应用随机过程

各态遍历马链及极限概率

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

各态遍历及极限概率

各态遍历 极限概率

1

称一个不可约的马链为各态遍历的马尔可夫链，若状态空间中的各状态是正常返的，并且是非周期的。

2

对于一个不可约的马链，若 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 存在，定义极限概率为

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

3

极限概率 $\{\pi_j\}$ 是以下方程组的唯一非负解：

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_k p_{kj} \quad j = 0,1\cdots, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi e = 1 \end{cases}$$

极限概率与平均返回时间

对一个非周期的状态j，其平均返回时间为$\mu_{jj}=E[T_{jj}]$，而且根据定理$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_{jj}}=\pi_j$，因此我们可以通过极限概率来判断状态的正常返和零常返。

$$\begin{cases}\text{状态}j\text{正常返，若}\mu_{jj}<\infty \\ \text{状态}j\text{零常返，若}\mu_{jj}\to\infty\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\text{状态}j\text{正常返，若}\pi_j>0 \\ \text{状态}j\text{零常返，若}\pi_j=0\end{cases}$$

例(有限状态空间稳态的求解)

考虑具有如下转移矩阵的马尔可夫链，其状态空间为{0,1,2}，求该马链的极限概率。

$$P=\begin{bmatrix}0.45 & 0.48 & 0.07\\ 0.05 & 0.70 & 0.25\\ 0.01 & 0.5 & 0.49\end{bmatrix}$$

解：该马链是各态遍历的，故存在极限概率

写出平衡方程$\begin{cases}\pi=\pi P\\ \pi e=1\end{cases}$对应的方程组

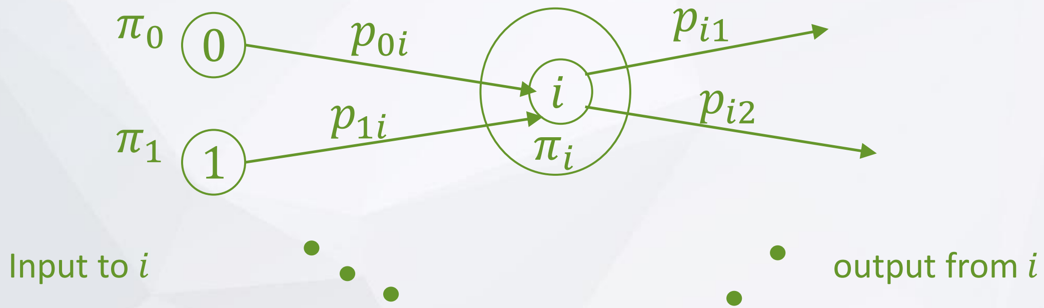
$$\begin{cases}\pi_0=0.45\pi_0+0.05\pi_1+0.01\pi_2\\ \pi_1=0.48\pi_0+0.70\pi_1+0.5\pi_2\\ \pi_2=0.07\pi_0+0.25\pi_1+0.49\pi_2\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

求解方程得到稳定分布$\begin{cases}\pi_0=0.07\\ \pi_1=0.62\\ \pi_2=0.31\end{cases}$

用网络理论来理解马链

- 平衡方程$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$可以理解为从其他状态转移到状态$j$的比率
- 注意到$\pi_j = \pi_j \sum_i p_{ji} = \sum_i \pi_j p_{ji}$可以理解为从状态$j$转移出去的比率

也就是说，在稳定状态时，这两个比率相等。在网络理论的概念里，即对每一个节点，总输入应该等于总输出。如图所示



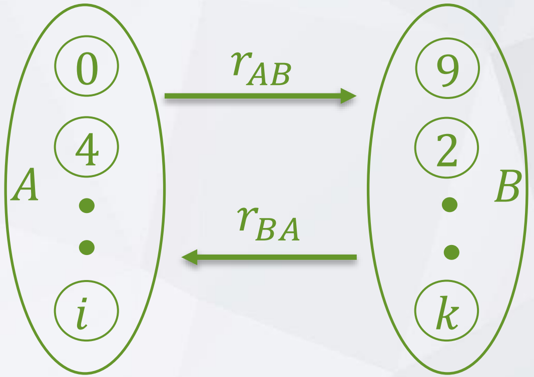
用网络理论来理解马链

如果将状态空间S划分为两个集合A和B，满足$A \cup B = S$且$A \cap B = \emptyset$。r_{AB}表示从A到B的全部转移概率，则在稳定状态时，有$r_{AB} = r_{BA}$。

$$r_{AB} = \sum_{i\in A} \pi_i \sum_{j\in B} p_{ij} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in B} \pi_i p_{ij}$$

$$r_{AB} = \sum_{i\in B} \pi_j \sum_{i\in A} p_{ji} = \sum_{j\in B}\sum_{i\in A} \pi_j p_{ji}$$

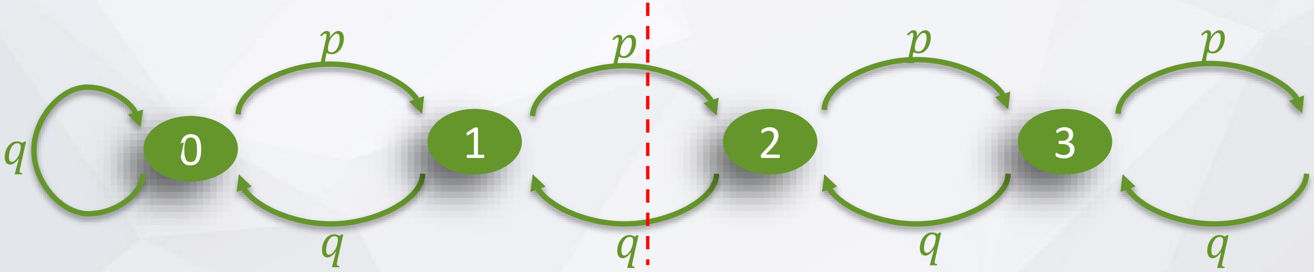
$$\boxed{\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} \pi_i p_{ij} = \sum_{j\in B}\sum_{i\in A} \pi_j p_{ji} \qquad (1)}$$



无限状态空间极限概率)

（带有反射壁的随机游走）考虑具有如下转移矩阵的马尔可夫链，其状态空间为$\{0,1,\cdots\}$，其中$p>0,q>0,q>p,p+q=1$。下图展示了转移概率矩阵及马链图，求该马链的极限概率。

$$
\begin{bmatrix}
q & p & 0 & . & . & . \\
q & 0 & p & 0 & . & . \\
0 & q & 0 & p & . & . \\
0 & 0 & q & 0 & p & . \\
 & & & . & . & . \\
 & & & & . & .
\end{bmatrix}
$$



无限状态空间极限概率

解：由转移图可以看出所有状态都是互通的，因此该马链是不可约的。

又$p_{00}=q>0$，则$d(0)=1$，故而该链是非周期的，进而存在稳态。

我们在任意两个相邻状态之间做划分，利用平衡方程(1) 可得

$$p\pi_i=q\pi_{i+1}\,, i\geq 0$$

将所有的π_i用π_0来表示，可以得到

$$\pi_i=\left(\frac{p}{q}\right)^i\pi_0\,, i\geq 0$$

利用等式$\pi e=1$，容易得到

$$\pi_0\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i=1$$

$$\pi_0=(q-p)/q$$

由以上的递归公式，我们得到该马链的极限概率$\{\pi_j\}$。

思考问题

对于以上随机游走的例题，如果设定$p > q$，这时它还存在极限概率吗? 在这个条件下，这个随机游走的马链是什么样的马链，例如还是不是各态遍历的马链?

如果我们设定$p = q$，那它又是什么样的马链?

谢谢听课

授课教师

赵毅