习题一

1. 将下列复数化简成$x+\mathrm{i}y$的形式。

(1) $(1+2\mathrm{i})^3=(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=(-3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=-11-2\mathrm{i}$。

(2) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\dfrac{n\pi}{4}$。

(3) $$\sqrt{5+12\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(5+12\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left[\ln|5+12\mathrm{i}|+\mathrm{i}\left(\arctan\frac{12}{5}+2k\pi\right)\right]}$$
$$=\sqrt{13}\left[\cos\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{12}{5}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{12}{5}+2k\pi\right)\right],\ k=0,1。$$

(4) $$\sqrt{\mathrm{i}}-\sqrt{-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left[\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)\right]}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]}$$
$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}$$
$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right]+\mathrm{i}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+m\pi\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}+n\pi\right)\right],\ m,n=0,1。$$

2. 求下列复数的实部，虚部，共轭复数，模与辐角

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$； (2) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$； (3) $\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$； (4) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$。

解：(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}\mathrm{i}$。

$$\therefore\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=\frac{3}{13},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right\}=-\frac{2}{13},\quad \overline{\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)}=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}\mathrm{i}。$$

$$\left|\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right|=\left|\frac{3-2\mathrm{i}}{13}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{2}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}。$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{3+2\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{3-2\mathrm{i}}{13}\right)=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots。$$

(2) $\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-i-\frac{1}{2}(-3+3i)=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$ 。

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=-\frac{5}{2},\quad \overline{\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\text{。}$$

$$\left|\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}\text{。}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)=\mathrm{Arg}\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right)=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}$$

(3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=-\frac{7}{2}-13i$ 。

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-\frac{7}{2},\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-13,$$

$$\overline{\left(\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right)}=-\frac{7}{2}+13i\text{。}$$

$$\left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right|=\frac{5\sqrt{29}}{2}\text{。}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right)=\mathrm{Arg}\left(-\frac{7}{2}-13i\right)=\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}$$

(4) $i^8-4i^{21}+i=\left(i^2\right)^4-4\left(i^2\right)^{10}i+i=1-3i$ 。

$$\therefore\quad \mathrm{Re}\left\{i^8-4i^{21}+i\right\}=1,\quad \mathrm{Im}\left\{i^8-4i^{21}+i\right\}=-3,\quad \overline{\left(i^8-4i^{21}+i\right)}=1+3i\text{。}$$

$$\left|i^8-4i^{21}+i\right|=\left|1-3i\right|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}\text{。}$$

$$\mathrm{Arg}\left(i^8-4i^{21}+i\right)=\mathrm{Arg}(1-3i)=-\arctan 3+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}$$

3. 如果等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立，试求实数 x,y 为何值？

解：注意到

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=\frac{[x+1+i(y-3)](5+3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{1}{34}\left[(5x+3y-4)+i(-3x+5y-18)\right]\text{。}$$

我们有

$$\frac{1}{34}\left[(5x+3y-4)+\mathrm{i}(-3x+5y-18)\right]=1+\mathrm{i}\text{。}$$

比较等式两边的实，虚部，得

$$\begin{cases}5x+3y-4=34\\-3x+5y-18=34\end{cases}\text{。}$$

解得 $x=1, y=11$。

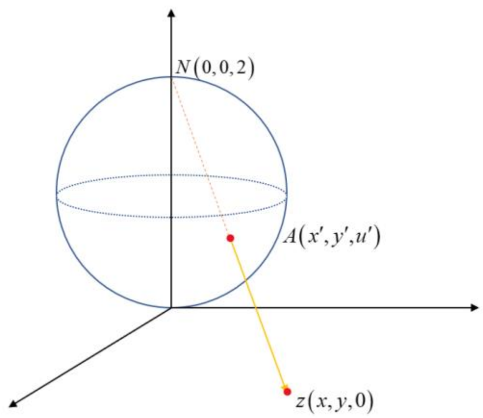
4. 求复平面上的点 $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ 在单位球面上的球极投影点 $A(x',y',u')$ 的坐标，并证明若点列 $\{z_n\}\subset\mathbb{C}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，则 $\{z_n\}$ 的球极投影点列 $\{A_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=(0,0,2)$。

解：因 $\overrightarrow{NA}\parallel\overrightarrow{Nz}$ 且 A 在单位球面上，有

$$\begin{cases}(x',y',u'-2)=t(x,y,-2)\text{；}\\(x')^2+(y')^2+(u'-1)^2=1\text{。}\end{cases}\quad 0<t\le 1\text{。}$$

或

$$\begin{cases}x'=xt\\y'=yt\\u'=2-2t\\(x')^2+(y')^2+(u'-1)^2=1\end{cases}\quad 0<t\le 1\text{。}$$



解得

$$t=\frac{4}{x^2+y^2+4}\text{。}$$

$$x'=\frac{4x}{x^2+y^2+4},\ y'=\frac{4y}{x^2+y^2+4},\ u'=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+4}\text{。}$$

故投影点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2+4},\dfrac{4y}{x^2+y^2+4},\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+4}\right)$。

设点列$\{z_n\}\subset\mathbb{C}$，有$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$。从而，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{4x_n}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(z_n+\overline{z}_n\right)}{|z_n|^2+4}=0;$$

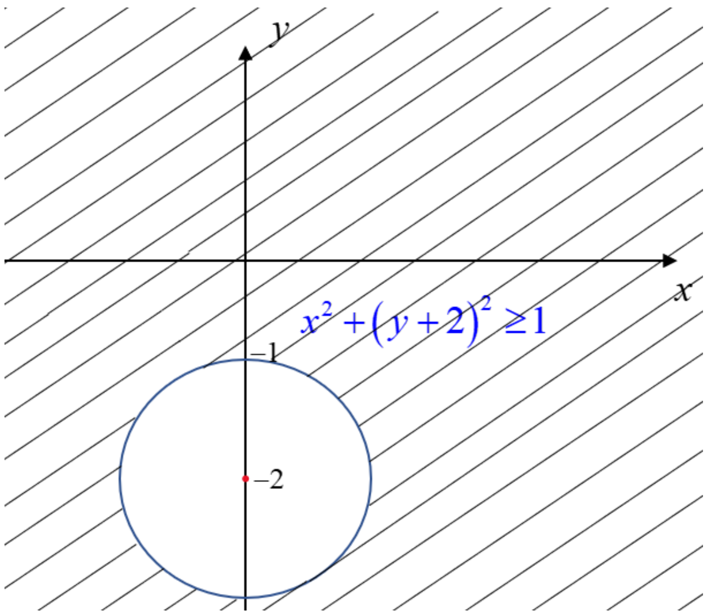
$$\lim_{n\to\infty}y_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{4y_n}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(z_n-\overline{z}_n\right)}{\mathrm{i}\left(|z_n|^2+4\right)}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}\right)}{x_n^{\ 2}+y_n^{\ 2}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2|z_n|^2}{|z_n|^2+4}=2。$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=(0,0,2)$。

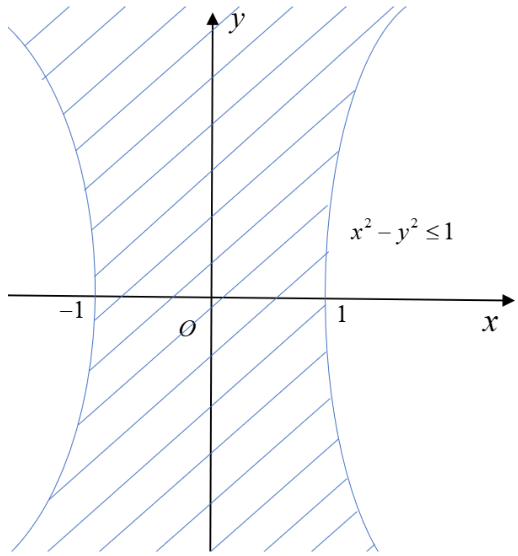
5. 指出下列各题中点z的存在范围，并作图。

解： (1) $|z+2\mathrm{i}|\geq1\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2\geq1$。点$z$的范围是复平面上以$-2\mathrm{i}$为圆心，1为半径的圆周及它的外部。

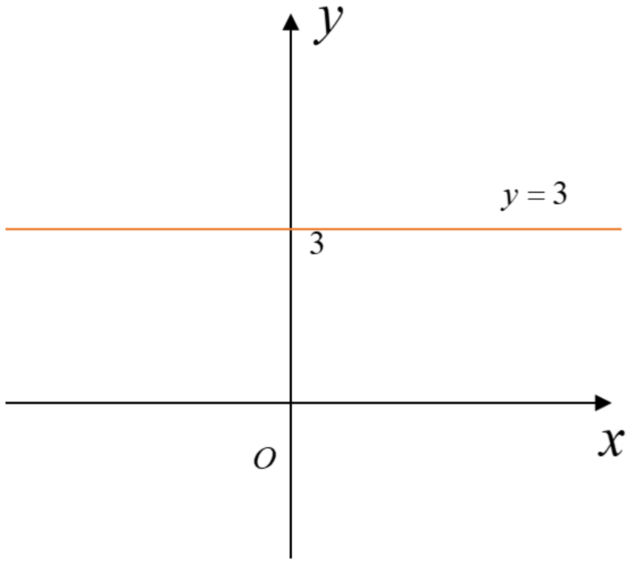


(2) $\operatorname{Re}z^2\leq1\Leftrightarrow x^2-y^2\leq1$。点$z$的范围是双曲线$x^2-y^2=1$及其内部。

点 z 的范围是以 $(-3,0)$ 和 $(-1,0)$ 为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一个椭圆。



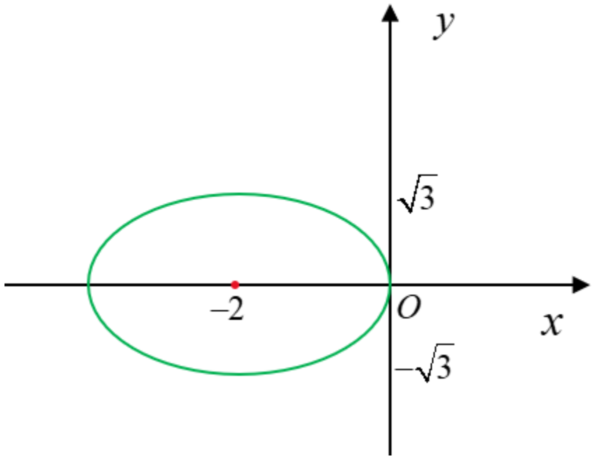
(3) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3 \Leftrightarrow y=3$。点 z 的范围是直线 $y=3$。



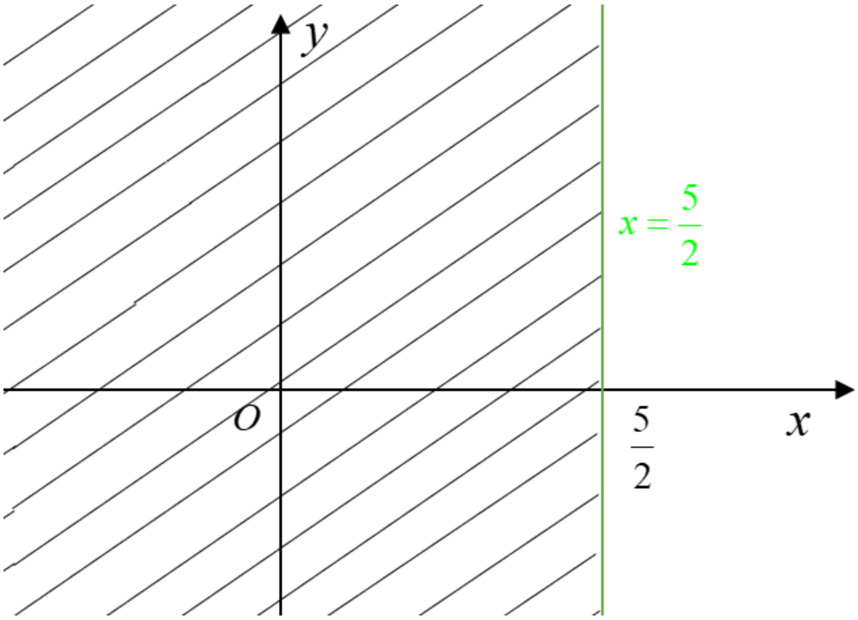
(4) $|z+3|+|z+1|=4 \Leftrightarrow |z+3|^2=\left(4-|z+1|\right)^2 \Leftrightarrow x-2=-2|z+1|$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1。$$

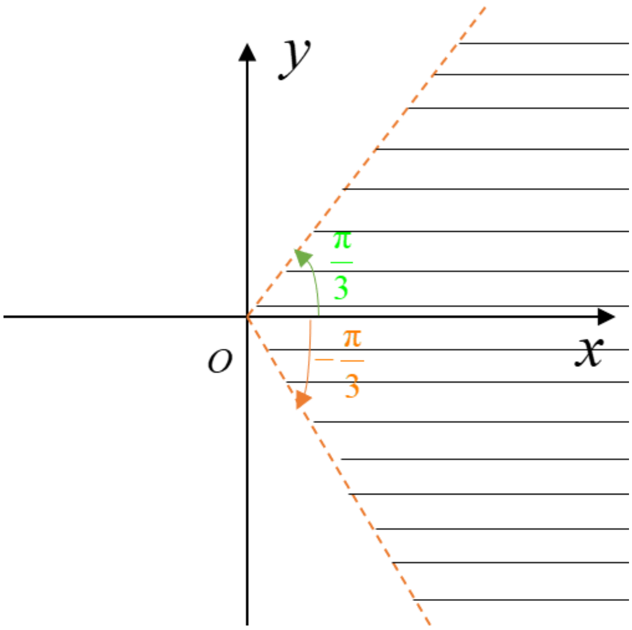
点 z 的范围是以 $(-3,0)$ 和 $(-1,0)$ 为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一个椭圆。



(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1 \Leftrightarrow |z-3|^2\geq|z-2|^2\Leftrightarrow(z-3)(\bar{z}-3)\geq(z-2)(\bar{z}-2)\Leftrightarrow x\leq\dfrac{5}{2}$。点 z 的范围是直线 $x=\dfrac{5}{2}$，及直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 左边的区域。



(6) $|\arg z|<\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$。点 z 的范围是两条从原点出发的射线 $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{3}$ 所夹的区域，不含边界。



6. 设 z, z_1, z_2 是三个复数，证明：

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}}=z$;

(2) 当且仅当 $z=\overline{z}$ 时，z 是实数。

(3) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$;

(4) $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)\le\left|z_1\overline{z_2}\right|=|z_1||z_2|$。

证： 设 $z=x+\mathrm{i}y$, $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 。于是

(1) $\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)=x_1-\mathrm{i}y_1+x_2-\mathrm{i}y_2=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

$\overline{\overline{z}}=\overline{x-\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y=z$。

(2) $z=\overline{z}\Leftrightarrow x+\mathrm{i}y=x-\mathrm{i}y\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow z=x\in\mathbb{R}$。

(3) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=|z_1|^2+|z_2|^2+\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$

$=|z_1|^2+|z_2|^2+\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\right)=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$。

(4) $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(-x_1y_2+x_2y_1)^2}$

$=\left|z_1\overline{z_2}\right|=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$

$=\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)}=|z_1||z_2|$。

7. 试求下列极限

解：(1) $\lim\limits_{z\to1+\mathrm{i}}\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})^2=-\mathrm{i}$。

(2) $\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\bar{z}+2}{z+1}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$。

8. 证明：z 平面上的圆的方程可以写成

$$az\bar{z}+\bar{e}z+e\bar{z}+d=0$$

的形式，其中 $a,d\in\mathbb{R},\ a>0,\ e\in\mathbb{C}$，且 $|e|^2-ad>0$。

证：设直角坐标系的圆的方程为

$$a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+d=0 \qquad (*)\ ,$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $a>0$。于是

$$a\left(z\bar{z}\right)+b\frac{z+\bar{z}}{2}+c\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}+d=0$$

$$a\left(z\bar{z}\right)+\frac{b-\mathrm{i}c}{2}z+\frac{b+\mathrm{i}c}{2}\bar{z}+d=0$$

$$az\bar{z}+\bar{e}z+e\bar{z}+d=0$$

其中 $e=\dfrac{b+\mathrm{i}c}{2}$。又 $(*)$ 可以写成

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+a\left(y^2+\frac{c}{a}y\right)=-d$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2=-d+\frac{b^2}{4a}+\frac{c^2}{4a}。$$

由 $-d+\dfrac{b^2}{4a}+\dfrac{c^2}{4a}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}-ad\right)=\dfrac{1}{a}\left(|e|^2-ad\right)>0$，得

$$|e|^2-ad>0。$$

9. 解方程：$z^2-3\mathrm{i}z-(3-\mathrm{i})=0$。

解：$z=\frac{1}{2}\left(3\mathrm{i}+\sqrt{-9+4(3-\mathrm{i})}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(3\mathrm{i}+\sqrt{3-4\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2}\left[3\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(3-4\mathrm{i})}\right]$$

$$=\frac{3\mathrm{i}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\ln 5+\mathrm{i}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)\right)}=\frac{3\mathrm{i}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)}$$

$$=\frac{3\mathrm{i}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\cos\frac{1}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\left(-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)\right], k=0,1。$$

10. 试证：$\arg z\ (-\pi<\arg z\le\pi)$在负实轴上(包括原点)不连续，除此之外在 z 平面上处处连续。

证：设 $f(z)=\arg z$。因为 $f(0)$ 无定义，所以 $f(z)$ 在原点不连续。

当 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为负实轴上的点时，有 $x_0<0, y_0=0$ 且

$$\lim_{y\to0^+,x=x_0}\left(\arctan\frac{y}{x}+\pi\right)=\pi;$$

$$\lim_{y\to0^-,x=x_0}\left(\arctan\frac{y}{x}-\pi\right)=-\pi。$$

所以 $\lim\limits_{z\to z_0}\arg z$ 不存在，即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而在 z 平面上的其它点处

$$\arg z=\begin{cases}0 & x>0,y=0;\\ \arctan\frac{y}{x} & x>0,y>0;\\ \frac{\pi}{2} & x=0,y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0,y>0;\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0,y<0;\\ -\frac{\pi}{2} & x=0,y<0;\\ \arctan\frac{y}{x} & x>0,y<0。\end{cases}$$

它是连续的。

11. 设$|z_0|<1$。证明：若$|z|=1$，则$\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=1$。若$|z|<1$，则

(1) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|<1$;

(2) $\dfrac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\le\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|\le\dfrac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}$。

证：若$|z|=1$，则

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=\frac{|z-z_0|}{|1-\overline{z_0}z||\bar{z}|}=\frac{|z-z_0|}{|\overline{z-z_0}|}=1。$$

若$|z|<1$，注意到

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2=\frac{|z-z_0|^2}{|1-\overline{z_0}z|^2}=\frac{(z-z_0)(\bar{z}-\overline{z_0})}{(1-\overline{z_0}z)(1-z_0\bar{z})}=\frac{|z|^2-z\overline{z_0}-z_0\bar{z}+|z_0|^2}{1-z_0\bar{z}-z\overline{z_0}+|z|^2|z_0|^2}。$$

由$|z_0|<1$和$|z|<1$，有

$$(1-|z|^2)(1-|z_0|^2)>0。$$

于是，得

$$|z|^2+|z_0|^2-1-|z|^2|z_0|^2<0。$$

从而，有

$$|z|^2-z\overline{z_0}-z_0\bar{z}+|z_0|^2<1-z_0\bar{z}-z\overline{z_0}+|z|^2|z_0|^2。$$

故 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2<1$，即(1)成立。

对于(2)，注意到

$$\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|} \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \le \frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|} \Leftrightarrow \left(\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|}\right)^2 \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2 \le \left(\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z||z_0|}{1+|z|^2|z_0|^2-2|z||z_0|} \le \frac{|z|^2+|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)}{1+|z|^2|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)} \le \frac{|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|}{1+|z|^2|z_0|^2+2|z||z_0|}。$$

现在，由$|z_0|<1$和$|z|<1$，得

$$\begin{aligned}
&\left[|z|^2+|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\right]\left(1+|z|^2|z_0|^2+2|z||z_0|\right)-\left[1+|z|^2|z_0|^2-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\right]\left(|z|^2+|z_0|^2+2|z||z_0|\right)\\
&=2|z||z_0|\left(|z|^2+|z_0|^2\right)-\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(1+|z|^2|z_0|^2\right)-2|z||z_0|\left(1+|z|^2|z_0|^2\right)+\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(|z|^2+|z_0|^2\right)\\
&=2|z||z_0|\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)+\left(z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\\
&=\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\left(2|z||z_0|+z\overline{z_0}+\overline{z}z_0\right)\\
&=\left(|z|^2-1\right)\left(1-|z_0|^2\right)\left(2|\overline{z}z_0|+2\operatorname{Re}\{\overline{z}z_0\}\right)\\
&<0。
\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|^2 \le \left(\frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}\right)^2。$$

从而

$$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| \le \frac{\left||z|+|z_0|\right|}{1+|z_0||z|}。$$

同理可证

$$\frac{\left||z|-|z_0|\right|}{1-|z_0||z|} \le \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|。$$

12. 设 $f(z)$ 在z_0处连续，且 $f(z_0)\neq 0$，则存在z_0的某个邻域$N(z_0,\delta)$，使得在$N(z_0,\delta)$内，$f(z)\neq 0$。

证：设 $f(z)$ 在z_0处连续，且 $f(z_0)\neq 0$。则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)。$$

从而，对于$\varepsilon=\frac{1}{2}\left|f\left(z_0\right)\right|>0$，存在$z_0$的某个邻域$N\left(z_0,\delta\right)$，有

$$\left|f\left(z\right)-f\left(z_0\right)\right|<\varepsilon=\frac{1}{2}\left|f\left(z_0\right)\right|。$$

故

$$\left|f\left(z_0\right)\right|-\left|f\left(z\right)\right|\le\left|f\left(z\right)-f\left(z_0\right)\right|<\varepsilon=\frac{1}{2}\left|f\left(z_0\right)\right|。$$

这说明在$N\left(z_0,\delta\right)$内，有

$$\left|f\left(z\right)\right|>\left|f\left(z_0\right)\right|-\frac{1}{2}\left|f\left(z_0\right)\right|=\frac{1}{2}\left|f\left(z_0\right)\right|>0。$$