第九章 欧氏空间

§9.3欧氏空间的同构

一、欧氏空间同构的概念

二、欧氏空间同构的充要条件

我们来建立欧氏空间同构的概念.

定义 8. 实数域R上欧氏空间V与V$'$称为**同构的**，如果由V到V$'$有一个双射σ，满足

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

3) $\big(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\big)=(\alpha,\beta)$,

这里$\alpha,\beta\in V, k\in R$，这样的**映射$\sigma$称为V到V$'$的同构映射**.

注：一个定义了代数运算的集合到另一个也定义了代数运算的集合的同构映射σ，本质上看有两点：(1) σ是双射，(2) σ保持运算. 欧氏空间的同构在线性空间同构的基础上还要保内积，内积实际上也是运算，它是空间V中的向量对到基础数域的映射.

如上所叙，欧氏空间的同构首先是线性空间的同构，因而，同构的欧氏空间必有相同的维数.

设V是一个n维欧氏空间，在V中取一组标准正交基

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, 在这组基下，V的每个向量α都可表示成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

令　$\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

我们知道，这是V到$\mathbf{R}^n$的一个双射，且满足定义中的条件 1),2)(第六章 § 8)，上一节的(3)式说明σ也满足条件 3)，因而σ是V到$\mathbf{R}^n$的一个同构映射，由此可知，每个n维欧氏空间都与$\mathbf{R}^n$同构.

下面来证明，同构关系具有反身性，对称性与传递性.

首先，每个欧氏空间到自身的恒等映射显然是一同构映射. 这就是说同构关系是反身的，其次，设σ是 V到V'的一同构映射，它的逆映射σ^{-1}满足定义中的条件1),2)(第六章 § 8)，且对于$\alpha,\beta\in V$，有

$$(\alpha,\beta)=\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right),\sigma\left(\sigma^{-1}(\beta)\right)\right)$$

$$=(\sigma^{-1}(\alpha),\sigma^{-1}(\beta))$$

这就是说，σ^{-1}是V'到V的一同构映射，因而同构关系是对称的.

第三，设σ, τ分别是V到V'，V'到V''的同构映射，不难

证明$\tau\sigma$是V到V''的同构映射，因而同构关系是传递的

既然每个n维欧氏空间都与R^n同构，由同构的对称性，传递性即得

定理 3. 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.

这个定理说明，从抽象的观点看，欧氏空间的结构完全被它的维数决定.

单选题 1分

设置

对于$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T, Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$,

定义 1:$(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n$,

定义 2:$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$,

这两个内积定义的欧式空间是否同构?如是,写出它们之间的同构。

A 同构:$X^{(1)}\to X^{(2)}:x_i^{(1)}\to x_i^{(2)}$

B 同构:$X^{(1)}\to X^{(2)}:x_i^{(1)}\to \frac{1}{\sqrt{i}}x_i^{(2)}$,

C 不同构,

D 同构,但写不出

提交

§9.4 正交变换

在解析几何中，我们有正交变换的概念，正交变换就是保持点之间的距离不变的变换，在一般的欧氏空间中，我们有

定义 9. 欧式空间V的线性变换$\mathcal{A}$称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对于任意的$\alpha, \beta \in V$，都有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$$

正交变换可以从几个不同的方面来刻画

定理 4. 设$\mathcal{A}$是n维欧氏空间V的一个线性变换，于是下面的四个命题等价：

1) $\mathcal{A}$是正交变换；

2) $\mathcal{A}$保持向量的长度不变，即对于$\alpha \in V$，$|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$.

3) 如果$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$是标准正交基，那么$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n$也是标准正交基；

4) $\mathcal{A}$在任一标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明. 首先说明 1)与 2)等价.

如果$\mathscr{A}$是正交变换, 那么$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = (\alpha, \alpha)$,

两边开平方即得 $|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|$.

反之, 如果$\mathscr{A}$保持向量长度不变. 那么

$$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = (\alpha, \alpha),$$

$$(\mathscr{A}\beta, \mathscr{A}\beta) = (\beta, \beta),$$

$$\left(\mathscr{A}(\alpha+\beta), \mathscr{A}(\alpha+\beta)\right) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$$

把最后的等式展开即得

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)+2(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)+(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$

再利用前两个等式，就有

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

这就是说，$\mathcal{A}$是正交变换.

再来证 1) 与 3) 等价.

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$是一组标准正交基，即

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, \text{当} i=j\\0, \text{当} i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\dots,n).$$

如果$\mathcal{A}$是正交变换，那么

$$(\mathcal{A}\varepsilon_i,\mathcal{A}\varepsilon_j)=\begin{cases}1,\text{当}i=j\\0,\text{当}i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\dots,n).$$

也就是说，$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n$是标准正交基．反之，如果$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\dots,\mathcal{A}\varepsilon_n$是标准正交基，那么由

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n,$$

与

$$\mathcal{A}\alpha=x_1\mathcal{A}\varepsilon_1+x_2\mathcal{A}\varepsilon_2+\cdots+x_n\mathcal{A}\varepsilon_n,$$

$$\mathcal{A}\beta=y_1\mathcal{A}\varepsilon_1+y_2\mathcal{A}\varepsilon_2+\cdots+y_n\mathcal{A}\varepsilon_n,$$

即得

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$
$$=(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta),$$

因而$\mathcal{A}$是正交变换.

最后证 3) 与 4) 等价.

设 $\mathcal{A}$ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，即

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\ldots,\mathcal{A}\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)A.$$

如果$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\ldots,\mathcal{A}\varepsilon_n$是标准正交基，那么$A$可看作由标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$到$\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\ldots,\mathcal{A}\varepsilon_n$的过渡

矩阵, 因而是正交矩阵. 反之, 如果$\boldsymbol{A}$是正交矩阵, 那么$\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n$就是标准正交基.

这样, 我们完成了 **1),2),3),4)**等价性的证明.

因为正交矩阵是可逆的, 所以正交变换是可逆的. 由定义不难看出, 正交变换实际上就是一个欧氏空间到它自身的同构映射, 因而正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换, 在标准正交基下, 正交变换与正交矩阵对应, 因此, 正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

如果A是正交矩阵，那么由 $AA^T = E$

可知$|A|^2 = 1$ 或者$|A| = \pm 1$.

因此，正交矩阵的行列式等于1或者-1. 等于1的正交矩阵通常称为旋转，或者称为第一类的；行列式等于-1的正交变换称为第二类的.

例如，在欧式空间中任取一组标准正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

定义

$\mathcal{A}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2 = \varepsilon_2, \ldots, \mathcal{A}\varepsilon_n = \varepsilon_n,$

那么，$\mathcal{A}$就是一个第二类的正交变换，从几何看，是一镜面反射.

例1. 设$\mathcal{A}$是欧式空间V的一个变换，证明：如果$\mathcal{A}$保持内积不变，即对于$\alpha, \beta \in V, (\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta)$，那么它一定是线性的，因而是正交变换.

证明. 首先证明$\mathcal{A}$是欧式空间V上的双射. 因V是有限维空间，只要证明$\mathcal{A}^{-1}(0)=0$即可. 若有$0\neq\alpha\in V$使得$\mathcal{A}\alpha=0$，则$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)=(\alpha,\alpha,)=0$，推出$\alpha=0$与$\alpha\neq 0$矛盾. 故$\mathcal{A}^{-1}(0)=0$，$\mathcal{A}$是可逆映射.

再证$\mathcal{A}$保持向量的线性运算. 设$\alpha,\beta,\gamma\in V$, $k,l\in$ R

我们欲证$\mathcal{A}(k\alpha+l\beta)=k\mathcal{A}\alpha+l\mathcal{A}\beta$. 因$\mathcal{A}$保持内积，有$(\mathcal{A}(k\alpha+l\beta),\mathcal{A}\gamma)=(k\alpha+l\beta,\gamma)$

$$=(k\alpha,\gamma)+(l\beta,\gamma)=(k\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\gamma)+(l\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma)$$

$$=(k\mathcal{A}\alpha+l\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma).$$

则 $(\mathcal{A}(k\alpha+l\beta)-k\mathcal{A}\alpha-l\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\gamma)=0.$

因$\mathcal{A}$是满射，$\mathcal{A}\gamma$可以取遍V中所有向量，与V中所有向量正交的向量只有零向量，故$\mathcal{A}(k\alpha+l\beta)-k\mathcal{A}\alpha-l\mathcal{A}\beta=0$, $\mathcal{A}(k\alpha+l\beta)=k\mathcal{A}\alpha+l\mathcal{A}\beta.$

$\mathcal{A}$是线性变换，因而是正交变换.

注：

1. 保持任意两个向量夹角的线性变换未必是正交变换.

反例：规定线性变换$\mathcal{A}$：$\alpha \to 3\alpha$, $\forall \alpha \in V$.

$$|\mathcal{A}(\alpha)| = 3|\alpha|$$

长度变了, $\mathcal{A}$不是正交变换.

2. 保持向量长度的变换未必是正交变换.

反例：在R^2中规定变换$\mathcal{A}$：$(x_1, x_2) \to (|x_1|, |x_2|)$,

显然$\mathcal{A}$保持向量长度，但不是线性变换，故不是正交变换.

3.保持任意两个向量距离不变的变换未必是正交变换.

反例: 规定变换$\mathcal{A}$：$\alpha \to \alpha + \rho_0$, $\forall \alpha \in V$, ρ_0为V中一固定的非零向量.因$\mathcal{A}$不是线性变换.

4.把标准正交基变为标准正交基的变换未必是正交变换.

反例. 规定变换$\mathcal{A}$：$\alpha \to |\alpha|\alpha, \forall \alpha \in V$.

易见$\mathcal{A}$将标准正交基变为标准正交基，但$\mathcal{A}$不是线性变换.

5. $\boldsymbol{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n}$**是V的一个标准正交基，规定线性变换** $\mathcal{A}$**满足**$(\mathcal{A}\eta_i,\mathcal{A}\eta_i)=(\eta_i,\eta_i)(i=1,2,\ldots,n)$**，**$\mathcal{A}$**未必是正交变换.**

反例. **在** $\mathbf{R}^2$**中取标准正交基**$\varepsilon_1=(1,0)^T,\varepsilon_2=(0,1)^T$. **规定线性变换**$\mathcal{A}$**：** $\varepsilon_1\to\eta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2,\varepsilon_2\to\eta_2=\varepsilon_2.$

易见,$\mathcal{A}$**满足所述条件，但**$\mathcal{A}$**在**$\varepsilon_1,\varepsilon_2$**下的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$$

A**显然不是正交矩阵，**$\mathcal{A}$**也不是正交变换.**

§5. 子空间

我们来讨论欧氏空间中子空间的正交关系.

定义 10. 设V_1, V_2是欧式空间V中两个子空间，如果对于任意的$\alpha \in V_1, \beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0$$

则称V_1, V_2为正交的，记为$V_1 \perp V_2$.

一个向量α,如果对于任意的$\beta \in V_1$, 恒有

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称α与子空间V_1正交，记为$\alpha \perp V_1$.

因为只有零向量与自身正交，所以由$V_1 \perp V_2$可知$V_1 \cap V_2 = 0$; 由$\alpha \perp V_1, \alpha \in V_1$可知$\alpha = 0$.

关于正交的子空间，我们有:

定理 5. 如果子空间$V_1, V_2, \ldots, V_s$两两正交，那么$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$是直和.

证明. 设$\alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, s$, 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 0.$$

用α_i与等式两边作内积, 利用正交性立得

$$(\alpha_i, \alpha_i) = 0,$$

从而$\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

这就是说, 和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$

是直和.

定义 11. 子空间V_2称为子空间V_1的一个正交补, 如果$V_1 \perp V_2$, 并且$V_1 + V_2 = V$.

显然，如果V_2是V_1的正交补，V_1也是V_2的正交补.

定理 6. n维欧式空间V的每一个子空间V_1，都有**唯一的正交补**.

证明. 如果$V_1 = 0$，那么它的正交补就是V，唯一性显然. 设$V_1 \neq 0$，欧氏空间的子空间在所定义的内积之下也是一个欧式空间，在V_1中取一组正交基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$,由定理 1,它可以扩充成V的一组正交基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n,$$

显然，子空间$L(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n)$就是$V_1$的正交补.

再来证唯一性. 设V_2, V_3都是V_1的正交补，于是

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad V = V_1 \oplus V_3$$

令$\alpha \in V_2$，由第二式即有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3,$$

其中$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_3 \in V_3$，因为$\alpha \perp \alpha_1$,所以

$$(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) = 0.$$

即 $\alpha_1 = 0$.由此得: $\alpha \in V_3$, 即$V_2 \subseteq V_3$.

同理可证$V_3 \subseteq V_2$, 因此得$V_2 = V_3$,.唯一性得证.

V_1的正交补记为$V_1^{\perp}$. 由定义知

$$\dim(V_1) + \dim\left(V_1^{\perp}\right) = n.$$

由定理的证明还不难得出

推论. $V_1^{\perp}$恰由所有与V_1正交的向量组成(?).

例. 设V_1, V_2都是n维欧式空间V的子空间，且

$$\dim V_1 < \dim V_2$$

求证: V_2中必有非零向量正交于V_1.

证明. 若$V_2 \cap V_1^{\perp} = \{0\}$, 则

$$\dim\left(V_2 + V_1^{\perp}\right) = \dim V_2 + \dim V_1^{\perp} =$$

$$\dim V_2 + n - \dim V_1 > n$$

这与$V_2 + V_1^{\perp}$是V的子空间矛盾.

推论. $V_1^{\perp}$恰由所有与V_1正交的向量组成(?).

证明. 令$\alpha \in V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$, 且$\alpha \perp V_1$, 写

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}$.,

则

$$(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) =$$

$$(\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) = 0$$

推出$\alpha_1 = 0$, 故 $\alpha = \alpha_2 \in V_1^{\perp}$.

由分解式

$$\mathbf{V} = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

可知，V中任一向量α都可以唯一分解成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

其中，$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}$，我们称$\alpha_1$为向量$\alpha$在子空间$V_1$上的内射影.

填空题 0分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

已知R^4的子空间V_1的一个基

$\alpha_1=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_2=(0,1,1,0)^T,$

求向量$\alpha=(1,-3,1,-3)^T$在V_1上的内射影

(　　).

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

问题. 已知R^4的子空间V_1的一个基

$\alpha_1=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_2=(0,1,1,0)^T,$

求向量$\alpha=(1,-3,1,-3)^T$在V_1上的内射影.

解. 求$V_1^{\perp}$，解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

得其一基础解系

$\alpha_3=(2,1,-1,0)^T,\alpha_4=(1,0,0,1)^T,$

$V_1^{\perp}=L(\alpha_3,\alpha_4).$

将α表成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合,

$$\alpha=(2\alpha_1-\alpha_2)+(-\alpha_4)$$

故α在V_1上的内射影为

$$2\alpha_1-\alpha_2=(2,-3,1,-2)^T$$