第三部分 代数结构

代数结构的特点

⑴ 采用集合论的记号。

⑵ 对运算及其运算规律的重视。可以说我们主要是研究代数系中的运算规律和性质，至于运算对象究竟是什么，有些什么性质是不管的。

⑶ 使用抽象化和公理化的方法。抽象化表现在：第一，运算对象是抽象的。第二，代数运算是抽象的，而且是用公理化的方法规定的。

学习代数结构的目的？

✧ 任何问题都包含知识的积累和能力的训练两个方面。在数学上能力的训练，比起单纯的知识的积累，要重要的多。

✧ 从具体到抽象是数学发展的一条重要大道。因此，具体的例子往往是抽象概念的源泉，而所用的方法也往往是高深数学里所用的方法的依据。仅仅熟读了抽象的定义和方法，而不知具体来源的数学工作者是没有发展前途的，这样的人要搞深刻研究是可能会遇到无法克服的难关。数学史上也屡见不鲜地刊载着实际中来的问题和方法促进了数学发展的事实。

——华罗庚《数论导引》

第九章 代数系统

① 代数运算的概念

(1) 二元代数运算

设 S≠∅是个集合，函数(映射) $f: S \to S$ 称为 S 上的一个一元代数运算，简称一元运算。

例如：$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$。

设 S≠∅是个集合，函数(映射) $f: S\times S \to S$ 称为 S 上的一个二元代数运算，简称二元运算。

例如：$f:(\mathbb{R}-\{0\})\times(\mathbb{R}-\{0\})\to\mathbb{R}-\{0\},\ f(\langle x,\ y\rangle)=xy\left(\text{或 } \dfrac{x}{y}\right)$。

但$+,-$不是$\mathbb{R}-\{0\}$上的二元运算。

集合的封闭性：给定集合 A，如果对 A 上的元素进行某种运算后，运算结果仍在 A 中，则称 A 对该运算封闭。

(2) 常见的代数运算

(a) $\mathbb{N}$上的乘法，加法是$\mathbb{N}$上的二元运算，但减法，除法不是。

(b) $\mathbb{Z}$上的加法,减法和乘法是$\mathbb{Z}$上的二元运算，但除法不是。

(c) 设$M_n(\mathbb{R})$表示所有n 阶实矩阵的集合，则矩阵加法和乘法是$M_n(\mathbb{R})$上的二元运算。

(d) S为任意集合，$P(S)$为其幂集，则$\cup,\cap,-$是$P(S)$上的二元运算。

(3) 算符

✧ 通常用$*$，$\circ$，$+$，$\times$来表示二元运算，称为算符。

例：设 f 是 A 上的二元运算，即 f 是 A×A→A 的映射，且

$$\forall x, y \in A，f(<x, y>) = z \in A。$$

可用算符$*$表示为

$$x*y = z。$$

例 1： f 是$\mathbb{R}$上的二元运算：$\forall x, y \in \mathbb{R}$，$f(<x, y>) = x$，用算符$*$表示，即 $x*y = x$。计算：$3*4$，$(-5)*0.2$。

(4) 二元运算的性质

- **可交换的运算：** $*$为 S 上的二元运算，对于任意的 x，y $\in$S，都有 $x*y = y*x$。
  - $*$满足交换律。
  - 例如：实数集的加法、逻辑公式集合的合取。

- **可结合的运算：** $*$为 S 上的二元运算，对于任意的 x，y，z $\in$S 都有 $(x*y)*z = x*(y*z)$。
  - $*$满足结合律。
  - 例如：实数集的加法、逻辑公式集合的合取。

- **运算$*$对$\circ$是可分配的：** $\circ$和$*$为 S 上的二元运算， 对于任意的 x，y，z $\in$S 都有

$$x*(y\circ z)=(x*y)\circ(x*z) \quad （左分配律）；$$

$$(y\circ z)*x=(y*x)\circ(z*x) \quad （右分配律）。$$

  - $*$对$\circ$是满足分配律。
  - 例如：实数上的乘法对加法是可分配的。

    集合上的交对并是可分配的。

    逻辑公式上的合取对析取是可分配的。

- **运算$*$和$\circ$满足吸收律：** $\circ$和$*$为 S 上的可交换的二元运算， 对于任意的 x，$y\in$S 都有

$$x*(x\circ y)=x;$$

$$x\circ(x*y)=x。$$

  - 例如：集合上的交和并满足吸收律；

    逻辑公式上的合取和析取满足吸收律。

- **$*$适合幂等律：** $*$为 S 上的二元运算，对于任意的 x $\in$S 都有 $x*x=x$。
  - 例如：集合的并和交适合幂等律。

(5) 集 S 的特殊元

(a)单位元 设$*$是 A 上的二元运算，如果存在 e_l（或 e_r）$\in$A，使得对一切 $x\in$A，均有

$$e_l * x = x\ （或\ x * e_r = x）$$

则称 e_l（e_r）是 A 中关于运算$*$的一个左单位元（右单位元）。

- 若元素 e 既是左单位元，又是右单位元，则称 e 是 A 中关于$*$的一个单位元。
- 例如：$\mathbb{N}$上加法的单位元是 0。

  $\mathbb{N}$上乘法的单位元是 1。

  幂集 P(A)上的$\cup$运算，$\varnothing$是单位元；$\cap$运算，A 是单位元。

例 2： 实数集$\mathbb{R}$上定义运算

$$\forall a, b\in\mathbb{R}，a*b = a。$$

则不存在 e_l，使得$\forall b\in\mathbb{R}$，$e_l*b = b$。$\therefore$该代数系统不存在左单位元。而对一切 $a\in\mathbb{R}$，$\forall b\in\mathbb{R}$，有 $b*a = b$。于是$\mathbb{R}$中的每一个元素 a 都是右单位元。从而没有单位元。

定理 1： 若 e_l 和 e_r 分别是 S 上对于$*$的左单位元和右单位元，那么 $e_l = e_r = e$，且这个元素 e 就是唯一的单位元。

(b) 零元 $*$是 A 上的二元运算，如果存在元素θ_l（或θ_r）$\in$A，使得对一切 $x\in$A，均有

$$\theta_l * x = \theta_l\ （或\ x * \theta_r = \theta_r）$$

则称θ_l（θ_r）是 A 中关于运算*的一个左零元（右零元）。

若元素θ既是左零元，又是右零元，则称θ是 A 中关于运算*的一个零元。

注 1： 零元θ不一定是 0！

例如：实数集合ℝ上, 对×运算而言, 0 是零元。

P(A)上，对∪运算 A 是零元；对∩运算∅是零元。

命题上，对∨运算 T 是零元;对∧运算 F 是零元。

例 3： 实数集$\mathbb{R}-\{0\}$上定义运算

$$\forall a, b\in\mathbb{R}，a*b=a。$$

则对一切 $a\in\mathbb{R}$，$\forall b\in\mathbb{R}$，$a*b=a$。于是ℝ中的每一个元素 a 都是左零元。

而不存在 $a\in\mathbb{R}$，$\forall b\in\mathbb{R}$，有 $b*a=a$。于是ℝ中没有右零元。从而没有零元。

定理 2： 若θ_l和θ_r分别是 S 上对于*的左零元和右零元, 那么$\theta_l=\theta_r$, 且这个元素就是零元。而且零元是唯一的。

定理 3： 设*为 S 上的二元运算, e 和θ分别为*运算的单位元和零元, 如果 S 至少有两个元素，则 $e\neq\theta$。

(c) 逆元 设$*$是集合 A 上的二元运算，$e \in A$ 是运算$*$的单位元，对于$\forall x \in A$，如果存在一个元素 y_l （或 y_r）$\in A$，使得

$$y_l * x = e\,(\text{或 } x * y_r = e)$$

则称 y_l （或 y_r） 是 x 的左逆元 （或右逆元）。

- 若元素 y 既是 x 的左零元，又是右零元，则称 y 是 A 中 x 关于运算$*$的一个逆元，记为 x^{-1}。
- 如果 x 的逆元存在，则称 x 是可逆的。
- 例如： $\mathbb{N}$上关于加法的只有 0 有逆元 0。

  $\mathbb{N}$上关于乘法没有逆元。

  $\mathbb{Z}$上关于加法，$x \in \mathbb{Z}$的逆元是$-x$。

定理 4: 设$*$为 S 上的可交换的二元运算，e 为$*$的单位元。对于某个 $x \in S$, 如果存在左, 右逆元 y_l 和 y_r，则有

$$y_l = y_r = y,$$

其中 y 是 x 关于运算$*$的唯一逆元。

(d) 幂等元 设$*$为 S 上的二元运算，$x \in S$。如有

$$x * x = x,$$

则称 x 为 S 中关于运算$*$的幂等元。

- 0 是加法的幂等元。
- 0 和 1 是乘法的幂等元。

例 4： 设 S＝$\{a, b, c\}$，S 上的二元运算 $*$，$\circ$ 由下表定义。讨论 S 在运算 $*$，$\circ$ 下的零元，单位元及各个元素的逆元情况。

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

② 代数系统

设 S 是非空集合，由 S 和 S 上 k 干个运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 构成的系统，称为代数系统,简称为代数，记作

$$< S, f_1, f_2, \cdots, f_k >。$$

- 例如，$\mathbb{R}$是实数集，对于普通的加法和乘法运算

  $$<\mathbb{R}, +>,\quad <\mathbb{R}, \times>,\quad <\mathbb{R}, +, \times>$$

  都是代数系统。

- 常见代数系统：

  $<\mathbb{N}, +>$，$<\mathbb{Z}, +, \times>$，$<M_n(R), +, \cdot>$，$<P(S), \cup, \cap, \sim>$。

✧ 特异元素（代数常数）

- 二元运算中的单位元与零元。
- $<\mathbb{Z}, +>$中的+运算的单位元 0。

■ $<P(S), \cup, \cap, \sim>$中$\cup$和$\cap$运算的单位元$\varnothing$和 S。

✧ 同类型的代数系统：

两个代数系统中有相同个数的运算和代数常数，且对应运算的元数相同。

例如：$V_1 = <\mathbb{R}, +, \times, -, 0, 1>$，$V_2 = <P(S), \cup, \cap, \sim, \varnothing, S>$是同类型的代数系统，它们都含有两个二元运算，一个一元运算和两个代数常数。但它们的运算性质却很不一样。比如，V_1 中的运算$+$，$\times$不满足吸收律，V_2 中的运算$\cup, \cap$都满足吸收律。

③ 同态与同构

❑ 动机：

- ❖ 不同代数系统可能类型相同
- ❖ 更进一步，可能有共同的运算性质
- ❖ 有些系统在结构上相似或相同

❑ 同态和同构

- ❖ 讨论代数系统的相似或相同的关系

定义： 设 $V_1 = <A, *>$ 和 $V_2 = <B, \circ>$ 是代数系统，$f: A \to B$。如果 f 保持运算，即对 $\forall x, y \in A$，有

$$f(x*y) = f(x) \circ f(y)。$$

则称 f 为代数系统 $<A,*>$ 到 $<B,\circ>$的同态映射，简称同态。也称之为两代数系统同态。记为 $V_1 \sim V_2$ 。

例如：$<\mathbb{R}^+, \times> \sim <\mathbb{R},+>$。

同态的性质：

设 $V_1=<A,*>$ 和 $V_2=<B,\circ>$ 是代数系统，f 是 A 到 B 的同态。

- 如果 f 是单射的，称 f 为单同态；
- 如果 f 是满射的，称 f 为满同态；
- 如果 f 是双射的，称 f 为同构映射，简称为同构；
- 如果 $V_1=V_2$，称 f 为 V_1 的自同态。

例 5： $<\mathbb{R},+>$，$<\mathbb{R},\times>$ 是两个代数系统，f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且$\forall x\in \mathbb{R}$，有

$$f(x)=2^x。$$

验证: f 是$<\mathbb{R},+>$到$<\mathbb{R},\times>$的同态，并且是单同态。