(1). 设 $A \subset X$，则 A 的示性函数定义为

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

定义集合 $A, B \subset X$ 的对称差为

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(I). 请证明

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2 = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \mod 2.$$

(II). 设 $A, B, C \subset X$, 请证明

(i) $A\Delta\varnothing = A$，$A\Delta A = \varnothing$，$A\Delta A^{\complement} = X$，$A\Delta X = A^{\complement}$.

(ii) $A\Delta B = B\Delta A$.

(iii) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

(iv) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

(2). 设 $A_n, n = 1, 2, 3, \cdots,$ 是如下定义的集合：

$$A_{2n+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2n+1}\right], \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

$$A_{2n} = \left[0, 1 + \frac{1}{2n}\right], \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

求 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 的上限集与下限集.

(3). 设 f 是定义在 X 上的实值函数，证明对任意 $c \in \mathbb{R}$ 有

$$\{f > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq c + \frac{1}{n}\},$$

其中

$$\{f > c\} := \{x \in X : f(x) > c\},$$

$$\{f \geq c + \frac{1}{n}\} := \{x \in X : f(x) \geq c + \frac{1}{n}\}.$$

(4). 设 X 为一个集合，$\mathscr{A} \subset 2^X$ 是 X 上的一个集类. 我们称 $\mathscr{A}$ 为一个集代数，如果它满足

(I). $X \in \mathscr{A}$;

(II). 对余运算封闭：对任意 $A \in \mathscr{A}$，$A^{\mathsf{C}} \in \mathscr{A}$.

(III). 对有限并运算封闭：对任意 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \cup B \in \mathscr{A}$.

请证明 $\mathscr{A}$ 对有限交运算封闭：对任意 $A, B \in \mathscr{A}$，$A \cap B \in \mathscr{A}$.

(5). 设 $f \colon X \to Y$ 为一个映射. 证明

(I). f 是单射，当且仅当对任意 $A \subset X$，$f(X) \setminus f(A) = f(X \setminus A)$;

(II). 设 A, B 为集合 X 的子集，举例说明 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(6). 设 f 为 X 到 Y 的映射，$B \subset Y$，$B_i \subset Y, i = 1, 2, 3, \ldots$，则

$$\left(f^{-1}(B)\right)^{\mathsf{C}} = f^{-1}(B^{\mathsf{C}})$$

且

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i).$$

(7). 构造 $(0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 之间的一一映射以说明它们有相同的基数.

(8). 证明增函数的不连续点集至多可数.

(9). 设 A 由直线上一些互不相交的开区间组成，证明 A 是由至多可数个开区间构成.

(10). 试用 Cantor-Bernstein 定理证明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

(11). 设 $\mathscr{A} = \{A \colon A \subset \mathbb{N}\text{为有限集}\}$，请证明 $\mathscr{A}$ 是可数集.

(12). 证明 $(0, 1)^{\mathbb{N}}$ 具有连续统基数.（$(0, 1)^{\mathbb{N}}$ 表示所有序列 $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 组成的集合，其中 $x_j \in (0, 1)$.）

(13). 证明 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 具有连续统基数.（$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 表示所有序列 $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 组成的集合，其中 $a_j \in \mathbb{N}$.）

(14). 记 $\mathbb{R}^n$ 上全体开集组成的集合为 $\mathcal{O}^n$. 请证明

(i) $\varnothing, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}^n$；

(ii) $\mathcal{O}^n$ 对任意并封闭：设 A 为指标集，对任何 $\alpha \in A$，$U_\alpha \in O^n$，则 $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{O}^n$；

(iii) $\mathcal{O}^n$ 对有限交封闭：对任意 $1 \le j \le n$，$U_j \in O^n$，则 $\bigcap_{j=1}^n U_j \in O^n$.

(15). 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的实值连续函数. 证明 f 的零集，即 $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ 是闭集.

(16). 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，对任意 $a \in \mathbb{R}$，求证 $E_1 = \{f > a\}$ 是开集，$E_2 = \{f \le a\}$ 是闭集，其中

$$\{f > a\} := \{x \in \mathbb{R}: f(x) > a\}, \quad \{f \ge a\} := \{x \in \mathbb{R}: f(x) \ge a\}.$$

(17). 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上实值函数，则 $f \in C(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任意开集 $G \subset \mathbb{R}$，$f^{-1}(G)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 这也等价于对任意闭集 $F \subset \mathbb{R}$，$f^{-1}(F)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

(18). 设 $E \subset \mathbb{R}$,$a \in \mathbb{R}$，求证 $\lambda^*(aE) = |a|\lambda^*(E)$，其中 $aE = \{ax: x \in E\}$.

(19). 设 $A \subset \mathbb{R}$ 且 $\lambda^*(A) = 0$，试证明对任意 $B \subset \mathbb{R}$，

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(B) = \lambda^*(B \setminus A).$$

(20). 设 $E_n \subset \mathbb{R}, n \ge 1$ 为可测集，求证 $\{E_n\}_{n\ge1}$ 的上极限集和下极限集都是可测的.

(21). 设 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}$，且 E_1 是可测集，$\lambda(E_1) < \infty$. 如果 $m(E_1) = \lambda^*(E_2)$，求证 E_2 是可测集.

(22). 设 $E \subset \mathbb{R}$，$\lambda^*(E) < \infty$，定义 E 的内测度为

$$\lambda_*(E) = \sup\{\lambda^*(K): K \subset E, K\text{为紧集}\}.$$

(I). 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间，请证明 $\lambda_*(I) = l(I)$，其中 $l(I)$ 表示 I 的长度.

(II). 如果 $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$，请证明 E 是可测集.

(23). 设 $\{E_n\}_{n\geq 1}$ 为一列勒贝格可测集，$\sum_{n\geq 1}\lambda(E_n)<\infty$，请证明

$$\lambda(\limsup_{n\to\infty} E_n)=0.$$

(24). 设 $\{E_n\}_{n\geq 1}$ 为一列 $[0,1]$ 中的勒贝格可测集，$\lambda(E_n)=1$，求证

$$\lambda(\cap_{n\geq 1}E_n)=1.$$

(25). 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的严格增连续函数，求证对任意 $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，$f(B)\in\mathcal{B}(R)$.（提示：可以用良集原则（good set principle）.）

(26). 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集，求证存在 F_σ 集 F 以及零测集 N 使得 $E=F\cup N$.

(27). 设 $E\subset\mathbb{R}$，求证存在 G_δ 集 $G\supset E$，使得 $m(G)=m^*(E)$（此时称 G 为 E 的等测包）.

(28). 设 $E\subset\mathbb{R}$ 为可测集且 $m(E)<\infty$，求证对任意 $\varepsilon>0$，存在有限个开区间的并集 U，使得

$$m(E\Delta U)<\varepsilon.$$

(29). 设 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为可导函数，证明 f 及 f' 是 $\mathbb{R}$ 上可测函数.
（尝试尽量考虑不利用如下性质来证明：可测函数的和与积是可测函数）

(30). 设 f 是 E 上 a.e. 有限的可测函数，$\mu(E)<\infty$，证明对任意 $\delta>0$，存在 $E_\delta\subset E$ 以及 $M>0$ 使 $\mu(E\setminus E_\delta)<\delta$，且对任意 $x\in E_\delta$，$|f(x)|\leq M$.

(31). 设 $\{f_n\}$ 为一列可测函数，且对任何 $\varepsilon>0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(f_n>\varepsilon)<\infty.$$

证明 f_n 几乎处处收敛到 0.

(32). 设 $\lambda(E)<\infty$，$\{f_n\}_{n\geq 1}$，$\{g_n\}_{n\geq 1}$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数列，且分别依测度收敛于可测函数 f,g. 求证 f_n+g_n 依测度 μ 收敛于 $f+g$.