第四章 一阶逻辑的基本概念

① 引言

● 命题逻辑的局限性

原子命题是命题逻辑研究的基本单位，没有对原子的内部结构及其相互之间的逻辑关系进行分析，这样就无法处理一些简单而又常见的推理问题。

例如：凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。这在数学上是对的。但是却无法用命题逻辑证明。

P: 偶数都能被 2 整除。

Q: 6 是偶数。

R: 6 能被 2 整除。

$(P\wedge Q)\Rightarrow R$ 不是重言式。

● 一阶逻辑所研究的内容

克服命题逻辑的局限性，将简单命题再细分，分析出个体词，谓词和量词，以期达到表达出个体与总体的内在联系和数量关系。

② 一阶逻辑命题符号化

● **三个基本要素：**个体词，谓词和量词。

(1) **个体词：**研究对象中独立存在的具体或抽象的个体。

例如：(a) 命题：李明是一个学生。 个体词：李明。

(b) 命题：5 大于 2。　个体词：5，2。

(c) 命题：x 是有理数。个体词：x。

注 1：个体词一般是充当主语的名词或代词。

- 个体常项(元)：具体或特定的个体词。一般用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示。
- 个体变项(元)：抽象的或泛指的个体词。一般用小写字母 $x, y, z, \cdots$ 表示。
- 个体域：个体变项的取值范围。
- 全总个体域：宇宙间一切事物。

(2) 谓词：刻划个体词的性质或个体词之间的关系的词。常用大写字母 F, G, H 等表示。

例如：(a) 命题：π 是无理数。 谓词：“…是无理数”，记为 F。

命题符号化：F(π)。

(b) 命题：李明是一个学生。谓词：“…是一个学生”，记为 G。

命题符号化：G(a)，其中 a：李明。

(c) 命题：5 大于 2。谓词：“…大于…”，记为 H。

命题符号化：H(a, b)，其中 a: 5, b: 2。

- 谓词常项：具体性质或关系的谓词。

例如上面的 F, G, H。

- 谓词变项：抽象或泛指的性质或关系的谓词。

  例如：“…具有性质 P”。

- $n(\geqslant 1)$元谓词：含有 n 个个体变项 x_1，x_2，…，x_n 的谓词，记为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

- 0 元谓词：只含有个体常项的谓词。

  例如：上面的 $F(\pi)$，$F(a, b)$。

注 2： n 元谓词是以个体域为定义域，以 $\{0, 1\}$ 为值域的 n 元函数。

问题：n 元谓词是命题吗？ （n 元谓词 ＝ 谓词 ＋ 个体）

答：一般不是。

(a) 当 F,G,H 为谓词常项时，0 元谓词是命题。反之，任何命题均可以表示成 0 元谓词。

(b) 当 F 为谓词常项且个体常项取代 x_1，x_2，…，x_n 时，

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是命题。

例 1： 将下列命题用 0 元谓词符号化，并讨论他们的真值。

（a）2 是素数且是偶数。

解： 设 $A(x)$：x 是素数；

$B(x)$：x 是偶数；

则命题表示为： $A(2) \wedge B(2)$。命题为真。

（b）如果 2 大于 3，则 2 大于 4。

解： 设 $L(x, y)$：x 大于 y；

则命题表示为：$L(2,3) \Rightarrow L(2, 4)$。命题为真。

(3) 量词： 表示数量的词。

(i) 全称量词：“$\forall$”

- 对应日常语言中的“一切的”,“所有的”,“每一个”,“任意的”，“凡”，“都” 等。
- $\forall x$，$F(x)$：所有的 x 都有性质 F。

(ii) 存在量词：“$\exists$”

- 对应日常语言中的“存在”，“有一个”，“有的” 等。
- $\exists y$，$G(y)$：存在 y 有性质 G。

注 3： $\forall x$，$F(x)$ 和 $\exists y$，$G(y)$ 都是命题。

例 2： 将下列命题符号化，并讨论他们的真值。

（a）对于任意的实数 x，均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$。

（b）对于任意的自然数 x，均有 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$。

（c）存在实数 x，使得 $x+5=3$。

（d）存在自然数 x，使得 $x+5=3$。

例 3： 用符号表示句子：有些鸟不会飞。并用符号和文字分别表示这个语句的否定。

注 4：（i）在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不一样。

（ii） 如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域。

例 4： 在个体域分别限制为（a）$D_1 = \{$全体人类$\}$，（b）$D_2 = \{$个体全部$\}$时将下列命题符号化。

凡人都呼吸。

注 5： 当多个量词出现时，它们的顺序不能随意换。

例如：$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x+y=0)$。真命题。

$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x+y=0)$。假命题。

现在回到这章的开头：凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。它可命题符号化为

$$\left(\forall x\ \left(F(x) \Rightarrow G(x)\right)\right) \wedge F(6) \Rightarrow G(6)$$

其中 F(x): x 是偶数，G(x): x 能被 2 整除。下一章可以证明它是永真式。