姓名________ 密 学号________ 封 班号________ 线 学院________

六、　本题得分 ______

（5 分）设函数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ 及函数

$$g(z)=b_{-2}\frac{1}{z^2}+b_{-1}\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots,$$

其中级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在 $|z|<2$ 内收敛。求积分

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z,$$

其中 C 是正向的单位圆 $|z|=1$。

解 1：由于 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在 $|z|<2$ 内收敛，故洛朗级数

$$b_{-2}\frac{1}{z^2}+b_{-1}\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

在 $0<|z|<2$ 内收敛。从而函数 $g(z)$ 在 $0<|z|<2$ 内解析。又 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $|z|<2$ 内收敛，于是，函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析。因此函数 $f(z)g(z)$ 在 $0<|z|<2$ 内解析。即 $z=0$ 是 $f(z)g(z)$ 函数的孤立奇点。注意到

$$f(z)g(z)=a_0b_{-2}\frac{1}{z^2}+(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})\frac{1}{z}+\cdots,\quad 0<|z|<2。$$

由留数定理，得

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})。$$

解 2：由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在 $|z|<2$ 内收敛，故函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在 $|z|<2$ 内解析。因此，由柯西积分公式，柯西积分定理及高阶导数公式，得

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z=\oint_C\left[b_{-2}\frac{f(z)}{z^2}+b_{-1}\frac{f(z)}{z}+f(z)\varphi(z)\right]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})。$$

七、 本题得分 ______

（5 分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。证明：

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\cos^2\frac{t}{2}dt=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)。$$

证：设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。令 $z=e^{it},0\le t\le 2\pi$。则

$$dz=izdt；$$

$$\cos^2\frac{t}{2}=\frac{1+\cos t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{z^2+1}{z}。$$

故

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\cos^2\frac{t}{2}dt=\oint_{|z|=1} f(z)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{z^2+1}{z}\right]\frac{1}{iz}dz$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{2}\frac{f(z)}{z}+\frac{1}{4}f(z)+\frac{1}{4}\frac{f(z)}{z^2}\right]dz。$$

注意到 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 解析，由柯西积分公式，柯西积分定理及高阶导数公式，得

$$\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{2}\frac{f(z)}{z}+\frac{1}{4}f(z)+\frac{1}{4}\frac{f(z)}{z^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz+\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}f(z)\,dz+\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}2\pi i\cdot f(0)+0+\frac{1}{4}2\pi i\cdot f'(0)$$

$$=\pi i f(0)+\frac{\pi i}{2}f'(0)。$$

因此

$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\cos^2\frac{t}{2}dt=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)。$$