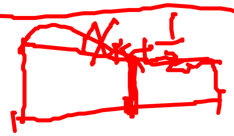
4. 龙贝格求积公式

（一） 梯形法的递推

$a = x_0 < \cdots < x_n = b, h = \dfrac{b-a}{n}$，则复合的梯形公式为：



x_k x_{k+1}

$O(h^2)$

$$T(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

在每个区间$[x_k, x_{k+1}]$插入中分点$x_{k+1/2} = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$，此时步长为$\dfrac{h}{2}$，

相应的复合的梯形公式为：$T(\frac{h}{2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h}{4}[f(x_k) + 2f(x_{k+1/2}) + f(x_{k+1})]$

则$T(\frac{h}{2}) = T(h) + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1/2})$，可以由粗步长递推得到细步长的结果

（二）外推技巧

$T(h) = I + ch^2$

梯形公式误差：$T_n - I = T(h) - I = \dfrac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$

可以证明（定理4）：$T(h) = I + \mu_1 h^2 + \mu_2 h^4 + \cdots + \mu_l h^{2l} + \cdots$

4. 龙贝格求积公式（二）外推技巧

可以证明（定理4）：$T(h) = I + \mu_1 h^2 + \mu_2 h^4 + \cdots + \mu_l h^{2l} + \cdots$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + \mu_1 \frac{h^2}{4} + \mu_2 \frac{h^4}{16} + \cdots + \mu_l \left(\frac{h}{2}\right)^{2l}$$

$$A\,T(h) + B\,T\left(\frac{h}{2}\right) = \underline{I} + 0h^2 + Ch^4 \cdots$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + \frac{B}{4} = 0 \end{cases} \qquad B = \frac{4}{3} \qquad A = -\frac{1}{3}$$

$$S(h) = \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = I + \beta_1 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \beta_2 \left(\frac{h}{2}\right)^6 \cdots$$

$$\underline{S(h)} - \underline{I} = \underline{O(h^4)}$$

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = I + \beta_1 \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \beta_2 \frac{1}{2^6}\left(\frac{h}{2}\right)^6 \cdots$$

$$C\,S(h) + D\,S\left(\frac{h}{2}\right) = I + 0\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \underline{\text{常}\,h^6}$$

（二）外推技巧（续）

$$C(h)=\frac{16S(\frac{h}{2})-S(h)}{15}=I+\gamma_1 h^6+\cdots$$

$$C(h)-I=O(h^6)$$

$$R(h)=\frac{1}{63}\left[64C(\frac{h}{2})-C(h)\right] \quad R(h)-I=O(h^8)$$

$$T_0=T(h) \quad T_1=S(h), \quad T_2=C(h) \quad T_3(h)=R(h)$$

则 $$T_m(h)=\frac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}(\frac{h}{2})-\frac{1}{4^m-1}T_{m-1}(h)$$

龙贝格积分 $$T_m(h)-I=\delta_1 h^{2(m+1)}+\delta_2 h^{2(m+2)}\cdots$$

$$=O(h^{2(m+1)})$$

（三）龙贝格算法

$T_0^{(k)}$ 表示 $[a,b]$ 二分 k 次后的复合梯形公式

$T_m^{(k)}$ 表示 $T_0^{(k)}$ m 次外推（加速）

则 $$T_m^{(k)} = \frac{4^m}{4^m-1} T_{m-1}^{(k+1)} - \frac{1}{4^m-1} T_{m-1}^{(k)}$$ $k=1,2,\cdots$

龙贝格算法

(1) $k=0$ $h=b-a$ $T_0^{(0)} = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$

(2) 二分 k 次 $T_0\left(\frac{b-a}{2^k}\right)$. 算 $T_0^{(k)}$

(3) 计算（公式） $T_j^{(k-j)}$ $j=1,2,\cdots,k$

(4) 若 $\left|T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}\right| < \varepsilon$ 停止 $T_k^{(0)} \approx I$，否则 $k+1$ 转(2)

（三）龙贝格算法（续）：T表

k	h	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	$b-a$	$T_0^{(0)}$				
1	$\frac{b-a}{2}$	$T_0^{(1)}$	$T_1^{(0)}$			
2	$\frac{b-a}{4}$	$T_0^{(2)}$	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
3	$\frac{b-a}{8}$	$T_0^{(3)}$	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
4	$\frac{b-a}{16}$	$T_0^{(4)}$	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} T_m^{(k)} = I \quad (m\ 固定) \\ \lim\limits_{m\to\infty} T_m^{(0)} = I \end{cases}$$

$F(h)$ 逼近 F^*　　$p_1 < p_2 < \cdots$

$$F(h) - F^* = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h^{p_k}$$

$AF\left(\frac{h}{2}\right) + BF(h)$　　理查德森 外推

6. 高斯积分公式

问题：带权积分的机械积分公式$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，

求A_k，x_k使积分公式具有$2n+1$次代数精度

$2n+2$

（定义）：若$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$中的$A_k$，$x_k$使积分

$1, \cdots x^{2n+1}$ $\quad 2n+2$

公式具有$2n+1$次代数精度，称该公式为高斯积分公式，

A_k，x_k称为高斯积分权和高斯积分点，即

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \int_a^b x^m \rho(x)dx, m = 0,1,\cdots,2n+1$$

x^m $\qquad x^{2n+2}$ 不成立

6. 高斯积分公式

11:28 回来

（例）：对于积分公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$,

求A_0，A_1，x_0，x_1使积分公式具有尽可能高的代数精度

精确积分 $1, x, x^2, x^3$

$P_2 = \frac{3x^2-1}{2} = 0$

$3x^2-1=0$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

$3 = 2 \times 1 + 1$

$n=1$

$$\begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$I_h f = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$

x^4: $I_h x^4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$I = \int_{-1}^{1} x^4 = \frac{2}{5}$ ×

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

6. 高斯积分公式

（一）构造分析：$a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$,这些节点$x_k$的位置待定

基于这些点的带牛顿余项的拉格朗日插值公式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) + f[x_0,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x),$$ l_k是拉格朗日插值基底

积分得到：$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k + \int_a^b f[x_0,\cdots,x_n,x]\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx,$$

$A_k = \int_a^b l_k(x)\rho(x)dx$为积分权，可见高斯公式是插值型的

$R[f] = If - I_n f = \int_a^b f[x_0 \cdots x_n, x]\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx$

若具有2n+1代数精度，可以精确积分2n+1次多项式

假设$P_{2n+1}(x)$是任一2n+1次……，$R[P_{2n+1}]=0$

6. 高斯积分公式

（一）构造分析（续）：

$$R[P_{2n+1}]=\int_a^b P_{2n+1}[x_0,\cdots x_n,x]\,\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx$$

$=0$

$g=x^3$　　$g[x_0,x]=\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=x^2+x_0x+x_0^2$

$g[x_0,x_1,x]=\dfrac{x^2+x_0x+x_0^2-(x_1^2+x_0x_1+x_0^2)}{x-x_1}$

$=x+x_0$　一次

$P_{2n+1}[x_0\cdots x_n\cdot x]$ 是 n 次多项式

只要取 $x_0,\cdots x_n$ 是 $n+1$ 次正交多项零点 即可

$\omega_{n+1}=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$ 正交

（定理）：插值型多项式的节点$x_k,k=0,\cdots,n$是高斯点充要条件是：以这些节点为零点的多项式$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\times\cdots\times(x-x_n)$与任何不超过$n$次多项式$P(x)$正交，即$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)=0$

6. 高斯积分公式

P136 8(1), 10, 14

（例）：确定积分公式$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，求$A_0$，$A_1$，$x_0$，$x_1$使积分公式具有尽可能高的代数精度

法1：把 $[0,1]$ $\rho=\sqrt{x}$ 正交多项式 $P_2(x)$ $P_2(x)=0$ x_0. x_1

法2：$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)=x^2+bx+c$ 与 1, x 正交

则 $\begin{cases} \int_0^1 (x^2+bx+c)\cdot 1\cdot \sqrt{x}\,dx=0 \\ \int_0^1 (x^2+bx+c)\cdot x\cdot \sqrt{x}\,dx=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{7}+\frac{2}{5}b+\frac{2}{3}c=0 \\ \frac{2}{9}+\frac{2}{7}b+\frac{2}{5}c=0 \end{cases}$

$b=-\frac{10}{9}$ $c=\frac{5}{21}$ $\omega(x)=x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}$

$\omega(x)=0 \Rightarrow x_0=0.289949$ $x_1=0.821162$

1: $A_0+A_1=\frac{2}{3}$

x: $A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{5}$

$\begin{cases} A_0=0.277556 \\ A_1=0.389111 \end{cases}$

（二）高斯公式的余项：

$$I(f)-I_n f=R[f]=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

证明：f 在 x_k 上 $2n+1$ 次 Hermite 插值 $H_{2n+1}(x)$

$$f=H_{2n+1}(x)+\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)$$

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx=\int_a^b H_{2n+1}(x)\rho(x)dx+\int_a^b \qquad \rho(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n} H_{2n+1}(x_k)A_k+\cdots$$

$$R[f]=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}x$$

$$(Ix^{2n+2}-I_n x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k+\int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

$$I(f)-I_n(f)=R[f]=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

$$f=x^{2n+2}\quad \int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx=I(x^{2n+2})-I_n(x^{2n+2})$$

最高代数精度、稳定性、收敛性

命题 高斯 $\sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k$ 最高代数精度为 $2n+1$，不超过 $2n+1$

证明. 若代精为 $2n+2$，则

$\int_a^b \omega_{n+1}^2(x) \rho(x) dx$ 可以被精确积分

$= \sum_{k=0}^{n} \omega_{n+1}^2(x_k) A_k = 0$ 矛盾

$\therefore$ $2n+2$ 不行. 高斯只能 $2n+1$

稳定性 $(A_k > 0)$: $0 < \int_a^b l_k^2(x) \rho(x) dx$ 可以精确积分

$= \sum_{j=0}^{n} l_k^2(x_j) A_j = A_k$

收敛性: $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b f(x) \rho(x) dx$