

第四章 一阶逻辑的基本概念

① 引言

● 命题逻辑的局限性

原子命题是命题逻辑研究的基本单位,没有对原子的内部结构及其相互之间的逻辑关系进行分析,这样就无法处理一些简单而又常见的推理问题。

例如: 凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。这在数学上是对的。但是却无法用命题逻辑证明。

P: 偶数都能被 2 整除。

Q: 6 是偶数。

R: 所以 6 能被 2 整除。

$(P \wedge Q) \Rightarrow R$ 不是重言式。

● 一阶逻辑所研究的内容

克服命题逻辑的局限性,将简单命题再细分,分析出个体词,谓词和量词,以期达到表达出个体与总体的内在联系和数量关系。

② 一阶逻辑命题符号化

● 三个基本要素: 个体词, 谓词和量词。

(1) **个体词**: 研究对象中独立存在的具体或抽象的个体。

例如: (a) 命题: 李明是一个学生。 个体词: 李明。

(b) 命题：5 大于 2。 个体词：5, 2。

(c) 命题： x 是有理数。个体词： x 。

注 1：个体词一般是充当主语的名词或代词。

- **个体常项(元)：**具体或特定的个体词。一般用小写字母 a, b, c, \dots 表示。

- **个体变项(元)：**抽象的或泛指个体词。一般用小写字母 x, y, z, \dots 表示。

- **个体域：**个体变项的取值范围。

- **全总个体域：**宇宙间一切事物。

(2) 谓词：刻划个体词的性质或个体词之间的关系的词。常用大写字母 F, G, H 等表示。

例如：(a) 命题： π 是无理数。 谓词：“ \dots 是无理数”，记为 F 。

命题符号化： $F(\pi)$ 。

(b) 命题：李明是一个学生。谓词：“ \dots 是一个学生”，记为 G 。

命题符号化： $G(a)$ ，其中 a ：李明。

(c) 命题：5 大于 2。谓词：“ \dots 大于 \dots ”，记为 H 。

命题符号化： $H(a, b)$ ，其中 a : 5, b : 2。

- **谓词常项：**具体性质或关系的谓词。

例如上面的 F, G, H 。

- **谓词变项**：抽象或泛指的性质或关系的谓词。

例如：“ \cdots 具有性质 P ”。

- **$n(\geq 1)$ 元谓词**：含有 n 个个体变项 x_1, x_2, \cdots, x_n 的谓词，记为

$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 。

- **0 元谓词**：不含有个体变项的谓词。

例如： $F(\pi), F(a, b)$ 。

注 2： n 元谓词是以个体域为定义域，以 $\{0, 1\}$ 为值域的 n 元函数。

问题： n 元谓词是命题吗？

答：一般不是。

(a) 当 F, G, H 为谓词常项时，0 元谓词是命题。反之，任何命题均可以表示成 0 元谓词。

(b) 当 F 为谓词常项且个体常项取代 x_1, x_2, \cdots, x_n 时，

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是命题。

例 1：将下列命题用 0 元谓词符号化，并讨论他们的真值。

(a) 2 是素数且是偶数。

解：设 $A(x)$ ： x 是素数；

$B(x)$ ： x 是偶数；

则命题表示为： $A(2) \wedge B(2)$ 。命题为真。

(b) 如果 2 大于 3，则 2 大于 4。

解： 设 $L(x, y)$: x 大于 y ;

则命题表示为： $L(2,3) \Rightarrow L(2,4)$ 。命题为真。

(3) 量词：表示数量的词。

(i) **全称量词：**“ \forall ”

- 对应日常语言中的“一切的”，“所有的”，“每一个”，“任意的”，“凡”，“都”等。
- $\forall x, F(x)$: 所有的 x 都有性质 F 。

(ii) **存在量词：**“ \exists ”

- 对应日常语言中的“存在”，“有一个”，“有的”等。
- $\exists y, G(y)$: 存在 y 有性质 G 。

注 3： $\forall x, F(x)$ 和 $\exists y, G(y)$ 都是命题。

例 2：将下列命题符号化，并讨论他们的真值。

(a) 对于任意的实数 x ，均有 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 。

(b) 对于任意的自然数 x ，均有 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 。

(c) 存在实数 x ，使得 $x+5=3$ 。

(d) 存在自然数 x ，使得 $x+5=3$ 。

例 3: 用符号表示句子：有些鸟不会飞。并用符号和文字分别表示这个语句的否定。

注 4: (i) 在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不一样。
(ii) 如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域。

例 4: 在个体域分别限制为 (a) $D_1 = \{\text{全体人类}\}$, (b) $D_2 = \{\text{个体全部}\}$ 时将下列命题符号化。

凡人都呼吸。

注 5: 当多个量词出现时，它们的顺序不能随意换。

例如： $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x+y=0)$ 。真命题。

$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x+y=0)$ 。假命题。

现在回到这章的开头：凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。它可命题符号化为

$$\left(\forall x (F(x) \Rightarrow G(x)) \right) \wedge F(6) \Rightarrow G(6)$$

其中 $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 能被 2 整除。下一章可以证明它是永真式。