

## 第五章 一阶逻辑等值演算与推理

### ① 一阶逻辑等值式

定义 1: 设  $A$  和  $B$  是一阶逻辑中任意两个公式, 若  $A \Leftrightarrow B$  是永真式, 则称  $A$  和  $B$  是等值的, 记为  $A \equiv B$ 。

下面给出一阶逻辑中的一些基本而重要的等值式:

#### (1) 消去量词等值式

设个体域为  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 则有

$$\forall x A(x) \equiv A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\exists x A(x) \equiv A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

#### (2) 量词否定等值式

$$\sim(\forall x A(x)) \equiv \exists x \sim A(x)$$

$$\sim(\exists x A(x)) \equiv \forall x \sim A(x)$$

#### (3) 量词作用域的收缩与扩张等值式

$$(a) \forall x (A(x) \vee B) \equiv \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x (A(x) \wedge B) \equiv \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B) \equiv \exists x A(x) \Rightarrow B$$

$$\forall x (B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow \forall x A(x)$$

$$(b) \exists x (A(x) \vee B) \equiv \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x (A(x) \wedge B) \equiv \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x (A(x) \Rightarrow B) \equiv \forall x A(x) \Rightarrow B$$

$$\exists x (B \Rightarrow A(x)) \equiv B \Rightarrow \exists x A(x)$$

#### (4) 量词分配等值式

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

**注 1:** 量词分配等值式中,  $\forall$ 对 $\vee$ 和 $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律。

#### (5) 同种量词顺序置换等值式

$$\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$$

$$\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$$

### ② 基本规则

#### ● 置换规则

若  $A \equiv B$ , 则  $\phi(A) \equiv \phi(B)$ , 其中  $\phi(A)$  是含  $A$  的公式。

#### ● 换名规则

设  $x, y, z \in D$ , 则

$$\forall x F(x, y, z) \equiv \forall t F(t, y, z)$$

$$\exists y F(x, y, z) \equiv \exists t F(x, t, z)$$

#### ● 代替规则

设  $x, y, z \in D$ , 则

$$\forall x F(x, y, z) \equiv \forall x F(x, t, z)$$

$$\exists y F(x, y, z) \equiv \exists y F(x, y, t)$$

### ③ 等值演算

**例 1:** 设个体域为  $D = \{a, b, c\}$ , 将下面各公式的量词消去:

- (1)  $\forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$ ;
- (2)  $\forall x(F(x) \vee \exists y G(y))$ ;
- (3)  $\exists x \forall y F(x, y)$ 。

**例 2:** 证明下列各等值式

- (1)  $\sim \exists x(M(x) \wedge F(x)) \equiv \forall x(M(x) \Rightarrow \sim F(x))$ ;
- (2)  $\sim \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \Rightarrow H(x, y)) \equiv \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \sim H(x, y))$ ;
- (3)  $\sim \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y)) \equiv \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \Rightarrow \sim L(x, y))$ 。

### ④ 一阶逻辑前束范式

设  $B$  为不含量词的公式, 则

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B$$

称为前束范式, 其中  $Q_i (1 \leq i \leq k)$  为  $\forall$  或  $\exists$ 。

例如:  $\forall x \exists y (F(x, y) \Rightarrow G(x, y)), \exists x \forall y \forall z (F(x, y, z) \wedge G(x, y))$ 。

但  $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x, y)$  不是。

**定理 1:** 任何一个一阶逻辑公式均和一个前束范式等值。

### ⑤ 一阶逻辑的推理

在一阶逻辑中, 从前提  $A_1, A_2, \cdots, A_k$  出发推出结论  $B$  的推理的形

式结构仍然采用如下形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B。$$

若上式是永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶逻辑中判断推理是否正确，也归结为判断上式是否为永真式。

### (一) 推理定律的来源

#### i. 命题逻辑推理定律的代换实例：

例如：  $A \wedge B \Rightarrow A: \forall x F(x) \wedge \forall y G(y) \Rightarrow \forall x F(x)；$

$$A \Rightarrow A \vee B: \forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \exists y G(y)。$$

#### ii. 由基本等值式生成的推理定律

例如：  $\forall x F(x) \Rightarrow \sim \sim \forall x F(x)；$

$$\sim \sim \forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)；$$

$$\sim \forall x F(x) \Rightarrow \exists x \sim F(x)；$$

$$\exists x \sim F(x) \Rightarrow \sim \forall x F(x)。$$

#### iii. 一些常用的重要推理定律

$$(a) \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$(b) \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$(c) \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x))$$

$$(d) \exists x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$$

#### iv. 消去量词和引入量词规则

##### (1) 全称量词消去规则 (记为 $\forall-$ )

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中  $x, y$  是个体域中任意个体变项,  $c$  是个体域中任意个体常项且取代  $x$  的  $y$  应为任意的不在  $A(x)$  中约束出现的个体变项。

例如: 不能由  $\forall x (P(x, z) \vee \exists y Q(x, y))$  得到  $(P(y, z) \vee \exists y Q(y, y))$ 。但可以得到  $(P(c, z) \vee \exists y Q(c, y))$ 。

##### (1) 全称量词引入规则 (记为 $\forall+$ )

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中  $y$  是个体域中任意一个个体变项, 且取代  $y$  的  $x$  不能在  $A(y)$  中约束出现。

##### (3) 存在量词消去规则 (记为 $\exists-$ )

$$\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中  $c$  是使  $A$  为真的个体常项,  $c$  不在  $A(x)$  中出现, 且  $A(x)$  没有其它自由出现的个体变项。

#### (4) 存在量词引入规则 (记为 $\exists+$ )

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)}$$

其中  $c$  是特定的个体常项,  $x$  不在  $A(c)$  中出现。

### (二) 自然推理系统 F

#### 1. 字母表

- (1) 个体常项符号:  $a, b, c, \dots$ 。
- (2) 个体变项符号:  $x, y, z, \dots$ 。
- (3) 谓词符号:  $F, G, H, \dots$ 。
- (4) 函数符号:  $f, g, h, \dots$ 。
- (5) 量词符号:  $\forall, \exists$ 。
- (6) 联接词:  $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 。
- (7) 括号与逗号:  $( ), ,$ 。

#### 2. 合式公式

#### 3. 推理规则

- (1) 前提引入规则
- (2) 结论引入规则
- (3) 置换规则
- (4) 假言推理规则
- (5) 附加规则
- (6) 化简规则

- (7) 取拒式规则
- (8) 假言三段论规则
- (9) 析取三段论规则
- (10) 构造性二难推理规则
- (11) 合引取入规则
- (12)  $\forall$ -规则
- (13)  $\forall$ +规则
- (14)  $\exists$ -规则
- (15)  $\exists$ +规则

**例 3:** 设个体域为  $\mathbb{R}$ ,  $F(x, y)$  为  $x > y$ 。指出在推理系统 F 中, 以  $\forall x \exists y F(x, y)$  为前提推出  $\forall x F(x, c)$  的下述推理证明中的错误。

- |                                   |                 |
|-----------------------------------|-----------------|
| (1) $\forall x \exists y F(x, y)$ | 前提引入            |
| (2) $\exists y F(z, y)$           | (1) $\forall$ - |
| (3) $F(z, c)$                     | (2) $\exists$ - |
| (4) $\forall x F(x, c)$           | (3) $\forall$ + |

**例 4:** 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明。

凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。

**例 5:** 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明。

前提:  $\forall x (F(x) \Rightarrow G(x)), \exists x (F(x) \wedge H(x))$ ;

结论：  $\exists x (G(x) \wedge H(x))$ 。

**例 6：** 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明。

前提：  $\forall x (F(x) \Rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$ ,  $\exists x (F(x) \wedge R(x))$ ；

结论：  $\exists x (F(x) \wedge R(x) \wedge G(x))$ 。