应用随机过程

连续随机变量和拉普拉斯变换

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

拉普拉斯变换的定义

设函数$f(t)$是在区间[0,∞)上的有定义，如果含参变量 s 的无穷积分$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$（$s$可为复参量）对 s 的某一取值范围是收敛的，则此无穷积分：

$$f^e(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

称为函数$f(t)$的拉普拉斯变换，记作

$$f^e(s) = L[f(t)]$$

拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换的性质

- 01 线性性质
- 02 微分性质
- 03 积分性质
- 04 …… …

连续随机变量和拉普拉斯变换

当函数 $f(t)$是非负连续随机变量 X 的概率密度函数时，那么：

$$f_X^e(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$f_X^e(s) = E[e^{-sX}] \qquad (1)$$

连续随机变量和拉普拉斯变换

设$f^n(s)$是关于 s 的 n 阶拉普拉斯变换：

$$f^n(s) = \frac{d^n}{ds^n} f_X^e(s)$$

$$= \frac{d^n}{ds^n} E[e^{-sX}]$$

$$= (-1)^n E[X^n e^{-sX}]$$

令$s = 0$

$$E[X^n] = (-1)^n f^n(0) \qquad （1.3.1）$$

连续随机变量和拉普拉斯变换

- 设$S=X_1+\cdots+X_k$，其中$X_1,\cdots X_k$是非负且相互独立的连续随机变量，用$f_i^e(s)$表示密度函数 f_{X_i} 的拉普拉斯变换，那么：

$$f_S^e(s)=f_1^e(s)\cdots f_k^e(s) \qquad （1.3.2）$$

公式(1.3.1)、(1.3.2)是拉普拉斯变换中常用的两个公式

指数分布和拉普拉斯变换

如果随机变量X服从参数为μ的指数分布，试求其均值和方差。

解：进行拉普拉斯变换，可得：

$$f^{e}(s)=\frac{\mu}{s+\mu}$$

因此

$$f^{(1)}(s)=(-1)\frac{\mu}{(s+\mu)^2} \quad \text{和} \quad f^{(2)}(s)=(-1)(-2)\frac{\mu}{(s+\mu)^3},$$

最终得到:

$$E[X]=-f^{(1)}(0)=\frac{1}{\mu} \quad \text{和} \quad E[X^2]=f^{(2)}(0)=\frac{2}{\mu^2}.$$

$$Var[X]=E[X^2]-\left[E[X]\right]^2=\frac{1}{\mu^2}$$

Erlang 分布和拉普拉斯变换

设随机变量$X_1, \cdots, X_n$均服从参数为$\lambda > 0$的指数分布。令 $S = X_1 + \cdots + X_n$，则S被称为服从(n, λ)的 Erlang 随机变量，试求其均值和方差。

解：进行拉普拉斯变换，可得：

$$f_S^e(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n = \lambda^n \frac{1}{(s+\lambda)^{(n-1)+1}}$$

$$\Big\Downarrow \; L^{-1} - 5$$

$$f_S(t) = \lambda^n \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad t > 0.$$

Erlang 随机变量和拉普拉斯变换

因此

$$f_S^{(1)}(s) = \lambda^n(-n)(s+\lambda)^{-(n+1)}$$

$$f_S^{(2)}(s) = \lambda^n(-n)\big(-(n+1)\big)(s+\lambda)^{-(n+2)}$$

最终得到:

$$E[S] = -f_S^{(1)}(0) = \frac{n}{\lambda}$$

$$E[S^2] = f_S^{(2)} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

$$Var[S] = \frac{n}{\lambda^2}$$

拉普拉斯变换表

Table 1.2	The Function $f(t)$	Laplace Transform $f^e(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
1.	$\alpha f(t)$	$\alpha f^e(s)$
2.	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha f^e(s) + \beta g^e(s)$ where $g^e(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$
3.	$\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$f^e(s)g^e(s)$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5.	$\frac{1}{k!}t^k e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$
6.	$f(t-\tau) \quad (\tau > 0)$	$e^{s\tau} f^e(s)$
7.	$f(t+\tau) \quad (\tau > 0)$	$e^{s\tau}\left[f^e(s) - \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt\right]$
8.	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s} f^e(s)$
9.	$\frac{d}{dt} f(t)$	$sf^e(s) - f(0)$
10.	e^{At} where A is a square matrix	$\int_0^\infty e^{-st} e^{At} dt = [sI - A]^{-1}$, Where I is an identity matrix

谢 谢 听 课

授课教师 赵毅