# 应用随机过程

## 吸收马尔科夫过程

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

# 吸收马尔科夫过程

吸收
马尔科夫过程

1

对一个具有吸收状态集$T^c$和瞬态集$T$的吸收马尔可夫链，其转移概率矩阵有如下标准型。

$$\begin{array}{c|cc} & T^c & T \\ \hline T^c & I & 0 \\ T & R & Q \end{array}$$

2

多步转移概率矩阵为

$$P^{(n)} = P^n = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R_n & Q^n \end{bmatrix}$$

其中，$R_n = (I + Q + \cdots + Q^{n-1})R$

3

定义吸收马尔可夫链的基本矩阵为

$$W = I + Q + Q^2 + \cdots$$

当状态空间有限时，有$W = (I - Q)^{-1}$

# 命题

考虑$i \in T, j \in T$，基本矩阵$W$中的元素$w_{ij}$有如下概率解释：

$$\boxed{w_{ij} = E\left[\tau_{ij}\right]}$$

其中$\tau_{ij}$表示给定$X_0 = i$的前提下，在进入吸收态之前，访问状态$j$的次数。

证明：定义示性函数$D_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & if\, X_n = j | X_0 = i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

则$\sum_{n=0}^{\infty} D_{ij}^{(n)}$表示给定$X_0 = i$的前提下，在进入吸收态之前，访问状态$j$的次数，

即$\tau_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{ij}^{(n)}$

$$E\left[\tau_{ij}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} D_{ij}^{(n)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[D_{ij}^{(n)}\right]$$

期望的定义

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 \cdot p_{ij}^{(n)} + 0 \cdot \left(1 - p_{ij}^{(n)}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

$$= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{W\text{的定义}} = w_{ij}$$

# 思考



1

对于一个吸收马尔可夫链，当给定$X_0 = i, i \in T$时，随机过程在进入吸收态前，访问所有瞬态的平均次数是多少？即给定$X_0 = i, i \in T$时，进入吸收态所需的时间。

2

当给定$X_0 = i, i \in T$时，到达某一个吸收态$j \in T^c$的概率是多少？

# 分析

1 定义$\tau_i$为从状态$i \in T$出发，进入吸收态之前，随机过程访问所有瞬态的次数，故推导$E[\tau_i]$的表达式。

而$E[\tau_{ij}]$表示从状态$i \in T$出发，进入吸收态之前，访问瞬态$j \in T$的平均次数。

故而 $E[\tau_i] = \sum_{j \in T} E[\tau_{ij}]$

$$\boxed{E[\tau_i] = \sum_{j \in T} w_{ij}}$$

# 分析

2

回忆：$f_{ij}^{(n)}$为从状态$i$出发，在第$n$步首次到达状态$j$的概率,且$F^{(n)}=\left\{f_{ij}^{(n)}\right\}$

$f_{ij}$为从状态$i$出发到达状态$j$的概率，且$F=\{f_{ij}\}$

则$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ ,$F=\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}$

考虑 $i\in T, j\in T^c$ ，由典约化转移矩阵的含义不难发现，

$$F^{(n)}=Q^{n-1}R\ , n\geq 1$$

故 $\boxed{F=\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} Q^{n-1}R=WR}$

# 例题一 (离散相型分布)



考虑一个吸收马尔可夫链，状态空间为$S = \{1, \cdots, m, m+1\}$，其中状态$m+1$是吸收态，其余状态均为瞬态。令起始状态分布$s(0) = (\alpha, \alpha_{m+1})$，其中$\alpha = (\alpha_1, \cdots \alpha_m)$。转移矩阵可以写成如下标准形式，其中$r$是$m \times 1$的列向量，$Q$是$m \times m$的亚随机矩阵。令$\tau$是进入吸收态$m+1$所需的时间，求$\tau$的一阶和二阶矩。

$$P = \begin{bmatrix} Q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 例题一 (离散相型分布)

令$p_k = P\{\tau = k\}$，利用$n$阶转移概率矩阵，有

$$p_0 = \alpha_{m+1}$$
$$p_k = \alpha Q^{k-1} r,\ k = 1,2,\cdots$$

$\{p_k\}$称为离散相型分布

则$\tau$的概率生成函数为

$$P_\tau(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k = \alpha_{m+1} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \alpha Q^{k-1} r = \alpha_{m+1} + z\alpha \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} Q^{k-1} r$$
$$= \alpha_{m+1} + z\alpha \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (zQ)^k r = \alpha_{m+1} + z\alpha [I - zQ]^{-1} r$$

对等式两边关于$z$求导，可得

$$\frac{d}{dz} P_\tau(z) = \alpha [I - zQ]^{-1} r + z\alpha \left[ -[I - zQ]^{-1} \frac{d}{dz} [I - zQ][I - zQ]^{-1} \right] \mathrm{r}$$
$$= \alpha [I - zQ]^{-1} r + z\alpha \left[ [I - zQ]^{-1} Q [I - zQ]^{-1} \right] \mathrm{r}$$

# 例题一 (离散相型分布)

计算$\tau$的一阶矩，即

$$E[\tau] = \frac{d}{dz}P_\tau(z)|_{z=1} = \alpha[I-Q]^{-1}r + \alpha\big[[I-Q]^{-1}Q[I-Q]^{-1}\big]\mathrm{r}$$
$$= \alpha[I-Q]^{-1}[I+Q[I-Q]^{-1}]r = \alpha[I-Q]^{-1}[I+Q+Q^2+\cdots]r$$
$$= \alpha[I-Q]^{-1}Wr$$
$$= \alpha[I-Q]^{-1}\mathrm{e}$$

类似地，可以得到$\tau$的高阶矩为

$$P_\tau^{(k)} = k!\,\alpha Q^{k-1}[I-Q]^{-k}\mathrm{e}, \mathrm{k} = 1,2\cdots$$

# 例题二 (卡片收集问题)

考虑一个有52名球员的足球俱乐部。该俱乐部进行如下促销活动：该城市销售的每一盒麦片中均包含一张印有该球队球员照片的卡片。收集到全套照片者（每个球员的照片至少有一张）可免费观看下一赛季该球队所有主场的比赛。假设每次打开一盒麦片，抽中52名球员的照片是等可能的。令$T$为收集到全套球员照片所需购买的麦片数量，我们关心的是$E[T]$以及$T$的概率分布。

# 例题二 (卡片收集问题)



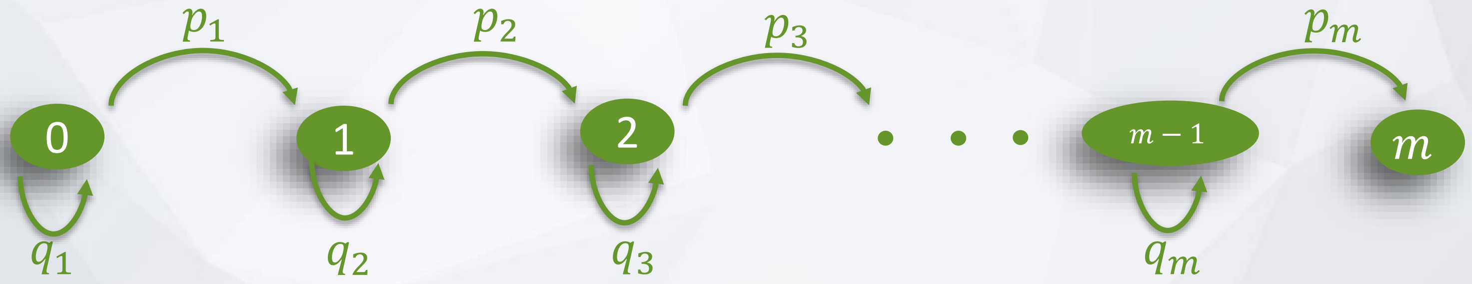
解：令$m$为不同类型的卡片数量，此时有$m = 52$，

令$X_i$为获得第$i$个卡片额外需要的卡片数（假设已获得$i-1$个卡片）

显然$X_i$服从几何分布，即$P\{X_i = n\} = {q_i}^{n-1}p_i\ , n = 1,2,\cdots,$

其中$p_i = \frac{m-(i-1)}{m}$

构造一个吸收态马尔可夫链，其中吸收态为$m$，其转移图如下：



# 例题二 (卡片收集问题)



根据马链转移图，我们知道首次到达吸收态$m$的转移次数即是$T$的值

所以，$T$服从离散相型分布，其转移概率矩阵典约化形式中：

$$Q=\begin{bmatrix} q_1 & p_1 & & & & \\ & q_2 & p_2 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & q_{m-1} & p_{m-1} \\ & & & & & q_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}=(r_0,r_1,\ldots r_{m-1})^T=(0,\cdots,0,p_m)^T$$

利用例题一的公式，我们可以得到 $T$ 的概率分布及一阶矩。

# 例题二 (卡片收集问题)



我们得到 $T$ 的概率分布

$$P\{T=0\}=0$$
$$P\{T=n\}=\alpha Q^{n-1}r,\ n=1,2,\cdots$$

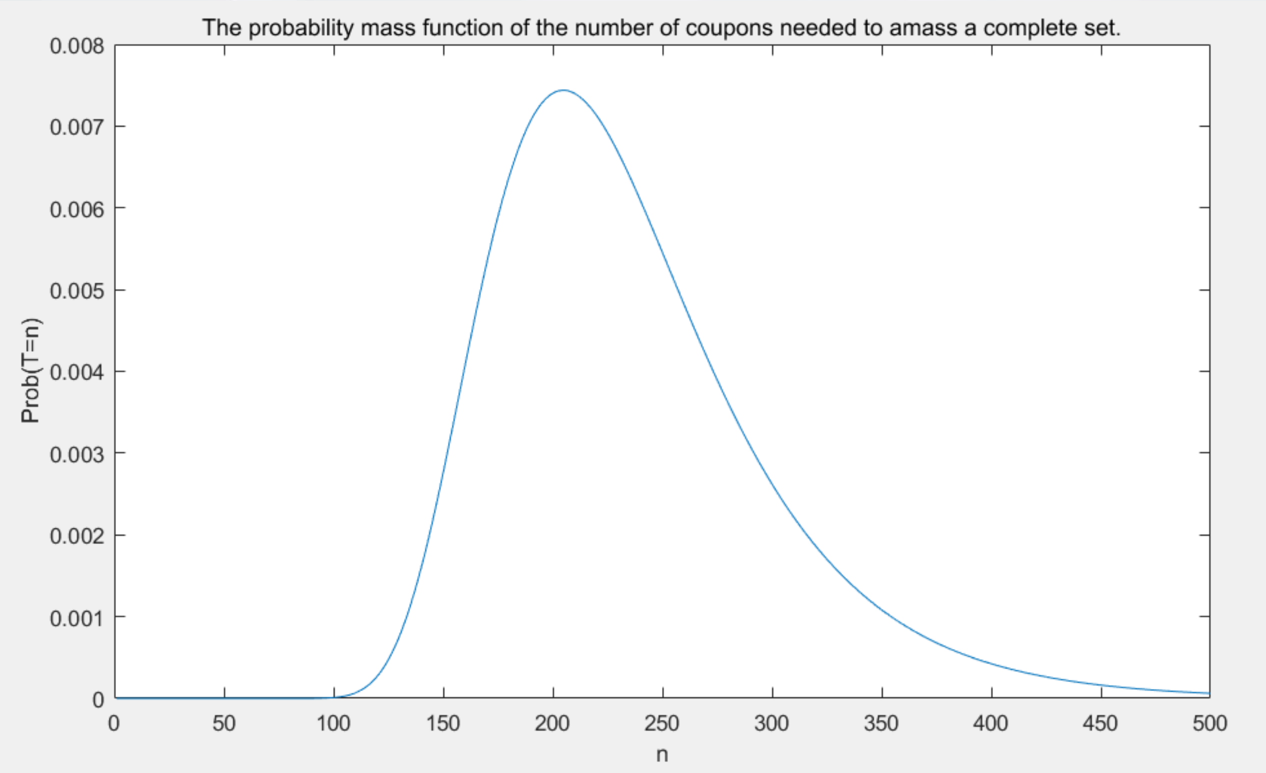
其中$\alpha=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{m-1})=(1,0,\cdots,0)$，$r=(0,\cdots,0,p_m)^T$

利用离散相型分布的结论，有

$$E[T]=\alpha[I-Q]^{-1}\mathrm{e}=235.98$$

# 例题二 (卡片收集问题)






T的概率分布函数曲线

# 思考问题



对于以上卡片收集的例题，利用第一章所学的知识，我们知道$X_i$的概率生成函数为$p_i z/(1-q_i z)$，试利用随机变量和的生成函数来计算$T$的生成函数，并与离散相型分布方法得到的概率生成函数相比较。

# 谢谢听课

授课教师

赵毅