

## 2023 年秋统计学习题 01

1. 设三维随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 其中

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

如果  $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$  与  $Y_2 = X_1 - X_2 - X_3$  相互独立, 则  $\rho$  取何值?

2. 设  $n$  维随机向量  $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , 求证  $\langle \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \rangle$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布.
3. 设随机变量  $U, V$  相互独立, 且  $U \sim \chi^2(n), V \sim \chi^2(m)$ , 其中  $n, m \geq 1$ , 求证  $U + V \sim \chi^2(n + m)$ .
4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且都服从参数为  $\lambda > 0$  的指数分布 (分布函数为  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$ ), 求证  $2\lambda(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim \chi^2(2n)$ .
5. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自  $X$  的样本.
- (a). 写出  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的联合概率密度函数.
- (b). 写出  $\bar{X}$  的概率密度函数.
- (c). 请写出  $\bar{X}$  与  $X_1$  的协方差. (\* 此小问可适当延后考虑)