应用随机过程

连续马链定义

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

连续马链的定义

连续时间随机过程 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 是连续马链

1. $X(t)$表示系统在t时刻的状态

2. $X(t)$在集合S中取值，集合S为状态空间，$S=\{0,1,2\cdots\}$

3. $$P\{X(t+s)=j|X(s)=i,X(u)=x(u),0\leq u<s\}$$
$$=P\{X(t+s)=j\mid X(s)=i\}\text{，}\quad s\geq 0,t\geq 0$$
(连续马尔科夫性)

转移概率函数

$P_{ij}(t)$
称为转移概率函数

1

$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}=P_{ij}(t)$ 独立于s (时齐性)

2

- $P_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & otherwise\end{cases}$
- $P_{ij}(t)\geq 0$
- $\sum_{j\in S}P_{ij}(t)=1$

3

$P_{ij}(t+s)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)P_{kj}(s)$ (Chapman-Kolmogorov连续形式)

$P(t)=\{P_{ij}(t)\}$

转移速率

τ_i：在转移到其他状态之前在i状态的逗留时间

T_n：第n次状态转移之后进入某个状态的初始时刻

$Y(T_n)$：在T_n时刻所在的状态

$$P\{\tau_i > s + t | \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$$ （齐次马尔科夫性）

条件概率定义

$$\frac{P\{\tau_i > s+t\}}{P\{\tau_i > s\}} = P\{\tau_i > t\}$$

$$P\{\tau_i > s + t\} = P\{\tau_i > t\}\,P\{\tau_i > s\}$$ （τ_i服从指数分布）

指数分布性质

$$P\{\tau_i > t | Y(T_n) = i\} = e^{-v_i t},\ t \geq 0; n = 0,1,2\ldots$$ （设参数为v_i）

转移速率

情况1

泊松过程的性质 $P_{ii}(h)=P\{X(t+h)=i|X(t)=i\}=1-v_ih+o(h)$

转移速率的定义 $v_i=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-P_{ii}(h)}{h}$

令$q_{ii}=-v_i$

情况2

令$H=\{X(t),0\le t\le T_n\}$

$P\{Y(T_{n+1})=j,T_{n+1}-T_n>t|Y(T_n)=i,H\}=$

$P\{Y(T_{n+1})=j,\tau_i>t|Y(T_n)=i\}=p_{ij}\,e^{-v_it}$ （马尔科夫性）

q_{ij}定义：X从状态i到状态j的转移速率， $q_{ij}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P_{ij}(h)}{h}$

如果$i\ne j,P_{ij}(h)=(v_ip_{ij})h+o(h)$ ➡ $q_{ij}=v_i\,p_{ij}$

无穷小生成元

1 $q_{ii} = -v_i$

2 $q_{ij} = v_i \, p_{ij}$

$$Q = \{q_{ij}\} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ . \\ . \end{array} \begin{bmatrix} -v_0 & q_{01} & q_{02} & . & . \\ q_{10} & -v_1 & q_{12} & . & . \\ q_{20} & q_{21} & -v_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$Qe = 0$, 即行和为0

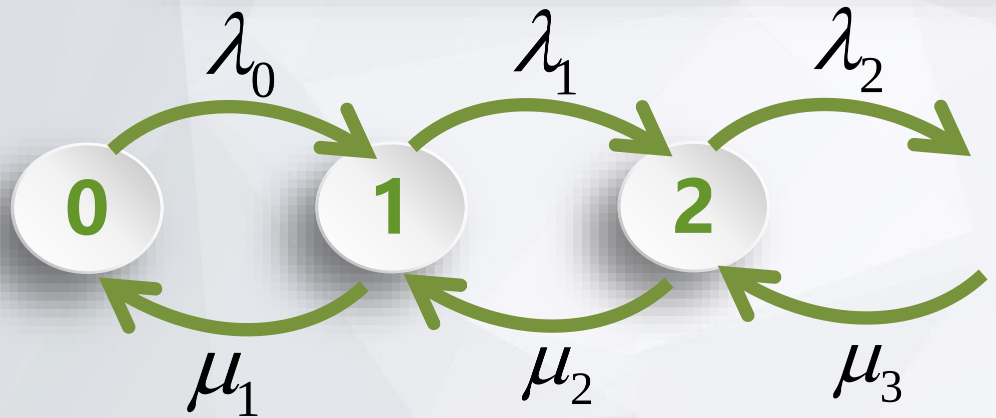
Q矩阵称作无穷小生成元

出生消失过程

如果状态空间$S=\{0,1,\dots\}$，$|i-j|>1$时$q_{ij}=0$，此时连续马链被称为出生消失过程。位于状态i时，转移速率为

$$
\begin{aligned}
q_{i,i+1} &= \lambda_i \quad & i &= 0,1,2\dots \\
q_{i,i-1} &= \mu_i \quad & i &= 1,2,3\dots \\
q_{ij} &= 0 \quad & & \text{otherwise}
\end{aligned}
$$

λ_i被称为出生率，μ_i被称为消失率。



$$
Q=\begin{bmatrix}
-v_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . \\
\mu_1 & -v_1 & \lambda_1 & 0 & . & . \\
0 & \mu_2 & -v_2 & \lambda_2 & 0 & . \\
0 & 0 & \mu_3 & -v_3 & \lambda_3 & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & .
\end{bmatrix}
$$

思考题目

一家理发店有两个理发师，两个等待的位置。顾客以平均每小时五人的速率到达理发店。每个理发师平均每小时服务两个顾客。如果顾客到达理发店发现等待位置已经满员时，他自行离开。假设顾客到达的过程服从泊松分布，理发师的服务时间服从指数分布，并且到达过程与服务时间相互独立。请给出该排队系统的连续马链转移图，以及无穷小生成元矩阵。

谢谢听课

授课教师

赵毅