Answer for Extra Exercises 2

一. 填空

1. 在R^3中，$\alpha_1=(2,-3,1)^T,\alpha_2=(1,4,2)^T,\alpha_3=(5,-2,4)^T$，则 $\dim(L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=$ __2_____. $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的 基 是 _$\alpha_1,\alpha_2(\alpha_3)$_____.

2. 在R^3中，$V_1=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2-2x_3=0\}$,

$V_2=\{(x_1,x_2,x_3)|2x_1+x_2=0,x_1+2x_3=0\}$,

$\dim(V_1+V_2)=$ __2_____.

3. 设$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}|a,b\in R\right\}$, U是(否)_yes____$R^{2\times2}$的子空间，若是,dimU = _2____.

4. 设$U=\{f(x_1,x_2,\dots,x_n)|f=X^TAX$是$R$上n个变元的二次型$\}$, U是(否)_yes____ R上的线性空间，若是,dimU = _$\frac{n(n+1)}{2}$_____

5. 在R^3中的两组向量分别是

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ (1)

$\beta_1=(1,0,3)^T,\beta_2=(2,2,2)^T,\beta_3=(-1,1,4)^T$ (2)

γ在基(1)下的坐标为$(1,2,3)^T$.则基(1)到基(2)的过度矩阵为

_$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$__，γ在基(2)下的坐标为_$(-\frac{8}{9},\frac{20}{9},\frac{5}{9})^T$______.

6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是线性空间$V$的一组基，$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\dots,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$是否是$V$的一个基 _yes___， 若 γ 在 基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 下 的 坐 标 为 $(n,n-$

$1,\dots,2,1)^T$，则γ在基$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$下的坐标为________.

过度矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，坐标为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

7.若3×3矩阵A的特征值为1，2，−1，$B=A^3-5A^2$. 则B有特征值_$-4,-12,-6$_______.

8.令A是一$n\times n$矩阵且$|A|\neq0$，λ是A的一特征值.则$(2A^*)^3+A^{-1}$必有特征值__$\dfrac{8|A|^3}{\lambda^3}+\dfrac{1}{\lambda}$____

9.若4×4矩阵A有特征值$1,-2,3$,和-3. 则A的行列式等于18;

$\mathrm{tr}(A)=-1$_.

10.$\lambda-$矩阵$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}$的法式为

_$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+2)(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$______.

11.在复数域上n阶方阵A的特征值全为 1, 且只有一个线性无关的特征向量，则A的 Jordan 标准形为

_$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$______.

12. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的法式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & (\lambda-1)(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$$

____,

有理标准形为$\underline{\quad\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad}$.

二.选择题

13.设$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,在$R^{2\times2}$中定义一个变换$\sigma: A\to BA$，则(C)

(A) σ是$R^{2\times2}$的线性变换，但不是满射;

(B) σ是$R^{2\times2}$的线性变换，但不是单射;

(C) σ是$R^{2\times2}$的可逆线性变换;

(D) σ不是线性变换.

14.三维几何空间R^3的全体线性变换所成线性空间维数为(C)

(A)3; (B) 6; (C) 9; (D)27

15.设$\sigma\in L(V), W_1, W_2$是的任意两个子空间，则$\sigma(W_1\cap W_2)$与$\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$的关系是(B)

(A)$\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)=\sigma(W_1\cap W_2)$;

(B)$\sigma(W_1\cap W_2)\sqsubseteq\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$;

(C)$\sigma(W_1\cap W_2)\sqsupseteq\sigma(W_1)\cap\sigma(W_2)$;

(D)无法确定.

16. 设$\sigma\in L(V), W_1,\dots,W_n$都是$\sigma$的一维不变子空间，且

$\mathbf{V} = \boldsymbol{W_1} \oplus \boldsymbol{W_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{W_n}$，则在中存在一组基使$\boldsymbol{\sigma}$在该基下的表示矩阵为(A)

(A)对角矩阵;　(B)反对称矩阵;

(A)非对角上三角矩阵;　(D)可逆矩阵.

17. 设$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}(\mathbf{V}), \boldsymbol{W_1}, \dots, \boldsymbol{W_s} (\boldsymbol{s} < n)$都是$\boldsymbol{\sigma}$的不变子空间，且$\mathbf{V} = \boldsymbol{W_1} \oplus \boldsymbol{W_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{W_s}$，则在中存在一组基使$\boldsymbol{\sigma}$在该基下的表示矩阵为(B)

(A)对角矩阵;　(B)准对角矩阵;

(C)反对称矩阵;　(D)可逆矩阵.

18. 设$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_3}$是线性空间$\mathbf{V}$的一组基，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$,

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_1}) = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_2}) = \boldsymbol{\alpha_2} + \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha_3}) = \boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2} + 2\boldsymbol{\alpha_3}.$

则$\mathbf{dim}(\boldsymbol{\sigma})^{-1}(\mathbf{0})$为(C)

(A)3;　(B) 2;　(C) 1;　(D)0

19. 设矩阵$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.已知矩阵$A$相似于 B，则$\mathbf{r}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})$与$\mathbf{r}(\mathbf{A} - \mathbf{E})$之和为(C)

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5

19.令λ_1, λ_2是矩阵A的两个不同特征值,它们对应的两个特征向量分别是$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}$.则$\boldsymbol{\alpha_1}, A(\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\alpha_2})$线性无关的条件是(B)

(A)$\lambda_1 \neq 0$,　(B) $\lambda_2 \neq 0$,　(C)$\lambda_1 = 0$, (D) $\lambda_2 = 0$.

20..令$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与$A$合同的矩阵为(D)

(A)$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

21. 设V是复数域上的线性空间，$\sigma,\tau \in L(V)$且$\sigma\tau=\tau\sigma$,则(C).

(A) σ,τ的特征向量完全相同; (B)σ,τ有有限多个公共特征向量;

(C)σ,τ有无限多个公共特征向量;　(D)σ,τ未必有公共特征向量.

22. 设V是实数域上的线性空间，$\sigma,\tau \in L(V)$且$\sigma\tau=\tau\sigma$,则(D).

(A) σ,τ的特征向量完全相同; (B)σ,τ有有限多个公共特征向量;

(C)σ,τ有无限多个公共特征向量;　(D)σ,τ未必有公共特征向量.

三.计算与证明题

23. 在$F^{2\times 2}$中，求从基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$
$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵, 并分别求$\gamma=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$在上面两个基下的矩阵.

解. 令: $\varepsilon_1=E_{11},\varepsilon_2=E_{12},\varepsilon_3=E_{21},\varepsilon_4=E_{22}$, 有:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&1\\3&0&0&1\\1&1&-1&-2\end{pmatrix},$$

则基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

设$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则γ在基$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$下的坐标为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, 即, γ在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

类似求得γ在基$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

24. 在F^4中，令$\alpha_1 = (1, 2, -1, -2)^T$, $\alpha_2 = (3, 1, 1, 1)^T$,

$\alpha_3 = (-1, 0, 1, -1)^T$,

$\beta_1 = (2, 5, -6, -5)^T$, $\beta_2 = (1, 2, -7, 3)^T$,

求$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$与$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$的一个基.

解. 因$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2) = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$, 求下

列矩阵列向量的一个极大无关组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 & -7 \\ -2 & 1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 7 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$是$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$的一个基，维数为4；而$\dim\big(L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)\big) = 1$，求其基底，即求：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$的解，解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

得解$(3, -1, -2, 1, 0)^T$，故$3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = \beta_1 = (2, 5, -6, -5)^T$为$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cap L(\beta_1, \beta_2)$的基.

25. 在F^2中, $\sigma(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$是$F^2$的一个线性变换.

(1)求证：当$F = R$时，R^2中没有σ的真不变子空间；

(2)当$F = C$时，求出σ的所有不变子空间.

证明.设W为R^2中非平凡$\sigma-$子空间, $\dim W = 1$. 令(a,b)为

的生成元，则$k(a,b) = \sigma(a,b) = (a,b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，从而

$$\begin{cases} (k-1)a - 2b = 0 \\ a + (k-2)b = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

有非平凡解，

$\begin{vmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix} = 0$，$k^2 - 3\mathrm{k} + 4 = 0.$

在实数域里，该方程无根，故不存在k,使$k(a,b) = \sigma(a,b)$，

R^2中没有σ的真不变子空间；

在复数域里，该方程有两个根：

$$k_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}, k_2 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2},$$

代入(*)式，求得：$(a,b) = (4, 1+i\sqrt{7})$, 或$(4, 1-i\sqrt{7})$，

故C^2中有两个σ的真不变子空间：

$W_1 = \mathrm{L}(4, 1+i\sqrt{7}), W_2 = \mathrm{L}(4, 1-i\sqrt{7}).$

26.设V是4维线性空间，φ在基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

验证：$U = \mathrm{L}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4)$是否为$\varphi-$子空间.

解. 直接计算知：$\varphi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$,

$$\varphi(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4,$$

故$U = \mathrm{L}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4)$是$\varphi-$子空间.

27. 令 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$．求 $B+2I$ 的特征值与所属的特征向量.

解.先求A的特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$.因$|A|=7$. A^{*}的特征值为$\frac{|A|}{\lambda_i}$ $i=1,2,3$,即:$\lambda_1=\lambda_2=7$,$\lambda_3=1$.

A的属于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为:$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, 属于$\lambda_3=7$的特征向量为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.则$B+2I=P^{-1}A^{*}P+2I$的特征向量分别为$P^{-1}\alpha_i$($i=1,2,3$).即$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

28.设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是A的 2 重根. 求可逆矩阵P使得$\Lambda=P^{-1}AP$是一对角矩阵Λ.

解.直接计算$|\lambda E-A|$求得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\mathrm{r}(A-2I)=1$,求得$x=2,y=-2$. 然后求解齐次线性方程组

$$(2E-A)X=0及(6E-A)X=0,$$

$$(2E-A)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得解$(1,0,1)^T$,$(1,-1,0)^T$；解$(6E-A)X=0$得解$(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2})^T$.

则$P=\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&-1&-1\\1&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$,$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$

29 有理数域Q上的线性空间定义中八条规则的第八条：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ 可由其他七条推出.

证明.(1)k为正整数m，$m=1$时，$1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=1\alpha+1\beta$.

假设结论对$m-1$成立，$m(\alpha+\beta)=(1+(m-1))(\alpha+\beta)=$

$1(\alpha+\beta)+(m-1)(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+(m-1)\alpha+(m-1)\beta$

(根据归纳假设)$=\alpha+(m-1)\alpha+\beta+(m-1)\beta$(交换律)

$=m\alpha+m\beta$.

(2) $k=-m$ ，m为正整数,$0=\big(m+(-m)\big)(\alpha+\beta)=m(\alpha+\beta)+(-m)(\alpha+\beta)$(第七条)$=m\alpha+m\beta+(-m)(\alpha+\beta)$.

从等号左边依次加$(-m)\alpha,(-m)\beta$，得：$(-m)\beta+(-m)\alpha=(-m)(\alpha+\beta)$,进而,$(-m)(\alpha+\beta)=(-m)\alpha+(-m)\beta$(交换律).

(3) $k=\frac{1}{m}$, m为整数，$\frac{1}{m}(\alpha+\beta)=\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m}\alpha+\frac{m}{m}\beta\right)=\frac{1}{m}(m\left(\frac{1}{m}\alpha+\frac{1}{m}\beta\right))$((1),(2)对整数已证明)$=\left(\frac{1}{m}m\right)\left(\frac{1}{m}\alpha+\frac{1}{m}\beta\right)=\frac{1}{m}\alpha+\frac{1}{m}\beta$.

(4) $k=\frac{n}{m}$,m,n为整数，留给你们完成.

30.设V_1,V_2是V的两个子空间，求证

$$V_1 \cup V_2 = V_1 + V_2 \Leftrightarrow V_1 \sqsubseteq V_2,\ \text{或} V_1 \sqsupseteq V_2.$$

证明. 充分性显然. 现证必要性:

若$V_1 \not\sqsubseteq V_2$, 同时$V_1 \not\sqsupseteq V_2$, 则存在$\alpha_1 \in V_1$但$\notin V_2$, 及$\alpha_2 \in V_2$, 但$\notin V_1$. 因而$\alpha_1 + \alpha_2 \notin V_1, V_2$, 否则, 将推出$\alpha_1 \in V_2$或$\alpha_2 \in V_1$, 矛盾. 故$V_1 + V_2 \not\subseteq V_1 \cup V_2$, 等式不可能成立.

31. 设V_1, V_2是n维线性空间V的两个子空间, 且满足

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1,$$

求证: $V_1 \sqsubseteq V_2$或$V_1 \sqsupseteq V_2$.

证明. 因$V_1 \cap V_2 \sqsubseteq V_1, V_2$, 我们有

$$\dim(V_1 \cap V_2) \le \dim V_1, \dim(V_1 \cap V_2) \le \dim V_2$$

由维数公式, $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$,

即有:

$$(\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)) + (\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)) = 1$$

因等式左边的两项, 即, $\dim V_i - \dim(V_1 \cap V_2)(i = 1, 2)$ 为非负整数, 故必有$\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2) = 0$, 或 $\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 0$,

故: $V_1 \cap V_2 = V_1$或$V_1 \cap V_2 = V_2$, 即$V_1 \sqsubseteq V_2$或$V_1 \sqsupseteq V_2$.

32. 设$A \in F^{n\times n}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$,

$$V_1 = \{X | A_1 X = 0\}, V_2 = \{X | A_2 X = 0\}$$

求证A可逆$\Leftrightarrow F^n = V_1 \oplus V_2$.

证明. 首先, V_1+V_2是F^n的子空间.

"$\Rightarrow$"若A可逆, $V_1\cap V_2=0, V_1+V_2=V_1\oplus V_2$. 又

$\dim V_1=n-r(A_1)$, $\dim V_2=n-r(A_2)$,

$\dim V_1+\dim V_2=2n-(r(A_1)+r(A_2))=n$,

故$F^n=V_1\oplus V_2$.

"$\Leftarrow$"若A不可逆, F^n中存在非零向量Y使得$AY=0$, 则

$A_1Y=0$, $A_2Y=0, V_1\cap V_2\neq 0$, 与$V_1+V_2$是直和矛盾.

33.设$\sigma\in L(V)$, A为σ在V的一组基下的表示矩阵, 求证

$$r(A^2)=r(A)\Leftrightarrow V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0).$$

证明."$\Longleftarrow$"将σ作用在等式$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)$两边, 有

$\sigma(V)=\sigma^2(V)$, σ在V的一组基下的表示矩阵A, 亦有

$AV=A^2V$, 因$\dim AV=r(A)$, 故$r(A^2)=r(A)$.

"$\Longrightarrow$". $\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$是V的子空间. 令$\alpha=A\beta\in\sigma(V)\cap\sigma^{-1}(0)$, 因$AV=A^2V, A^{-1}(0)=A^{2^{-1}}(0), A\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$, 即$\sigma(V)\cap\sigma^{-1}(0)=0$.因而, 和$\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$是直和, 由

$\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=\dim V$, 知$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)$.

34.设$A\in F^{n\times n}$, 且$W=\{f(A)|f(x)\in F[x]\}$,

求W的一个基和维数.

解. 令$m(x)=x^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$是$A$的最小多项式, 对任一次数$\geq d$的多项式$f(x)\in F[x]$, 有

$f(x)=m(x)q(x)+r(x)$, 其中$r(x)=0$或$\deg r(x)<d$,

则$f(A)=m(A)q(A)+r(A)=r(A)$. 这表明对任一次数$\geq d$的

多项式$f(x)\in F[x]$，$f(A)$可写成关于A的次数不超过$d-1$的一个多项式. 故$\mathrm{W}=\{f(A)|f(x)\in F[x]\}$的维数为$d$, 基底为：$E,A,\dots,A^{d-1}$.

35. 设V是n维线性空间, 求证V的r维子空间有无穷多个, 其中$0<r<n$.

证明. 令W为V的一r维子空间，取W的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r(r=\dim W<n)$，并扩充成$V$的一组基$\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1\dots,\beta_{n-r}$. 令

$$W_k=\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\beta_{n-r}).$$

易于证明$\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\beta_{n-r}$线性无关, 因而$W_k$也是$V$的一r维子空间. 现证对不同的$k,l,W_k\neq W_l$. 因若$\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\beta_{n-r})=\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r+l\beta_{n-r})$,

$\alpha_r+l\beta_{n-r}\in\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r+k\beta_{n-r})$, 则有

$\alpha_r+l\beta_{n-r}=k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}\dots+k_r(\alpha_r+k\beta_{n-r})$,

$(k_r-1)\alpha_r+(k_rk-l)\beta_{n-r}+k_1\alpha_1+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}=0$.

但$\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},\alpha_r,\beta_{n-r}$线性无关, 必有：

$$k_rk-l=k_r-1=k_1=\cdots=k_{r-1}=0,$$

推出$k_r=1,kk_r=l$，即$k=l$，与$k\neq l$矛盾. 故$W_k\neq W_l$.

因数域是无限的, 因而W在V中有无穷多个r维子空间.

36. 设$\sigma,\tau\in\mathrm{L}(V_n)$, 并且σ在数域中F有n个互异的特征根, 求证：

(1)　$\boldsymbol{\sigma}$有2^n个不变子空间,

(2)　$\boldsymbol{\sigma}$的特征向量都是$\boldsymbol{\tau}$的特征向量当且仅当$\boldsymbol{\sigma\tau} = \boldsymbol{\tau\sigma}$.

证明. (1) 因$\boldsymbol{\sigma}$在数域中F有n个互异的特征根，$\boldsymbol{\sigma}$有n个线性无关的特征向量$\alpha_i(i = 1,2,\dots,n)$, 且$\sigma\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$. 易见, $\mathrm{L}(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{js})(j1,\dots,js \in \{1,2,\dots,n\}, 1 \le s \le n)$都是$\boldsymbol{\sigma}$的不变子空间. 另一方面, 若$W$为$\boldsymbol{\sigma}$的一不变子空间, $\dim W = r$. $\sigma|_W$是W上的线性变换，$\sigma|_W$在W中有r个特征值及r个线性无关的特征向量$\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jr}$, 则$W = \mathrm{L}(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{js})$. 即任一$\boldsymbol{\sigma}$−子空间都被计算在内， 故$\boldsymbol{\sigma}$有: $1 + C_n^1 + C_n^2 \dots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n$个不变子空间.

(2) "$\Rightarrow$"因$\boldsymbol{\sigma}$的特征向量$\alpha_i(i = 1,2,\dots,n)$都是$\boldsymbol{\tau}$的特征向量, 设$\boldsymbol{\tau}\alpha_i = \mu_i\alpha_i$, 则: $\boldsymbol{\sigma\tau}\alpha_i = \boldsymbol{\sigma}(\mu_i\alpha_i) = \mu_i(\boldsymbol{\sigma}\alpha_i) = \mu_i\lambda_i\alpha_i$, $\boldsymbol{\tau\sigma}\alpha_i = \boldsymbol{\tau}(\lambda_i\alpha_i) = \lambda_i(\boldsymbol{\tau}\alpha_i) = \lambda_i\mu_i\alpha_i$. 因$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$是$V_n$的一个基，$\boldsymbol{\sigma\tau}$与$\boldsymbol{\tau\sigma}$对基底的作用相同, 故$\boldsymbol{\sigma\tau} = \boldsymbol{\tau\sigma}$.

"$\Leftarrow$"因$\boldsymbol{\sigma\tau} = \boldsymbol{\tau\sigma}$，$\boldsymbol{\sigma}$的特征子空间都是$\boldsymbol{\tau}$的不变子空间, 又，$\boldsymbol{\sigma}$的特征子空间都是1维的, 即$\mathrm{L}(\alpha_j)(j = 1,2,\dots,n)$，$\boldsymbol{\tau}\alpha_j = \mu_j\alpha_j$, 即$\boldsymbol{\sigma}$的特征向量$\alpha_j$都是$\boldsymbol{\tau}$的特征向量.

37. 设$\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t$是$F^n$的两组线性无关的列向量, 令
$V_1 = \mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_s), V_2 = \mathrm{L}(\beta_1,\dots,\beta_t)$,

求证$\dim(V_1 \cap V_2)$等于齐次线性方程组

$(\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t)X = 0$ 的解空间维数.

证明. 设$\boldsymbol{\gamma} \in V_1 \cap V_2$,

$\gamma = x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = y_1\beta_1 + \cdots + y_t\beta_t$, 即有

$x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s - y_1\beta_1 - \cdots - y_t\beta_t = 0$, (*)

这表明$V_1 \cap V_2$中的向量γ在V_1, V_2基底下的坐标需满足上述的齐次线性方程组, 即对应该齐次线性方程组的一个解, 反之, 若$(x_1, \ldots, x_s, -y_1, \ldots, -y_t)^T$是该齐次线性方程组

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t)X = 0$的一个解,

则$\gamma = x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = y_1\beta_1 + \cdots + y_t\beta_t \in V_1 \cap V_2$,

因此, 齐次线性方程组(*)的解空间即为$V_1 \cap V_2$, 故维数相等.

证明1. 记$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$为$U$, 有

$$\dim U = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\dim(V_1 \cap V_2) = s + t - \dim U$$

而$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t)X = 0$的解空间维数:

$s + t - r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t) = s + t - \dim U$, 得到结论.

38. 设A的特征值为0, 1, 对应的特征向量为$(1,2)^T, (2,-1)^T$, 问A是否为对称矩阵? 求A的迹, 行列式与A.

解. 注意到向量$(1,2)^T, (2,-1)^T$正交, 将它们单位化得$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)^T$, 但$\alpha_1, \alpha_2$仍为$A$的属于特征值0, 1的特征向量. 故$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

而 $A = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$为对称矩阵, $\mathrm{tr}(A) =$

$1, |A| = 0.$

39. 设A, B为n阶矩阵，且AB有n个不同的特征值，证明AB与BA相似于同一个对角矩阵.

证明. 因AB有n个不同的特征值，矩阵AB有n个线性无关的特征向量，因而相似于一个对角矩阵. 设α_i为AB的属于特征值λ_i的特征向量，$AB\alpha_i = \lambda_i\alpha_i(i = 1, 2, \ldots, n)(1)$，因而，$BAB\alpha_i = \lambda_i B\alpha_i$，因$\alpha_i \neq 0$，由(1)知若$\lambda_i \neq 0$，$B\alpha_i \neq 0$，故$B\alpha_i$为$BA$的属于特征值$\lambda_i$的特征向量，若$B\alpha_i = 0$，$AB$有特征值0，$BA$与$AB$均不可逆，也有零特征值，因n个特征值不相同，$BA$与$AB$有相同的n个不同的特征值，故$BA$相似于同一个对角矩阵.

注：也可应用$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$得出$BA$与$AB$有相同的n个不同的特征值.

40. 设A, B分别为4×3和3×4的矩阵，满足

$$BA = \begin{pmatrix} -9 & -20 & -35 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 9a-14 & 0 & 9a-15 & 18a-32 \\ 6a+2b-9 & 1 & 6a+3b-9 & 12a+4b-19 \\ -2a+2 & 0 & -2a+3 & -4a+4 \\ -3a+6 & 0 & -3a+6 & -6a+14 \end{pmatrix}$$

求a, b的值.

解. 由BA与AB迹相同，立得：$9a - 8a + 4 = 4$，$a = 0$.

求BA的特征值：$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. 1是$BA$的二重特征值，但$r(E - BA) = 1$，$BA$的属于特征值1的特征子空间是2维的.

又，若$\gamma_i(i = 1, 2)$是BA的属于特征值 1 的特征向量，$BA\gamma_i =$

γ_i, $\boldsymbol{ABA}\gamma_i = \mathrm{A}\gamma_i$，因$\mathrm{A}\gamma_i \neq 0$，$\mathrm{A}\gamma$也是$\boldsymbol{AB}$的属于特征值1的特征向量，由$|\boldsymbol{BA}| \neq 0$知$\boldsymbol{A}$的秩为 3，是列满秩矩阵，$\mathrm{A}\gamma_1, \mathrm{A}\gamma_2$仍然线性无关，这说明，对于矩阵$\boldsymbol{AB}$，属于特征值1的特征子空间也是2维的，故$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}) = 2$.对$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$作行初等变换，求$\boldsymbol{b}$使得$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}) = 2$，

$$E-AB=\begin{pmatrix} 15 & 0 & 15 & 32 \\ -2b+9 & 0 & -3b+9 & -4b+19 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ -6 & 0 & -6 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 15 & 0 & 15 & 32 \\ -2b+9 & 0 & -3b+9 & -4b+19 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2b+9 & 0 & -3b+9 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

得$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

另一解法. 构作

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \boldsymbol{A}_{4\times 3} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{AB} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \boldsymbol{A}_{4\times 3} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{BA} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{BA} \end{pmatrix},$$

故$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{BA} \end{pmatrix}$.

计算$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{BA}) = 1$，得$\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{BA} \end{pmatrix}\right) = 5$.

因而$\mathrm{r}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{AB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix}\right) = 5$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{AB}) = 2$.以下解法同上.