应用随机过程

均匀泊松过程

授课教师: 赵毅

哈尔滨工业大学(深圳)理学院











目录

- 泊松过程的定义
- 泊松过程的性质
- 非均匀泊松过程
- 复合泊松过程
- 过滤型泊松过程

泊松过程是理解随机过程的起始点和突破点

泊松过程的定义



N(0)=0

计数过程 $N = \{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 泊松过程 2 平稳增加,独立增加

3 $P{N(h) = 1} = \lambda h + o(h)$

4 $P\{N(h) \ge 2\} = o(h)$



泊松过程的概率公式

对于一个速率为 λ 的泊松过程,在(0,t]时间内发生n次事件的概率:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
 $n = 0, 1, 2, ...$



考虑初始情况,在t时刻内发生0次事件的概率

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\}$$



$$= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\}$$



$$= P_0(t)P\{N(h) = 0\}$$

$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$$

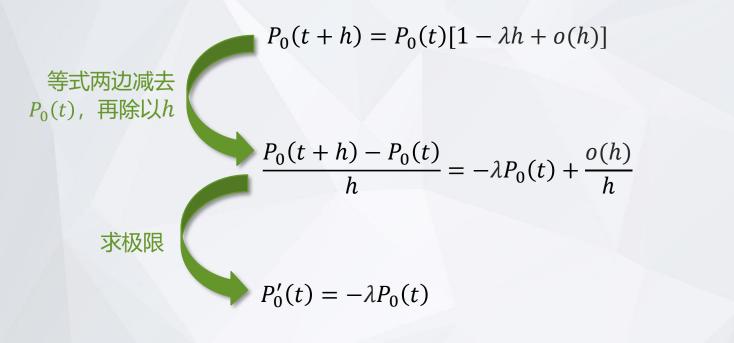
$$= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]$$

 \cdots (1)



泊松过程的概率推导

考虑初始情况,在t时刻内发生0次事件的概率





考虑一般情况,在t时刻内发生 $n(n \ge 1)$ 次事件的概率

$$P_n(t+h) = P\{N(t+h) = n\}$$
独立增加,平稳增加
$$= \sum_{i=0}^{n} P_{n-i}(t)P_i(h)$$
全概率公式
$$= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)P_i(h)$$

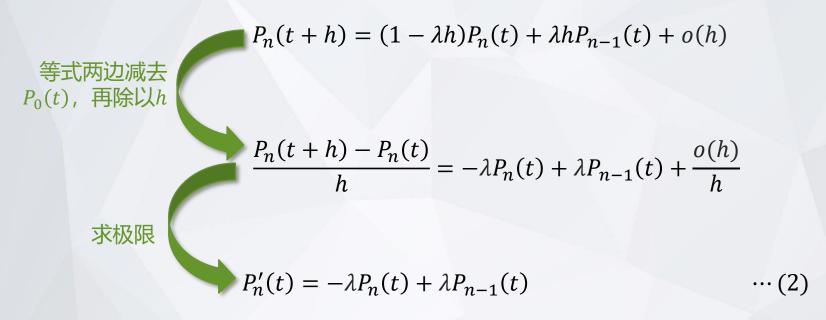
$$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$$

$$= P_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + o(h)$$

$$= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda hP_{n-1}(t) + o(h)$$



考虑一般情况,在t时刻内发生 $n(n \ge 1)$ 次事件的概率



定义: 当n < 0 时 $P_n(t) = 0$, 则公式(2)包含公式(1)



定义随机变量N(t)的概率生成函数为

概率生成函数边界条件。

$$P^{g}(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n} P\{N(0) = n\} = z^{0} P\{N(0) = 0\} = 1$$



为方便起见, 作如下定义

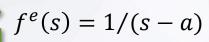
$$f(t) = P^{g}(z,t), \ f'(t) = P^{(1)}(z,t), \ \alpha = \lambda(z-1)$$

代入式(3)

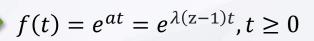


$$f'(t) = af(t) \coprod f(0) = 1$$

Laplace变换



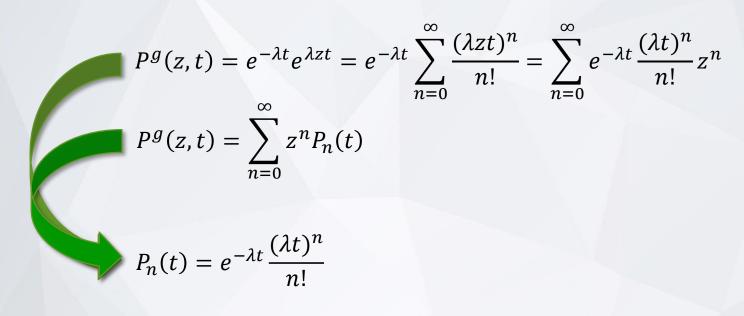
Laplace逆变换



$$P^{g}(z,t) = e^{at} = e^{\lambda(z-1)t}, t \ge 0$$



因此,可得出





课堂思考

给定参数为λ的泊松过程,请问

- (1) 相邻事件之间的间隔时间服从什么分布?
- (2)第n次事件的到达时刻服从什么分布?



谢谢听课

授课教师

赵毅