2. 正交多项式：[a,b]， ρ(x)

(二)勒让德多项式：$[-1,1]$，$\rho(x)=1$，由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

简单表达：$P_0(x)=1$，$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. $n=1,2\cdots$

$P_n(x)$的首项系数 $a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，首1 $\tilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

性质1 $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$

性质2：奇偶性 $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

性质3：递推公式 $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)P_n(x)-nP_{n-1}(x)$

三项递推

(二)勒让德多项式：$[-1,1]$, $\rho(x)=1$, 由$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交化得到

性质：前n个多项式： $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$

$P_2(x)=\dfrac{(3x^2-1)}{2}$　　$P_3(x)=\dfrac{(5x^3-3x)}{2}$

$P_4(x)=\dfrac{(35x^4-30x^2+3)}{8}$　　$P_5(x)=\dfrac{(63x^5-70x^3+15)}{8}$

性质4. $P_n(x)$在$[-1,1]$有n个不同零点

作业 P94. 4(3) 5 6

2. 正交多项式：[a,b]，ρ(x)

(三)切比雪夫多项式:$[-1,1], \rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,由$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交化得到

简单表达式：$T_n(x)=\cos(n\arccos(x)), |x|\le 1, (x=\cos(\theta), T_n(x)=\cos(n\theta), 0\le\theta\le\pi)$

$[-1,1]$ $\theta\in[0,\pi]$

性质1：递推 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ $n=1,2,\cdots$

$\theta+n\theta$ $n\theta-\theta$

$T_0=1.$ $T_1=x$

$\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$

$T_0=1$ $T_1=x.$ $T_2=2x^2-1$ $T_3=4x^3-3x$

$T_4=8x^4-8x^2+1.$ $T_5=16x^5-20x^3+5x$

T_n 首项系数 2^{n-1} $(n=1,2,\cdots)$ $\|T_n\|_{L^\infty[-1,1]}=1$

(三)切比雪夫多项式:$[-1,1]$, $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

性质:性质2

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

$x=\cos\theta$ $dx=-\sin\theta d\theta$ $\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\frac{1}{\sin\theta}\,(-\sin\theta)d\theta$

性3: T_{2k} 只含偶数次项 T_{2k+1} 只含奇数次项

性4 $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 有 n 个0点

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad k=1,2,\cdots n$$

$T_n(x)=\cos(n\theta)=0$ $x=\cos\theta$

$0\le\theta\le\pi$

(三)切比雪夫多项式:$[-1,1], \rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,由$\{1, x, \cdots, x^n\}$正交化得到

定理（首1的切比雪夫多项式的极大值极小）：

"x^n系数为1" "首1"

性质5：首1切比雪夫多项式 $\tilde{T}_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$

定理 $\max\limits_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)| \le \max\limits_{-1\le x\le 1}|\tilde{P}_n(x)|$ $\forall \tilde{P}_n(x)\in \tilde{H}_n$

$\tilde{H}$是n阶首1多项式全体

$\|\tilde{T}_n\|_{\infty[-1,1]} \le \|\tilde{P}_n(x)\|_{\infty[-1,1]}$

$\max\limits_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)| = \|\tilde{T}_n\|_{\infty[-1,1]} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

"$\tilde{T}_n$最大值最小的"

(三)切比雪夫多项式:$[-1,1],\ \rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到 $L^\infty[-1,1]$

例：求多项式$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在$[-1,1]$上的最佳二次一致逼近多项式

解：找 $P_2(x)$ 使 $\|f(x)-P_2(x)\|_{L^\infty[-1,1]}$ 最小

$$f(x)-P_2(x)=2\underbrace{\left(\frac{f(x)}{2}-\frac{P_2(x)}{2}\right)}_{\tilde{g}(x)}=2\tilde{g}(x)$$

$\tilde{g}(x)$ 是首1三次多

$\|f(x)-P_2(x)\|_{L^\infty[-1,1]}=2\|\tilde{g}(x)\|_{L^\infty[-1,1]}$ 何时最小?

$$\frac{f(x)}{2}-\frac{P_2(x)}{2}=\tilde{g}(x)=\tilde{T}_3(x),\ \Rightarrow P_2(x)=2\left(\frac{f(x)}{2}-\tilde{T}_3(x)\right)$$

$$=2\left(x^3+\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}-\left(x^3-\frac{3}{4}x\right)\right)$$

切比雪夫多项式的零点插值与龙格现象的避免

定理：设插值节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$为切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)$的零点，$f \in C^{n+1}[-1,1]$

$L_n(x)$为相应的拉格朗日插值多项式，则

$$\|f - L_n(x)\|_\infty \le \frac{1}{2^n (n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

证明：$f - L_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{\tilde{T}_{n+1}(x)\text{"首1"}}$

$$\|f - L_n(x)\|_{\infty[-1,1]} \le \|f^{(n+1)}\|_{\infty[-1,1]} \frac{1}{(n+1)!} \|\tilde{T}_{n+1}(x)\|_{\infty[-1,1]}$$

$$\|\tilde{T}_{n+1}(x)\|_{\infty[-1,1]} = \frac{1}{2^n}$$

一般[a,b]区间上的切比雪夫多项式（或勒让德多项式）的零点：

的 0 一样的

变换$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$映射$[-1,1]\to[a,b]$，这个变换把$[-1,1]$上的切比雪夫零点映射到$[a,b]$

$$x_k=\frac{b-a}{2}\cos(\frac{2k-1}{2n})\pi+\frac{a+b}{2},k=1,2,\cdots,n$$

$[a,b]$

定理：设插值节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$为$[a,b]$区间上的切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)$的零点，$f\in C^{n+1}[a,b],L_n(x)$为相应的拉格朗日插值多项式，则

$$\|f-L_n(x)\|_\infty\le\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

2^{2n+1}

$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(b-a)^n}{2^{n+1}}$

证明：$f-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

$\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a-b}{2}t+\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}t_k+\frac{a+b}{2}\right)$

$=\prod_{k=0}^{n}\frac{a-b}{2}(t-t_k)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(t-t_k)$

$\tilde{T}_{n+1}(t)$

例：求 $f(x)=e^x$ 在区间[0,1]的四次 L 插值多项式 $L_4(x)$, 插值节点为 T_5 的零点，并估计误差 $\max\limits_{0\le x\le 1}|e^x - L_4(x)|$ $(x_k=\frac{1}{2}(1+\cos(\frac{2k+1}{10})\pi), k=0,\cdots,4)$

11:25回来

[a, b]

[0,1]

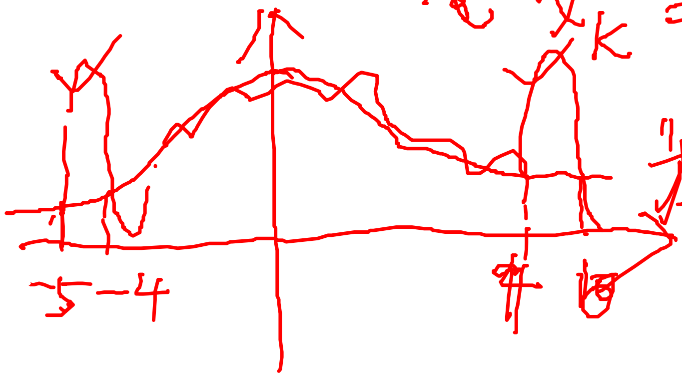
T_5 的5个0点. 映射到

$$\|e^x - L_4(x)\|_{L^\infty(0,1)} \le \frac{\|f^{(5)}\|_{L^\infty[0,1]}}{2^{2\times 4+1}}(1-0)^5\frac{1}{5!}$$

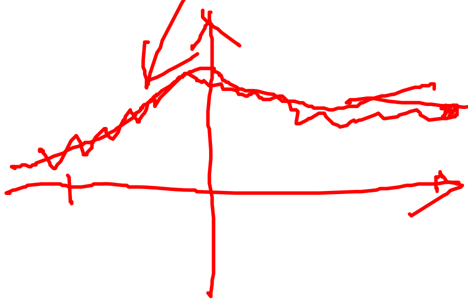
$$\le \frac{\|f^{(5)}\|_{L^\infty[0,1]}}{2^9}\cdot\frac{1}{120}$$

例：$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间[−5,5]上用 T_{11} 的零点作 L 插值 $(x_k = 5\cos(\frac{21-2k}{22})\pi, k=0,\cdots,10)$

如 $\tilde{x}_k = -5+k$　$k=0,1,2,\cdots,10$



“龙格”



消除“龙格”

(四)第二类切比雪夫多项式:$[-1,1]$, $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$,由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

$U_0=1$, $U_1=2x$ $\quad U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$

(五)拉盖尔多项式:$[0,+\infty)$, $\rho(x)=e^{-x}$,由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

$$L_n(x)=e^{x}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

$$L_0=1 \qquad L_1=1-x$$

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$$

"指数分布"密度函数.

(五)埃尔米特多项式:$(-\infty,+\infty)$, $\rho(x)=e^{-x^2}$,由$\{1,x,\cdots,x^n\}$正交化得到

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$H_0=1. \quad H_1=2x \quad H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$$

"高斯正态分布"

3. 最佳平方逼近

$\|f\|_\rho=\sqrt{(f,f)_\rho}$

（一）最佳平方逼近的问题描述：

$\rho(x)$

$\rho(x)\geq 0$是一个权函数，加权内积$(f,g)_\rho=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$，加权范数$\|f\|_\rho^2=(f,f)_\rho$

$(n+1)$维

令φ是一个有限维子空间，$\varphi=span\{\varphi_0,\cdots,\varphi_n\}$，任意给定的$f\in C[a,b]$，

找$S^*(x)$使得$\|f-S^*\|_\rho^2=\min\limits_{S\in\varphi}\|f-S\|_\rho^2$

$\in\varphi$

$\|f\|_\rho^2=\int_a^b f(x)f(x)\rho(x)dx$

称$S^*(x)$为$f(x)$在φ中的最佳平方逼近函数

$\|f-S^*\|_\rho^2=(f-S^*,f-S^*)_\rho$

$=\int_a^b (f-S^*)^2(x)\rho(x)dx$

$S(x)$

$$I(a_0,\cdots,a_n)=\int_a^b[f(x)-\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x)]^2\rho(x)dx$$，求$a_0,\cdots,a_n$使这个式子最小

关于 $a_0,\dots,a_n$ $n+1$元函数　$I(a_0,\dots,a_n)$最小

（二）最佳平方逼近构造：可逆 唯一解 a_k^* $k=0,\cdots,n$, $S^*=a_0^*\varphi_0+\cdots+a_n^*\varphi_n$ 最佳平方逼近函数

$I(a_0,\cdots,a_n)=\int_a^b [f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)]^2\rho(x)dx$，求$a_0,\cdots,a_n$使这个式子最小

$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0 \quad k=0,1,\cdots,n$ 即

$$2\int_a^b \left(f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)\right)\cdot\varphi_k(x)\rho(x)dx=0$$

即

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_k(x)\rho(x)dx\right]a_j=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\rho(x)dx \quad k=0,\cdots,n$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)_\rho\, a_j=(f,\varphi_k)_\rho \quad k=0,\cdots,n$$

Gram

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)_\rho & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)_\rho\\ \vdots & \ddots & \\ (\varphi_n,\varphi_0)_\rho & & (\varphi_n,\varphi_n)_\rho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)_\rho\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)_\rho\end{pmatrix}$$

线性方程组

可逆 $\Leftrightarrow$ $\varphi_0,\cdots,\varphi_n$ 线性无关

3. 最佳平方逼近 $[a,b]$ $\rho(x)$ 内积 基底(线性无关)

$(f-S^*, \varphi_k)_\rho = 0$

（三）最佳平方逼近重要性质：

(1) $(S^*, \varphi_k)_\rho = (f, \varphi_k)_\rho \quad \forall k=0,\cdots,n$

$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k)_\rho a_j^* = (f, \varphi_k)_\rho \quad k=0,\cdots,n$

$= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j, \varphi_k\right) = (f, \varphi_k)_\rho$

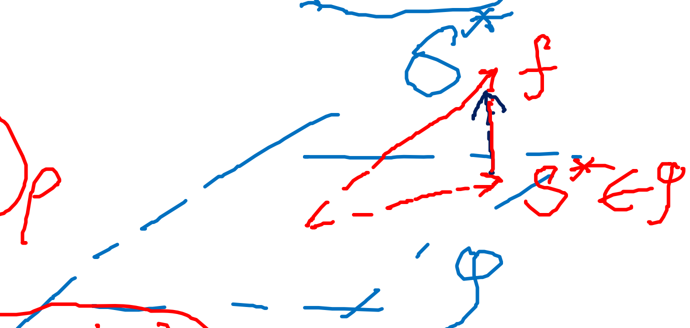
(2) $(f-S^*, S)_\rho = 0 \quad \forall S \in \varphi$

(3) $\|f-S^*\|_\rho^2 \le \|f-S\|_\rho^2 \quad \forall S \in \varphi$

$\|f-S\|_\rho^2 = (f-S, f-S)_\rho = (f-S^*+S^*-S, f-S^*+S^*-S)_\rho$

$= (f-S^*, f-S^*)_\rho + 2(f-S^*, S^*-S)_\rho + (S^*-S, S^*-S)_\rho$

$\ge (f-S^*, f-S^*)_\rho = \|f-S^*\|_\rho^2$



S^* 是 f 在 φ 的正交投影

(4) $\delta(x) = f(x) - S^*(x)$ $\quad \|\delta(x)\|^2 = \|f\|_\rho^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^* (\varphi_k, f)_\rho$ 误差

$\rho(x)=1$

(例)：$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式 $\varphi=\mathrm{span}\{1,x\}$

$\int_0^1 1\cdot x\,dx=\frac{1}{2}$ $\quad S^*=a_0^*+a_1^*x$ 其中 a_0^*、a_1^* 是

$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix}(1,1) & (1,x)\\ (x,1) & (x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0^*\\ a_1^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,1)\\ (f,x)\end{pmatrix} \rightarrow \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0^*\\ a_1^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.149\\ 0.609\end{pmatrix} \qquad S^*=0.934+0.426x$$

作业 P94：7、8，10，11，12