主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2022年秋季学期

离散数学期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为**闭卷**考试，考试时间为120分钟，总分80分。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密　封　线

一、　本题得分 ______

填空题（每小题2分，共20分）

1. 设P：天气热，Q：他去游泳。则命题“天气虽然热，但他没有去游泳”可符号化为$\underline{P\wedge\sim Q}$。

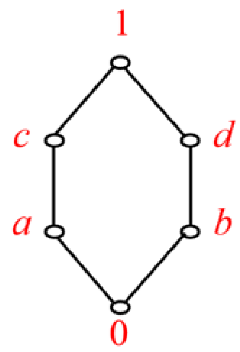
2. $\sim(P\Rightarrow Q)\wedge R$的主析取范式是$\underline{P\wedge\sim Q\wedge R}$。

3. 实数集$\mathbb{R}$中的运算$*$定义如下：$a*b=a+b+2ab$，则$*$运算的单位元是$\underline{0}$。设a有逆元，则其逆元$a^{-1}=\underline{-\frac{a}{1+2a}}$。

4. 设G是个阿贝尔群，$a,b\in G$，$|a|=7$, $|b|=5$，则ab 的阶数是$\underline{\quad 35\quad}$。

5. 设G是个群，且$|G|=8$。则群G只可能有$\underline{2，4}$阶的非平凡子群，不可能有$\underline{3，5，6，7}$阶的非平凡子群。

6. 下面有界格中元素a的的补元是____b, d____。



7. 命题公式 $(\sim P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim Q \vee P)$ 中极大项的个数为____1____。

8. 采用全总个体域。设$P(x)$：x长着黑头发。$M(x)$：x是人。命题“所有的人都长着黑头发”可符号化为$\underline{\forall x\,(M(x) \Rightarrow P(x))}$。

9. 在有界分配格中，若一个元素有补元，则补元____(A)____。

(A). 必唯一　　　(B). 不唯一　　　(C). 不一定唯一

10. 若认为同构的群是相同的，那么3阶群有____1____个，4阶群有____2____个。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

二、 本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 矛盾式的否定为(C)。

A. 矛盾式； B. 蕴含式； C. 重言式； D. 等价式。

2. 设P:今天下雨，Q: 明天下雨，这 $P \vee Q$ 表示(D)。

A. 今天和明天都下雨； B. 今天没有下雨；

C. 今天和明天都不会下雨； D. 今天或明天下雨。

3. 下列句子是命题的是(B)。

A. 请把门关上！

B. 地球外的星球上也有人。

C. $x+5>6$。

D. 下午有会码？

4. 下面的语句哪一个是假命题(A)。

A. 如果 1+2=3，则雪是黑色的。 B. 2 是素数。

C. 如果 1+2=5，则雪是黑色的。 D. $2+2=4$。

5. 有界分配格不一定具有(A)。

A. 互补律； B. 结合律； C. 分配律； D. 吸收律。

6. 设 G 是群，且 $|G|=6$，则 G 最多有(C)个阶为 3 的子群。

A. 3； B. 2； C. 1； D. 0。

7. 在谓词演算中，下列公式中正确的是(B)。

A. $\exists x\forall y\, A(x,y)\Leftrightarrow\forall y\exists x\, A(x,y)$； B. $\exists x\exists y\, A(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists x\, A(x,y)$；

C. $\exists x\forall y\, A(x,y)\Leftrightarrow\forall x\exists y\, A(x,y)$； D. $\forall x\forall y\, A(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall x\, B(x,y)$。

8. 下列公式中，含有 3 个命题变项 P, Q, R 的极大项是(A)。

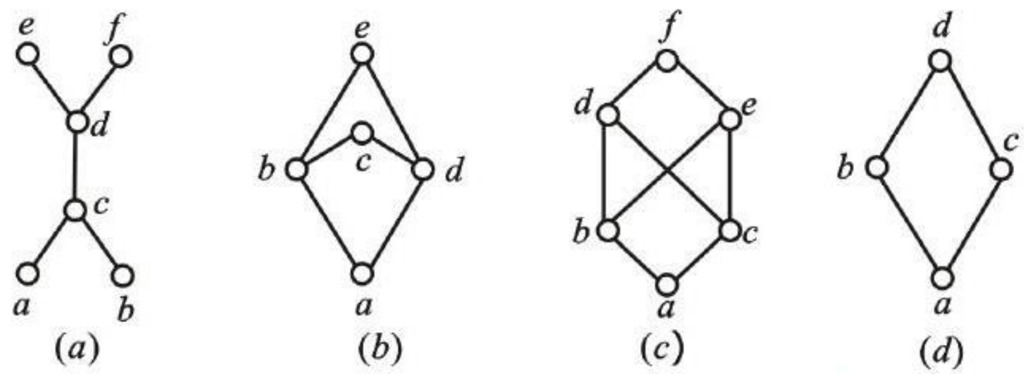
A. $P\vee Q\vee\sim R$； B. $\sim(P\wedge Q\vee R)$；

C. $\sim P\wedge\sim Q\wedge\sim R$； D. $P\wedge Q\vee R$。

9. 设 $\langle A, *\rangle$ 是一个代数系统，其中 $*$ 是一个二元运算，使得 $\forall a,b\in A$，有 $a*b=a$，则 $\langle A, *\rangle$ 是(B)。

A. 非半群； B. 半群； C. 可交换的半群； D. 群。

10. 下面偏序集中能构成格是(D)。



三、 本题得分 ______

运算题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 构造命题公式$P \Rightarrow ((\sim P \Leftrightarrow Q) \wedge R)$的真值表。

P Q R	～P	～P ⇔ Q	(～P ⇔ Q) ∧R	P⇒((～P ⇔ Q) ∧R))
1 1 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1
1 0 0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 0 0	1	0	0	1

2. 运用推理推导出你的结论。

如果甲和乙参加会议，那么丙不参加会。只有甲参加会议，丁才参加会议。乙和丙都参加会议。试问甲和丁是否参加会议？

解：P：甲参加会议。
Q：乙参加会议。
R：丙参加会议。
S：丁参加会议。
前提：P∧Q⇒～R ，S⇒P ， Q∧R 。

① Q∧R　　前提引入
② Q　　①化简
③ R　　①化简
④ P∧Q⇒～R　　前提引入
⑤ ～P　　②③④拒取式
⑥ S⇒P　　前提引入
⑦ ～S　　⑤⑥拒取式

故甲和丁都没参加会议。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

四、　　**本题得分** ______

（5 分）设 G 为群，且 $|G|=6$。证明 G 一定有一个 3 阶子群。

证： 设 G 为群，且 $|G|=6$。$\forall a\in G$，由拉格朗日定理的推论知，

$$|a|=1,2,3,6\text{。}$$

若 $|a|=6$，则 $\langle a^2\rangle=\{e,a^2,a^4\}$ 是 G 的 3 阶子群。

若 G 中没有 6 阶元。则 G 中必有一个 3 阶元。若 G 只含有 1 阶元和 2 阶元，则 $\forall x\in G$，有 $x^2=\mathrm{e}$。这说明 G 是阿贝尔群。 取 G 中两个不同的 2 阶元 x,y。令 $H=\{e,x,y,xy\}$，则 H 是 G 的子群。但 $|H|=4$, $|G|=6$。这与拉格朗日定理矛盾。因此, $\exists a\in G$, $|a|=3$。则 $\langle a\rangle=\{e,a,a^2\}$ 是 G 的 3 阶子群。

五、　　**本题得分** ______

（5 分）设 $G=\langle a\rangle$ 是 18 阶循环群。试找出 G 的所有子群。

解： 由于 18 的正因子是 1, 2, 3, 6, 9 和 18，G 的所有子群为

$$\left\langle a^{\frac{18}{1}}\right\rangle=\langle a^{18}\rangle=\{e\},$$

$$\left\langle a^{\frac{18}{2}}\right\rangle=\langle a^{9}\rangle=\{e,a^9\},$$

$$\left\langle a^{\frac{18}{3}}\right\rangle=\langle a^{6}\rangle=\{e,a^6,a^{12}\},$$

$$\left\langle a^{\frac{18}{6}}\right\rangle=\langle a^{3}\rangle=\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12},a^{15}\},$$

$$\left\langle a^{\frac{18}{9}}\right\rangle=\langle a^{2}\rangle=\{e,a^2,a^4,a^6,a^8,a^{10},a^{12},a^{14},a^{16}\},$$

$$\left\langle a^{\frac{18}{18}}\right\rangle=\langle a\rangle=G\text{ 。}$$

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

六、 **本题得分** ______

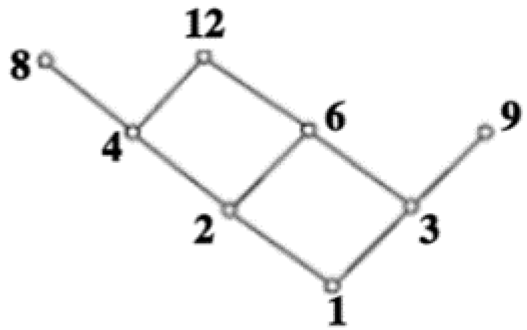
（5 分）设 $A=\{1,2,3,4,6,8,9,12\}$，R 为整除关系。

1） 画出偏序集 $\langle A,\ \mathrm{R}\rangle$ 的哈斯图；

2） 讨论 A 的子集 $B=\{2,4,6\}$ 的上界，下界，最小上界，最大下界。

3） 讨论 A 的最大元，最小元。

解： 1)



2) B 的上界是 12，下界是 1，2，最小上界是 12，最大下界是 2。

3) A 无最大元，最小元是 1。

七、　　**本题得分** ______

（5 分）设G为阿贝尔群，且$|G|$是奇数。 证明

1） G中没有 2 阶元。

2） 若$a\in G$且$a\neq \mathrm{e}$，则$a\neq a^{-1}$。

3） G中所有元素之积为单位元。

证： 设G为阿贝尔群，且$|G|=$奇数。

若$|G|=1$，则结论显然。

设$|G|=2n+1, n\geq 1$。由拉格朗日定理的推论知，不存在元素$a\neq \mathrm{e}\in G$，满足$a^2=\mathrm{e}$。于是，任给$a\neq \mathrm{e}$，则有$a\neq a^{-1}$及$\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$。因此，$a$与$a^{-1}$是两个不同的元素，且它们总是成对出现。由于$G$为阿贝尔群，且$|G|=2n+1, n\geq 1$，$G$中所有元素之积为

$$\mathrm{e}a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}a_3a_3^{-1}\cdots a_na_n^{-1}=\mathrm{e}\text{。}$$