

2021 年秋统计学习题 06

1. 下面的 16 个数来自计算机的正态随机数生成器¹

5.3885 3.2387 0.2195 0.3231 -3.6310 -0.3892 1.7771 1.4031
-1.5357 -1.6683 4.9765 2.0393 -0.5556 -0.5957 -0.9547 1.0123

- (a). 你认为这个正态分布的均值 μ 和方差 σ^2 是多少?
 - (b). 给出 μ 的 90%, 95%, 99% 的置信区间.
 - (c). 给出 σ^2 的 90%, 95%, 99% 的置信区间.
 - (d). 给出 σ 的 90%, 95%, 99% 的置信区间.
 - (e). 如果将 μ 的置信区间长度减半, 样本需要增加多少?
2. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ, σ 未知. 常数 c 应取多少时才能保证区间 $(-\infty, \bar{X} + c]$ 是 μ 的 95% 的置信区间, 即求 c 使得

$$\mathbb{P}(-\infty < \mu \leq \bar{X} + c) = 0.95.$$

3. 设 $L(x), U(x)$ 满足

$$\mathbb{P}(L(\mathbf{X}) \leq \theta) = 1 - \alpha_1, \quad \mathbb{P}(U(\mathbf{X}) \geq \theta) = 1 - \alpha_2,$$

且对任意 \mathbf{x} ,

$$L(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x}).$$

证明

$$\mathbb{P}(L(\mathbf{x}) \leq \theta \leq U(\mathbf{x})) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

¹本例使用 WPS 的电子表格, 命令为 `=norminv(rand(), μ , σ)`).

4. 设 $X|P \sim B(n, P), P \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, 即成功的概率 P 是一个服从 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ 的随机变量, 在条件 $P = p$ 时, 随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$.
- (a). 求 $\mathbb{E}X$.
- (b). 求 $\text{Var } X$.
- (c). 证明 X 的方差可以写成

$$\text{Var } X = n\mathbb{E}P(1 - \mathbb{E}P) + n(n - 1) \text{Var } P.$$