2023 年秋统计学习题 06

截止日期：2023.12.03

1. 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\theta, \theta)$，其中 $\theta > 0$ 为参数.
   (a). 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$.
   (b). 求 $\hat{\theta}$ 的渐进方差.（提示：$\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta} - \theta_0)$ 近似服从标准正态分布. 因此，$\hat{\theta}$ 的渐进方差为 $\frac{1}{nI(\theta)}$）.
2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自几何分布的样本，用因子分解定理证明 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是充分统计量.
3. 设 X 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本. $|X|$ 是否为充分统计量?
4. 设 X, Y 为期望有限的随机变量，证明

$$\min_{g(x)} \mathbb{E}(Y - g(X))^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2,$$

   其中 $g(x)$ 取遍所有的可测函数. $\mathbb{E}(Y|X)$ 有时被称为 Y 在 X 上的回归，为给定条件 X 下，Y 的最好的预测.
5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 分布. 设 $\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值与样本方差.
   (a). 求证 $\overline{X}$ 是 λ 的 UMVUE.
   (b). 证明 $\mathbb{E}(S^2|\overline{X}) = \overline{X}$.
   (c). 证明 $\operatorname{Var} S^2 > \operatorname{Var} \overline{X}$.