概率论

第五章: 大数定律及中心极限定理

陈国廷

2023 年秋季学期

哈爾濱工業大學(深圳)
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

第五章: 大数定律及中心极限定理

§1. 大数定律

1. Khinkin 辛钦大数定理
2. Bernoulli 伯努利大数定理
3. Tchebychev 切比雪夫大数定理
4. Markov 马尔可夫大数定理

§2. 中心极限定理

1. De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理
2. 独立同分布的中心极限定理
3. Lyapunov 李雅普诺夫定理 (独立不同分布的中心极限定理)

§1. 大数定律

§1. 大数定律

投 n 次两面均匀的硬币,

§1. 大数定律

投 n 次两面均匀的硬币, 以 S_n 记出现正面的次数.

投 n 次两面均匀的硬币, 以 S_n 记出现正面的次数.
直觉告诉我们

§1. 大数定律

投 n 次两面均匀的硬币，以 S_n 记出现正面的次数.
直觉告诉我们

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{1}{2}$$

投 n 次两面均匀的硬币, 以 S_n 记出现正面的次数. 直觉告诉我们

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{1}{2}$$

从逻辑上讲, 这也是我们定义

$$P(\text{正面}) = P(\text{反面}) = \frac{1}{2}$$

的实验基础.

那么，在定义了概率之后，怎么样更精确地描述这一直观上显然的事实呢？

那么, 在定义了概率之后, 怎么样更精确地描述这一直观上显然的事实呢?

这是科学研究的一般规律:
从实践中来, 在理论上升华提高, 再回到实践中去.

考虑一般的 Bernoulli 试验.

考虑一般的 Bernoulli 试验.

设单次试验中成功的概率为 p,

考虑一般的 Bernoulli 试验.

设单次试验中成功的概率为 p, 令

$$\mu_n = \frac{1}{n} \times (n\text{重试验中成功的次数}).$$

考虑一般的 Bernoulli 试验.

设单次试验中成功的概率为 p, 令

$$\mu_n = \frac{1}{n} \times (n\text{重试验中成功的次数}).$$

我们感兴趣的是 μ_n 当 n 很大时的形态.

考虑一般的 Bernoulli 试验.

设单次试验中成功的概率为 p, 令

$$\mu_n = \frac{1}{n} \times (n\text{重试验中成功的次数}).$$

我们感兴趣的是 μ_n 当 n 很大时的形态.

由于

$$\mu_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

考虑一般的 Bernoulli 试验.

设单次试验中成功的概率为 p, 令

$$\mu_n = \frac{1}{n} \times (n\text{重试验中成功的次数}).$$

我们感兴趣的是 μ_n 当 n 很大时的形态.

由于

$$\mu_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次试验成功}, \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次试验失败}. \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

所以

$$E(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

所以

$$E(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq,$$

从而

$$E(\mu_n) = p,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

所以

$$E(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq,$$

从而

$$E(\mu_n) = p, \qquad D(\mu_n) = \frac{pq}{n}.$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

所以

$$E(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq,$$

从而

$$E(\mu_n) = p, \qquad D(\mu_n) = \frac{pq}{n}.$$

这样

$$\lim_{n \to \infty} E(\mu_n) = p$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且 $\forall i$,

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q = 1 - p,$$

所以

$$E(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq,$$

从而

$$E(\mu_n) = p, \qquad D(\mu_n) = \frac{pq}{n}.$$

这样

$$\lim_{n\to\infty} E(\mu_n) = p$$

$$\lim_{n\to\infty} D(\mu_n) = 0.$$

我们知道，一个随机变量 X，如果

$$D(X) = 0,$$

我们知道，一个随机变量 X，如果

$$D(X) = 0,$$

那么

$$P(X = E(X)) = 1.$$

我们知道, 一个随机变量 X, 如果

$$D(X) = 0,$$

那么

$$P(X = E(X)) = 1.$$

(Tchebychev 不等式的推论)

我们知道, 一个随机变量 X, 如果

$$D(X) = 0,$$

那么

$$P(X = E(X)) = 1.$$

(Tchebychev 不等式的推论)

因此在“某种意义下”有

$$\mu_n \to E(\mu_n)$$

我们知道, 一个随机变量 X, 如果

$$D(X) = 0,$$

那么

$$P(X = E(X)) = 1.$$

(Tchebychev 不等式的推论)

因此在 “某种意义下” 有

$$\mu_n \to E(\mu_n) = p$$

我们知道，一个随机变量 X，如果

$$D(X) = 0,$$

那么

$$P(X = E(X)) = 1.$$

(Tchebychev 不等式的推论)

因此在“某种意义下”有

$$\mu_n \to E(\mu_n) = p$$

我们首先要明确“何种意义”

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:

$\forall\varepsilon > 0,$

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N,

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:
$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|\mu_n(\omega) - p| < \varepsilon, \forall \omega$$

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:
$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|\mu_n(\omega) - p| < \varepsilon, \forall \omega$$

但我们立即意识到这是不可能的,

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:
$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|\mu_n(\omega) - p| < \varepsilon, \forall \omega$$

但我们立即意识到这是不可能的, 因为

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n > 0$$

首先我们自然会希望关于 ω 一致收敛:
$\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|\mu_n(\omega) - p| < \varepsilon, \forall \omega$$

但我们立即意识到这是不可能的, 因为

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n > 0$$

$$P(\mu_n = 0) = P(X_1 = 0, \cdots, X_n = 0) = q^n > 0.$$

因此不管 n 多大, 总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 1$$

因此不管 n 多大, 总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 1$$

也总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 0$$

因此不管 n 多大, 总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 1$$

也总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 0$$

所以

$$\mu_n(\omega)$$

不可能一致地靠近 p,

因此不管 n 多大, 总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 1$$

也总有 ω 使得

$$\mu_n(\omega) = 0$$

所以

$$\mu_n(\omega)$$

不可能一致地靠近 p, 即不可能一致收敛.

但我们也注意到

但我们也注意到

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n \to 0$$

但我们也注意到

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n \to 0$$

$$P(\mu_n = 0) = P(X_1 = 0, \cdots, X_n = 0) = q^n \to 0$$

但我们也注意到

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n \to 0$$

$$P(\mu_n = 0) = P(X_1 = 0, \cdots, X_n = 0) = q^n \to 0$$

因而也许我们能够期望 $\forall \varepsilon > 0$,

但我们也注意到

$$P(\mu_n = 1) = P(X_1 = 1, \cdots, X_n = 1) = p^n \to 0$$

$$P(\mu_n = 0) = P(X_1 = 0, \cdots, X_n = 0) = q^n \to 0$$

因而也许我们能够期望 $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|\mu_n - p| > \varepsilon)$$

会很小.

如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| > \varepsilon) = 0$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| > \varepsilon) = 0$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| \le \varepsilon) = 1$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| > \varepsilon) = 0$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| \leq \varepsilon) = 1$$

则也可以认为

$$\mu_n$$

在某种意义下逐步接近到 p,

如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| > \varepsilon) = 0$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| \leq \varepsilon) = 1$$

则也可以认为

$$\mu_n$$

在某种意义下逐步接近到 p, 虽然这个意义不如一致收敛的意义强.

如果

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| > \varepsilon) = 0$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mu_n - p| \leq \varepsilon) = 1$$

则也可以认为

$$\mu_n$$

在某种意义下逐步接近到 p, 虽然这个意义不如一致收敛的意义强.

这样就引导出下面的定义:

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列,

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.

若任给 $\varepsilon > 0$,

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.
若任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon) = 1,$$

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.
若任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon) = 1,$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0,$$

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.
若任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon) = 1,$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称 $Y_1, Y_n, \cdots$ 依概率收敛于 a,

定义 1.1

设 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是随机变量序列, a 是常数.
若任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \varepsilon) = 1,$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0,$$

则称 $Y_1, Y_n, \cdots$ 依概率收敛于 a, 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a.$$

定理 1.1

设

$$X_n \xrightarrow{P} a,$$

定理 1.1

设

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

定理 1.1

设

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

$g(x, y)$ 在 (a, b) 连续.

定理 1.1

设

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

$g(x, y)$ 在 (a, b) 连续. 则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$.

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续,

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x-a| < \delta, |y-b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta\}$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta\} \subset \{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon\}.$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta\} \subset \{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon\}.$$

因为

$$X_n \xrightarrow{P} a,$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x-a| < \delta, |y-b| < \delta \Longrightarrow |g(x,y)-g(a,b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n-a| < \delta, |Y_n-b| < \delta\} \subset \{|g(X_n,Y_n)-g(a,b)| < \varepsilon\}.$$

因为

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta\} \subset \{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon\}.$$

因为

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

所以

证明. 任取 $\varepsilon > 0$. 因为 g 在 (a, b) 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得

$$|x - a| < \delta, |y - b| < \delta \Longrightarrow |g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta\} \subset \{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon\}.$$

因为

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta) = 1$$

证明. 任取 $\varepsilon>0$. 因为 g 在 (a,b) 处连续, 故存在 $\delta>0$, 使得

$$|x-a|<\delta, |y-b|<\delta \Longrightarrow |g(x,y)-g(a,b)|<\varepsilon,$$

所以

$$\{|X_n-a|<\delta, |Y_n-b|<\delta\} \subset \{|g(X_n,Y_n)-g(a,b)|<\varepsilon\}.$$

因为

$$X_n \xrightarrow{P} a, \qquad Y_n \xrightarrow{P} b,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-a|<\delta)=1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n-b|<\delta)=1$$

从而

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon)$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

但显然

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon)\\ \geq &\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta)\\ = &1\end{aligned}$$

但显然

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) \leq 1$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) = 1$$

这样就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \delta, |Y_n - b| < \delta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

但显然

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) \leq 1$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| < \varepsilon) = 1.$$

习题 1

设随机变量序列 $X_n(n=1,2,\cdots)$ 独立同分布，且

$$E(X_n)=\mu, \quad D(X_n)=\sigma^2\neq 0.$$

设 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k.$

试证明：随机变量序列 Y_n 依概率收敛.

习题 2

设 $X_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是相互独立同分布的随机变量序列，密度函数为 $p(x)=\begin{cases} e^{-(x-a)}, & x\geq a, \\ 0, & x<a, \end{cases}$ 设 $Y_n=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 证明：$Y_n \xrightarrow{P} a$.

习题 3

设随机变量序列 $X_n(n=1,2,\cdots)$ 的分布律为

$P(X_n=0)=1-\frac{1}{n^2}$, $P(X_n=n)=P(X_n=-n)=\frac{1}{2n^2}$.

(1) 求 $E(X_n)$, $E(X_n^2)$.

(2) 证明：随机变量序列 X_n 依概率收敛.

定义 1.2

设 $X_n,\ n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列,

定义 1.2

设 X_n, $n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列.

定义 1.2

设 X_n, $n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列. 令

$$\eta_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

定义 1.2

设 X_n, $n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列. 令

$$\eta_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

若 $\forall \varepsilon > 0$,

定义 1.2

设 $X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列. 令

$$\eta_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

若 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - a_n| < \varepsilon) = 1$$

定义 1.2

设 $X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列. 令

$$\eta_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

若 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|\eta_n - a_n| < \varepsilon) = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

定义 1.2

设 $X_n, n = 1, 2, \cdots$ 是随机变量列, a_n 是数列. 令

$$\eta_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

若 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - a_n| < \varepsilon) = 1$$

则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

注: 之所以允许 a_n 依赖于 n, 是要包含各 X_n 不同分布的情形.

定义 1.3

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列随机变量.

定义 1.3

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列随机变量. 若对任意 n, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立,

定义 1.3

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列随机变量. 若对任意 n, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立, 则称 $X_1, X_2, \cdots$ 独立.

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots,$

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).
设

$$E(X_1) = \mu.$$

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).
设

$$E(X_1) = \mu.$$

考虑其前 n 项的算术平均值

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).
设

$$E(X_1) = \mu.$$

考虑其前 n 项的算术平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).
设

$$E(X_1) = \mu.$$

考虑其前 n 项的算术平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

我们考虑下面的问题:

假设有一列相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots$,
且它们的概率分布相同 (我们以后简称为独立同分布的随机变量列, 简记为 i.i.d).
设

$$E(X_1) = \mu.$$

考虑其前 n 项的算术平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

我们考虑下面的问题:

当 n 很大时, 这个值接近于多少?

实例:

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

合理的猜测:

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

合理的猜测: 接近于中国成年男人的平均身高.

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

合理的猜测: 接近于中国成年男人的平均身高.

所以对上述问题也有一个合理的猜测:

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

合理的猜测: 接近于中国成年男人的平均身高.

所以对上述问题也有一个合理的猜测: 接近于 μ.

实例: 在街头随机地对成年男人测量身高,
第 i 次测得的结果记为 X_i.
当 n 很大时, 你认为 n 次结果的平均值会接近于什么数?

合理的猜测: 接近于中国成年男人的平均身高.

所以对上述问题也有一个合理的猜测: 接近于 μ.

这是第一个问题.

第二个问题:

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ 接近于 0,

第二个问题：既然这个值接近于 μ,

那么 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ 接近于 0,

即 $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$ 接近于 0.

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ 接近于 0,

即 $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$ 接近于 0.

那么有没有可能找出一个数 $\alpha \in (0,1)$,

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ 接近于 0,

即 $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$ 接近于 0.

那么有没有可能找出一个数 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$$

第二个问题: 既然这个值接近于 μ,

那么 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu$ 接近于 0,

即 $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$ 接近于 0.

那么有没有可能找出一个数 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$$

接近于一个不恒为 0 的随机变量?

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列,

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \ \ k = 1, 2, \cdots$$

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \ \ k = 1, 2, \cdots$$

则 $\forall \varepsilon > 0$,

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \ \ k = 1, 2, \cdots$$

则 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

① Khinchin 辛钦大数定理

定理 1.2 (辛钦大数定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu,\ \ k = 1, 2, \cdots$$

则 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) = 0,$$

即: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 依概率收敛于 μ.

证明. 我们只在进一步假设:

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布,

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故 a

$$\sigma^2 = D(X_k), \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故 a

$$\sigma^2 = D(X_k), \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此由独立性

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故 a

$$\sigma^2 = D(X_k), \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此由独立性

$$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)$$

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故 a

$$\sigma^2 = D(X_k), \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此由独立性

$$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k)$$

证明. 我们只在进一步假设:

$$\sigma^2 = D(X_1)$$

存在这一条件下证明.

由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故 a

$$\sigma^2 = D(X_k), \quad \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此由独立性

$$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布,

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu,\ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布，故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布，故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu,\ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right)$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布, 故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布，故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

因此

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布，故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

因此

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

同样由于 $X_1, X_2, \cdots$ 服从同一分布，故

$$E(X_k) = \mu, \ \forall k = 1, 2, \cdots$$

因此

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu.$$

故由切比雪夫不等式有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

因此

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

从而

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

从而

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

从而

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

② Jacob Bernoulli 伯努利大数定理

定理 1.3 (伯努利大数定理)

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

② Jacob Bernoulli 伯努利大数定理

定理 1.3 (伯努利大数定理)

设 f_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数,

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

② Jacob Bernoulli 伯努利大数定理

定理 1.3 (伯努利大数定理)

设 f_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数,
p 是事件 A 在每次试验中发生的概率,

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

② Jacob Bernoulli 伯努利大数定理

定理 1.3 (伯努利大数定理)

设 f_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数,
p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对于任意 $\varepsilon > 0$,

辛钦大数定律是下面更早的伯努利大数定律的推广.

② Jacob Bernoulli 伯努利大数定理

定理 1.3 (伯努利大数定理)

设 f_n 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数,
p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{f_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明. 令

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}$$

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立,

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{ 发生} \\ 0, & A\text{ 不发生} \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $E(X_k) = P(A) = p$,

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{ 发生} \\ 0, & A\text{ 不发生} \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $E(X_k) = P(A) = p$, 且服从同一分布.

证明. 令

$$X_k=\begin{cases}1, & A\text{ 发生}\\ 0, & A\text{ 不发生}\end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $E(X_k)=P(A)=p$, 且服从同一分布. 显然

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $E(X_k) = P(A) = p$, 且服从同一分布. 显然

$$f_n = X_1 + \cdots + X_n$$

证明. 令

$$X_k = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $E(X_k) = P(A) = p$, 且服从同一分布. 显然

$$f_n = X_1 + \cdots + X_n$$

因而直接用辛钦大数定理即可.

注: 这个结果的证明现在看起来非常简单.

注: 这个结果的证明现在看起来非常简单.
那为什么还值得冠上 Bernoulli (Jakob) 的大名?

注: 这个结果的证明现在看起来非常简单.
那为什么还值得冠上 Bernoulli (Jakob) 的大名?

Bernoulli 的结果证明于 17 世纪. 那时甚至连极限的概念都不明确, 更谈不上期望和方差的概念. 所以 Bernoulli 完全是手工作业, 运用娴熟的组合不等式技巧得到了这个结果. 甚至有人认为, Bernoulli 是在建立这个结果的时候首次实际上明确了极限的概念.

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列,

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列, 其方差存在且一致有界,

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列, 其方差存在且一致有界, 即存在常数 C 使得

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列, 其方差存在且一致有界, 即存在常数 C 使得

$$D(X_k) \leq C, \quad \forall k$$

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列, 其方差存在且一致有界, 即存在常数 C 使得

$$D(X_k) \leq C, \quad \forall k$$

则 $\forall \varepsilon > 0$ 有

③ Tchebychev 切比雪夫大数定律

定理 1.4 (Tchebychev 切比雪夫大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是两两不相关的随机变量序列, 其方差存在且一致有界, 即存在常数 C 使得

$$D(X_k) \le C, \quad \forall k$$

则 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明:

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:

因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关,

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:
因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关, 所以

$$D\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \leq \frac{C}{n}$$

故由 Tchebychev 不等式

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:
因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关, 所以

$$D\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \le \frac{C}{n}$$

故由 Tchebychev 不等式

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\Big| \ge \varepsilon\Big)$$

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:
因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关, 所以

$$D\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \le \frac{C}{n}$$

故由 Tchebychev 不等式

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\varepsilon^2}$$

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:
因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关, 所以

$$D\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \le \frac{C}{n}$$

故由 Tchebychev 不等式

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$$

证明: 我们证明的出发点就是 Tchebychev 不等式:
因为 $X_1, X_2, \cdots$, 两两不相关, 所以

$$D\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \le \frac{C}{n}$$

故由 Tchebychev 不等式

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$$

也即

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k\Big| < \varepsilon\Big) = 1.$$

④ Markov 马尔可夫大数定律

由该定理的证明可知

④ Markov 马尔可夫大数定律

由该定理的证明可知

定理 1.5 (Markov 大数定理)

④ Markov 马尔可夫大数定律

由该定理的证明可知

定理 1.5 (Markov 大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是随机变量序列, 若

$$\frac{1}{n^2} D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0 \ (n \to \infty),$$

④ Markov 马尔可夫大数定律

由该定理的证明可知

定理 1.5 (Markov 大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是随机变量序列, 若

$$\frac{1}{n^2} D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0 \ (n \to \infty),$$

则上定理的结论依然成立, 即 $\forall \varepsilon > 0$ 有

④ Markov 马尔可夫大数定律

由该定理的证明可知

定理 1.5 (Markov 大数定理)

设 $X_1, X_2 \cdots$, 是随机变量序列, 若

$$\frac{1}{n^2} D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \to 0 \ (n \to \infty),$$

则上定理的结论依然成立, 即 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k,

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数，

检查该定理的证明, 得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中, 事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k, 以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数, 则 $\forall \varepsilon > 0$

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数，则 $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数，则 $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明.

检查该定理的证明, 得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中, 事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k, 以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数, 则 $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明.

$$E(X_i) = p_i,$$

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数，则 $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明.

$$E(X_i) = p_i,$$

$$D(X_i) = p_i q_i = p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4},$$

检查该定理的证明，得到

定理 1.6 (Poisson 大数定律)

如果在一个独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，以 μ_n 记前 n 次试验中 A 出现的次数，则 $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

证明.

$$E(X_i) = p_i,$$

$$D(X_i) = p_i q_i = p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

回到前面说的第二个问题.

回到前面说的第二个问题.

对多重 Bernoulli 试验, 我们证明了

回到前面说的第二个问题.

对多重 Bernoulli 试验, 我们证明了

$$P(|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0$$

回到前面说的第二个问题.

对多重 Bernoulli 试验, 我们证明了

$$P(|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \to 0$$

现在我们想进一步研究 $|\frac{\mu_n}{n} - p| \to 0$ 的速度.

回到前面说的第二个问题.

对多重 Bernoulli 试验, 我们证明了

$$P(|\frac{\mu_n}{n}-p|\geq\varepsilon)\to 0$$

现在我们想进一步研究 $|\frac{\mu_n}{n}-p|\to 0$ 的速度.

由于 $E(|\frac{\mu_n}{n}-p|^2)=\frac{pq}{n}$,

回到前面说的第二个问题.

对多重 Bernoulli 试验, 我们证明了

$$P(|\frac{\mu_n}{n}-p|\geq\varepsilon)\to 0$$

现在我们想进一步研究 $|\frac{\mu_n}{n}-p|\to 0$ 的速度.

由于 $E(|\frac{\mu_n}{n}-p|^2)=\frac{pq}{n}$, 所以我们希望

$$|\frac{\mu_n}{n}-p|\sim\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

如果 μ_n 是数列，这相当于

如果 μ_n 是数列，这相当于

$$\frac{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\to 1$$

如果 μ_n 是数列，这相当于

$$\frac{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \to 1$$

但现在 μ_n 是随机变量，故我们转而估计概率

如果 μ_n 是数列, 这相当于

$$\frac{|\frac{\mu_n}{n} - p|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \to 1$$

但现在 μ_n 是随机变量, 故我们转而估计概率

$$P\Big(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\Big)$$

或者

$$P\Big(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\Big).$$

注意:

注意:

因为

注意:

因为

$$E(\mu_n) = np,$$

注意:

因为

$$E(\mu_n) = np, \quad D(\mu_n) = npq,$$

注意:

因为

$$E(\mu_n) = np, \quad D(\mu_n) = npq,$$

所以

$$\mu_n^* = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$$

是 μ_n 的标准化.

① De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理

定理 1.7 (De Moivre-Laplace)

① De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理

定理 1.7 (De Moivre-Laplace)

设随机变量 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n,p 的二项分布,

① De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理

定理 1.7 (De Moivre-Laplace)

设随机变量 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n,p 的二项分布，则对于任意的实数 x，有

① De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理

定理 1.7 (De Moivre-Laplace)

设随机变量 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n,p 的二项分布, 则对于任意的实数 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x).$$

① De Moivre-Laplace 棣莫弗-拉普拉斯定理

定理 1.7 (De Moivre-Laplace)

设随机变量 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n,p 的二项分布，则对于任意的实数 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \Phi(x).$$

即当 n 充分大时,

$$\mu_n^* \text{近似地服从正态分布} N(0,1).$$

一般地，注意

一般地, 注意

$$P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \int_a^b \varphi(x)dx,$$

一般地, 注意

$$P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \to \int_a^b \varphi(x)dx,$$

可以近似地算出 $P(k_1 < \mu_n \leq k_2)$:

一般地, 注意

$$P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \to \int_a^b \varphi(x)dx,$$

可以近似地算出 $P(k_1 < \mu_n \leq k_2)$:

$$P(k_1 < \mu_n \leq k_2)$$

一般地, 注意

$$P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \int_a^b \varphi(x)dx,$$

可以近似地算出 $P(k_1 < \mu_n \le k_2)$:

$$\begin{aligned} & P(k_1 < \mu_n \le k_2) \\ & \quad = P(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \end{aligned}$$

一般地, 注意

$$P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \to \int_a^b \varphi(x)dx,$$

可以近似地算出 $P(k_1 < \mu_n \leq k_2)$:

$$\begin{aligned} &P(k_1 < \mu_n \leq k_2) \\ &\quad = P(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}) \end{aligned}$$

一般地, 注意

$$P\left(a<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\leq b\right)\to\int_a^b\varphi(x)dx,$$

可以近似地算出 $P(k_1<\mu_n\leq k_2)$:

$$\begin{aligned}
&P(k_1<\mu_n\leq k_2)\\
&\quad=P(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\leq\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})\\
&\quad\approx\Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})-\Phi(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}).
\end{aligned}$$

② 独立同分布的中心极限定理

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列,

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列，且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(S_n^* \leq x)$ 满足, 对任意 x,

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列，且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(S_n^* \leq x)$ 满足，对任意 x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n^* \leq x) =$$

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(S_n^* \leq x)$ 满足, 对任意 x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x).$$

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 (*i.i.d.*) 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(S_n^* \leq x)$ 满足, 对任意 x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x).$$

即当 n 充分大时, $S_n^* \sim N(0, 1)$,

定理 1.8 (独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布 *(i.i.d.)* 的随机变量列, 且

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

则随机变量之和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(S_n^* \leq x)$ 满足, 对任意 x,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \Phi(x).$$

即当 n 充分大时, $S_n^* \sim N(0,1)$, $P(S_n^* \leq x) \approx \Phi(x)$.

有时候要用到随机变量的算术平均值:

有时候要用到随机变量的算术平均值: 令

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

有时候要用到随机变量的算术平均值: 令

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

则 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

有时候要用到随机变量的算术平均值: 令

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

则 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

可以写成

$$S_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu).$$

有时候要用到随机变量的算术平均值: 令

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

则 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$S_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

可以写成

$$S_n^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu).$$

则当 n 充分大时,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}_n - \mu) \sim N(0,1).$$

③ Lyapunov 李雅普诺夫定理

定理 1.9 (独立不同分布的中心极限定理)

定理 1.9 (独立不同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量列,

定理 1.9 (独立不同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量列, 且它们具有数学期望和方差,

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

定理 1.9 (独立不同分布的中心极限定理)

设 $X_1, X_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量列, 且它们具有数学期望和方差,

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 > 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$, 若存在正数 δ, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = 0,$$

则随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x) = P(Z_n \le x)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le x) = \Phi(x)$.

例 1.1

设有 400 个学生的毕业典礼中，一个学生无家长、有 1 名家长、有 2 名家长来参加毕业典礼的概率分别是 0.05、0.8、0.15. 设各学生参加毕业典礼的家长人数相互独立，且服从同一分布.

1. 求参加毕业典礼的家长人数 X 超过 450 人的概率;
2. 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

附标准正态分布表:

x	1.15	2.5
$\Phi(x)$	0.8749	0.9938

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数,

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1,$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$

$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$

$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$
$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2 = 0.19$$

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$
$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2 = 0.19$$

记 $S = S_{400} = \sum_{k=1}^{400} X_k$,

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$
$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2 = 0.19$$

记 $S = S_{400} = \sum_{k=1}^{400} X_k$, 有 $\mu = E(S) = 400 \times 1.1$,

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$
$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2 = 0.19$$

记 $S = S_{400} = \sum_{k=1}^{400} X_k$, 有 $\mu = E(S) = 400 \times 1.1$,
由独立性有 $\sigma^2 = D(S) = 400 \times 0.19$.
由中心极限定理,

解. (1) 记 X_k 为第 k 个学生来参加毕业典礼的家长人数, X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

我们有, $\forall k = 1, 2, \cdots, 400$,

$$E(X_k) = 0.8 + 0.3 = 1.1, \quad E(X_k^2) = 1 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.15 = 1.4,$$
$$D(X_k) = E(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = 1.4 - 1.1^2 = 0.19$$

记 $S = S_{400} = \sum_{k=1}^{400} X_k$, 有 $\mu = E(S) = 400 \times 1.1$,
由独立性有 $\sigma^2 = D(S) = 400 \times 0.19$.
由中心极限定理,

$S^* = \frac{S-\mu}{\sigma}$ 近似的服从标准正态分布 $N(0, 1)$.

所以,

所以,

$$P(S > 450) = P\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{450-440}{\sqrt{400 \times 0.19}}\Big)$$

所以，

$$P(S>450)=P\Big(\frac{S-\mu}{\sigma}>\frac{450-440}{\sqrt{400\times0.19}}\Big)$$
$$=P(S^*>\frac{5}{\sqrt{19}})$$

所以，

$$
\begin{aligned}
P(S > 450) &= P\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{450-440}{\sqrt{400\times 0.19}}\Big) \\
&= P(S^* > \frac{5}{\sqrt{19}}) \\
&\approx P(S^* > 1.15)
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
P(S>450) &= P\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{450-440}{\sqrt{400\times 0.19}}\Big) \\
&= P(S^* > \frac{5}{\sqrt{19}}) \\
&\approx P(S^* > 1.15) \\
&= 1-\Phi(1.15) \approx 1-0.8749
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\begin{aligned}
P(S > 450) &= P\Big(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{450-440}{\sqrt{400\times 0.19}}\Big) \\
&= P(S^* > \frac{5}{\sqrt{19}}) \\
&\approx P(S^* > 1.15) \\
&= 1 - \Phi(1.15) \approx 1 - 0.8749 \\
&= 0.1251
\end{aligned}
$$

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数,

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

$$P(Y \leq 340)$$

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

$$P(Y \leq 340) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right)$$

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

$$P(Y \leq 340) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right)$$
$$= P\left(Y^* \leq \frac{20}{8}\right)$$

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

$$P(Y \leq 340) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \leq \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right)$$

$$= P\left(Y^* \leq \frac{20}{8}\right)$$

$$= \Phi(2.5)$$

(2) 求有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数不多于 340 人的概率.

(2) 记 Y 为有 1 名家长来参加毕业典礼的学生人数, $Y \sim b(400, 0.8)$,
由中心极限定理,

$$P(Y \le 340) = P\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \le \frac{340 - 400 \times 0.8}{\sqrt{400 \times 0.8 \times 0.2}}\right)$$
$$= P\left(Y^* \le \frac{20}{8}\right)$$
$$= \Phi(2.5) \approx 0.9938$$

习题 4

设在某试验中, 事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{3}$, 若独立地作了 *90000* 次该试验，求事件 A 发生的次数在 *29500～30500* 之间的概率.

附标准正态分布表: $\Phi(3.535) = 0.9998$

习题 5

设某校的校服由某种积分交换，每件校服所需的积分 Z 是随机且独立的，它服从以下分布：

Z	0	1	2
p_k	0.3	0.6	0.1

(1) 求 Z 的期望与方差.

(2) 该学院至少需有多少积分才能保证有 99% 的概率获得 *100* 件校服？

附标准正态分布表：

x	2.32	2.33
$\Phi(x)$	0.9898	0.99

习题 6

某电话交换机有 n 台分机, 在一段时间内每台分机使用外线的概率为 10%. 设各分机独立. 试用中心极限定理求解下列问题:

(1) 若电话交换机有 20 条外线, 问最多可装多少台分机才能以 99.48% 的把握保证使用外线畅通? (注: $\sqrt{214.75} \approx 14.65$)

(2) 若 $n = 200$, 问至少应配备多少条外线, 才能以 95% 的把握保证使用外线畅通?

附标准正态分布表:

x	1.65	2.56
$\Phi(x)$	0.95	0.9948

习题 7

一个旅行社需要组织 *120* 人乘巴士去参观两个博物馆 A 和 B. 从过去的统计资料看, $\frac{2}{3}$ 的人选择 A, 其他人选择 B. 假设每个人的选择是独立的. 记 X_i 为第 i 个人的选择, $i = 1, \cdots, 120$, 若他选择 A 则 $X_i = 1$, 若他选择 B 则 $X_i = 0$.

(1) 旅行社用三辆 *50* 座的巴士实现本次参观, 两辆去博物馆 A, 一辆去 B. 记 $S = \sum_{i=1}^{120} X_i$. 要满足每个人的参观需求, S 应该满足什么条件?

(2) 求满足上述条件的概率. $(\sqrt{15} = 3.87)$

附标准正态分布表:

x	*1.94*	*3.87*
$\Phi(x)$	*0.9738*	*0.9999*

习题 8

一位老师每一天乘公交车上班, 如果每天上班的等车时间服从均值为 5 分钟的指数分布, 求他在 300 个工作日中用于上班的等车时间之和大于 24 小时的概率.

附标准正态分布表:

x	0.69
$\Phi(x)$	0.7549