应用随机过程

均匀泊松过程

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

目录

泊松过程是理解随机过程的起始点和突破点

泊松过程的定义

泊松过程

计数过程$N = \{N(t), t \geq 0\}$是速率为λ的泊松过程

1. $N(0) = 0$
2. 平稳增加，独立增加
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

泊松过程的概率公式

对于一个速率为λ的泊松过程，在$(0,t]$时间内发生n次事件的概率：

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

泊松过程的概率推导

考虑初始情况，在t时刻内发生0次事件的概率

令$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\}$$

独立增加

$$= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\}$$

平稳增加

$$= P_0(t)P\{N(h) = 0\}$$

$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

$$= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]$$

泊松过程的概率推导

考虑初始情况，在t时刻内发生0次事件的概率

$$P_0(t+h) = P_0(t)[1-\lambda h + o(h)]$$

等式两边减去$P_0(t)$，再除以h

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

求极限

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \qquad \cdots (1)$$

泊松过程的概率推导

考虑一般情况，在t时刻内发生$n(n \geq 1)$次事件的概率

$$P_n(t+h) = P\{N(t+h) = n\}$$

独立增加，平稳增加

$$= \sum_{i=0}^{n} P_{n-i}(t)P_i(h)$$

全概率公式

$$= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + \sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)P_i(h)$$

$P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$

$$= P_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + o(h)$$

$$= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h)$$

泊松过程的概率推导

考虑一般情况，在t时刻内发生$n(n \geq 1)$次事件的概率

$$P_n(t+h) = (1-\lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h)$$

等式两边减去

$P_0(t)$，再除以h

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

求极限

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad \cdots (2)$$

定义：当$n < 0$时 $P_n(t) = 0$，则公式(2)包含公式(1)

泊松过程的概率推导

定义随机变量$N(t)$的概率生成函数为

$$P^g(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t), |z|<1$$

对t求导

$$P^{(1)}(z,t)=\partial P^g(z,t)/\partial t=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n'(t)$$

代入公式(2)

$$=-\lambda\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)+\lambda z\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$$

$$=-\lambda P^g(z,t)+\lambda z P^g(x,t)=\lambda(z-1)P^g(z,t)\cdots(3)$$

概率生成函数边界条件

$$P^g(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{N(0)=n\}=z^0 P\{N(0)=0\}=1$$

泊松过程的概率推导

为方便起见，作如下定义

$f(t) = P^{g}(z,t)$，$f'(t) = P^{(1)}(z,t)$，$a = \lambda(z-1)$

代入式(3)

$f'(t) = af(t)$ 且 $f(0) = 1$

Laplace变换

$f^{e}(s) = 1/(s-a)$

Laplace逆变换

$f(t) = e^{at} = e^{\lambda(z-1)t}, t \geq 0$

$P^{g}(z,t) = e^{at} = e^{\lambda(z-1)t}, t \geq 0$

泊松过程的概率推导

因此，可得出

$$P^g(z,t) = e^{-\lambda t} e^{\lambda z t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} z^n$$

$$P^g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$$

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

课堂思考

给定参数为λ的泊松过程，请问

(1) 相邻事件之间的间隔时间服从什么分布?

(2)第n次事件的到达时刻服从什么分布?

谢谢听课

授课教师

赵毅