第八章 λ –矩阵

8.1 λ –矩阵

设F是一数域，λ是一文字(或字母)，用λ取代x得到λ的多项式．一个矩阵如果它的元素是λ的多项式，就称为λ –矩阵．这一章我们讨论λ –矩阵的一些性质，并用这些性质来证明矩阵的 Jordan 标准形的主要定理．

因为多项式环$F[\lambda]$也包含数域F中的元素，所以λ –矩阵也包含以数为元素的矩阵，为有所区别．我们有时将以数为元素的矩阵称为数字矩阵．以下我们用$A(\lambda)$，$B(\lambda)$,…等表示λ –矩阵.

λ –矩阵的加法，乘法以及它们与数相乘的定义和数字矩阵的相关定义相同，而且有关这些运算的规律完全同于数字矩阵. n 阶λ –矩阵的行列式的定义也同与数字矩阵，只不过λ –矩阵的行列式是一个λ的多项式(可能为数，数也是多项式). 有关数字矩阵行列式的性质,子式，矩阵乘积的行列式等于它们行列式的积等结论可以平移到λ –矩阵.

定义 1. 如果λ –矩阵$A(\lambda)$中有一个 r 阶子式($r \geq 1$)不为零，而所有的$r+1$阶子式(如果存在)全为零，则称$A(\lambda)$的秩为r. 零矩阵的秩规定为零.

定义 2. 一个 n 阶λ-矩阵$A(\lambda)$称为可逆的，如果存在一个 n 阶λ-矩阵$B(\lambda)$使得

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E \qquad (1)$$

n 阶λ-矩阵$B(\lambda)$(它是唯一的)称为$A(\lambda)$的逆矩阵，记为$A^{-1}(\lambda)$.

定理 1. 一个 n 阶λ-矩阵$A(\lambda)$可逆当且仅当它的行列式$|A(\lambda)|$等于一个非零常数.

证明. 若$A(\lambda)$可逆，由定义对(1)式两边取行列式，得$|A(\lambda)B(\lambda)| = |A(\lambda)||B(\lambda)| = 1$. 故$|A(\lambda)|$是一个非零常数. 反之，若$|A(\lambda)| = d$是一非零常数，$A^*(\lambda)$是

$A(\lambda)$的伴随矩阵，$A(\lambda)\frac{1}{d}A^*(\lambda)=\frac{1}{d}A^*(\lambda)A(\lambda)=E$，$A(\lambda)$可逆.

注意．满秩的λ–矩阵未必可逆，可逆的λ–矩阵一定满秩，对于λ–矩阵，可逆与满秩并不等同.

8.2 λ–矩阵在初等变换下的标准形

定义 3．下列三种变换称为λ–矩阵的初等变换：

(1) 交换矩阵的两行(列)；

(2) 矩阵的某一行(列)乘以非零常数；

(3) 将矩阵的某一行(列)的$\phi(\lambda)$倍加至另一行(列)，$\phi(\lambda)$是一λ的多项式.

如同数字矩阵，每一初等变换对应一初等矩阵，前两种初等变换对应的初等矩阵同数字矩阵，所用记号亦相同. 而(3)对应

$$
P(i,j(\phi))=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i\text{ 列} & & j\text{ 列} & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & \phi(\lambda) & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

初等矩阵左(右)乘一$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$就是对$A(\lambda)$的行(列)做相应的初等变换. 易见，初等矩阵都是可逆的，对于$P(i,j(\phi))$, 我们有$P(i,j(\phi))^{-1}=P(i,j(-\phi))$.

定 义 4. 如 果 $\lambda-$ 矩 阵 $A(\lambda)$ 经 一 系 列 初 等 变 换化为$B(\lambda)$, 我们称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价(或说相抵).

等价是$\lambda-$矩阵间的一种关系，具有：反身性，对称性，传递性.

用初等矩阵来描述$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价， 则是：$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价当且仅当存在一系列(有限个)初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_t,Q_1,Q_2,\ldots,Q_s$使得

$$B(\lambda)=P_1P_2\ldots P_tA(\lambda)Q_1Q_2\ldots Q_s.$$

引理. 设λ –矩阵$A(\lambda)$中的元素$a_{11}(\lambda) \neq 0$，且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它整除，则必存在一个与$A(\lambda)$等价的矩阵$B(\lambda)$，它的元素$b_{11}(\lambda) \neq 0$，但$\deg b_{11}(\lambda) < \deg a_{11}(\lambda)$.

证明. 分三种情况讨论.

1)在$A(\lambda)$的第一列中有元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$整除，则有：$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$，其中$r(\lambda) \neq 0$，且$\deg r(\lambda) < \deg a_{11}(\lambda)$. 对$A(\lambda)$做行初等变换，把$A(\lambda)$的第 1 行$-q(\lambda)$倍加到第 i 行，得

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B(\lambda)$$

再将$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\lambda})$的 1 行与 $\boldsymbol{i}$ 行交换即得结论.

1)在$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda})$的第一行中有元素$\boldsymbol{a_{1j}}(\boldsymbol{\lambda})$不能被$\boldsymbol{a_{11}}(\boldsymbol{\lambda})$整除,

证明与 1)类似，只不过是做列的初等变换.

2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda})$的第一行与第一列的元素都能被$\boldsymbol{a_{11}}(\boldsymbol{\lambda})$整除,

但$\boldsymbol{i} > \boldsymbol{1}$行 $\boldsymbol{j} > \boldsymbol{1}$列的元素$\boldsymbol{a_{ij}}(\boldsymbol{\lambda})$不能被$\boldsymbol{a_{11}}(\boldsymbol{\lambda})$整除,

可设$\boldsymbol{a_{i1}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{a_{11}}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\lambda})$. 对$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda})$做下列初等变换

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdot \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\phi(\lambda) & \cdot \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)+(1-\phi(\lambda))a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\phi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = A_1(\lambda).$$

$A_1(\lambda)$的第一行中有一个元素$a_{ij}(\lambda)+(1-\phi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$不能被$\boldsymbol{a_{11}}(\lambda)$整除，这就化为已证明了的情形 2).

定理 2. 任一$s\times n$的λ−矩阵$A(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵.

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r\geq 1, d_i(\lambda)(\mathrm{i}=1,2,\dots,r)$是首1多项式,且

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\dots,r-1).$$

证明: 经过行列互换后,可以使$A(\lambda)$的元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$,若$a_{11}(\lambda)$不能除尽$A(\lambda)$的全部元素,由引理可以找到

与$\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$，其左上角元素$b_{11}^{(1)}(\lambda)\neq 0$，且次数低于$a_{11}(\lambda)$．如果$b_{11}^{(1)}(\lambda)$仍不能除尽$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$的所有元素，由引理，又可找到与$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$等价的$\boldsymbol{B}_2(\lambda)$，其左上角元素$b_{11}^{(2)}(\lambda)\neq 0$，且次数低于$b_{11}^{(1)}(\lambda)$，如此继续下去，经有限步后终将得到一与$\boldsymbol{A}(\lambda)$等价的$\boldsymbol{B}_k(\lambda)$，其左上角元素$b_{11}^{(k)}(\lambda)\neq 0$，且可除尽$\boldsymbol{B}_k(\lambda)$的所有元素$b_{ij}(\lambda)$，因$a_{11}(\lambda)$的次数有限，不可能无限降低．即

$$b_{ij}(\lambda)=b_{11}^{(k)}(\lambda)q_{ij}(\lambda)$$

对$\boldsymbol{B}_k(\lambda)$作初等变换：

$$B_k(\lambda)=\begin{pmatrix} b_{11}^{(k)}(\lambda) & \cdots & b_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{A_1(\lambda)}$的全部元素可以被$\boldsymbol{b_{11}^{(k)}(\lambda)}$整除，因为它们都是$\boldsymbol{B_k(\lambda)}$中元素的组合.

如果$\boldsymbol{A_1(\lambda) \neq 0}$，则对于$\boldsymbol{A_1(\lambda)}$重复上述过程，进而把矩阵化为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & A_2(\lambda) & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

其中$d_1(\lambda), d_2(\lambda)$都是首 1 多项式($d_1(\lambda)$与$b_{11}^{(k)}(\lambda)$只差一个常数倍数)，而且$d_1(\lambda)|d_2(\lambda)$，$d_2(\lambda)$能除尽$A_2(\lambda)$中的所有元素．如此继续下去，$A(\lambda)$终将化成所求的形式.

例1. 用初等变换化λ –矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

为标准形.

解

$$A(\lambda) \to \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}.$$

例1. 化下面的λ –矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$$

为标准形.

解 $A(\lambda)\rightarrow\begin{pmatrix}1+2\lambda+\lambda^2 & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1+2\lambda & \lambda & 0\\-\lambda^2 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2-2\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda^2-2\lambda & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+2\lambda+\lambda \end{pmatrix}.$$

将整数矩阵

$$\begin{pmatrix} 39 & 17 \\ 46 & 60 \end{pmatrix}$$

化成法式.

解.

$$\begin{pmatrix} 39 & 17 \\ 46 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)-2(2)]{} \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -74 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+15(1)} \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 1 & 315 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 315 \\ 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-5(1)} \begin{pmatrix} 1 & 315 \\ 0 & -1558 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1558 \end{pmatrix}$$

例 3. 设$f(\lambda)$与$g(\lambda)$互素，证明

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & \\ & g(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} g(\lambda) & \\ & f(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$$

证明. 我们只证明$\begin{pmatrix} f(\lambda) & \\ & g(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$.

因$\big(f(\lambda), g(\lambda)\big) = 1$，$\mathbf{F}[x]$中存在$u(x), v(x)$使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

则$\begin{pmatrix} f(\lambda) & \\ & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\lambda) & g(\lambda) \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\lambda) & -g(\lambda) \\ -f(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} f(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & -g(\lambda) \\ -f(\lambda) & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & -g(\lambda) \\ -f(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

(第二行乘1 + u(λ)加到第一行)

$$=\begin{pmatrix} 1 & -g(\lambda) \\ -f(\lambda) & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & g(\lambda) \\ -f(\lambda) & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & g(\lambda) \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$$

从一道作业题说起

求下列$\boldsymbol{\lambda}$ –矩阵的不变因子

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

解

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}$$

不变因子为：$\mathbf{1, 1, 1, (\boldsymbol{\lambda} - 2)^3}$