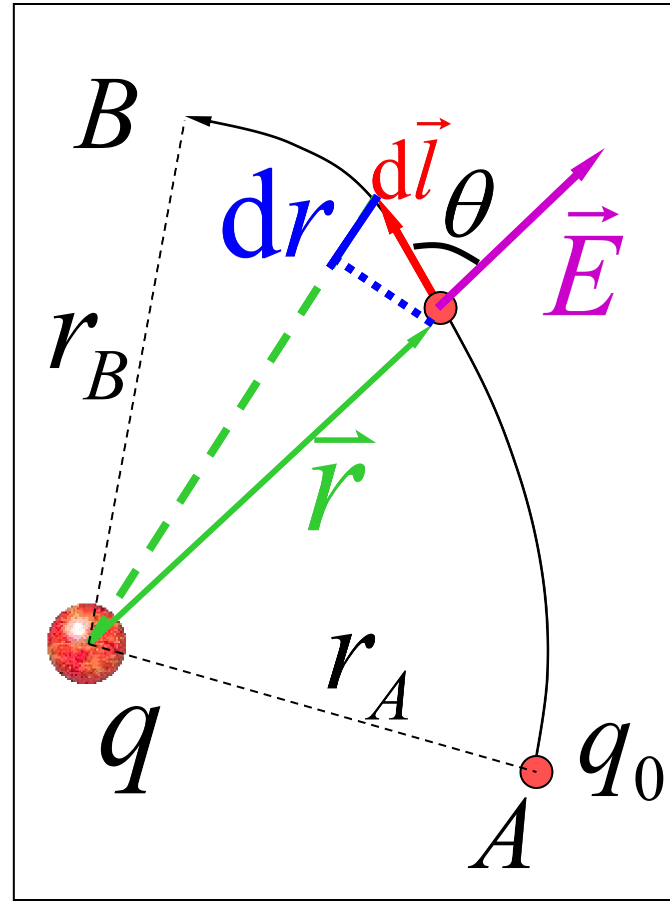
§ 4 电势

一、静电场力所做的功

1. 点电荷的电场



$$\mathrm{d}A = q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l \cos\theta = \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}A = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$A = \int_A^B \mathrm{d}A = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

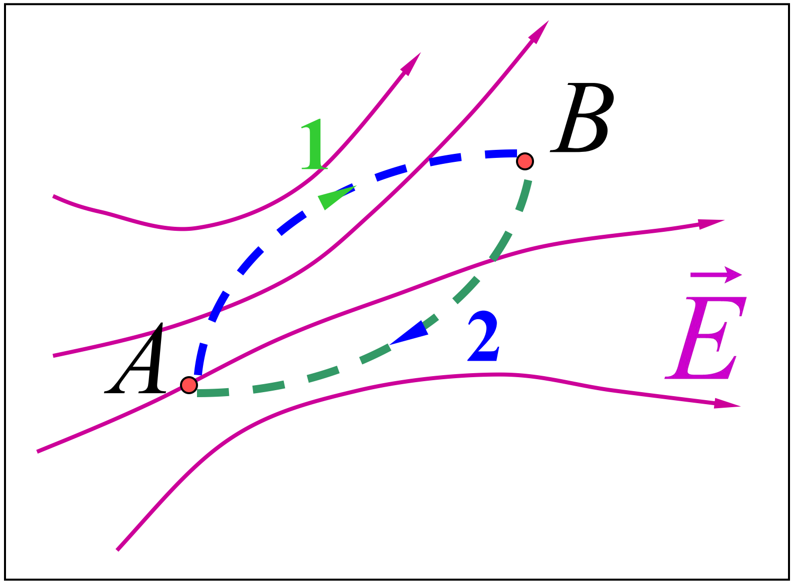
—— A 仅与 q_0 的始末位置有关，与路径无关。

2. 任意电荷的电场（视为点电荷的集合）

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \qquad A=q_0\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i q_0\int \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

结论：静电场力做功与路径无关。

二、静电场的环路定理



$$q_0\int_{A1B}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q_0\int_{A2B}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

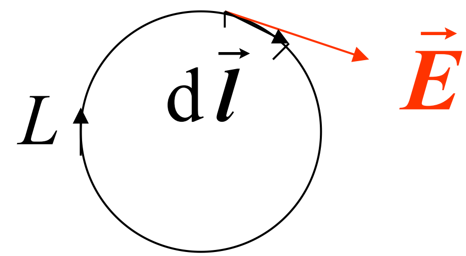
$$q_0\left(\int_{A1B}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{B2A}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)=0$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$ ⇒ 静电场是保守场

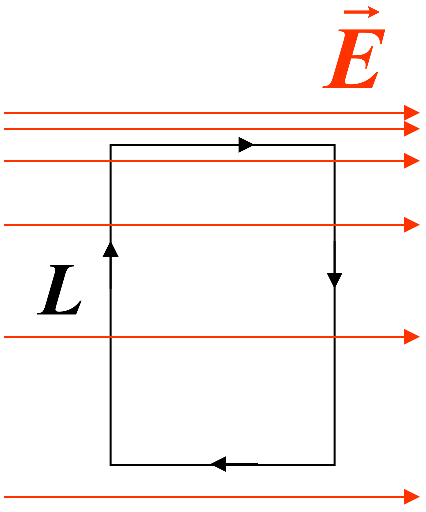
利用环路定理可以分析一些问题：

例1. 电场线闭合的电场肯定不是静电场。

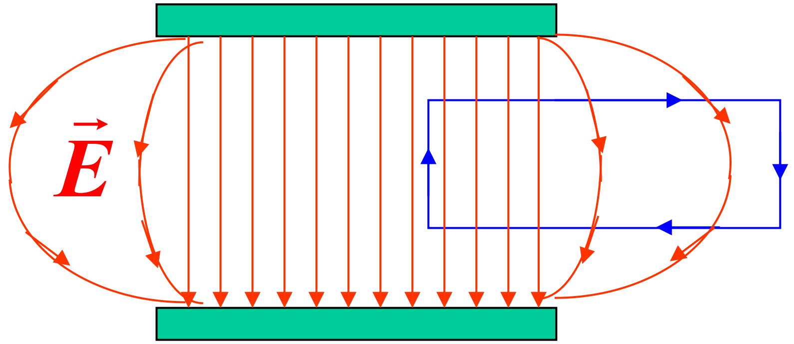
因为 $\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$

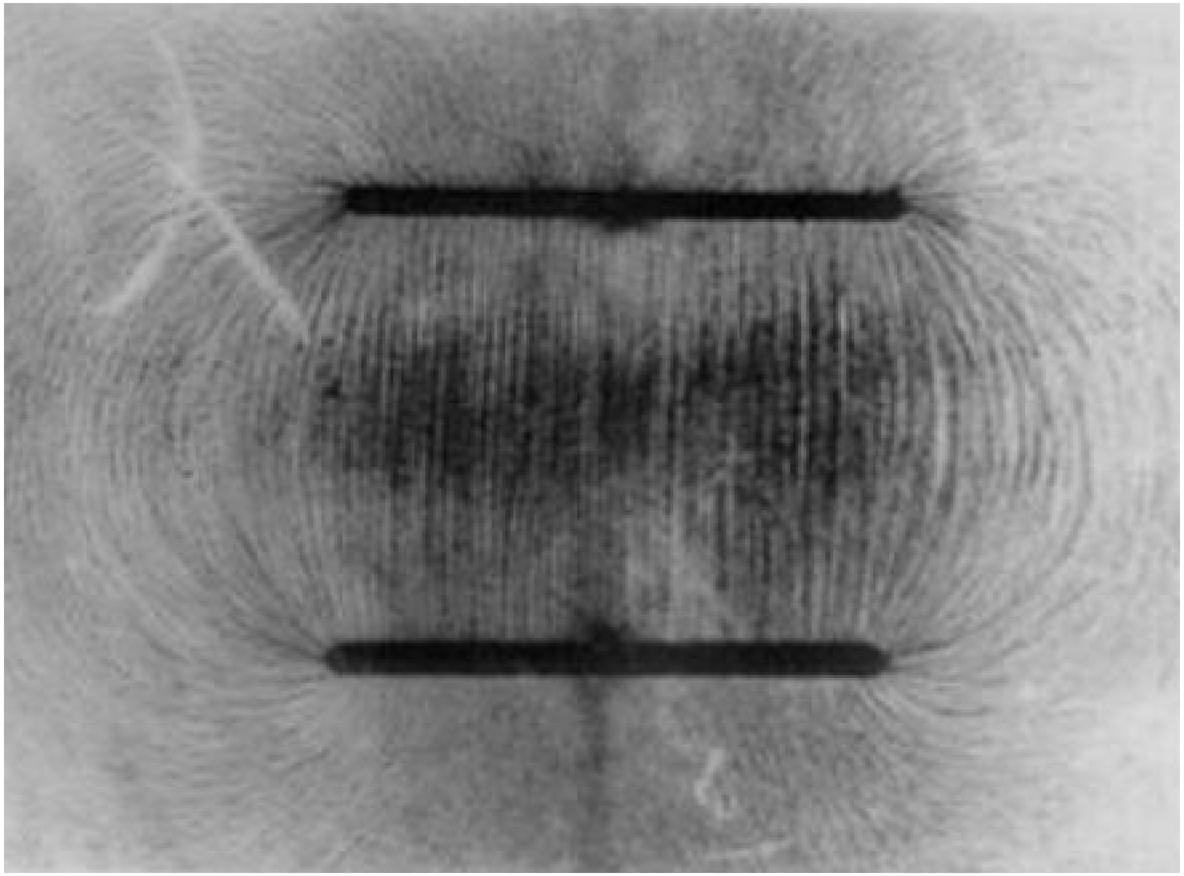


例2. 电场线为一系列不均匀平行直线的静电场是不存在的。



例3. 平行板电容器必有边缘效应。





三、电势能

静电场是保守场，静电场力是保守力。静电场力所做的功应该等于电荷电势能增量的负值。

$$A_{AB}=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-(W_B-W_A)=-\Delta W$$

令 $W_{B\to\infty}=0$ 则 $W_A=\int_A^\infty q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

电势能零点

试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功。

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的。

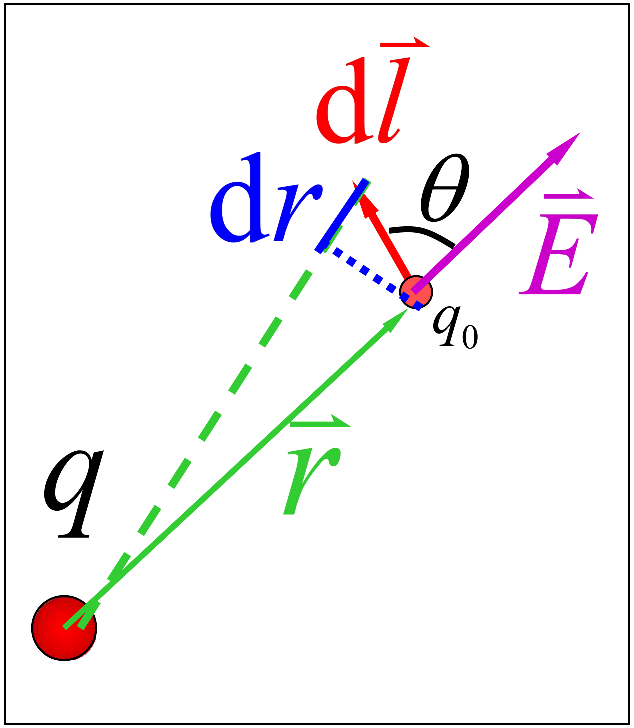
**点电荷电场中试验电荷的电势能

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

令 $W_\infty = 0$

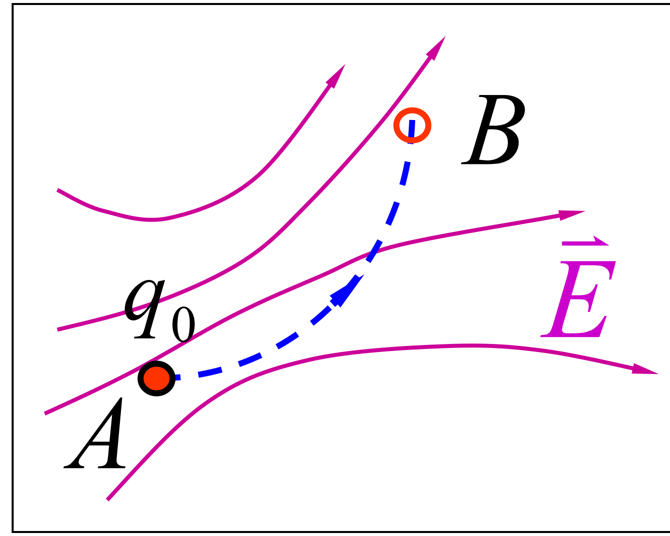
$$W=\int_r^\infty \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_r^\infty \frac{q_0 q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$\boxed{W=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

四、电势



$$\int_A^B q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(W_B - W_A)$$

$$W_A = \int_A^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad (W_{B\to\infty} = 0)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\left(\frac{W_B}{q_0} - \frac{W_A}{q_0}\right)$$ ——此积分大小与 q_0无关

定义电势： $\boxed{U = \dfrac{W}{q_0}}$

则：$U_A = \dfrac{W_A}{q_0}$ $\quad U_B = \dfrac{W_B}{q_0}$

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ （U_B为参考电势，其值任选）

说明：

（1）单位：V（伏特）； $1V=\dfrac{1J}{1C}$

（2）**电势零点的选择：**有限带电体以无穷远为电势零点。（实际问题中常常选择地球为零电势体）

令 $U_{B\to\infty}=0$ 则 $U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

（3）**电势的物理意义：**把单位正试验电荷从点 A 移到无穷远时，静电场力所作的功。

（4）**静电场力的功** $A_{AB}=q_0\left(U_A-U_B\right)$

五、电势差

$$U_{AB}=U_A-U_B=\int_A^B\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

——将单位正电荷从 A 移到 B 静电场力所做的功。

- 电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；
- 电势大小是相对的，与电势零点的选择有关。

几种常见的电势差（V）

生物电	10^{-3}	家用电器	110或220
普通干电池	1.5	高压输电线	已达5.5×10^5
汽车电源	12	闪电	10^8–10^9

六、电势的计算

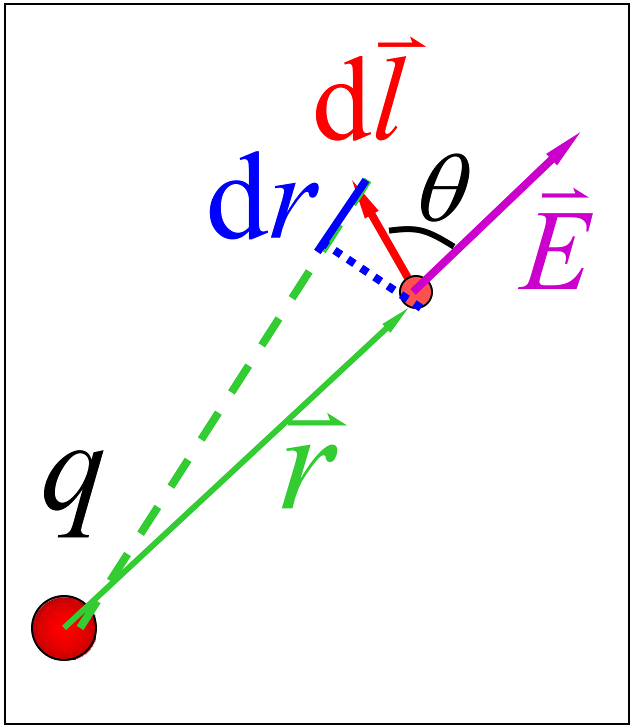
1. 点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

令 $U_\infty = 0$

$$U=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2}$$

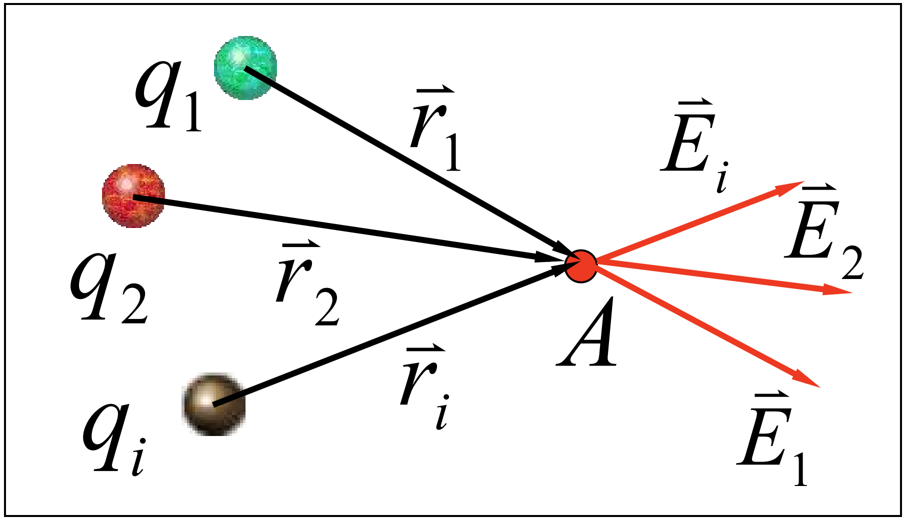


$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

——球对称性

2. 电势的叠加原理

点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$



$$U_A=\int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_A^\infty \sum_i \vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_i \int_A^\infty \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_i U_i$$

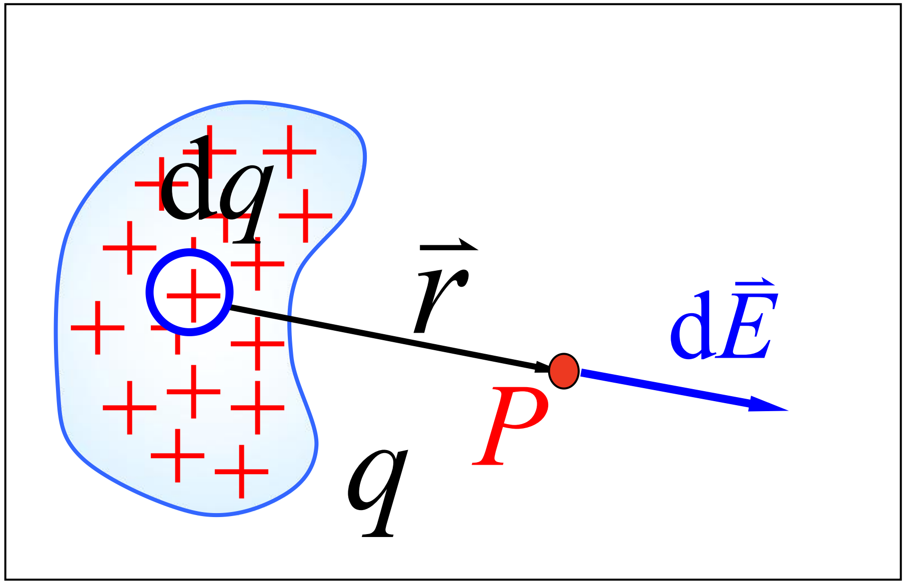
对于点电荷—— $\boxed{U_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

对于点电荷系—— $\boxed{U_A=\sum_i U_{iA}=\sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

3. 连续分布电荷的电势

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_P=\int \mathrm{d}U=\int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



求电势的方法

- 利用 $U_P=\int \mathrm{d}U=\int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

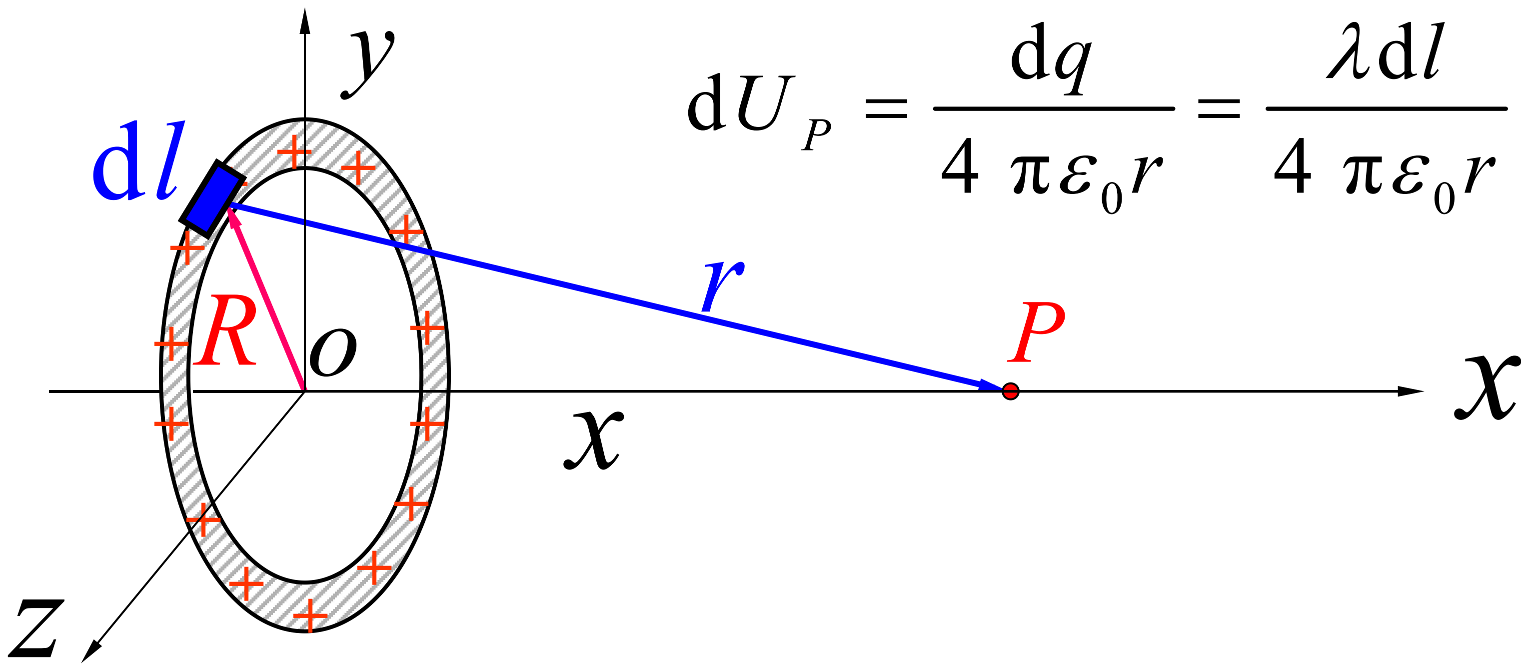
  ——这一结果已选无限远处为电势零点。

- 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

  则 $U_A=\int_A^{U=0\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

例1 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上。 求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势。

解： $\lambda = q / 2\pi R$ $\qquad$ $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \dfrac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$



$$\mathrm{d}U_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

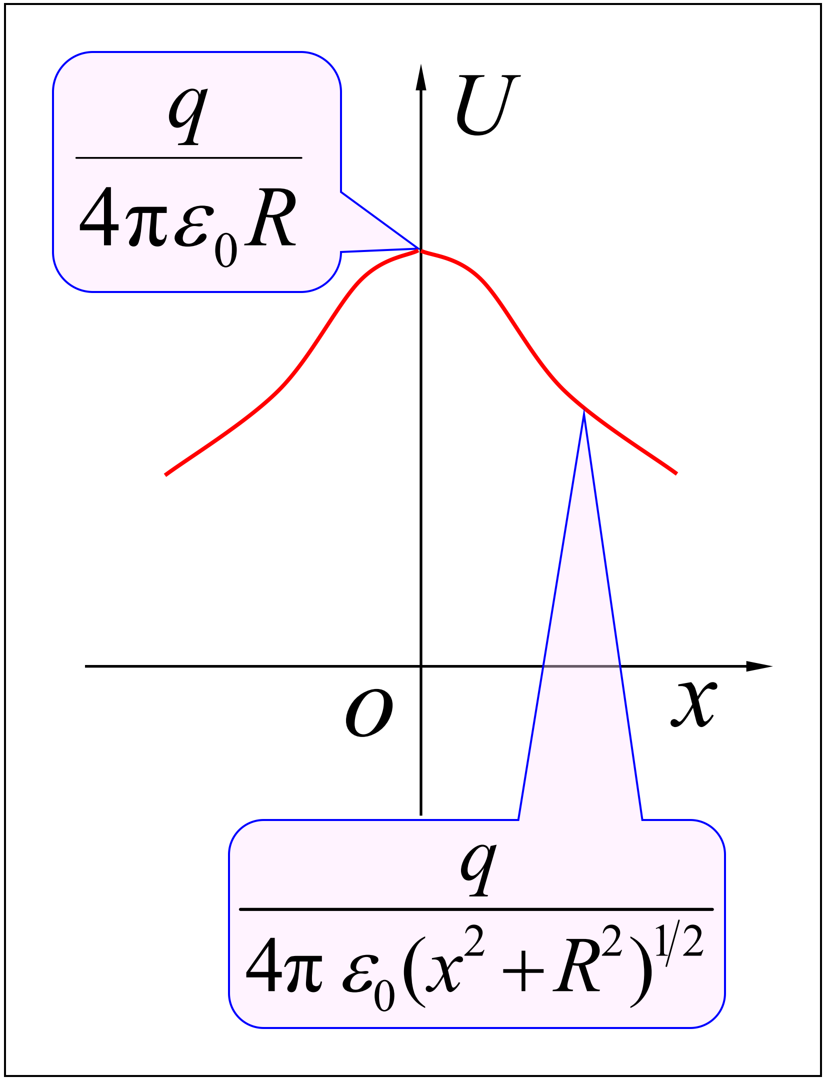
$$U_P = \int_{(q)} \mathrm{d}U_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + R^2}}$$

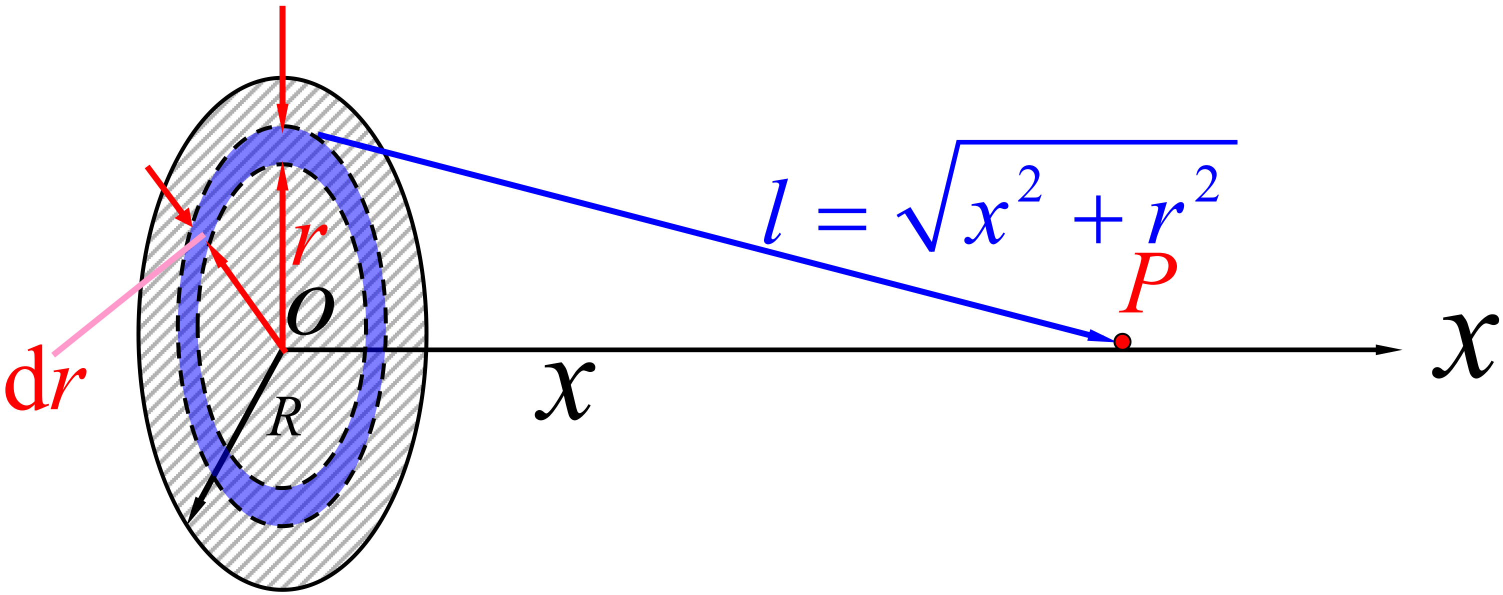
讨 论:

若 $x = 0$, $U_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

若 $x >> R$, $U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$



例2 求均匀带电薄圆盘轴线上的电势。



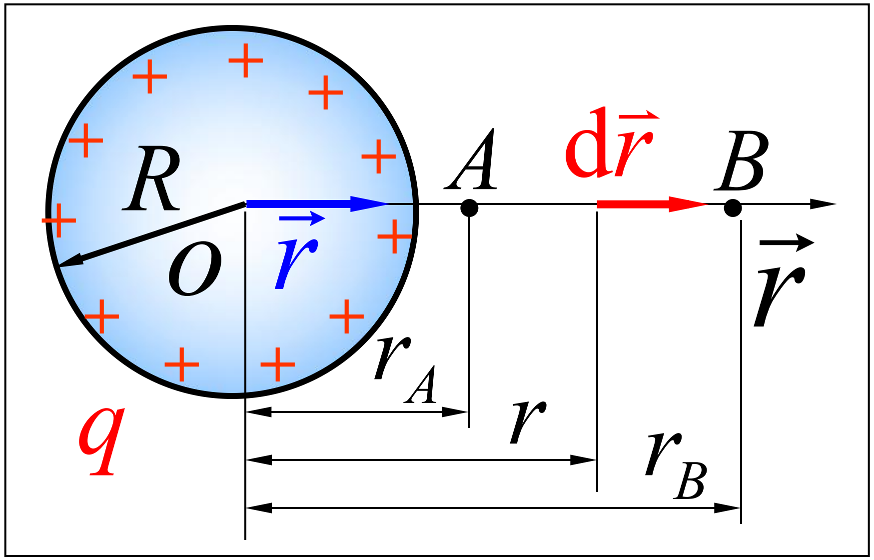
解： $\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$ $\quad$ $\mathrm{d}U=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 l}=\dfrac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$

$$U_P=\int_{(q)}\mathrm{d}U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$$

$x>>R$ $\quad$ $\sqrt{x^2+R^2}\approx x+\dfrac{R^2}{2x}$ $\quad$ $U\approx\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

例3 真空中，有一带均匀带电球壳，带电量为 q ，半径为R。试求（1）球壳外任意点的电势；（2）球壳内任意点的电势；（3）球壳外两点间的电势差；（4）球壳内两点间的电势差。

解：



$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

（1） $r > R$ 时

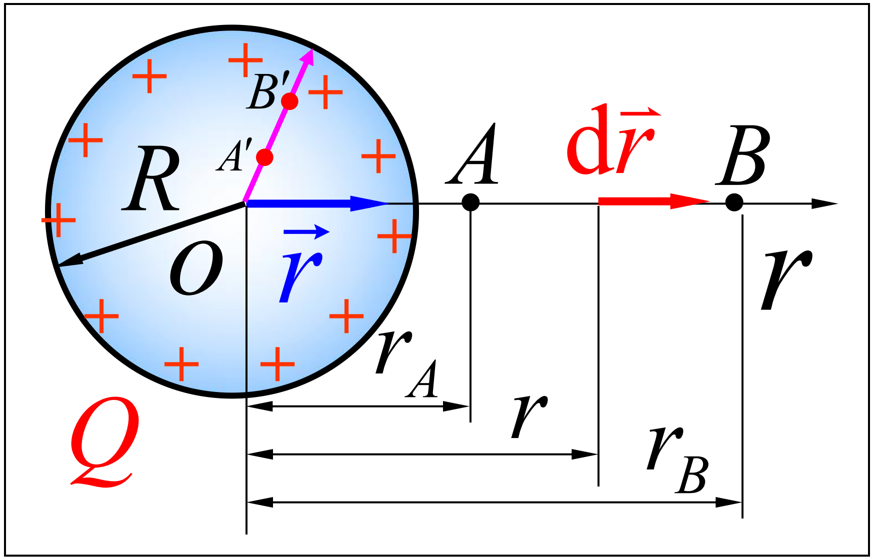
$$U_{外}(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty} \frac{1}{r^2}\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）$r < R$ 时

$$U_{内}(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（3）$r > R$



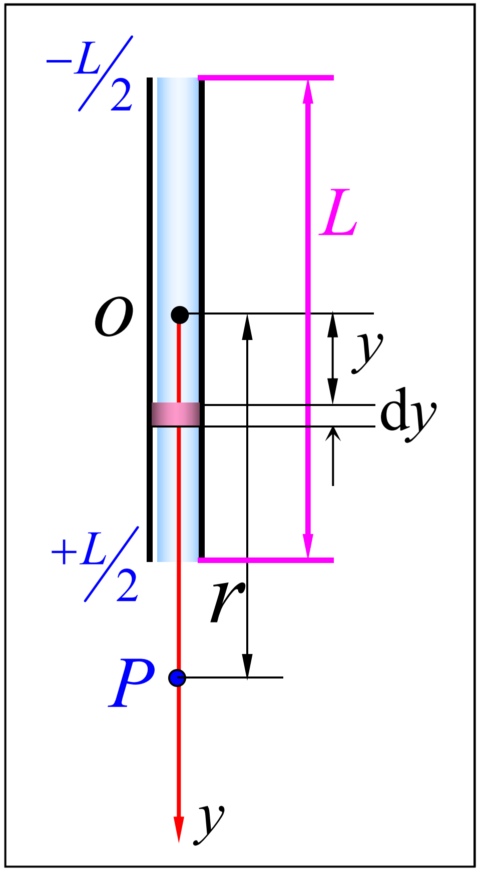
$$U_A - U_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

（4）$r < R$ $\quad U_{A'} - U_{B'} = \int_{r_{A'}}^{r_{B'}} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

例4 求长为 L 的均匀带电 q 直线延长上一点 P 的电势。



解： $\lambda = \dfrac{q}{L} \qquad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}y$

令 $U_\infty = 0$

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)} = \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}y}{r-y} \qquad = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r+\dfrac{L}{2}}{r-\dfrac{L}{2}}$$

§ 5 电场强度与电势的微分关系

1. 等势面

空间电势相等点的集合所成曲面称为等势面。为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等。

- 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力做功；

$$A_{ab}=q_0(U_a-U_b)=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

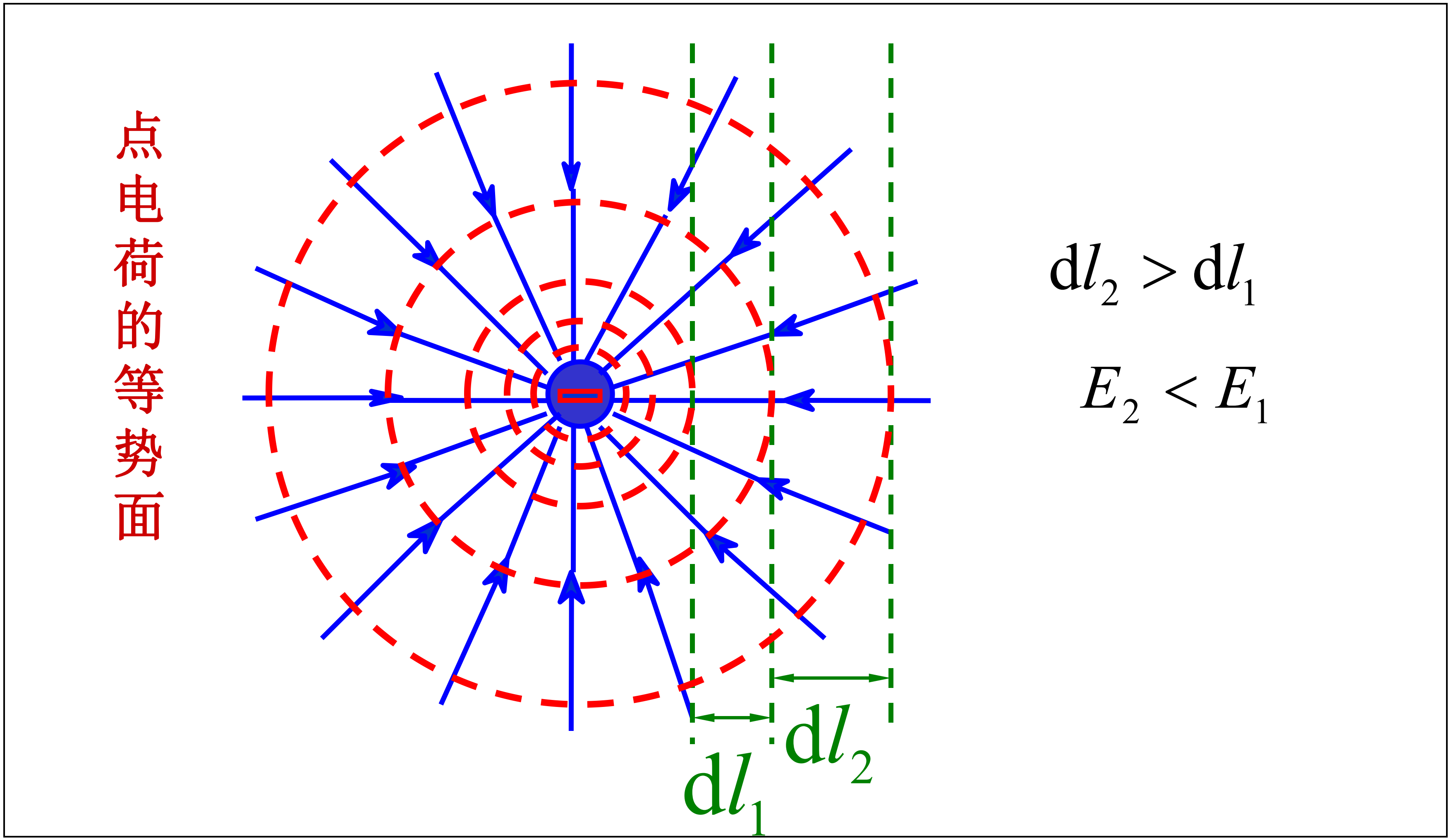
- 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇；

$$A_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

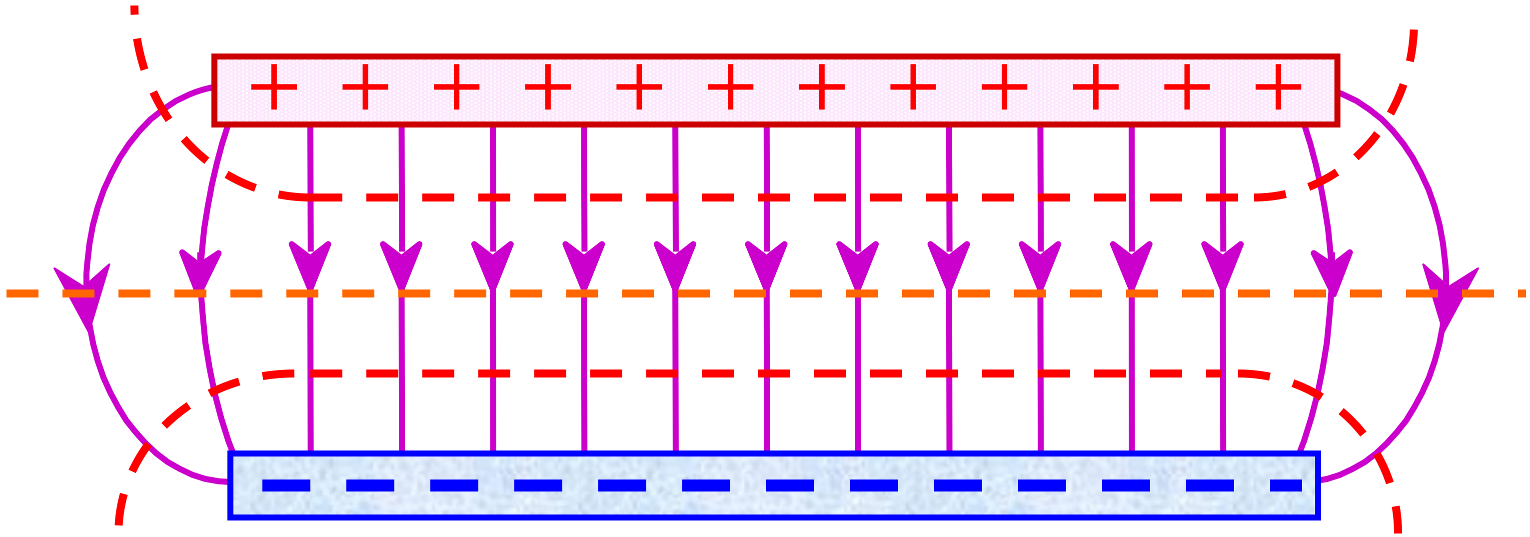
$$\because q_0\neq 0,\quad \vec{E}\neq 0,\quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

$$\boxed{\therefore\quad \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{l}}$$

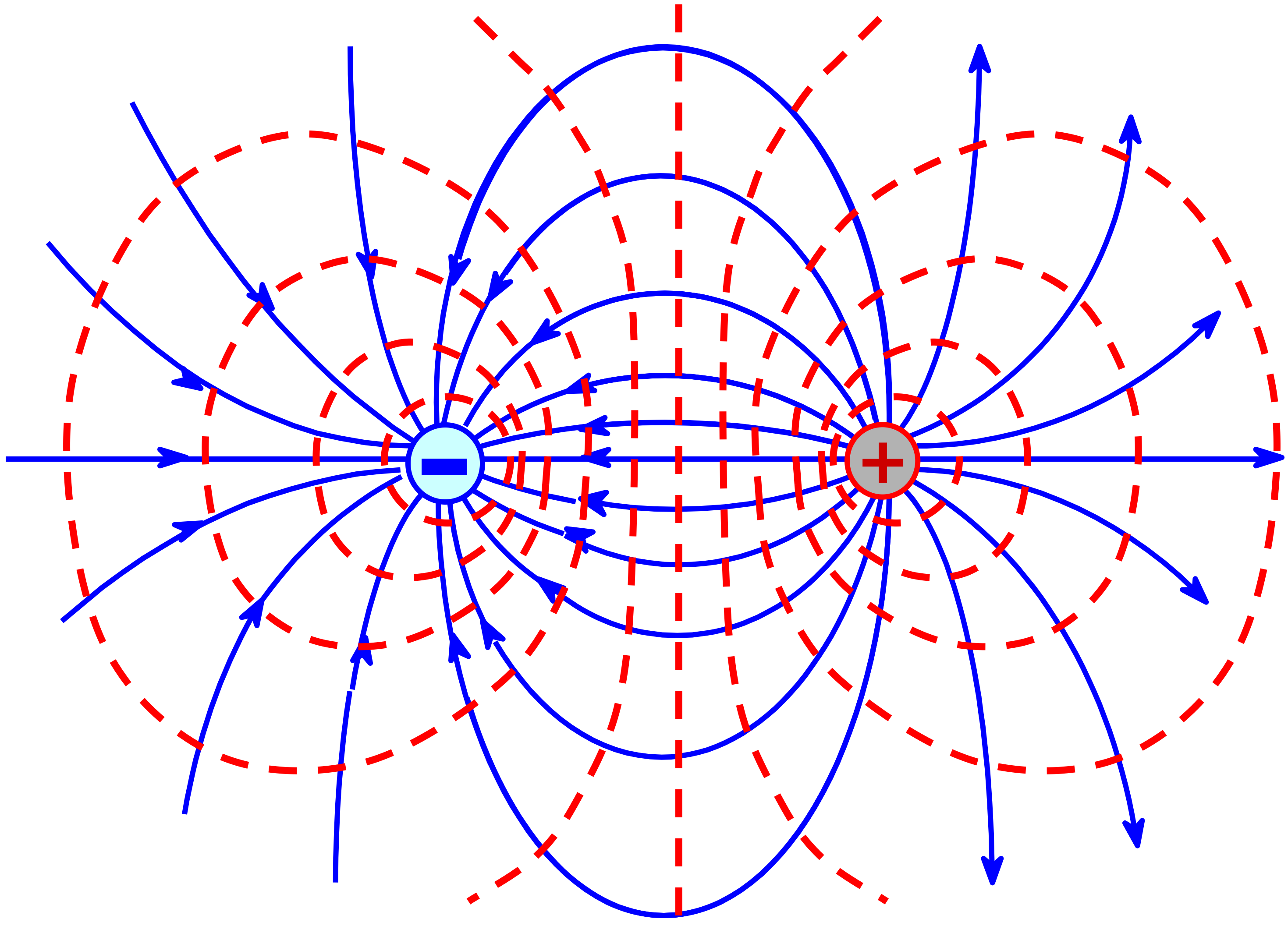
- 规定：电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小。



两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



2. 电场强度与电势的微分关系

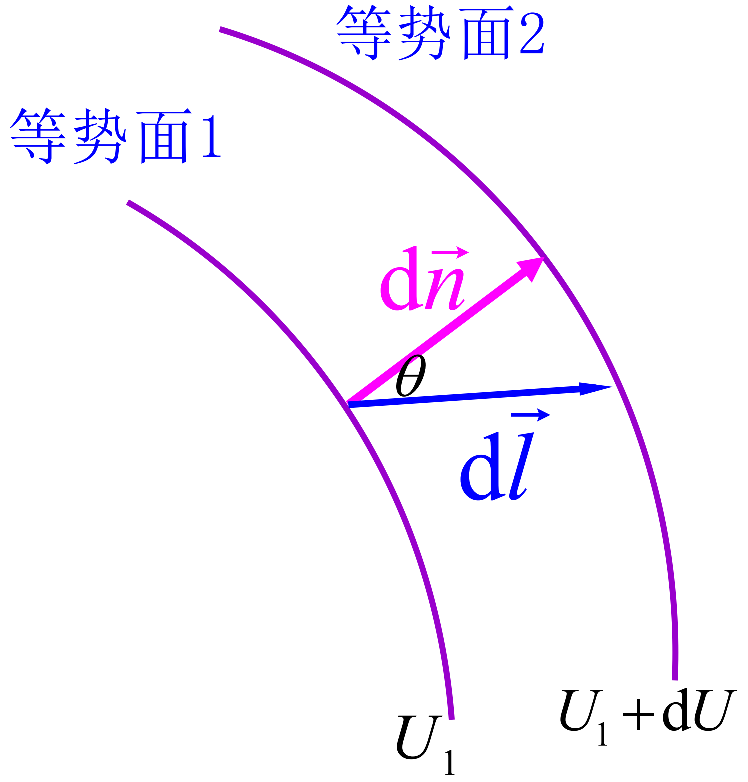
$d\vec{n}$ 的正向为电势增加的方向。

$$\because U_1-(U_1+dU)=\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\because (U_1+dU)-U_1=-\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=-E\,\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}U=-E\,\mathrm{d}l\cos\theta=-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

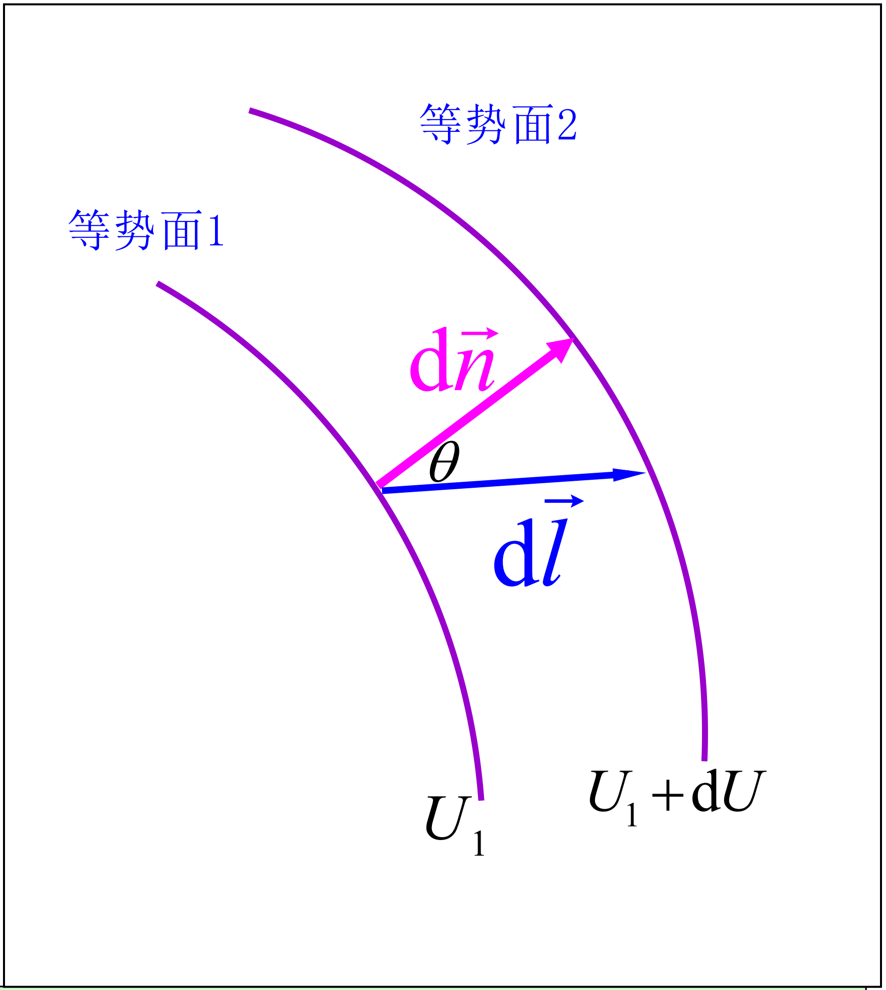


$$\therefore \mathrm{d}U = -E\,\mathrm{d}l\cos\theta = -\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\because \mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}n$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -E\,\mathrm{d}n$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$



即：$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0$$

或：$$\vec{E} = -\nabla U$$

——静电场中某点的电场强度等于该点的电势梯度的负值。

说明：

（1）空间某点电场强度的大小取决于该点邻域内电势 U 的空间变化率。

（2）电场强度的方向恒指向电势减小的方向。

- 直角坐标系中

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,U$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

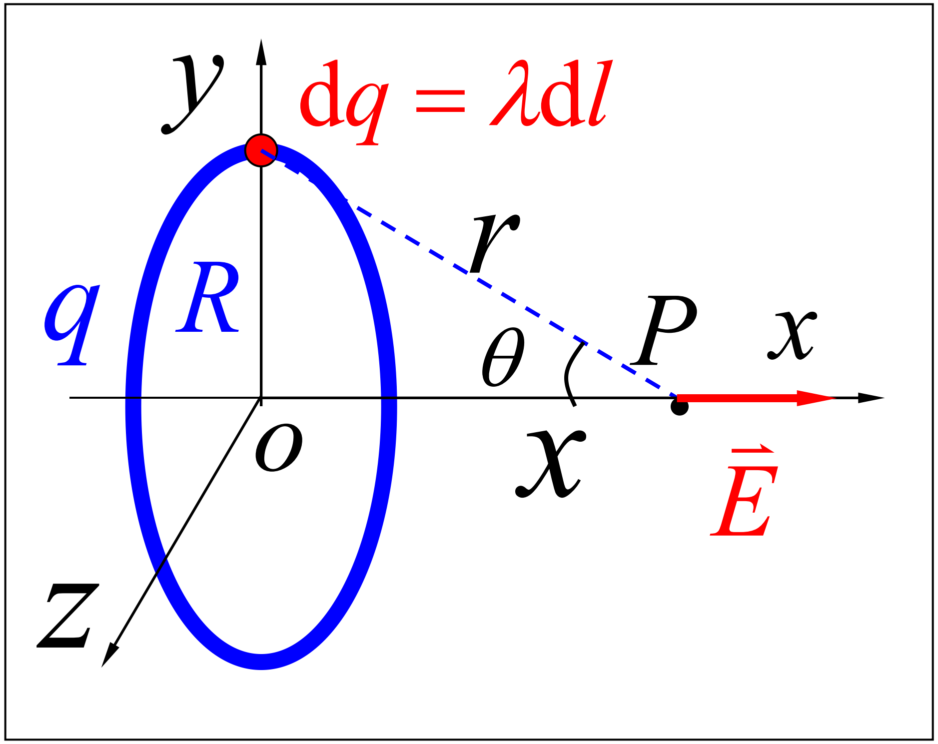
（3）电场线与等势面处处正交。

（即：在等势面上移动电荷，电场力不做功。）

（4）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小。

$$\text{求 } \vec{E} \text{ 的三种方法}\begin{cases}\text{利用微元叠加方法；}\\ \text{利用高斯定理；}\\ \text{利用电势与电场强度的关系。}\end{cases}$$

例： 求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度。



解： $\vec{E}=-\nabla U$

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

$$=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

**补充例题：“无限长”带电直导线的电势.

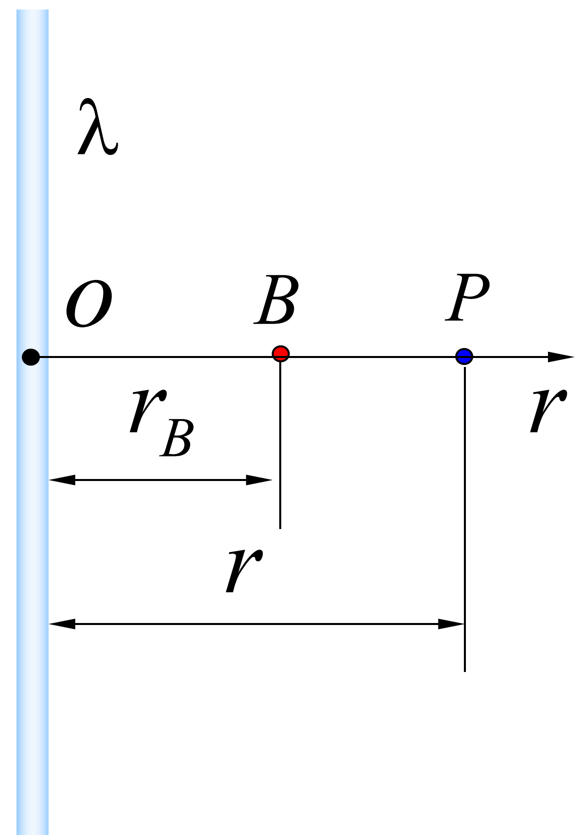
解： 令 $U_B = 0$

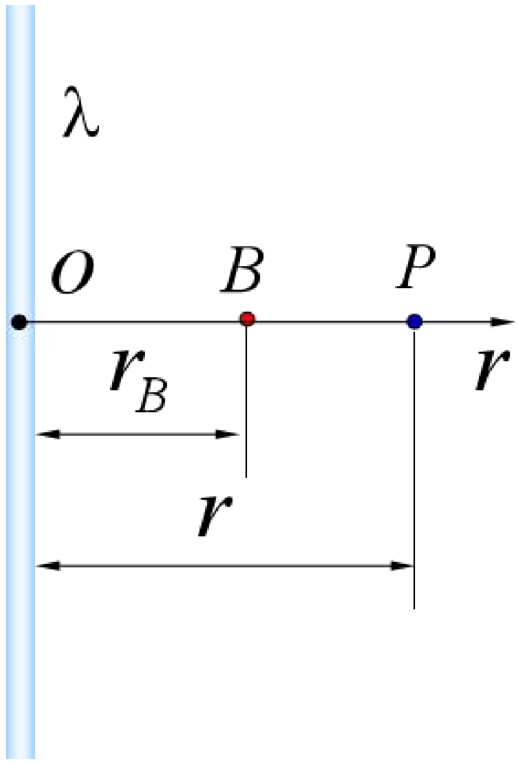
$$U_P = \int_r^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_B}{r}$$

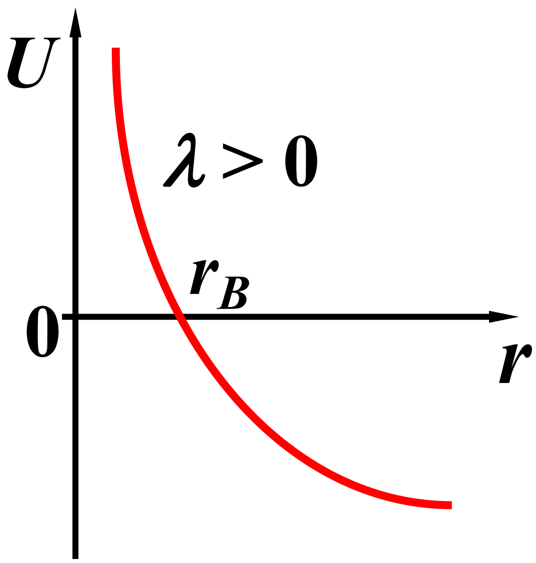
讨论：能否选 $U_\infty = 0$？





$$U=\int_r^{r_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}$$



$r>r_B$ 的点，电势为负，

$r=r_B$ 的点，电势为零，

$r<r_B$ 的点，电势为正。

可以看到，若选无限远为电势零点，会使积分发散。