第十章习题解答

4.设V是一个线性空间，$f_1, f_2, \dots, f_s$是 V^* 中非零向量，试证：$\exists\,\alpha \in V$, 使 $f_i(\alpha) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$.

证明. 因$f_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$，$V_i = \{\alpha \in V | f_i(\alpha) = 0\}$是$V$的真子空间. 由第六章补充习题 5 知存在$\beta \in V$，但$\beta \notin V_i$，故$f_i(\beta) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$.

5. 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$是线性空间 V 中的非零向量，试证存在$f \in V^*$使

$$f(\alpha_i) \neq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$$

证明. 因为V是数域F上一个线性空间，V^*是其对偶空间，若取定 V

中一个非零向量α，则可定义V^*的一个线性函数α^{**}如下：

$$\alpha^{**}(f) = f(\alpha)\ (f \in V^*)$$

且α^{**}是V^*的对偶空间$(V^*)^*$中的一个元素，于是，V 到其对偶空间

的对偶空间$(V^*)^*$的映射

$$\alpha \to \alpha^{**}$$

是一个同构映射，又因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$是 V 中的非零向量，所以

$\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**}, \cdots, \alpha_s^{**}$是对偶空间$V^*$的对偶空间$(V^*)^*$中的非零向量，由

上题知$\exists f \in V^*$使$f(\alpha_i) = \alpha_s^{**}(f) \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, s)$

3. 设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是线性空间 V 的一组基，$f_1, f_2, f_3$是它的对偶基，令

$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$，$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$，$\alpha_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$，

试证：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 V 的一组基，并求它的对偶基.

证明. 设

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)A$$

由已知，得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为$|A| \neq 0$，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 V 的一组基.

设$\boldsymbol{g_1, g_2, g_3}$是$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$的对偶基，则

$$(\boldsymbol{g_1, g_2, g_3}) = (\boldsymbol{f_1, f_2, f_3})(\boldsymbol{A^T})^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{f_1, f_2, f_3})\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{g_1 = f_2 - f_3}$$

$$\boldsymbol{g_2 = f_1 - f_2 + f_3}$$

$$\boldsymbol{g_3 = -f_1 + 2f_2 - f_3}$$

6. 设 V$=F[x]_3$, 对$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$, 定义

$$f_1(\mathrm{p}(\mathrm{x}))=\int_0^1 p(x)dx$$

$$f_2(\mathrm{p}(\mathrm{x}))=\int_0^2 p(x)dx$$

$$f_3(\mathrm{p}(\mathrm{x}))=\int_0^{-1} p(x)dx$$

试f_1,f_2,f_3都 V 上线性函数，并找出 V 的一组基$p_1(\mathrm{x})$，$p_2(\mathrm{x})$，$p_3(\mathrm{x})$

使 f_1,f_2,f_3是它的对偶基。

证明. 先证f_1,f_2,f_3是V上线性函数, 即, $f_i\in V^*$. $\forall\ g(x),h(x)\in V$,

$k\in \mathrm{P}$, 由定义有

$$f_1(kg(x)+h(x))=\int_0^1(kg(x)+h(x))dx$$

$$=k\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1 h(x)dx$$

$$=f_1(kg(x))+f_1(h(x))$$

同理可证$f_2, f_3 \in V^*$.

再设$P_1(x), P_2(x), P_3(x)$为V的一组基，且f_1, f_2, f_3是它的对偶基. 若记

$$P_1(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

则由定义可得

$$f_1(\mathrm{p}(\mathrm{x})) = \int_0^1 p(x)dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 1$$

$$f_2(\mathrm{p}(\mathrm{x})) = \int_0^2 p(x)dx = 2c_0 + 2c_1 + \frac{8}{3}c_2 = 0$$

$$f_3(\mathrm{p}(\mathrm{x})) = \int_0^{-1} p(x)dx = c_0 + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2 = 0$$

解此方程组得

$$c_0 = c_1 = 1, c_2 = -\frac{2}{3}.$$

故

$$p_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^2$$

同理可得

$$p_2(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2$$

$$p_3(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2.$$

7. 设V是n维线性空间，它的内积为(α, β)，对V中确定的向量α，定义 V 上的一个函数α^*：

$$\alpha^*(\beta) = (\alpha, \beta)$$

1) 证明α^*是 V 上的线性函数

2) 证明 V 到 V^* 的映射是 V 到 V^* 的一个同构映射（在这个同构下，欧氏空间可看成自身的对偶空间）

证明. 1）先证明α^*是V上的线性函数，即$\alpha^*\in V^*$，对$\forall\,\beta_1,\beta_2\in V$，$\forall\,k\in P$，由定义有：

$$\alpha^*(k\beta_1+\beta_2)=(\alpha,k\beta_1+\beta_2)=(\alpha,k\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$$

$$=k(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)=k\alpha^*(\beta_1)+\alpha^*(\beta_2)$$

故α^*是V上的线性函数.

2) 设ε_1，$\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$是 V 的一组标准正交基，且对$\forall\,\beta\in V$, 由定义

$\varepsilon_i^*(\beta)=(\varepsilon_i,\beta)(i=1,2\ldots,n)$知

$$\varepsilon_i^*(\varepsilon_j)=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$$

于是$\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\ldots,\varepsilon_n^*$是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$的对偶基，从而 V 到V^*的映射是V与V^*中两基间的一个双射，因此是一个同构映射. 因V^{**}与V同构，对任一$\alpha^{**}\in V^{**}$，$\beta^*\in V^*$，$\alpha^{**}(\beta^*)=\beta^*(\alpha)=(\alpha,\beta)$，可以认为定义在$V^*$上的内积与定义在V上的内积相同，故作为欧式空间$V$与$V^*$也同构.

8. 设$\mathcal{A}$是数域 F上n维线性空间 V 的一个线性变换.

1）证明，对V线性函数f，$f\mathcal{A}$仍是V上的线性函数；

2）定义V^*到自身的映射$\mathcal{A}^*: f \to f\mathcal{A}$, 证明$\mathcal{A}^*$是$V^*$上的线性变换；

3）设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$f_1,f_2,\dots,f_n$是它的对偶基，并设$\mathcal{A}$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$的矩阵为$A$, 证明：$\mathcal{A}^*$在$f_1,f_2,\dots,f_n$下的矩阵为$A^T$.

证：1) $\forall\ \alpha\in V$, 由定义知$f\mathcal{A}(\alpha)=f(\mathcal{A}(\alpha))$是数域 F中唯一确定的元，$f\mathcal{A}$是V到F的一个映射.

因$f,\mathcal{A}$均保持向量的线性运算，$f\mathcal{A}$亦保持向量的线性运算, 故$f\mathcal{A}$是V上的线性函数.

2）$\forall f \in V^*$, 有$\mathcal{A}^*(f) = f\mathcal{A} \in V^*$, 故$\mathcal{A}^*$是$V^*$上的线性变换.

3）由题设知

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)A, \qquad (1)$$

设

$$\mathcal{A}^*(f_1,f_2,\dots,f_n) = (f_1,f_2,\dots,f_n)B, \qquad (2)$$

其中$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$,且$f_1,f_2,\dots,f_n$是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$的对偶基,

因 $\mathcal{A}^*(f_i) = f_i\mathcal{A}$. 用$f_i$乘(1)式两边, $f_i(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)A$为$A$的第$i$行,

而在(2)中为B的第i列, 故, $a_{ij} = b_{ji}$, $B = A^T$.

9. 设V是数域F上的一个线性空间，$f_1, f_2, \dots, f_n$是V上的n个线性函数，

1) 证明：下列集合

$$W = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0 \ \ (1 \le i \le n)\}$$

是V的一个子空间，W成为线性函数$f_1, f_2, \dots, f_n$的零化子空间；

2）证明：V的任一子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

证明. 1）因为$f_1, f_2, \dots, f_n$是V上的n个线性函数, 且$f_i(0) = 0 \ \ (i = 1, 2, \dots n)$，因而$0 \in W$，即证$W$非空. 易见对向量的线性运算封闭，$W$是$V$的子空间.

2）设W_1是V的任一子空间, 且$\dim(W_1) = m$, 当$m = n$时，只要取f为V的零函数，就有

$$W_1 = V = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0\}$$

所以W_1是f的零化子空间.

当$m < n$时，不妨设$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$为$W_1$的一组基，将其扩充为$V$的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n$，并取这组基的对偶基$f_1, f_2, \dots, f_n$的后$n-m$个线性函数

$f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n$，则$f_i(W_1) = 0, i = m+1, \dots, n.$

另一方面，若$\alpha = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_m\varepsilon_m + c_{m+1}\varepsilon_{m+1} + \cdots c_n\varepsilon_n$ 满足:

$f_i(\alpha) = 0, i = m+1, \dots, n$ ， 则 有 ： $c_i f_i(\varepsilon_i) = c_i = 0$ ， $i = m+1, \dots, n.$

故$\alpha = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_m\varepsilon_m \in W_1$，即

$$W_1 = \{\alpha \in V \mid f_i(\alpha) = 0\ (m+1 \le i \le n)\}$$

为线性函数$f_{m+1}, \dots, f_n$的零化子空间.

11.在F^4中定义一个双线性函数 $f(X,Y)$,对

$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T, Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T \in F^4$有

$$f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$$

1)给定F^4的一组基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0)^T,\ \varepsilon_2=(1,-1,1,0)^T$$

$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1)^T,\ \varepsilon_3=(-1,-1,0,1)^T$$

求$f(X,Y)$在这组基下的度量矩阵;

2) 另取一组基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$且

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

求 $f(X,Y)$在这组基下的度量矩阵.

解. 1）$f(X,Y)$在给定基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}$$

其中$a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j,),i,j=1,2,3,4.$

$f(X,Y)$在给定基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的度量矩阵为

$$\mathbf{B}=T^TAT=\begin{pmatrix} -6 & 46 & 8 & 24 \\ -18 & 26 & 16 & -72 \\ -2 & -38 & 0 & 0 \\ 15 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.设V是复数域上的线性空间，其维数$n\geq 2$, $f(\alpha,\beta)$是V上的一个对称双线性函数,

1）证明V中有非零向量ξ使$f(\xi,\xi)=0$;

2）如果$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则必有线性无关的向量ξ，η满足

$$f(\xi,\eta)=1,$$

$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0$$

证明. 1）设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$为复数域上$n$维线性空间$V$的一组基，$f(\alpha,\beta)$是 V 上的对称双线性函数，关于基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$的度量矩阵$A$为对称矩阵，于是，存在非退化的矩阵$T$，使

$$T^TAT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ (r=\mathrm{r}(A))$$

令 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s)T$

则$f\ (\alpha,\beta)$关于基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$的度量矩阵为$T^TAT$，因此

$\forall\, \xi = X_1\varepsilon_1 + X_2\varepsilon_2 + \cdots + X_n\varepsilon_n,\ \eta = Y_1\varepsilon_1 + Y_2\varepsilon_2 + \cdots + Y_n\varepsilon_n \in \mathrm{V},$

有

$$f(\xi,\eta) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_rY_r \quad {}_r$$

故:当$r < n$时，$\xi = \varepsilon_n$使得$f(\xi,\xi) = 0.$

当$r = n$时，$\xi = i\varepsilon_1 + \varepsilon_2$，就有$f(\xi,\xi) = 1 - 1 = 0.$

2) 如果$f(\alpha,\beta)$是非退化的，则

$$f(\xi,\eta) = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n$$

取 $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2$ 即为所求.

14. 设$f(\alpha,\beta)$是V上对称或反对称的双线性函数，α,β是V中的两个向量，若$f(\alpha,\beta)=0$，则称α,β正交. 再设K是V的一个真子空间，证明：对$\xi\notin K$，必有 $0\neq\eta\in K+L(\xi)$ 使$f(\eta,\alpha)=0$ 对所有$\alpha\in K$都成立.

证明. 1）先证$f(\alpha,\beta)$是对称的双线性函数的情形.

设$\dim(K)=r$，在K中取一基$\alpha_1,\dots,\alpha_r$，并扩充成V的一个基$\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_n$，若$f(\alpha,\beta)$在该基下的度量矩阵为$A$，则存在可逆矩阵$P$使

$P^TAP=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_r,\dots,d_n)$，令

$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r,\dots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_n)P$，则$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}d_i, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，

$1\le i,j\le r$.

若有$d_{i,}=0$，则向量$\varepsilon_i\in K\sqsubset K+L(\xi)$使得$f(\eta,\alpha)=0$ 对所有$\alpha\in K$都成立. 因而, 可设所有的$d_{i,}\neq 0$，$1\le i,j\le r$.

取

$$\eta=\xi-\frac{f(\xi,\varepsilon_1)}{d_1}\varepsilon_1-\frac{f(\xi,\varepsilon_2)}{d_2}\varepsilon_2-\cdots-\frac{f(\xi,\varepsilon_r)}{d_r}\varepsilon_r$$

则$P^{-1}\eta$即为所求.

2）再证$f(\alpha,\beta)$是反对称双线性函数的情形，

首先，若对给定$\xi\notin K$，存在$\beta\in K$，使$f(\xi,\beta)\neq 0$, 则可令$\varepsilon_1=\xi$，$\varepsilon_{-1}=\lambda\beta$，使得

$f(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1})=1$. 将$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1}$扩充为$K+L(\xi)$的一组基：

$$\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\varepsilon_2,\ \varepsilon_{-2},\ldots,\varepsilon_q,\varepsilon_{-q},\eta_1,\ldots,\ \eta_s$$

使

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i, \varepsilon_{-i}) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, q) \\ f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad (i + j \neq 0) \\ f(\alpha, \eta_k) = 0 \quad (\alpha \in k + L(\xi), \; k = 1, q) \end{cases}$$

故而

当 s≠0 时，只要取$\eta = \eta_1$，则对$\forall$ α∈K，恒有$f(\eta, \alpha)=0$;

当 s = 0 时， 只要取 $\eta = \varepsilon_{-1}$ ， 则由 $\xi = \varepsilon_1$， K=L($\varepsilon_{-1}, \varepsilon_2$, $\varepsilon_{-2}, \ldots, \varepsilon_q, \varepsilon_{-q}$)，对$\forall$ α∈K也有$f(\eta, \alpha)=0$;

其次，若对给定的$\xi \notin$ K，及任意$\beta \in$ K，使$f(\xi, \beta)=0$, 则只要取 $\eta = \xi$即可.

15. 设V与$f(\alpha, \beta)$同上题，K 是 V 的一个子空间，令

$$K^{\perp} = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in K\}$$

1)试证$K^{\perp}$是 V 的子空间（$K^{\perp}$称为 K 的正交补）;

2 试证：如果K$\cap K^{\perp}$＝{0},则V＝$K + K^{\perp}$

证明. 1）因为$\forall \beta\in K$，恒有$f(0,\beta)=0$, 所以 $0\in K^{\perp}$，即$K^{\perp}$非空. 易于证明$K^{\perp}$对于向量的线性运算封闭.

2）由于 K 和 $K^{\perp}$ 都是 V 的子空间，知

$$K+K^{\perp}\subseteq V$$

不妨设 K 是 V 的一个真子空间，对任一$\xi\notin K$, 由 14 题知存在

$$0\neq\eta\in K+L(\xi)$$

使得 $f(\eta,\alpha)=0\ (\forall\alpha\in K)$, 于是$\eta\in K^{\perp}$. 又因为

$$\eta=\beta+k\xi\quad(\beta\in K,\ k\in F)$$

显然$k\neq 0$, 否则

$$\eta=\beta\in K\cap K^{\perp}=0$$

从而$\eta=\beta=0$，这是不可能的. 因此有

$$\xi=-\frac{1}{k}\beta+\frac{1}{k}\eta\in K+K^{\perp}$$

故 $V\subseteq K+K^{\perp}$，即证.

16．设V, $f(\alpha,\beta)$与K同上题， 并设$f(\alpha,\beta)$限制在K上非退化, 试证$V=K+K^{\perp}$；并证明$f(\alpha,\beta)$在$K^{\perp}$上非退化的充要条件是$f(\alpha,\beta)$在V上是非退化的.

证明. 由上题, 只需证$K\cap K^{\perp}=\{0\}$即可. 若有$0\neq\alpha\in K\cap K^{\perp}$，则对任一$\beta\in K$，$f(\alpha,\beta)=0$. 因$f(\alpha,\beta)$限制在$K$上非退化, 应有$\alpha=0$, 矛盾. 故$K\cap K^{\perp}=\{0\}$，$V=K+K^{\perp}$.

必要性, 若 $f(\alpha,\beta)$ 在 $K^{\perp}$ 上非退化， 同上可证 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$, 故$V=K+K^{\perp}$，若$\forall\beta\in V$，有$f(\alpha,\beta)=0$，写$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in K,\alpha_2\in K^{\perp}$，取$\beta\in K^{\perp}$，则$f(\alpha_2,\beta)=0$. 因$f(\alpha,\beta)$在$K^{\perp}$上非退化，必有$\alpha_2=0$；类似可证$\alpha_1=0$，即$\alpha=0$. 故$f(\alpha,\beta)$在V上非退化.

充分性证明与必要性类似.

17.设$f(\alpha,\beta)$是n维线性空间V上的非退化对称双线性函数，对V中的一个元素α，定义V^*中的一个元素α^*：

$$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta)\ \ (\beta\in V).$$

试证：1)V到V^*的映射:$\alpha\to\alpha^*$是一个同构映射;

2)对V的每组基ε_1，$\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$，有V的唯一的一组基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\dots,\varepsilon_n'$，使$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=\delta_{ij}$

3)如果V是复数域上的n维线性空间，则有一组基$\eta_1',\eta_2',\dots,\eta_n'$,，使

$$\eta_i=\eta_i'\ \ (i=1,2\dots n)$$

证明. 1) 易于证明映射φ: $\alpha \to \alpha^*$保持向量的加法与数乘运算，现证φ为单射. 若$\varphi(\alpha) = \alpha^* = 0$，即有$f(\alpha,\beta) = 0$，$\forall\beta \in V$，因$f(\alpha,\beta)$在V上非退化，必有$\alpha = 0$， 故$\varphi$为单射.

另一方面，当固定向量α，V上的对称双线性函数$f(\alpha,\beta)(\beta \in V)$就是一个定义在V上的线性函数，可写成$\alpha^*(\beta)$，因而$\varphi$是满射.

2）对称双线性函数$f(\alpha,\beta)$在V中任一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$下的度量矩阵A中元素$a_{ij} = f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$.现设 V^*中的线性函数$f_1,f_2,\dots,f_n$是 V 的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$的对偶基，于是存在 V 的唯一一个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$(应用 1)的结果) 使

$$\alpha_i^*(\beta) = f(\alpha_i,\beta) = f_i(\beta) \qquad (\forall\beta\in V, i = 1,2,\dots n)$$

且

$$\alpha_i^*(\varepsilon_j) = f(\alpha_i,\varepsilon_j) = f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases} = \delta_{ij}$$

另一方面，设有线性关系

$$k_1\alpha_1+k_2\,\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

则

$$0=\mathrm{f}\left(k_1\alpha_1+k_2\,\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,\varepsilon_j\right)$$

$$0=k_1f\left(\alpha_1,\varepsilon_j\right)+k_2f\left(\,\alpha_2,\varepsilon_j\right)+\cdots+k_n(\alpha_n,\varepsilon_j)$$

$$=k_j\qquad (j=1,2,\ldots n).$$

这意味着$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，因而$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$为 V 的一组基。

只要令α_i=ε_i' $(\mathrm{i}=1,2,\ldots n)$即证.

3）因为 V 是复数域上的n维线性空间，$f(\alpha,\beta)$是n维线性空间V上的非退化对称双线性函数，所以存在 V 的一组基$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$使$f(\alpha,\beta)$在这组基下的度量矩阵为单位矩阵．再由 2)即可知$\eta_i=\eta_i'$ $(i=1,2\dots n)$.