Physics Notes - Mechanics Section

硝基苯

Chapter 01 Motion

运动方程

位矢

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

运动方程

$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

轨迹方程

运动方程消去参量 t

位移 $\quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

路程 $\quad \overset{\frown}{\Delta s}$

$\overset{\frown}{\Delta s} \neq |\Delta\vec{r}| \neq \Delta|\vec{r}|$
$ds = |d\vec{r}| \neq dr$

速度

平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \bar{v}_x \, \vec{i} + \bar{v}_y \, \vec{j}$$

其中 $\bar{v}_x = \Delta x / \Delta t \quad \bar{v}_y = \Delta y / \Delta t$

（瞬时）速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \, \vec{i} + v_y \, \vec{j}$$

其中 $v_x = dx/dt \quad v_y = dy/dt$
v_x，v_y 是 $\vec{v}$ 在 O_x 轴和 O_y 轴上的分量
$\vec{v}_x$，$\vec{v}_y$ 是 $\vec{v}$ 在 O_x 轴和 O_y 轴上的分矢量，即分速度
有 $\vec{v}_x = v_x \vec{i}$，$\vec{v}_y = v_y \vec{j}$

速度的方向沿该点曲线的切线方向

速率

$v = |\vec{v}| = |d\vec{r}|/dt = ds/dt$

加速度

平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

（瞬时）加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

圆周运动

角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$v = \omega r$

加速度

- 切向单位矢量　$\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- 法向单位矢量　$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}$
  推导：　$|\Delta\vec{e}_t| = \Delta\theta$　微分时，方向趋于指向圆心
- 角加速度　$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
- 加速度　$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$
- 切向加速度　$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{e}_t = \alpha r\vec{e}_t$
- 法向加速度　$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{e}_n = \omega^2 r\vec{e}_n$

自然坐标系

以动点为原点，以切向单位矢量和法向单位矢量建立二维坐标系

匀变速率圆周运动

角加速度为常量，切向加速度的值为常量，法向加速度的值不为常量
可由 匀变速直线运动 相关公式变形得关于 角速度 的公式

相对运动

伽利略速度变换式

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{u}$
绝对速度 v_a：质点相对于基本参考系的速度
相对速度 v_r：质点相对于运动参考系的速度
牵连速度 u：运动系相对于基本系的速度

Chapter 02 Newton's Law

Newton's first law (the law of inertia)

$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v}$ 为常矢量

Newton's second law

牛顿力学的质点动力学方程

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

当 $v \ll c$ 时，m 为常量

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

条件

- 只适用于质点运动，物体平动可看作质点运动
- 瞬时对应，力是物体产生加速度的原因
- 力的叠加原理

自然坐标系

$\begin{cases} \vec{F}_t = m\vec{a}_t = m\frac{dv}{dt}\vec{e}_t \\ \vec{F}_n = m\vec{a}_n = m\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \end{cases}$

Newton's third law

$\vec{F} = -\vec{F}'$

两个物体；同种性质；同生同灭

力学相对性原理

P31

量纲

L：长度

M：质量

T：时间

Q：其他力学量

$\dim Q = L^p M^q T^s$

常见的力

万有引力

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$$

重力

重力 = 万有引力 - 向心力
$\vec{P} = m\vec{g}, \quad g = 9.8\,m/s^2$

弹性力

摩擦力

惯性力

$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$
牛顿第二定律 $\quad \vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}$
a_0：非惯性系相对惯性系的加速度
a：物体相对非惯性系的加速度

Chapter 03 Momentum & Energy

动量定理

动量的相对性

动量依赖于惯性系的选取
动量增量相等
动量定理只适用于惯性系

质点

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}$$

质点系

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\text{ex}}dt = \Delta\vec{p}$$

或 $\quad \vec{F}^{\text{ex}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量

动量守恒定律

$\vec{F^{\text{ex}}} = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{p}$ 不变

1. 各物体动量相对于同一参考系
2. 分量式。形如 $\vec{F_x^{\text{ex}}} = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{p}_x$ 不变

3-4. P62

系统内质量移动问题

当质量在两个物体间转移时，考虑代换

$$\frac{dm_1}{dt} = -\frac{dm_2}{dt}$$

功

元功

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F|d\vec{r}|\cos\theta$

合力对质点做的功，等于各分力做功的代数和

分量式

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

功率

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

势能

与质点位置相关的能量

引力势能 $\quad E_p = -G\dfrac{m'm}{r}$

重力势能 $\quad E_p = mgy$

弹性势能 $\quad E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$

- 势能具有相对性
  无穷远处为引力势能零点

地面为重力势能零点
弹簧平衡位置为弹性势能零点

- 势能属于系统

保守力

- $W_c = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
  保守力做功只与质点的初、末位置有关，与路径无关。

- $W_c = -\Delta E_p$
  保守力对质点做的功等于质点势能增量的负值
  即 $F_c = -\frac{dE_p}{dx}$

动能定理

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
$W = W^{\text{ex}} + W^{\text{in}} = \Delta E_k$
合力，包括一切外力和内力，对质点（系）做的功，等于质点（系）动能的增量

- 功和动能依赖惯性系的选取

功能原理

机械能：动能和势能的统称

$W^{\text{ex}} + W^{\text{in}}_{\text{nc}} = \Delta E$
质点系机械能的增量，等于外力与非保守内力做功之和

- 功是过程量
- 能量是系统状态的函数

机械能守恒定律

条件：外力与非保守内力均不做功
$W^{\text{in}}_c = -\Delta E_p = \Delta E_k$

质心

质心位置 $\vec{r}_c = \dfrac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{\Sigma m_i} = \dfrac{\int \vec{r}\, dm}{\Sigma m_i}$
等效质点质量 $m_c = \Sigma m_i$

质心运动定律

$m_c \vec{v}_c = \Sigma \vec{p}$
系统内各质点的动量的矢量和等于系统总质量乘以系统质心的速度

$\vec{F}^{\text{ex}} = m_c \dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = m_c \vec{a}_c$
系统的合外力等于系统总质量乘以系统质心加速度
合外力为零时，等效质点的运动状态不变；质点系的运动状态不一定保持不变。

Chapter 04 Rotation

刚体的定轴转动

$\omega = d\theta / dt$ 方向由右手法则确定
$\alpha = d\omega / dt$
$a_t = \alpha r$
$a_n = \omega^2 r$

力矩

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
$M = rF \sin\theta = Fd$
力臂 d：参考点到力的作用线的垂直距离
$\vec{r}$：参考点到力的作用点的位矢

力矩需**指明参考点。**

一对相互作用力对转轴的合力矩为零。
刚体的合内力矩为零。

转动惯量

$J = \sum \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2\, dm$
与刚体的形状，质量分布，**转轴的位置**有关

平行轴定理

$J = J_c + md^2$
d：两平行轴之间的距离

刚体相对通过质心的轴线的转动惯量 J_c 最小。

常见连续均匀刚体的转动惯量

- 细棒（转动轴通过质心与棒垂直）
  $J = \frac{1}{12}ml^2$
  - 细棒（转动轴通过棒的一端与棒垂直）
    $J = \frac{1}{3}ml^2$ 平行轴定理
- 圆筒（转动轴沿几何轴）
  $J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$
  R_1：内径，R_2：外径
  - 圆柱（R_1 = 0）
    $J = \frac{1}{2}mR^2$
  - 薄圆环（R_1 = R_2）
    $J = mR^2$
- 球体（转动轴沿任一直径）
  $J = \frac{2}{5}mR^2$
  - 薄球壳
    $J = \frac{2}{3}mR^2$

转动定律

$\vec{M} = J\vec{\alpha}$
瞬时对应

力矩的时间积累

角动量

- 质点
  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
  $L = rmv\sin\theta$
  须**指明参考点**

- 若质点做圆周运动，以圆心为参考点
  $L = rmv = mr^2\omega$

- 刚体
  $\vec{L} = J\vec{\omega}$
  须**指明参考转轴**

角动量定理

$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{M}$：对参考点的合力矩 / 对参考转轴的合外力矩

角动量守恒定律

条件：对参考点的合力矩为零 / 对参考转轴的合外力矩为零

- 有心力
  力总指向某一定点（力心）
  有心力对力心的力矩为零
  有心力作用下，质点对力心角动量守恒

力矩的空间积累

力矩做功

$dW = Md\theta$
$P = M\omega$

转动动能

$E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2$

转动动能定理

合外力矩对定轴转动的刚体所做的功等于刚体转动动能的增量

刚体的平面平行运动

- 质心的运动
- 绕通过质心的轴的转动

惯性力通过质心，力矩为零。

动能等于 质心的平动动能 与 刚体绕质心的转动动能 之和
$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$
势能视为质心的势能
$E_p = mgh_c$

纯滚动（无滑动滚动）

$v_t = v_c + \omega r = 2v_c$

球—棒模型

一长度为 l，质量为 M 的棒，转轴位于顶端，初始时竖直静止悬挂。一质量为 m，初速度 v_0 得小球在转轴下方距离为 a 处击中棒，讨论转轴的受力方向。

以棒、球为系统，合外力矩为零，角动量守恒

以棒、球、地球为系统，机械能守恒

以水平向右为正方向，水平方向上有动量定理

得

$$F\Delta t = \frac{3a-2l}{6a}Ml\omega$$

故
$a > 2/3 \times l$ 时， $F > 0$，即 F 向右
$a = 2/3 \times l$ 时， $F = 0$，即转轴不受力
$a < 2/3 \times l$ 时， $F < 0$，即 F 向左

理想的碰撞

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2 \\ \\ rmv_1 + J\omega_1 = rmv_2 + J\omega_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{(mr^2-J)v_1 + 2J\omega_1 r}{mr^2+J}$$

$$\omega_2 = \frac{(J-mr^2)\omega_1 r + 2mr^2 v_1}{mr^2+J}\frac{1}{r}$$

Chapter 14 Special Theory of Relativity

- $1\ u = 1.66 \times 10^{-27} kg$
- $1\ MeV = 1.602 \times 10^{-13} J$

经典力学

空间是永恒不变，绝对静止的
空间的度量是绝对的，与参考系无关

时间是永恒地，均匀地流逝的
时间的度量是绝对的，与参考系无关

不同惯性系中
质点速度不同
加速度相同
经典力学的规律有相同的形式

迈克耳孙—莫雷实验

$\Delta = c\Delta t \approx l\dfrac{v^2}{c^2}$
$\Delta N = \dfrac{2\Delta}{\lambda}$
ΔN：干涉条纹移动的条数
Δ：光程差
λ：光的波长
l：半透半反镜到平面镜的距离
v：地球相对于以太的速度

狭义相对论的基本原理

1. 爱因斯坦相对性原理
   物理定律在所有的惯性系中具有相同的表达形式
   所有惯性系对运动的描述都是等效的

2. 光速不变原理
   真空中的光速是常量，与光源或观测者的运动无关
   光速不依赖于惯性系的选择

洛伦兹变换

设两惯性系 S, S'
S' 沿 xx' 轴以速度 $\vec{v}$ 相对于 S 运动
两系原点重合时为计时起点

设有一个事件发生在点 P
从 S 系观测
其坐标是 x, y, z
时刻是 t
P 点速度为 $\vec{u}(u_x,\, u_y,\, u_z)$

洛伦兹因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

v: S' 相对于 S 的速度

$v \ll c$, $\beta \to 0^+$, $\gamma \to 1^+$
$v \to c^-$, $\beta \to 1^-$, $\gamma \to +\infty$

洛伦兹变换式

$x' = \gamma(x - vt)$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$

洛伦兹速度变换式

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

逆变换

$'$ 异或
v 变号

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

其余同理

狭义相对论的 同时的相对性

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$$

v：S' 相对于 S 的速度

S' 系中**不同地点**同时发生的两个事件在 S 系中不是同时的
S' 系中**同一地点**同时发生的两个事件在 S 系中也是同时的
有因果关系的两个事件，时序关系不会颠倒

洛伦兹收缩

物体沿运动方向的长度收缩

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

l_0：固有长度。物体相对于观测者静止时测得的长度

时间延缓

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δt_0：固有时。相对惯性系静止的观测者测得**该系同一地点**发生的两个事件的时间间隔

相对论性动量和能量

质量

$$m = \gamma m_0$$

m：相对论性质量
m_0：静质量

动量

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

力

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{F}$ 和 $\vec{v}$ 同向时有 $F = \gamma^3 m_0 a$

能量

质点的总能量　$E = mc^2$　（质能关系式）
质点的静能量　$E_0 = m_0 c^2$
$\Delta E = (\Delta m) c^2$

动能　$E_k = E - E_0 = (\gamma - 1) m_0 c^2$

关系

$E^2 = E_0^2 + (pc)^2$

对光子（静质量为零）有其动量计算式

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$