主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2018/2019 学年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密　封　线

一、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 复数 $(1+i\sqrt{3})^{2018}$ 的三角表示式是 $\underline{2^{2018}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$。

2. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $g(z)=f(z^2)$， 则

$g^{(2019)}(0)=\underline{\quad 0\quad}$。

3. 设函数 $\dfrac{e^{\frac{z}{z-i}}\cos z}{(z^2-3z+2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半经

$R=\underline{\quad 1\quad}$。

4. 设 $f(z)$ 在复平面上解析，且 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则

$Res\left[\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)f(z),0\right]=\underline{a_0+a_1}$。

5. 已知 $F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)\right]$ 为函数 $f(t)$ 的傅氏变换，则

$f(t)=\underline{\quad \cos 2t\quad}$。

二、　单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 各个分支的解析区域为（D）.

A. 复平面；　　B. 扩充复平面；

C. 除去原点的复平面；　　D. 除去原点与负实轴的复平面；

2. 设 $f(z)=a_0+a_1z$，其中 a_0,a_1 是复常数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}|f(z)|^2dz=\text{（C）}.$$

A. a_0^2　　B. a_1^2　　C. $a_0\overline{a_1}$　　D. $\overline{a_0}a_1$

3. 下列命题，正确的是（ B ）。

A. 幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

B. 幂级数的收敛半径大于 0，则其在收敛圆内的和函数解析；

C. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 在点 $z=4$ 处收敛，则其在 $z=1$ 处发散；

D. 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上仅在 $z=0$ 处可导。

4. 为使积分 $\frac{1}{\pi i}\oint_C\frac{1}{z(z^2-1)}dz=1$，积分路径 C（C 为正向简单闭曲线）应（A）。

A. 包含 1 而不包含 0, -1；　　B. 包含 0, 1 而不包含-1；

C. 包含 0, -1 而不包含 1；　　D. 包含 0，1, -1；

5. 下列傅氏变换 F 中，不正确的是（D）。

A. $F[u(t)]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$　　B. $F[\delta(t)]=1$

C. $F\left[1\right]=2\pi\delta\left(\omega\right)$　　D. $F[\cos\omega_0t]=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封 线

三、 计算（每小题 5 分，共 20 分）

1. $I=\oint\limits_{|z|=4}(z+\bar{z})dz$；

注：$|z|=4 \Leftrightarrow z\bar{z}=16 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{16}{z}$

$$I=\oint\limits_{|z|=4}\left(z+\frac{16}{z}\right)dz=\oint\limits_{|z|=4}\frac{16}{z}dz=16\cdot 2\pi i=32\pi i$$

2. $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$；

$$I=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z(z-1)^2},0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z(z-1)^2},1\right]\right]$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}+\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z}\right)'\right]$$

$$=2\pi i\,[1+0]$$

$$=2\pi i$$

3. $I=\oint\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}dz$；

$$I=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},-i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},1\right]\right]$$

$$=-2\pi i\left[\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},3\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},\infty\right]\right]$$

$$=-2\pi i\left[\frac{1}{(3+i)^{10}\cdot 2}-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(\frac{1}{z}+i)^{10}(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-3)}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]\right]$$

$$=\frac{-\pi i}{(3+i)^{10}}$$

4. $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = 2\pi i \ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

$$= 2\pi i \ \frac{e^{-1}}{2i}$$

$$= \pi e^{-1}$$

$$\therefore \quad I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}.$$

四、　（8 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+2)}$ 在 $0<|z|<2$ 内的洛朗展开式.

当 $0<|z|<2$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{z+2}-\frac{1}{z}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{2^{n+2}}z^n - \frac{1}{2}\frac{1}{z}.$$

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

五、（7 分）设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$，求积分

$$I_n=\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz, n=0,1,2\cdots。$$

当 $|z|<1$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$$

$\therefore$ 当 $0<|z|<1$ 时，有

$$\frac{f(z)}{z^{n+1}}=\cdots+\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]\frac{1}{z}+\cdots$$

故

$$I_n=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{z^{n+1}},0\right]$$

$$=2\pi i\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]. \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

六、（10 分）求解下列初值问题 $\begin{cases} y''-y'-6y=2 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$.

设 $L[y(t)]=Y(s)$，则有

$$L[y''(t)]-L[y'(t)]-6L[y(t)]=L[2]$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-[sY(s)-y(0)]-6Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$s^2Y(s)-s-sY(s)+1-6Y(s)=\frac{2}{s}$$

$$(s^2-s-6)Y(s)=\frac{2}{s}+s-1=\frac{s^2-s+2}{s}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{s^2-s+2}{(s^2-s-6)s}=\frac{s^2-s+2}{(s+2)(s-3)s}$$

$$\therefore y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},0]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},-2]+\mathrm{Res}[Y(s)e^{st},3]$$

$$=-\frac{2}{6}+\frac{8}{10}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}$$

七、　（5 分）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析。如果存在两个不全为零的复数 c_1 和 c_2，　使得

$$c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0, \forall z \in D,$$

则 $f(z)$ 在区域 D 内是常数。

设 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析，则 u 和 v 有连续偏导，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1)$$

又设存在两个不全为 0 的复数 c_1 和 c_2，使得

$$c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0 \qquad \forall z \in D.$$

如果 $c_2 = 0$，则 $c_1 \neq 0$，这样 $f(z) = 0$ 是常数.

如果 $c_2 \neq 0$，则 $\overline{f(z)} = -\frac{c_1}{c_2} f(z)$，从而 $\overline{f(z)}$ 解析.

注意到

$$\overline{f(z)} = u - iv.$$

我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (-v)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (-v)}{\partial x} \qquad (2)$$

由 (1)，(2)，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

因此，$f(z)$ 在 D 内是常数。