二、转动定律

对于定轴转动的刚体而言，设 $\vec{F}_i$ 和 $\vec{f}_i$ 分别为作用于质元 Δm_i 上的外力和内力在转动平面内的分量。

Δm_i 为刚体内任意质元。

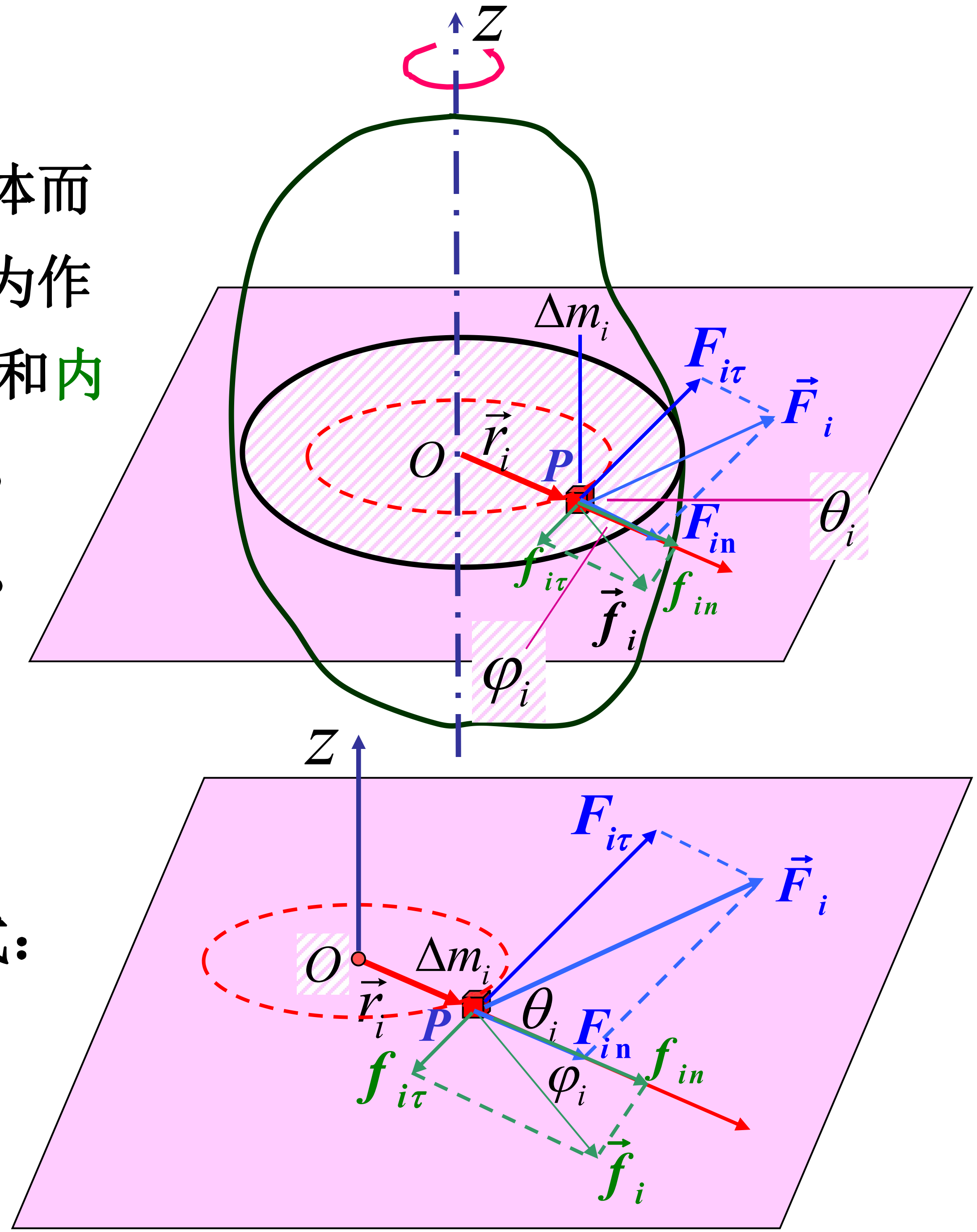
根据牛顿第二定律：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

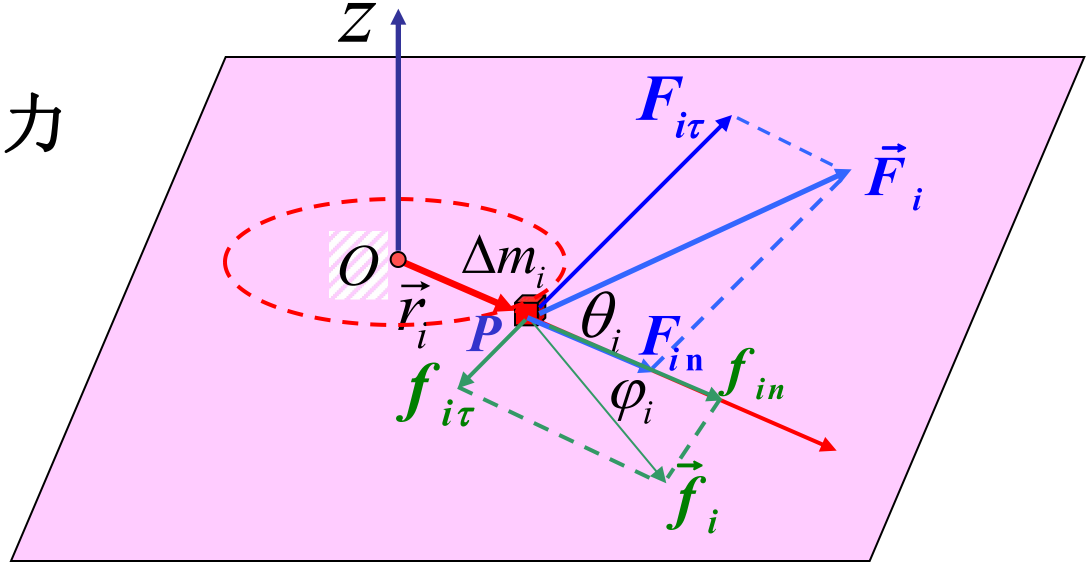
自然坐标系下的分量式：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$$

$$F_{in} + f_{in} = \Delta m_i a_{in}$$



法向分量 $\vec{F}_{in}$ 和 $\vec{f}_{in}$ 对转轴力矩为零。



切向分量式两端同乘 r_i ，

并考虑到：$a_{i\tau} = r_i\beta$

$$(F_{i\tau} + f_{i\tau})r_i = \Delta m_i r_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 直至取遍整个刚体。

则对整个刚体，有：$\sum_i F_{i\tau} r_i + \sum_i f_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$

作用于刚体内每一质元上的内力矩的矢量和为零，即

$$\sum_i f_{i\tau} r_i = 0$$

$$\sum_i F_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

$\sum_i F_{i\tau} r_i$ 为作用于刚体内每一质元上的外力矩的矢量和。

$$M = \sum_i F_{i\tau} r_i$$

定义：刚体的转动惯量 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

则有： $M = J\beta$ 即： $\boxed{\vec{M} = J\vec{\beta}}$

刚体定轴转动的转动定律：刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

——刚体定轴转动的基本动力学规律。

三、转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

- 物理意义：刚体转动惯性的量度。
- 对于质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+\cdots\cdots$$

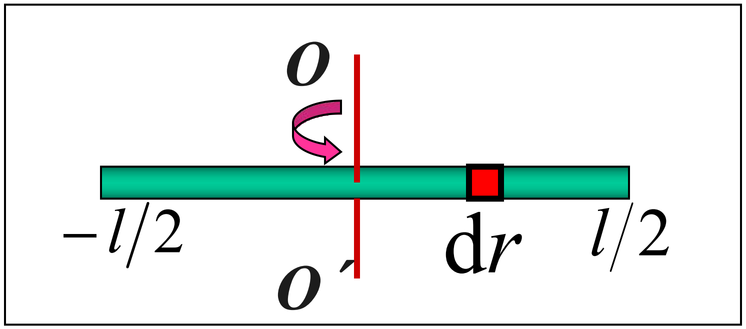
- 质量连续分布刚体的转动惯量

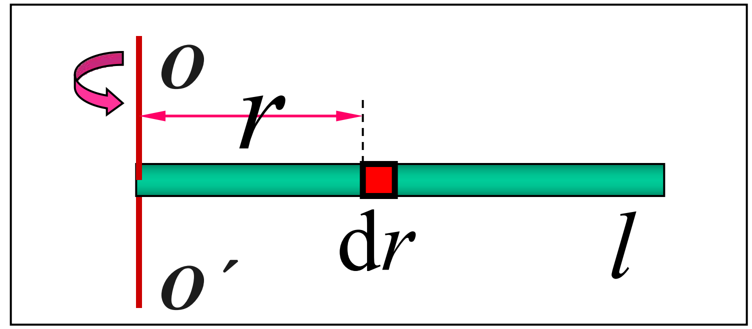
$$\boxed{J=\lim_{\Delta m_i\to 0}\sum_i \Delta m_i r_i^2=\int r^2 dm}$$

$\mathrm{d}m$ ：质量的微元

- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$ 　λ 为质量线密度
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$ 　σ 为质量面密度
- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$ 　ρ 为质量体密度

例1　一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量。





解　设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = \lambda r^2 \mathrm{d}r$$

$$J = 2\lambda \int_0^{l/2} r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{12}\lambda l^3$$

$$= \frac{1}{12} m l^2$$

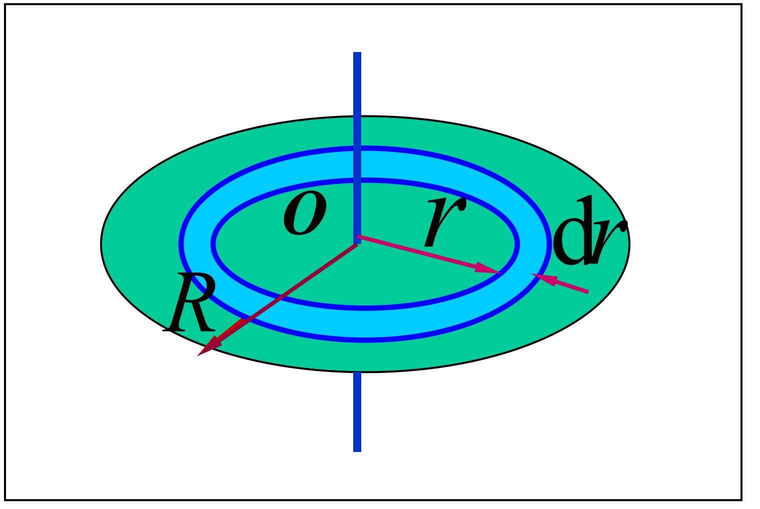
如转轴过端点垂直于棒

$$J = \lambda \int_0^{l} r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3} m l^2$$

例2 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 。

解：设圆盘面密度为 σ，在盘上取半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r$$

$$J = \int_0^R 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi\,R^4$$

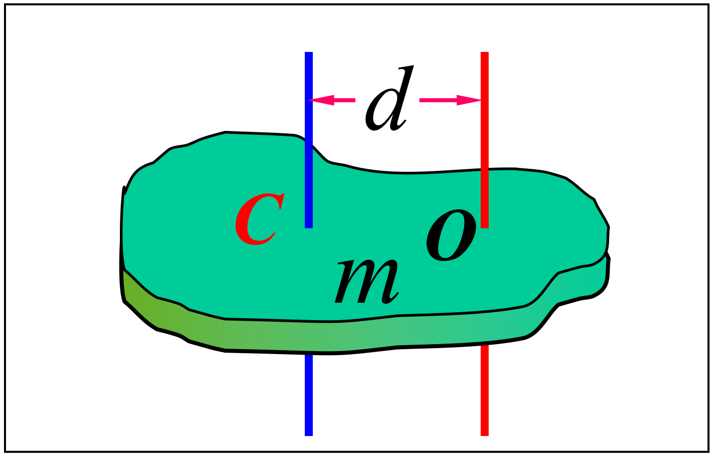
而 $\sigma = m/\pi\,R^2$ 所以 $J = \dfrac{1}{2}mR^2$

➢转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置 。

选讲

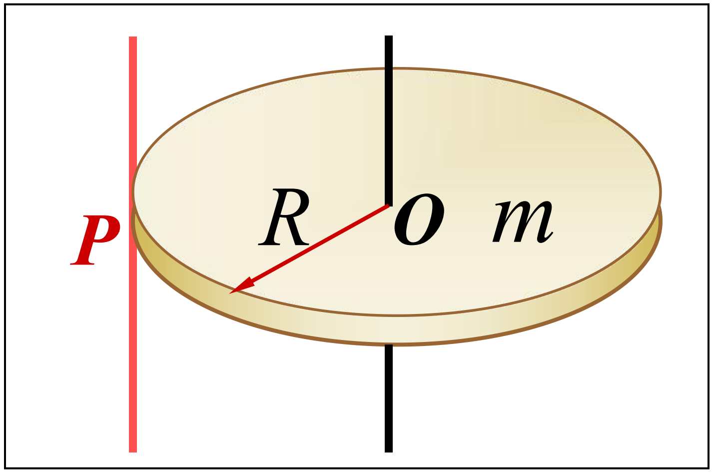
**四、平行轴定理

质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为d的转轴的转动惯量为



$$\boxed{J_O = J_C + md^2}$$

例如：圆盘对P轴的转动惯量



$$J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

➢ 转动定律应用

$$\boxed{M = J\beta}$$

说明:（1） $M = J\beta$, β 与M 方向相同.

（2） 为瞬时关系.

（3） 转动中 $M = J\beta$ 与平动中 $F = ma$ 地位相同.

解题思路:

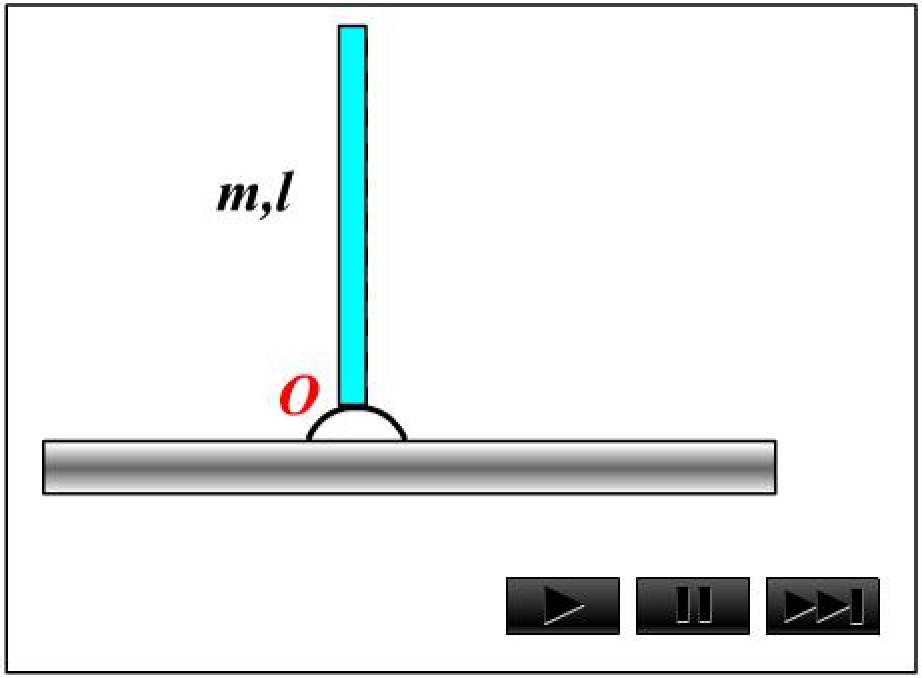
（1）选物体
（2）看运动
（3）查受力和力矩（注意:画隔离体受力图）
（4）列方程（注意:定义坐标系）

例3　一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动。由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动。试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度。

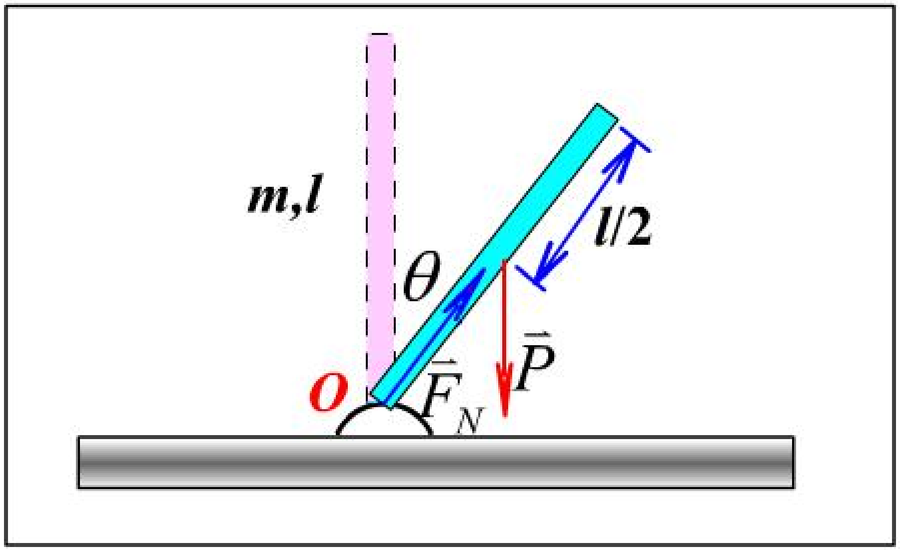
解：　细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\beta$$

式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$



得： $\beta=\frac{3g}{2l}\sin\theta$



由角加速度的定义：

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

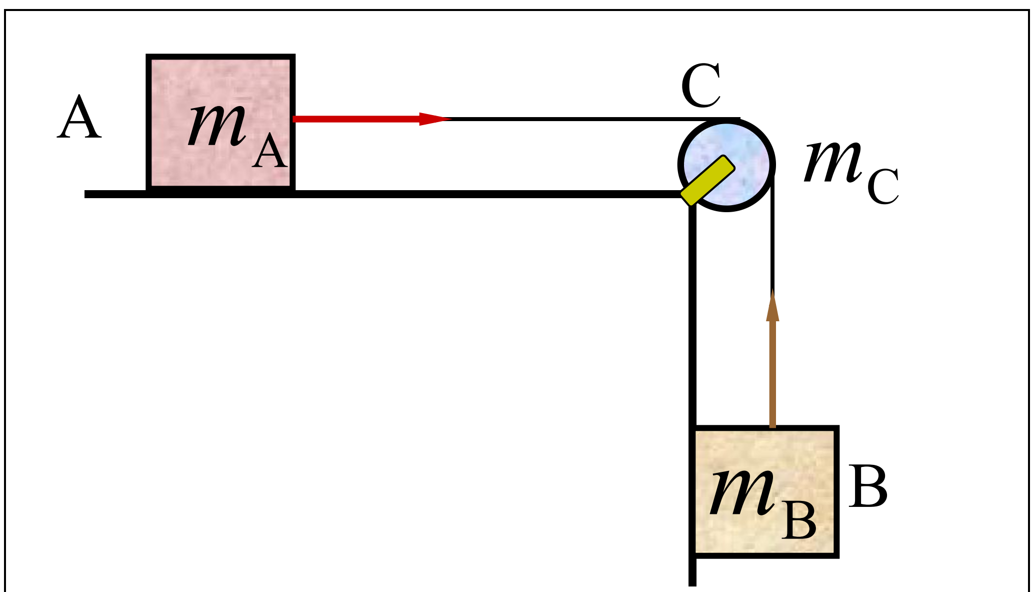
$$\omega\,\mathrm{d}\omega=\beta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3g}{2l}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分：

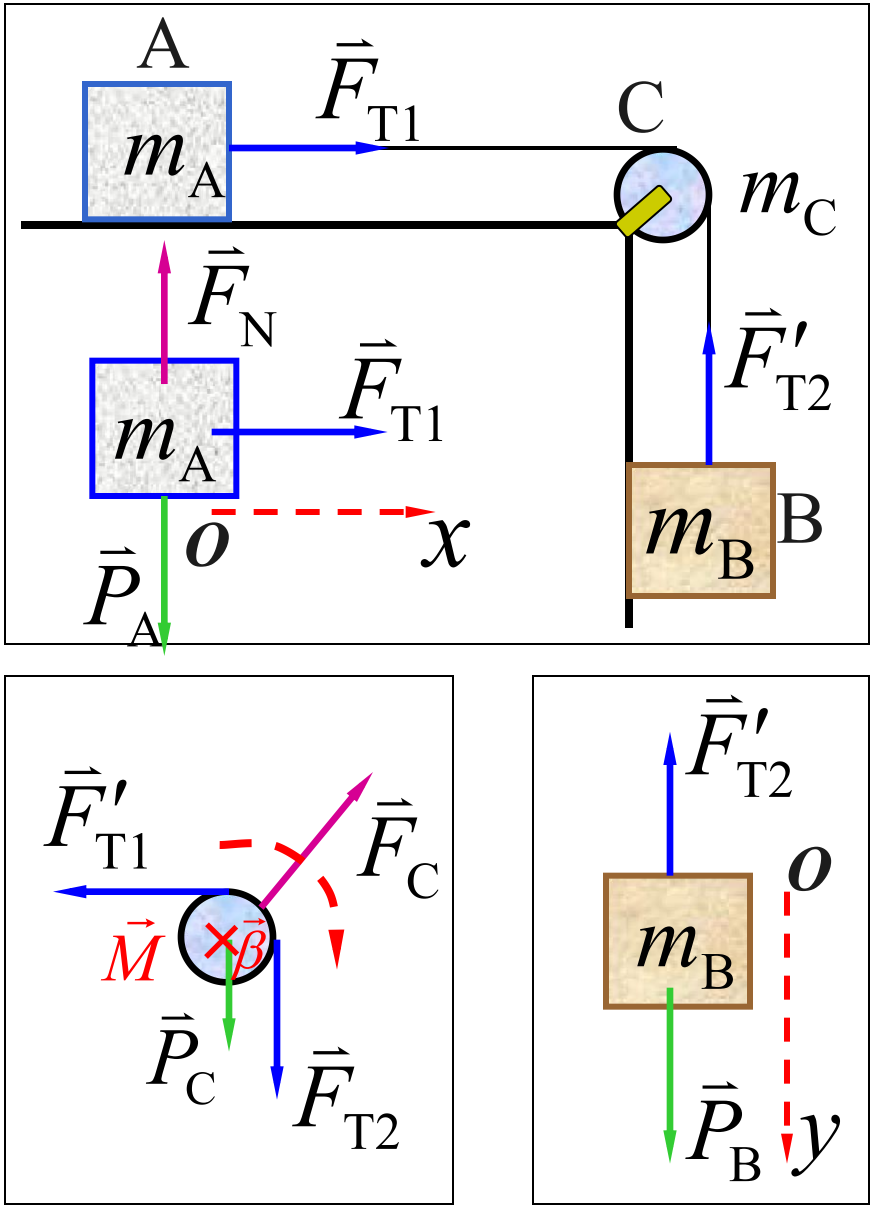
$$\int_0^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

得：$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

例4 质量为 m_A 的物体 A 静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为 R、质量为 m_C 的圆柱形滑轮 C，并系在另一质量为 m_B 的物体 B 上。滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。问：（**1**）两物体的线加速度为多少？ 水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（**2**）物体 B 从静止落下距离 y 时，其速率是多少？



（**3**）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为M_f 再求线加速度及绳的张力。



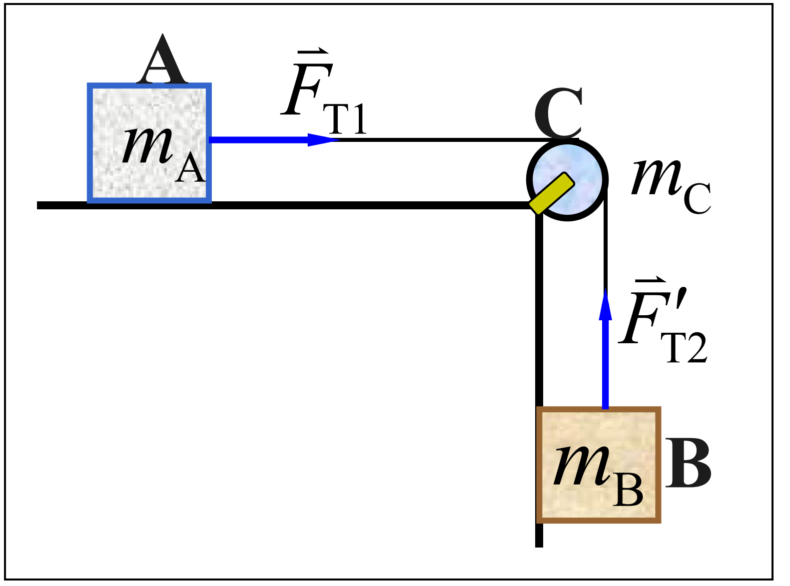
解 （1）隔离物体分别对物体 A、B 及滑轮作受力分析。

取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程 。

$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F'_{T2} = m_B a \\ RF_{T2} - RF'_{T1} = J\beta \\ F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2} \\ a = R\beta \end{cases}$$

由上述方程组解得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\[2ex] F_{T1} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\[2ex] F_{T2} = \dfrac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \end{cases}$$



如令 $m_C = 0$，可得 $F_{T1} = F_{T2} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$

（2）B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

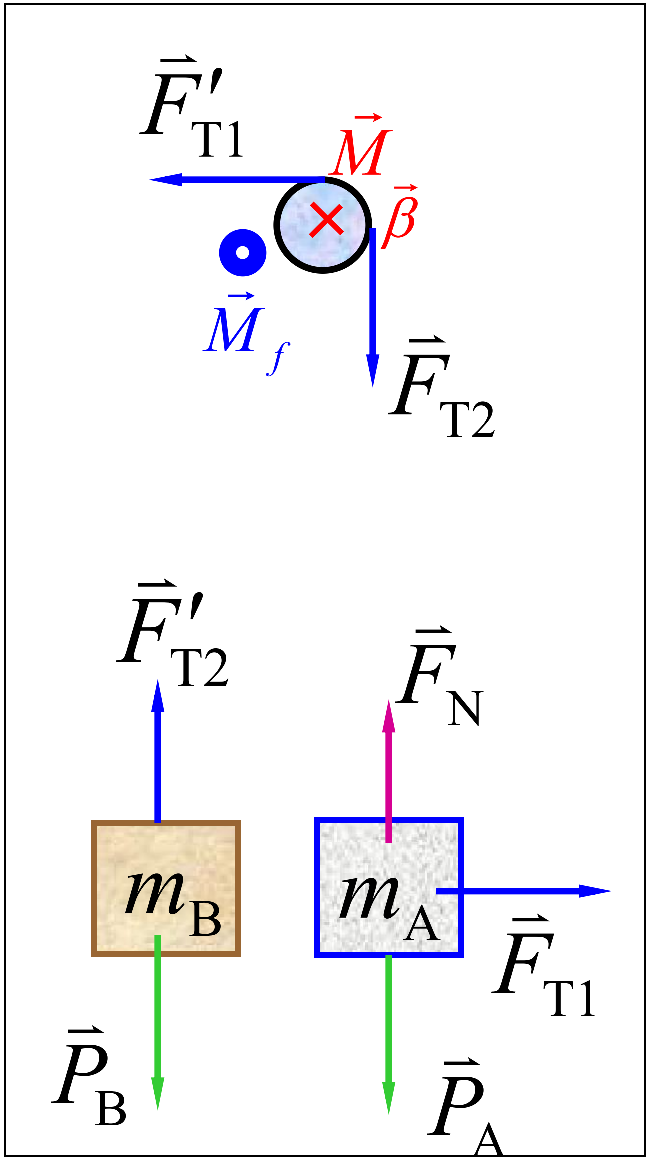
$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2 m_B g y}{m_A + m_B + m_C / 2}}$$

（3）考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，转动定律

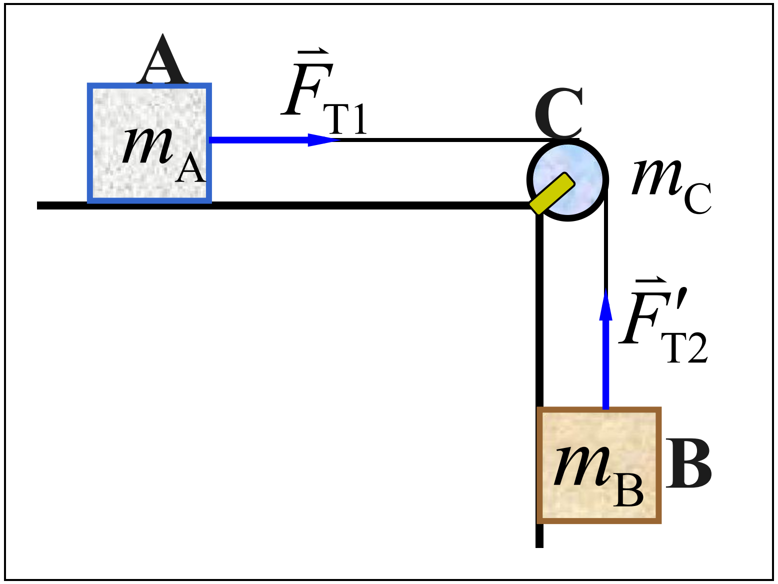
$$RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\beta$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}}a \\ m_{\mathrm{B}}g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}}a \\ RF_{\mathrm{T2}} - RF_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\beta \\ a = R\beta \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta \\ a = R\beta \end{cases}$$



由上述方程组解得：

$$a = \frac{m_B g - M_f / R}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

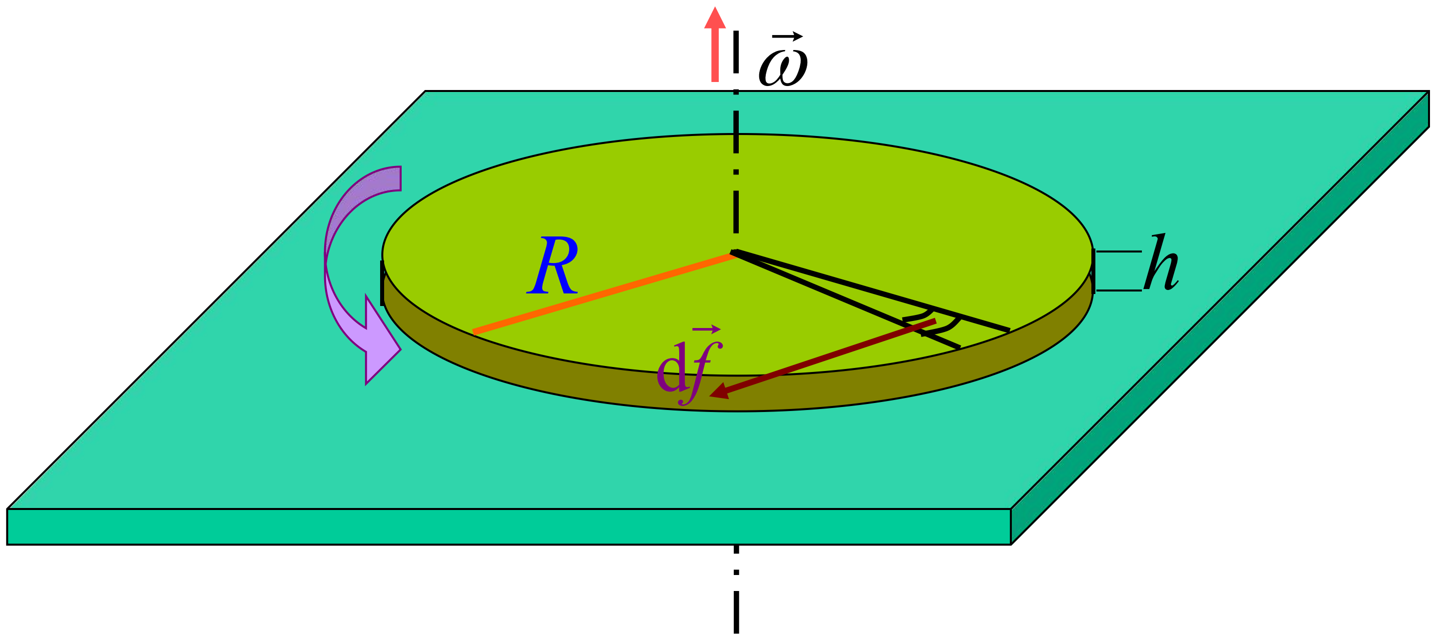
类似题目：教材61页例3-1

$$F_{T1} = \frac{m_A (m_B g - M_f / R)}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_B \left[(m_A + m_C / 2) g + M_f / R \right]}{m_A + m_B + m_C / 2}$$

选讲

**例5　一长质量为 m 半径为 R 厚 h 的匀质圆盘水平放置在一个固定的桌面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ，匀质圆盘可绕过其圆心的轴转动。设初始 $t_0=0$ 时刻圆盘角速度为 ω_0，求：（1）圆盘由于受到摩擦阻力作用所产生的角加速度，（2）从初始时刻算起，当圆盘停住转动时转过了多少圈？



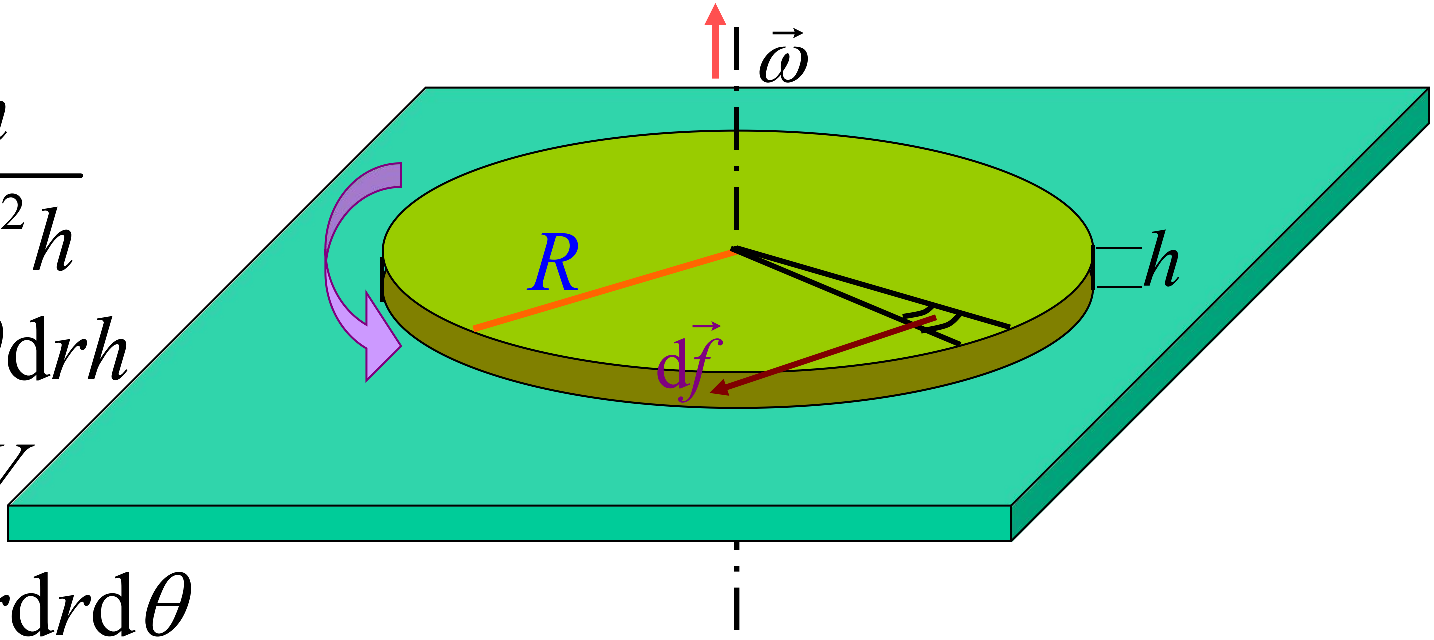
解：（1）

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\theta \mathrm{d}rh$$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \rho hr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

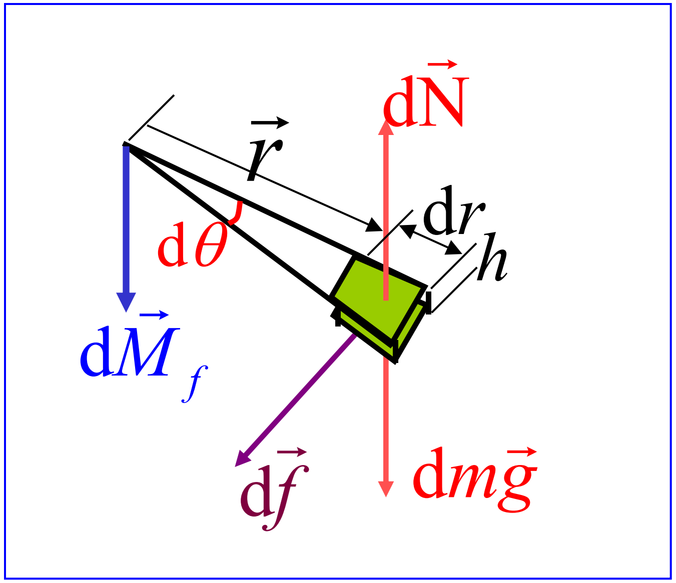


$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}mg = \rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N = \mu\rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

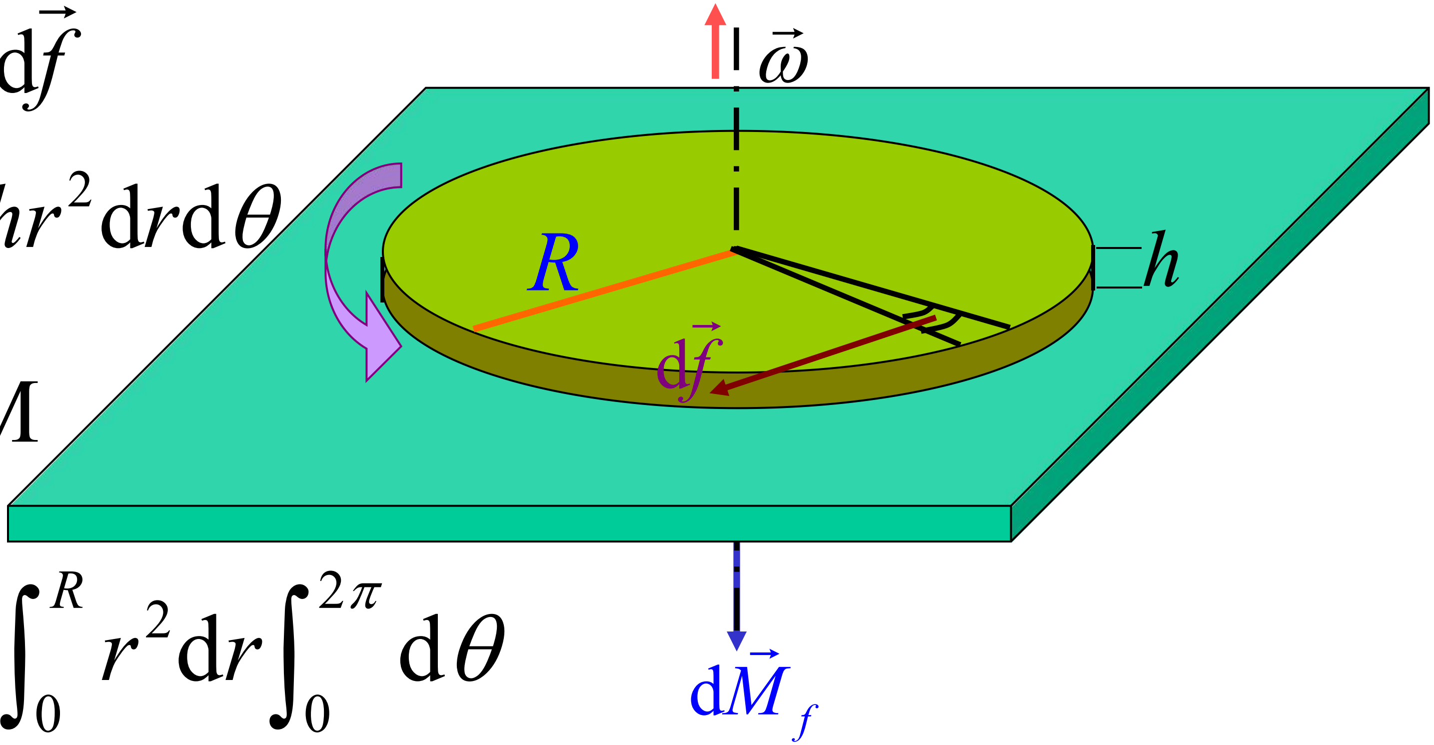
$$\mathrm{dM} = r\mathrm{d}f = \mu\rho ghr^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

$$\mathrm{dM} = \mu\rho g h r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{M} = \int_{(\mathrm{m})} \mathrm{dM}$$



$$= \mu\rho g h \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\mu m g R$$

（2） $M = J\beta$ $\quad \frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2} m R^2 \beta \quad \beta = \frac{4\mu g}{3R}$

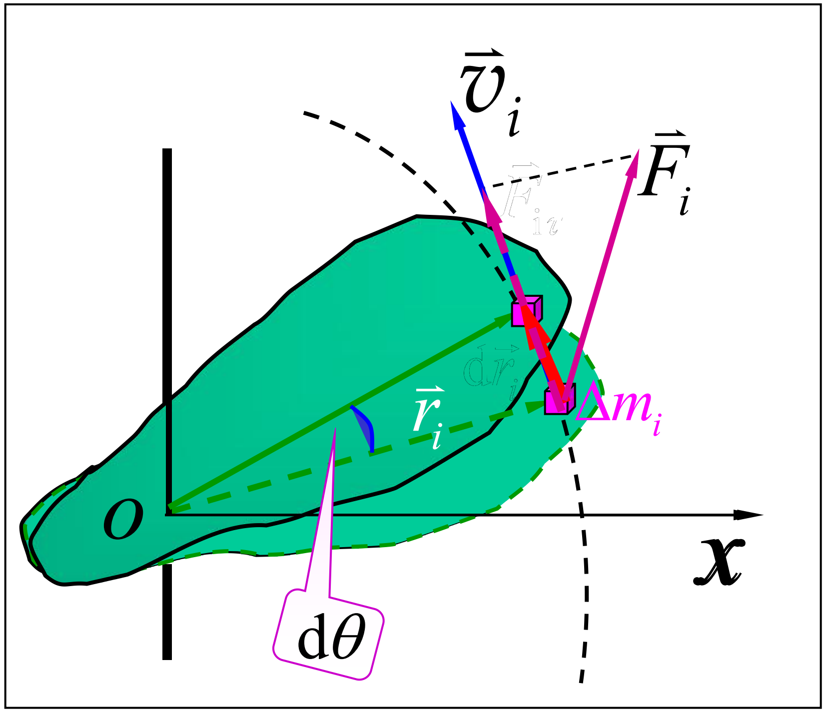
$$0 = \omega_0^2 - 2\beta\Delta\theta \qquad n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

§ 4 刚体定轴转动的动能定理

力的空间累积效应 ⟹ 力的功、动能、动能定理。

力矩的空间累积效应 ⟹ 力矩的功、转动动能、动能定理。

一、力矩做功



当刚体在外力作用下作定轴转动时，考虑质元Δm_i

$$\mathrm{d}A_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = F_{i\tau}\mathrm{d}s_i$$

$$= F_{i\tau} r_i \mathrm{d}\theta \quad = M_i \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \sum_i \mathrm{d}A_i = \sum_i M_i \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \sum_i M_i \mathrm{d}\theta = M \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

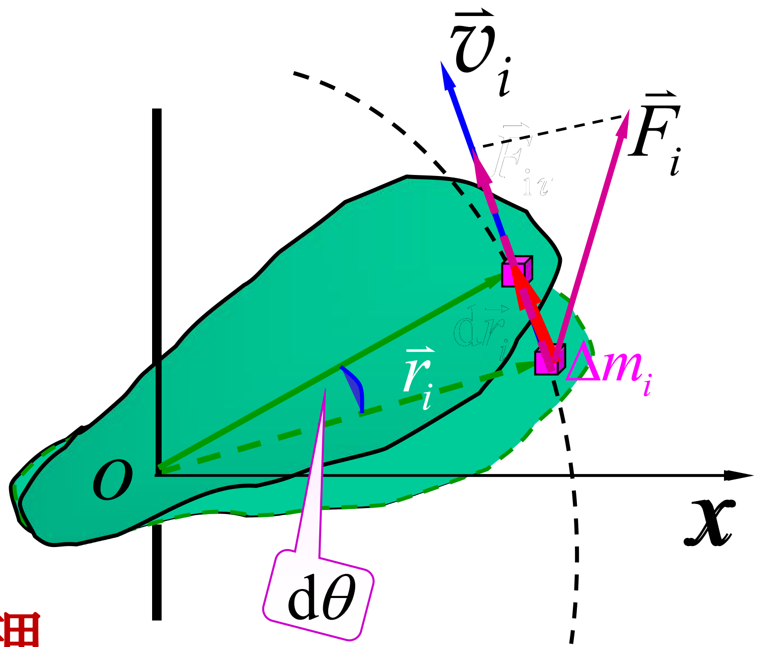
⟹ 力矩的功 $\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta}$

二、转动动能

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_i \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$



三、刚体绕定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\beta\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

——合外力矩对绕定轴转动的刚体所做的功数值上等于刚体转动动能的增量。

§5 角动量　角动量守恒定律

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理。

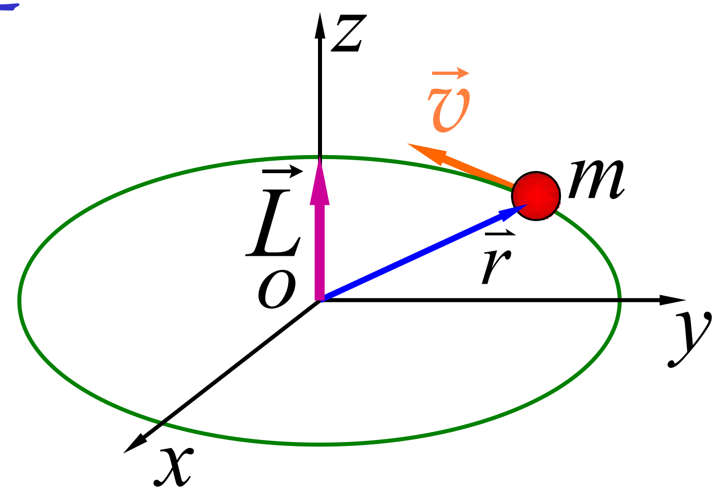
一、质点的角动量定理和角动量守恒定律

1. 质点的角动量

质点作圆周运动时，运动状态的描述

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

——其方向不断随时间而变化。



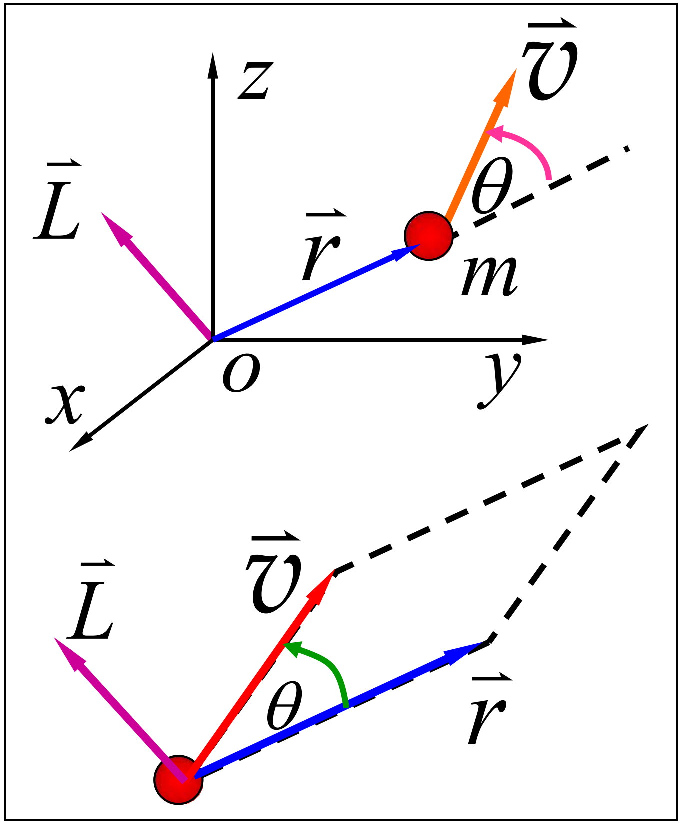
若定义一个物理量——

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

——称为质点的角动量，其方向不随时间而变化。

一般而言

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 O 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

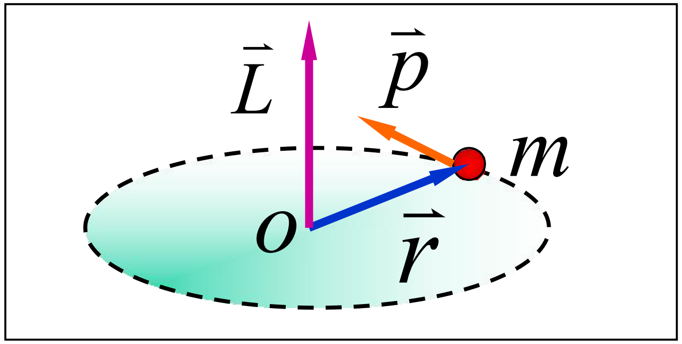


$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则。

➢ 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量



$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = J\vec{\omega}$$

2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

——作用于质点的合力对参考点 O 的力矩，等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率。