4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（一）重节点插值、泰勒插值：

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_1, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

同理 $$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f''(x_0)}{2!} = f[x_0, x_0, x_0]$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_n \to x_0}} f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = f[\underbrace{x_0, \cdots x_0}_{n+1}]$$

重节点均差

在牛顿插值中令 $x_1, \cdots, x_n \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \underline{R_n(x)}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ 泰勒公式

（定义：埃尔米特插值）：插值导数的插值公式称为 Hermite 插值

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：$f(x_0)$　$f(x_1)$　$f(x_2)$，$f'(x_1)$

（a）问题描述：找 $P \in P_3$. 使 $P(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,2$. $P'(x_1)=f'(x_1)$ Hermite

x_0　x_1　x_2

（b）构造：

(1) 插 $f(x_i)$　$i=0,1,2$

(2) 插 $f'(x_1)$

$$P_n = \underline{f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)} + A\,\underline{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

A. $P_n'(x_1)=f'(x_1)$ 求出

$$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：

（c）构造（重节点牛顿插值）：

f 在 x_0, x_1, x_2, x_1 牛插值

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

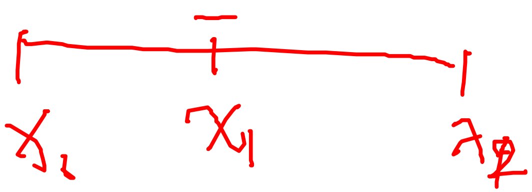
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_1](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$f[x_1, x_1] = f'(x_1)$$

$$R(x) = f[x, x_0, x_1, x_2, x_1](x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

可证 P 满足要求

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$



4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（二）典型H插值一：

（d）误差：

毛求

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（三）典型H插值二：　x_k　x_{k+1}，求 $H_3(x)\in P_3$ 使

（a）问题描述：

x_k —— x_{k+1}

$H_3(x_k)=f(x_k)=y_k$ 和 $H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1})=y_{k+1}$

$H_3'(x_k)=f'(x_k)=m_k$　　$H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})=m_{k+1}$

（b）构造（基函数法）：

$$H_3(x)=\alpha_k(x)y_k+\alpha_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$$

基底

其中 α_k、α_{k+1}、β_k、β_{k+1} 三次多项式 满足

$$\begin{cases}
\alpha_k(x_k)=1 & \alpha_k(x_{k+1})=0, & \alpha_k'(x_k)=\alpha_k'(x_{k+1})=0\\
\alpha_{k+1}(x_k)=0 & \alpha_{k+1}(x_{k+1})=1 & \alpha_{k+1}'(x_k)=\alpha_{k+1}'(x_{k+1})=0\\
\beta_k(x_k)=\beta_k(x_{k+1})=0 & \beta_k'(x_k)=1 & \beta_k'(x_{k+1})=0\\
\beta_{k+1}(x_k)=\beta_{k+1}(x_{k+1})=0 & \beta_k'(x_k)=0 & \beta_{k+1}'(x_{k+1})=1
\end{cases}$$

$$\alpha_k(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$　a,b 待定　$a=-\dfrac{2}{x_k-x_{k+1}}$，$b=1+\dfrac{2x_k}{x_k-x_{k+1}}$

$$\alpha_k(x)=\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$$

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（三）典型H插值二：

同理：$\alpha_{k+1}(x)=\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$

$\beta_k=(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2$ $\beta_{k+1}=(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$

可知 $H_3(x)$ 满足插值条件

作业 13 15

（c）误差估计：$R(x)=f(x)-H_3(x)$

$R(x)=K(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$

$\varphi(x)=0$ $\varphi'(x_k)=\varphi(x_k)=0$ $\varphi'(x_{k+1})=\varphi(x_{k+1})=0$

x_k ξ_1 x ξ_2 x_{k+1} $\varphi'(t)$ x_k,ξ_1,ξ_2,x_{k+1} 4个0点

$\varphi^{(4)}(\xi)=0$

$f^{(4)}(\xi)-K(x)4!=0$

$K(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

4. 埃尔米特（Hermite）插值：

（四）推广：

不作要求

$x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_n$

$f(x_0) \quad f(x_1) \quad \cdots \quad f(x_n)$

$f'(x_0) \quad f'(x_1) \quad \cdots \quad f'(x_n)$

找 $H_{2n+1}(x) \in P_{2n+1}$ 使

$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ $\quad i=0,\cdots,n$

$H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$

?

5. 分段低次插值（重要）：

（一）动机与龙格现象：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

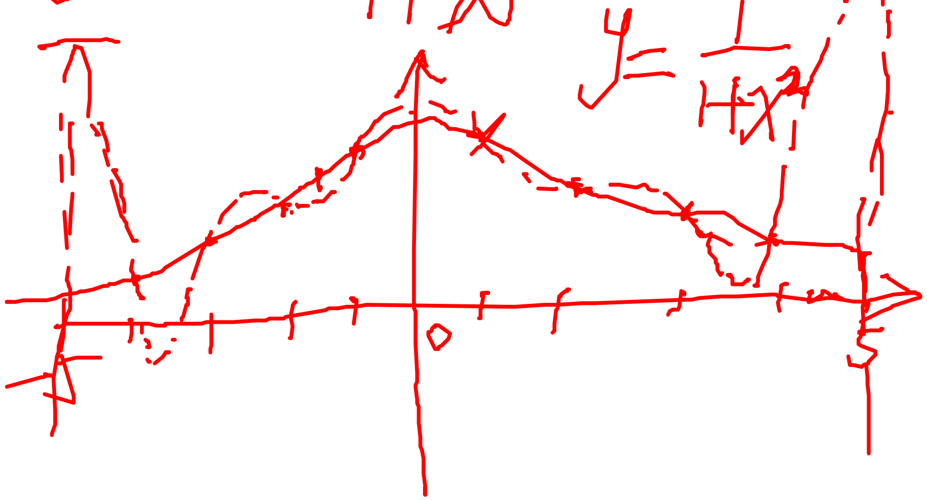
$$(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

n很大时 $f^{(n+1)}(\xi)$ 可能很大

$x_k = -5, -4 \cdots 0\ 1, 2 \cdots 5$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

11个点 L插值



$L_{10}(x)$

高阶多项式

节点精确

但其他点误差巨大

5. 分段低次插值（重要）：

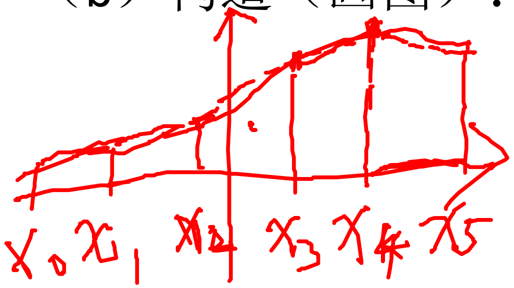
（二）分段线性插值： $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

（a）问题描述： $y_i = f(x_i)$ $h = \max\limits_{i=0,\cdots,n-1} |x_{i+1} - x_i|$

找 $I_h(x)$ 使 ① $I_h(x_k) = y_k$ ② $[x_k, x_{k+1}]$ 线性函数

$k = 0, \cdots, n,$

（b）构造（画图）：



$$I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, \cdots, n-1$

定理：$f \in C[a,b]$ 则 $I_h(x)$ 也是连续，且

（c）误差估计：$\max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - I_h(x)| \le \max\limits_{0 \le k \le n} \max\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f(x) - I_h(x)|$

$$\le \max_{0 \le k \le n-1} \frac{f''(\xi_k)}{2!} (x - x_k)(x - x_{k+1}) \le \max_{0 \le k \le n-1} M_2 \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{4}$$

$$\le \frac{M_2}{8} h^2$$

$O(h^2)$

5. 分段低次插值（重要）：

（三）分段三次埃尔米特插值：

$a=x_0\le x_1\cdots\le x_n=b$

$f_k=f'(x_k)$. $m_k=f(x_k)$

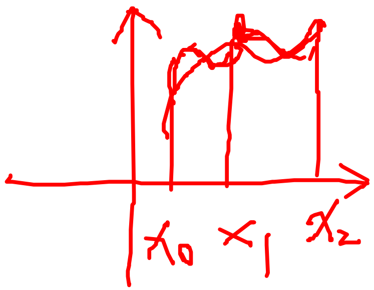
（a）问题描述：

找 $H_n(x)$ 满足 (1) $H_n(x_k)=m_k$ $H_n'(x_k)=f_k=f'(x_k)$

"11.27回来" (2) $H_n(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 三次多项式

（b）构造（画图）：

$$\begin{cases} H_n(x)=\alpha_k(x)m_k+\alpha_{k+1}(x)m_{k+1}+\beta_k(x)f_k+\beta_{k+1}(x)f_{k+1} \\ x\in[x_k,x_{k+1}] \qquad k=0,\cdots,n-1 \end{cases}$$



定理：$H_n(x)\in C^1[a,b]$（导数连续）

且 $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-H_n(x)|=\max\limits_{0\le k\le n-1}\max\limits_{x_k\le x\le x_{k+1}}|f(x)-H_n(x)|$

（c）误差估计：

$$\le \max_{0\le k\le n-1}\frac{f^{(4)}(\xi_k)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2}{24}\le\frac{M_4}{24}\frac{(x_{k+1}-x_k)^4}{16}$$

$$\le\frac{M_4}{384}h^4 \qquad O(h^4)$$

6. 三次样条插值：

（一）三次样条函数：

（a）定义与问题描述：

$a=x_0<\cdots<x_n=b$ 若 $S(x)$ 满足

1) $S(x)\in C^2[a,b]$ 2) 在每个 $[x_j,x_{j+1}]$ 三次多项式，称 $S(x)$ 是三次样条函数 spline

汽车外型 "计算几何" 若函数 $S(x)$ 是一个样条，且满足 $S(x_i)=f(x_i)$，称 $S(x)$ 三次样条插值函数

（b）自由度分析：

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_{n-1} \quad x_n$

$4n$ 个未知系数

$x_1,\cdots,x_{n-1}$ C_0 C_1 C_2 $3n-3$ 条件

$n+1$ 条件 } $4n-2$

$S(x_i)=f(x_i)$

边界条件

(1) $S'(x_0)=f_0'$ $S'(x_n)=f_n'$ 第一类

(2) $S''(x_0)=f_0''$ $S''(x_n)=f_n''$ 第二类

(3) $S(x_0+0)=S(x_n-0)$ $S'=S'$ $S''=S''$ $(y_0=y_n)$ 周期

6. 三次样条插值：

（二）构造：$S''(x_j)=M_j\ (j=0,\cdots,n)$ M_j 未知。

S'' 在 $[x_j,x_{j+1}]$ 是一次函数 $S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}$

$h_j=x_{j+1}-x_j$

S'' 二次不定积分 积分常数由 $S(x_j)=y_j$ $S(x_{j+1})=y_{j+1}$

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+\left(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+\left(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j}\qquad j=0,\cdots,n-1$$

插值 C_2 ✓ C_0 ✓ $n+1+n-1+n-1=3n-1$

$$S'(x)=-M_j\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j$$

$$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)\Rightarrow\cdots\cdots$$

6. 三次样条插值：

（二）构造（续）：

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j} \quad \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j} \quad d_j = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

$j = 1, 2, \dots, n-1$

第一类边界

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_0}\left(f[x_0, x_1] - f_0'\right) \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}\left(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]\right) \end{cases}$$

$\lambda_0 = 1$, $d_0 =$ $\mu_n = 1$, $d_n =$

$n+1$, $n+1$

6. 三次样条插值：

（二）构造（再续）：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

"三弯矩方程"

第二类边界 $M_0 = f_0''$ $M_n = f_n''$

故 $\mu_0 = \lambda_0 = 0$ $d_0 = 2f_0''$ $d_n = 2f_n''$

三对角矩阵

6. 三次样条插值：

（三）误差估计：

定理：$f \in C^4[a,b]$　$S(x)$ 满足第一，二边界

令 $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} h_i$　$h_i = x_{i+1} - x_i$ 则

$$\max_{a \le x \le b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \le C_k M_4 h^{4-k} \quad k = 0, 1, 2.$$

$$C_0 = \frac{5}{384} \quad C_1 = \frac{1}{24} \quad C_2 = \frac{3}{8}$$

$$M_4 = \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$$

作业 P49

~~P72~~

17. 20(1)

21(1)

$S(x) \to f(x)$　$O(h^4)$

$S'(x) \to f'(x)$　$O(h^3)$

$S''(x) \to f''(x)$　$O(h^2)$