# 高等代数与几何 B 期末考试题（A）答案

(2020/2021 学年春季学期)

## 一. 填空（每空 1.5 分）

**1.**令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 3 维线性空间 V 的一个基，定义

$$\mathcal{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

则 $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A})=$__2_______, $\mathrm{Ker}\mathcal{A}=$___$L(\alpha_1-\alpha_3)$__________.

2. 令$A$是一$n\times n$可逆矩阵，$\lambda$是$A$的一特征值. 则

$A^2+A^{-1}+2I$必有特征值 _$\lambda^2+\lambda^{-1}+2$____________.

3. 矩阵$\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$的法式为\_\_$\begin{pmatrix}1&&\\&\lambda-2&\\&&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}$__________,

Jordan标准形为 _$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$________.

4. 在 $R^3$ 中，向量 $\alpha=(2,1,1)^T$ 在子空间 $V_1=L(\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,0)^T)$上的内射影为 _ $\frac{3}{2}\beta_1+\beta_2=(\frac{3}{2},1,\frac{3}{2})^T$____________.

**5.**用正交变换化二次型: $2x_1x_2+2x_3x_4$所得标准形为_ $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2$____________________.

**6.**设V是数域 F 上的一个三维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是它的一组基，$f$是V上的一个线性函数，已知

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1, f(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=-1, f(\varepsilon_2+2\varepsilon_3)=1$

则 $f(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3)=$ __3______.

## 二．选择最佳答案（每题 2 分）

7. 设$V_1, V_2$都是$n$维欧式空间$V$的子空间, 且$\dim V_1<\dim V_2$. 下面结论正确的是( D )

(A)$V_1\subset V_2$,　　(B) $\dim(V_1^{\perp}+V_2)>n$,

(C)$V_1^{\perp}\cap V_2\neq\phi$,　(D)$V_1^{\perp}\cap V_2\neq 0$.

8.设V是一个欧式空间，$\mathcal{A}$是V上一个保持任意两个向量距离不变的变换，则( D ).

(A)$\mathcal{A}$是线性变换; (B)$\mathcal{A}$是正交变换; (C)$\mathcal{A}$是对称变换; (D)$\mathcal{A}$可能不是线性变换.

9. 令 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则( B ).

(A) $A$与 $B$ 相似且合同，(B) $A$与 $B$ 合同但不相似，

(C) $A$与 $B$ 相似但不合同，(D) $A$与 $B$ 既不相似又不合同.

10. 令$f$是$R^3$上的一个双线性函数，它在自然基底下的度量矩阵为 $I_3$;又令 $\delta_1=(1,0,0)^T, \delta_2=(1,1,0)^T, \delta_3=(1,1,1)^T$,

则$f$在基$\delta_1,\delta_2,\delta_3$下的度量矩阵为( C ).

(A)$\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&4\end{pmatrix}\right)$; (B) ; $\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$;

(D) $\begin{pmatrix}4&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

**11.** 如果矩阵$A$的特征多项式与最小多项式相同，则(  C  )

(A) $A$可对角化;　　　(B) $A$的 Jordan 标准形只有一个块;

(C) $A$的 Jordan 标准形中对应于每一特征值只有一个块.

## 三. 计算题(每题 5 分)

**12.** 令$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性空间 V 的一个基，$f_1,f_2,f_3$是它的对偶基，$\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对偶基是(用$f_1,f_2,f_3$表示):

解：令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对偶基为$g_1,g_2,g_3$，由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

得 $(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^T$

$$=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=(f_1-f_2,f_2-f_3,f_3)$$

**13.** 1) 求在实数域$\mathbf{R}^3$上定义的双线性函数:

$$f(X,Y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1-x_2y_3-x_3y_2,X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

在基底$\delta_1=(1,0,0)^T,\delta_2=(1,1,0)^T,\delta_3=(1,1,1)^T$下的度量矩阵;

2) 上面定义的双线性函数$f(X,Y)$是否是内积，说明理由.

解. 1) $f(X,Y)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 度量矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

.

2)因$\begin{pmatrix}1&2&2\\2&3&2\\2&2&1\end{pmatrix}$合同于$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 不是正定矩阵, $f(X,Y)$不是内积.

14. 设三阶实对称矩阵$A$的各行元素之和均为3，向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$AX=0$的两个解.

1) 求$A$的特征值与特征向量； 2)求正交矩阵$Q$和对角矩阵$D$，使

$Q^TAQ=D$.

解. 由$A$的各行元素之和均为 3, 易得$A$的一个特征值为 3, 对应的特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)^T$. 而$\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$应是$A$的属于特征值0(二重特征值)的特征向量. 将$\alpha_3$单位化, $\alpha_2,\alpha_1$单位正交化得

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, 有$Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

15.已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

1)确定参数$a,b$及特征向量$\xi$所对应的特征值;

2)矩阵$A$能否对角化？若能，写出$A$相似的对角矩阵；若否，给出$A$的有理标准形.

解.由$(\lambda E-A)\xi=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda-a&-3\\1&-b&\lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$，立得

$\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$. 此时$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$，$\lambda=-1$

为$A$的 3 重特征根，但$r(-E-A)=2$，显然$A$不能对角化.

同时可知$A$的有理标准形只能有一个块，故$A$的有理标准形为

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{pmatrix}.$$

## 四. 综合题(16 题 2 分, 17、18 题 3 分)

16. 设$\mathcal{A}$是$n$维欧式空间的一个正交变换，$V_1$是$\mathcal{A}$－子空间，则$V_1^{\perp}$也是$\mathcal{A}$－子空间.

证明. 设$V=U\oplus U^{\perp}$，U是正交变换$\mathcal{A}$的不变子空间. 任取$\alpha\in U$，因$\mathcal{A}$是可逆映射，且U是$\mathcal{A}$的不变子空间，$\mathcal{A}U=U$, $\alpha$可写成$\mathcal{A}\beta$，$\beta\in U$. 则$\mathcal{A}^{-1}\alpha=\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\beta)=\beta\in U$，即U也是$\mathcal{A}^{-1}$－子空间. 对于$U^{\perp}$中任一元素$\gamma$，$(U,\mathcal{A}\gamma)=(\mathcal{A}^{-1}U,\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\gamma)=(U,\gamma)=0$，即$\mathcal{A}\gamma\in U^{\perp}$. $U^{\perp}$是$\mathcal{A}$－子空间.

17. 设$A\in F^{n\times n}$, 且,

$$V_1=\{X|AX=0\},\ \ V_2=\{X|(A-E)X=0\},$$

求证：$A=A^2 \Leftrightarrow F^n=V_1 \oplus V_2$.

证明. "$\Rightarrow$" 写$A=A^2$为$A(I-A)=0$. 任取$\alpha \in F^n, \alpha=A\alpha+(I-A)\alpha$, 易见：$A\alpha \in V_2, (E-A)\alpha \in V_1$, 即 $F^n=V_1+V_2$. 若$\beta \in V_1 \cap V_2, A\beta=0=(I-A)\beta \Rightarrow \beta=0$, 即$V_1 \cap V_2=0$, $F^n=V_1 \oplus V_2$.

"$\Leftarrow$"因$F^n=V_1+V_2$, 任一$\alpha \in F^n, \alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 其中$\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$. $A\alpha=A\alpha_1+A\alpha_2=A\alpha_2(A\alpha_1=0)$. $(A-I)A\alpha=(A-I)A\alpha_2=0$, 故对中每一向量$\alpha$, $(A-I)A\alpha=0, (A-I)A=0$, $A=A^2$.

18. 设$n$阶复可逆矩阵$A$可对角化，证明: $2n$阶复方阵 $B=\begin{pmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{pmatrix}$ 也可对角化.

证明.因$n$阶复方阵$A$可对角化，$A$有$n$个线性无关的特征向量，设为$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$，且$A\eta_i=\lambda_i\eta_i$，$i=1,2,\dots,n$. 当$\lambda$为$A$的特征值时，$A^*$有对应的特征值$\frac{|A|}{\lambda}$,( $A$可逆，$\lambda \neq 0$) 则有

$$\begin{pmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_i \end{pmatrix}=(\lambda_i+\frac{|A|}{\lambda_i})\begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_i \\ -\eta_i \end{pmatrix}=(\lambda_i-\frac{|A|}{\lambda_i})\begin{pmatrix} \eta_i \\ -\eta_i \end{pmatrix},$$

因而,$\begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_i \\ -\eta_i \end{pmatrix}, i=1,2,\dots,n$, 是$\begin{pmatrix} A & A^* \\ A^* & A \end{pmatrix}$的$2n$个特征向量.

若有$k_1,\dots,k_n,k_{n+1},\dots,k_{2n}$使得

$$k_1\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix} \eta_n \\ \eta_n \end{pmatrix}+k_{n+1}\begin{pmatrix} \eta_{n+1} \\ -\eta_{n+1} \end{pmatrix}+\cdots+k_{2n}\begin{pmatrix} \eta_{2n} \\ -\eta_{2n} \end{pmatrix}=0,$$

即有：$k_1\eta_1+\cdots+k_n\eta_n+k_{n+1}\eta_{n+1}+\cdots+k_{2n}\eta_{2n}=0$，

$k_1\eta_1+\cdots+k_n\eta_n-k_{n+1}\eta_{n+1}-\cdots-k_{2n}\eta_{2n}=0$，

两式相加，有$2(k_1\eta_1+\cdots+k_n\eta_n)=0$，故$k_1=\cdots=k_n=0$，继而

$k_{n+1}=\cdots=k_{2n}=0$.这表明

$\begin{pmatrix}\eta_i\\ \eta_i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta_i\\ -\eta_i\end{pmatrix},i=1,2,\dots,n,$是$\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}$的$2n$个线性无关的特征向

量，$\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}$可对角化.

又解：令$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_n & -I_n\\ \frac{1}{2}I_n & I_n\end{pmatrix}$，$T^{-1}=\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n\end{pmatrix}$.

$$T^{-1}\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_n & -I_n\\ \frac{1}{2}I_n & I_n\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}A & A^*\\ A^* & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+A^* & 0\\ 0 & A-A^*\end{pmatrix}$.

因$A$可对角化，存在可逆矩阵$P$，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}\frac{|A|}{\lambda_1} & & & \\ & \frac{|A|}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \vdots\\ & & \cdots & \frac{|A|}{\lambda_n}\end{pmatrix},$$ 故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P^{-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A+A^*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A-A^*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1+\frac{|A|}{\lambda_1} & & & & & & & \\ & \lambda_2+\frac{|A|}{\lambda_2} & & & & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & \cdots & \lambda_n+\frac{|A|}{\lambda_n} & & & & \\ & & & & \lambda_1-\frac{|A|}{\lambda_1} & & & \\ & & & & & \lambda_2-\frac{|A|}{\lambda_2} & & \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \cdots & \lambda_n-\frac{|A|}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$