2021 年秋统计学习题 05

1. 设总体的概率密度函数如下

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta x), \quad -1 < x < 1, -1 < \theta < 1,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本，求 θ 的矩估计，并证明它是弱相容的.

2. 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\theta, \theta)$，其中 $\theta > 0$ 为参数.
   (a). 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$.
   (b). 求 $\hat{\theta}$ 的近似方差.
3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自几何分布的样本，用因子分解定理证明 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是充分统计量.
4. 设 X 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本. $|X|$ 是否为充分统计量?
5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体概率密度函数如下

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad \mu < x < \infty, 0 < \sigma < \infty$$

的样本. 求 (μ, σ) 的二维充分统计量.

6. 设 X, Y 为期望有限的随机变量，证明

$$\min_{g(x)} \mathbb{E}(Y - g(X))^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2,$$

其中 $g(x)$ 取遍所有的可测函数. $E(Y|X)$ 有时被称为 Y 在 X 上的回归，为给定条件 X 下，Y 的最好的预测.

7. 证明二项分布属于指数分布族.