（定理）A严格对角占优或者不可约弱对角占优，则Ax=b的J法和GS法都收敛

证明：只证 A 严格对角占优 GS法收敛

$G=(D-L)^{-1}U$　　$\rho(G)=?$　∵ $|\lambda|<1$ 　$\rho(G)<1$ GS收敛

$|\lambda I-G|=|\lambda I-(D-L)^{-1}U|=|(D-L)^{-1}|\,|\lambda(D-L)-U|$

由于对角占优 $(D-L)$ 可逆

$|\lambda I-G|=0 \Leftrightarrow |\lambda(D-L)-U|=0$　令 $C=\lambda(D-L)-U$

$$=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

若 $|\lambda|\geq 1$ 则 $|C_{ii}|=|\lambda||a_{ii}|$

$>\lambda\left(\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\right)$

$\geq \sum_{j=1}^{i-1}|\lambda a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|C_{ij}|$

则 C 是严格对角占优　$|C|\neq 0$　$|\lambda(D-L)-D|\neq 0$　与λ是特征值矛盾

（定理）A对称且对角线元素均为正，则

（1）J法收敛等价于A与2D-A均正定；不证

（2）若A正定，则GS法收敛 → 下次证

（例）

作业 2 4 5 6

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

证明 $-\frac{1}{2}<a<1$ 时 GS收敛

于J法收敛只有 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 时

3法

A对称 $A_{ii}>0$

$|A_1|=1$ $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2>0$ $|A_3|=|A|=(1-a)^2(1+2a)>0$

$1-a^2>0$ $(1-a)^2(1+2a)>0$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}<a<1$ GS收

两种方法：思考 ① $J=\begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ $\rho(J)<1$

(2) ?

（例：续）

(1) J收 $\Leftrightarrow$ A与 $2D-A$ 正定

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{pmatrix} \quad 2D-A=\begin{pmatrix}1 & -a & -a\\ -a & 1 & -a\\ -a & -a & 1\end{pmatrix}$$

A正定 $-\frac{1}{2}<a<1$ $\quad$ $2D-A \Rightarrow -\frac{1}{2}<-a<1$

~~交~~交集 $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $-1<a<\frac{1}{2}$

J法收敛

(2) $x=Jx+f$ $\quad J=\begin{pmatrix}0 & -a & -a\\ -a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I-J|=(\lambda-a)^2(\lambda+2a)=0$

$\lambda=a$ $\quad \lambda=-\frac{1}{2a}$

（例：换行收敛）$\rho(J)<1 \Rightarrow |a|<1$ $\quad \left|-\frac{1}{2a}\right|<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix}3 & -10\\ 9 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}$$ 但交换两行 $$\begin{pmatrix}9 & -4\\ 3 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$$ 严格对占优

J法与GS都收敛

超松弛迭代法：是GS法的修正（分量形式） SOR

GS法：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i=1,\cdots,n$$

改写：

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\underbrace{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}_{\Delta x_i} \quad i=1,\cdots,n$$

误差

SOR：

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\Delta x_i$$

ω 实数 可调

$$= x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{k}\right)$$

等价于

$$Dx^{(k+1)} = Dx^{(k)} + \omega\left(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{k}\right)$$

$$(D-\omega L)x^{(k+1)} = (D+\omega U-\omega D)x^{(k)} + \omega b$$

$$x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega U\right)x^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b$$

超松弛迭代法：矩阵形式

$$x = \underbrace{(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right]}_{L_\omega} x + \underbrace{\omega(D-\omega L)^{-1}b}_{f}$$

$$x^{(k+1)} = L_\omega x^{(k)} + f, \quad x = L_\omega x + f$$

$$\left\{\frac{1}{\omega}(D-\omega L) - \left[\left(\frac{1}{\omega}-1\right)D+U\right]\right\}x = b$$

$$Ax = b \qquad (D-L-U)x = b$$

* GS是SOR法 $(\omega=1)$

（定理：超松弛迭代法收敛的必要条件）：Ax=b的SOR法收敛，则0<ω<2

证明 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 是 L_ω 的 n 个特征值 则

$$|L_\omega| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

$$|L_\omega| = d_{11}^{-1} \cdots d_{nn}^{-1} \times (1-\omega) d_{11} \, (1-\omega) d_{22} \cdots (1-\omega) d_{nn} = (1-\omega)^n$$

SOR 收敛 $\Rightarrow \rho(L_\omega) < 1$ 则 $|(1-\omega)^n| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| \le [\rho(L_\omega)]^n < 1$

$$|1-\omega| < 1 \Rightarrow 0 < \omega < 2 \quad \square$$

推论 A对称正定：GS法收敛

（定理：超松弛迭代法收敛的充分条件）：若A对称正定，且0<ω<2 则Ax=b的SOR法收敛

$\rho(L_\omega) < 1$

证明: $L_\omega y = \lambda y$

$$(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] y = \lambda y$$

$[(1-\omega)D + \omega U] y = \lambda (D-\omega L) y$，两边内积 y

$$\lambda = \frac{(Dy, y) - \omega(Dy, y) + \omega(Uy, y)}{(Dy, y) - \omega(Ly, y)}$$

$(Dy, y) > 0$

只证 $|\lambda| < 1$

证明（续）

令 $-(Ly,y)=\underline{\alpha+i\beta}$ 复数

$A=A^T$ $U=L^T$ $(-Uy,y)=-(y,Ly)=-\overline{(Ly,y)}$

$=\alpha-i\beta$

令 $\sigma=(Dy,y)$

$$\lambda=\frac{(\sigma-\omega\sigma-\alpha\omega)+i\omega\beta}{(\sigma+\alpha\omega)+i\beta\omega}$$

$$|\lambda|^2=\frac{(\sigma-\omega\sigma-\alpha\omega)^2+\omega^2\beta^2}{(\sigma+\alpha\omega)^2+\omega^2\beta^2}$$

若 $(\sigma-\omega\sigma-\alpha\omega)^2-(\sigma+\alpha\omega)^2<0$ 分子 < 分母 $|\lambda|<1$

$\underline{\omega}\,\sigma(\sigma+2\alpha)\underline{(\omega-2)}$

$\omega(\omega-2)<0$ $\sigma>0$

$0<(Ay,y)=((D-L-U)y,y)=\sigma+2\alpha>0$

$(\sigma-\omega\sigma-\alpha\omega)^2<(\sigma+\alpha\omega)^2$ 分子 < 分母

$|\lambda|<1$ $\rho(\cancel{L_\omega})<1$. SOR 收敛

（定理：超松弛迭代法收敛的充分条件）：若A严格对角占优，且0<ω<=1 则Ax=b的SOR法收敛

不证

两个充分条件 一个必要条件

11:30回来

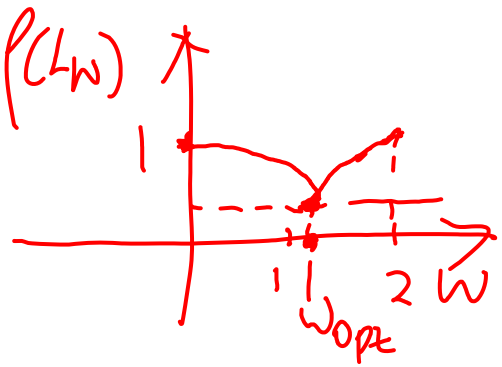
最优松弛因子：

$$\min_{0<\omega<2} \rho(L_\omega) = \rho(L_{\omega_{opt}})$$

最优松弛因子

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(J)]^2}}$$

$\rho(J)$ J法 迭代矩阵谱半径



6.3.3节不讲

迭代法收敛性判别法总结：

$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+f$

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

(1) $\rho(B)<1$ 或存在 $\|\cdot\|$ 使 $\|B\|<1$

(2) A着手：

(a) A 对角占优或不可约弱对角占优 J 收 GS收 SOR $w\in(0,1)$ 收

(b) A对称正定 GS 收 SOR收

(c) A对称正定 $0<w<2$ SOR 收

(d) A对称正定 $2D-A$对称正定 $\Leftrightarrow$ J收

共轭梯度法：解$\boxed{Ax=b}$，A对称正定的方程组

CG

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x),$$ φ的性质：

$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

(1) $\nabla\varphi(x)=Ax-b$

(2) $\varphi(x+\alpha y)=\varphi(x)+\alpha(Ax-b,y)+\frac{\alpha^2}{2}(Ay,y)$

$\varphi(x+\alpha y)=\frac{1}{2}(Ax,x)+\frac{1}{2}\alpha^2(Ay,y)+\alpha(Ax,y)-(b,x+\alpha y)$

$=\varphi(x)+\alpha(Ax-b,y)+\frac{1}{2}\alpha^2(Ay,y)$

(3) 若 $Ax^*=b\Rightarrow\varphi(x)-\varphi(x^*)=\frac{1}{2}(A(x-x^*),(x-x^*))$

在(2)中 令 $x=x^*$，$x^*+\alpha y=x$ 则 $\alpha y=x-x^*$

$\varphi(x)=\varphi(x^*)+\frac{1}{2}(A(x-x^*),(x-x^*))$

（定理）A对称正定，则x^*为$Ax=b$的解的充分必要条件是：x^*满足$\varphi(x^*)=\min\limits_{x\in R^n}\varphi(x)$

证明："$\Rightarrow$" (3) $\Rightarrow$ $\varphi(x)-\varphi(x^*)=\frac{1}{2}(A(x-x^*),(x-x^*))\geq 0$

$\varphi(x)\geq\varphi(x^*)$

"$\Leftarrow$" $\varphi(\bar{x})=\min\limits_{x\in R^n}\varphi(x)$ $\quad \bar{x}\overset{?}{=}x^*$

(3) $\quad \varphi(\bar{x})-\varphi(x^*)=\frac{1}{2}(A(\bar{x}-x^*),(\bar{x}-x^*))$

0 $\quad\Rightarrow \bar{x}=x^*$ $\square$

$Ax=b \Leftrightarrow$ 求 $\varphi(x)$ 最小值对应 $\bar{x}$

最速下降法: $\varphi(x)$ 最小值　设 $x^{(k)}$ 已确定

给一个向量 $p^{(k)}$ 令 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha\, p^{(k)}$

$$\varphi(x^{(k+1)}) = \min_{\alpha \in R} \varphi(x^{(k)} + \alpha\, p^{(k)})$$

$$\frac{d\, \varphi(x^{(k)} + \alpha\, p^{(k)})}{d\alpha} = \left(A(x^{(k)} + \alpha\, p^{(k)}) - b,\ p^{(k)}\right) = 0$$

$$\alpha_k = \frac{-(Ax^{(k)} - b,\ p^{(k)})}{(Ap^{(k)},\ p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k\, p^{(k)}$$

则 $\varphi(x^{(k+1)}) \le \varphi(x^{(k)})$

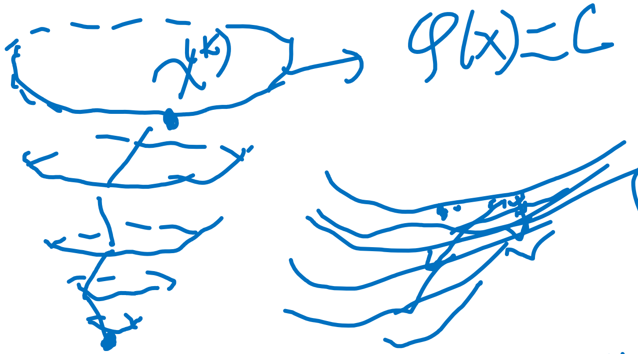
最速下降法（续）：

取 $p^{(k)} = -\nabla\varphi(x^{(k)}) = -(Ax^{(k)}-b) = r^{(k)}$ 性(1)

$= b - Ax^{(k)}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$ "最速下降法" $x^{(k)}$ 残差

可证 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* = A^{-1}b$



$\varphi(x)=C$ 等高线

梯度与等高线垂直

最速下降法收敛速度： $\|x^{(k)}-x^*\|_A \le \left(\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$

$\|x\|_A^2 = (Ax, x)$

λ_1 A最大T22

λ_n A最小T22

$= \left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}-1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+1}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$

$= \left(\frac{\mathrm{cond}(A)_2-1}{\mathrm{cond}(A)_2+1}\right)^k \|x^{(0)}-x^*\|_A$

2条件数

共轭梯度法：$x^{(0)}=0 \quad p^{(0)}=r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)}$$ 而 $p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}$ 确定

$$x^{(k)}=\alpha_0 p^{(0)}+\alpha_1 p^{(1)}+\cdots+\alpha_{k-1}p^{(k-1)}$$

找 α_k，$p^{(k)}$ 使 $\varphi(x^{(k+1)})=\min\limits_{x\in \operatorname{span}\{p^{(0)},\cdots,p^{(k)}\}}\varphi(x)$

$x\in\operatorname{span}\{p^{(0)}\cdots p^{(k)}\}$ 分解 $x=y+\alpha p^{(k)}$

由(2) 其中 $y\in\operatorname{span}\{p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}\}$

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\alpha(Ay,p^{(k)})-\alpha(b,p^{(k)})+\frac{\alpha^2}{2}(Ap^{(k)},p^{(k)})$$

为使 $\varphi(x)$ 分为两个子极小化问题 令

$(Ay,p^{(k)})=0 \quad \forall y\in\operatorname{span}\{p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}\}$ 即

$(Ap^{(j)},p^{(k)})=0 \quad j=0,1,\cdots,p-1$

（定义：A-共轭向量组或A-正交向量组）

A对称正定 若 $p^{(0)}\cdots p^{(m)}$ 满足

$$(Ap^{(i)}, p^{(j)}) = 0 \quad i\neq j,\ i,j=0,1,\cdots m$$

称 $p^{(i)}$ 对 A 共轭向量组 A 正交向量组

则
$$\min_{x\in \mathrm{span}\{p^{(0)}\cdots p^{(k)}\}} g(x) = \min_{y\in \mathrm{span}\{p^{(0)}\cdots p^{(k-1)}\}} g(y) + \min_{\alpha}\left[\frac{\alpha^2}{2}(Ap^{(k)},p^{(k)}) - \alpha(r^{(k)},p^{(k)})\right]$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)},p^{(k)})}{(Ap^{(k)},p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$$ 共轭梯度法

例4：P210，9

$P^{(0)}, P^{(1)}, \cdots, P^{(k)}$的选择

（定理：双正交性）

证明：（若有时间）

证明：（若有时间）

共轭梯度法收敛速度：

共轭梯度法是一种直接法，但是常用作迭代法

CG算法：