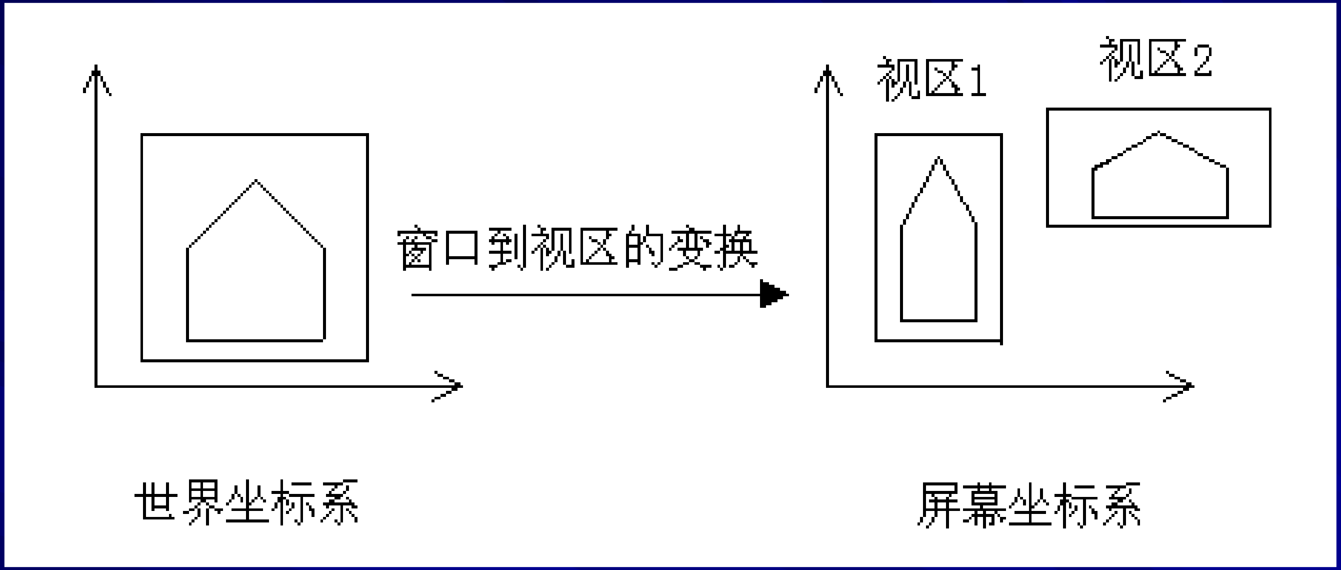
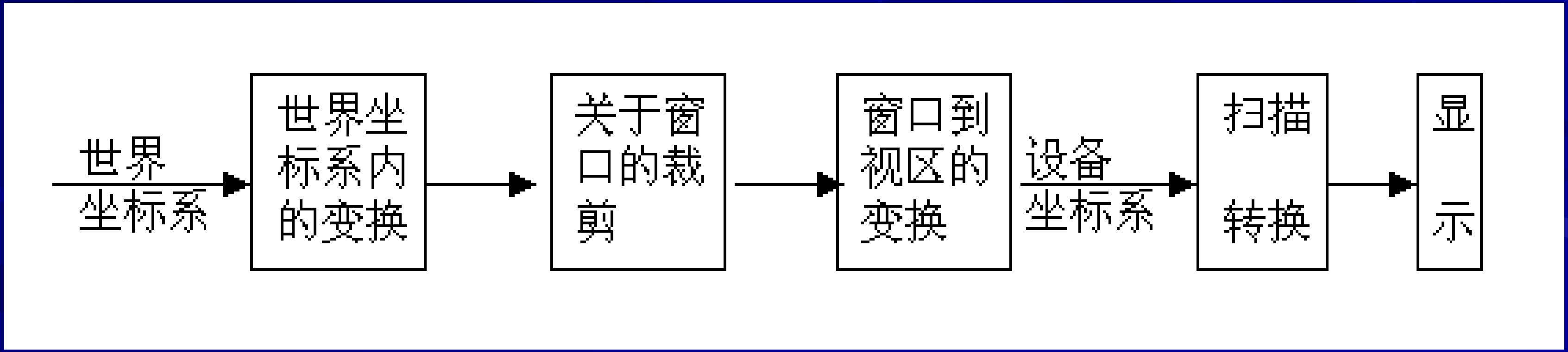
第五章
图形变换与裁剪

计算机学院 苏小红

二维图形的显示流程


视区1
视区2
窗口到视区的变换
世界坐标系
屏幕坐标系


世界坐标系
世界坐标系内的变换
关于窗口的裁剪
窗口到视区的变换
设备坐标系
扫描转换
显示

5.1 窗口视图变换

1.窗口和视图区

- 用户坐标系（world coordinate system，简称WC）
- 设备坐标系（device coordinate system，简称DC）
- 窗口区（window）
- 视图区（viewport）

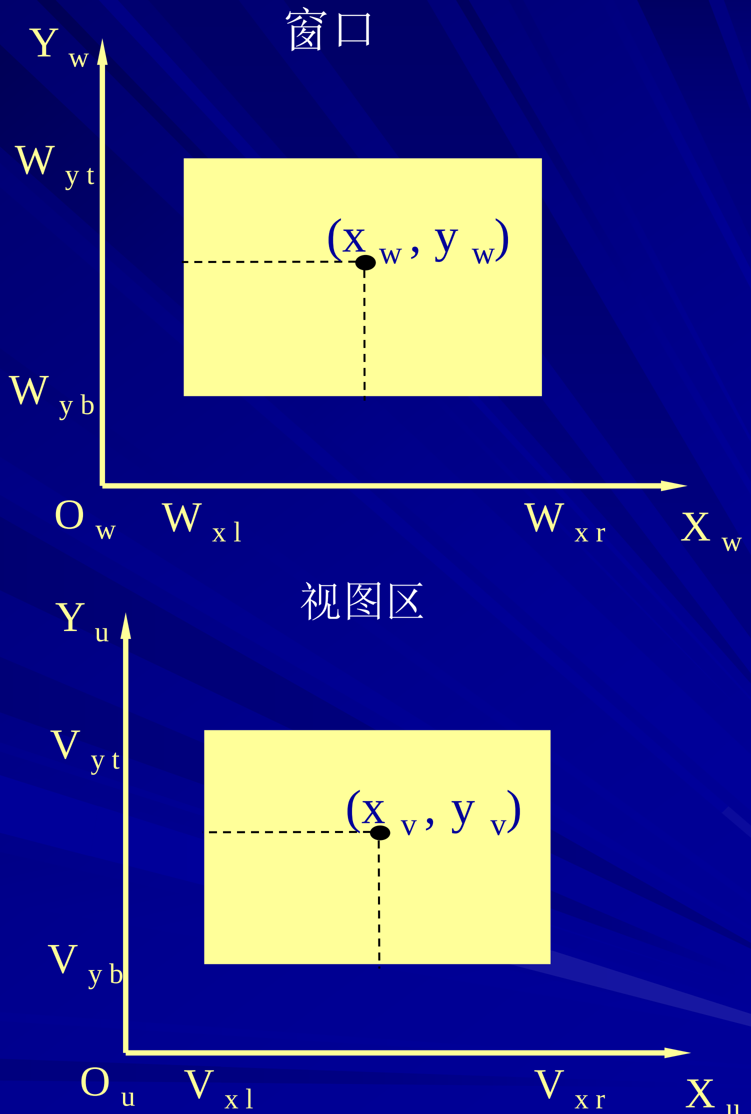
2.窗口到视图区的变换

窗口区与视图区间的映射关系：

窗口区中的任一点(x_w, y_w)与视图区中的任一点(x_v, y_v)存在如下对应关系：

$$\frac{x_v - v_{xl}}{x_w - w_{xl}} = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} \qquad (5\text{-}1)$$

$$\frac{y_v - v_{yb}}{y_w - w_{yb}} = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} \qquad (5\text{-}2)$$



窗口与视图区的对应关系

由式（5-1）和式（5-2）可分别解得：

$$x_v = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}}(x_w - w_{xl}) + v_{xl} \qquad (5\text{-}3)$$

$$y_v = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}}(y_w - w_{yb}) + v_{yb} \qquad (5\text{-}4)$$

令

$$a = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} \qquad c = -\frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} w_{xl} + v_{xl}$$

$$b = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} \qquad d = -\frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} w_{yb} + v_{yb}$$

有

$$x_v = ax_w + b \qquad (5\text{-}5)$$

$$y_v = cy_w + d \qquad (5\text{-}6)$$

5.2二维图形几何变换

5.2.1 二维图形几何变换的原理

二维图形由点或直线段组成

直线段可由其端点坐标定义

二维图形的几何变换：对点或对直线段端点的变换

$$P=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix} \longrightarrow P'=\begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}$$

5.2.2几种典型的二维图形几何变换

1.平移变换（translation）

T_x 平行于x轴的方向上的移动量

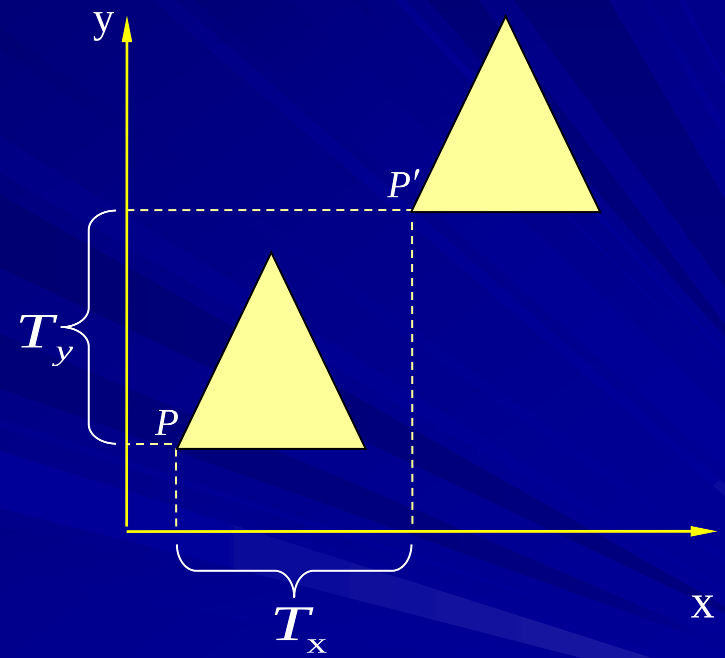
T_y 平行于y轴的方向上的移动量

几何关系

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases} \qquad (5\text{-}7)$$

矩阵形式

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] + [T_x \quad T_y] \qquad (5\text{-}8)$$



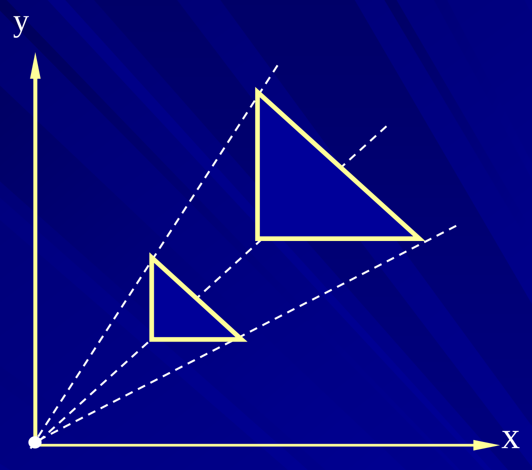
平移变换

2.比例变换（scale）

指相对于原点的比例变换

S_x 平行于x轴的方向上的缩放量

S_y 平行于y轴的方向上的缩放量



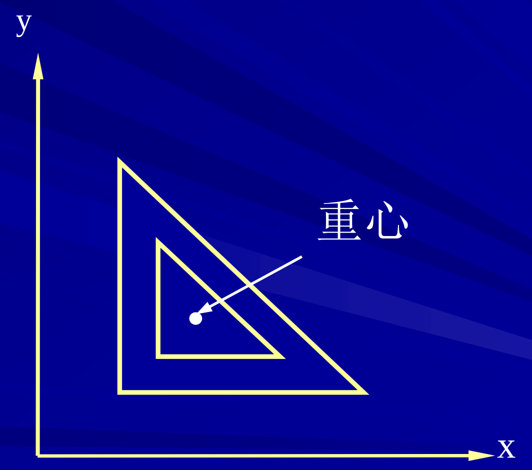
相对于**原点**的比例变换

几何关系

$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \end{cases} \qquad (5\text{-}9)$$

矩阵形式

$$[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}10)$$



相对于**重心**的比例变换

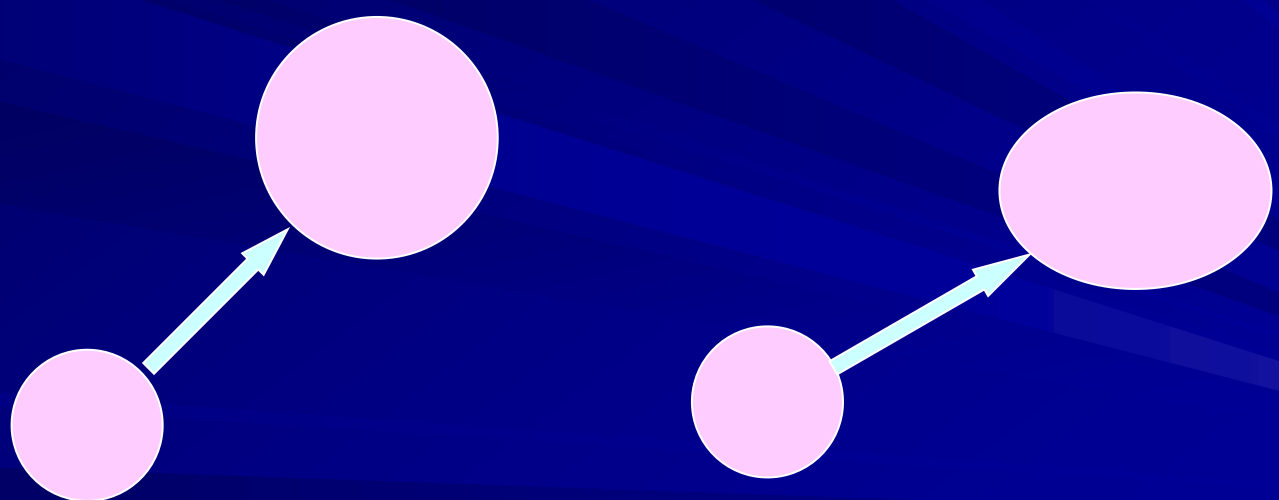
- 比例变换的性质

当 $S_x = S_y$ 时，变换前的图形与变换后的图形相似

　　当 $S_x = S_y > 1$ 时，图形将放大，并远离坐标原点

　　当 $0 < S_x = S_y < 1$ 时，图形将缩小，并靠近坐标原点

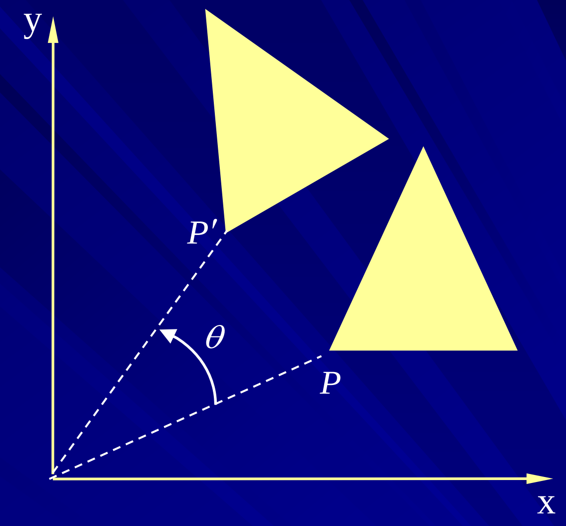
当 $S_x \neq S_y$ 时，图形将发生畸变



$S_x = S_y > 1$　　　　$S_x \neq S_y$

3.旋转变换（rotation）

点P绕原点逆时针转θ度角
（设逆时针旋转方向为正方向）



旋转变换

几何关系

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (5\text{-}11)$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta \\ y' = r\sin(\theta+\varphi) = r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta \end{cases} \quad (5\text{-}12)$$

将式（5-11）代入式（5-12）得：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad (5\text{-}13)$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5\text{-}14)$$

5.2.3 齐次坐标（homogeneous coordinates）技术

1.齐次坐标技术的引入

平移、比例和旋转等变换的组合变换

处理形式不统一，将很难把它们级联在一起。

2.变换具有统一表示形式的优点

– 便于变换合成
– 便于硬件实现

3.齐次坐标技术的基本思想

把一个n维空间中的几何问题转换到n+1维空间中解决。

4.齐次坐标表示

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow (\omega x_1, \omega x_2, \ldots, \omega x_n, \omega)$$

有n个分量的向量

有n+1个分量的向量

哑元或标量因子

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega) \Rightarrow (x_1/\omega, x_2/\omega, \ldots, x_n/\omega)$$

齐次坐标表示不是唯一的

$\omega = 1$ 规格化的齐次坐标

5.基本几何变换的齐次坐标表示

- 平移变换 $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$
- 比例变换 $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- 旋转变换： $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  逆时针为正

6. 无穷远点或无穷远区域的齐次坐标表示

$\omega = 0$时，齐次坐标$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega)$表示一个n维的无穷远点

5.2.3常用的二维几何变换

1.对称变换（symmetry）（反射变换或镜像变换）

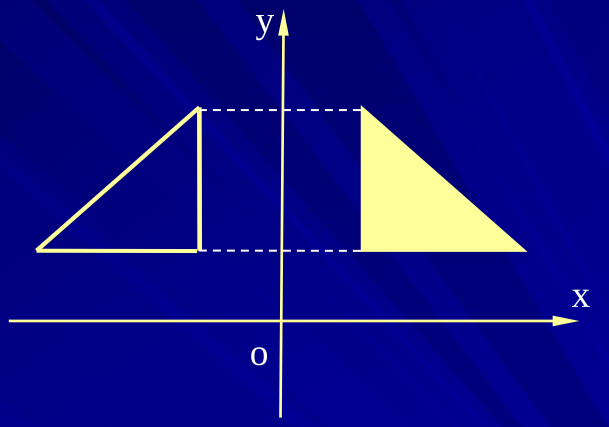
（1）相对于y轴对称

几何关系

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y & 1 \end{bmatrix}$$



对称变换（1）

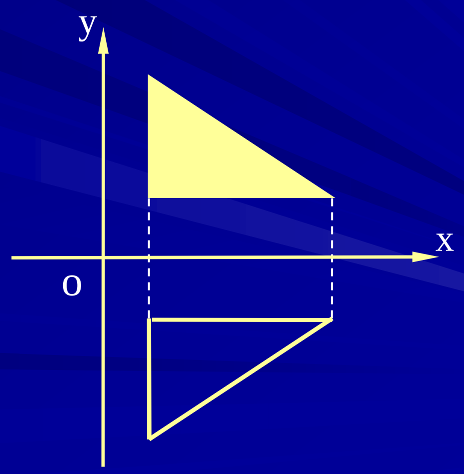
（2）相对于x轴对称

几何关系

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

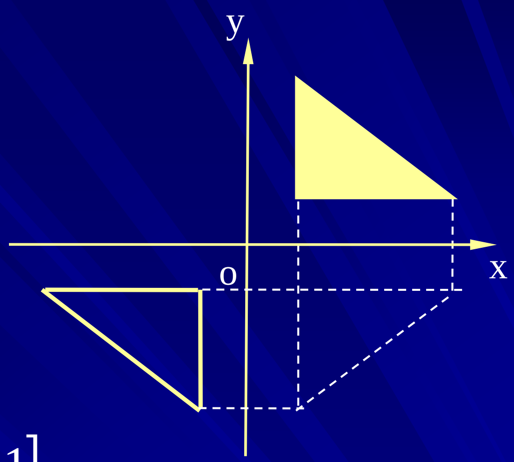
矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y & 1 \end{bmatrix}$$



对称变换（2）

（3）相对于原点对称（即中心对称）



几何关系

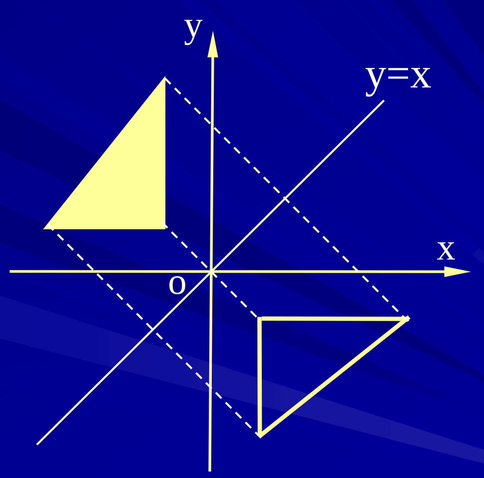
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

矩阵形式

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad -y \quad 1]$$

对称变换（3）

（4）相对于直线y=x对称



几何关系

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

矩阵形式

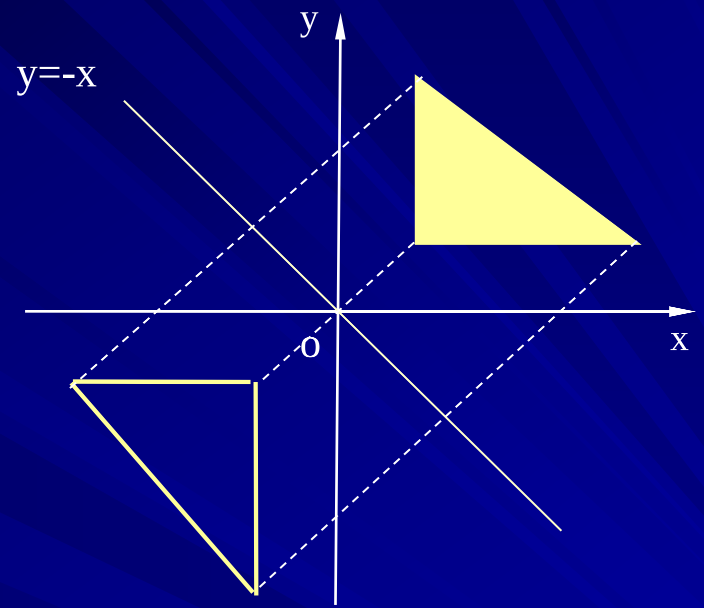
$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [y \quad x \quad 1]$$

对称变换（4）

（5）相对于直线y=-x对称

几何关系

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$



对称变换（5）

矩阵形式

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-y \quad -x \quad 1]$$

2.错切变换（shear）

（1）沿 x 轴方向关于 y 轴错切

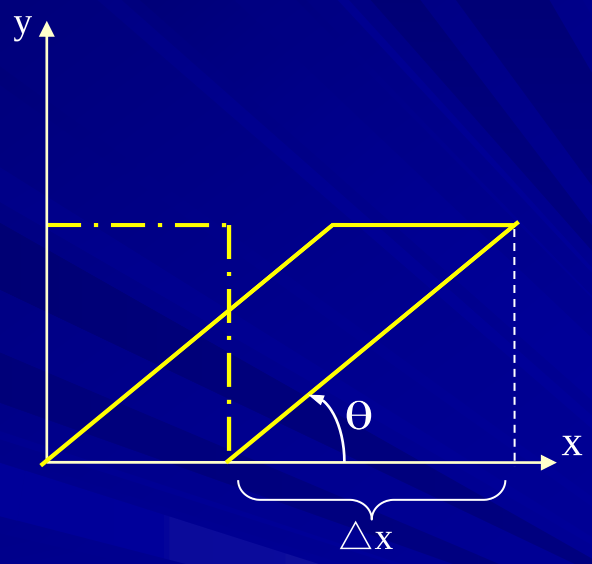
将图形上关于y轴的平行线沿x方向推成θ角的倾斜线，而保持y坐标不变。

几何关系

$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y \end{cases}$$

令 $a = ctg\theta$ 有 $\Delta x = yctg\theta = ay$

代入得 $\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = y \end{cases}$



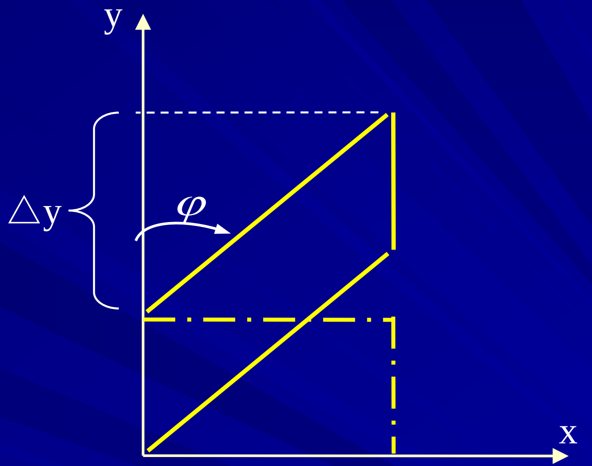
错切变换（1）

矩阵形式

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x+ay \quad y \quad 1]$$

（2）沿 y 轴方向关于 x 轴错切

将图形上关于x轴的平行线沿y方向推成Ψ角的倾斜线，而保持x坐标不变。



错切变换（2）

几何关系

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \Delta y \end{cases}$$

令 $b = ctg\varphi$ 　　有 $\Delta y = xctg\varphi = bx$

代入得 $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + bx \end{cases}$

矩阵形式

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad bx + y \quad 1]$$

5.3.3 二维组合变换

- 问题：如何实现复杂变换？

变换分解 → 变换合成

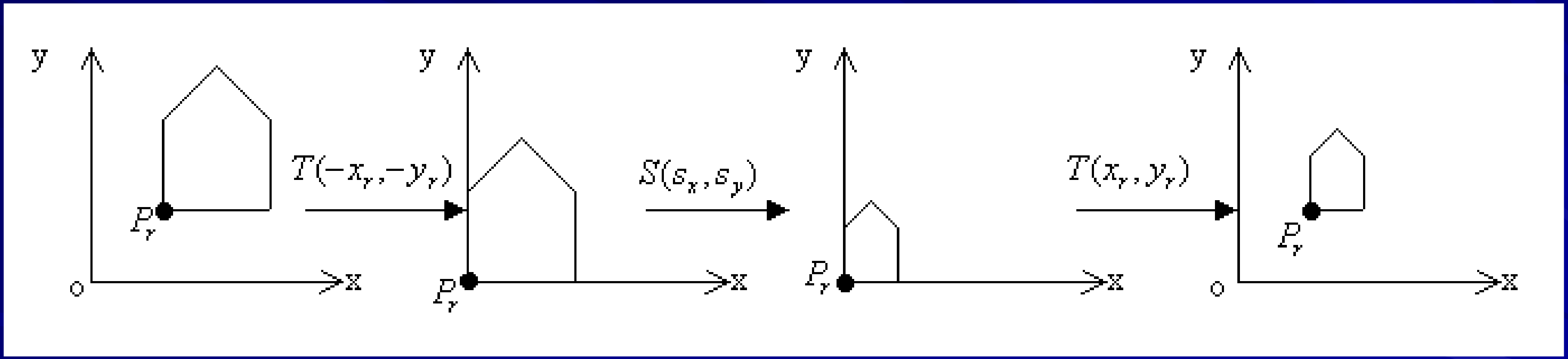
1.相对于任意点（x_0 , y_0）的比例变换

对任意点比例变换的步骤：

（1）平移变换

（2）相对于原点的比例变换

（3）平移变换



- 当（x_0 , y_0）为图形重心的坐标时，这种变换实现的是相对于重心的比例变换。

令

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T_1 S T_2$$

则有

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T_1 S T_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}$$

平移

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

比例

$$\begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平移

$$\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

任意点比例变换示意图

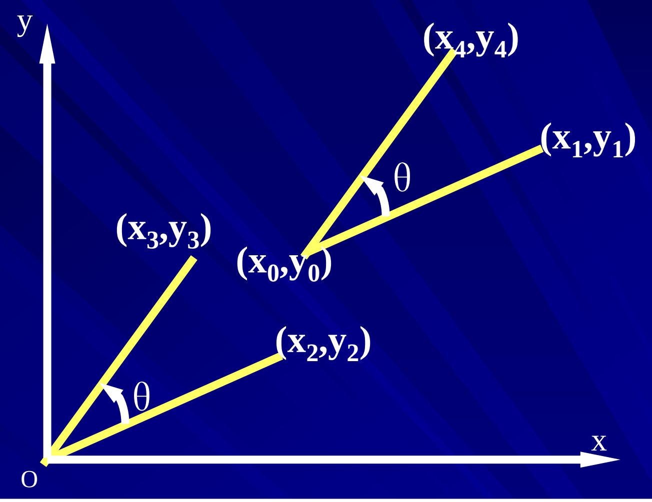
2.绕任意点（x_0 , y_0）的旋转变换

绕任意点旋转变换的步骤：

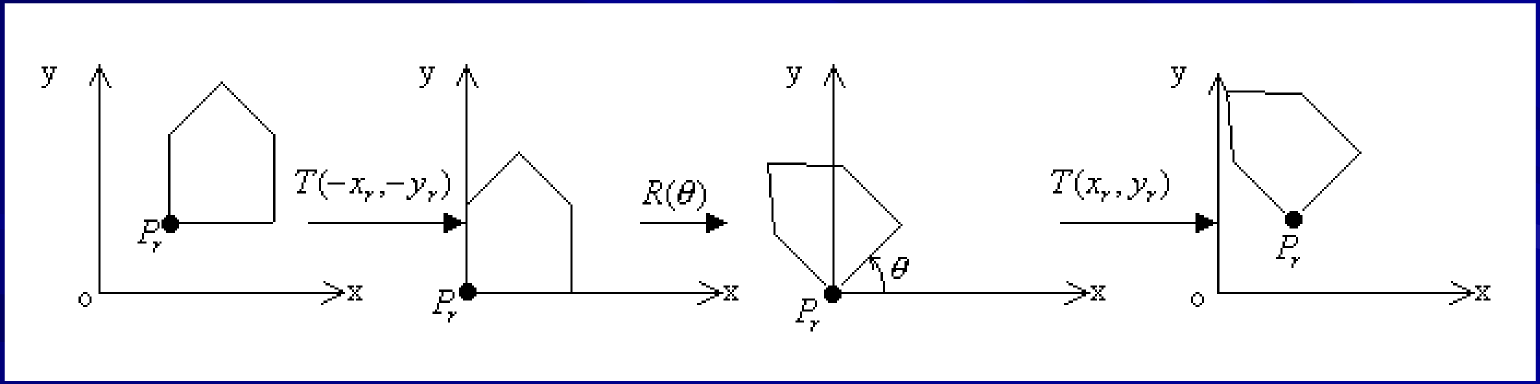
（1）平移变换

（2）对图形绕原点进行旋转变换

（3）平移变换



相对于任意点(x_0,y_0)的旋转变换



令

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}$$

$$T=T_1RT_2$$

则有

- $[x' \quad y' \quad 1]=[x_4 \quad y_4 \quad 1]$
$=[x_1 \quad y_1 \quad 1]T_1RT_2=[x_1 \quad y_1 \quad 1]T$

$$[x_0 \quad y_0 \quad 1]$$

平移

$$[x_2 \quad y_2 \quad 1]=[x_1 \quad y_1 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转

$$[x_3 \quad y_3 \quad 1]=[x_2 \quad y_2 \quad 1]\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

平移

$$[x_4 \quad y_4 \quad 1]=[x_3 \quad y_3 \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}$$

任意点旋转变换示意图

- 变换的结果与变换的顺序有关（矩阵乘法不可交换）
- 变换的固定坐标系模式
  - 相对于同一个固定坐标系
  - 先调用的变换先执行，后调用的变换后执行

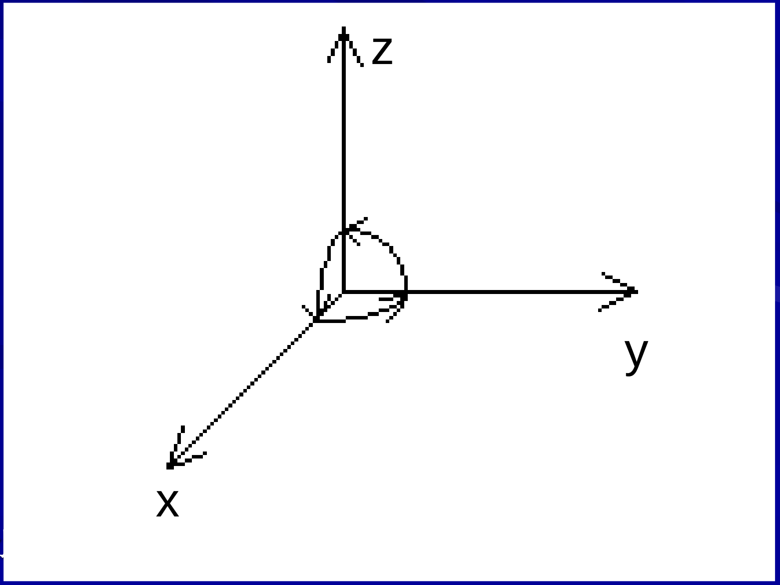
三维几何变换（1/7）

- 三维齐次坐标
  - (x,y,z)点对应的齐次坐标为

$$(x_h, y_h, z_h, h)$$

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

  - 标准齐次坐标(x,y,z,1)
- 右手坐标系



三维几何变换（2/7）

- 平移变换

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ T_x & T_y & T_z & 1\end{bmatrix}$$

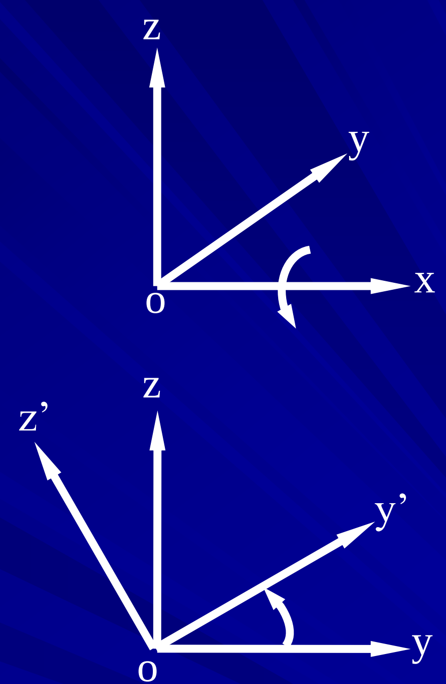
- 放缩变换

$$S=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（3/7）

- 旋转变换:右手螺旋方向为正
  - 绕x轴

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



x轴指向纸外

绕轴旋转角

$$\begin{bmatrix}x^* & y^* & z^* & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y & z & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & cox\,\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（4/7）

– 绕y轴

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2） 绕y轴旋转：

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & cox\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– 绕z轴

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（3） 绕z轴旋转：

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

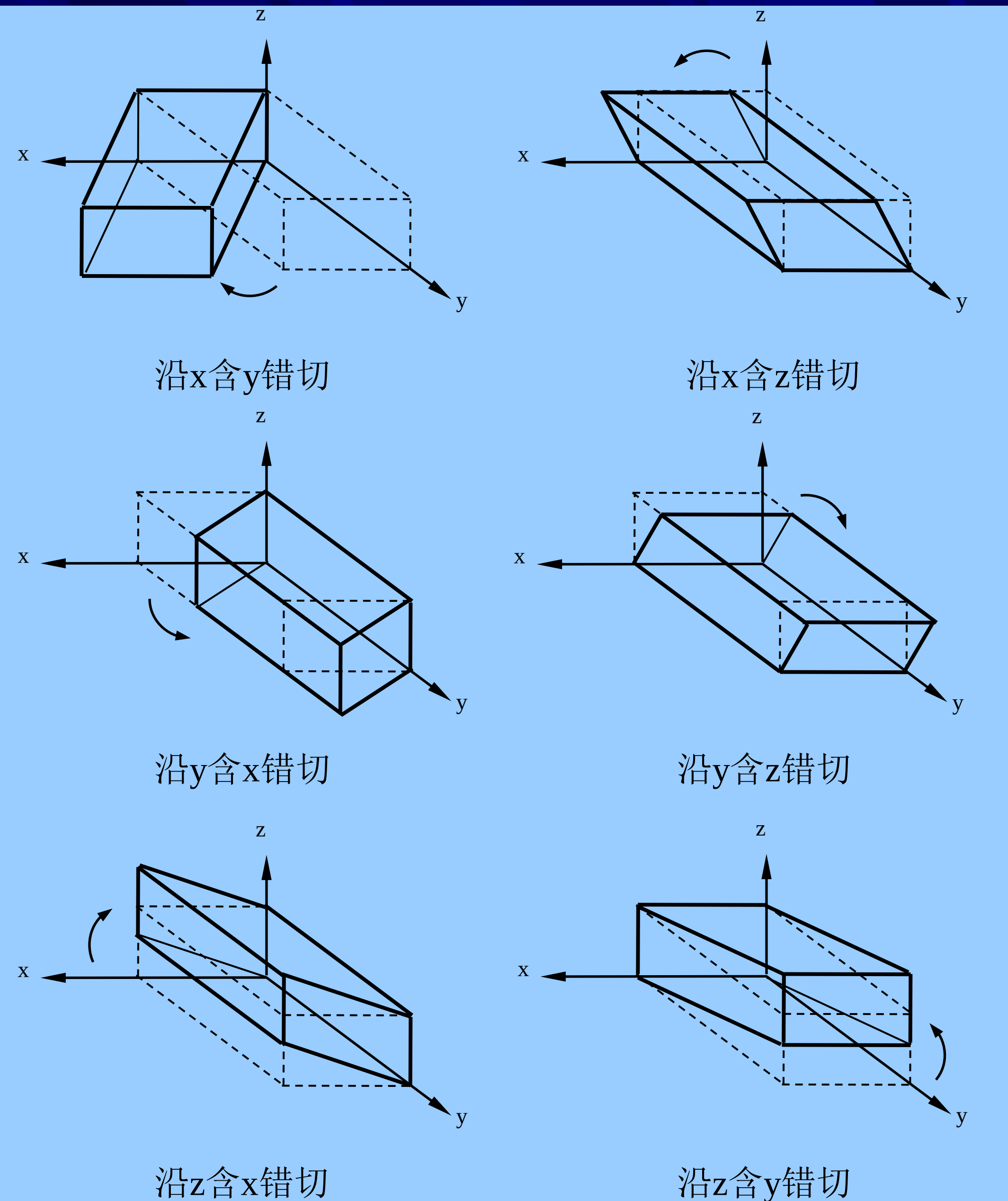
三维几何变换（5/7）

- 对称变换
  - 关于坐标平面xy的对称变换

$$SY_{xy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换

- 错切变换



三维错切变换

三维几何变换（7/7）

- 三维变换的一般形式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$