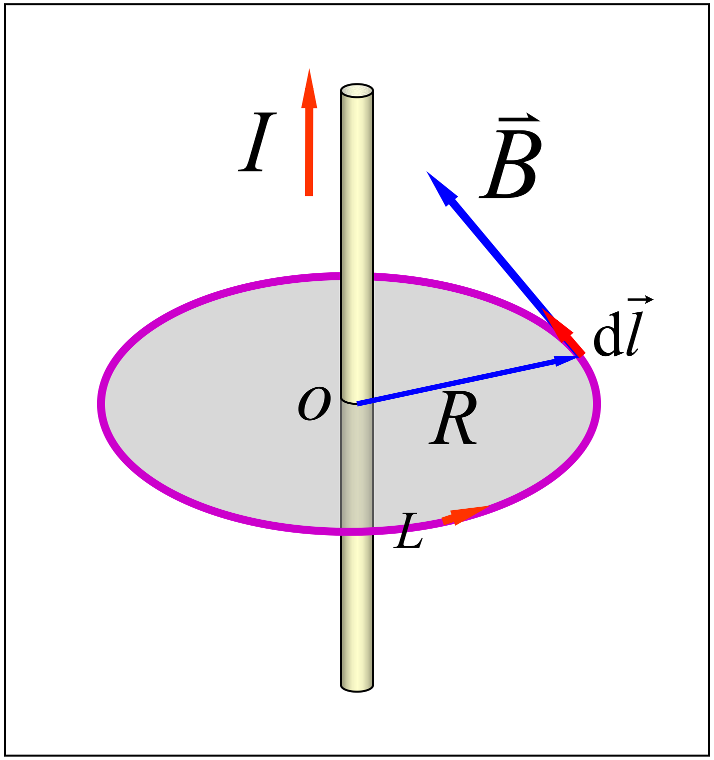
真空中磁感应强度沿任一闭合回路的线积分，数值上等于该闭合回路所包围的所有电流的代数和乘以真空磁导率。与回路的形状和回路外的电流无关。

以长直导线为例，证明上述定理：

（1）单根载流长直导线

设闭合回路 L 为圆形回路

（ L 与 I 成右螺旋）



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left|\mathrm{d}\vec{l}\right|$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_L\left|\mathrm{d}\vec{l}\right|=\mu_0 I$$

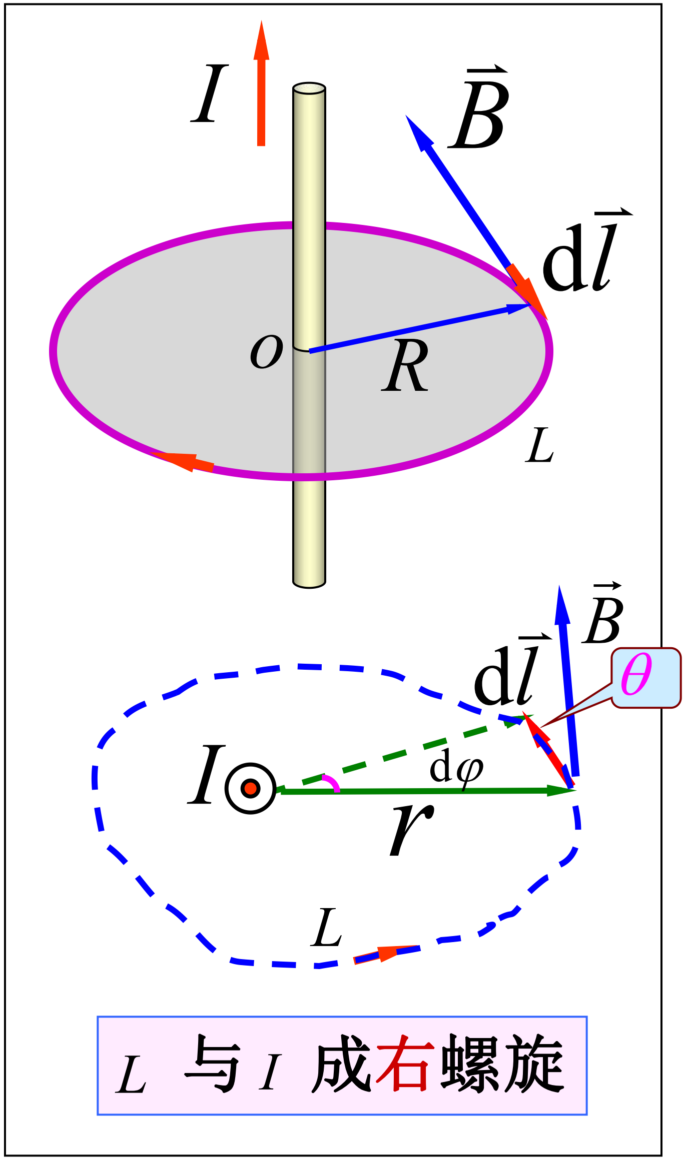
若回路逆向时，则 $$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\mu_0 I$$

（2）单根载流长直导线对任意形状的回路

$$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=B\left|\mathrm{d}\vec{l}\right|\cos\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_{(L)}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_{(L)}\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I$$



（3）电流在回路之外

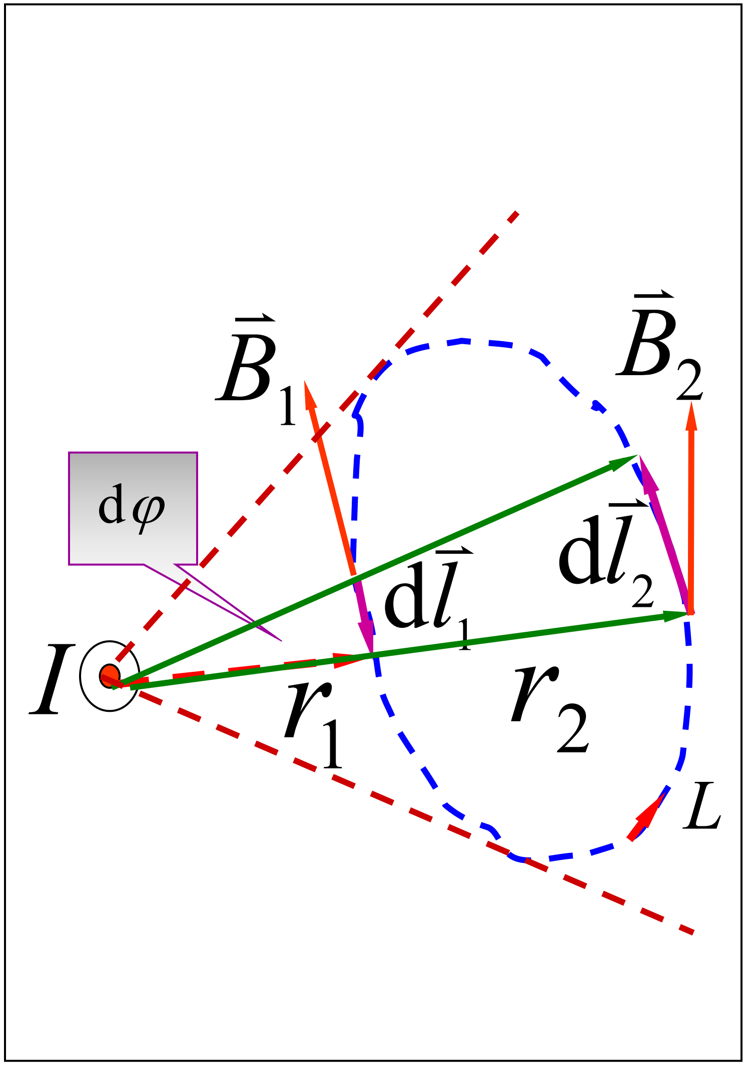
$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_1},\quad B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_2}$$

$$\vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}_1=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}r_1\mathrm{d}\varphi=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}r_2\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}_1+\vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}_2=0$$

$$\oint_{(L)}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$



（4）多根电流情况

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m}$$

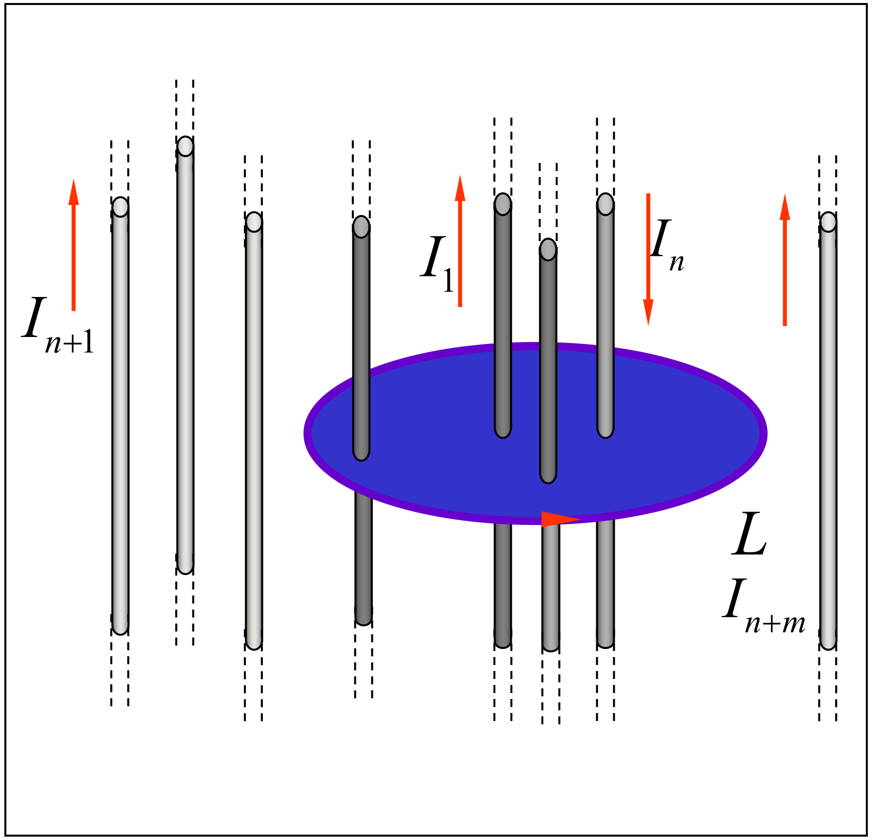
$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} =$$

$$= \oint_{(L)} \left(\vec{B}_1 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_{(L)} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_{(L)} \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$+ \oint_{(L)} \vec{B}_{n+1} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_{(L)} \vec{B}_{n+m} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 \left(I_1 + \cdots + I_n \right) + 0 + \cdots + 0$$



➤ 安培环路定理

$$\boxed{\oint_{(L)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i}$$

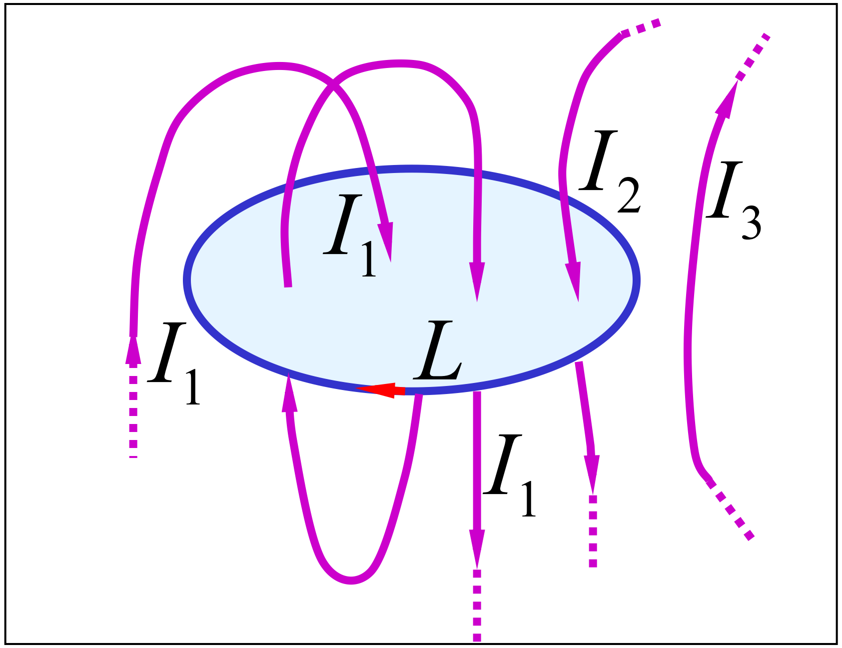
安培环路定理：真空的稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的线积分，等于该闭合路径所包围的所有电流的代数和 $\sum I_i$ 乘以真空磁导率 μ_0。

说明：电流 I 正负的规定：I 与 L 成右螺旋时，I 为正；反之为负。

例：$\oint_{(L)} \vec{B}\cdot d\vec{l} =$

$$= \mu_0(I_1 - I_1 + I_1 + I_2)$$

$$= \mu_0(I_1 + I_2)$$



（1）$\vec{B}$ 是否与回路 L 外电流有关？

（2）若 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$，是否回路 L 上各处 $\vec{B} = 0$？是否回路 L 内无电流穿过？

二、安培环路定理的应用

解题步骤：

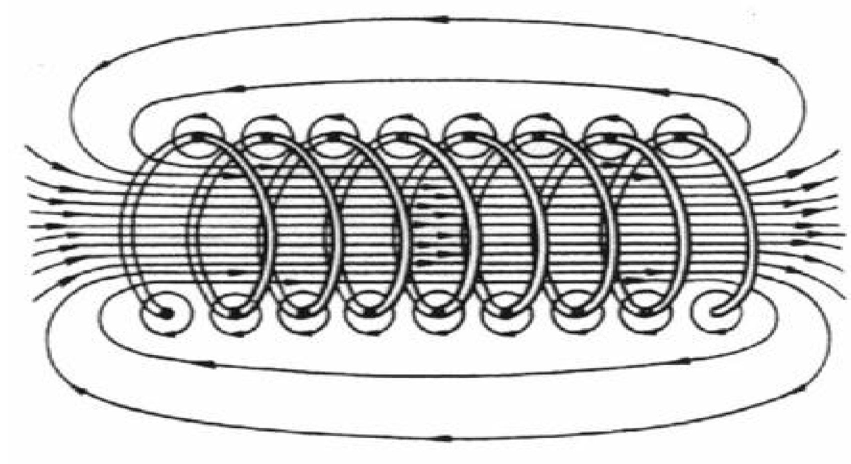
- 进行磁场分布的对称性分析；
- 根据磁场分布的对称性选择合适的闭合回路；
- 应用安培环路定理进行计算。

合适的闭合回路（安培环路）的选择：

（1）当回路经由所求磁场时，使得回路上各点的磁感应强度大小相等，即 $B=\text{const.}$，且 $\vec{B}\,//\,\mathrm{d}\vec{l}$ ；

（2）当回路经由非所求磁场时，使得回路上各点的磁感应强度 $\vec{B}=0$ ，或 $\vec{B}\perp\mathrm{d}\vec{l}$ ；

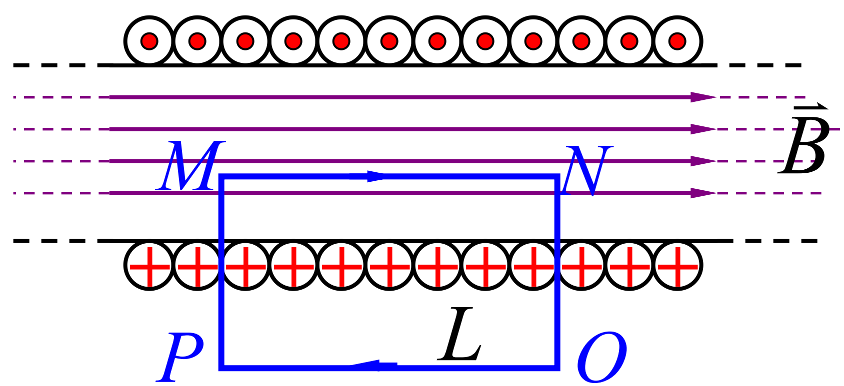
例1 求长直密绕螺线管内磁场。



解：（1）对称性分析：螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零 ，即 $B \simeq 0$。

（2）选回路 L。

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 I 成右螺旋。



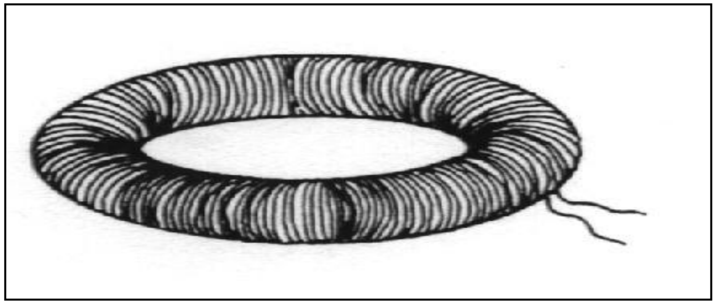
$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{NO} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{OP} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{PM} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$B \cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

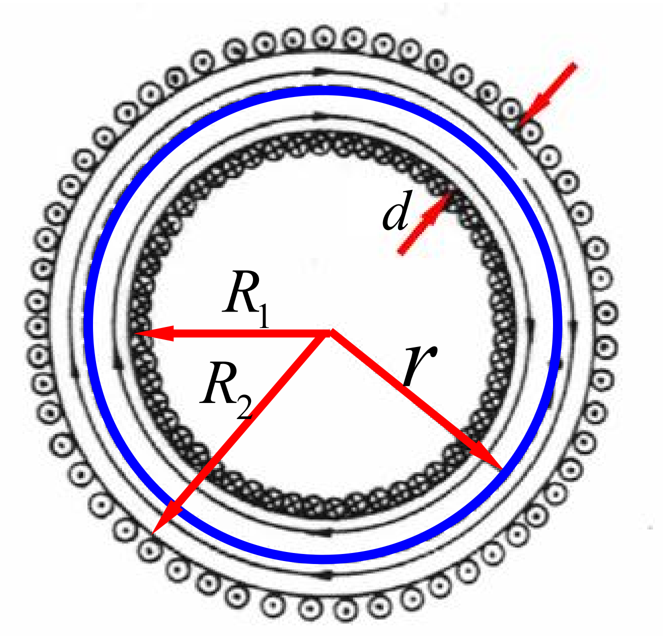
无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零。

例2　求载流螺绕环内的磁场。



解：（1）对称性分析：环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零。

（2）选择合适的闭合回路——顺时针方向旋转的同心圆。



$$R_1 < r < R_2$$

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

令 $n = N / (2\pi r)$　　$\boxed{B = \mu_0 nI}$

当 $r >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场。

例3　无限长载流圆柱体的磁场

解： ➢对称性分析

➢选则合适的闭合回路

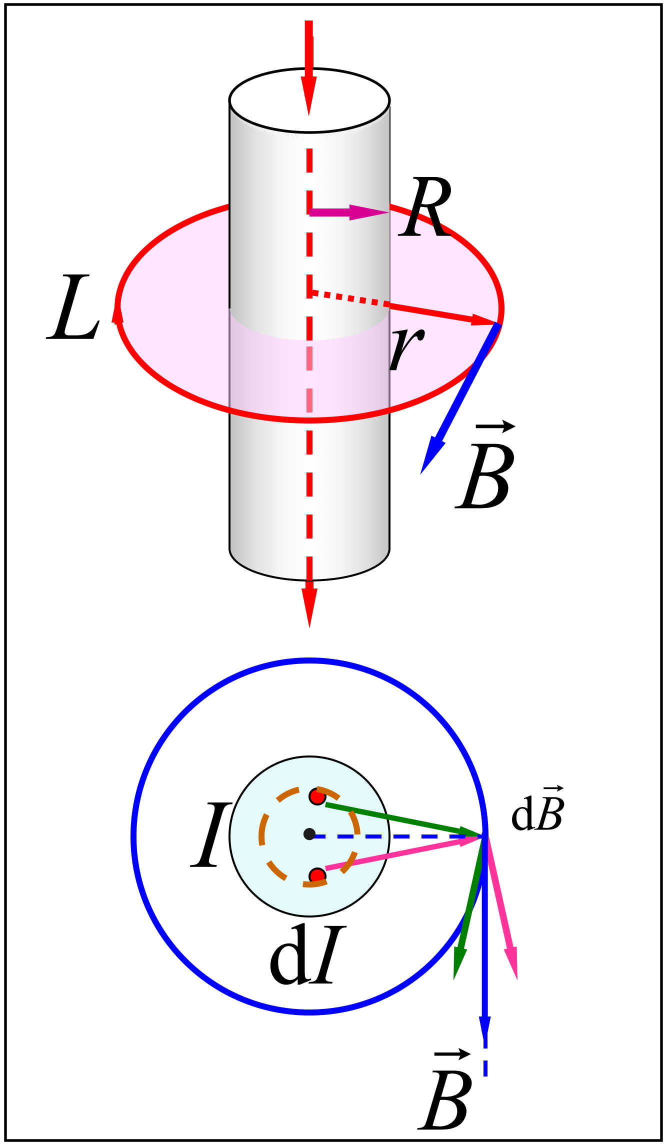
$r > R$　　$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I$

$2\pi\, rB = \mu_0 I$　　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$

$0 < r < R$

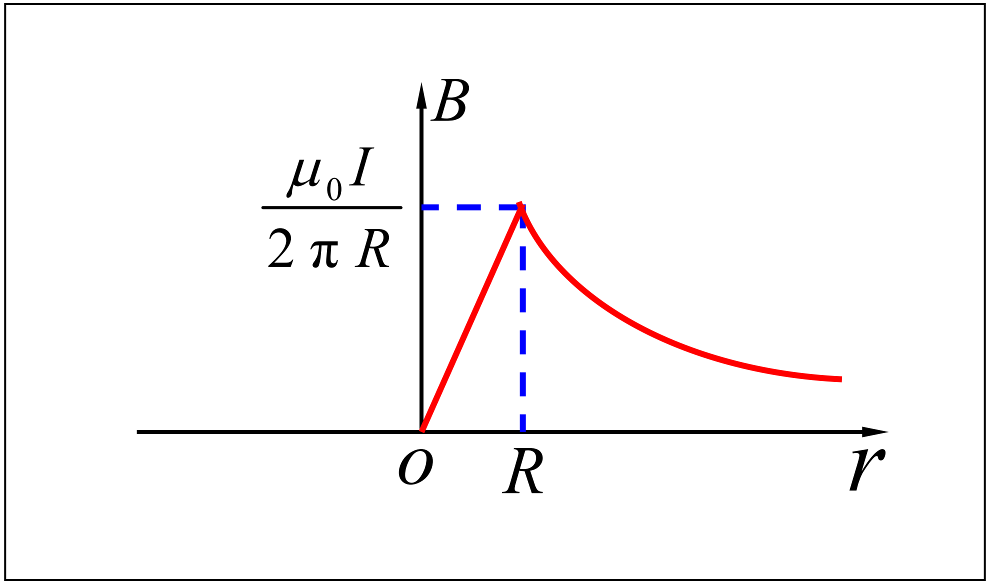
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I = \mu_0 \int_{L内} \mathrm{d}I$$

$2\pi rB = \mu_0 \dfrac{r^2 I}{R^2}$　　$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi\, R^2}$



$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\ r} \\ 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi\ R^2} \end{cases}$$



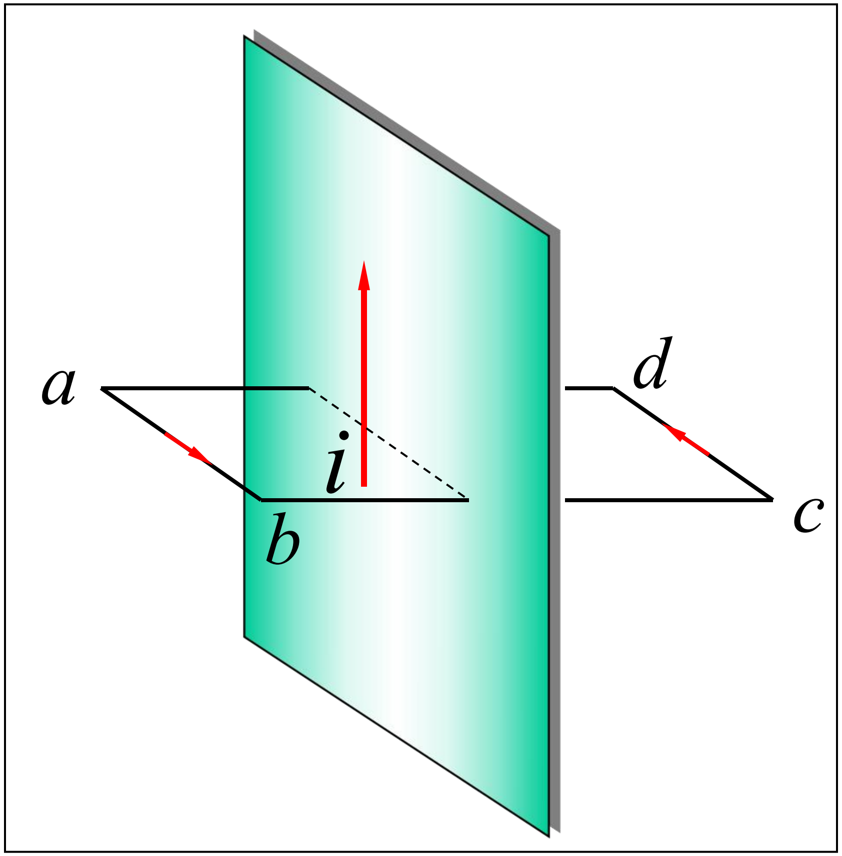
补充例：无限大均匀带电(线密度为i)平面的磁场

解 如图，作安培环路 $abcda$，应用安培环路定理

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\int_a^b B \cdot dl$$

$$= 2B\overline{ab} = \mu_0 i \overline{ab}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$



$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$