郭懋正 《实变函数与泛函分析》

课后习题解答

作者：张文彪

组织：ElegantLATEX Program

时间：July 16, 2020

版本：3.09

Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore

目录

第 1 章 集合与运算

1.1 集合及其运算

1. 设集合A, B, C, D, 满足$A \cup B = C \cup D$,证明:
(1) 令$A_1 = A \cap C, A_2 = A \cap D$, 则$A = A_1 \cup A_2$;
(2) 若$A \cap C = \emptyset, B \cap D = \emptyset$,则$A = D, B = C$.
证明 (1)利用集合的运算
$$A_1 \cup A_2 = (A \cap C) \cup (A \cap D) = A \cap (C \cup D) = A \cap (A \cup B) = A.$$
(2)利用集合的运算
$$A \cup B = C \cup D \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (C \cup D) \cap C \Rightarrow B \cap C = C \Rightarrow C \subseteq B,$$
同理
$$(A \cup B) \cap B = (C \cup D) \cap B \Rightarrow B = C \cap B \Rightarrow B \subseteq C,$$
因此$B = C$,类似地可得$A = D$.

2. 设$A, B, D \subset X$, 求证:
$$B = (D \cap A)^c \cap (D^c \cup A) \iff B^c = D.$$
证明 利用集合的运算
$$B^c = [(D \cap A)^c \cap (D^c \cup A)]^c = (D \cap A) \cup (D \cap A^c) = D \cap (A \cup A^c) = D.$$
注意到上述推导的每一步都是可逆的.

3. 设A, B是集合,定义$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$称为$A$与$B$的对称差. 证明对称差具有以下性质:
$$A\Delta B = B\Delta A; \quad A^c\Delta B^c = A\Delta B; \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$$
并证明对于给定的集合A与B,存在唯一的集合E, 使得
$$E\Delta A = B.$$
证明 (1)由集合的运算
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A.$$

(2)

$$\begin{aligned}A^c\Delta B^c &= (A^c \setminus B^c)\cup(B^c\setminus A^c)\\ &= (A^c\cap B^{cc})\cup(B^c\cap A^{cc})\\ &= (B\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\\ &= (B\setminus A)\cup(A\setminus B)\\ &= B\Delta A = A\Delta B.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= (A\setminus(B\Delta C))\cup((B\Delta C)\setminus A)\\ &= (A\cap(B\Delta C)^c)\cup((B\Delta C)\cap A^c)\\ &= .....\\ &= (A\Delta B)\Delta C.\end{aligned}$$

(4) 对任意的集合A,B,令$E=A\Delta B$,则

$$E\Delta A=(A\Delta B)\Delta A=(A\Delta A)\Delta B=\emptyset\Delta B=B.$$

再证唯一性,若$E_1\Delta A=E_2\Delta A=B$,则

$$E_1=(E_1\Delta A)\Delta A=(E_2\Delta A)\Delta A=E_2\Delta(A\Delta A)=E_2.$$

4. 设$\{A_n\}$与$\{B_n\}$是升列,证明:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

证明　由$\{A_n\}$与$\{B_n\}$是升列易证$\{A_n\cap B_n\}$也是升列,因此

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n) &= \lim_{m\to\infty}\bigcup_{n=1}^{m}(A_n\cap B_n)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n\right)\\ &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\end{aligned}$$

5. 设$\{A_n\}$是一集合列, 令

$$B_1=A_1,\quad B_i=A_i\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\quad(i>1),$$

证明$\{B_n\}$互不相交, 且对任意的n,有$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$.

证明　任意$i,j\in\mathbb{N}$,不妨设$i<j$,则

$$\begin{aligned}B_i\cap B_j &= A_i\bigcap_{k=1}^{i-1}A_k^c\bigcap A_j\bigcap_{k=1}^{j-1}A_k^c\\ &\subset A_i\cap A_i^c=\emptyset.\end{aligned}$$

故$B_i\cap B_j=\emptyset(i<j)$.运用集合的运算

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=2}^{n}B_i&=\bigcup_{i=2}^{n}\left[A_i\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}A_k\right]\\&=\left(\bigcup_{i=2}^{n}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{i=2}^{n}\bigcap_{k=1}^{i-1}A_k^c\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=B_1\bigcup\left[\left(\bigcup_{i=2}^{n}A_i\right)\bigcap\left(\bigcup_{i=2}^{n}\bigcap_{k=1}^{i-1}A_k^c\right)\right]=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\bigcap\left(A_1\bigcup A_1^c\bigcup\ldots\right)=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

6. 设$\{f_n(x)\}$是$\mathbb{R}$上的函数列,

$$A=\{x|\limsup_{n\to\infty}f_n(x)>0\},\quad A_{mn}=\{x|f_n(x)\geqslant\frac{1}{m}\},\quad m,n\in\mathbb{N},$$

试用A_{mn}表示A.

证明

$$\begin{aligned}A&=\{x|\limsup_{n\to\infty}f_n(x)>0\}\\&=\{x|inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n}f_k(x)>0\}\\&=\{x|\text{任意}n\geqslant 1,\sup_{k\geqslant n}f_k(x)>0\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|\sup_{k\geqslant n}f_k(x)>0\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|\text{存在}k\geqslant n,\text{使得}f_k(x)>0\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x|f_k(x)>0\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{x|\text{存在}m\in\mathbb{N},s.t.f_k(x)>\frac{1}{m}\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x|f_k(x)>\frac{1}{m}\}\\&=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{mk}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}A_{mn}.\end{aligned}$$

7. 设$\{f_n(x)\}$是区间(a,b)上单调递增函数列,证明对于任意实数a,有等式$\{x|\lim_{n\to\infty}f_n(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>a\}$.

证明 $f_n(x)$为单调递增列,因此

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>a\}\Rightarrow x\in\{x|\lim_{n\to\infty}f_n(x)>a\},$$

另一方面,

$$x\in\{x|\lim_{n\to\infty}f_n(x)>a\}\Rightarrow\exists N,f_N(x)>a\Rightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>a\},$$

故

$$\{x|\lim_{n\to\infty} f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x) > a\}.$$

8. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的实函数, a是常数, 证明:

(1) $\{x|f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\}$;

(2)$\{x|f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\}$.

证明 (1)一方面

$$x \in \{x|f(x) > a\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, f(x) \geqslant a + \frac{1}{N} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x|f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\right\},$$

另一方面,

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x|f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, f(x) \geqslant a + \frac{1}{N} \Rightarrow x \in \{x|f(x) > a\}.$$

(2) 一方面

$$x \in \{x|f(x) \geqslant a\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(x) > a - \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

另一方面,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f(x) > a - \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \{x|f(x) \geqslant a\}.$$

9. 记$A_n = (-1 - 1/n, 1 + 1/n)$,求$\liminf_{n\to\infty} A_n$.

解

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}[-1, 1] = [-1, 1].$$

10. 设$\{f_n(x)\}$是$\mathbb{R}$上的函数列, 集合$E \subset \mathbb{R}$. 已知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{X}_E,$$

记$E_n = \{x|f_n(x) \geqslant 1/2\}$,试求集合$\lim_{n\to\infty} E_n$.

证明 首先有

$$x \in E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \bigcup_{N\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant N} E_n \Leftrightarrow x \in \liminf_{n\to\infty} E_n.$$

即$E \subset \liminf_{n\to\infty} E_n$, 另一方面,

$$x \in \liminf_{n\to\infty} E_n \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, f_n(x) \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow x \in E.$$

因此,

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = E,$$

又

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}\left\{x|f_k(x) \geqslant \frac{1}{2}\right\} = E.$$

综上,

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E.$$

11. 设$A_n = \{\frac{m}{n}|m \in \mathbb{Z}\}, n = 1, 2, \cdots$,证明:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Z}; \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Q}.$$

证明 直接计算

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n}\left\{\frac{m}{k}|m\in\mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{n\geqslant 1}\{\pm n\} = \mathbb{Z}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}\left\{\frac{m}{k}|m\in\mathbb{Z}\right\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\{\text{所有分母大于n的有理数}\} = \mathbb{Q}.$$

注意 **所有分母大于n的有理数实际上就是有理数的全体,总可以把分数的分母变大!**

12. 设$0 < a_n < 1 < b_n, n = 1, 2, \cdots$, 已知$\{a_n\}$与$\{b_n\}$单调下降, 且$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 1$,证明: $\lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = (0, 1]$.

证明 直接计算

$$\liminf_{n\to\infty}[a_n, b_n] = \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n}[a_k, b_k] = \bigcup_{n\geqslant 1}[a_n, 1] = (0, 1],$$

$$\limsup_{n\to\infty}[a_n, b_n] = \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}[a_k, b_k] = \bigcap_{n\geqslant 1}(0, b_n] = (0, 1].$$

故

$$\lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = (0, 1].$$

13. 证明:

$$\liminf_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}(x) = \mathcal{X}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x); \quad \limsup_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}(x) = \mathcal{X}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x).$$

证明 只证第一个等式,第二个等式的证明是类似的.

$$\mathcal{X}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x) = \mathcal{X}_{\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k}(x),$$

(a)当$x \in \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k$时, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geqslant N, x \in A_n(\mathcal{X}_{A_n}(x) = 1)$,此时

$$\liminf_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}(x) = \sup_{N\geqslant 1}\inf_{n\geqslant N}\mathcal{X}_{A_n}(x) = 1 = \mathcal{X}_{\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k}(x) = 1.$$

(b)当$x \notin \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k$时, $\forall n\in\mathbb{N}, \exists k \geqslant n, x \in A_k^c(\mathcal{X}_{A_k}(x) = 0)$,此时

$$\liminf_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}(x) = \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n}\mathcal{X}_{A_n}(X) = 0 = \mathcal{X}_{\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k}(x).$$

1.2 映射

1. 设映射$f: X \to Y, A \subset X, E \subset Y$,试问下列等式成立吗?

(1) $f^{-1}(Y \setminus E) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(E)$;

(2) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

解 (1)成立.这是因为

$$x \in f^{-1}(Y \setminus E) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus E \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)\text{且}x \notin f^{-1}(E),$$

(2)不成立.例如$X = \{-1, 1\}, \quad A = \{-1\}, \quad f: x \to x^2$,则有

$$f(X \setminus A) = \{1\} \neq \emptyset = f(X) \setminus f(A).$$

2. 设有集合A, B, C,证明:

(1)若$A \setminus B \sim B \setminus A$,则$A \sim B$;

(2)若$A \subset B, A \sim A \cup C$,则$B \sim B \cup C$.

证明 (1)由$A \setminus B \sim B \setminus A$知存在双射$f: A \setminus B \mapsto B \setminus A$, 又

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B); \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

定义

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus B; \\ x, & x \in A \cap B. \end{cases}$$

则$g: A \mapsto B$为双射,即$A \sim B$.

(2) 因为$A \subset B$,结合(1)的结论

$$B = A \cup (B \setminus A) \sim (A \cup C) \cup (B \setminus A) = B \cup C.$$

3. 证明:

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c; \quad \left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

证明 由De Morgan定理

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right)^c = \left(\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k^c\right) = \liminf_{n\to\infty} A_n^c;$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \left(\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k\right)^c = \left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k^c\right) = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

4. 证明特征函数满足关系式

$$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x);$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(x);$$

$$\mathcal{X}_{A\setminus B}(x) = \mathcal{X}_A(x)(1 - \mathcal{X}_B(x));$$

$$|\mathcal{X}_A(x)-\mathcal{X}_B(x)|=\mathcal{X}_{A\setminus B}(x)+\mathcal{X}_{B\setminus A}(x).$$

证明 (1)将$A\cup B$划分成两两互不相交的集合的并

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B),$$

分别验证$x\in A\cup B$与$x\notin A\cup B$时,$\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)-\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$的值即可.

(2).

$$x\in A\cap B\Rightarrow \mathcal{X}_{A\cap B}(x)=\mathcal{X}_A(x)\cdot\mathcal{X}_B(x)=1;$$

$$x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^c\cup B^c\Rightarrow \mathcal{X}_{A\cap B}(x)=0=\mathcal{X}_A(x)\cdot\mathcal{X}_B(x).$$

(3) 利用结论(2)

$$\mathcal{X}_{A\setminus B}(x)=\mathcal{X}_{A\cap B^c}(x)=\mathcal{X}_A(x)\mathcal{X}_{B^c}(x)=\mathcal{X}_A(x)(1-\mathcal{X}_B(x)).$$

(4) 分情况$x\in A\setminus B,\quad x\in B\setminus A,\quad x\in A\cap B,\quad x\in(A\cup B)^c$讨论即可.

5. 证明: (1) $\lim_{n\to\infty}A_n$存在$\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}$存在.

   (2) $A=\lim_{n\to\infty}A_n\Longleftrightarrow\mathcal{X}_A=\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}$.

   证明 只证(1),由

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}A_n\text{存在}&\Longleftrightarrow\limsup_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\\&\Longleftrightarrow\bigcap_{n\geqslant1}\bigcup_{k\geqslant n}A_k=\bigcup_{n\geqslant1}\bigcap_{k\geqslant n}A_k\\&\Longleftrightarrow\inf_{n\geqslant1}\sup_{k\geqslant n}\mathcal{X}_{A_n}=\sup_{n\geqslant1}\inf_{k\geqslant n}\mathcal{X}_{A_n}\\&\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}_{A_n}\text{存在}.\end{aligned}$$

6. 设$A_{2n-1}=A,A_{2n}=B,n=1,2,\cdots$,求$\liminf_{n\to\infty}A_n$与$\limsup_{n\to\infty}A_n$.

   解 直接计算

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n\geqslant1}\bigcap_{k\geqslant n}A_k=A\cap B;$$

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n\geqslant1}\bigcup_{k\geqslant n}A_k=A\cup B.$$

7. 证明:$f:A\to B$是满射$\Longleftrightarrow\forall E\subset B,f(f^{-1}(E))=E$.

   证明 必要性. 显然$\forall E\subset B$,$f(f^{-1}(E))\subset E$,又$\forall y\in E$,因为f满,故$\exists x\in A,s.t.f(x)=y,x\in f^{-1}(y)\subset f^{-1}(E)$,因此 $y\in f(f^{-1}(E))$.

   充分性. 反证法. 假若$f:A\to B$不是满射,则$\exists y_0\in B,f^{-1}(y_0)=\emptyset$,则

$$\emptyset=f(\emptyset)=f(f^{-1}(y_0))=\{y_0\}$$

   矛盾.

8. 证明: $f:X\to Y$是一一对应的充分必要条件为$f(X)=Y$,且对任何$A,B\subset X$,有$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

   证明 充分性. 此书一一对应为双射的含义. $f(X)=Y$说明$f:X\to Y$为满射,只需

证明$f:X\to Y$为单射即可.若不然,存在$x_1\neq x_2$,但$f(x_1)=f(x_2)$,由条件

$$\emptyset=f(\{x_1\}\cap\{x_2\})=f(\{x_1\})\cap f(\{x_2\})\neq\emptyset,$$

矛盾.

必要性. $f:X\to Y$为双射,故$f(X)=Y$. 只需证明$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$即可.显然

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B),\quad \forall A,B\subset X,$$

另一方面,$\forall y\in f(A)\cap f(B)$,由于$f$满射,存在$x_1\in A,x_2\in B,s.t.f(x_1)=f(x_2)=y$,又$f$单,$x_1=x_2\in A\cap B$,因此$y\in f(A\cap B)$,综上

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B).$$

9. 证明以有理点为端点的区间全体构成的集合是可列集.

   证明 设A表示以有理点为端点的区间全体构成的集合,则A与$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$的一个子集等势,而$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$可列,故$A$可列.

10. 证明$\mathbb{R}$中互不相交的开区间族是有限集或可列集.

    证明 设A表示$\mathbb{R}$中互不相交的开区间族,$\forall I_r\in A$,定义映射

    $$f:A\to\mathbb{Q},f(I_r)=r$$

    其中r是I_r内部的一个有理数点,当$r_1\neq r_2$,有$I_{r_1}\neq I_{r_2}$,这样 A与$\mathbb{Q}$的一个子集等势,因此A可数.

11. 证明可列集的有限子集全体仍然是可列集.

    证明 不妨设这个可列集为$\mathbb{N}_+$,则$\mathbb{N}$的有限子集全体可依次罗列如下

    $$\begin{array}{ccc}\{1\} & \{1,2\} & \{1,2,3\}\cdots\\ \{2\} & \{2,2\} & \{2,3,4\}\cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

    可以按斜对角线(↗)遍历整个表而不遗漏,因此$\mathbb{N}$的有限子集全体构成的集合仍可列.

12. 设X是无穷集合, $|X|=\alpha$, B是一一满映射$f:X\to X$的全体, 求$|B|$.

    解 $|B|=2^\alpha$,易证B与2^X等势,因此$|B|=2^\alpha$.

    注意 该题的背景应该是**群论里的置换**.

13. 证明$\mathbb{R}^2$中至少有一个圆周不含有理点.

    证明 设$A=\{C_\lambda\}_{\lambda>0}$, 其中

    $$C_\lambda=\{(x,y)|x^2+y^2=\lambda^2\},$$

    则

    $$f:A\to\mathbb{R}_+,\quad f(C_\lambda)=\lambda^2$$

    为双射.A为不可数集, 若所有的圆周都含有有理点,则

    $$f:A\to\mathbb{Q}_+,\quad f(C_\lambda)=\lambda^2,$$

易验证$f:A\to\mathbb{Q}_+$为单射,故A可数,这与A不可数矛盾.

14. 设E是$\mathbb{R}^2$中的点集,E中的任意两点的距离都是有理数,证明E是可列集.

证明　对$\forall x\in E$,取定$y_0\in E$,则

$$x\mapsto(x,y_0)\mapsto r_x=x-y_0\in\mathbb{Q},$$

注意到第一个映射为双射,第二个映射为单射,故

$$\mathbb{Q}\text{可数}\Rightarrow E\times\{y_0\}\text{可数}\Leftrightarrow E\text{可数}.$$

15. 给出$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$到$\mathbb{R}$之间的一一对应.

证明　设$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\cdots\},P=\{x_1,x_2,\cdots\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,则存在双射$g$,

$$g:P\to\mathbb{Q},g(x_i)=r_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

定义映射$f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in P;\\ x, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\setminus P.\end{cases}$$

易验证f为满足条件的双射.

16. 设$E\subset\mathbb{R}$是可列集. 证明存在$x_0\in\mathbb{R}$,使得E和$E+x_0$不相交,其中$E+x_0=\{x+x_0|x\in E\}$.

证明　反证法. 假设$\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$$E\cap(E+x_0)\neq\emptyset,$$

设$y\in E\cap(E+x_0)$,则$y\in E$且存在$z\in E,s.t.z+x_0=y$,因此 $x_0\in E-E$,这导出$\mathbb{R}\subset E-E$,而E可数故$E-E$可数,从而$\mathbb{R}$可数矛盾.

17. 有理系数多项式的实零点称为代数数,不是代数数的实数称为超越数. 证明全体代数数集合的势为$\mathcal{N}_0$, 而超越数的势为c.

证明　设P表示全部有理系数多项式, A表示代数数, 定义映射

$$g:P\to O_P,$$

其中O_P表示有理系数多项式P在复数域内的全部根,则$g:P\to O_P$为双射,易证P可数,故O_p可数,而$A\subset O_P$,因此A可数$|A|=\mathcal{N}_0$, $|\mathbb{R}\setminus A|=|\mathbb{R}|=c$.

18. $\mathbb{R}$上的全体开集记为$\mathcal{T}$,证明$|\mathcal{T}|=c$.

证明　可以定义映射

$$f:\mathbb{R}\to\mathcal{T},\quad x\to O_x,$$

当$x\neq y$时,$O_x\neq O_y$,其中O_x是包含x的开区间.因此f为单射,从而

$$c=|\mathbb{R}|\leqslant|\mathcal{T}|\leqslant|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=c.$$

19. 设$E=A\cup B,|E|=c$,则A与B中至少有一个集合的势是c.

证明　由$E = A \cup B, |E| = c$知

$$|A| \leqslant c, \quad |B| \leqslant c,$$

若上述不等式中不等号全部严格成立,则A, B可数,从而$E = A \cup B$可数矛盾.

20. 设X是无限集合,给定映射$f : X \to X$, f不是恒同映射,证明存在X中的非空真子集E,使得$f(E) \subset E$.

证明　• 若$x \in X$为f的n周期点即

$$x = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f(x) = f^n(x).$$

则令$E = \{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$.此时$f(E) \subset E$.

•若f无周期点,任取$x \in X$,令$E = \{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots\}$,则$f(E) \subset E$.

21. 设A是无限集合,则存在映射$f : A \to A$, 使得$f(x) \neq x$但$f(f(x)) = x, \forall x \in A$.

22. 设$E \subset \mathbb{R}, |E| = c$,令$A = \{x = (x_1, x_2, \cdots) | x_i \in E, i = 1, 2, \cdots\}$, 试证明$|A| = c$.

证明　根据连续统假设, 不妨设$E = \mathbb{R}$,由$c^{\aleph_0} = c$知命题成立.

23. 设$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, 若$|A| = c$, 试证明必有一个$n_0$, 使得$|A_{n_0}| = c$.

证明　反证法. 假设$|A_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}$,则$A_n$为可数集,$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$可数.这与$|A| = c$矛盾.

24. 设X是给定集合, 记$f : 2^X \to 2^X$. 若f是单调的,即$\forall A, B \subset X$,只要$A \subset B$,就有$f(A) \subset f(B)$,证明存在$E \in 2^X$,使得$f(E) = E$.

证明　集合习题20给出的结论,存在非空集合B,使得

$$f(B) \subset B,$$

又f单调

$$\cdots \subset f^{n+1}(B) \subset f^n(B) \subset \cdots \subset f^2(B) \subset f(B) \subset B,$$

令

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n(B),$$

一方面,

$$E \subset f^k(B), \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(E) \subset f^{k+1}(B), \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(E) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} f^{k+1}(B) = E.$$

另一方面,

$$\forall x \in E \Longrightarrow x \in f^{k+1}(B) \Longrightarrow f^{-1}(x) \in f^k(B), \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{-1}(x) \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^k(B) \Longrightarrow x \in f\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} f^n(B)\right)$$

综上,

$$f(E) = E.$$

25. 记区间$[0, 1]$上的连续函数全体为$C[0, 1]$, 试证明$|C[0, 1]| = c$.

证明　由于常函数均为连续函数,因此

$$|C[0, 1]| \geqslant c,$$

又$\forall f \in C[0,1]$,令$a_f = \{f(r)|r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$,$f \to a_f$是单射,故

$$|C[0,1]| \leqslant c.$$

因此$|C[0,1]| = c$.

26. 记$\mathbb{R}$上一切实值函数的全体为Ψ, 试证明Ψ与$\mathbb{R}$不对等,且$|\Psi| = 2^c$.

证明 因为$2^{\mathbb{R}} = \{g : \mathbb{R} \to \{0,1\}\} \subset \Psi = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,所以$|\Psi| \geqslant 2^c$,又每一个$f$的图像都是$\mathbb{R}^2$的一个子集,故$|\Psi| \leqslant 2^{|\mathbb{R}^2|} = 2^c$.

1.3 n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$

1. 证明: $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

证明 设$x \in (A \cup B)'$,则存在$(x_n) \subset A \cup B, s.t. x_n \to x$,集合$A$或集合$B$含有$(x_n)$的无穷多项,因此$x \in A'$或$x \in B'$,故$x \in A' \cup B'$, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$; 因为$A' \subset (A \cup B)'$, $B' \subset (A \cup B)'$,因此 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$; 综上$(A \cup B)' = A' \cup B'$.

注意 本结论不可推广到

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'.$$

2. 证明: $A \subset \mathbb{R}^n$是开集$\Longleftrightarrow \forall B \subset \mathbb{R}^n$,有$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

证明 必要性. 由闭包的定义

$$A \cap \overline{B} = (A \cap B) \cup (A \cup B'); \quad \overline{A \cap B} = (A \cap B) \cup (A \cap B)',$$

只需证明$A \cap B' \subset (A \cap B)'$即可,由于$A$开,$\forall x \in A \cap B'$,$\exists (x_n) \in A \in B, s.t. x_n \to x$,因此 $x \in (A \cap B)'$.

充分性. 若A非开集,则$\exists x \in A \setminus A^\circ = \partial A$,令$B = A^c$,则有

$$x \in A \cap \overline{B}但\overline{A \cap B} = \emptyset,$$

矛盾.

3. 对任何的集A,证明$\overline{A}$, A', ∂A都是闭集.

证明 (1) 设$x \notin \overline{A}$,则$x \notin A \quad (x \in A^c)$且$x \notin A'$,故存在$x$的邻域$B(x,\delta)$不含$A$的任何点(即$B(x,\delta)$和$A$不相交),这导出$\overline{A}^c$是开集,因此$\overline{A}$是闭集.

(2) $x \notin A'$,故存在x的邻域$B(x,\delta)$不含A的任何点(即$B(x,\delta)$和A不相交),这导出A'^c是开集,因此A'是闭集.

(3) $\partial A = \overline{A} \setminus A^o = \overline{A} \cap A^{oc}$,因为$A^o$为开集,故$A^{oc}$为闭集,两闭集之交仍为闭集,故$\partial A$闭.

4. 若集合$A \subset \mathbb{R}^n$只有孤立点,证明A只能是有限集或可列集.

证明 设$x \in A$,由于x是A的孤立点,所以可定义

$$f : A \to \{B(x,\delta_x)\}, \quad f(x) = B(x,\delta_x),$$

使得当$x \neq y$时,$B(x,\delta_x) \neq B(y,\delta_y)$,因此$f$为单射,而$\{B(x,\delta_x)\}$为两两不相交的开集的子集故可数,因此$A$可数.

5. 若G_1, G_2是$\mathbb{R}^n$中的互不相交的开集,证明$G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

证明 反证法. 设$x \in G_1 \cap \overline{G_2}$,则$x \in G_1$且$x \in \overline{G_2}$,由开集的定义知存在$B(x,\delta) \subset G_2$且$B(x,\delta)$含有$G_2$中的点,这与$G_1 \cap G_2 = \emptyset$矛盾.

6. 若集合$A \subset \mathbb{R}^n$可数,试证明存在$x \in \mathbb{R}^n$,使得

$$A \cap (A + x) = \emptyset,$$

其中$A + x = \{y + x | y \in A\}$.

证明 同1.2节习题16方法完全相同,反证法,可得出$\mathbb{R}^n \subset A \setminus A$,而$A$可数,故$A - A$可数,这与$\mathbb{R}^n$不可数矛盾.

7. 设集合$A \subset \mathbb{R}^n$,若对于任意的$x \in \mathbb{R}^n$,存在$r > 0$,使得集合$A \cap B_r(x)$都是可列集,试证明集合A是可列集.

证明

$$A = A \cap \mathbb{R}^n = A \bigcap \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} B_r(x) \right) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [A \cap B_r(x)].$$

由可数个可数集之并仍然是可数集知A可数.

8. 设$A, B \subset \mathbb{R}$,证明$(A \times B)' = (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B})$.

证明

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B)' &\Longleftrightarrow \exists \text{互不相同的点列} \{(x_n, y_n)\} \subset A \times B, (x_n, y_n) \to (x,y) \\
&\Longleftrightarrow x_n \to x, y_n \to y \text{其中数列} (x_n) \text{和} (y_n) \text{至少有一个元素两两不同} \\
&\Longleftrightarrow (x,y) \in (\overline{A} \times B') \cup (A' \times \overline{B}).
\end{aligned}$$

9. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上单调上升函数,证明点集$F = \{x | \forall \varepsilon > 0, \text{有} f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0\}$是$\mathbb{R}$中的闭集.

证明

$$F = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x | f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) > 0\} \Leftrightarrow F^c = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x | f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) \leqslant 0\}.$$

由f单调递增,故

$$\{x | f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon) \leqslant 0\} = \{x | f(x+\varepsilon) = f(x-\varepsilon)\},$$

设

$$F^c = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x | f(x+\varepsilon) = f(x-\varepsilon)\}$$

若$x \in F^c$,则存在$\varepsilon > 0$,

$$f(x-\varepsilon) = f(x+\varepsilon),$$

任意$y \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$,由$f$单调递增

$$f(x-\varepsilon) \leqslant f(y) \leqslant f(x+\varepsilon), \forall y \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

故$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset F^c$,这说明$F^c$是开集,从而$F$闭.

10. 设$f \in C^1[a,b]$,令

$$E = \{x \in [a,b] | f(x) = 0\} \cap \{x \in [a,b] | f'(x) > 0\},$$

则E中的每一点皆是E的孤立点.

证明　设$x \in E$,则

$$f(x)=0, f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0,$$

由极限的保号性,$\exists \delta>0, \forall h\in B(0,\delta)\setminus\{0\}$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0 \Rightarrow f(x+h)\neq 0,\quad h\in B(0,\delta)\backslash\{0\} \Rightarrow f(y)\neq 0,\quad y\in B(x,\delta)\backslash\{x\}.$$

因此$B(x,\delta)\cap E=\{x\}$,x为E的孤立点.

11. 证明$\mathbb{R}^n$中的开集是F_σ集,闭集是G_δ集.

证明　由开集的构造定理,$\mathbb{R}^n$中的开集是至多可数个互不相交的半开矩体的并集,其中半开矩体指的是形如

$$[a_1,b_1)\times[a_2,b_2)\times\cdots[a_n,b_n)$$

的集合,而易证半开矩体为F_σ集,从而$\mathbb{R}^n$中的开集是F_σ集. 闭集的余集为开集,故闭集为G_δ集.

12. 令$f_k\in C(\mathbb{R}^n), k=1,2,\cdots,\lambda\in\mathbb{R}$, 证明集合

$$\{x|\limsup f_k(x)<\lambda\}$$

是F_σ集; 集合$\{x|\limsup f_k(x)\geqslant\lambda\}$是$G_\delta$集.

证明　只证集合$\{x|\limsup f_k(x)\geqslant\lambda\}$是$G_\delta$集,因为

$$\begin{aligned}\{x|\limsup f_k(x)\geqslant\lambda\}&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant k}\{x|f_n(x)\geqslant\lambda\}\\&=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant k}\bigcap_{m=1}^{\infty}\{x|f_n>\lambda-\frac{1}{m}\}\\&=\bigcap_{k,m\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant k}\{x|f_n>\lambda-\frac{1}{m}\},\end{aligned}$$

由f连续知$\{x|f_k>\lambda-\frac{1}{m}\}$为开集,$\bigcup_{n\geqslant k}\{x|f_n>\lambda-\frac{1}{m}\}$为开集,故$\{x|\limsup f_k(x)\geqslant\lambda\}$是$G_\delta$集.

注意　或者利用

$$\{x|\limsup f_k(x)\geqslant\lambda\}=\bigcap_{m\geqslant 1}\{x|\limsup f_k(x)>\lambda-\frac{1}{m}\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant k}\{x|f_n(x)>\lambda-\frac{1}{m}\}.$$

13. 证明$\mathbb{R}$上任何实函数f的连续点之集是G_δ集.

证明　定义f在x点的振幅为

$$\omega_f(x):=\lim_{\delta\to 0}\sup_{y,z\in B(x,\delta)}|f(y)-f(z)|,$$

则易证

$$f\text{在}x\text{连续}\Leftrightarrow\omega_f(x)=0.$$

且$\omega_f(x)$为关于x的连续函数,因此

$$\{x|f\text{在}x\text{连续}\}\Leftrightarrow\{x|\omega_f(x)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|\omega_f(x)<\frac{1}{n}\}.$$

而$\{x|\omega_f(x)<\frac{1}{n}\}$为开集.

14. 证明集合$A\subset\mathbb{R}^n$同时为F_σ集与G_δ集的充要条件是:存在序列$\{f_k\}\subset C(\mathbb{R}^n)$,使$f_k\to\mathcal{X}_A$.

证明 必要性.

$$A=\{x|\mathcal{X}_A\geqslant 1\}=\{x|\limsup f_k\geqslant 1\},$$

由题12知A为G_δ集.又

$$A=\{x|-X_A<0\}=\{x|\limsup -f_k<0\},$$

由题12知A为F_σ集.

充分性.**设集合$A\subset\mathbb{R}^n$同时为F_σ集与G_δ集,要构造f_k使得$f_k\to\mathcal{X}_A$.**

15. 设$\{G_k\}$是$\mathbb{R}^n$中开集的升列,有界闭集F是$\bigcup_k G_k$的子集,证明F含于某个G_k中.

证明 有界闭集$F\subset\mathbb{R}^n$是紧集,又$F\subset\bigcup_k G_k$和G_k为升列,故

$$F\subset\bigcup_{n_1}^{n_m}G_k=G_{n_m}.$$

16. 设$\{F_k\}$是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集的下降列,又若G是一个开集满足$\bigcap_k F_k\subset G\subset\mathbb{R}^n$,证明$G$必包含某个$F_k$.

证明 反证法.假设$\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists x_k\in F_k$但$x_k\notin G$,则由Bolzano-Weierstrass定理存在收敛子列(x_{n_k})

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in\bigcap_{k=1}^{+\infty}F_k\subset G,$$

因为G是开集,故存在一个邻域$B(x_0,\delta)\subset G$,这与$x_{n_k}(\forall k\in\mathbb{N})\notin G$矛盾.

17. 假设集合$F\subset\mathbb{R}$是可列非空闭集, 证明F必有孤立点.

证明 设$F=\{x_1,x_2,\cdots\}$,假设F无孤立点,则$F'=F$,即F为完全集(perfect set),非空的完全集必为不可数集(见*Rudin*《数学分析原理》定理*2.43*),矛盾.

18. 设$\{F_\alpha\}$是$\mathbb{R}^n$中一族有界闭集. 若任取其中有限个$F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$都有

$$\bigcap_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}\neq\emptyset,$$

证明$\bigcap_\alpha F_\alpha\neq\emptyset$.

证明 若$\bigcap_\alpha F_\alpha=\emptyset$,则任一有界闭集$F_1\subset\mathbb{R}^n=\bigcup_\alpha F_\alpha^c$,由$F_1$紧知

$$F_1\subset\bigcap_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}^c\Rightarrow F_1\cap\bigcap_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}=\emptyset,$$

这与任意有限交非空矛盾.

19. 设$A\subset\mathbb{R}^n$,证明从A的任一开覆盖中可取出可列子覆盖.

证明 设$A\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$,任意$x\in A$,存在$\alpha\in\Lambda$, s.t. $x\in O_\alpha$,由于O_α为开集,存在有理数对(x_i,r_i)使得$x\in B(x_i,r_i)\subset O_\alpha$且当$x\neq y$时$B(x_i,r_i)\cap B(y_i,r_i)=\emptyset$,因为$B(x_i,r_i)$可数,故

$$A\subset\bigcup_{x\in A}\{O_\alpha:x\in B(x_i,r_i)\subset O_\alpha\}$$

$\bigcup_{x\in A}\{O_\alpha : x \in B(x_i,r_i) \subset O_\alpha\}$为$A$的可列子覆盖.

20. 若$A,B\subset\mathbb{R}^n$是非空闭集且A有界,证明存在$a\in A$与$b\in B$,使得$\|a-b\|=d(A,B)$,其中$d(A,B)=\inf\{\|x-y\| : x\in A, y\in B\}$称为集合$A$与集合$B$之间的距离.

证明 设

$$f(x,y)=\|x-y\|,\quad x\in A, y\in B,$$

则$f : A\times B\to\mathbb{R}_+$为二元连续函数,由下确界的定义存在$(x_n,y_n)\subset A\times B$满足

$$f(x_n,y_n)\to\inf\{\|x-y\| : x\in A,y\in B\}=d(A,B)\geqslant 0.$$

由于A是紧集,$(x_n)\subset A$有收敛子列$(x_{n_k})\to a$,故

$$\|y_{n_k}-a\|\leqslant\|a\|+\|y_{n_k}-x_{n_k}\|\to\|a\|+d(A,B),$$

从而(y_{n_k})也为B中有界序列,由Weierstrass定理有收敛子列$(y_{\sigma(n)})\to b$,由于B闭,故$b\in B$,结合f的连续性

$$(a,b)=\lim_{n\to\infty}f(x_{\sigma_n},y_{\sigma_n})=d(A,B).$$

21. 试问由$\mathbb{R}$中的一切开集构成的集族的势是什么?

解 和实数集等势c.设A表示一切开集构成的集族,则

$$c\leqslant|A|\leqslant c\times c=c.$$

22. 设$E\subset\mathbb{R}^n$. 若对任意$x\in\mathbb{R}^n$,存在$y\in E$,使得$d(x,y)=d(x,E)$,试证明集合E是闭集.

证明 由题知任一$x\in E^c$,存在$y\in E$使得

$$r=d(x,y)=d(x,E)>0,$$

这样$B(x,\frac{r}{2})$不含E中的元素,因此$B(x,\frac{r}{2})\subset E^c$,故$E^c$为开集,$E$为闭集.

23. 设$F_1,F_2\subset\mathbb{R}^n$是互不相交的闭集,证明存在互不相交的开集$G_1,G_2$,使$F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$.

证明 作$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}$的连续函数

$$f(x)=\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)},$$

则$f(F_1)=0,f(F_2)=1$,令

$$G_1=f^{-1}\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\quad G_2=f^{-1}\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

则$F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$且$G_1\cap G_2=\emptyset$.

注意 法2:令

$$G_a=\{x|d(x,F_1)<d(x,F_2)\},\quad G_2=\{x|d(x,F_2)<d(x,F_2)\},$$

则G_1和G_2满足要求.

法3: 任取$x\in F_1$,则$d(x,F_2)>0$,取$\delta_x=\frac{1}{2}d(x,F_2)$,故

$$F_1\subset\bigcup_{x\in F_1}B(x,\delta_x),$$

同理可构造

$$F_2 \subset \bigcup_{y \in F_2} B(y, \delta_y),$$

其中$\delta_y = \frac{1}{2}d(y, F_1)$,则$G_1$和$G_2$为满足条件的开集.

24. 设$F \subset \mathbb{R}^n$是闭集,试构造连续函数列$\{f_k\}$,使得

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \mathcal{X}_F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

证明　令

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + k \cdot d(x, F)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

易验证$\{f_k\}$为满足条件的函数列.

推论 1.1

设$G \subset \mathbb{R}^n$是开集,则存在连续函数列$\{g_k\}$,使得

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = \mathcal{X}_G(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

♡

证明　因为G开,故G^c闭集,令

$$g_k(x) = 1 - \frac{1}{1 + k \cdot d(x, G^c)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

即可.

25. 证明函数f是$\mathbb{R}^n$上连续函数的充分必要条件是,对所有一维开集G,原像集$f^{-1}(G)$是$\mathbb{R}^n$中的开集.

证明　必要性. 任一$x_0 \in f^{-1}(G)$,则$f(x_0) = y_0 \in G$,由于G开,存在$U(y_0, \varepsilon) \subset G$,又$f$在$x_0$连续,存在$B(x_0, \delta)$, $s.t. f(B(x_0, \delta)) \subset U(y_0, \varepsilon)$,故

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(G),$$

所以x_0为$f^{-1}(G)$内点,由x_0任意性知$f^{-1}(G)$为开集.

充分性. 设$x \in \mathbb{R}^n$, 任意$\varepsilon > 0$,$U(f(x), \varepsilon)$为$\mathbb{R}$中的开集,故$f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$为$\mathbb{R}^n$中的开集,又$x \in f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$,所以存在$B(x, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$即$f(B(x, \delta)) \subset U(f(x), \varepsilon)$,从而$f$在$x$点连续.

26. 设$F \subset \mathbb{R}^n$是有界闭集, E是F的一个无限子集,试证明$E' \cap F \neq \emptyset$. 反之,若$F \subset \mathbb{R}^n$且对F的任意无限子集E都有$E' \cap F \neq \emptyset$,证明F是有界闭集.

证明　1. 设$(x_n) \subset E \subset F$,其中$(x_n)$为两两不同的序列,由Weierstrass-Bolzano凝聚点定理$\exists x \in E'$,由F闭知$x \in F$,所以$E' \cap F \neq \emptyset$.

2. 先证F为有界集,否则存在$(x_n) \subset F$, $\|x\| \geqslant n$,令$E = (x_n)$,则$E' = \emptyset$这与$E' \cap F \neq \emptyset$矛盾.

再证F闭,设$E = (x_n) \subset F$且$x_n \to x_0$,则$\{x_0\} = E'$,由$E' \cap F \neq \emptyset$知$x_0 \in F$,故F闭.

27. 设$G_n \subset [0, \infty)$是开集列.若已知G_n在$[0, \infty)$稠密,证明$\bigcap_n G_n$也在$[0, \infty)$稠密.

证明 Baire定理.从$\overline{A}=X$的定义出发,

$$\overline{A}=X\Longleftrightarrow\forall O\subset X,\ O\cap A\neq\emptyset.$$

只需证明$\forall O\subset X$,O为开集,$X=[0,\infty)$,

$$O\cap\bigcap_{n=0}^{\infty}G_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}O\cap G_n\neq\emptyset.$$

因为$\overline{G_1}=X$,所以$O\cap G_1\neq\emptyset$,开集之交为开集,$O\cap G_1\neq\emptyset$为非空开集,存在开集O_2,

$$\overline{O_2}\subset O\cap G_1,\ diam(\overline{O_2})<\frac{1}{2},$$

对于开集G_2,因为$\overline{G_2}=X$,$G_2\cap O_2$为非空开集,存在开集O_3,

$$\overline{O_3}\subset G_2\cap O_2,\ diam(\overline{O_3})<\frac{1}{3},$$

依次,对于开集G_n,因为$\overline{G_n}=X$,$G_n\cap O_n$为非空开集,存在开集O_{n+1},

$$\overline{O_{n+1}}\subset G_n\cap O_n,\ diam(\overline{O_{n+1}})<\frac{1}{n+1},$$

由Cantor闭集套定理知$\exists x\in\cap_{n=2}^{\infty}\overline{O_n}$,这个$x\in O\cap G_n,\forall n\geqslant 1$.证毕.

第 2 章 Lebesgue测度

2.1 Lebesgue外测度与可测集

1. 设$A \subset \mathbb{R}^n, m^*(A) = 0$, 证明: 对于$\forall B \subset \mathbb{R}^n$有

$$m^*(A \cup B) = m^*(B).$$

证明 由外测度的单调性和次可数可加性

$$m^*(B) \leqslant m^*(A \cup B) \leqslant m^*(A) + m^*(B) = m^*(B).$$

2. 证明$\mathbb{R}^n$中任意的有界集E的外测度有限.

证明 因为E有界,故存在球$B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$满足$E \subset B(0, R)$,由外测度的单调性

$$m^*(E) \leqslant m^*(B(0, R)) = |B(0, R)| < +\infty.$$

3. 设$A, B \subset \mathbb{R}^n, m^*(A), m^*(B) < \infty$, 试证明

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A).$$

证明 由$A \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup B$及外测度的单调性及次可数可加性得

$$m^*(A) - m^*(B) \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A).$$

交换A, B的位置得

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leqslant m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A).$$

4. 设$E = \{(\xi, \eta) | \xi, \eta$之一是有理数$\} \subset \mathbb{R}^2$,求$m^*(E)$.

证明 由题知

$$E \subset (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \bigcup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}),$$

而

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \times \mathbb{R},$$

由外测度的次可数可加性

$$m^*(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\{r_n\} \times \mathbb{R}) = 0.$$

同理可得$m^*(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) = 0$,由外测度的单调性知$m^*(E) = 0$.

注意 $\{r_n\} \times \mathbb{R}$表示平面中的直线,Lebesgue测度为0.

5. 已知$E \subset \mathbb{R}, m^*(E) > a > 0$,证明存在子集$A \subset E$, 使$m^*(A) = a$.

证明 设

$$f(x)=m^*(E\cap(-\infty,x)),\quad x\in\overline{R},$$

则$f(-\infty)=0,f(+\infty)=m^*(E)$,(由题3)易证$f$为连续函数,由连续函数的介值定理知存在$x_0\in\mathbb{R}$,使得

$$f(x_0)=m^*(E\cap(-\infty,x_0))=a.$$

令$A=E\cap(-\infty,x_0)\subset E$即可.

6. 至少含有一个内点的集合的外测度能否为零?

解 不能,至少含有一个内点则至少包含一个开球,由外测度的单调性知该集合测度必严格大于零.

7. 已知$A\subset B\subset\mathbb{R}^n$, A是可测集, 且$m(A)=m^*(B)=0$,证明B是可测集.

证明 因为A可测,故$\forall T\subset\mathbb{R}^n$,

$$m^*(T)=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c),$$

由外测度的单调性

$$m^*(T\cap A)\leqslant m^*(A)=0,\quad m^*(T\cap B)\leqslant m^*(B)=0.$$

由$A\subset B$知$B^c\subset A^c$,因此

$$m^*(T\cap B^c)\leqslant m^*(T\cap A^c)=m^*(T).$$

由Carathedory条件,B为可测的零测度集.

8. 对于任意集$E\subset\mathbb{R}^n$, 证明存在包含E的G_δ集H, 使得 $m(H)=m^*(E)$. 此题中所构造的集合H称为集合E的等测包.

证明 若$m^*(E)=+\infty$,令$H=\mathbb{R}^n$即可.不妨设$m^*(E)<+\infty$,由外测度的定义 $\forall n>0$, $\exists$开集$O_n\supset E$满足

$$m(O_n)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{n},$$

令$H=\bigcap_{n=1}^{+\infty}O_n$,则$H$为$G_\delta$集,且$E\subset H$, 由外测度的单调性

$$m(H)\leqslant m(O_n)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{n},$$

由n的任意性及外测度的单调性

$$m(H)\leqslant m^*(E)\leqslant m(H).$$

9. 若$\{E_k\}$是$\mathbb{R}^n$上单调上升点列集,试证明

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right).$$

证明 由E_k递增知$E_k\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k=\lim_{k\to\infty}E_k$,由外测度的单调性

$$\limsup_{k\to\infty}m^*(E_k)\leqslant m^*\left(\lim_{k\to\infty}E_k\right),$$

另一方面,设H_k是E_k的等测包,则

$$E_k \subset H_k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} E_k = \liminf_{k\to\infty} E_k \subset \liminf_{k\to\infty} H_k,$$

因此由外测度的单调性及测度的Fatou引理

$$m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) \leqslant m\left(\liminf_{k\to\infty} H_k\right) \leqslant \liminf_{k\to\infty} m(H_k) = \liminf_{k\to\infty} m^*(E_k),$$

综上,

$$\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right).$$

10. 设$A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \cup B$是有限可测集. 若$m(A\cup B) = m^*(A) + m^*(B)$, 证明$A, B$皆为可测集.

证明　只证A为可测集,任意$T \subset \mathbb{R}^n$,设$H_1 \supset A$和$H_2 \supset$分别是A和B的等测包,则

$$m(A\cup B) = m(H_1) + m(H_2),$$

这导出

$$m((H_1 \cup H_2)\setminus(A\cup B)) = m(H_1\cup H_2) - m(A\cup B) \leqslant m(H_1) + m(H_2) - m(A\cup B) = 0,$$

且

$$m(H_1\cap H_2) = m(H_1) + m(H_2) - m(H_1\cup H_2) = 0.$$

进一步地得

$$H_1 \setminus A \subset [(H_1\cup H_2)\setminus(A\cup B)] \cup (H_1\cap H_2),$$

因此$m^*(H_1\setminus A) = 0$,零测度集可测故$A = H_1 \setminus (H_1\setminus A)$可测.

11. 设$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是一一满映射,且保持点集的外测度不变,证明对于$E \in \mathcal{M}$,有$T(E) \in \mathcal{M}$.

证明　由于T双射,任意集合$Y \subset \mathbb{R}^n$,存在集合$X \subset \mathbb{R}$使得$T(X) = Y$,结合T保外测度及E可测的Carathedory条件

$$\begin{aligned} m^*(Y\cap T(E)) + m^*(Y\cap (T(E))^c) &= m^*(T(X\cap E)) + m^*(T(X\cap E)) \\ &= m^*(X\cap E) + m(X\cap E^c) \\ &= m^*(X) = m^*(Y). \end{aligned}$$

由可测集的Carathedory条件$T(E)$可测.

12. 试证明任何一个正的可测集E中含有不可测集.

证明　参考本节例4.

13. 设$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. 若对于$[a,b]$中的任意可测集E, $f(E)$必为$\mathbb{R}$中的可测集. 证明: 当Z是$[a,b]$中的零测集时, 必有$m(f(Z)) = 0$.

证明　反证法. 若$f(Z)$为正测度集即$m(f(Z)) > 0$,由上题,$f(E)$存在一个不可测子集$D \subset f(Z)$,$f^{-1}(D)\cap Z$为Z的子集从而为零测度集可测,这就导出$D = f(f^{-1}(D)\cap Z)$可测矛盾.

14. 给定$[0,1]$中可测集列$\{E_j\}, j = 1, 2\cdots$. 若$\forall \varepsilon > 0$总存在某个集合E_k, 使得$m(E_k) >$

$1-\varepsilon$, 证明:

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)=1.$$

证明　显然

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\leqslant 1.$$

任意$\varepsilon>0$,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\geqslant m(E_k)>1-\varepsilon,$$

由ε的任意性知

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\geqslant 1.$$

因此,

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)=1.$$

15. 在$[a,b]$上能否作一测度为$b-a$,但又不同于$[a,b]$的闭集?

    解　不能. 假若有这样的闭集$F\subsetneq[a,b]$,令$G=[a,b]\setminus F$,则G为非空开集,$m(G)>0$,但$m(G)=m([a,b])-m(F)=0$矛盾.

16. 若E是$[0,1]$中的零测集,其闭包$\overline{E}$是否也是零测集?

    解　未必. 例如$E=\mathbb{Q}\cap[0,1]$,因为E可数,故$m(E)=0$但$m(\overline{E})=m([0,1])=1$.

17. 设E是$\mathbb{R}^n$中不可测集,设A是$\mathbb{R}^n$中零测集,证明$E\cap A^c$是不可测集.

    证明　若A为零测集,则$A\cap E$为零测集,若$E\cap A^c$可测,则

$$A\cup E^c=(E\cap A^c)^c=(A\cap E)\cup E^c$$

可测,从而

$$E^c=(A\cup E^c)\setminus(A\cap E)$$

可测, E可测矛盾.

18. 证明对于任意可测集A,B, 恒有

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B).$$

证明　由集运算和测度的可列可加性

$$A\cup B=(A\setminus(A\cap B))\cup B\Rightarrow m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B).$$

19. 设A,B是$[0,1]$中两个可测集, 且$m(A)+m(B)>1$, 试证明$m(A\cap B)>0$.

证明 由$A \cup B \subset [0,1]$得$m(A \cup B) \leqslant 1$, 再用加法公式

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) > 1 - m(A \cup B) > 0.$$

20. 设A, B, C是$[0,1]$中的三个可测集, 且

$$m(A) + m(B) + m(C) > 2,$$

试证明$m(A \cap B \cap C) > 0$.

证明 由集运算

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c,$$

由测度的次可列可加性,

$$m((A \cap B \cap C)^c) \leqslant m(A^c) + m(B^c) + m(C^c) \leqslant 3 - (m(A) + m(B) + m(C)) < 1,$$

故

$$m(A \cap B \cap C) = 1 - m((A \cap B \cap C)^c) > 0.$$

21. 证明存在开集$G \subset \mathbb{R}^n$,使$m(\overline{G}) > m(G)$.

证明 见汪林《实分析中的反例》P139. 先从闭区间$[0,1]$取走长为$1/4$的开区间,再从剩下的两个闭区间取走$1/4^2$长度的开区间,不断地作下去,把所取的开区间之并记为 G,则

$$m(G) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

但$\overline{G} = [0,1]$,因此$m(G) < m(\overline{G})$.

22. 证明位于OX轴上任何集E, 在OXY平面上是可测集,且其测度为零.

证明 只要证明$m^*(E) = 0$即可. 实际上,可得到$m^*(OX) = 0$.因为$m^*(OX) = \lim_{n\to\infty} m^*(I_n)$,其中$I_n = [-n, n] \times \{0\}$.易证$m(I_n) = 0$.

23. 证明有理数集是$\mathbb{R}$中可测集,, 且测度是0.

证明 有理数集$\mathbb{Q}$可数,不妨设$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$,则

$$m^*(\mathbb{Q}) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} m^*(\{r_i\}) = 0.$$

零测度集可测.

24. 设$E \subset \mathbb{R}$,且$m(E) > 0$, 试证明存在$x_1, x_2 \in E$,使$x_1 - x_2$是有理数.

证明 m

25. 证明$E \subset \mathbb{R}^n$是可测集的充分必要条件是:对于任何$\varepsilon > 0$,存在开集G_1 与G_2, $G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon.$$

证明 必要性. E可测$\Leftrightarrow$ E^c可测$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集$E \subset G_1, m(G_1 \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$; 存在开集$E^c \subset G_2, m(G_2 \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow m(G_1 \cap G_2) = m((G_1 \setminus E) \cup (G_2 \setminus E^c)) < \varepsilon$.

充分性. 若$\forall\varepsilon>0$, 存在$G_2^c\subset E\subset G_1$,由Carathedory条件

$$m^*(T)=m^*(T\cap G_1)+m^*(T\cap G_1^c).$$

由外测度的单调性

$$\begin{aligned}
m^*(T)&\leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\\
&\leqslant m^*(T\cap G_1)+m^*(T\cap G_2)\\
&\leqslant m^*(T\cap G_1)+m^*(T\cap G_1^c)+m^*(T\cap(G_2\setminus G_1^c))\\
&\leqslant m^*(T)+m^*(G_1\cap G_2)\\
&\leqslant m^*(T)+\varepsilon,\quad \forall T\subset\mathbb{R}^n.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

由ε的任意性得

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

26. 设E是可测集, $m(E)>0$. 证明存在$x\in E$,使得对于任意$\delta>0$, 有$m(E\cap B(x,\delta))>0$.

证明 反证法. 若$\forall x\in E,\exists\delta_x>0$使得$m(E\cap B(x,\delta_x))=0$.由Lindolof定理

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{+\infty}E\cap B(x_i,\delta_{x_i}),$$

这导出$m(E)=0$矛盾.

27. 若$\{E_k\}$是$\mathbb{R}^n$中可测集合列,证明:

(1)$m\left(\liminf_{k\to\infty}E_k\right)\leqslant\liminf_{k\to\infty}m(E_k)$;

(2) 若存在k_0, 使得$m\left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)<\infty$,则

$$m\left(\limsup_{k\to\infty}E_k\right)\geqslant\limsup_{k\to\infty}m(E_k).$$

证明 (1).由下极限的定义

$$\liminf_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{n\geqslant1}\bigcap_{k\geqslant n}E_k=\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k\geqslant n}E_k,$$

因此

$$m\left(\liminf_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(\bigcap_{k\geqslant n}E_k).$$

又

$$\bigcap_{k\geqslant n}E_k\subset E_n$$

所以

$$m(\bigcap_{k\geqslant n}E_k)\leqslant m(E_n)$$

综上

$$m\left(\liminf_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(\bigcap_{k\geqslant n}E_k)\leqslant\liminf_{k\to\infty}m(E_k).$$

(2)由上极限的定义知

$$\limsup_{k\to\infty} E_k \subset \bigcup_{k=k_0}^{+\infty} E_k =: E,$$

应用(1)的结论

$$\begin{aligned}+\infty > m(E) - m\left(\limsup_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(E \setminus \limsup_{k\to\infty} E_k\right)\\ &= m(E \bigcap \liminf_{k\to\infty} E_k^c) \leqslant \liminf_{k\to\infty} m(E \setminus E_k)\\ &= m(E) - \limsup_{k\to\infty} m(E_k),\end{aligned}$$

因此

$$m\left(\limsup_{k\to\infty} E_k\right) \geqslant \limsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

28. 设$E \subset \mathbb{R}^n, H \supset E, H$是可测集. 若$H \setminus E$中任意可测子集皆为零测集, 试问$m(H) = m^*(E)$吗?

解 $m(H) = m^*(E)$. 设$G \supset E$为E的等测包,则$m^*(E) = m(G)$且$H \setminus G \subset H \setminus E$,由题知$m(H \setminus G) = 0$,因此

$$m(H) \geqslant m^*(E) = m(G) \geqslant m(H \setminus (H \setminus G)) = m(H) - m(H \setminus G) = m(H).$$

29. 设$E \subset \mathbb{R}^n$, 证明存在G_δ型集H且$H \supset E$, 使得对于任意一个可测集$A \subset \mathbb{R}^n$,有$m^*(E \cap A) = m(H \cap A)$.

证明 设H为E的等测包, 结合集A可测,由Carathedory条件

$$\begin{aligned}m(H) = m*E &= m*(E \cap A) + m*(E \cap A^c)\\ &\leqslant m*(H \cap A) + m*(H \cap A^c)\\ &= m(H \cap A) + m(H \cap A^c)\\ &= m(H).\end{aligned}$$

因此$m*(E \cap A) = m(H \cap A)$.

30. 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中可测集列, $m(E_k) = 1, k = 1, 2, \cdots$, 证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

证明

$$m\left(\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) = m(\bigcup_{k=1}^{n} E_k^c) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(E_k^c) = 0.$$

因此$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$.

31. 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中可测集列, 且满足$\limsup_{k\to\infty} m(E_n) = 1$,证明: 对于$\forall 0 < a < 1$, 必存在$\{E_{n_k}\}$, 使得

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > a.$$

证明　由$\limsup_{k\to\infty} m(E_n)=1$知, $\forall\varepsilon>0,\exists\{E_{n_k}\}$满足

$$m(E_{n_k})>1-\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

因此

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)=1-m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{n_k}^c\right)>1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k}>1-\varepsilon.$$

32. 设$E\subset[a,b]$是可测集, $I_k\subset[a,b](k=1,2,\cdots)$是开区间列, 满足

$$m(I_k\cap E)\geqslant\frac{2}{3}|I_k|,\quad k=1,2,\cdots.$$

证明:

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right)\cap E\right)\geqslant\frac{1}{3}m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right).$$

证明　见周民强《实变函数题解指南》.

33. 设$E_1,\cdots,E_k$是$[0,1]$中的可测集, 且有$\sum_{j=1}^{k}m(E_j)>k-1$. 证明:

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{k}E_j\right)>0.$$

证明

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{k}E_j^c\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}(1-m(E_i))<1.$$

因此$m\left(\bigcap_{j=1}^{k}E_j\right)>0$.

34. 记$I=[0,1]\times[0,1], E=\{(x,y)\in I|\cos(x+y)$是无理数$,|\sin x|<\frac{1}{2}\}$, 求$m(E)$.

解　记$\tilde{E}=\{(x,y)\in I|\cos(x+y)$是有理数$,|\sin x|<\frac{1}{2}\}$, 则$m(\tilde{E})=0$.而$\tilde{E}\cap E=\emptyset$, 因此$m(E)=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$.

35. 证明:$\mathbb{R}^n$中的Borel集族$\mathcal{B}$有连续统势.

证明　■.

36. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是可测集, $\alpha>0$, 记$\alpha E=\{\alpha x|x\in E\}$. 证明$\alpha E\in\mathcal{M}$且 $m(\alpha E)=\alpha^n m(E)$.

证明　易证对任意开矩体, $|\alpha I|=\alpha^n|I|$.利用Lebesgue可测集的正规性即得结论.

2.2 Lebesgue可测函数

1. 设f是可测集E上的可测函数, 证明:$\forall t$, 集合$E(f=t)$是可测集.

证明

$$E(f=t)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(t-\frac{1}{n}<f<t+\frac{1}{n}\right).$$

2. 设f是可测集E上的实值函数, 证明f在E上是可测的当且仅当对一切有理数r, $E(f>$

r)是可测集.

证明 $\forall t\in\mathbb{R}$, 由有理数的稠密性$\exists\{r_n\}\searrow t$,故

$$\{f\leqslant t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\leqslant r_n\}.$$

可测.

3. 设f是可测集E上的可测函数, 证明:对于任意开集$G\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(G)$是可测集; 对于$\mathbb{R}$中的闭集F, $f^{-1}(F)$是可测集.

证明 由$\mathbb{R}$中开集的构造定理知$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$, 其中$I_i$为$\mathbb{R}$中互不相交的开区间,因此

$$f^{-1}(G)=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(I_i)$$

可测.又F为闭集当且仅当F^c为开集,故

$$f^{-1}(F)=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus F^c)=E\setminus f^{-1}(F^c)$$

可测.

4. 设$f\in C(\mathbb{R}^n)$, 证明: f在$\mathbb{R}^n$的任何可测集E上都可测.

证明 由f的连续性知,$\forall t>0$, $f^{-1}(-\infty,t)$为开集为可测集,因此f在可测集E上可测.

5. 设f是$\mathbb{R}$上的可测函数, 证明对于$\forall a\in\mathbb{R}$, $f(ax)$仍是$\mathbb{R}$上的可测函数.

证明 当$a>0$时,注意到

$$\{f(ax)>t\}=\frac{1}{a}\{f(x)>t\},$$

由习题2.1知,E可测则$\frac{1}{a}E$可测.

同理可讨论$a<0$时与$a=0$情形.

6. 设f是可测集E上的可测函数, 证明$[f(x)]^3$也是E上的可测函数.

证明 设$g(x)=x^3$, 则g为连续函数, 故$(g\circ f)(x)$可测.

7. 设f是$\mathbb{R}$上可测函数,证明$f(x^2)$, $f(1/x)$(当$x=0$时规定$f(1/0)=0$)都是$\mathbb{R}$上的可测函数.

证明 设V是$\mathbb{R}$上的任一开集,设$g(x)=x^2$,则$f(x^2)=f(g(x))$,由集运算

$$(f\circ g)^{-1}(V)=g^{-1}(f^{-1}(V)),$$

因为f为可测函数,故$f^{-1}(V)$为可测集,从而存在G_δ型集$H\supset f^{-1}(V)$使得

$$m(H\setminus f^{-1}(V))=0,$$

令$Z_1=H\setminus f^{-1}(V)$,则$m(Z_1)=0$.令集合$Z_2\subset H$满足

$$f^{-1}(V)=(H\setminus Z_1)\cup Z_2,$$

则易得$m(Z_2)=0$,由集合运算

$$g^{-1}(f^{-1}(V))=[g^{-1}(H)\setminus g^{-1}(Z_1)]\cup g^{-1}(Z_2),$$

显然$g^{-1}(Z_1)$和$g^{-1}(Z_2)$为零测度集故Lebesgue可测,由g连续,H为G_δ型集知$g^{-1}(H)$可测,故$g^{-1}(f^{-1}(V))$为可测集,$f(g(x))$为可测函数.

当$g(x)=\frac{1}{x}$时,证明基本不作改变.

8. 设f是$[a,b]$上的函数. 若f在任意闭区间$[\alpha,\beta](a<\alpha<\beta<b)$上可测. 证明$f$在$[a,b]$上可测.

证明

$$[a,b]\cap[f>t]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]\cap[f>t]\right),\quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

9. 设$f^2(x)$是E上的可测函数, $E(f>0)$是可测集. 证明:f是E上的可测函数.

证明 因为f^2在E上可测,故

$$E(f^2=0)=E(f=0)\Longrightarrow E(f=0)\text{可测}.$$

注意到$E(f>0)$可测, 因此

$$E(f^2>0)\Longrightarrow E(f>0)\cup E(f<0)\Longrightarrow E(f<0)\text{可测}.$$

当$\forall t>0$时,有

$$E(f^2<t^2)=E(-t<f<t)\text{可测}\Longrightarrow E(f<t)=E(-t<f<t)\cup(f<0)\text{可测}.$$

进一步,

$$E(f\leqslant -t)=E(f<0)\setminus E(-t<f<t)\text{可测}.$$

综上, f为E上的可测集.

10. 若f在$[a,b]$上可微, 证明$f'(x)$可测.

证明

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

对每个固定的n, $f_n(x)$是连续函数从而可测, 可测函数的极限函数仍可测, 因此$f'(x)$可测.

11. 令$E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$, $\{E_j\}$是互不相交的可测子集, 给定E上的函数$f(x)$. 试证明$f\in\mathcal{M}(E)$的充分必要条件是$f\in\mathcal{M}(E_j)$.

证明 充分性. 若$f\in\mathcal{M}(E_j)$, 则$\forall t\in\mathbb{R}$, $E_j(f<t)$可测,因此

$$E(f<t)=\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)(f<t)=\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j(f<t))$$

可测.

必要性. 若$f\in\mathcal{M}(E)$, 则$\forall t\in\mathbb{R}$, $E(f<t)$可测,因此

$$E_i(f<t)=E_i\cap E(f<t),\quad i=1,2,\cdots$$

可测, 从而$f\in\mathcal{M}(E_i)$.

12. 若$f(x)$是可测集E_1和E_2上的非负可测函数. 证明f也是$E_1\cup E_2$上的非负可测函数.

证明 由已知$\forall t\in\mathbb{R}$, $E_1(f<t)$和$E_1(f<t)$可测, 因此

$$(E_1\cup E_2)(f<t)=E_1(f<t)\cup E_2(f<t)$$

可测.

13. 设f是有限可测函数, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$单调, 证明复合函数$g(f(x))$可测.

证明 因为$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$单调, 因此$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是几乎处处连续的, 不妨认为$g$连续, 从而复合函数$g(f(x))$可测.

14. 给定可测集E上的有限可测函数f_1,f_2, 若$g\in C(\mathbb{R}^2)$. 证明$g(f_1(x),f_2(x))$是可测函数.

证明 由f_1,f_2为可测函数知存在简单函数函数列$(\varphi_n),(\psi_n)$满足

$$\varphi_n(x)\to f_1(x),\quad \psi_n(x)\to f_2(x),\quad a.e.\,E,\ n\to\infty.$$

由g连续知$g((\varphi_n(x),\psi_n(x))$为简单函数,因此

$$g(f_1(x),f_2(x))=\lim_{n\to\infty}g((\varphi_n(x),\psi_n(x))\quad a.e.\,E,$$

为可测函数.

15. 设二元函数$f(x,y)$关于x可测, 关于y连续. 证明$\varphi(x)=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}f(x,y)$可测.

证明 对$\forall t\in\mathbb{R}$,注意到

$$\begin{aligned}\{x:\varphi(x)<t\}=\{x:\max_{0\leqslant y\leqslant 1}f(x,y)<t\}&\\=\{x:\forall y\in[0,1],f(x,y)<t\}&\\=\{x:\forall y\in[0,1]\cap\mathbb{Q},f(x,y)<t\}&\text{注意连续性与稠密性}\\=\bigcap_{y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\{x:f(x,y)<t\}&\end{aligned}$$

$\{x:f(x,y)<t\}$为可测集, 因此$\varphi(x)$为可测函数.

16. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是紧集, $F\subset C(E)$, 证明$\varphi(x)=\sup_{f\in F}f(x)$可测.

证明 对$\forall t\in\mathbb{R}$,注意到

$$\begin{aligned}\{x:\varphi(x)\leqslant t\}&=\{x:\sup_{f\in F}f(x)\leqslant t\}\\&=\{x:\forall f\in F,f(x)\leqslant t\}\\&=\bigcap_{f\in F}\{f\leqslant t\}.\end{aligned}$$

由于$f\in C(E)$, 故$f^{-1}(-\infty,t)]$为E中的闭集, 闭集的任意交仍为闭集. 因此$E(\varphi\leqslant t)$为闭集从而可测.

17. 设$m(E)<\infty$, f是E上的几乎处处有限的非负可测函数. 证明: 对于任意的$\varepsilon>0$, 存在闭集$F\subset E$, 使得$m(E\setminus F)<\varepsilon$, 而在$F$上, $f(x)$有界.

证明 因为$\{|f|=\infty\}=E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f|\leqslant k\}$, 由于$f$是$E$上的几乎处处有限函数,因此

$$m(|f|=\infty)=m(E)-m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f|\leqslant k\}\right)=0\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}m(|f|\leqslant k)=m(E)<\infty.$$

存在k_0, $E_0=\{|f|\leqslant k_0\}$满足$m(E\setminus E_0)=m(E)-m(E_0)<\frac{\varepsilon}{2}$,由Lebesgue测度的正规性$\exists F\subset E_0$使得$m(E_0\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}$,因此

$$m(E\setminus F)\leqslant m(E\setminus E_0)+m(E_0\setminus F)<\varepsilon.$$

f在E_0上有界, 故在F上有界.

18. 设f是可测集E上几乎处处有限的可测函数, $m(E)<\infty$. 证明: 对于任意的$\varepsilon>0$, 存

在E上的有界科尔函数$g(x)$, 使得

$$m(E(|f-g|>0))<\varepsilon.$$

证明 作点集$E_k=\{x\in E:|f(x)|>k\}$, 则

$$m(E_\infty)=0,\quad E_{k+1}\subset E_k,\quad X=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

存在k_0使得$m(E_{k_0})<\varepsilon$,作函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in E\backslash E_{k_0}\\ 0 & x\in E_{k_0}\end{cases}$$

则$g(x)$为E上的有界可测函数,且

$$m(E(|f-g|>0))\subset E_{k_0}<\varepsilon.$$

19. 设$f(x)$与$g(x)$是$(0,1)$上的可测函数, 且对任意的$t\in\mathbb{R}$,有

$$m(\{x\in(0,1)\mid f(x)\geqslant t\})=m(\{x\in(0,1)\mid g(x)\geqslant t\})$$

(即互为等测包). 若$f(x)$与$g(x)$都是单调下降且左连续的函数,证明

$$f(x)=g(x),\quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

证明 见周民强《实变函数论》教材.■

20. 设$m(E)<\infty, f\in\mathcal{M}(E)$, 定义函数

$$\varphi(t)=m(E(f>t)).$$

证明: $\varphi(t)$是递减右连续函数, 且几乎处处左连续.

证明 设$t_1>t_2$, 则$E(f>t_1)\subset E(f>t_2)$, 故$\varphi(t_1)\leqslant\varphi(t_2)$.

再证右连续性.$\forall t>t_0$,则

$$\varphi(t_0)-\varphi(t)-m(E(t_0<f\leqslant t))\to 0,\quad t\to t_0+.$$

单调函数几乎处处连续, 因此几乎处处左连续.

21. 给定开集$G\subset\mathbb{R}^n$, 设f是G上的函数, 证明: f在G上连续当且仅当$\forall t\in\mathbb{R}$, 点集$G(f>t), G(f<t)$都是内点.

证明 注意点集拓扑里的结论: f连续当且仅当开集的原项是开集. 结合一维空间开集的构造定理即得结论.

22. 设f是可测函数, $B\subset\mathbb{R}^1$, 证明$f^{-1}(B)$未必可测.

证明 请查找反例书.■

23. 证明可测函数的符合未必可测.

证明 请查找反例书. 实际上与题22等价.■

2.3 Lebesgue可测函数列的收敛性

1. 设$f(x)$是可测集E上有界可测函数,证明存在可测简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$,使得$|\varphi_n(x)| \leqslant |f(x)|$,且满足

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |\varphi_n(x) - f(x)| = 0.$$

证明　不妨设f非负,否则分正负部分别考虑. $x \in E, s.t. f(x) < +\infty$,,则$\exists n \in \mathbf{N}_+, f(x) < n$.

令

$$E_k = \left[\frac{k-1}{2^k} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n}\right], k = 1, 2, \cdots, n2^n,$$

则简单函数

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathcal{X}_{E_k}(x),$$

显然满足条件(对固定的x,单调递增序列,点态趋于f).

2. 设$f(x)$是可测集E上可测函数, 证明存在可测函数列$\{f_n(x)\}$, 每个$f_n(x)$只取可数个值, 且在E上$f_n \rightrightarrows f$.

证明　设

$$E_k = \{k < f \leqslant k+1\}, \quad E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$$

则

$$f(x) = f(x)\mathcal{X}_E = \sum_{k=0}^{\infty} f(x)\mathcal{X}_{E_k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x),$$

对有界函数$f^{(k)}(x)$用简单函数逼近, $\varphi_{n,k}(x) \rightrightarrows f^{(k)}(x)$,令

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n,k}(x)$$

满足条件.

3. 设$\{f_n(x)\}$是$[a, b]$上几乎处处有限可测函数列. 证明存在正数列$\{a_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n f_n(x) = 0, \quad \text{a.e. } ([a, b]).$$

证明　记$E_\delta = \limsup_{k\to\infty}\{|f_k| > k\}$, 取$a_k = k^2$, 则$a_k = k^2$,则在$E \setminus E_\delta$上,

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k f_n(x)| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} k = 0.$$

4. 设$\{f_k(x)\}$是可测集E上可测函数列, $m(E) < \infty$. 证明集合列$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛到0的充分必要条件是, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} E\left(\sup_{j\leq k<+\infty} |f_k(x)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

证明 充分性. 记$S_j^n = \{x \in E : \sup_{k \geqslant j} |f_k(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$, 依题知, 对任给$\delta > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$使得$m(S_{k_0}^n) < \delta$. 因为对任意的$n$, 有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in E : |f_k(x)| > \frac{1}{n}\right\} \subset \bigcup_{k=k_0} \left\{x \in E : |f_k(x)| > \frac{1}{n}\right\} \subset S_{k_0}^n,$$

注意到$m(S_{k_0}^n) < \delta$, 以及δ的任一性, 所以$f_k(x)$不收敛到零的点集之测度为零,即

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in E : |f_k(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

必要性. 令$S = \{x \in E : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0\}$, 由题知$m(E \setminus S) = 0$.注意到

$$S_{j+1}^n \subset S_j^n, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} S_j^n \subset E \setminus S,$$

故得

$$\lim_{j\to\infty} m(S_j^n) = m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} S_j^n\right) \leqslant m(E \setminus S) = 0.$$

5. 设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是可测函数且$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎一致收敛到$f$. 证明$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛到$f$.

证明 由几乎一致收敛定义, $\forall \delta > 0, \exists E_{\delta,k} \subset E, s.t. m(E \setminus E_{\delta,k}) < \frac{\delta}{2}k$,在$E \setminus E_{\delta,k}$上$f_k(x) \rightrightarrows f$.取 $\tilde{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\delta,k}$, $\forall x \in \tilde{E}$有$f_k(x) \to f(x)$且

$$m(E \setminus \tilde{E}) = m\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\delta,k}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} m(E \setminus E_{\delta,n}) = 0.$$

6. 设$f(x), \{f_k(x)\}$是$[a, b]$上几乎处处有限的可测函数集, 且有$f_k \to f$, $a.e. E$, 证明存在$E_n \subset [a, b]$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

而在每个集E_n上有$f_k \Rightarrow f$.

证明 由叶戈洛夫定理, 对$\frac{1}{n}, \exists E_n \subset [a, b]$使得$m([a, b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}$, $f_k(x)$在E_n上一致收敛, 且

$$m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant m([a, b] \setminus E_n) < \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

7. 给定$[0, 1]$上可测函数列$\{f_{k,i}(x)\}$. 若对每一个$k \in \mathbb{N}$, 函数列$\{f_{k,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$在$[0, 1]$上几乎处处收敛于函数列$\{f_k(x)\}$, 又$\{f_k(x)\}$在$[0, 1]$上几乎处处收敛于函数$f(x)$. 证明在函数列$\{f_{k,i}(x)\}$中可抽出子列$\{f_{k_j,i_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$在$[0, 1]$上几乎处处收敛到$f(x)$.

证明 Cantor对角线方法.■

8. 设$f_n(x)$是可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上几乎处处有限可测函数列. 证明存在点集$A_k \subset E$, 有$m\left(\bigcup_k A_k\right) = m(E)$, 在每个集合$A_k$上函数列$\{f_n\}$一致有界.

证明 令$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) \leqslant k\}$满足要求.

9. 设$f(x), \{f_k(x)\}$是E上几乎处处有限的可测函数, $m(E) < \infty$. 若在$\{f_k(x)\}$的任意一

个子列$\{f_{k_i}\}$中均存在几乎处处收敛于$f(x)$的子列$\{f_{k_{i_j}}\}$,试证明函数列$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$.

证明 反证法. 若不然,则$\exists\delta,\varepsilon_0,\{n_k\}\nearrow+\infty$使得

$$m\{x\in E:|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0\}\geqslant\delta.$$

但这与$m(E)<\infty, f_{n_{k_j}}\to f(x),\quad a.e.$矛盾. 因为当$m(E)<\infty$时, 点态收敛必依测度收敛.

10. 设可测函数列$\{f_k(x)\},\{g_k(x)\}$在可测集E上依测度分别收敛于$f(x),g(x)$,证明$\{f_k+g_k\}$在E上依测度收敛于 $f+g$; 又若

$$m(E)<\infty,$$

证明$f_k(x)\cdot g_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)g(x)$.

证明 因为$\forall\varepsilon>0$,

$$\{x\in E:|f_k+g_k-f-g|\geqslant\varepsilon\}\subset\left\{x\in E:|f_k-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{x\in E:|g_k-g|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

因此

$$f_k\xrightarrow{\mu}f,\quad g_k\xrightarrow{\mu}g\Longrightarrow f_k+g_k\xrightarrow{\mu}f+g.$$

再证当$m(E)<\infty$时,$f_kg_k\xrightarrow{\mu}fg$, 若不然, 则$\exists\delta,\varepsilon_0,\{n_k\}\nearrow+\infty$使得

$$m\{x\in E:|(f_{n_k}g_{n_k})(x)-(fg)(x)|\geqslant\varepsilon_0\}\geqslant\delta.$$

这与$(f_{n_k}g_{n_k})(x)$存在几乎处处收敛的子列矛盾.

11. 设$\{f_n\},\{g_n\}$是可测集E上的可测函数列, $\{f_n\}$在E上依测度收敛到f, $\{g_n\}$在E上依测度收敛到g. 若

$$m(E)<\infty,$$

$\{g_n(x)\},g(x)$在E上几乎处处不为0, 证明$\{f_n/g_n(x)\}$在E上依测度收敛到$f(x)/g(x)$.

证明 证明方法完全类似题10.

12. 设$\{f_n\}$在可测集E上依测度收敛于f. 若存在常数$K,\forall n$有$|f_n(x)|<K$, $a.e.\,E$, 证明: $|f(x)|\leqslant K$, $a.e.\,E$.

证明 由Riesz定理, $\exists\{f_{n_k}\}\to f$, 又$|f_{n_k}|<K$, 因此$|f|\leqslant K$.

13. 设$f(x),\{f_k(x)\}$是可测集E上几乎处处有限的可测函数, 证明$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$得充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(E(|f_k-f|>\alpha))\}=0.$$

证明 必要性. 若$f_k\xrightarrow{\mu}f$,则

$$\lim_{k\to\infty}m(|f_k-f|>\alpha)=0.$$

因此

$$\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(E(|f_k-f|>\alpha))\}\leqslant\inf_{\alpha>0}\alpha+\inf_{\alpha>0}\{m(E(|f_k-f|>\alpha))\}\to0,\quad k\to\infty.$$

充分性.$\forall\varepsilon>0,\forall\sigma>0$, 记$e_0=\min(\varepsilon,\sigma)$, 因为

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(E(|f_k-f|>\alpha))\}=0.$$

故$\exists K\in\mathbb{N},\forall k\geqslant N$时有

$$\inf_{\alpha>0}\{\alpha+m(E(|f_k-f|>\alpha))\}<\varepsilon_0\Longrightarrow\inf_{\alpha>0}\{m(E(|f_k-f|>\alpha))\}<\varepsilon_0,$$

由此知$\exists\alpha_0<\sigma$使得

$$m(|f_k-f|>\alpha_0)<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$m(|f_k-f|>\sigma)\leqslant m(|f_k-f|>\alpha_0)<\varepsilon_0\leqslant\varepsilon_0.$$

这就说明了$f_k\xrightarrow{\mu}f$.

14. 设$f(x),\{f_k(x)\}$是可测集E上几乎处处有限的可测函数, 且在E上$\{f_k\}$几乎一致收敛到f, 证明$\{f_k\}$在E上依测度收敛到同一个函数.

证明 对每一个$\varepsilon>0,\delta>0$,$\exists E_\delta\subseteq E$,$|f_n-f(x)|\leqslant\varepsilon$ for all $x\in E\setminus E_\delta$. 于是,

$$\mu\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\leqslant\mu(E_\delta)<\delta,\ \ n>N(\varepsilon).$$

这导出

$$\limsup_{n\to\infty}\mu\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}\leqslant\delta.$$

由δ的任意性得

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}=0.$$

15. 假设$\{f_{k,i}(x)\}$是可测集$E\subset\mathbb{R}$上可测函数列. 若对于每个$k=1,2,\cdots,\{f_{k,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$在$E$上依测度收敛到函数$f_k(x)$, 又$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛到$f(x)$, 证明函数列$\{f_{k,i}(x)\}_{k,i=1}^{\infty}$中存在子列在$E$上依测度收敛到$f(x)$.

证明 取$\sigma_n\searrow0,\varepsilon_n\searrow0$, 则存在$i_n\nearrow+\infty$满足

$$\mu\left\{x\in E:|f_{n,i_n}-f_n|\geqslant\frac{\sigma_n}{2}\right\}<\frac{\varepsilon_n}{2}.$$

易证$\{f_{n,i_n}\}$即为所求.

16. 设在$[a,b]$上可测函数列$\{f_k(x)\}$依测度收敛到$f(x)$, 而$g(x)$是$\mathbb{R}$上连续函数, 证明符合函数列$\{g(f_k(x))\}$在$[a,b]$上依测度收敛于$g(f(x))$.

证明 反证法.若不然,则$\exists\sigma_0>0,\varepsilon_0>0,\{n_k\}\nearrow+\infty$满足

$$\mu\left\{x\in[a,b]:|g(f_{n_k})(x)-g(f(x))|\geqslant\sigma_0\right\}\geqslant\varepsilon_0,$$

由$f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$知$(f_{n_k})$存在几乎处处收敛的子列, 仍记为$(f_{n_k})$, 则

$$g(f_{n_k})(x)\to g(f)(x),\quad a.e.\quad[a,b].$$

从而$g(f_{n_k})\xrightarrow{\mu}g(f)$,矛盾.

17. 在$[0,\pi]$上定义函数$f_n(x)=n\sin x/(1+n^2\sin^2x)$. 对于给定的$\delta>0$, 找出叶戈洛夫集$E_\delta$,使得在$E_\delta$上$f_n$一致收敛.

证明 易见
$$|f_n(x)|\leqslant n\left|\frac{\sin x}{1+n^2\sin^2 x}\right|\leqslant n\frac{|\sin x|}{n^2|\sin^2 x|}=\frac{1}{n}\frac{1}{|\sin x|},\quad x\neq 0,\pi.$$
取$E_\delta=\left[\frac{\delta}{2},\pi-\frac{\delta}{2}\right]$,则
$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$
由Weierstrass判别法, f_n在E_δ上一致收敛, 且$m([0,\pi]\setminus E_\delta)\leqslant\delta$.

18. 设$f(x)$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上一个函数, 且对任给的$\delta>0$, 存在E中的闭集F, 有$m(E\setminus F)<\delta$,使得$f(x)$在F上连续. 证明$f(x)$在E上可测.

证明 由已知,$\exists F_n$满足$m(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$,令$F=\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, 则$m(E\setminus F)=0$.零测度集可测,不妨认为$E=F$, 因此$\forall t\in\mathbb{R}$,
$$\{x\in E:f(x)\geqslant t\}=\{x\in F:f(x)\geqslant t\}=\bigcup_{n=1}^\infty\{x\in F_n:f(x)\geqslant t\},$$
因为f在F_n连续,从而$\{x\in F_n:f(x)\geqslant t\}$为闭集为可测集,因此$\{x\in E:f(x)\geqslant t\}$可测, f为E上的可测函数.

19. 设$\{f_k(x)\}$是可测集E上的正值可测函数列且$m(E)<\infty$. 若$\{f_k\}$在E上依测度收敛到$f(x)$, 对任意$\alpha>0$, 证明 $\{(f_k(x))^\alpha\}$在E上依测度收敛到函数$(f(x))^\alpha$.

证明 取$g(x)=x^\alpha(\alpha>0)$, 则$g(x)\in C(\mathbb{R})$, 由题16知命题成立.

20. 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上有界函数, 证明存在$\mathbb{R}$上几乎处处连续的函数$g(x)$, 有$f=g,\quad a.e.\,\mathbb{R}$的充分必要条件是: 存在$E\subset\mathbb{R}$, 使得$m(\mathbb{R}\setminus E)=0$, $f(x)$在E上连续.

证明 必要性,若存在$E\subset\mathbb{R}$, 使得$m(\mathbb{R}\setminus E)=0$, $f(x)$在E上连续, 则令$g=f|_E$即满足条件 .

充分性. 若存在$\mathbb{R}$上几乎处处连续的函数$g(x)$, 有$f=g,\quad a.e.\,\mathbb{R}$, 则存在$E\subset\mathbb{R}$, $m(\mathbb{R}\setminus E)=0$,使得$g(x)=f(x),\quad x\in E$. $g(x)$在E中几乎处处连续, 修改零测度集上的值可令g连续.

21. 设f_k在可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上依测度收敛到f, 而且
$$f_k\leqslant f_{k+1},\quad a.e.\,E.$$
证明: $\{f_k\}$几乎处处收敛到f.

证明 由Riesz定理,存在子列$f_{n_k}\to f,\quad a.e.\,E$, 又$f_k$单调,因此$f_k\to f\quad a.e.\,E$.

22. 设$m(E)<\infty$, $\{f_k\}$在E上依测度收敛到$f(x)$, 则对每一个$p>0$, 证明$\{|f_k(x)|^p\}$在E上依测度收敛到$|f(x)|^p$.

证明 反证法. 若不然则$\exists\varepsilon_0$, $\exists\delta>0$, $\{n_k\}\nearrow+\infty$使得
$$m\{||f_k|^p-|f|^p|\geqslant\varepsilon_0\}\geqslant\delta.$$
对上述f_{n_k}, $f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$,由Riesz定理,存在子列不妨仍记为$(f_{n_k})$满足 $f_{n_k}\to f,\quad a.e.\,E$,又因为$m(E)<\infty$, 故$f_{n_k}\xrightarrow{\mu}f$矛盾.

23. 设$\{f_k(x)\}$是可测集E上几乎处处有限的可测函数列, $m(E)<\infty$.证明$\{f_n(x)\}$有依测度收敛的子列的充要条件是 $\{f_k(x)\}$有几乎处处收敛的子列.

证明 必要性由Riesz定理保证.

充分性. 若$\{f_k(x)\}$有几乎处处收敛的子列, 不妨设$f_{n_k} \to f, \quad a.e.\, E$,又$m(E) < \infty$, 故 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$.

24. 设$f(x)$是可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数,证明存在序列$\{g_k(x)\} \subset C(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛到$f(x)$.

证明　由Lusin定理知,$\forall \delta > 0, \exists$闭集$F$使得$m(E \setminus F) < \delta$, f在F上连续. 由Tietze扩张定理, $\exists g(x) \in C(\mathbb{R}^n), g|_F = f|_F$,

$$E(f \neq g) \leqslant m(E \setminus F) < \delta.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令$\delta = \frac{1}{2^k}$,则存在$g_k \in C(\mathbb{R}^n)$满足

$$E(|f - g_k| > \varepsilon) \leqslant E(|f - g_k| > 0) < \frac{1}{2^k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

25. 设$\{f_n\}$是$[0,1]$上几乎处处有限的函数列, 若$\{f_n\}$在$[0,1]$上几乎处处收敛到0, 证明存在数列$\{t_n\}$满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| = \infty$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n(x)| < \infty, \quad a.e.\, [0,1].$$

证明　由$f_n \to 0, \quad a.e.\, [0,1]$知$f_n \xrightarrow{\mu} 0$,因此存在$\{n_k\} \nearrow +\infty$满足

$$\mu\left\{|f_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right\} < \frac{1}{2^k}.$$

记$A_k := \left\{|f_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\right\}$, $A := \liminf A_k$, 由Fatou引理

$$\mu(A) \leqslant \liminf \mu(A_k) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

记

$$B := A^c = \limsup A_k^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{|f_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2^k}\right\},$$

$\forall x \in B, \exists n_k, |f_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2^k}$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

取$t_n = \delta_{n,n_k}$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| = \infty$.而$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n f_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| < \infty$.

26. 记$\{0 \leqslant r_k \leqslant 1 | r_k \in \mathbb{Q}\}$, r_k有不可约分数形式$r_k = \frac{p_k}{q_k}$. 定义函数 $f_k(x) = \exp\{-(p_k - xq_k)^2\}$. 证明在$[0,1]$上依测度$f_k \to 0$, 但是在$[0,1]$上极限$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$处处不存在.

证明　$\forall 0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} \mu\{|f_k(x)| \geqslant \varepsilon\} &= \mu\{e^{-q_k(x-r_k)^2} \geqslant \varepsilon\} \\ &= \mu\left\{r_k - \frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{q_k} \leqslant x \leqslant r_k + \frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{q_k}\right\} \\ &= 2\frac{(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{q_k} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

反证法. 若$x \in [0,1]$,极限$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$存在.由Riesz定理

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0.$$

另一方面,由有理数的稠密性$\exists r_k \to x$, 因此f_k有子列$f_{n_k} \to 1$矛盾.

第 3 章 Lebesgue积分

3.1 Lebesgue可测函数的积分

1. 设$h(x), g(x)$是E上非负简单可测函数,α是任意非负常数,证明:
$$\int_E \alpha h(x)dx = \alpha \int_E h(x)dx;$$
$$\int_E (h(x)+g(x))dx = \int_E h(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

证明 设$h(x)=\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{X}_{E_i}(x)$, $g(x)=\sum_{i=1}^n \beta_i \mathcal{X}_{F_i}(x)$,其中
$$E=\bigcup_{i=1}^m E_i = \bigcup_{i=1}^n F_i,\ E_i\bigcap E_j = F_i \bigcap F_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$
由简单函数积分的定义知
$$\int_E \alpha h(x)dx = \int_E \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathcal{X}_{E_i} dx = \alpha \int_E h(x)dx.$$
记$A_{i,j}=E_i \cap F_j$,则
$$\begin{aligned}\int_E h(x)+g(x)dx &= \sum_{i,j}\int_{A_{ij}} h(x)+g(x)dx\\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j\\ &= \int_E h(x)dx + \int_E g(x)dx.\end{aligned}$$

2. 设$E_k \subset E, k=1,2,\cdots, E_k \subset E_{k+1}$, 且$\lim_{k\to\infty} E_k = E$. 若$h(x)$是$E$上的非负可测简单函数,证明:
$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} h(x)dx = \int_E h(x)dx.$$

证明 由Levi定理
$$\lim_{k\to\infty}\int_E h(x)\mathcal{X}_{E_k}(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} h(x)\mathcal{X}_{E_k}(x)dx = \int_E h(x)dx.$$

3. 若可测集E有以下可测分解:$E=E_1\cup E_2, E_1\cap E_2=\emptyset$, $f(x)$是E上非负可测函数,证明:
$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

证明 当f为非负简单函数时,由题1
$$\int_E f(x)dx = \int_E f(x)\mathcal{X}_{E_1\cup E_2}dx = \int_E f(x)(\mathcal{X}_{E_1}+\mathcal{X}_{E_2})dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

对于一般的非负可测函数,由简单函数逼近定理存在$f_k \nearrow f$,由Levi定理

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_1} f_k(x)dx + \lim_{k\to\infty}\int_{E_2} f_k(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

4. 设$E,\{E_k\}$是可测集列,满足$E_k \subset E, E_k \subset E_{k+1}, k = 1,2,\cdots$,且$\lim_{k\to\infty} E_k = E$. 若$f(x)$是 E上的非负可测函数,证明:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

证明 由题2知若f为非负简单函数时,命题成立.对于一般的非负可测函数,由逼近定理 $\forall\varepsilon > 0, \exists h(x) < f$使得

$$\left|\int_{E_k} f(x) - h(x)dx\right| \leqslant \left|\int_E f(x) - h(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

又

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} h(x)dx = \int_E h(x)dx,$$

故存在$K, \forall k > K$成立

$$\left|\int_{E_k} h(x)dx - \int_E h(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此$\forall k > K$,

$$\left|\int_{E_k} f(x)dx - \int_E f(x)dx\right|$$
$$\leqslant \left|\int_{E_k} f(x)dx - \int_E h(x)dx\right| + \left|\int_{E_k} h(x)dx - \int_E h(x)dx\right| + \left|\int_{E_k} h(x)dx - \int_E f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

5. 逐项积分: 若$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列,试证明

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

证明 记

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

则S_n非负可测递增,由Levi定理

$$\int_E \lim_{n\to\infty} S_n dx = \lim_{n\to\infty}\int_E S_n dx,$$

即

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

6. 设E_k是E的一个划分, 即$E_k \cap E_j = \emptyset (k \neq j)$,且$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$. 若$f(x)$是$E$上的非负可测函数,证明

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

证明

$$\int_E f(x)dx=\int_E f(x)\mathcal{X}_{\cup_{k=1}^{\infty}E_k}(x)dx=\int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{X}_{E_k}(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f(x)\mathcal{X}_{E_k}(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}f(x)dx.$$

7. 设$m(E)<\infty$, $f(x)$是E上几乎处处有限的非负可测函数,记

$$E_k=E(k\leqslant f<k+1),$$

证明$f\in L(E)$的充分必要条件是$\sum_k km(E_k)$收敛.

证明 必要性.若$f\in L(E)$,则

$$+\infty>\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}km(E_k).$$

充分性. 若$\sum_k m(E_k)$收敛,$m(E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$,则有

$$+\infty>\sum_{k=0}^{\infty}km(E_k)+m(E)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)m(E_k)\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{E_k}f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

8. 设$f(x)$是E上的非负可测函数, $m(E)<\infty$.证明$f(x)$是E上的可积函数的充分必要条件是, 下列级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E(f\geqslant 2^k))$$

收敛.

证明 必要性. 记$E_k=E(2^{k+1}>f\geqslant 2^k)$,则

$$E=\bigcup_{n\geqslant k}E_k,$$

若$f\in L(E)$,

$$+\infty>\int_E f(x)dx\geqslant\sum_{k=0}^{+\infty}2^k m(E_k),$$

交换求和次序

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E(f\geqslant 2^k))&=\sum_{k=0}^{+\infty}2^k\sum_{n=k}^{+\infty}m(E_n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2^k m(E_n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)m(E_n)\\&\leqslant 2\int_E f(x)dx<\infty.\end{aligned}$$

充分性. 若$\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E(f\geqslant 2^k))$收敛, 由等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E(f\geqslant 2^k))=2\sum_{n=0}^{\infty}2^n m(E_n)-\sum_{n=0}^{\infty}m(E_n),$$

又
$$\sum_{n=0}^{\infty} m(E_n) \leqslant m(E) < +\infty,$$
故$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n m(E_n) < +\infty$,
$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} m(E_k) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx = \int_{E(f\geqslant 1)} fdx.$$
从而
$$\int_E f(x)dx = \int_{E(0\leqslant f<1)} f(x)dx + \int_{E(f\geqslant 1)} f(x)dx < m(E) + \int_{E(f\geqslant 1)} f(x)dx < \infty.$$

9. 设$\{f_k(x)\}$是E上的下降的非负可测函数列,且存在$k_0 \in \mathbb{N}$, f_{k_0}在E上可积,证明
$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx.$$

证明 设$g_k = f_{k_0} - f_k (k \geqslant k_0)$,则$g_k \geqslant 0$且$\nearrow$, 由Levi定理
$$\begin{aligned}\int_E \lim_{k\to\infty} g_k dx &= \int_E f_{k_0} dx - \lim_{k\to\infty} f_k dx \\ &= \int_E f_{k_0} dx - \int_E \lim_{k\to\infty} f_k dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_E g_k dx \\ &= \int_E f_{k_0} dx - \lim_{k\to\infty} \int_E f_k dx.\end{aligned}$$
故
$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx.$$

10. 设$f(x)$是E上的可测函数,$m(E) < \infty$, $|f(x)| < M$,证明$f \in L(E)$.

证明
$$\left|\int_E fdx\right| \leqslant \int_E |f|dx \leqslant \int_E Mdx = Mm(E) < \infty.$$

11. 设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列,且$m(E) < \infty$. 证明$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于零(函数)的充分必要条件是
$$\lim_{k\to\infty} \int_E \frac{f_k(x)}{1+f_k(x)} dx = 0.$$

证明 必要性. $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K$有 $m(f_k \geqslant \varepsilon) < \varepsilon$,故
$$\begin{aligned}\int_E \frac{f_k}{1+f_k} dx &= \int_{E(f_k\geqslant\varepsilon)} \frac{f_k}{1+f_k} dx + \int_{E(f_k<\varepsilon)} \frac{f_k}{1+f_k} dx \\ &\leqslant m(f_k \geqslant \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(f_k < \varepsilon) \\ &< (1+m(E))\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性. 反证法. 若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \frac{f_k}{1+f_k}dx=0$$

但f_k不依测度收敛于0,则$\exists\varepsilon_0,\delta_0>0,n_k\nearrow+\infty$满足

$$m(|f_{n_k}|\geqslant\varepsilon_0)\geqslant\delta_0,$$

故

$$\int_E \frac{f_{n_k}}{1+f_{n_k}}dx\geqslant\int_{f_{n_k}\geqslant\varepsilon_0}\frac{f_{n_k}}{1+f_{n_k}}dx\geqslant\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}m(f_{n_k}\geqslant\varepsilon_0)\geqslant\frac{\varepsilon_0\delta_0}{1+\varepsilon_0}$$

这与$\lim_{k\to\infty}\int_E\frac{f_k}{1+f_k}dx=0$矛盾.故假设不成立,$f_k$依测度收敛于0.

12. 设$f(x)$是E上的非负可积函数,常数c满足

$$0\leqslant c\leqslant\int_E f(x)dx.$$

证明存在可测子集$E_1\subset E$,使

$$\int_{E_1}f(x)dx=c.$$

证明 若$c=0$,取E_1为E的零可测子集即可.

若$c>0$,记$E_t=E(|x|\leqslant t)$,

$$g(t)=\int_{E_t}f(x)dx,$$

则$g(0)=0$且$g(+\infty)=\int_E f(x)dx$,任一$t_0\geqslant0$,

$$|g(t)-g(t_0)|\leqslant\int_{E(t\leqslant|x|\leqslant t_0)}f(x)dx+\int_{E(t_0\leqslant|x|\leqslant t)}f(x)dx,$$

故$\lim_{t\to t_0}g(t)=g(t_0)$. $g(t)\in C[0,\infty)$由连续函数的介值定理存在$E_{t_0}\subset E$满足

$$g(t_0)=\int_{E_{t_0}}f(x)dx=c.$$

13. 给定可测集E上的非负可测函数$f(x)$和$g(x)$. 设对任意常数a,有$m(E(f\geqslant a))=m(E(g\geqslant a))$,试证明

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

证明 只须考察非负函数的简单函数逼近定理的证明中简单函数的构造,结合Levi定理即可.

14. 证明可测集E上的可积函数几乎处处有限.

证明 由切比雪夫不等式

$$+\infty>\int_E fdx>\int_{E(|f|>n)}fdx\geqslant nm(E(|f|>n))\Rightarrow m(|f|>n)\leqslant\frac{1}{n}\int_E|f|dx$$

令$n\to\infty$得$mE(|f|=\infty)=0$,即f在E上几乎处处有限.

15. 若在E上有$f=g,\ a.e.\ E$,且$f\in L(E)$.证明$g\in L(E)$,并且$f(x)$与$g(x)$在E上的积分值相等.

证明 设E_0为零测集, $f(x)=g(x), \forall x \in E \setminus E_0$,由$f$可测易得$g$可测,且

$$\int_E g(x)dx = \int_{E_0} g(x)dx + \int_{E\setminus E_0} g(x)dx = \int_{E_0} f(x)dx + \int_{E\setminus E_0} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

16. 设$f,g \in L(E), f(x) \leqslant g(x), \forall x \in E$,证明

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_E g(x)dx.$$

证明 设$h(x)=g(x)-f(x) \geqslant 0, \forall x \in E$,

$$\int_E h(x)dx = \sup_{0\leqslant s(x)\leqslant h(x)} \int_E s(x)dx \geqslant 0,$$

其中s为E上的简单函数.

17. 设$f(x)$是E上的可测函数, $g \in L(E)$, 且$\forall x \in E$,有

$$|f(x)| \leqslant g(x),$$

证明$f \in L(E)$.

证明 由绝对值不等式及积分的单调性

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx \leqslant \int_E g(x)dx < \infty.$$

18. 设$f,g \in L(E), \varphi(x)$是E上的可测函数,满足$f \leqslant \varphi \leqslant g$,证明$\varphi \in L(E)$.

证明 由$f \leqslant \varphi \leqslant g$得$\varphi - f \leqslant g - f$,又$f$和$g$可积,故$\varphi - f \in L(E), \varphi = f + (\varphi - f) \in L(E)$.

19. 设E是测度有限的可测集,证明E上所有有界可测函数均是可积的.

证明 与本节第十题重复.

20. 设$f \in L(E)$, g是E上的有界可测函数,证明$f(x)\cdot g(x) \in L(E)$.

证明 首先$f(x)\cdot g(x)$可测,$\exists M>0$使得$|g(x)| \leqslant M$,故

$$\left|\int_E f(x)g(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\cdot|g(x)|dx \leqslant M\int_E |f(x)|dx < \infty.$$

21. 给定$f,g \in L(E)$. 证明$f=g$, $a.e.\,E$当且仅当任一可测子集$A \subset E$,有

$$\int_A f(x)dx = \int_A g(x)dx.$$

证明 必要性.因为$f=g\ a.e.\,E$,故$f\mathcal{X}_A = g\mathcal{X}_A,\ a.e.\,E$, 从而

$$\int_A f(x)dx = \int_E f\mathcal{X}_A dx = \int_E g\mathcal{X}_A dx = \int_A g(x)dx.$$

充分性.记$h(x)=f(x)-g(x)$,设$A=E(h>0)$,则

$$\int_A h(x)dx = 0 \Rightarrow m(A)=0,$$

同理可得$m(h<0)=0$.

22. 设$f(x)$是E上的可测函数. 若对任意可测子集$A \subset E$,
$$\int_A f(x)dx \geqslant 0,$$
证明$f \geqslant 0,\ a.e.\ E.$

证明 记$A_- = E(f<0)$,则
$$0 \leqslant \int_{A_-} f(x)dx \leqslant 0 \Rightarrow mE(f<0)=0.$$
因此$f \geqslant 0,\ a.e.\ E.$

23. 设$f \in L(E)$. 若对任意E上有界可测函数$g(x)$,有
$$\int_E f(x)g(x)dx = 0,$$
证明$f = 0,\ a.e.\ E.$

证明 设A为E的任意可测子集,记$g(x) = \mathcal{X}_A(x)$,则
$$\int_A f(x)dx = \int_E f(x)g(x)dx = 0, \quad \forall A \subset E,$$
因此$f = 0,\ a.e.\ E.$

24. 设$f \in L(\mathbb{R}^1)$, $f(0)=0$,且$f'(0)$存在,证明下述积分存在:
$$\int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x)}{x} dx.$$

证明 由$f(0)=0$, $f'(0)$存在,取$\varepsilon_0 = 1$, $\exists \delta > 0$, 当$|x|<\delta$时
$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < |f'(0)|+1,$$
因此
$$\left|\int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x)}{x}dx\right| \leqslant \int_{|x|<\delta}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx + \int_{|x|\geqslant\delta}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx \leqslant 2(|f'(0)|+1)\delta + \delta\int_{\mathbb{R}^1}|f(x)|dx < \infty.$$

25. 设$f(x)$是$[0,1]$上递增函数,证明对于可测集$E \subset [0,1]$, $m(E)=t$, 有
$$\int_0^t f(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx.$$

证明 当$t=1$时,$E \subset [0,1]$且$m(E)=1$,故$m([0,1]\setminus E)=0$.
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_E f(x)dx + \int_{[0,1]\setminus E} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$
当$0<t<1$,我们证明
$$\int_0^t f(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx.$$
分四步证明该命题.

第一步. 当$E=(a,b) \subset [0,1]$为开区间且$b-a=t$时,$0<a, t<b$,由$f(x)$的单调递增性易证
$$\int_0^t f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx.$$

第二步. 当E为开集时,由开集的构造定理(可数个互不相交开区间的并集),设

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n=(a_n,b_n), I_i\cap I_j=\emptyset(i\neq j), \sum_{n=1}^{+\infty}|I_n|=t=m(0,t),$$

因此由$f(x)$的单调递增性

$$\int_0^t f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

第三步. 当$f(x)\geqslant 0$递增,当E为一般的可测集时,$\forall\varepsilon>0$,$\exists$开集$G\subset[0,1]$满足 $E\subset G, m(G\setminus E)<\varepsilon$.因此

$$\int_0^t f(x)dx\leqslant\int_0^{m(G)} f(x)dx\leqslant\int_G f(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_{G\setminus E} f(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx+f(1)\varepsilon,$$

由ε的任意性,

$$\int_0^t f(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.$$

第四步. 当$f(x)$为递增函数时, $f(x)-f(0)$为非负递增函数,

$$\int_0^t (f(x)-f(0))dx\leqslant\int_E (f(x)-f(0))dx,$$

又$\int_0^t f(0)dx=\int_E f(0)dx$,因此

$$\int_0^t f(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

26. 给定E上可测函数f. 若对于任意可测子集$E'\subset E$,总有

$$\int_{E'} f(x)dx=0,$$

证明$f(x)=0,\ a.e.\ E$.

证明　第21题中$g=0$时的特殊情况.

27. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{当}x\text{是无理数},\\ x^2 & \text{当}x\text{为有理数}.\end{cases}$$

计算

$$\int_{[0,1]} f(x)dx.$$

解

$$\int_{[0,1]} f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2.$$

28. 设$E_1,\cdots,E_n$是$[0,1]$中可测子集. 若$[0,1]$内每一点至少属于这n个集中的q个集,证明:$E_1,\cdots,E_n$中至少有一个集的测度不小于q/n.

证明　设

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{X}_{E_k}(x)\geqslant q,\quad x\in[0,1].$$

在$[0,1]$上积分,有积分的线性性与单调性

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} m(E_k) \geqslant q,$$

若$m(E_k) < \frac{q}{n}, \forall 1 \leqslant k \leqslant n$,则 $\sum_{k=1}^{n} m(E_k) < q$矛盾.

29. 设$f, g \in L(E)$, 证明$\sqrt{f^2(x)+g^2(x)} \in L(E)$.

证明

$$\int_E \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx \leqslant \int_E (|f(x)|+|g(x)|)dx = \int_E |f(x)|dx + \int_E |g(x)|dx.$$

30. 若$f \in L(E)$,证明

$$\lim_{n\to\infty} m(E(|f|>n)) = 0.$$

证明 由切比雪夫不等式

$$m(E(|f|>n)) \leqslant \frac{1}{n}\int_E |f|dx$$

令$n \to \infty$即得

$$\lim_{n\to\infty} m(E(|f|>n)) = 0.$$

31. 设$f \in L(\mathbb{R}^n), f_k \in L(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\cdots)$,且对于任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$,有

$$\int_E f_k(x)dx \leqslant \int_E f_{k+1}(x)dx (k=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

试证明:$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\ a.e.\ \mathbb{R}^n$.

证明 由$\forall E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_E f_k(x)dx \leqslant \int_E f_{k+1}(x)dx$$

得$f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x),\ a.e.\ \mathbb{R}^n$,由Levi定理

$$\int_E \lim_{k\to\infty}(f_k - f_1)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k - f_1 dx = \int_E f dx - \int_E f_1 dx$$

$$\Longrightarrow \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x) - f(x)dx = 0, \quad \forall E \subset \mathbb{R}^n,$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),\ a.e.\ \mathbb{R}^n.$$

32. 设$f \in L(E)$,证明对于$\varepsilon > 0$,存在可测子集$A \subset E$,满足

$$m(A) < \infty, \quad \int_{A^c} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

证明 由积分对区域的连续性

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E(|x|\leqslant n)}|f(x)|dx=\int_E|f(x)|dx.$$

对$\forall\varepsilon>0,\exists N,$

$$\left|\int_{E(|x|\leqslant N)}|f(x)|dx-\int_E|f|dx\right|<\varepsilon,$$

取$A=E(|x|\leqslant N)$即可.

33. 设在Cantor集C上$f(x)=0$,在C上长为3^{-n}的余区间上$f(x)=n$,求

$$\int_{[0,1]}f(x)dx.$$

解 $m(C)=0$,因此

$$\int_{[0,1]}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n=3.$$

34. 设$f\in L([0,\infty))$, $f(x)$一致连续,证明$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

证明 dd

35. 设$f\in L(E)$,证明$\lim_{n\to\infty}m(E(|f|>n))=0$.

证明 由$f\in L(E)$知$|f|<\infty,\ a.e.\ E$,故

$$\lim_{n\to\infty}m(E(|f|>n))=0,$$

由积分的绝对连续性, $\forall\varepsilon>0,\exists N,n>N$时

$$\left|\int_{E(|f|>n)}f(x)\right|dx<\varepsilon\Rightarrow n\cdot m(E(|f|>n))<\varepsilon.$$

3.2 Lebesgue积分的极限定理

1. 设$f_n(x)\in\mathcal{M}(E),n=1,2,\cdots,g(x)\in L(E)$. 若$f_n(x)\geqslant g(x)$,证明

$$\int_E\liminf_{n\to\infty}f_n(x)dx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

若$f_n(x)\leqslant g(x)$,证明

$$\int_E\limsup_{n\to\infty}f_n(x)dx\geqslant\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 若$f_n\geqslant g$,由Fatou引理

$$\int_E\liminf_{n\to\infty}f_ndx-\int_E fdx=\int_E\liminf_{n\to\infty}(f_n-f)dx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_ndx-\int_E fdx.$$

故

$$\int_E\liminf_{n\to\infty}f_ndx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_E f_ndx.$$

若$f_n \leqslant g$,由Fatou引理

$$\begin{aligned}\int_E \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)dx &= \int_E gdx - \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n dx\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E (g-f_n)dx\\ &= \int_E gdx - \limsup_{n\to\infty}\int_E f_n dx,\end{aligned}$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n dx \leqslant \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n dx.$$

2. 设M是常数, $f_n \in L(E), n=1,2,\cdots$,且

$$\int_E |f_n(x)|dx \leqslant M.$$

若$f_n(x) \to f(x)$, $a.e.\ E$,或$f_n \to f$(依测度m收敛),证明$f \in L(E)$.

证明 若$f_n \to f$,由三角不等式

$$|f| \leqslant |f-f_n| + |f_n|,$$

故

$$\begin{aligned}\int_E |f|dx &= \int_E \liminf_{n\to\infty}|f|dx\\ &\leqslant \int_E \liminf_{n\to\infty}(|f-f_n|+|f_n|)dx\\ &= \int_E \liminf_{n\to\infty}|f_n|dx\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E |f_n|dx\\ &\leqslant M.\end{aligned}$$

若f_n依测度收敛于f,则由Riesz定理有收敛子列,不妨设设为f_n本身,再由上述讨论知命题仍成立.

3. 设$0<a<b$, $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}, n=1,2,\cdots$,验证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx,$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n(x)|dx = \infty$.

证明 $\forall a>0, \int_0^{\infty} ae^{-nax}dx = \frac{1}{n}$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}},$$

设$0<\varepsilon<A$,

$$\int_\varepsilon^A \left(\frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right)dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx - \int_{aA}^{bA}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \ln\frac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}} - \ln\frac{1-e^{-aA}}{1-e^{-bA}},$$

故

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+, A\to+\infty} \left(\ln\frac{1-e^{-a\varepsilon}}{1-e^{-b\varepsilon}} - \ln\frac{1-e^{-aA}}{1-e^{-bA}} \right) = +\infty.$$

4. 求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}dx$.

解 设

$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{x}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n}, \quad x \geqslant 0.$$

当$x>1$,有

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\frac{x}{n}}{C_n^3\left(\frac{x}{n}\right)^3} \leqslant \frac{6}{x^2} \in L^1(1,+\infty),$$

当$0<x<1$,$|f_n(x)| \leqslant x \in L^1(0,1)$,由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx + \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^\infty 0dx = 0.$$

5. 求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx$.

解 由Bernoulli不等式

$$\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \leqslant 1 \in L^1(0,1),$$

当$x>1$,

$$\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \leqslant \frac{2nx^2}{C_n^2x^4} \leqslant \frac{4}{x^2} \in L^1(1,+\infty).$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx = 0.$$

6. 求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx$.

解 当$x>1$,

$$\left|\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right| \leqslant \frac{n\sqrt{x}}{nx^2} = \frac{1}{x^{3/2}} \in L^1(1,+\infty).$$

当$0<x<1$,

$$\left|\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right| \leqslant \frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2}|\sin nx| \leqslant \frac{1}{x^{1/2}} \in L^1(0,1).$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx = 0.$$

7. 求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx$.

解 由Bernoulli不等式

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \in L^1(0,\infty).$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

8. 求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(nx+\frac{1}{x}\right)^{-n}dx$.

解 当$x>1$时,

$$\left(nx+\frac{1}{x}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{n^nx^n}\leqslant\frac{1}{x^2}\in L^1(1,+\infty),\quad n\geqslant 2.$$

当$0<x<1$时,

$$\left(nx+\frac{1}{x}\right)^{-n}\leqslant\frac{1}{x^{-n}}\leqslant x\in L^1(0,1).$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(nx+\frac{1}{x}\right)^{-n}dx=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(nx+\frac{1}{x}\right)^{-n}dx=0.$$

9. 证明:$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^x-\alpha}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{n^2+1}\quad(|\alpha|\leqslant 1)$

证明 直接计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^x-\alpha}dx=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{1-e^{-x}\alpha}dx=\int_0^{\infty}(e^{-x}\sin x)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-x}\alpha)^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nI_n.$$

其中

$$I_n:=\int_0^{\infty}e^{-(n+1)x}\sin xdx=1-(n+1)^2I_n,$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{e^x-\alpha}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^2+1}.$$

10. 设c是一个常数,$m(E)<\infty$, $f(x)$是E上的非负可测函数,若

$$\int_E f^n(x)dx=c,\quad n=1,2,\cdots,$$

证明存在一个可测集$A\subset E$,使得$f(x)=\mathcal{X}_A(x)$, $a.e.\,E$.

证明 由题知

$$\int_{E\{f<1\}}f^n(x)dx+\int_{E\{f=1\}}f^n(x)dx+\int_{E\{f>1\}}f^n(x)dx=c.\tag{3.1}$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\{f<1\}}f^n(x)dx=0.$$

由

$$\int_E f^n(x)dx=\int_E f^{2n}(x)dx=c,$$

知

$$\int_E f^n(x)(1-f^n(x))dx=0\Rightarrow\int_{E\{f\leqslant 1\}}f^n(x)(f^n(x)-1)dx=\int_{E\{f>1\}}f^n(x)(1-f^n(x))dx$$

由Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\{f>1\}}f^n(x)(f^n(x)-1)dx=0\Rightarrow mE\{f>1\}=0.$$

从而

$$\int_{E\{f>1\}}f^n(x)dx=0.$$

在(3.1)中令$n\to\infty$得$mE\{f=1\}=c$代入(3.1)得

$$\int_{E\{f<1\}} f^n(x)dx+\int_{E\{f>1\}} f^n(x)dx=0\Rightarrow mE\{f<1\}=E\{f>1\}=0.$$

故$f(x)=\mathcal{X}_A(x)$,其中$A=E\{f=1\}$.

11. 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间$[a,b]$上黎曼可积,$\{f_n(x)\}$一致收敛到函数$f(x)$,证明$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积.

证明 若$f_n(x)\in\mathscr{R}(E)$,则$\forall\varepsilon>0$,对每一个n, $\exists P_n$分割使得

$$\sum\omega_i(f_n)\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中

$$\omega_i(f_n)=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f_n(x)-f_n(y)|.$$

又$f_n(x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in E$,故$\exists N(\varepsilon),\forall n>N(\varepsilon)$,

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad x\in E.$$

因此,

$$\begin{aligned}\omega_i(f)&=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f(y)|\\&\leqslant\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)-f_n(x)|+\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f_n(x)-f_n(y)|+\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}|f_n(y)-f(y)|\\&<2\varepsilon+\omega_i(f_n).\end{aligned}$$

故

$$\sum\omega_i(f)\Delta x_i<2(b-a)\varepsilon+\varepsilon.$$

由Riemann可积的第二充要条件$f\in\mathscr{R}[a,b]$.

注 证法二, f_n黎曼可积因此f_n在$[a,b]$上几乎处处连续,又$f_n\rightrightarrows f$,因此f在$[a,b]$上几乎处处连续,故$f\in\mathscr{R}[a,b]$.

12. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界, 其间断点集只有可数个极限点, 证明$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积.

证明 显然, 其间断点集为可数集, $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处连续, 故 Riemann可积.

13. 设$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad a.e.\,E.$$

已知$f(x)\in L(E)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx,$$

证明对于任意可测集$A\subset E$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A f(x)dx.$$

证明 由三角不等式

$$F_n=f_n(x)+f(x)-|f_n(x)-f(x)|\geqslant 0,\quad x\in E.$$

由Fatou引理

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} F_n dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E F_n dx.$$

整理得

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| dx \leqslant 0.$$

故

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_A (f_n - f) dx \right| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| dx \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| dx \leqslant 0.$$

14. 设$f(x), \{f_n(x)\}, g(x), \{g_n(x)\}$是可测集上的可测函数, 满足$|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$, 以及

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \quad a.e. E.$$

又若当$g_n, g \in L(E)$, 还有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x) dx = \int_E g(x) dx.$$

证明$f(x) \in L(E)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

证明 设

$$F_n = g_n + |f(x)| - |f_n - f|,$$

则$F_n \geqslant 0$, 由Fatou引理

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} F_n dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E F_n dx.$$

整理得

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| dx \leqslant 0.$$

15. 设$f(x), f_n(x) \in L(E), n = 1, 2, \cdots,$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e. E,$$

证明下列命题成立:

$$\int_E |f_n(x) - f(x)| dx \to 0 \text{当且仅当} \int_E |f_n(x)| dx \to \int_E |f(x)| dx.$$

证明 由三角不等式, 显然

$$\int_E |f_n(x) - f(x)| dx \to 0 \Rightarrow \int_E |f_n(x)| dx \to \int_E |f(x)| dx.$$

另一方面, 当$\int_E |f_n(x)| dx \to \int_E |f(x)| dx$, 设

$$F_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|,$$

则$F_n \geqslant 0$,对F_n应用Fatou引理得

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|dx \leqslant 0.$$

16. 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数,$|f_n(x)| < \infty$, $a.e.\ E$,且$m(E) < \infty$. 证明$\{f_n(x)\}$在E上依测度收敛于零函数的充分必要条件是

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \to 0.$$

证明　必要性.设f_n依测度收敛于0, 则$\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$

$$m\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

注意到

$$g(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geqslant 0,$$

为单调递增函数

$$\begin{aligned}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx &= \int_{E\{x:|f_n(x)|>\varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx + \int_{E\{x:|f_n(x)|<\varepsilon\}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx\\ &\leqslant 1\cdot m\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\} + m(E)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\\ &\leqslant (1+m(E))\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性. $\forall\delta > 0$

$$\frac{\delta}{1+\delta}m\{x : |f_n(x)| > \delta\} \leqslant \int_E \frac{f_n(x)}{1+f_n(x)}dx \to 0 \Rightarrow m\{x : |f_n(x)| > \delta\} \to 0.$$

17. 设$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数, $\{f_n(x)\}$依测度收敛到$f(x)$, 证明

$$\int_E f(x)dx \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明　反证法. 由Riesz定理, (f_n)存在几乎处处收敛的子列(f_{n_k}), 若

$$\int_E f(x)dx \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}(x)dx.$$

不成立. 则

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx < \int_E f(x)dx \leqslant \liminf_{k\to\infty}\int_E f_{n_k}(x)dx. \quad \blacksquare$$

18. 设$f, f_n \in L(E), n = 1, 2, \cdots$, 且对任一可测子集$A \subset E$, 有

$$\int_A f_n(x)dx \leqslant \int_A f_{n+1}(x)dx, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

试证明$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e.\ E.$.

证明 由3.1节习题22,

$$\int_A f_n(x)dx \leqslant \int_A f_{n+1}(x)dx, \quad \forall 可测集 A \subset E \Rightarrow f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$

对$f_n - f_1 \geqslant 0$应用Levi定理,则

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n - f_1 dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n - f_1 dx = \int_A f - f_1 dx.$$

由A的任意性,再次利用3.1节习题22得

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad a.e.\, E.$$

19. 给定可测集E上的函数$f(x)$. 如果对于任意$\varepsilon > 0$, 存在E上的可积函数$g(x), h(x)$, 满足条件$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且

$$\int_E [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon,$$

证明$f(x) \in L(E)$.

证明 只需证明$f(x)$为E上的可测函数即可.由已知$\forall k > 0, \exists g_k \leqslant f \leqslant h_k$满足

$$\int_E [h_k - g_k]dx < \frac{1}{k},$$

由Fatou引理

$$0 \leqslant \int_E \liminf (f - g_k)dx \leqslant \liminf \int_E (f - g_k)dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E [h_k - g_k]dx = 0.$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty} g_k = f, \quad a.e.\, E.$$

可测函数列的极限函数仍可测.

20. 设$\{E_k\}$是测度有限的可测集列,且有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} |\mathcal{X}_{E_k}(x) - f(x)|dx = 0,$$

证明存在可测集E,使得$f(x) = \mathcal{X}_E(x), \quad a.e.\, \mathbb{R}^n$.

证明 由Fatou引理得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{n\to\infty} |\mathcal{X}_{E_k} - f|dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{X}_{E_k} - f|dx = 0,$$

因此

$$f(x) = \liminf_{k\to\infty} \mathcal{X}_{E_k}(x) = \mathcal{X}_{\liminf_{k\to\infty} E_k}(x), \quad a.e.\, \mathbb{R}^n.$$

21. 设$\{f_n(x)\}$是E上的非负可积函数列, $f(x)$是E上的可积函数. 若$\{f_n(x)\}$依测度收敛于$f(x)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

证明　设
$$F_n = f_n + f - |f_n - f|,$$
则由已知条件得$F_n \geqslant 0$,由Fatou引理(本节习题17)
$$\int_E 2f dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E F_n dx \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx \leqslant 0.$$

22. 设$f(x) \in L(\mathbb{R}^1), a > 0$, 证明
$$\lim_{n\to\infty} n^{-a} f(nx) = 0, \quad a.e. \mathbb{R}^1.$$

证明　由Levi定理
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}|f(nx)|dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \int_{\mathbb{R}} |f(nx)|dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+a}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty.\end{aligned}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}|f(nx)| \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}|f(nx)| < +\infty \quad a.e. \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{-a} f(nx) = 0, \quad a.e. \mathbb{R}^1.$$

23. 设$x^s f(x), x^t f(x) \in L(0,\infty)$, 其中$s < t$, 证明积分
$$I(u) = \int_0^{\infty} x^u f(x) dx, \quad u \in (s,t)$$
存在且是$u \in (s,t)$的连续函数.

证明　设$u = \theta s + (1-\theta)t$, $0 < \theta < 1$,由Hölder不等式
$$I(u) = \int_0^{\infty} (x^{\theta s} f^{\theta}(x))(x^{(1-\theta)t} f^{(1-\theta)}(x)) dx \leqslant \theta I(s) + (1-\theta) I(t) < \infty.$$
令$F(x) = (x^s + x^t)|f(x)|$,则由Lebesgue控制收敛定理
$$\lim_{u\to u_0} I(u) = I(u_0).$$

24. 设$f \in L^1(\mathbf{R}^1)$,试证明
$$\int_a^b f(x+t) dx = \int_{a+t}^{b+t} f(x) dx.$$

证明　设$E \subseteq \mathbb{R}$为可测集,当$f(x)=\mathcal{X}_E(x)$时,

$$\begin{aligned}\int_{a+t}^{b+t} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_E \mathcal{X}_{[a+t,b+t]} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{E\cap[a+t,b+t]}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{E\cap([a,b]+\{t\})}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{(E-\{t\})\cap[a,b]} dx \\ &= \int_a^b \mathcal{X}_{E-\{t\}}(x)dx \\ &= \int_a^b \mathcal{X}_E(x+t)dx \\ &= \int_a^b f(x+t)dx.\end{aligned}$$

从而当f为简单函数时, 要证明的命题成立, 结合简单函数逼近定理与Lebesgue控制收敛定理知命题成立.

25. 设$f(x)\in L^1(\mathbb{R}^1)$. 若对$\mathbb{R}^1$上任一具有紧支集的连续函数$g(x)$有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = 0,$$

证明$f(x)=0,\quad a.e.\,\mathbb{R}^1$.

证明　取$g(x)=j_\varepsilon(x-y)$,其中j为磨光子,则$f^\varepsilon(y)=0$.

$$f(y)=\lim_{\varepsilon\to 0} f^\varepsilon(y)=0,\quad a.e.\,y\in\mathbb{R}.$$

26. 设有可测集$E_k\subset[a,b], m(E_k)\geqslant\delta>0, k=1,2,\cdots,\{a_k\}$是一实数列; 又设

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\mathcal{X}_{E_k}(x)<\infty,\quad a.e.\,[a,b],$$

证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty.$$

证明　设$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\mathcal{X}_{E_k}(x), A_m=\{a\leqslant x\leqslant b: f(x)>m\}$,则存在$m_0$使得$m(A_{m_0})<\frac{\delta}{2}$,于是$m(E_k\setminus A_{m_0})\geqslant\frac{\delta}{2}$成立,从而

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|m(E_k\setminus A_{m_0}) \\ &= \int_{[a,b]\setminus A_{m_0}} \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\mathcal{X}_{E_k}dx. \\ &\leqslant \int_{[a,b]} m_0 dx < \infty.\end{aligned}$$

故$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty$.

27. 已知$f(x)$是$\mathbb{R}$上的有界函数,若对于每一点$x\in\mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)$$

存在, 证明$f(x)$在任一区间$[a,b]$上是黎曼可积的.

证明 记间断点集$E=\{x: f(x)\neq \lim_{h\to 0} f(x+h)\}$,实际上$E$是孤立点集从而至多可数. 因此$f$在$[a,b]$上Riemann可积.

28. 设$f(x)$是E上的有界可测函数, 且存在正数M及$\alpha<1$, 使得对于任意的$\lambda>0$, 有

$$mE(|f|>\lambda)<\frac{M}{\lambda^\alpha}.$$

证明$f\in L(E)$.

证明 不妨设$|f|<1$, $x\in E$,则

$$\begin{aligned}\int_E |f|dx &= \int_{\{|f|<1\}}|f|dx = \int_{\cup_{n=1}^\infty\{\frac{1}{n+1}<|f|\leqslant\frac{1}{n}\}}|f|dx\\ &=\sum_{n=1}^\infty \int_{\{\frac{1}{n+1}<|f|\leqslant\frac{1}{n}\}}|f|dx\\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}m(\{\frac{1}{n+1}<|f|\leqslant\frac{1}{n}\}),\end{aligned}$$

其中$E_{n+1}=\{\frac{1}{n+1}<|f|\}$.由Abel分部求和公式

$$S_m=\sum_{n=1}^m \frac{m(E_{n+1})-m(E_n)}{n}=\frac{m(E_{m+1})}{m}-m(E_1)+\sum_{n=2}^m \frac{m(E_n)}{n(n-1)}.$$

进一步地,

$$\frac{m(E_{m+1})}{m}<\frac{(m+1)^\alpha M}{m}\to 0,\quad m\to\infty.$$

$$\frac{m(E_n)}{n(n-1)}\leqslant\frac{M}{n^{1-\alpha}(n-1)}\sim\frac{M}{n^{2-\alpha}},\quad 0<\alpha<1.$$

从而级数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}m(\{\frac{1}{n+1}<|f|\leqslant\frac{1}{n}\})$$

收敛.

29. 设可测集$E\subset[0,1]$, 证明函数$\mathcal{X}_E(x)$在$[0,1]$上是黎曼可积地当且仅当$m(\overline{E}\setminus \mathrm{int}E)=0$.

证明 只须指出

$$\{x\in[0,1]:\omega(x)>0\}=\overline{E}\setminus\mathrm{int}E.$$

即可,其中$\omega(x)$是$\mathcal{X}_E(x)$在$[0,1]$上的振幅函数.

30. 设$f(x)\in L(0,\infty)$, 又$g(x)\in\mathcal{M}(E)$. 若存在$M>0$,对一切$x\in(0,\infty)$, 均有$|\frac{g(x)}{x}|\leqslant M$, 试证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)g(x)dx=0.$$

证明 由$f(x)\in L(0,\infty)$知
$$\int_0^{\infty}|f|dx<\infty.$$
由广义积分知识,$\forall\varepsilon>0,\exists A>0$使得
$$\int_A^{\infty}|f|dx<\varepsilon$$
故当$x>A$时,
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)g(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{x}\int_0^A f(x)g(x)dx+M\int_A^x f(x)dx\leqslant M\varepsilon+\frac{1}{x}\int_0^A f(x)g(x)dx.$$
令$x\to\infty$得
$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)g(x)dx\right|\leqslant\varepsilon.$$
由ε的任意性即得结论.

3.3 重积分与累次积分

1. 求积分
$$\int_0^{\infty}(e^{-ax^2}-e^{-bx^2})\frac{1}{x}dx,\quad 0<a<b.$$

解
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}(e^{-ax^2}-e^{-bx^2})\frac{1}{x}dx&=\int_0^{\infty}\left(\int_a^b x^2e^{-yx^2}dy\right)\frac{1}{x}dx\\&=\int_a^b\frac{1}{2y}dy\int_0^{\infty}e^{-yx^2}d(yx^2)\\&=\int_a^b\frac{1}{2y}dy=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

2. 求积分
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})\sin x dx,\quad 0<a<b.$$

解
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})\sin x dx&=\int_0^{\infty}\int_a^b\sin x e^{-yx}dydx\\&=\int_a^b dy\int_0^{\infty}\sin x e^{-yx}dx\\&=\int_a^b\frac{1}{1+y^2}dy\\&=\arctan b-\arctan a.\end{aligned}$$

3. 设$f\in L([0,1]\times[0,1])$, 证明
$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx.$$

证明 利用Fubini定理, 交换积分次序即可.

4. 设$f \in L([0,a]), g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t}dt$, 证明
$$\int_0^a g(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

证明
$$\int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^a \int_0^t \frac{f(t)}{t}dxdt = \int_0^a f(x)dx.$$

5. 设$f \in L([a,b])$, 证明
$$\int_a^b f(x)dx \int_a^x f(y)dy = \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$$

证明 交换积分次序
$$\int_a^b f(x)dx \int_b^x f(y)dy = \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y)dy =: I.$$
因此,
$$2I = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

6. 设$f \in L([a,b])$, 证明
$$\int_a^b dx \int_a^b dy \int_x^y f(t)dt = 0.$$

证明 设$F(x,y) = \int_x^y f(t)dt$,交换积分次序
$$\int_a^b dx \int_a^b F(x,y)dy = -\int_a^b dx \int_a^b F(x,y)dy \Rightarrow \int_a^b dx \int_a^b F(x,y)dy = 0.$$

7. 设$f, g \in L([a,b]), F(x) = \int_a^x f(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt$, 证明
$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

证明
$$\begin{aligned}
\int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx &= \int_a^b \int_a^x f(t)g(x) + f(x)g(t)dtdx \\
&= \int_a^b dt \int_t^b f(t)g(x) + f(x)g(t)dxdt \\
&= \int_a^b dt\, f(t)\left[\int_a^b g(x) - G(t)\right] + g(t)\left[\int_a^b f(x) - F(t)\right] \\
&= 2\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(t)G(t) + g(t)F(t)dt.
\end{aligned}$$
因此,
$$\int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx = \int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt = F(x)G(x)|_a^b.$$

8. 设当x,y为有理数时$f(x,y)=0$, 否则$f(x,y)=1$, 求积分

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy.$$

解

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 1dxdy=1.$$

9. 设$J\subset[0,1], E\subset J\times J$, 若对每一个$x\in J, E_x$与$J\setminus E_x$均可数. 证明$E$不可测.

证明 ...

10. 令$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的非负可测函数, 定义函数

$$\varphi(y)=m(\mathbb{R}^n(f>y)),$$

证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx=\int_0^\infty \varphi(y)dy.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n} dx\int_0^{f(x)} 1dy\\&=\int_0^\infty dy\int_{\{x:f(x)>y\}} 1dx\\&=\int_0^\infty \varphi(y)dy.\end{aligned}$$

11. 令f,g是$E\subset\mathbb{R}^n$上非负可测函数, 证明对于一切$y>0$,

$$\varphi(y)=\int_{E(g\geqslant y)} f(x)dx$$

存在, 且

$$\int_E f(x)g(x)dx=\int_0^\infty \varphi(y)dy.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_E f(x)g(x)dx&=\int_E f(x)\int_0^{g(x)} 1dy\\&=\int_0^\infty dy\int_{\{x\in E:g(x)>y\}} 1dx\\&=\int_0^\infty \varphi(y)dy.\end{aligned}$$

12. 设$f\in L([a,b])$, 在$[a,b]$外, $f(x)=0$. 令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt,$$

证明

$$\int_a^b|\varphi(x)|dx\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$$

证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\varphi(x)|dx &\leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b dx\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|dt \\
&= \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathcal{X}_{\{t:x-h\leqslant t\leqslant x+h\}}dt \\
&= \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{X}_{\{t:x-h\leqslant t\leqslant x+h\}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt = \int_a^b |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

13. 设f,g是可测集E上的可测函数，$m(E)<\infty$. 若$f(x)+g(y)$在$E\times E$上可积，证明$f(x),g(x)\in L(E)$.

证明

$$\int_{E\times E} f(x)+g(y)dxdy = m(E)\left[\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx\right]<\infty.$$

又

$$m(E)\left[\int_E |f(x)|dx-\int_E |g(x)|dx\right]\leqslant \int_{E\times E}|f+g|dxdy<\infty.$$

从而可得$f,g\in L(E)$.

14. 求积分

(1) $\displaystyle\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$; (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx$.

解 (1)

$$\begin{aligned}
\int_{x>0}\int_{y>0}\frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y}dy\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y}dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}dy \\
&= \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

(2) 利用(1)的结论

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^\infty \frac{1}{x^2-1}\ln\frac{x^2y+1}{y+1}\Big|_0^\infty dx = 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx.$$

15. 设$f\in L(0,\infty)$, $f(x)\geqslant 0$, 且$\int_{(0,\infty)} f(t)dt>0$,令

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,\quad x>0.$$

证明$F\notin L(0,\infty)$.

证明

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(x)dx &= \int_0^\infty\int_0^x \frac{f(t)}{x}dtdx \\
&= \int_0^\infty f(t)dt\int_t^\infty \frac{1}{x}dx \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

16. 设$f(x),g(x)$是可测集E上可测函数, 且f的值域$range(f)\subset[c,d], g(x)\geqslant 0, \int_E g(x)dx=1$, $\varphi(x)$是$[c,d]$上的凸函数. 证明Jensen不等式:

$$\varphi\left(\int_E f(x)g(x)dx\right)\leqslant\int_E\varphi[f(x)]g(x)dx.$$

证明　由支撑不等式

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)+k(t-t_0),$$

令$t=f(x), t_0=\int_E f(x)g(x)dx$,两边同时乘以$g(x)$并在$E$上积分, 那么有

$$\int_E\varphi[f(x)]g(x)dx-\varphi\left(\int_E f(x)g(x)dx\right)\geqslant 0.$$

17. 设$f(x),g(x)$是E上的非负可测函数, 若$f(x)g(x)\geqslant 1, x\in E$, 且$m(E)=1$. 试证明

$$\int_E f(x)dx\int_E g(x)dx\geqslant 1.$$

证明　由Cauchy-Schwarz不等式

$$1=\int_E dx\leqslant\int_E\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}dx\leqslant\left(\int_E f(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E g(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

18. 设A,B是$\mathbb{R}^n$中可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}m((A\setminus\{x\})\cap B)dx=m(A)\cdot m(B).$$

证明

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}m((A\setminus\{x\})\cap B)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{X}_{(A\setminus\{x\})\cap B}(t)dt\\&=\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{X}_{A\setminus\{x\}}(t)\mathcal{X}_B(t)dt\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{X}_B(t)dt\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{X}_{A\setminus\{x\}}(t)dx\\&=m(B)m(A).\end{aligned}$$

19. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

问: (1) $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上的两个累次积分是否存在?若存在是否相等?

(2) $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上是否可积?

解 (1) 易见x,y的地位完全相同,

$$\int_0^1 f(x,y)dy=\frac{x}{2x^2(x^2+1)}\notin L(0,1),$$

故$f(x,y)$的两个累次积分不存在.

(2) $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上不可积, 否则由Fubini定理, 两个累次积分存在且相等.

第 4 章 L^p空间

4.1 L^p空间

1. 设$0 < m(E) < \infty$,令
$$N_p(f) = \left(\frac{1}{m(E)}\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$
证明当$p_1 < p_2$时, 有$N_{p_1}(f) \leqslant N_{p_2}(f)$.

证明 由Hölder不等式
$$\begin{aligned} N_{p_1}(f) &= \left(\frac{1}{m(E)}\int_E |f(x)|^{p_1}\cdot 1dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{m(E)}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_E |f(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\frac{1}{m(E)}\right)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \\ &= N_{p_2}(f). \end{aligned}$$

2. 设$f \in L([0,1]\times[0,1])$, 证明$\lim_{p\to q}\|f\|_p = \|f\|_q$.

证明 设$p \leqslant q$, 则
$$\int_{E(|f|>1)} |f|^p dx \leqslant \int_{E(|f|>1)} |f|^q dx,$$
$$\int_{E(|f|\leqslant 1)} |f|^p dx \leqslant mE(|f|\leqslant 1) \leqslant 1.$$
由控制收敛定理知
$$\lim_{p\to q^-}\|f\|_p = \|f\|_q,$$
同理可证
$$\lim_{p\to q^+}\|f\|_p = \|f\|_q.$$

3. 设$f \in L^\infty(E), g(x) > 0$, 且$\int_E g(x)dx = 1$, 证明
$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$

证明 显然
$$\left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty\left(\int_E g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty.$$
另一方面, $\forall\varepsilon = \frac{1}{p} > 0, \exists E_\delta \subseteq E, f(x) \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon, \forall x \in E_\delta$, 从而
$$\left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{E_\delta} gdx\right)^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$\|f\|_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \limsup_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty.$$

4. 设E是可测集, $f\in L^\infty(E), m(E)<\infty$, 且$\|f\|_\infty>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}=\|f\|_\infty.$$

证明 显然

$$\|f\|_{n+1}^{n+1}\leqslant \|f\|_\infty \|f\|_n^n,$$

由Hölder不等式

$$\int_E |f|^n dx \leqslant \int_E |f|^{n+1}dx\left(\int_E |f|^{n+1}dx\right)^{-\frac{1}{n+1}} m(E)^{\frac{1}{n+1}},$$

因此

$$\|f\|_\infty \leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{\|f\|_{n+1}^{n+1}}{\|f\|_n^n}\leqslant \|f\|_\infty.$$

5. 设E是可测集, $0<p,q<\infty$, 证明

$$L^p(E)\cdot L^q(E)=L^{\frac{pq}{p+q}}(E),$$

其中$L^p(E)\cdot L^q(E)=\{f\cdot g|f\in L^p(E), g\in L^q(E)\}$.

证明 设$f\in L^p, g\in L^q$,由推广的Hölder不等式

$$\|f\|_r\leqslant \|f\|_p\|g\|_q,\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

易证$fg\in L^{\frac{pq}{p+q}}$.反之,若$F\in L^{\frac{pq}{p+q}}$,则令

$$f=F^{\frac{r}{p}},\quad g=F^{\frac{r}{q}}.$$

即可.

6. 设E是可测集, $p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}=1, f\in L^p(E), g\in L^q(E), h\in L^r(E)$, 证明

$$\|fgh\|_1\leqslant \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

证明 利用推广的Young不等式

$$|abc|\leqslant \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}+\frac{|c|^r}{r}.$$

令$a=\frac{f}{\|f\|_p}, b=\frac{g}{\|g\|_q}, c=\frac{h}{\|h\|_r}$,然后积分即可.

7. 设f,g是可测集E上非负可测函数, $1\leqslant p<\infty, 1\leqslant q<\infty, 1\leqslant r<\infty, \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$, 证明

$$\int_E f(x)g(x)dx\leqslant \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}\left(\int_E f^p(x)g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

证明 当$r=\infty$,不等式就是Hölder不等式. 易见

$$\|f\|_p^{1-\frac{p}{r}}\|g\|_q^{1-\frac{q}{r}}\left(\int_E f^p(x)g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\int_E |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left(\int_E |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\left(\int_E |f|^p|g|^q dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

观察指标

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=1.$$

采用待定指数法, 设$\lambda_1+\lambda_2=s_1+s_2=1$, 其中$0<\lambda_1,\lambda_2,s_1,s_2<1$.

$$\begin{aligned}\int_E |fg|dx&=\int_E |f|^{\lambda_1}|g|^{s_1}(|f|^{\lambda_2}|g|^{s_2})dx\\&\leqslant\left(\int_E |f|^{\frac{\lambda_1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}}dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left(\int_E |g|^{\frac{s_1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}}dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\left(\int_E\left(|f|^{\lambda_2}|g|^{s_2}\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

取$\lambda_1=1-\frac{p}{r},\lambda_2=\frac{p}{r},s_1=1-\frac{q}{r},s_2=\frac{q}{r}$即可.

8. 设E是可测集, $1\leqslant q<p,m(E)<\infty,f\in L^p(E)$且$f_n\in L^p(E),n=1,2,\cdots$, 若$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$,证明

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_q=0.$$

证明 由Hölder不等式

$$\|f_n-f\|_q\leqslant C\|f_n-f\|_p,$$

其中C仅与E有关.

9. 若$f,f_n\in L^p([a,b]),n=1,2,\cdots$, 设$f_n\xrightarrow{L^p}f$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

证明 由Hölder不等式

$$\|f_n-f\|_{L^1([a,t])}\leqslant\|f_n-f\|_{L^p([a,b])}\leqslant(b-a)^{\frac{1}{q}}\|f_n-f\|_p.$$

10. 设$\forall x\in[a,b]$, 有$f_n(x)\to f(x)$, 且有

$$\int_a^b |f_k(x)|^r dx\leqslant M,\quad k=1,2,\cdots,\quad 0<r<\infty,$$

试证明对于$\forall p:0<p<r$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f_k(x)-f(x)|^p dx=0.$$

证明 由Fatou引理$f\in L^r([a,b])$,由Hölder不等式

$$\int_a^b |f_k-f|^p dx\leqslant C\left(\int_a^b |f_k-f|^r dx\right)^{\frac{p}{r}},$$

其中C仅与$[a,b]$和p,q相关.令

$$F_n=2^{r-1}(M+|f|^r)-|f_k-f|^r\geqslant 0,$$

对F_n应用Fatou引理,则得

$$\limsup_{n\to\infty}\int_a^b |f_k-f|^r dx=0.$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\int_a^b |f_k-f|^p dx=0.$$

11. 给定可测集E,设$1\leqslant p<\infty, f, f_k\in L^p(E), k=1,2,\cdots$,且$f_k\to f \quad a.e. E, \lim_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

证明 由

$$|f_k-f|^p\leqslant 2^{p-1}(|f_k|^p+|f|^p).$$

知

$$F_n=2^{p-1}(|f_k|^p+|f|^p)-|f_k-f|^p\geqslant 0.$$

对F_n应用Fatou引理得

$$\limsup_{k\to\infty}\int_E |f_k-f|^p dx=0.$$

12. 设E是可测集, $1<p<\infty, f_k\in L^p(E), k=1,2,\cdots$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\quad \sup_k\|f_k\|_p\leqslant M,$$

证明: 对于任意的$g\in L^q(E)$, (q是p的共轭指数), 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g(x)dx=\int_E f(x)g(x)dx.$$

证明 由Fatou引理易证$f\in L^p(E)$, 由Young不等式

$$\begin{aligned}|(f_k-f)g|&\leqslant \frac{|f_k-f|^p}{p}+\frac{|g|^q}{q}\\&\leqslant \frac{2^{p-1}}{p}(|f_k|^p+|f|^p)+\frac{|g|^q}{q}.\end{aligned}$$

....

13. 设$f\in L^p(\mathbb{R}^n), p>1$, 而且对于任意一个具有紧支集的$\varphi\in C_c(\mathbf{R}^n)$有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx=0.$$

证明$f(x)=0, \quad , a.e. \mathbf{R}^n$.

证明 设A为$\mathbb{R}^n$的任一可测集,取$\varphi(x)=\mathcal{X}_A(x)\in C_c(\mathbb{R}^n)$,则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx=\int_A f(x)dx=0.$$

因此$f(x)=0, \quad a.e. \quad \mathbb{R}^n$(见第二章习题)

注意 本题也可以采用磨光化技巧.

14. 设E为可测集, 满足$m(E)=1$, 若$r>1$. 证明对于任一的函数$f\in L^r(E)$有

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p = exp\left(\int_E \ln|f(x)|dx\right).$$

证明 由Jensen不等式

$$\ln\|f\|_p = \frac{\ln\int|f|^p dx}{p} \geqslant \frac{\int \ln|f|^p dx}{p} = \int \ln|f(x)|dx.$$

另一方面,由$\ln u\leqslant u-1$知

$$\frac{\ln\int|f|^p dx}{p} \leqslant \frac{\int|f|^p dx - 1}{p} = \frac{\int(|f|^p-1)dx}{p}.$$

令$p\to\infty$得

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \exp\left(\int_E \ln|f|dx\right).$$

15. 给定可测集E, 设$f_k\in L^p(E)$, $k=1,2,\cdots,1\leqslant p<\infty$且有

$$\sum_{k\geqslant 1}\|f_k\|_p<\infty,$$

证明$\sum_{k\geqslant 1}|f_k(x)|<\infty$, $a.e.\,E$. 若记

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 1}f(x),$$

则有

$$\|f\|_p\leq\sum_{k\geq 1}\|f_k\|_p,\quad \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^N f_k - f\right\|_p = 0.$$

证明 若$m(E)<\infty$,则由Levi定理及Hölder不等式知

$$\int_E\sum_{k\geqslant 1}|f_k|dx = \sum_{k\geqslant 1}\int_E|f_k|dx\leqslant m(E)^{\frac{1}{q}}\sum_{k\geqslant 1}\|f_k\|_p<\infty.$$

故$f(x)<\infty$, $a.e.\,E$.

若$m(E)=\infty$, 令$E_n=E\cap[-n,n]$,则$m(E_n)<\infty$, 重复上面的讨论知$f(x)<\infty$, $a.e.\,E_n$,而 $E=\cup_{n\geqslant 1}E_n$,因此$f(x)<\infty$, $a.e.\,E$.

由三角不等式

$$\|f\|_p\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\|f_k\|_p.$$

另一方面,由三角不等式

$$\left\|\sum_{k=1}^N f_k - f\right\|_p = \left\|\sum_{N+1}^{\infty} f_k\right\|_p \leqslant \sum_{N+1}^{\infty}\|f_k\|_p,$$

由$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p$的收敛性知

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^N f_k - f\right\|_p = 0.$$

16. 设E为可测集, $f \in L(E), f_k \in L(E) \cap L^\infty(E), k = 1, 2, \cdots$. 若有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_1 = 0, \quad \sup_k \|f_k\|_\infty < \infty,$$

证明, 对任意的$1 < p < \infty$, 有

$$f \in L^p(E) \cap L^\infty(E), \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

证明 由$f_k \to f \quad \text{in} \quad L^1$知,存在子列$f_{n_k} \to f \quad a.e.$,又

$$M := \sup_k \|f_k\|_\infty < \infty,$$

从而$f \in L^\infty(E)$. 再证$f \in L^p(E)$.

$$\begin{aligned}\int |f_k - f|^p dx &= \int |f_k - f|^{p-1} |f_k - f| dx \\ &\leqslant 2M^{p-1} \int |f_k - f| dx \to 0.\end{aligned}$$

因此$f_k \to f \quad \text{in} \quad L^p$. 由$L^p$空间的完备性知$f \in L^p$.

17. 设E是可测集, $f \in L^p(E)$, $f_k \in L^p(E), k = 1, 2, \cdots$. 若$f_n \xrightarrow{L^p} f, f_n \to g$, a.e $[E]$, 证明$f = g$, $a.e.\, E$.

证明 若$f_n \xrightarrow{L^p} f$,则存在子列

$$f_{n_k} \to f, \quad a.e.\, E.$$

又$f_n \to g$, $a.e.\, E$.由收敛的唯一性知$f = g, \quad a.e.\, E$.

18. 设$f, g \in \mathcal{M}(0,1), f \geqslant 0, g \geqslant 0$.若$f(x)g(x) \geqslant x^{-1}$, $a.e.$,试证明$\|f\|_1 \|g\|_1 \geqslant 4$.

证明 由Cauchy-Schwarz不等式

$$\|f\|_1 \|g\|_1 \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{gf} dx\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4.$$

19. 给定可测集E, 设$f \in L^p(E), A \subset E$是可测集, 证明

$$\|f\|_p \leq \left(\int_A |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_{E\setminus A} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

证明 由

$$f(x) = f(x)\mathcal{X}_A(x) + f(x)\mathcal{X}_{E\setminus A}(x),$$

结合Minkowski不等式即得结论.

20. 设E是可测集, 对函数$f \in L^r(E) \cap L^s(E)$, 其中$1 \leqslant r, s < \infty, 0 < \lambda < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s},$$

证明

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_r^\lambda \|f\|_s^{1-\lambda}.$$

证明 指标关系满足
$$1=\frac{p\lambda}{r}+\frac{p(1-\lambda)}{s}.$$
故由Hölder不等式
$$\begin{aligned}\|f\|_p&=\left(\int|f|^{p\lambda}|f|^{p(1-\lambda)}\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int|f|^sdxd\right)^{\frac{1-\lambda}{s}}\left(\int|f|^rdx\right)^{\frac{\lambda}{r}}\\&=\|f\|_s^{1-\lambda}\|f\|_r^{\lambda}.\end{aligned}$$

21. 若E是测度为无穷的可测集, $1\leqslant p<r, L^p(E)$与$L^r(E)$之间是否存在包含关系?

解 若$m(E)<\infty$,则$L^r(E)\subset L^p(E)$.

若$m(E)=\infty$, 则未必有包含关系. 例如$f(x)=\frac{1}{x}, E=(1,\infty), p=1, r=2$.

22. 设$f\in L^p([a,b])$, 其中$1<p<\infty, F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 证明
$$F(x+h)-F(x)=O\left(|h|^{\frac{p-1}{p}}\right).$$

证明
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{|h|^{\frac{1}{q}}}\right|&\leqslant\frac{\int_x^{x+h}|f(t)|dt}{|h|^{\frac{1}{q}}}\\&\leqslant\frac{1}{|h|^{\frac{1}{q}}}\left(\int_x^{x+h}|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^{x+h}|1|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\|f\|_p<\infty.\end{aligned}$$

23. 在可测集E上有$f_n\xrightarrow{L^\infty}f$, 证明除去一个零测集$Z$, 在集合$E\setminus Z$上有 $f_n\rightrightarrows f$.

证明 由L^∞范数定义$\forall\varepsilon>0,\exists Z, m(Z)=0$且
$$\sup_{E\setminus Z}|f_n-f|\leqslant\|f_n-f\|_\infty+\varepsilon.$$
故f_n在$E\setminus Z$上一致收敛.

24. 设在可测集E上有$f_n\xrightarrow{L^p}f, g_n\xrightarrow{L^q}g$, 其中$p,q$为共轭指数, 证明$f_ng_n\xrightarrow{L^1}fg$.

证明 由Minkowski不等式及Hölder不等式
$$\begin{aligned}\|f_ng_n-fg\|_1&\leqslant\|(f_n-f)g_n\|_1+\|f(g_n-g)\|_1\\&\leqslant\|f_n-f\|_p\|g_n\|_q+\|f\|_p\|g_n-g\|_q\\&\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

25. 设在区间$[a,b]$上$f_n\xrightarrow{L^p}f$, 证明
$$\int_a^x f_n(t)dt\Longrightarrow\int_a^x f(t)dt\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

证明 由三角不等式及Hölder不等式

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f_n(t)-f(t)dt\right| &\leqslant \int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt \\ &\int_a^b |f_n-f|dt \\ &\leqslant (b-a)^{\frac{1}{q}}\|f_n-f\|^p \\ &\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

26. 设$f\in L^p(-\infty,+\infty)$ $(1\leqslant p<\infty)$, 证明

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|^p dx=0.$$

证明 $\forall \varepsilon>0, f(x)=g(x)+h(x)$, 其中$g(x)\in C_c(\mathbb{R}), \|h\|_p<\varepsilon$.易验证(利用$g$在紧集上的一致连续性)

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)-g(x)|^p dx=0.$$

因此

$$\limsup_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|^p dx\leqslant \limsup_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|g(x+t)-g(x)|^p dx+2\varepsilon.$$

27. 设$f\in L^p(\mathbb{R}), 1\leqslant p<\infty$, 证明

$$\lim_{y\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)+f(x)|^p dx=2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx.$$

证明 $\forall \varepsilon>0, f(x)=g(x)+h(x)$, 其中$g(x)\in C_c(\mathbb{R}), \|h\|_p<\varepsilon$.注意到当 y足够大时, $f(x+y)$与$f(x)$的紧支集并不相交, 因此

$$\lim_{y\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|g(x+y)+g(x)|^p dx=2\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p dx.$$

由三角不等式

$$|\|f(x+y)+f(x)\|_p-\|g(x+y)+g(x)\|_p|\leqslant 2\|h\|_p<2\varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned}|\|f(x+y)+f(x)\|_p-2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p| &\leqslant |\|f(x+y)+f(x)\|_p-\|g(x+y)+g(x)\|_p| \\ &\quad+|\|g(x+y)+g(x)\|_p-2^{\frac{1}{p}}\|g\|_p|+2^{\frac{1}{p}}|\|g\|_p-\|f\|_p| \\ &\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

28. 设E是可测集, $f,g\in\mathcal{M}^+(E), 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \beta\geqslant 1$, 证明

$$\lambda^\beta\|f\|_p+(1-\lambda)^\beta\|g\|_p\leqslant\|f+g\|_p.$$

由$f\geqslant 0, g\geqslant 0$知

$$\max\{\|f\|_p,\|g\|_p\}\leqslant\|f+g\|_p.$$

设

$$h(\lambda)=\lambda^{\beta}+(1-\lambda)^{\beta},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\beta\geqslant 1.$$

则

$$h''(\lambda)=\beta(\beta-1)(\lambda^{\beta-2}+(1-\lambda)^{\beta-2})\geqslant 0.$$

故h在$[0,1]$上为凸函数, 其最大值一定在断点处取得,故$h(\lambda)\leqslant 1$.综上

$$\lambda^{\beta}\|f\|_p+(1-\lambda)^{\beta}\|g\|_p\leqslant h(1)\|f+g\|_p=\|f+g\|_p.$$

4.2 L^2空间

1. 设$f\in\mathcal{M}(E),c>0$. 若对于任意得函数$g\in L^2(E)$, 有$\|fg\|_2\leqslant c\|g\|_2$, 试证明$f\in L^{\infty}(E)$, 且$\|f\|_{\infty}\leqslant c$.

证明

$$\begin{aligned}\|f^2\|_{\infty}&=\sup_{\|h\|_1=1}\int f^2hdx\\&=\sup_{\|\sqrt{|h|}\|_2}\int f^2(\sqrt{h})^2dx\\&\leqslant c^2\sup_{\|\sqrt{|h|}\|_2=1}\int |h|dx\\&\leqslant c^2.\end{aligned}$$

因此$\|f\|_{\infty}\leqslant c$.

2. 在$L^2(E)$中, 已知$f_k\xrightarrow{L^2}f, g_k\xrightarrow{L^2}g$, 证明

$$(f_k,g_k)\to(f,g).$$

证明

$$\begin{aligned}|(f_k,g_k)-(f,g)|&=|(f_k-f,g_k)+(f,g_k-g)|\\&\leqslant\|f_k-f\|_2\|g_k\|_2+\|f\|_2\|g_k-g\|_2\\&\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

3. 证明对于任意的函数$f,g\in L^2(E)$, 它们的内积满足

$$(f,g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2).$$

这个关系称为平行四边形对角线法则.

证明 直接计算即可.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2)&=\frac{1}{4}((f+g,f+g)-(f-g,f-g))\\&=\frac{1}{4}\cdot 4(f,g)\\&=(f,g).\end{aligned}$$

4. 记$E_\alpha=\{f\in C[-1,1]|f(0)=\alpha\}$. 证明$E_\alpha$是凸集(即连接$E_\alpha$中任意两个元素的线段都在$E_\alpha$中), 且在$L^2[-1,1]$中稠密.

证明 设$f,g\in E_\alpha$,$\forall\lambda\in[0,1]$,

$$(\lambda f+(1-\lambda)g)(0)=\lambda f(0)+(1-\lambda)g(0)=\alpha.$$

故E_α为凸集.任一$g\in L^2[-1,1]$, $\forall\varepsilon>0,\exists h\in C_0[-1,1]$满足

$$\|g-h\|_{L^2[-1,1]}<\frac{\varepsilon}{2},$$

对于$h\in C_0[-1,1]$, 易构造$f\in E_\alpha$满足

$$\|f-h\|_{L^2[-1,1]}<\frac{\varepsilon}{2},$$

由三角不等式

$$\|g-f\|_{L^2[-1,1]}<\varepsilon.$$

因此E_α在$L^2[-1,1]$中稠密.

5. 设$k(x,y)\in L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, 对于$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明下述积分

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}k(x,y)f(y)dy$$

有意义且$Tf\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

证明 任一$x\in\mathbb{R}^n$,

$$|Tf(x)|\leqslant\|k(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_y)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_y)}<\infty.$$

因此$Tf(x)$有意义. 进一步地,

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}\leqslant\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n_y)}\|k(x,y)\|_{L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)}<\infty.$$

6. 对于任意的函数$f\in C^1[0,1]$定义

$$\|f\|_{2,1}=\sqrt{\int_0^1|f(x)|^2+|f'(x)|^2dx},$$

证明$\|\cdot\|$满足范数公理, 考虑在此范数下的Cauchy列$\{g_n\}$, 即$n,m\to\infty$时,有$\|g_n-g_m\|_{2,1}\to 0$, 证明$\{g_n\}$也是$L^2[0,1]$中的Cauchy列.

证明 验证$\|\cdot\|_{2,1}$是范数, $\forall\in C^1[0,1]$, 显然$\|f\|_{2,1}<\infty$; $\|\lambda f\|_{2,1}=|\lambda|\|f\|_{2,1}$; $\|f\|_{2,1}\geqslant 0$当且仅当$f=0$时等号成立.

由Minkowski不等式

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{2,1}&=\left(\int_0^1(f+g)^2+(f'+g')^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left((\|f\|_2+\|g\|_2)^2+\|f'\|_2+\|g'\|_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\|f\|_2^2+\|f'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\|g\|_2^2+\|g'\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|f\|_{2,1}+\|g\|_{2,1}.\end{aligned}$$

若(g_n)是按$\|\cdot\|_{2,1}$下的Cauchy列, 则

$$\|g_n-g_m\|_2\leqslant\|g_n-g_m\|_{2,1}\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

7. 对于任意的函数$f,g\in C^1[0,1]$定义

$$(f,g)=\int_0^1[f(x)g(x)+f'(x)g'(x)]dx,$$

证明$(\cdot,\cdot)$满足内积公理, 且$\|f\|_{2,1}=\sqrt{(f,f)}$成立.

证明　直接按内积的定义验证即可.

8. 定义空间如下:

$$H^1[0,1]=\{f\in L^2[0,1]|\text{存在}\|\cdot\|_{2,1}\text{意义下的Cauchy列}\varphi_n\in C^1[0,1],\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-f\|_{2,1}\to 0\}$$

证明: $C^1[0,1]$在$H^1[0,1]$中依范数$\|\cdot\|_{2,1}$是稠密的, 并对于任意的$f\in H^1[0,1]$, 求$\|f\|_{2,1}$.

证明　由$H^1[0,1]$的定义, $f\in H^1[0,1],\forall\varepsilon>0,\exists\varphi\in C^1[0,1]$满足

$$\|\varphi-f\|_{2,1}<\varepsilon.$$

事实上, $H^1[0,1]$是$C^1[0,1]$按$\|\cdot\|_{2,1}$的完备化空间, 因此

$$\|f\|_{2,1}=\sqrt{\int_0^1|f(x)|^2+|f'(x)|^2dx}.$$

9. 记$f\in L^2([0,1])$,记

$$g(x)=\int_0^1\frac{f(t)}{|x-t|^{\frac{1}{2}}},\quad 0<x<1.$$

证明下述不等式

$$\left(\int_0^1 g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　Hardy-Littlewood-Sobolev不等式.■

10. 证明$\{\sin kx\}$是$L^2([0,\pi])$中的完全系.

证明　易验证$\{\sin kx\}$是$L^2([0,\pi])$中的正交系.设$f\in L^2([0,\pi])$且

$$(f,\sin kx)=\int_0^\pi f(x)\sin kx dx=0,\quad k=0,1,2,\cdots$$

对$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上作奇延拓, 仍记为$f(x)$, 则

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos kx dx=0,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin kx dx=2\int_0^\pi f(x)\sin kx dx=0,\quad k=0,1,2,\cdots$$

因此$f(x)=0,\ x\in[-\pi,\pi]$.

11. 设$f\in L^2(0,\pi)$. 证明不等式

$$\int_0^\pi(f(x)-\sin x)^2dx\leqslant\frac{4}{9}$$

与不等式

$$\int_0^\pi(f(x)-\cos x)^2dx\leqslant\frac{1}{9}$$

不能同时成立.

证明 反证法, 若同时成立, 则

$$\pi = \int_0^\pi (\cos x - \sin x)^2 dx \leqslant (\|\cos x - f(x)\|_2 + \|f(x) - \sin x\|_2)^2 \leqslant 1.$$

矛盾.

12. 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系, 试证明$\{\varphi_k(x)\}$是完全正交系的充分必要条件是

$$L^2(E) = \left\{ \sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k(x) \middle| \{a_k\}\text{是实数列, 满足} \sum_{k=1}^\infty a_k^2 < \infty \right\}.$$

证明 必要性. 若$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系, 则$\forall f \in L^2(E)$,

$$f = \sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k, \quad \text{其中} a_k = (f, \varphi_k),$$

由Bessel不等式

$$\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty.$$

充分性. 设$f \in L^2(E)$且$f \perp \varphi_k, k = 1, 2, \cdots$,由

$$f = \sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k \Longrightarrow a_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

因此$f = 0$, 故(φ_k)是完全正交系.

13. 设$\{\varphi_j(x)\}$与$\{\psi_k(x)\}$分别是$L^2(E_1)$与$L^2(E_2)$上的完全标准正交系, 试证明$\{\varphi_j(x)\psi_k(y)\}$是$L^2(E_1\times E_2)$上的完全标准正交系.

证明 设$f(x, y) \perp \varphi_j(x)\psi_k(y)$, $\forall i, j$,即

$$\iint_{E_1\times E_2} f(x, y)\varphi_j(x)\psi_k(y)dxdy = \int_{E_2} \psi_k(y)dy \int_{E_1} f(x, y)\varphi_j(x)dx = 0.$$

$\{\varphi_j(x)\}$与$\{\psi_k(x)\}$分别是$L^2(E_1)$与$L^2(E_2)$上的完全标准正交系, 因此

$$\int_{E_1} f(x, y)\varphi_j(x)dx = 0 \Longrightarrow f(x, y) = 0.$$

14. 设$\{\varphi_n\}$是$L^2([a, b])$中的标准正交基, 若$\{\psi_n\}$是$L^2([a, b])$中的正交系. 满足

$$\sum_{n=1}^\infty \int_a^b [\varphi_n(x) - \psi_n(x)]^2 dx < 1.$$

试证明$\{\psi_n\}$是$L^2([a, b])$中的完全系.

证明 设$f \perp \psi_k, \forall k \in \mathbb{N}_+$, 则由$\{\varphi_n\}$为标准正交基知

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{n=1}^\infty |(f, \varphi_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^\infty |(f, \varphi_n - \psi_n)|^2 \\ &\leqslant \|f\|^2 \cdot \sum_{n=1}^\infty \|\varphi_n - \psi_n\|^2, \end{aligned}$$

这导出

$$\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|^2\right)\|f\|^2\leqslant 0\Longrightarrow\|f\|=0.$$

15. 设$\{\varphi_n(x)\}$是$L^2([a,b])$中的标准正交基,对于任意的$f\in L^2([a,b]),c_n=(f,\varphi_n),f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$. 证明对于任意的可测子集$E\subset[a,b]$,

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_E\varphi_n(x)dx.$$

上述等式表明$f(x)$的Fourier技术可以逐项积分.

证明 设$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x),E=[a,b]$, 则$S_n\to f$ in $L^2(E)$.由Cauchy-Schwarz不等式

$$\left|\int_E f-S_n(x)dx\right|\leqslant m(E)^{\frac{1}{2}}\|f-S_n\|\to 0.$$

16. 设$\{\varphi_k(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交基, $\{\psi_j(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系. 若

$$\|\varphi_k\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|(\varphi_k,\psi_j)|^2,\quad k=1,2,\cdots$$

成立. 证明$\{\psi_j(x)\}$也是$L^2(E)$中的标准正交基.

证明 直接计算

$$\begin{aligned}
f&=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(f,\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_k,\psi_j)\psi_j\right)\varphi_k\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\psi_j)\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k,\psi_j)\varphi_k\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\psi_j)\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_j,\varphi_k)\varphi_k\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\psi_j)\psi_j.
\end{aligned}$$

17. 设$\mathcal{F}\subset L^2(E)$, 满足条件: $\forall f,g\in\mathcal{F}$, 当$f\neq g$时, 均有$f\perp g$. 若已知空间$L^2(E)$可分, 证明$\mathcal{F}$是可数集.

证明 设$\mathcal{G}$是$L^2(E)$的可数稠密子集, 不妨设$\mathcal{G}$是由$L^2(E)$的标准正交基, 则$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$, 从而$\mathcal{F}$可数.

18. 设$\{\varphi_k\}\in L^2([a,b])$是标准正交系. 若存在极限$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$, $a.e.\,[a,b]$, 证明$\varphi(x)=0$, $a.e.\,[a,b]$.

证明 由Bessel不等式

$$\sum|(f,\varphi_k)|^2\leqslant\|f\|^2,\quad\forall f\in L^2[a,b].$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\int f\varphi dx=0.$$

由Fatou引理

$$\int \varphi^2 dx\leqslant \liminf_{k\to\infty}\int \varphi_k^2 dx=1.$$

故$\varphi\in L^2[a,b]$.再次利用Fatou引理

$$\int \varphi^2 dx\leqslant \liminf_{k\to\infty}\int \varphi\varphi_k dx=0.$$

从而$\varphi(x)=0,\ a.e.\ [a,b]$.

19. 设$\{\varphi_k\}\in L^2([0,1])$是标准正交系, $|\varphi_k(x)|\leqslant M, k=1,2,\cdots$. 若有数列$\{a_k\}$, 使得级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$在$[0,1]$上几乎处处收敛, 证明$\lim_{k\to\infty}a_k=0$.

证明 反证法. 若命题不成立, 则$\exists\varepsilon_0>0$, 子列$\{a_{n_k}\}$满足

$$|a_{n_k}|\geqslant\varepsilon_0.$$

又$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$几乎处处收敛, 易得

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=0,\quad a.e.\quad [0,1].$$

已知$|\varphi_k|\leqslant M$及Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1|\varphi_{n_k}(x)|^2dx=\int_0^1\lim_{k\to\infty}|\varphi_{n_k}(x)|^2dx=0.$$

这与$\|\varphi_{n_k}\|_2=1$矛盾.

20. 设$f,g\in L^2(\mathbb{R}^1)$, 令

$$f_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad h\neq 0.$$

若有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f_h(x)-g(x)|^2dx=0.$$

证明存在常数c, 使得

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt+c.$$

证明 见周民强《实变函数解题指南》P412.■

21. 设$g\in L^1(\mathbb{R}^1)$, 且$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0$. 证明在$L^2(\mathbb{R})$中均方收敛意义下有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_k(x-y)g(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy.$$

证明 设$h_k=(f_k-f)*g$, 由Young不等式

$$\|h_k\|_2\leqslant\|f_k-f\|_2\|g\|_1\to 0,\quad k\to\infty.$$

22. 给定函数$f(x)=e^x$, 求区间$[0,1]$上均方逼近它的最佳二次多项式.

解 待定法. 设该多项式为$p(x)=ax^2+bx+c$,则

$$\begin{aligned}\|f-p\|_2^2&=\int_0^1(e^x-ax^2-bx-c)^2dx\\&=\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}(2ac+b^2)+2(2a-b+c)\\&+\frac{ab}{2}-2e(a+c)+bc+c^2+\frac{e^2-1}{2}\\&=:g(a,b,c).\end{aligned}$$

令

$$\frac{\partial g}{\partial a}=\frac{\partial g}{\partial b}=\frac{\partial g}{\partial c}=0,$$

解得

$$a=210e-570,\quad b=588-216e,\quad c=39e-105.$$

故$p(x)=(210e-570)x^2+(588-216e)x+(39e-105)$.

23. 给定常数$a>0$, 设M是$L^2[0,1]$的子空间, 满足对于任意的函数$f\in M,|f(x)|\leqslant a\|f\|_2$, $a.e.$, 证明 $\dim M\leqslant a^2$.

证明 ■

24. 证明在$C[a,b]$中不可能引进一种内积$(\cdot,\cdot)$,使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

证明 不妨设$a=0,b=1$, 取$f=x,g=x^2$.若存在内积$(\cdot,\cdot)$,使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

则平行四边形法则

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

成立. 但是经计算

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=4+\frac{1}{16}=\frac{65}{16}.$$

而

$$2(\|f\|^2+\|g\|^2)=4.$$

25. 令$\mathcal{V}=\{f\in L^2[0,T]\|f\|=1\}$,称其为$L^2[0,T]$的单位球面. 求证函数

$$f\longmapsto\left|\int_0^T\mathrm{e}^{-(T-x)}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

在单位球面上达到最大值. 并求出此最大值和最大值的元素f.

证明 由Cauchy-Schawarz不等式

$$\left|\int_0^T\mathrm{e}^{-(T-x)}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_0^T e^{-2(T-x)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2.$$

当$f = \frac{e^{-(T-x)}}{\|e^{-(T-x)}\|_2}$时等号可取到,最大值为

$$\left(\int_0^T e^{-2(T-x)}dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1-e^{-2T}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

26. 记$\mathcal{D} = \{f \in L^2[-1,1] \mid f(-x) = f(x)\}$, 并记$\mathcal{D}^\perp = \{g \in L^2[-1,1] | g \perp f, \forall f \in \mathcal{D}\}$, 称$\mathcal{D}^\perp$为集合$\mathcal{D}$的正交补空间. 请描述集合$\mathcal{D}^\perp$,并证明之.

证明 集合 $\mathcal{D}^\perp = \{g \in L^2[-1,1] | g(-x) = -g(x)\}$,首先

$$\forall g \in \mathcal{D}^\perp, f \in D \Longrightarrow (f,g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0.$$

反之,若g满足

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0, \forall f \in \mathcal{D},$$

令$z(x) = g(x) + g(-x)$,则$z(x)$为偶函数, 易计算

$$\int_{-1}^1 z^2(x)dx = 0 \Rightarrow z(x) = 0 \quad \text{a.e. } [-1,1].$$

故$g \in L^2[-1,1]$且g为奇函数.

27. 给定$\{f_n\} \subset L^2[0,1]$, 设f_n依测度收敛于0, 且$\|f_n\|_2 \leqslant 1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0.$$

证明 对任给$\varepsilon > 0$, 作

$$E_n = \{x \in [0,1] : |f_n(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

依题意知$m(E_n) \to 0$,即存在$N, m(E_n) < \varepsilon^2$,从而有

$$\begin{aligned}\|f_n\|_1 &= \int_{E_n} |f_n|dx + \int_{[0,1]\setminus E_n} |f_n|dx \\ &\leqslant \|f_n\|_{L^2(E_n)}(m(E_n))^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \\ &\leqslant (\|f_n\|_2 + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

注意 反证法. 若命题不成立, 则存在$\varepsilon_0 > 0, \{n_k\} \nearrow +\infty$满足

$$\int_0^1 |f_{n_k}|dx \geqslant \varepsilon_0.$$

由Riesz定理,(f_{n_k})有几乎处处意义下的收敛子列,不妨设为其本身, 即

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0, \quad a.e. \quad [0,1].$$

由$\|f_{n_k}\|_2 \leqslant 1$知

$$\int_0^1 |f_{n_k}|dx \leqslant \left(\int_0^1 |f_{n_k}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

...■

28. 设$\{\varphi_j(x)\}$是$L^2(E)$中的标准正交系, $m(E) < \infty$, 并且满足$|\varphi_j(x)| \leqslant M(x \in E, \forall j)$. 证明级数$\sum_j \varphi_j(x)/j$在$E$上几乎处处收敛.

证明 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,设$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_n(x)}{n}$, 则存在$f\in L^2(E)$使得

$$\lim_{N\to\infty}\int_E |S_N(x)-f(x)|^2dx=0.$$

易验证

$$\|S_{(N+1)^2}-S_{N^2}\|_2^2=\sum_{n=N^2+1}^{(N+1)^2}n^{-2}\leqslant\int_{N^2}^{(N+1)^2}\frac{dx}{x^2}\leqslant C_1N^{-2}.$$

令$g_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|S_{(n+1)^1}-S_{n^2}|$, 则由Minkowski不等式

$$\lim_{N_1,N_2\to\infty}\|g_{N_1}-g_{N_2}\|_2\leqslant C_2\lim_{N_1,N_2\to\infty}|N_2^{-2}-N_1^{-2}|=0.$$

从而存在$g\in L^2(E)$, 使得$\|g_N-g\|_2\to 0$, 而且

$$g_N(x)\leqslant g_{N+1}(x),\quad \lim_{N\to\infty}g_N(x)=g(x),\quad \lim_{N\to\infty}S_{N^2}(x)=f(x).$$

对于$p:N^2<p<(N+1)^2$, 我们有

$$|S_p(x)-S_{N^2}(x)|\leqslant M^2\sum_{k=N^2+1}^{p}k^{-2}\leqslant M^2\frac{p-N^2}{N^2+1}\leqslant M^2\frac{2N+1}{N^2+1},$$
$$|f(x)-S_p|(x)\leqslant|f-S_{N^2}|+|S_{N^2}-S_p|,$$

由此知结论成立.

29. 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的标准正交基. 证明对于E中任一正测度子集A均有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_A\varphi_k^2(x)dx\geqslant 1.$$

证明 设$f(x)=\mathcal{X}_A(x)\in L^2(E)$,由Parserval等式及Cauchy-Schwarz不等式

$$m(A)^2=\|f\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\varphi_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_A\varphi_kdx\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_A\varphi_k^2dx\cdot m(A)^2.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_A\varphi_k^2dx\geqslant 1.$$

30. 设$\{\varphi_k\}$是$L^2(E)$中的标准正交基,试证明$\sum_k\varphi_k^2(x)=\infty,\quad a.e.\,E$;当$A\subset E,m(A)>0$时, 有$\sum_k\int_A\varphi_k^2(x)dx=\infty$.

证明 反证法. 假定$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(x)<\infty$, 则存在$A\subset E,m(A)>0$,以及$M$满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)<M,\quad\forall x\in A.$$

我们有

$$\int_A\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_A\varphi_k^2(x)dx<+\infty.$$

但是(φ_k)是$L^2(E)$中的标准正交基, 对于E 中的任一可测集K,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_K\varphi_k^2(x)dx\geqslant\frac{1}{m(A)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_K\varphi_k(x)dx\right)^2=1.$$

取N, 使得$\sum_{N+1}^{\infty}\int_A \varphi_k^2(x)dx < \frac{1}{2}$,再取$\tilde{e} \subset A$满足 $\sum_{k=1}^{N}\int_{\tilde{e}} \varphi_k^2(x)dx < \frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\tilde{e}} \varphi_k^2(x)dx < 1$$

矛盾.

4.3 卷积与Fourier变换

1. 在空间$L^1(\mathbb{R}^n)$中, 证明卷积满足结合律:$\forall f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

证明　利用Fubini定理, 交换积分次序即可.

2. 定义函数的平移$\tau_z f(x) = f(x - z)$, 证明:

$$\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g).$$

证明

$$\begin{aligned}\tau_z(f * g) &= \tau_z\left(\int f(x-y)g(y)dy\right)\\ &= \int f(x-y-z)g(y)dy\\ &= (\tau_z f) * g.\end{aligned}$$

3. 设$f, f_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \cdots$, 且有$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_2 = 0$. 若 $g \in L(\mathbb{R}^n)$. 证明

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k * g - f * g\|_2 = 0.$$

证明　由Young不等式

$$\|(f_k - f)g\|_2 \leqslant \|f_k - f\|_2\|g\|_1 \to 0, \quad k \to \infty.$$

4. 设$1 \leqslant p \leqslant \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 证明$(f * g)(x)$有定义且是$\mathbb{R}^n$上的连续函数.

证明　当$p = \infty, q = 1$时,

$$|(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int |g(x + h - y) - g(x - y)|dy,$$

由积分的绝对连续性知

$$\lim_{h\to 0}\int |g(x + h - y) - g(x - y)|dy = 0.$$

因此$(f * g)(x)$连续.

当$1 \leqslant p < \infty$时, 由Hölder不等式

$$|(f * g)(x + h) - (f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p\left(\int |g(x + h - y) - g(x - y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}},$$

由$g \in L^p(\mathbb{R}^n)$及积分的绝对连续性知$(f*g)(x)$连续.

5. (杨氏不等式)设$f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p, q < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=\frac{1}{r}>0$,令$h(x)=f*g(x)$. 证明

$$\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

证明 当$r=\infty$时,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,Young不等式可由一般的Hölder不等式得到.
现假设$1 \leqslant r < \infty$,此时由指标关系得$1 \leqslant p, q \leqslant r < \infty$,设

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}=1,$$

其中s_1, s_2, s_3为待定指标,则

$$f(x-y)g(y)=\left(f(x-y)^p g(y)^q\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(f(x-y)^p\right)^{\frac{1}{s_2}}\left(g(y)^q\right)^{\frac{1}{s_3}},$$

由Hölder不等式

$$|f*g| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)^p g(y)^q| dy\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{s_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{s_3}},$$

令$s_1=r$,对上式r次方并对x进行积分得

$$\|f*g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{p\left(1+\frac{r}{s_2}\right)}\|g\|_q^{q\left(1+\frac{r}{s_3}\right)}.$$

取

$$s_2=\frac{pr}{r-p}, \quad s_3=\frac{qr}{r-q},$$

满足要求.

6. 给定$[0,\infty)$上函数f和g, 设它们在任意有限区间上Lebesgue可积. 令

$$f*g(x)=\int_0^x f(x-y)g(y)dy,$$

证明$f*g$在任意有限区间上Lebesgue可积.

证明 设$[a,b] \subset [0,\infty), \forall x \in [a,b]$, 由Fubini定理

$$\int_a^b \int_0^x |f(x-y)||g(y)| dy = \int_a^b dy \int_y^b |f(x-y)g(y)| dx \leqslant \|f\|_{L^1[a,b]}\|g\|_{L^1[a,b]}.$$

7. 设$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 而且$(f*f)(x)$几乎处处有定义, 记

$$f_1^*(x)=f(x) \quad , \quad f_k^*=\left(f_{k-1}^* * f\right)(x), \quad k=2,3,\cdots,$$

则称$f_k^*(x)$为$f(x)$的n次迭代卷积. 若$f \in L^p(\mathbb{R}), 1 \leqslant p < \infty$, 记$q$为$p$的共轭指数,并令

$$1-\frac{1}{k} \leq \frac{1}{p}, \frac{1}{p_k}=1-\frac{k}{q}, k=1,2,\cdots$$

证明: $\|f_k^*\|_{p_k} \leqslant \|f\|_p^k, k=1,2,\cdots$.

证明 数学归纳法, 当$k=1$时, 命题显然成立.假定命题$k=n$时成立,则由Young不等式

$$\|f_{n+1}^*\|_{p_{k+1}}=\|f_k^* * f\|_{p_{k+1}} \leqslant \|f_k^*\|_{p_k}\|f\|_p \leqslant \|f\|_p^{k+1}.$$

8. 设$p \geqslant 1$, p是它的共轭指数, $g \in \mathcal{M}(E)$. 若存在$M > 0$, 使得对于一切E上简单可积函数$\varphi(x)$都有

$$\left| \int_E g(x)\varphi(x)dx \right| \leqslant M\|\varphi\|_p.$$

证明:$g \in L^{p'}(E)$且$\|g\|_{p'} \leqslant M$.

证明　由简单函数在L^p稠密知, $\forall f \in L^p$均有

$$\left| \int_E g(x)f(x)dx \right| \leqslant M\|f\|_p.$$

因此

$$\|g\|_{p'} = \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int_E g(x)f(x)dx \right| \leqslant M.$$

9. (广义Minkowski不等式) 设$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. 若对几乎处处的$y \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leqslant p < \infty)$, 且有

$$\int_{k^n} \|f(\cdot, y)\|_p dy = M < \infty,$$

证明:

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy \right|^p dx \right]^{1/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p \, dx \right]^{1/p} dy$$

证明　当f为简单函数时, 上式退化为离散版本的Minkowski不等式, 对于一般情形利用简单函数逼近即可.

10. 设$g \in L^1(E)$且在可测集E上$g(x) > 0$,对于可测函数f, 以及$1 \leqslant p < \infty$. 定义

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p g(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

并记$L^p(E, g) = \{f \in \mathcal{M}(E) | \|f\|_p < \infty\}$. 在此空间上建立Hölder不等式, 证明$\|\cdot\|_p$是一个范数, 它是完备的吗?

解　直接验证范数的定义即可,令$d\mu = g(x)dx$,Hölder不等式与通常的Hölder不等式形式上没有什么区别,把dx替换为$d\mu$即可. $L^p(E, \mu)$为Banach空间.

11. 给定任意$\mathbb{R}^n$上的一个测度μ. 设f是关于μ的可测函数, 令

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

并记$L^p\left(\mathbb{R}^n, \mu\right) = \{f \in \mathfrak{M}\left(\mathbb{R}^n, \mu\right) \mid \|f\|_p < \infty\} L^p\left(\mathbb{R}^n, \mu\right) = \{f \in \mathfrak{M}\left(\mathbb{R}^n, \mu\right) \mid \|f\|_p < \infty\}$ 在此空间上建立Hölder不等式, 证明$\|\cdot\|_p$是一个范数, 它是完备的吗?

解　直接验证范数的定义即可,Hölder不等式与通常的Hölder不等式形式上没有什么区别,把dx替换为$d\mu$即可. $L^p(E, \mu)$为Banach空间.

12. 设μ是$(-\infty, +\infty)$上的全有限Borel测度, $f \in L^p(-\infty, \infty)(1 \leqslant p < \infty)$. 定义卷积如下:

$$\mu * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y).$$

证明$\mu * f \in L^p(-\infty, \infty)$, 且有$\|\mu * f\|_p \le \mu(\mathbb{R})\|f\|_p$.

证明　这是Young不等式的直接推论.

13. 设T是一个n阶可逆矩阵, $f \in L(\mathbb{R}^n)$. 令$g(x) = f(Tx)$, 试用$\hat{f}$来表示$\hat{g}$.

证明

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int g(x)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int f(Tx)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int f(y)e^{-iT^{-1}\xi}|T^{-1}|dx \\ &= |T^{-1}|\hat{f}(T^{-1}\xi).\end{aligned}$$

14. 设$f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \ne 0$. λ是一个复数, 且$\hat{f} = \lambda f$. 试问λ应是什么样的复数.

解　因为

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2,$$

因此λ应满足$|\lambda| = 1$.

15. 不用Fourier变换, 直接证明定理4.3.14中的(1).

证明　即要证$f, g \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * g \in S(\mathbb{R}^n)$. 这是Lebesgue控制收敛定理的直接推论.

16. 设$f(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,具有紧支集$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le r\}$, 记

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot z}\mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

证明函数f是全纯函数, 存在常数$c_N < \infty$, 使得

$$|\widehat{f}(z)| \le c_N(1 + |z|)^{-N}\mathrm{e}^{r|\operatorname{Im} z|}, \quad N = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明　这是著名的Palay-Wiener-Schwarz定理, 见崔尚斌《偏微分方程现代理论引论》P120.

17. (Possion求和公式)设$f \in S(\mathbb{R})$证明

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

此公式在高维欧氏空间中也成立, 应如何修改上述公式?

证明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int f(x)e^{-ixn}dx = \blacksquare.$$

18. (Riemann-Lebesgue引理)设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 证明

$$\lim_{|z|\to\infty} \widehat{f}(z) = 0.$$

证明 设f为简单函数则

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty} f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

由稠密性讨论知

$$\lim_{|z|\to\infty} \widehat{f}(z) = 0.$$

19. 证明在空间$L^1(\mathbb{R}^n)$上, 卷积运算没有单位元.

证明 反证法.假设$\exists u \in L^1(\mathbb{R}^n)$使得

$$(u * f)(x) = f(x), \quad a.e. \quad \mathbb{R}^n.$$

选取$\delta > 0, Q = [-2\delta, 2\delta]^n$,

$$\int_Q |u(x)|dx < 1,$$

令$f(x) = \mathcal{X}_{[-\delta,\delta]^n}(x)$知

$$f(x) = (u * f)(x) = \int_{[x-\delta,x+\delta]^n} u(t)dt,$$

从而当$x_0 \in [-\delta, \delta]$时,

$$1 = f(x_0) = \int_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} u(t)dt.$$

另一方面

$$1 = \left|\int_{[x_0-\delta,x_0+\beta]^n} u(t)dt\right| \leqslant \int_Q |u(t)|dt < 1,$$

矛盾.