主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年春季学期

数学分析 B 期末考试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　学号　班号　学院

密　封　线

一、 (5 分) 求柱体 $x^2+y^2\le 4$ 位于平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=16-z$ 之间的立体的体积.

解：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(16-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr(16-r^2)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot 28$$

$$=56\pi$$

或

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}dxdy\int_0^{16-x^2-y^2}dz$$

二、(5 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$ 所围成的区域.

解：先二后一

$$\int_0^3 dz\iint\limits_{D^z}dxdy\cdot z=\int_0^3 zdz\cdot\iint\limits_{\substack{x+\frac{1}{2}y\leqslant 1-\frac{1}{3}z\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}dxdy$$

$$=\int_0^3 zdz\int_0^{1-\frac{1}{3}z}dx\int_0^{2\left(1-\frac{1}{3}z-x\right)}dy$$

$$=\int_0^3 zdz\cdot\left(1-\frac{1}{3}z\right)^2$$

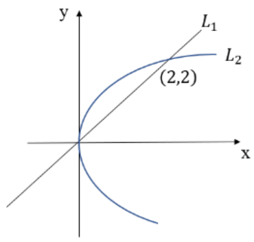
$$=\frac{3}{4}$$

或

$$\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}dy\int_0^{3\left(1-x-\frac{1}{2}y\right)}dz\cdot z$$

三、(5 分) (1) 利用平面曲线 L 的参数方程，将第一型(对弧长的)曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 化为对参数的定积分. (2)求 $\int_L x\mathrm{d}s$，这里平面曲线 L 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=\frac{1}{2}y^2$ 所围区域的整个边界.

解：(1) $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\quad a\leqslant t\leqslant b \qquad \int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$



(2)如图： $\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}$

$$L_1:\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases},\quad 0\leqslant x\leqslant 2 \qquad L_2:\begin{cases} x=\frac{1}{2}y^2 \\ y=y \end{cases},\quad 0\leqslant y\leqslant 2$$

故

$$\int_{L_1} x\,ds=\int_0^2 x\sqrt{1^2+1^2}\,dx=2\sqrt{2}$$

$$\int_{L_2} x\,ds=\int_0^2 \frac{1}{2}y^2\sqrt{y^2+1^2}\,dy=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right)=\frac{9}{8}\sqrt{5}-\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$$

四、(5 分) 曲面 Σ 由二元函数 $y=h(z,x),(z,x)\in D_{zx}$ 的图像给出. (1)将第一型(对面积的)曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 化为平面区域 D_{zx} 上的二重积分. (2)若上述 Σ 按指向 y 轴的负方向定向，成为有向曲面 $\vec{\Sigma}$，将第二型(对坐标的)曲面积分 $\iint_{\vec{\Sigma}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为 D_{zx} 上的二重积分.

解：(1)

$$\vec{r}(z,x)=\begin{bmatrix} x \\ h(z,x) \\ z \end{bmatrix},\quad (z,x)\in D_{zx} \qquad \iint_\Sigma f(\vec{r})dS=\iint_{D_{zx}} f(x,h(z,x),z)\|\vec{r}_z\times\vec{r}_x\|dzdx$$

$$=\iint_{D_{zx}} f(x,h(z,x),z)\sqrt{(-h'_x)^2+1^2+(-h'_z)^2}\,dzdx$$

$$=\iint_{D_{zx}} f(x,h(z,x),z)\sqrt{1^2+(h'_x)^2+(h'_z)^2}\,dzdx$$

(2)由 $\vec{r}'_z\times\vec{r}'_x=\left(-h'_x,1,-h'_z\right)$ 与指定正的法向量方向相反，故

$$\iint_{\vec{\Sigma}} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=-\iint_{D_{zx}}\left[(P,Q,R)\cdot(\vec{r}'_z\times\vec{r}'_x)\right]dzdx=-\iint_{D_{zx}}(P,Q,R)\cdot(-h'_x,1,-h'_z)dzdx$$

$$=-\iint_{D_{zx}}\left[P(-h'_x)+Q+R(-h'_z)\right]dzdx$$

五、(5 分) (1) 写出斯托克斯(Stokes)公式. (2) 对平面上的向量场 $(P,Q)=\left(x^2y,x^3\right)$ 及单位圆周按顺时针定向所成的定向闭曲线 $\vec{L}$，计算第二型曲线积分 $\int_{\vec{L}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

解：(1)

$$\left.\begin{array}{r}\text{向量场}\vec{F}=(P,Q,R)\text{在空间区域}G\text{上有连续偏导}\\ \text{曲面}\Sigma\subset G,\text{且}\Sigma\text{与}\gamma(\Sigma)\text{协调定向}\end{array}\right\}\Longrightarrow\int_{\gamma(\Sigma)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{\vec{\Sigma}}\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$$

(2)由格林公式

$$\int_{\vec{L}}Pdx+Qdy=-\iint_{D}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy\ \ (D\text{为平面单位圆周})$$

$$=-\iint_{D}(3x^2-x^2)dxdy=-\iint_{D}2x^2dxdy=-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\cdot r^2\cos^2\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$

六、（5 分） （1）写出“二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数”的定义.

（2）写出空间曲线 $L:\begin{cases}z=x^2+xy+y^3\\ x=1\end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的切线的方程.

解：（1）关于 x 的偏导数为：

$$\begin{aligned}f'_x(x_0,y_0)&=[f(x,y_0)]'_x\Big|_{x=x_0}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\end{aligned}$$

（2）空间曲线 L 位于平面 $x=1$ 中，在 $(1,1,3)$ 处的一个切向量为：

$$(0,1,z'_y)=\left(0,1,(x+3y^2)\big|_{(1,1)}\right)=(0,1,4)$$

故切线方程为：

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{4}$$

或者：$\begin{cases}x=1\\ 4y-z=1\end{cases}$.

空间曲线 L 也可以如下计算：

$$L:\begin{cases}x^2+xy+y^3-z=0\\ x-1=0\end{cases}$$

$$(F'_x,F'_y,F'_z)\times(G'_x,G'_y,G'_z)=(3,4,-1)\times(1,0,0)=(0,-1,-4)$$

七、(5 分) （1）写出“二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处(全)可微”的定义. (2) 对 $f(x,y)=xy^2$ 利用(1)中的定义证明 $f(x,y)=xy^2$ 在 $(1,1)$ 处可微.

解：（1）$f(x,y)$ 在某 $U((x_0,y_0),\delta_0)$ 上有定义，若存在常数A和B，使得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\quad =A\Delta x+B\Delta y+R(\Delta x,\Delta y)$$

其中，$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{R(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=0$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

（2）计算二元函数的增量为：

$$\begin{aligned}\Delta z&=(1+\Delta x)(1+\Delta y)^2-1\times1^2\\&=(1+\Delta x)(1+2\Delta y+\Delta y^2)-1\\&=1\cdot\Delta x+2\cdot\Delta y+\Delta y^2+2\cdot\Delta x\Delta y+\Delta x\Delta y^2\end{aligned}$$

取 $A=1$ 和 $B=2$，则 $R(\Delta x,\Delta y)=\Delta y^2+2\cdot\Delta x\Delta y+\Delta x\Delta y^2$

由 $0\leqslant|\Delta x|\leqslant\|(\Delta x,\Delta y)\|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$0\leqslant|\Delta y|\leqslant\|(\Delta x,\Delta y)\|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

可得 $0\leqslant\left|\dfrac{R(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}\right|\leqslant3\|(\Delta x,\Delta y)\|+\|(\Delta x,\Delta y)\|^2$，因此有:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{R(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=0.$$

八、(5 分) 由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求: (1) $\dfrac{dy}{dx}$; (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：（1）由 $x^3+(y(x))^3-3x\cdot y(x)=0$ 对任意 x 均成立，可以得到

$$3x^2+3y^2\cdot y'_x-3y-3x\cdot y'_x=0,$$

因而 $y'_x=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$.

（2）根据问题 1 的结果，可以得到

$$\begin{aligned}y''_{xx}&=\frac{(x^2-y)'_x\cdot(x-y^2)-(x-y^2)'_x\cdot(x^2-y)}{(x-y^2)^2}\\&=2\left[\frac{y-x^2}{(y^2-x)^2}-\frac{x}{y^2-x}-\frac{y(y-x^2)^2}{(y^2-x)^3}\right]\end{aligned}$$

九、 (5 分)（1）写出 Hessi 矩阵的定义. (2) 写出二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取极大值的一个充分条件.

解：（1）$f(x_1,x_2,\cdots,\ x_n)$ 的Hessi 矩阵为 $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$

（2）$f(x,y)$ 在 $\mathrm{U}((x_0,y_0),\delta_0)$ 上有定义且有连续的二阶偏导数：

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0 \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \text{是负定阵} \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_0,y_0)\text{为极大值点}$$

十、 (5 分) 记 $f(x,y)=1+x^2y$，$(x_0,y_0)=(1,1)$，$(\Delta x,\Delta y)=(x-1,y-1)$. (1) 求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的二阶泰勒多项式 $P_2(\Delta x,\Delta y)$. (2) 记 $R_2(\Delta x,\Delta y)=f(x,y)-P_2(\Delta x,\Delta y)$，用极限定义证明 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{R_2(\Delta x,\Delta y)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2}=0$.

解：（1）$f(x,y)$ 的二阶泰勒多项式为：

$$\begin{aligned} f(x,y)&=1+x^2y \\ &=1+(1+\Delta x)^2(1+\Delta y) \\ &=2+2\Delta x+\Delta y+\Delta x^2+2\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y \end{aligned}$$

故 $P_2(\Delta x,\Delta y)=2+2\Delta x+\Delta y+\Delta x^2+2\Delta x\Delta y$.

（2）$R_2(\Delta x,\Delta y)=\Delta x^2\Delta y$

由 $|\Delta x|\leqslant\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},|\Delta y|\leqslant\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 可知，

$$|R_2(\Delta x,\Delta y)|\leqslant\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^3$$

进而有 $\left|\dfrac{R_2(\Delta x,\Delta y)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2}\right|\leqslant\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，

因此，$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\dfrac{R_2(\Delta x,\Delta y)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^2}\right|=0$.