计算几何 第三次作业

数学三班 李岳锴 200810301

第四章 自由曲线和曲面

1. 简述曲线$P=P(t)$在$t=t0$处0阶几何连续、1阶几何连续和2阶几何连续的要求。

① 零阶几何连续性：如果曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处首尾相接，位置连续，即满足$P(t_0^-)=P(t_0^+)$，则称曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处零阶几何连续，记作GC^0

② 一阶几何连续性：如果曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处零阶几何连续，并且切矢量方向连续，即满足$P^{'}(t_0^-)=\alpha\cdot P^{'}(t_0^+)$，则称曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处一阶几何连续，记作$GC^1$.这里$\alpha>0$为任一正常数。这时曲线的形状可能会弯向较大的切矢量。

③ 二阶几何连续性：如果曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处一阶几何连续，并且副法矢量方向连续、曲率连续，即满足$P^{''}(t_0^-)=P^{''}(t_0^+)$，则称曲线$P=P(t)$在$t=t_0$处二阶几何连续，记作$GC^2$

2. 简述曲线光顺性准则。

曲线光顺性(Fairness)是外形设计中的一个非常重要的概念。顾名思义，“光顺”即为“光滑顺眼”之意，它不仅要求自由曲线是连续的，而且要求其美观漂亮。曲线是否符合光顺性要求的判据或准则如下：

> (1) 二阶几何连续
> (2) 不存在奇异点与多余拐点
> (3) 曲率变化较小
> (4) 绝对曲率较小

3. 推导3次Hermite曲线的基函数。

由定义可知，每一段曲线的三次参数样条表示为：

$$P(t)=[G_0\quad G_1\quad G_2\quad G_3]\cdot M\cdot\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{bmatrix},t\in[0,1]$$

求导，得：

$$P(t)=[G_0 \quad G_1 \quad G_2 \quad G_3]\cdot M\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2t\\3t^2\end{bmatrix}, t\in[0,1]$$

注意到Hermite曲线端点的约束条件（边界条件）为:

$$\begin{aligned}P(t)|_{t=0} &= P_k\\ P(t)|_{t=1} &= P_{k+1}\\ P^{'}(t)\Big|_{t=0} &= R_k\\ P^{'}(t)\Big|_{t=1} &= R_{k+1}\end{aligned}$$

其中，R_k和R_{k+1}是曲线在型值点P_k和P_{k+1}处的切矢量（一阶导数，表示曲线的斜率）.

将约束条件代入三次参数样条函数及其导数中，得:

$$P_k = \begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}\cdot M\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}\cdot M\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$R_k = \begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}\cdot M\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$R_{k+1} = \begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}\cdot M\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

将上式合并为矩阵形式，得:

$$\begin{bmatrix}P_k & P_{k+1} & R_k & R_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix}M\cdot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&2\\0&1&0&3\end{bmatrix}$$

令$\begin{bmatrix}G_0 & G_1 & G_2 & G_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_k & P_{k+1} & R_k & R_{k+1}\end{bmatrix}$

代入前面矩阵方程，得:

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&2\\0&1&0&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-3&2\\0&0&3&-2\\0&1&-2&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

将$\boldsymbol{M}$代入三次参数样条函数，得：

$$\begin{aligned}P(t)=&\begin{bmatrix}P_k & P_{k+1} & R_k & R_{k+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-3&2\\0&0&3&-2\\0&1&-2&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix}P_k & P_{k+1} & R_k & R_{k+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-3t^2+2t^3\\3t^2-2t^3\\t-2t^3+t^3\\-t^3+t^3\end{bmatrix}\quad t\in[0,1]\end{aligned}$$

将上式展开，可得Hermite曲线的表达式：

$$\begin{aligned}P(t)=&P_k(2t^3-3t^2+1)+P_{k+1}(-2t^3+3t^2)+\\&R_k(t^3-2t^2+t)+R_{k+1}(t^3-t^2)\quad t\in[0,1]\end{aligned}$$

令三次Hermite曲线的基函数为：

$$\begin{aligned}&H_0(t)=2t^3-3t^2+1\\&H_1(t)=-2t^3+3t^2\\&H_2(t)=t^3-2t^2+t\\&H_3(t)=t^3-t^2\end{aligned}$$

此时曲线函数可以写成：

$$\begin{aligned}P(t)=&P_kH_0(t)+P_{k+1}H_1(t)+R_kH_2(t)+R_{k+1}H_3(t)\\=&\sum_{k=0}^{3}G_k\cdot H_k(t)\quad t\in[0,1]\end{aligned}$$

综上，$H_k, k=0,1,2,3$即为三次Hermite曲线的基函数.

4. 给定Bezier曲线的控制点$P1(1,0), P2(4,8), P3(6,10), P4(11,5)$，给出这个曲线的参数方程。

三次Bezier曲线的矩阵表达式为：

$$P(t)=[P_0\quad P_1\quad P_2\quad P_3]\begin{bmatrix}1&-3&3&-1\\0&3&-6&3\\0&0&3&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}$$

将控制点坐标代入，得：

$$P(t)=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 11\\ 0 & 8 & 10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 3 & -6 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\\ t^3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 9 & -3 & 4\\ 0 & 24 & -18 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t\\ t^2\\ t^3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4t^3-3t^2+9t+1\\ -t^3-18t^2+24t\end{bmatrix}$$

故所求的参数方程为：$P(t)=\begin{bmatrix}4t^3-3t^2+9t+1\\ -t^3-18t^2+24t\end{bmatrix}$

第五章 图形变换与裁剪

1. 推导关于直线 $y=2x+4$ 对称变换的变换矩阵。

设平面上任意一点$P(x,y)$关于直线$y=2x+4$的对称点为$Q(x^{'},y^{'})$，由于PQ中点位于对称轴上，且直线PQ与对称轴垂直，于是可得方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{y+y^{'}}{2}=2\cdot\dfrac{x+x^{'}}{2}+4\\ \dfrac{y^{'}-y}{x^{'}-x}\cdot 2=-1\end{cases}$$

整理，得：

$$\begin{cases}x^{'}=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{16}{5}\\ y^{'}=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y+\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

写成矩阵形式，得：

$$\begin{bmatrix}x^{'} & y^{'} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} & 0\\ \dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} & 0\\ -\dfrac{16}{5} & \dfrac{8}{5} & 1\end{bmatrix}$$

故变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{16}{5} & \frac{8}{5} & 1 \end{bmatrix}$$