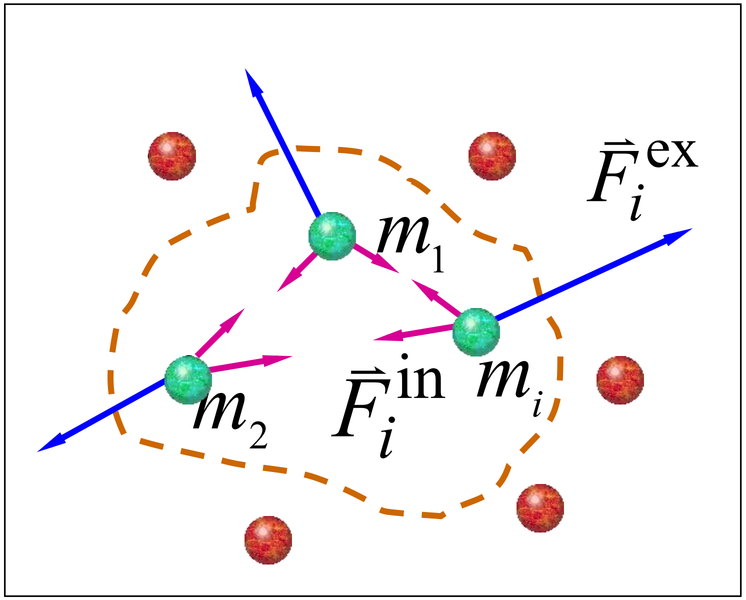
§5 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理



质点系：由两个或两个以上的质点构成的系统。

质点系内质点受力：内力+外力

对于 N 个质点构成的质点系，其中第 i 个质点所受内力与外力所做的总功为：

$$A_i = A_{i内力} + A_{i外力}$$

内力功　外力功

根据质点的动能定理有：

$$A_{i内力} + A_{i外力} = E_{ki} - E_{ki0} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, \mathrm{N}$$

对质点系，有

$$\sum_i A_{i外力}+\sum_i A_{i内力}=\sum_i E_{\mathrm{k}i}-\sum_i E_{\mathrm{k}i0}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

质点系动能定理： 作用于质点系的内力与外力功的代数和数值上等于质点系动能的增量。即

$$A_{内力}+A_{外力}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

- 内力可以改变质点系的动能。

二、质点系的功能原理

质点系动能定理 $A_{外力}+A_{内力}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$

$$A_{内}=\sum_i A_{i内}=A_{保守内}+A_{非保守内}$$

$$A_{保守内}=-(\sum_i E_{\mathrm{p}i}-\sum_i E_{\mathrm{p}i0})=-\left(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p}0}\right)$$

$$A_{外力}+A_{非保守内}-\left(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p}0}\right)=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

$$A_{外力}+A_{非保守内}=(E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}})-(E_{\mathrm{k}0}+E_{\mathrm{p}0})$$

机械能 $E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{A_{外力}+A_{非保守内}=E-E_0}$$

质点系的功能原理： 质点系机械能的增量等于外力和非保守内力做功之和。

三、机械能守恒定律

由质点系的功能原理： $A_{外力}+A_{非保守内}=E-E_0$

当 $A_{外力}+A_{非保守内}=0$ 时，有 $E=E_0$

机械能守恒定律：只有保守内力做功的情况下，质点系的机械能保持不变。

即 $E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}$ 或 $\boxed{\Delta E_k=-\Delta E_p}$

机械能守恒定律是一个普适的定律。

研究守恒定律的意义在于：不究过程细节而能对系统的状态下结论，这是各个守恒定律的特点和优点 。

**四、能量守恒定律

亥姆霍兹（1821—1894），德国物理学家和生理学家。于1874年发表了《论力（现称能量）守恒》的演讲，首先系统地以数学方式阐述了自然界各种运动形式之间都遵守能量守恒这条规律。可以说亥姆霍兹是能量守恒定律的创立者之一。

能量守恒定律：对与一个与自然界无任何联系的系统来说，系统内各种形式的能量是可以相互转换的，但是不论如何转换，能量既不能产生，也不能消灭。

（1）能量是系统状态的函数；

（2）系统能量不变，但各种能量形式可以互相转化；

（3）能量的变化常用功或者热来量度；

（4）生产斗争和科学实验的经验总结。

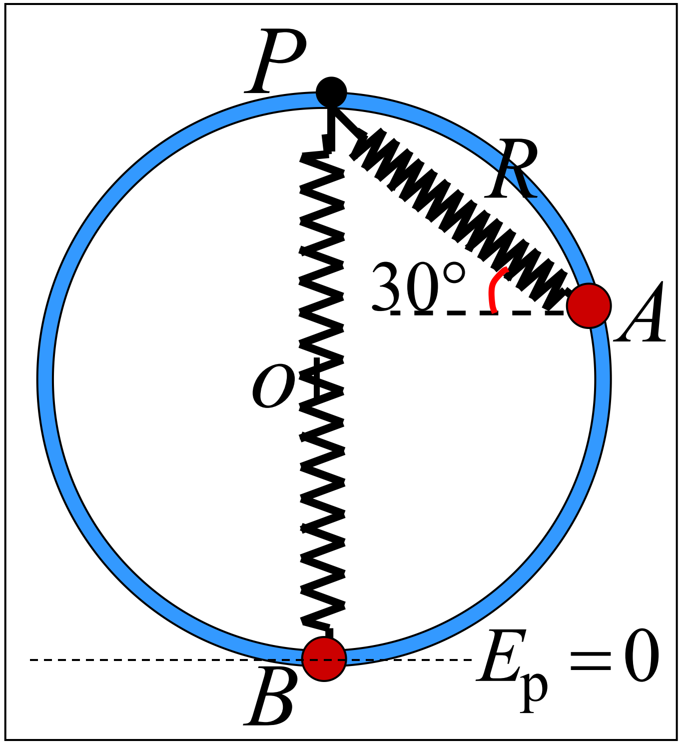
例1： 有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点P，另一端系一质量为m 的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦)。开始小球静止于点 A，弹簧处于自然状态，其长度为圆环半径R；当小球运动到圆环的底端点B时,小球对圆环没有压力。求弹簧的劲度系数。

解 以弹簧、小球和地球为一系统，

$\because A \rightarrow B$ 只有保守内力做功

$\therefore$系统机械能守恒 $E_B = E_A$

取图中点 B 为重力势能零点。



即：$\dfrac{1}{2} m v_B^2 + \dfrac{1}{2} k R^2 = mg(2R - R\sin 30°)$

又 $kR - mg = m\dfrac{v_B^2}{R}$　　所以　$k = \dfrac{2mg}{R}$

§6 动量与动量守恒定律

力的累积效应 $\begin{cases} \vec{F} \text{ 对 } \vec{r} \text{ 积累} \Rightarrow A \ , E \\ \vec{F}(t) \text{对 } t \text{ 积累} \Rightarrow \vec{p} \ , \ \vec{I} \end{cases}$

一、动量、冲量、质点的动量定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\,(m\vec{v})$$

定义：动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

定义：冲量为力对时间的积分（矢量） $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}$

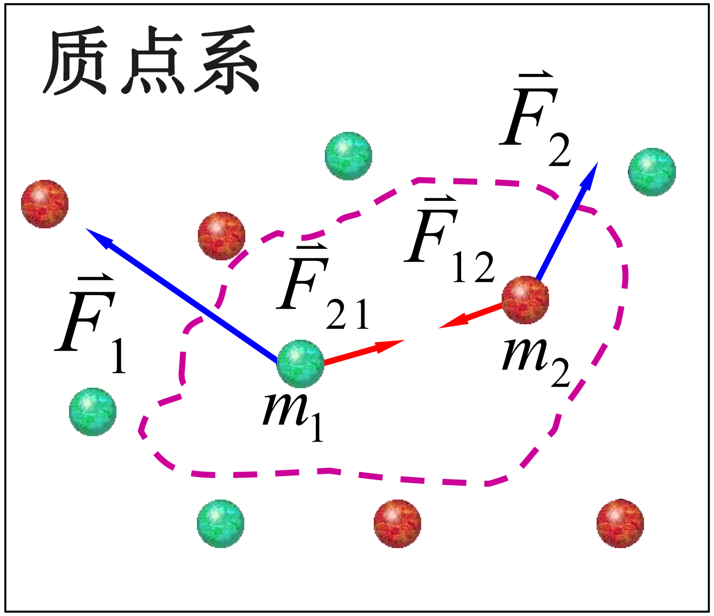
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

动量定理：在某一时间内，外力作用在质点上的冲量，等于质点在该时间内动量的增量。

直角坐标系内的分量形式——

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} \quad \begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

二、质点系的动量定理



对于二质点系统：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

推广到多质点系统，则有

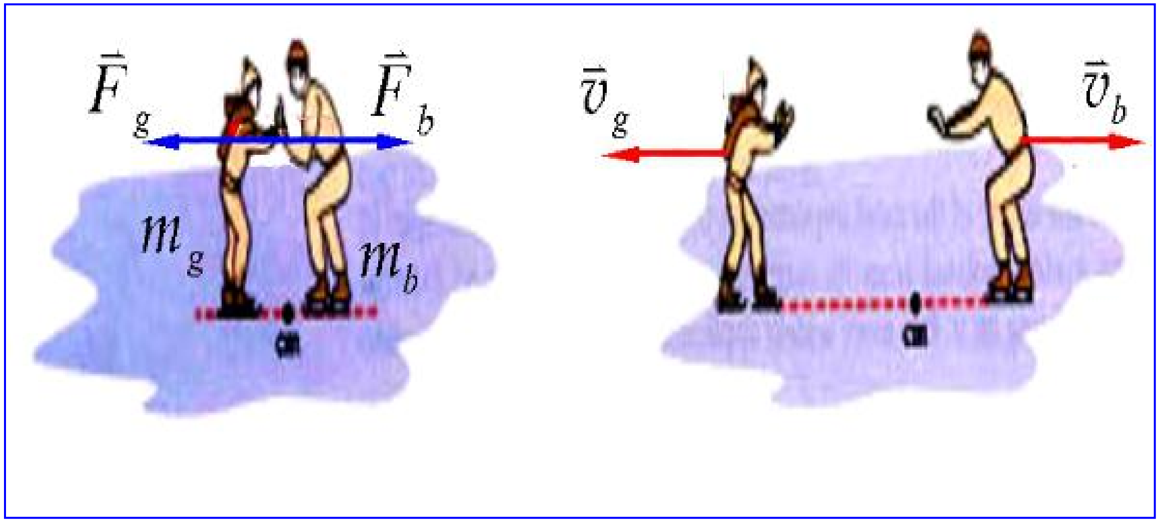
质点系动量定理：作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\sum \vec{F}_i\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}}$$

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0}$$

注意：内力不改变质点系的动量。

推开前后系统动量不变 $\vec{p} = \vec{p}_0$

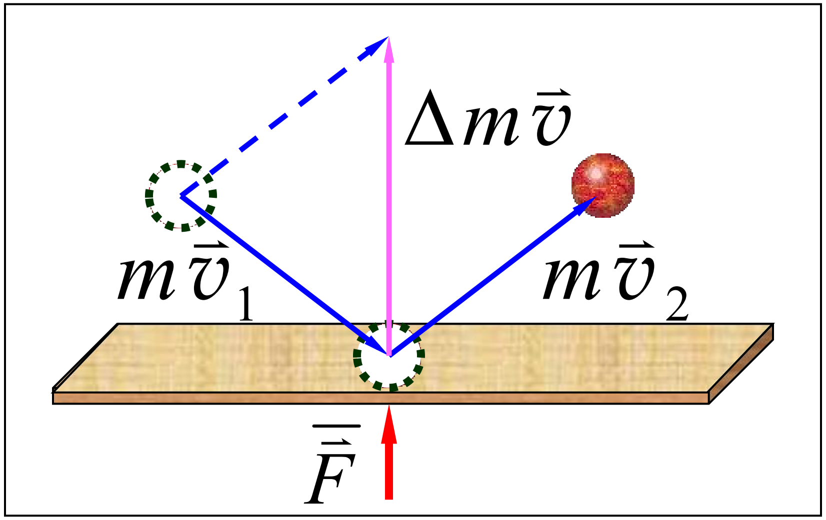


- 但内力可影响质点系内某些质点的动量。
- 内力可以改变质点系的动能。
- 质点系动量定理是牛III的必然推论。
- 用质点系动量定理处理问题可避开复杂的内力。

➢动量定理常应用于碰撞问题

——平均冲力的计算

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

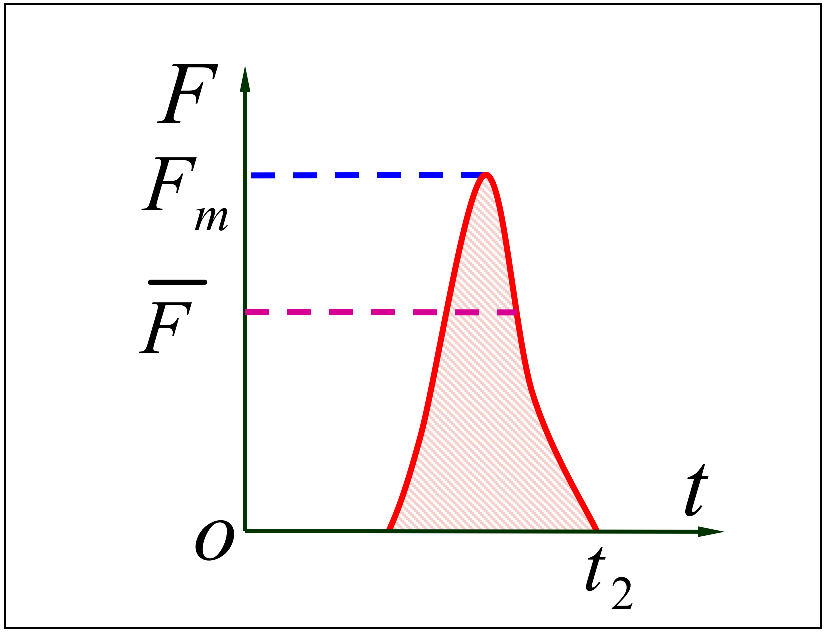


注意：

在 $\Delta\vec{p}$ 一定时，

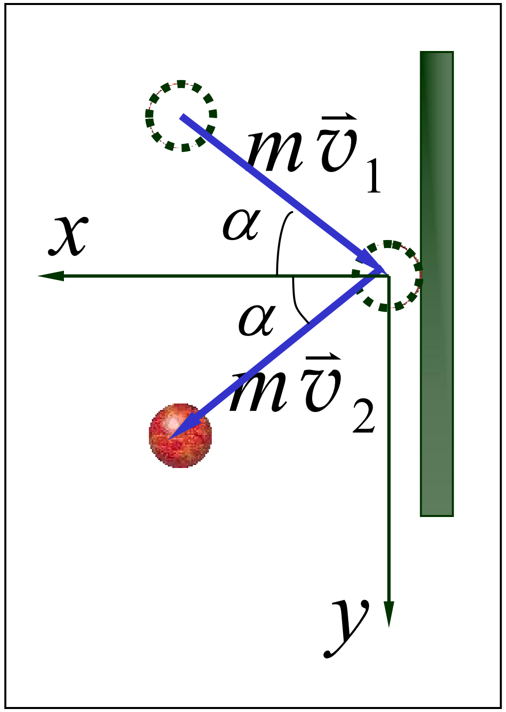
Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大。

例如：人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大。



例1 一质量为0.05kg、速率为10m·s^{-1}的刚球,以与钢板法线呈45º角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来。设碰撞时间为0.05s.求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$ 。

解：建立如图坐标系, 由动量定理得



$$\overline{F}_x \Delta t = m v_{2x} - m v_{1x}$$

$$= m v \cos\alpha - (-m v \cos\alpha)$$

$$= 2 m v \cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = m v_{2y} - m v_{1y}$$

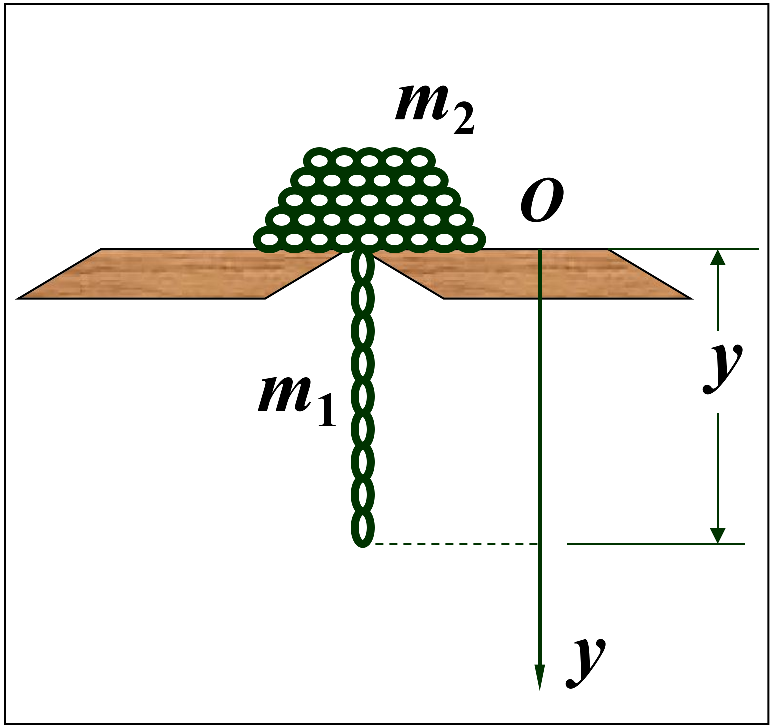
$$= m v \sin\alpha - m v \sin\alpha = 0$$

$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2 m v \cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\,\mathrm{N}$$

方向沿 x 轴反向。

**例2 一柔软链条长为l，单位长度的质量为λ。链条放在桌上，桌上有一小孔，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围.由于某种扰动，链条因自身重量开始落下。求链条下落速度与落下距离之间的关系。设链与各处的摩擦均略去不计，且认为链条软得可以自由伸开。

解 以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统，建立如图坐标



则

$$F^{\mathrm{ex}} = m_1 g = \lambda y g$$

由质点系动量定理得

$$F^{\mathrm{ex}} \mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

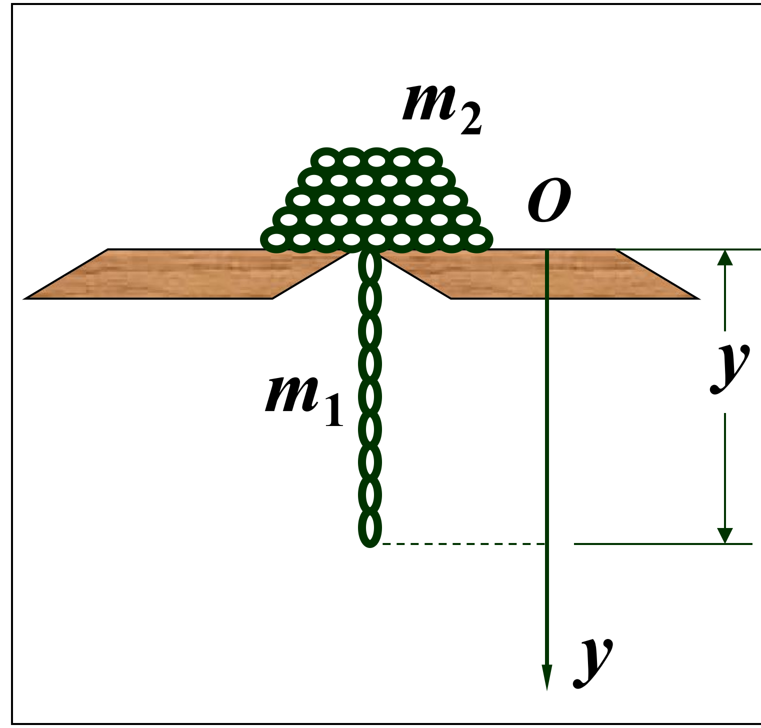
$$F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}p$$

又 $\mathrm{d}p = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$

$\therefore\quad \lambda yg\,\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}(yv)$

则 $yg = \dfrac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$

两边同乘以 $y\mathrm{d}y$ 则



$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2 \qquad v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$

三、动量守恒定律

质点系动量定理 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \sum_i \vec{p}_i - \sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律：

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$ ， 则系统的总动量守恒，即 $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$ 保持不变 。

说明：

（1）系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量必相对于同一惯性参考系 。

（2）力的瞬时作用规律。

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad 若\ \vec{F} = 0, \quad 则\ \vec{P} = \vec{C}。$$

（3）守恒条件：合外力为零，即 $\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外} = 0$

例如在碰撞, 打击, 爆炸等问题中， 当 $\vec{F}_{外} << \vec{F}_{内}$ 时，可略去外力的作用, 近似地认为系统动量守恒 。

（4）若某一方向合外力为零, 则此方向动量守恒 。

$$\begin{cases} F_x = 0, \quad p_x = \sum m_i v_{ix} = 恒量 \\ F_y = 0, \quad p_y = \sum m_i v_{iy} = 恒量 \\ F_z = 0, \quad p_z = \sum m_i v_{iz} = 恒量 \end{cases}$$

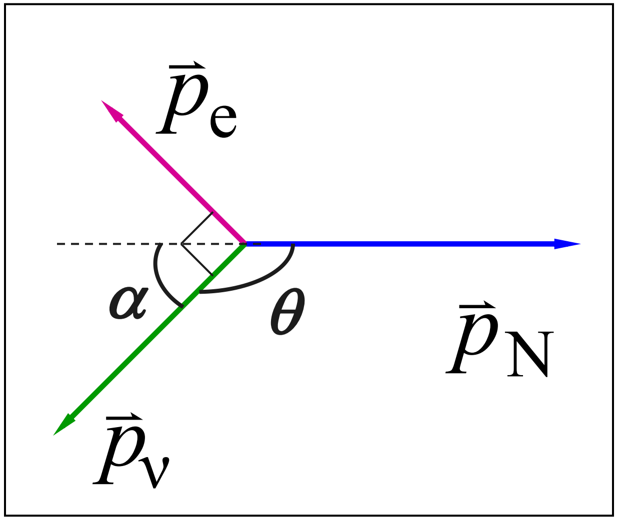
（5）动量守恒定律只在惯性参考系中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一 。

例1 设有一静止的原子核,衰变辐射出一个电子和一个中微子后成为一个新的原子核。已知电子和中微子的运动方向互相垂直，且电子动量为1.2×10^-22 kg·m·s^-1，中微子的动量为6.4×10^-23 kg·m·s^-1。问新的原子核的动量的值和方向如何?

解 $\because \sum \vec{F}_{i外} << \sum \vec{F}_{i内}$

$$\therefore \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = 恒量$$

即 $\vec{p}_{\mathrm{e}} + \vec{p}_{\nu} + \vec{p}_{\mathrm{N}} = 0$



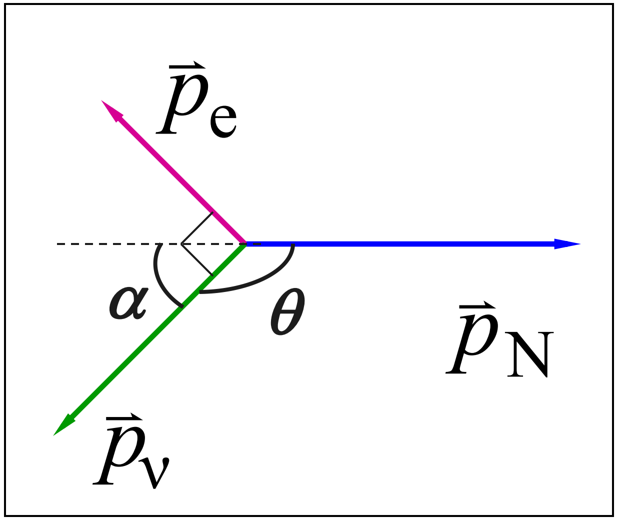
$$p_{\mathrm{e}} = 1.2\times10^{-22}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$p_{\nu} = 6.4\times10^{-23}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

系统动量守恒，即

$$\vec{p}_{\mathrm{e}} + \vec{p}_{\nu} + \vec{p}_{\mathrm{N}} = 0$$

$$\vec{p}_{\mathrm{N}} = -\left(\vec{p}_{\mathrm{e}} + \vec{p}_{\nu}\right)$$



又因为 $\vec{p}_{\mathrm{e}} \perp \vec{p}_{\nu}$

$$\therefore p_{\mathrm{N}} = (p_{\mathrm{e}}^2 + p_{\nu}^2)^{1/2}$$

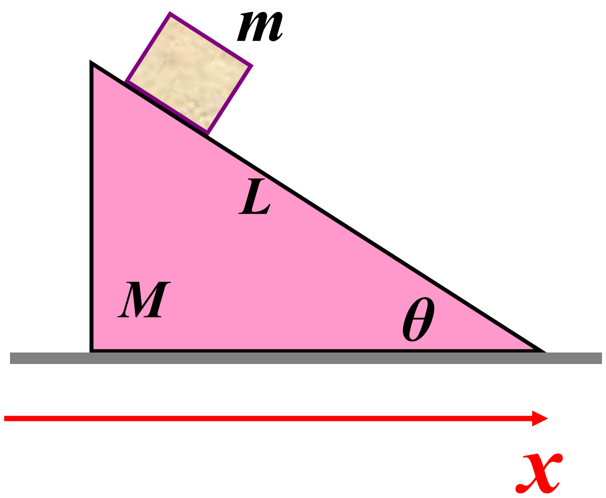
代入数据计算得

$$p_{\mathrm{N}} = 1.36 \times 10^{-22}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

$$\alpha = \arctan\frac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\nu}} = 61.9^{\circ}$$

例2 已知：***M,m,θ,L***,各接触面光滑初始静止。

求： ***m***自顶滑到底时， ***M***的位移。



解： 对于***M***和***m*** 构成的系统，建坐标如图

$$\because \sum_i F_{ix} = 0$$

$$\therefore MV_x + mv_x = p_{0x} = 0$$

由相对运动 $v_x = v'_x + V_x$

解得 $V_x = -\dfrac{mv'_x}{m+M}$ "−" 表明位移与*x*轴反向。

$$\therefore \Delta X = \int_0^t V_x \,\mathrm{d}t = -\frac{m}{m+M}\int_0^t v'_x \,\mathrm{d}t = -\frac{mL\cos\theta}{m+M}$$

§7 碰撞

碰撞： 两物体互相接触时间非常短暂，而且接触前后两物体的运动状态改变明显；接触过程中二者具有较大的相互作用。

$$\because \vec{F}_{外} << \vec{F}_{内} \quad \therefore \sum_i \vec{p}_i = 恒量$$

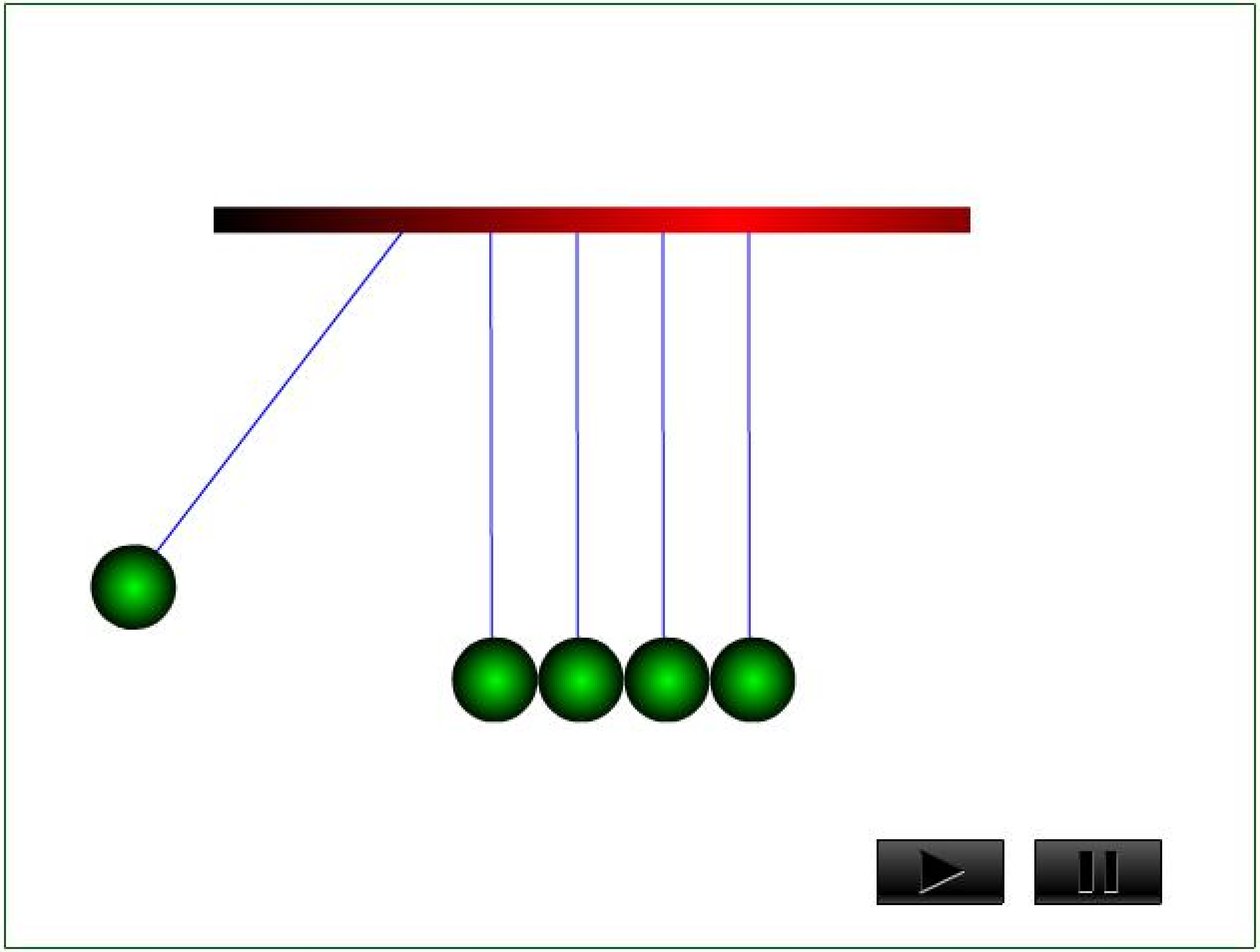
完全弹性碰撞： 两物体碰撞之后，它们的动能之和不变 。

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{k}2} = 恒量$$

非弹性碰撞 由于非保守力的作用 ，两物体碰撞后，使机械能转换为热能、声能，化学能等其他形式的能量。

完全非弹性碰撞： 两物体碰撞后，以同一速度运动 。

完全弹性碰撞

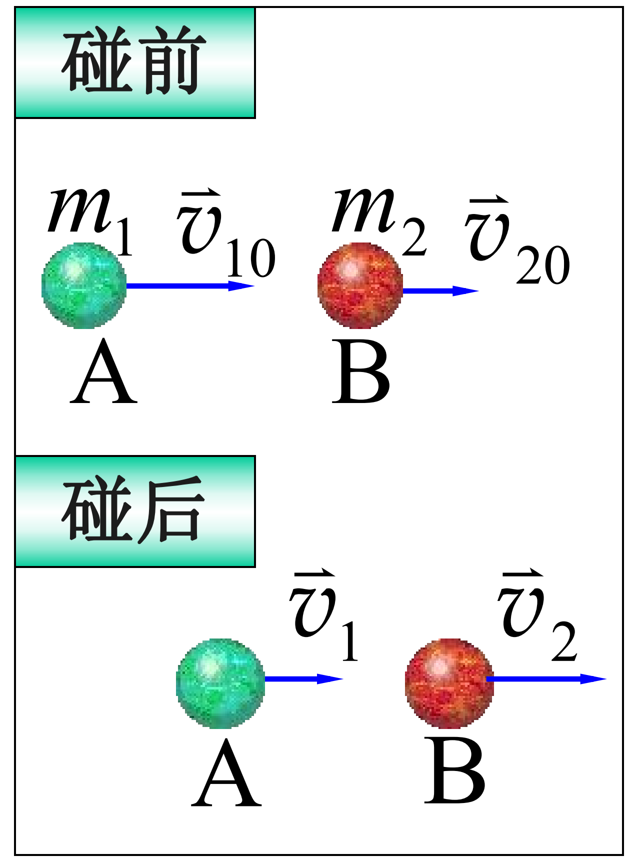


（五个小球质量全同）

例1 设有两个质量分别为 m_1和 m_2，速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$ 的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同。若碰撞是完全弹性的,求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$。

解 取速度方向为正向，由动量守恒定律得

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2 \quad (1)$$



由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (2)$$

由式（1）得：

$$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20}) \quad (3)$$

由式（2）得：

$$m_1(v_{10}^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_{20}^2) \quad （4）$$

联立式（3）和式（4），解得

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \quad （5）$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2} \quad （6）$$

讨论：

（1）若 $m_1 = m_2$

则 $v_1 = v_{20}$，$v_2 = v_{10}$

（2）若 $m_2 >> m_1$ 且 $v_{20} = 0$

则 $v_1 \approx -v_{10}$，$v_2 \approx 0$

（3）若 $m_2 << m_1$ 且 $v_{20} = 0$

则 $v_1 \approx v_{10}$，$v_2 \approx 2v_{10}$