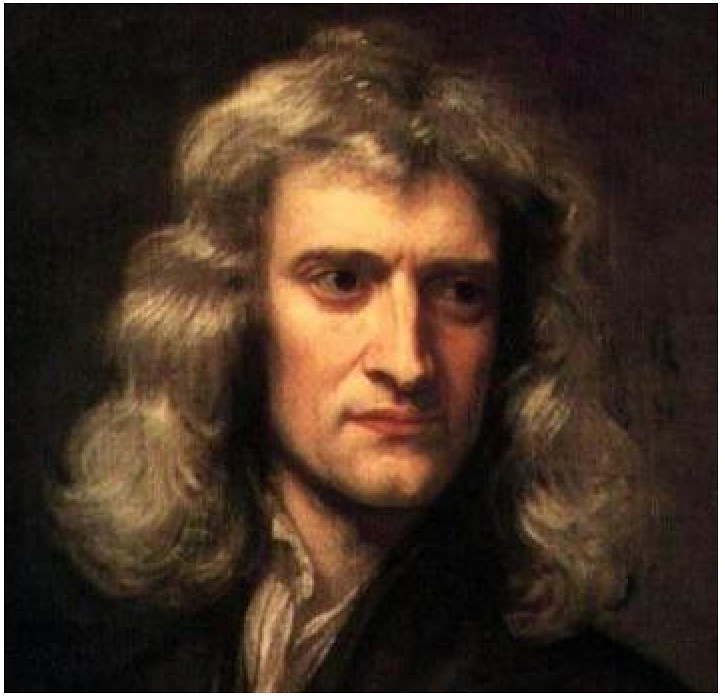
第二章 质点动力学



Issac Newton
（1643－1727）

牛顿——英国物理学家，经典物理学的奠基人。他对力学、光学、热学、天文学和数学等学科都有重大发现，其代表作《自然哲学的数学原理》是力学的经典著作。牛顿是近代自然科学奠基时期具有集前人之大成的伟大贡献的科学家。

§1 牛顿运动定律

一、牛顿第一定律

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止 。

★ 力——物体对物体的作用，使物体获得加速度或形变的外因。 $\vec{F}=0$ 时， $\vec{v}=$ 恒矢量。

★ 惯性——物体保持静止或匀速直线运动状态的性质。

★ 惯性参考系——如物体在一参考系中不受其它物体作用，而保持静止或匀速直线运动，这个参考系就称为惯性参考系。（牛顿运动定律成立的参考系）

一般而言恒星太阳是惯性参照系，特殊情况下，地球可以近似看作是惯性参照系。

★ 实验定律，仅适用于惯性系。

二、牛顿第二定律

动量为 $\vec{p}$ 的物体，在合外力 $\vec{F}$ 的作用下，其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力 。

★ $$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

★ 当 $v << c$ 时，m为常量。

即：

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}}$$

物体受到外力作用时，物体所获得的加速度大小与所受合外力的大小成正比，而与物体的质量成反比；加速度的方向与和外力的方向相同。

★ 牛顿定律的研究对象是单个物体（质点）。

★ 满足力的叠加原理：

即： $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\cdots$

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\cdots$$

★ 在直角坐标系中：

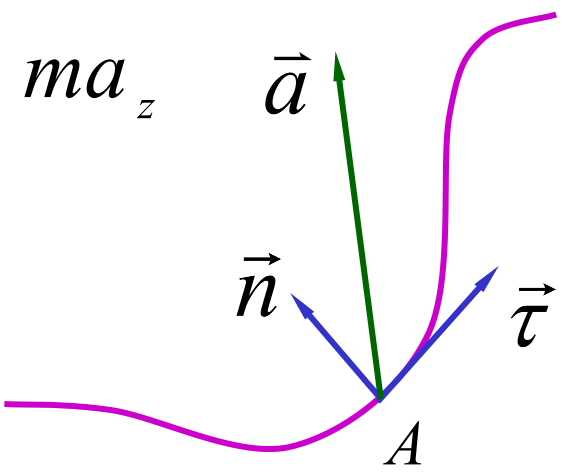
$$\begin{cases}\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\\ \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\ F_y=ma_y\\ F_z=ma_z\end{cases}$$

★ 在自然坐标系中：

$$\begin{cases}\vec{F}=F_\tau\vec{\tau}+F_n\vec{n}\\ \vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_\tau=ma_\tau\\ F_n=ma_n\end{cases}$$

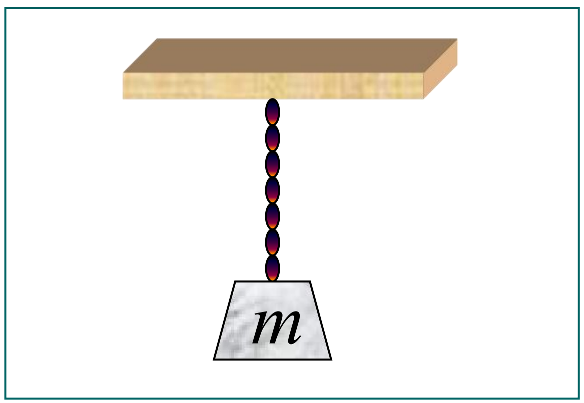


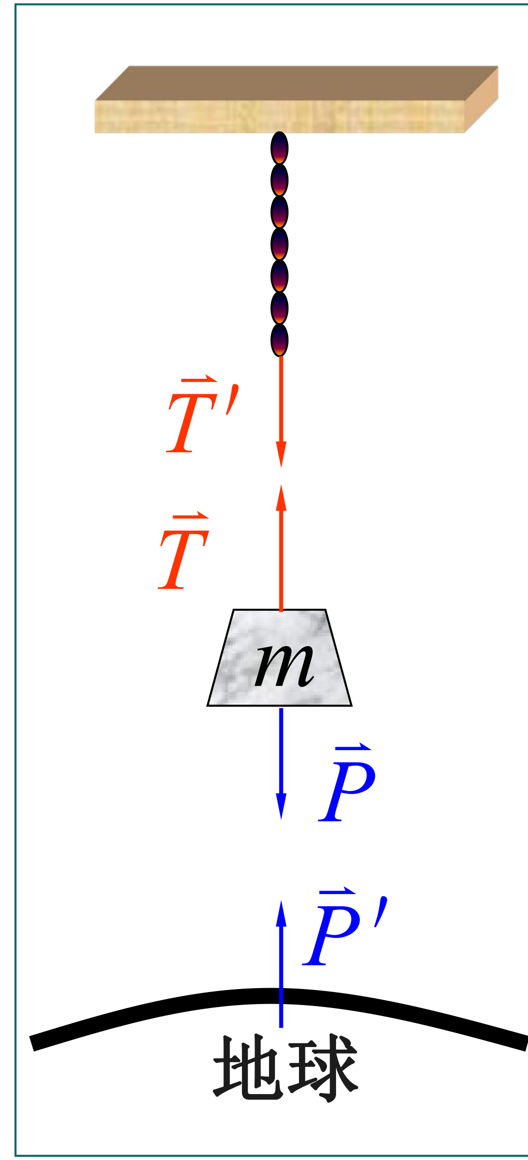
★ 瞬时关系，实验定律，仅适用于惯性系。

三、牛顿第三定律

两个物体之间作用力 $\vec{F}$ 和反作用力 $\vec{F}'$，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用 在两个物体上 。

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$





★ 实验定律，适用于任何参考系。

★ 是同一性质的力。大小相等、方向相反，分别作用在不同物体上，同时存在、同时消失，它们不能相互抵消。

**几点说明：

- 凡相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系。
- 对于不同惯性系，牛顿力学的规律都具有相同的形式，与惯性系的运动无关。

——— 力学相对性原理

（伽利略相对性原理）

牛顿定律适用范围：

惯性系

低速（高速下，相对论力学）

宏观物体（微观下，量子力学）

**四、物理量的单位与量纲

国际单位制（SI）的七个基本单位：

力学的基本单位

物理量	长度	质量	时间
单位名称	米	千克	秒
符号	m	kg	s

电流单位A安培， 热力学温度K开尔文，

物质的量mol摩尔，发光强度cd坎德拉。

1 m是光在真空中(1/299 792 458) s时间间隔内所经路径的长度.

1 s是铯的一种同位素133 C_s原子发出的一个特征频率光波周期的9 192 631 770倍.

“千克标准原器” 是用铂铱合金制造的一个金属圆柱体，保存在巴黎度量衡局中.

其它力学物理量都是导出量.

力学还有辅助量：弧度 rad.

导出量

速率	$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$	$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
力	$\vec{F} = m\vec{a}$	$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
功	$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

电压，电容，压强……

量纲

表示一个物理量如何由基本量的组合所形成的式子。

$$\boxed{\dim Q = \mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{q}\mathrm{T}^{s}}$$

如：速度的量纲是 LT^{-1}

力的量纲是 MLT^{-2} $\quad [F] = MLT^{-2}$

角速度的量纲是T^{-1}

量纲作用

（1）可定出同一物理量不同单位间的换算关系。

（2）量纲可检验文字描述的正误。

（3）从量纲分析中定出方程中比例系数的量纲和单位。

例： $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$　　$G = \dfrac{Fr^2}{m_1 m_2}$

$$\dim G = \mathrm{L}^3\mathrm{M}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$$

引力常数 $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

五、几种常见的力

1. 万有引力

任何两个质点都具有相互吸引的作用，引力的大小与它们的质量乘积成正比，与它们的距离的平方成反比。

$$\boxed{\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0}$$

$G = 6.67\times10^{-11}\,N.m^2/kg^2$ 为引力常数。

公式中的质量为引力质量，是物体间相互吸引性质的量度。

实验证明：同一物体的引力质量与惯性质量相等的

万有引力是通过引力场来传递的——引力场 。

★ **重力**：重力就是地球对其表面附近物体的引力作用，即

$$mg = G\frac{M_E\ m}{R^2}$$

地面上的重力加速度的理论公式：$g = \frac{GM_E}{R^2} \approx 9.80\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

2. 弹性力： 如压力、支撑力、张力、弹簧弹性力等。

弹簧弹性力 $f = -kx$

3. 摩擦力

滑动摩擦力 $f = \mu N$

静摩擦力：大小可变，最大 $f_0 = \mu_0 N$ $f_0 \geq f$

一般情况 $\mu \approx \mu_0$

**四种基本相互作用

力的种类	相互作用的物体	力的强度	作用距离
万有引力	一切质点	10^{-38}	无限远
弱相互作用	大多数粒子	10^{-13}	小于 10^{-17} m
电磁力	电荷	10^{-2}	无限远
强相互作用	核子、介子等	1*	10^{-15} m

* 以距源 10^{-15} m 处强相互作用的力强度为 1。

温伯格
萨拉姆
格拉肖

弱相互作用
电磁相互作用

电弱相互作用理论

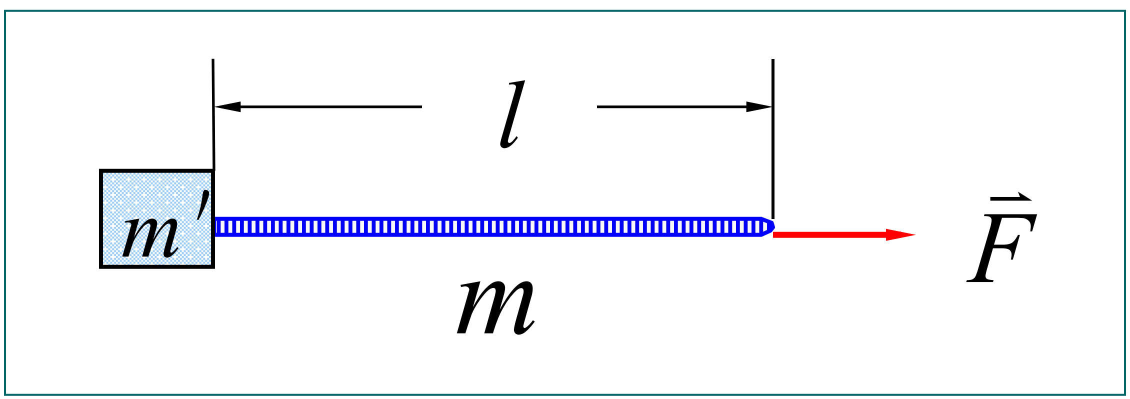
三人于1979年荣获诺贝尔物理学奖。

鲁比亚，范德米尔实验证明电弱相互作用，1984年获诺贝尔奖。

电弱相互作用
强相互作用
万有引力作用

“大统一”（尚待实现）

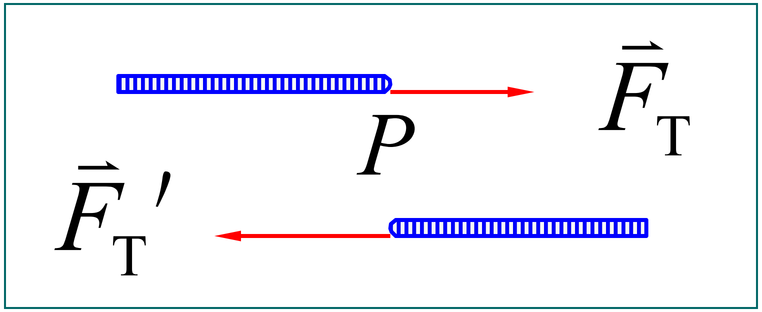
例1 质量为 m 、长为 l 的柔软细绳，一端系着放在光滑桌面上质量为 m' 的物体，如图所示．在绳的另一端加如图所示的力 $\vec{F}$ 。绳被拉紧时会略有伸长（形变），一般伸长甚微，可略去不计。 现设绳的长度不变，质量分布是均匀的。求：（1）绳作用在物体上的力；（2）绳上任意点的张力 。



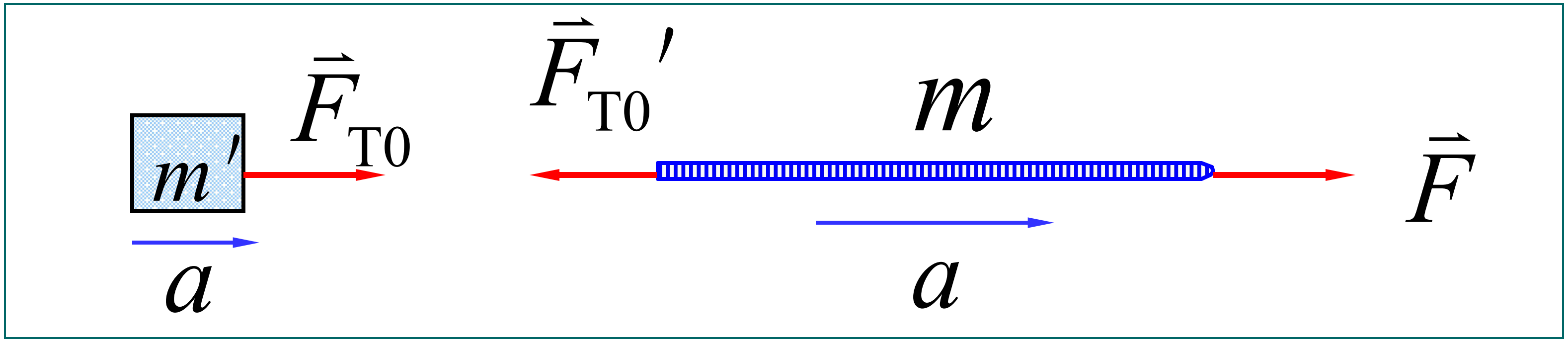
解 设想在点 P 将绳分为两段

其间张力 $\vec{F}_{T}$ 和 $\vec{F}_{T}'$ 大小

相等，方向相反，



(1)



$$\begin{cases} F_{T0} = F_{T0}' \\ F_{T0} = m'a \\ F - F_{T0}' = ma \end{cases}$$

$$a = \frac{F}{m' + m}$$

$$F_{T0} = \frac{m'}{m' + m} F$$

（2）

$$\mathrm{d}m = m\mathrm{d}x / l$$

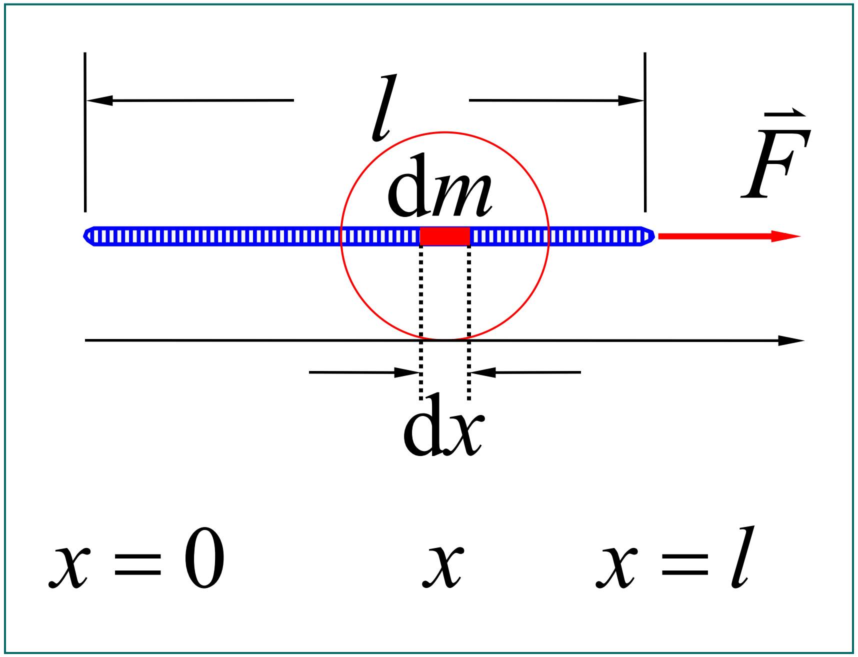
$$(F_{\mathrm{T}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{T}}) - F_{\mathrm{T}}$$

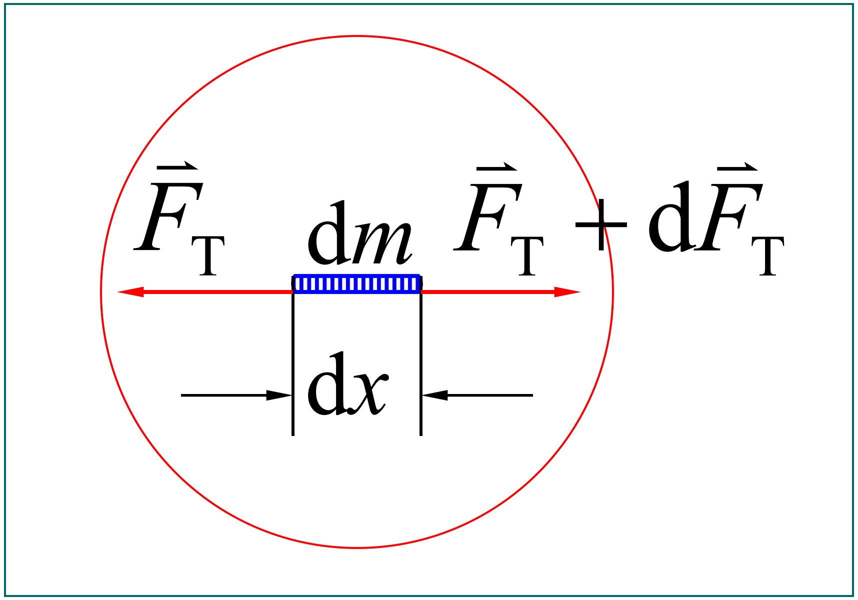
$$= (\mathrm{d}m)a = \frac{m}{l}a\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \frac{mF}{(m' + m)l}\mathrm{d}x$$

$$\int_{F_{\mathrm{T}}}^{F} \mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \frac{mF}{(m' + m)l}\int_{x}^{l} \mathrm{d}x$$

$$F_{\mathrm{T}} = (m' + m\frac{x}{l})\frac{F}{m' + m}$$





§2 牛顿运动定律的应用

解题的基本思路

（1）确定研究对象，并且进行受力分析；

对于连带运动，进行隔离物体受力分析，画受力图。

（2）选取适当的坐标系；

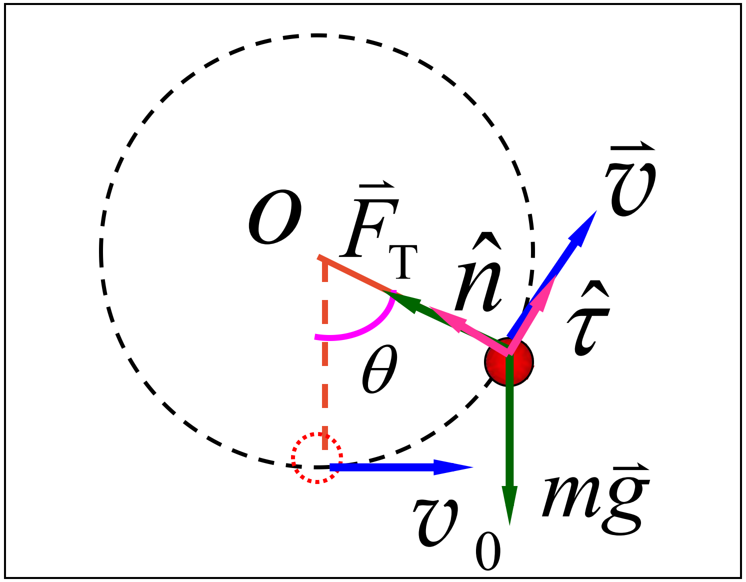
（3）列动力学方程（一般用分量式）；

（4）利用其它的条件列补充方程；

（5）求出文字解；

其后带入数据计算结果（注意统一单位制）。

例2 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球,另一端系于定点O，$t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$，求小球在任意位置的速率及绳的张力。



解
$$\begin{cases} F_T - mg\cos\theta = ma_n \\ -mg\sin\theta = ma_\tau \end{cases}$$

$$F_T - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l}\frac{dv}{d\theta}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gl\int_0^\theta \sin\theta\,d\theta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$F_T = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

例3. 已知：桶绕 z 轴转动，$\omega = \text{const.}$ 水对桶静止。

求：水面形状（$z-r$ 关系）。

【解】◆ 选对象：

任选表面上一小块水

为隔离体 m；

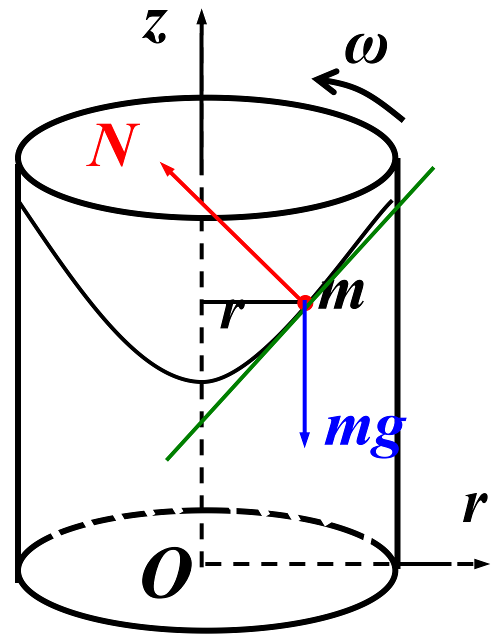
◆ 看运动：

m 作匀速率圆周运动：

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r};$$

◆ 查受力：

受力 $m\vec{g}$ 及 $\vec{N}$，$\vec{N} \perp$ 水面；



◆ （建坐标）列方程：

z向： $N\cos\theta - mg = 0 \quad (1)$

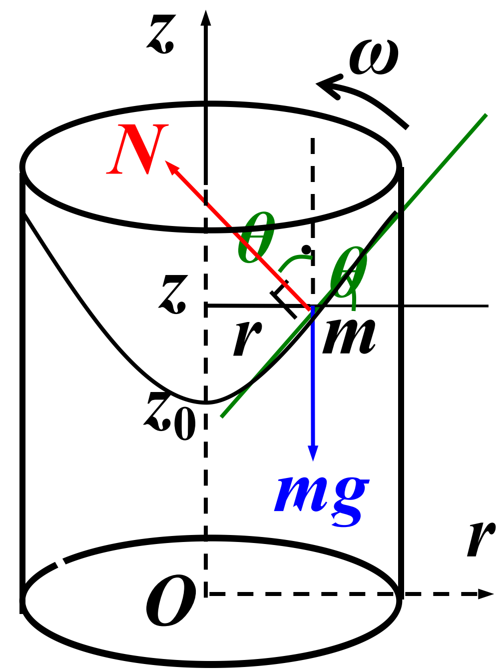
r向： $-N\sin\theta = -m\omega^2 r \quad (2)$

由导数关系： $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} \quad (3)$

由(1)(2)得： $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\omega^2}{g} r$

分离变量： $\mathrm{d}z = \dfrac{\omega^2}{g} r\,\mathrm{d}r$

积分： $\displaystyle\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z = \int_0^r \frac{\omega^2}{g} r\,\mathrm{d}r$



注意：复杂问题往往除动力学方程外，还需补充一些运动学方程或几何关系.

解得： $z=\dfrac{\omega^2}{2g}r^2+z_0$

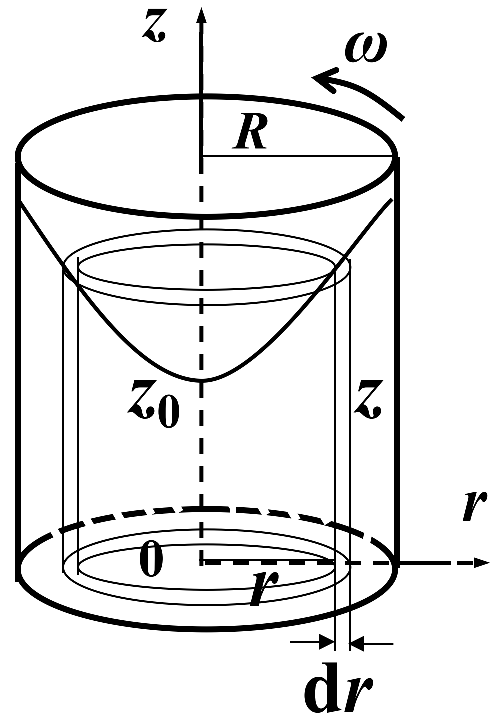
答：水面为旋转抛物面。

讨论 若已知桶不旋转时水深为h，桶半径为R，

有： $$\int_0^R z\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r=\pi R^2 h$$

$$\int_0^R\left(\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0\right)2\pi r\,\mathrm{d}r=\pi R^2 h$$

可以解得： $$z_0=h-\frac{\omega^2 R^2}{4g}$$



◆ 验结果：
$$z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0=\frac{\omega^2}{2g}r^2-\frac{\omega^2}{4g}R^2+h$$

查量纲： $[\omega^2]=1/\mathrm{s}^2$， $[r]=\mathrm{m}$， $[g]=\mathrm{m/s}^2$

$$[\frac{\omega^2}{2g}r^2]=[\frac{\omega^2}{4g}R^2]$$

$$=\frac{(1/\mathrm{s}^2)\cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{m/s}^2}=\mathrm{m}=[h]=[z],$$ 正确。

过渡到特殊情形：$\omega=0$，有 $z=z_0=h$， 正确。

看变化趋势： r 一定时，$\omega\uparrow\rightarrow(z-z_0)\uparrow$， 合理。

例4　一质量 m ，半径 r 的球体在水中静止释放沉入水底。已知阻力 $F_{\mathrm{r}} = -6\pi r \eta v$ ， η 为粘滞系数， 求 $v(t)$ 。

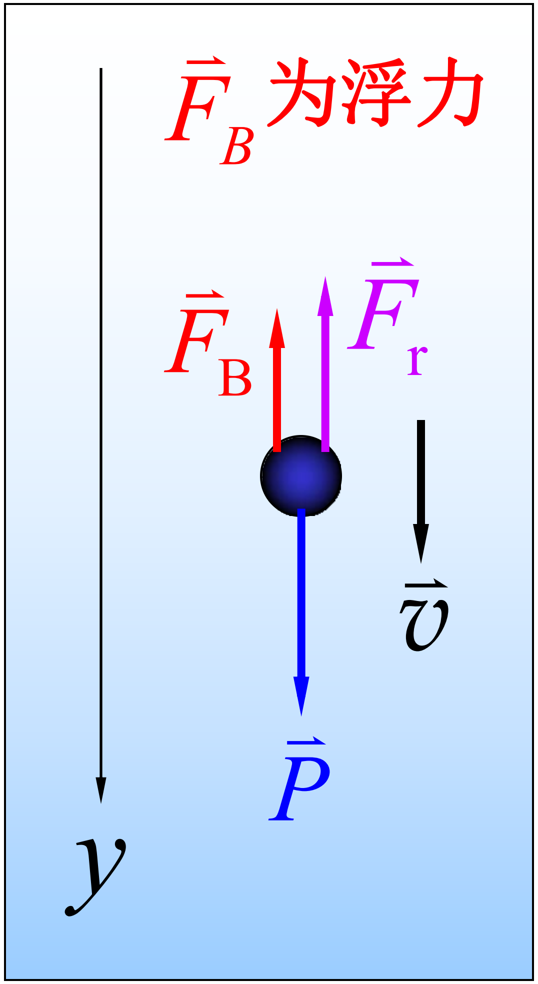
解　取坐标如图

$$mg - F_{\mathrm{B}} - 6\pi \eta r v = ma$$

令 $F_0 = mg - F_{\mathrm{B}}$ 　　$b = 6\pi \eta r$

$$F_0 - bv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v - (F_0/b)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

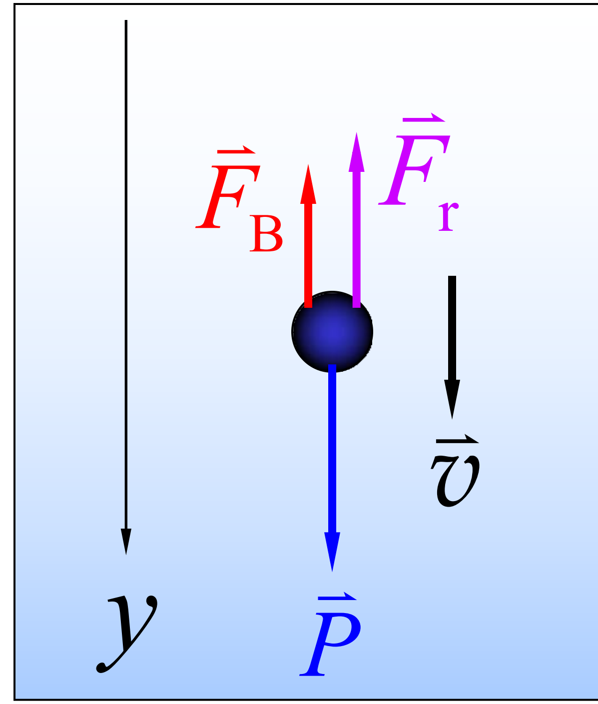
$$v = \frac{F_0}{b}\left[1 - \mathrm{e}^{-(b/m)t}\right]$$

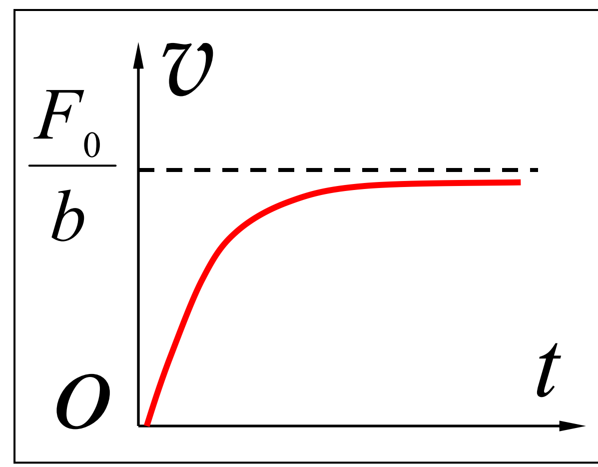
$t \to \infty$，$v_{\mathrm{L}} \to F_0/b$（极限速度）

当 $t = 3m/b$ 时

$$v = v_{\mathrm{L}}(1 - 0.05) = 0.95 v_{\mathrm{L}}$$

一般认为 $t \geq 3m/b$，$v \to v_{\mathrm{L}}$



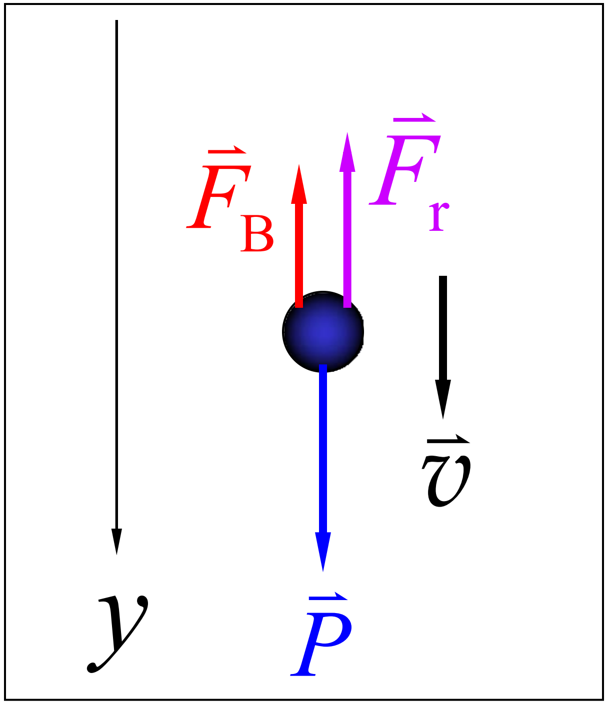


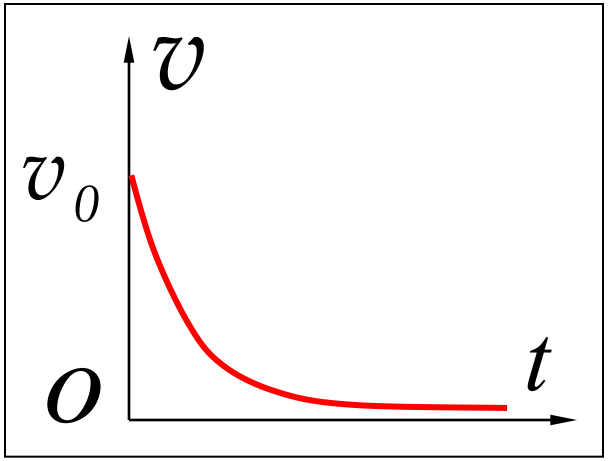
若球体在水面上是具有竖直向下的速率 v_0 ，且在水中的重力与浮力相等，即 $F_B = P$ 。则球体在水中仅受阻力的作用 $F_r = -bv$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

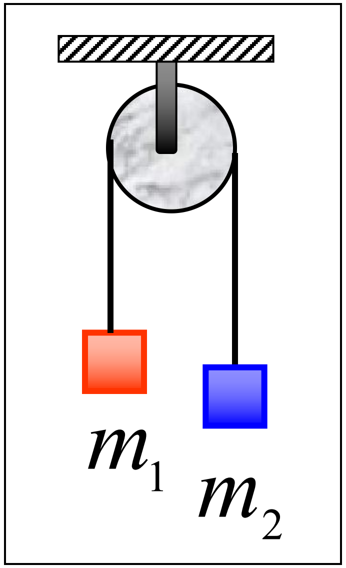
$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(b/m)t}$$





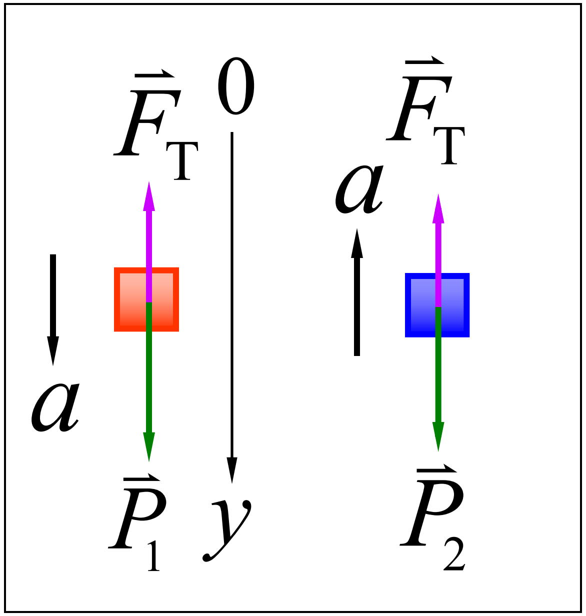
例5 阿特伍德机

（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与绳间的摩擦力以及滑轮与轴间的摩擦力均不计。且 $m_1 > m_2$ 。 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。



解　以地面为参考系

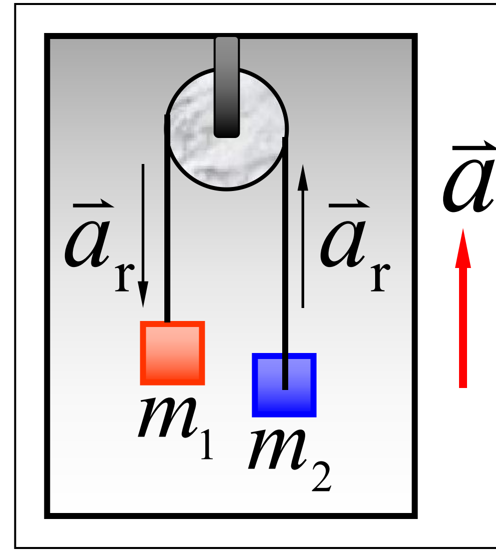
画受力图、选取坐标如图



$$\begin{cases} m_1 g - F_{\mathrm{T}} = m_1 a \\ m_2 g - F_{\mathrm{T}} = -m_2 a \end{cases}$$

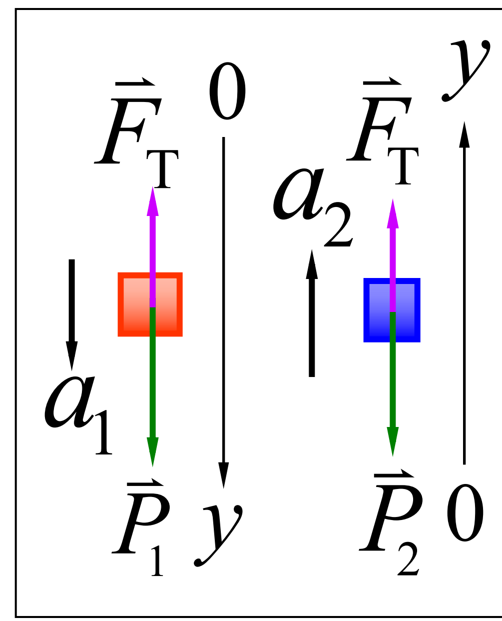
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_{\mathrm{T}} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

（2）若将此装置置于电梯顶部，当电梯以加速度 $\vec{a}$ 相对地面向上运动时，求两物体相对电梯的加速度和绳的张力.



解 以地面为参考系

设两物体相对于地面的加速度分别为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，且相对电梯的加速度为 $\vec{a}_{\mathrm{r}}$



$$\begin{cases} m_1 g - F_{\mathrm{T}} = m_1 a_1 \\ a_1 = a_{\mathrm{r}} - a \\ -m_2 g + F_{\mathrm{T}} = m_2 a_2 \\ a_2 = a_{\mathrm{r}} + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\mathrm{r}} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \\ F_{\mathrm{T}} = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \end{cases}$$

若电梯以相同的加速度下降，结果又如何？