第1、第2节：数值积分概念与牛顿-科特斯公式

（二）：插值型积分公式

$a \le x_0 \cdots x_n \le b$

$L_n(x)$ 是 x_i 上 n阶 拉格朗日插值

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$L_n \sim f$

$\int_a^b L_n(x)\,dx \sim \int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \boxed{\int_a^b l_k(x)\,dx}$$

A_k 权

$\sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k$ 插值型

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{x \text{ 换成 } x_k}$$

第1、第2节：数值积分概念与牛顿-科特斯公式

（三）：牛顿-科特斯公式（等距L插值型公式）

$[a,b]$ n等分　　$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$　$k=0,\cdots,n$

牛-科 在 x_k L插值型积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) C_k^{(n)} (b-a)$$

其中 $C_k^{(n)}(b-a) = \int_a^b l_k(x)dx$

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{\quad\cdots\quad} dx$$

$x = a + \frac{t}{n}(b-a)$

$$\frac{\frac{b-a}{n}}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \boxed{\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (t-j)\, dt}$$

（三）：牛顿-科特斯公式（等距L插值型公式）

科特斯积分公式系数表：

n	$C_k^{(n)}$					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				$=1$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$			$=1$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$=1$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	$=1$

若干特例：

$n=1$：$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2}$ 梯形

$n=2$：$\int_a^b \cdots \approx f(a)\frac{b-a}{6} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{3}(b-a) + f(b)\frac{b-a}{6}$ 辛普森公式

$n=4$：$\int \approx f(a)\frac{7}{90}(b-a) + f(x_1)\frac{16}{45}(b-a) + \cdots$ 柯特斯公式

几种典型常用积分公式总结：

插值型： $L_n(f)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k$

则 $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(f)(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\underbrace{\int_a^b l_k(x)dx}_{A_k}$

$n=0$

(1) 中点公式（中矩形） $I(f)\approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

$n=1$

(2) 梯形公式： $I(f)\approx f(a)\frac{b-a}{2}+f(b)\frac{b-a}{2}$

(3) 辛普森公式： $I(f)\approx f(a)\frac{b-a}{6}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{3}(b-a)+f(b)\frac{b-a}{6}$

$n=2$

(4) 柯特斯公式 $I(f)\approx f(x_0)\frac{7}{90}(b-a)+f(x_1)\frac{16}{45}(b-a)$

$n=4$

$+f(x_2)\frac{2}{15}(b-a)+f(x_3)\frac{16}{45}(b-a)+f(x_4)\frac{7}{90}(b-a)$

（六）：代数精度：若某个求积公式对于次数不超过m的多项式可以精确求积，而对于m+1次多项式无法精确积分，称该积分公式具有m次代数精度

$1, x, x^2, \cdots x^m$ ✓ x^{m+1} ✗

$$\int_a^b f(x)dx \approx \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k}_{\text{机械}}$$

机械求积公式具有m次代数精度的具体公式：

$f(x)=1$: $\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b 1\,dx = b-a$

$f(x)=x$: $\sum_{k=0}^{n} x_k A_k = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$f(x)=x^2$: $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 A_k = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

$\vdots$

$f(x)=x^m$ $\sum_{k=0}^{n} x_k^m A_k = \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$

$f(x)=x^{m+1}$ 不能精确积分 ✗

（六）：代数精度

上述各种求积公式的代数精度：

(1) 中点 $m=1$　(2) 梯形 $m=1$　(3) 辛普森 $n=2$, $m=3$　(4) 柯特斯 $n=4$, $m=5$

$\begin{cases} n=2 & m=3 \\ n=3 & m=3 \end{cases}$

(2) $I_n f = f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2}$

$f=1$: $\frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b-a$ ✓

$f=x$: $a\frac{b-a}{2} + b\frac{b-a}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ ✓

$f=x^2$: ---- ✗

（六）：代数精度

导数信息

（例）给定形如$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$的求积公式，确定$A_0, A_1, B_0$使该公式具有尽可能高的代数精度

解：$f=1 \quad \int_0^1 1dx = 1 = A_0 + A_1$

$f = x \quad \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = A_1 + B_0$

$f = x^2 \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = A_1 + 0 =$

$A_1 = \frac{1}{3} \quad A_0 = \frac{2}{3} \quad B_0 = \frac{1}{6}$

$m = 2$

$I_n(f) = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$

$x^3 \quad \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \neq I_n(x^3) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$ X

（六）：代数精度

（定理）机械求积公式$I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$具有至少$n$阶代数精度的充分必要条件是，它是插值型的

证明："$\Leftarrow$" $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx$

$I(f)-I_n(f)=\int_a^b [f-L_n](x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$

x^j $j=0,\cdots,n$ 代入：$I(x^j)-I_n(x^j)=\int_a^b \frac{(\ )}{(\ )}(\ )dx$

$=0$

$x^{n+1}\to\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx$ 可能为0　未精确

"$\Rightarrow$" $I_n(f)=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x)$ 至少有n……　此时可以精确积分 $l_j(x)$

$\int_a^b l_j(x)dx=I_n(l_j)=\sum_{k=0}^{n}A_k l_j(x_k)=A_j$ □

$I_n f=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx$ 插值型

（七）：求积公式的余项（误差）

定义 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$ $I_n f=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k$

$R[f]=I(f)-I_n f$ 余项（误差）

* 若 $I_n(f)$ 是插值型.

$R[f]=\int_a^b f-\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)dx=\int_a^b (f-L_n)dx$

$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$

$I_n(f)$

* 可以证明：若某积分公式具有 m 阶代数精度（插值型时 $m\geq n$）

则 $R[f]=\frac{R[x^{m+1}]}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\eta)$

$R[x^{m+1}]=I(x^{m+1})-I_n(x^{m+1})$

（七）：求积公式的余项

（定理）偶数n阶牛顿科特斯公式的代数精度至少为$(n+1)$

$$R[x^{n+1}] = \int_a^b \frac{(x^{n+1})^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)\,dx \triangleq \int_a^b w_{n+1}(x)\,dx$$

$$w_{n+1} = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$x = a+th$ $\quad x_j = a+jh$

$h = \frac{b-a}{n}$ $\quad R[x^{n+1}] = h^{n+2}\int_0^n \prod_{j=0}^{n}(t-j)\,dt$

$t = u+\frac{n}{2}$ $\quad h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \prod_{j=0}^{n}\left(u+\frac{n}{2}-j\right)du = 0$

关于u奇函数（n偶）

至少 $n+1$ 阶

（七）：求积公式的余项

"11:30 回来！"

（例）：上述各插值公式的代数精度以及余项：

梯形：代精 1，$R[f] = \frac{R[x^2]}{2} f''(\eta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$

$R[x^2] = \int_a^b x^2 dx - \left(a^2 \frac{b-a}{2} + b^2 \frac{b-a}{2}\right)$

中点：代 1 $R[f] = \frac{R[x^2]}{2} f''(\eta) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$

辛普森：代 3 $R[f] = \frac{R[x^4]}{4!} f^{(4)}(\eta) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$

科特斯：代 5 $R[f] = \frac{R[x^6]}{6!} f^{(6)}(\eta) = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$

（例）求积分公式$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$的余项

解：$m = 2$ $R[f] = \frac{R[x^3]}{3!} f'''(\eta)$

$R[x^3] = \int_0^1 x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{6}\times 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

$\therefore R[f] = -\frac{1}{72} f''(\eta)$ ✓

3. 复合求积公式

复合梯形公式及其误差: $[a,b]$ n 等分 $x_k = a + kh$ $h=\frac{b-a}{n}$

$k=0,\cdots,n$

在每个 $[x_k, x_{k+1}]$ 上用梯形公式

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)$$

$$I(f) = \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)}_{T_n}$$

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$ 复合梯形公式

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) - T_n f = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) = -\frac{1}{12}h^2(b-a)\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)}{n}$$

$$= -\frac{1}{12}h^2(b-a)f''(\eta) = O(h^2)$$

$2=1+1$

3. 复合求积公式

代 m → 复合 → $O(h^{m+1})$

复合辛普森公式及其误差：

$$I(f)=\int_a^b f=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$$

$$\approx\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{h}{6}f(x_k)+\frac{2}{3}hf(x_{k+\frac{1}{2}})+\frac{h}{6}f(x_{k+1})\right]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]=S_n$$

$$R[f]=I(f)-S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f-\ \right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}-\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta_k)=-\frac{b-a}{180}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^4\frac{\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_k)}{n}$$

$$=-\frac{b-a}{180\times 2^4}h^4 f^{(4)}(\eta)=O(h^4)\text{ 阶}$$

$4=3+1$

$f^{(4)}(\eta)$

代 m (x_k,x_{k+1}) $e_k=O(h^{m+2})$

$$x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+\frac{1}{2}h$$

x_k $x_{k+\frac{1}{2}}$ x_{k+1}

$$E=\sum_{k=0}^{n-1}e_k=\sum_{k=0}^{n-1}O(h^{m+2})=O(h^{m+1})$$

3. 复合求积公式

（例）用复合辛普森公式计算积分$\int_0^1 e^x dx$,分多少份可以使误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

$$\left|I(f)-S_n\right| = \frac{1-0}{180\times 2^4} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

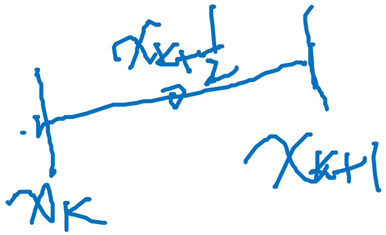
e^{η}

$$\le \frac{1}{180\times 2^4} h^4 e < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$h=\frac{1-0}{n}$

"8份"

$n > 3.707$



8 vs 213

若用复合梯形 则 $n > 212.85$.

4. 龙贝格求积公式

（一） 梯形法的递推

写成函数M文件

作业 P136：6、7

（二）外推技巧

梯形公式误差：$T_n - I = T(h) - I = \dfrac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)$

可以证明（定理4）：$T(h) = I + \mu_1 h^2 + \mu_2 h^4 + \cdots + \mu_l h^{2l} + \cdots$