主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

离散数学期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
阅卷人								

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名　　学号　　班号　　学院

密　封　线

一、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 P：天气热，Q：他去游泳。则命题“只有天气热，他才去游泳”可符号化为 $\underline{Q \Rightarrow P}$。

2. $(P \Rightarrow Q) \wedge Q$ 的主析取范式是 $\underline{m_1 \vee m_3}$。

3. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 中的运算 $*$ 定义如下：$a*b = a+b-ab$，则 $*$ 运算的单位元是 $\underline{0}$。设 a 有逆元，则其逆元 $a^{-1} = \underline{\dfrac{a}{a-1}}$。

4. $\langle Z_n, \oplus \rangle$ 是个群，其中 $Z_n = \{0,1,2,\cdots,n-1\}$，
$$x \oplus y = (x+y) \bmod n \text{。}$$
则在 $\langle Z_6, \oplus \rangle$ 中，4 的阶数是 $\underline{\quad 3 \quad}$。

5. 设 $G = \langle a \rangle$ 是 6 阶循环群。则 G 的所有生成元是 $\underline{a \text{ 和 } a^5}$。

二、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 命题公式 $(P\wedge(P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q)$ 是（ C ）。

A. 矛盾式； B. 蕴含式； C. 重言式； D. 等价式。

2. 下列为两个命题变元 P,Q 的极小项是(C).

A. $P\wedge Q\wedge\sim P$； B. $\sim P\vee Q$；

C. $\sim P\wedge Q$； D. $\sim P\vee P\vee Q$。

3. 下列句子不是命题的是（ D ）。

A. 中华人民共和国的首都是北京。

B. 张三是学生。

C. 雪是黑色的。

D. 太好了！

4. 设 a,b 为任意实数，则下列运算不满足交换律的是（ A ）。

A. $a*b=a+2b$； B. $a*b=\min\{a,b\}$；

C. $a*b=|a-b|$； D. $a*b=2ab$。

5. 设 G 为偶数集合，下列说法正确的是（ B ）。

A. $\langle G,\times\rangle$ 是群； B. $\langle G,+\rangle$ 是群；

C. $\langle G,\div\rangle$ 是群； D. A, B, C 全错。

姓名________ 密

学号________ 封

班号________ 线

学院________

三、 运算题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 构造命题公式$(P\vee Q\Rightarrow Q\wedge R)\Rightarrow(P\wedge\sim R)$的真值表。

P	Q	R	$P\vee Q$	$Q\wedge R$	$P\vee Q\Rightarrow Q\wedge R$	$P\vee\sim R$	$(P\vee Q\Rightarrow Q\wedge R)\Rightarrow(P\wedge\sim R)$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	F

2. 判断下面推理是否正确，并证明你的结论。

如果小王今天家里有事，则他不会来开会。如果小张今天看到小王，则小王今天来开会了。小张今天看到小王。所以小王今天家里没事。

解： 该推理是正确的。

令P：小王今天家里有事，

Q：小王今天来开会，

R：小张今天看到小王。

前提：$P\Rightarrow\sim Q,\ R\Rightarrow Q,\ R$； 结论：$\sim P$。

证明：① $R\Rightarrow Q$ 前提引入

② R 前提引入

③ Q ①②假言推理

④ $P\Rightarrow\sim Q$ 前提引入

⑤ $\sim P$ ③④拒取式

四、　（8 分）设G为群。如果$\forall x\in G$有$x^2=e$。证明G为阿贝尔群。

证明：设G为群。$\forall a,b\in G$。根据题设我们有

$$a^2=e,\ b^2=e \text{ 及 } (ba)^2=e\text{。}$$

从而

$$a=a^{-1},\ b=b^{-1} \text{ 及 } ba=(ba)^{-1}\text{。}$$

故

$$ab=a^{-1}b^{-1}=(ba)^{-1}=ba\text{。}$$

即G为阿贝尔群。

五、　（8 分）设$G=\langle a\rangle$是 15 阶循环群。试找出G的所有子群。

解：由于 15 的正因子是 1，3，5 和 15，G的所有子群为

$$\left\langle a^{\frac{15}{1}}\right\rangle=\langle a^{15}\rangle=\{e\},\quad \left\langle a^{\frac{15}{3}}\right\rangle=\langle a^{5}\rangle=\{e,a^5,a^{10}\},$$

$$\left\langle a^{\frac{15}{5}}\right\rangle=\langle a^{3}\rangle=\{e,a^3,a^6,a^9,a^{12}\},\quad \left\langle a^{\frac{15}{15}}\right\rangle=\langle a\rangle=G\text{ 。}$$

六、 （**7 分**）证明 4 阶群必含有 2 阶元。

证明： 设G为 4 阶群。根据拉格朗日定理，$\forall x\in G, |x|=1,2$ 或 4。

若G中含有 4 阶元a，那么a^2是 2 阶元。

若G中不含有 4 阶元，那么G中元素的阶数只能是 1 或 2。由于任何群的 1 阶元只有一个，且G为 4 阶群，所以必有非单位元存在。这些非单位元就是 2 阶元。

姓名
密
学号
封
班号
线
学院

七、（7 分）设G为群。如果$\forall x,y\in G$，

$$(xy)^6=x^6y^6;$$
$$(xy)^5=x^5y^5;$$
$$(xy)^4=x^4y^4。$$

证明G为阿贝尔群。

证明： 设G为群，且$\forall x,y\in G$，有

$$(xy)^6=x^6y^6; \qquad (1)$$
$$(xy)^5=x^5y^5; \qquad (2)$$
$$(xy)^4=x^4y^4。 \qquad (3)$$

由(1)，我们有

$$xx^5y^5y=x^6y^6=(xy)^6=x(yx)^5y。$$

等式两边消去左x和右y，得

$$x^5y^5=(yx)^5。 \qquad (4)$$

同理，从(2)，得

$$x^4y^4=(yx)^4。 \qquad (5)$$

再由(2) 和 (4)，及(3) 和 (5)，得

$$(xy)^5=(yx)^5,\ (xy)^4=(yx)^4。$$

因此，有

$$xy=xye=xy\left[(xy)^4\left((xy)^4\right)^{-1}\right]$$
$$=(xy)^5\left((xy)^4\right)^{-1}$$
$$=(yx)^5\left((yx)^4\right)^{-1}$$
$$=yx(yx)^4\left((yx)^4\right)^{-1}=yx。$$

因此，G为阿贝尔群。