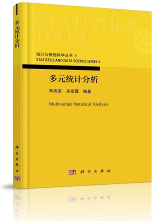
第6 章
多元正态分布的置信域和假设检验

李高荣

北京师范大学统计学院

E-mail: *ligaorong@bnu.edu.cn*



1. 总体均值向量的置信域估计
   - 单个多元正态总体
   - 两个多元正态总体
2. p值与似然比统计量
3. 总体均值向量的检验
4. 多总体均值向量的检验
   - 两正态总体均值向量比较的检验
   - 多元方差分析
5. 协方差阵的检验
   - 单个多元正态总体协方差阵的检验
   - 球形检验问题
   - 均值向量和协方差阵的联合检验问题
   - 多总体协方差阵的检验问题
   - 多正态总体均值向量和协方差阵的同时检验问题
6. 独立性检验

- 扫二维码获取在线课件和相关教学电子资源
- 请遵守电子资源使用协议

- 设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是来自$p$元正态总体$N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的随机样本，其中$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$，$n > p$。
- 样本均值$\bar{\boldsymbol{x}}$和协方差阵$\mathbf{S}$分别是$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$的无偏估计。
- 当$\boldsymbol{\Sigma}$已知时，由于$\bar{\boldsymbol{x}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/n)$，根据多元正态分布的性质，有

$$n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2.$$

- 可得$\boldsymbol{\mu}$的置信水平为$1-\alpha$的置信域为超椭球：

$$D = \{\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p : n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}^*) \leq c_\alpha\},$$

这里c_α表示自由度为p的χ^2分布的上侧α分位点，即$\Pr(\chi_p^2 > c_\alpha) = \alpha$。

R语言中有两个函数可以构造：

- 程序包mixtools中的函数ellipse()
- 程序包car中的函数dataEllipse()

用两种数据产生方法从二元正态总体$N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$中生成1000 个模拟数据，其中

$$\boldsymbol{\mu} = (0, 2)', \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 第一种：直接从函数mvrnorm()生成数据
- 第二种：基于多元正态分布的定义生成数据，即$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\mathbf{A}')$，其中

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_p)' \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p),$$

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_p})\boldsymbol{\Gamma}'.$$

```
library(MASS); library(car)
set.seed(1); n = 1000
mu = c(0, 2); Sig = matrix(c(1 ,0.7, 0.7, 1), 2, 2)
## 第一种数据产生方法:
biv1=mvrnorm(n, mu, Sig); colnames(biv1)=c("X","Y")
## 第二种由定义3.8产生方法:
sig.eigen = eigen(Sig)
Sigma=sig.eigen$vec%*%diag(sqrt(sig.eigen$val))%*%t(sig.eigen$vec)
biv2 = mu+t(matrix(rnorm(2*n),ncol=2)%*%Sigma)
biv2 = t(biv2); colnames(biv2) = c("X","Y")
par(mfrow = c(1, 2))
dataEllipse(biv1[, 1], biv1[, 2], levels = 0.95)
points(t(mu), col = 'red', pch = 8)
dataEllipse(biv2[, 1], biv2[, 2], levels = 0.95)
points(t(mu), col = 'red', pch = 8)
```

Σ已知时，μ的置信域

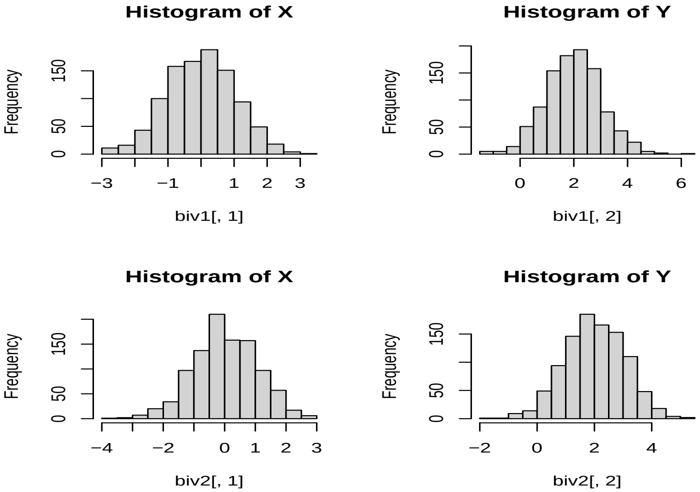


Figure: 两种数据的直方图。

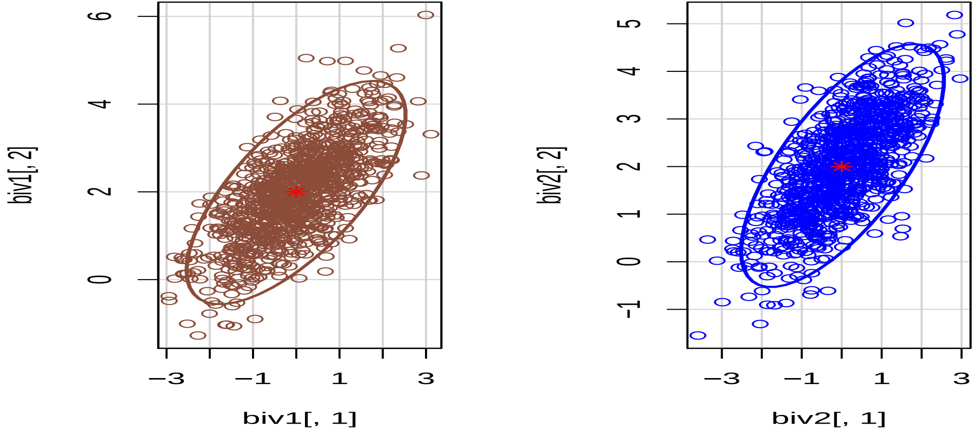


Figure: 均值向量$(\mu_1,\mu_2)'$的95%置信域，其中左图是第一种数据产生方法的95% 置信域，右图是第二种数据产生方法的95%置信域。

Σ未知时，μ的置信域

- 当Σ未知时，用无偏估计$\mathbf{S}$替换Σ，则有

$$\begin{aligned} T^2 &= n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \\ &= n(n-1)(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \\ &\sim T^2(p, n-1). \end{aligned}$$

- 或者由Hotelling T^2分布的性质4.3.4可知

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{(n-1)p}T^2(p, n-1) &= \frac{n(n-p)}{p}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \\ &\sim F_{p,n-p}. \end{aligned}$$

- 此结果可得$\boldsymbol{\mu}$的置信水平为$1-\alpha$的置信域为超椭球：

$$\mathcal{D}=\left\{\boldsymbol{\mu}^*\in\mathbb{R}^p:\frac{n(n-p)}{p}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)'\mathbf{V}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)\le c_\alpha^*\right\}$$

或

$$\mathcal{D}=\left\{\boldsymbol{\mu}^*\in\mathbb{R}^p:\frac{n(n-p)}{p(n-1)}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)\le c_\alpha^*\right\},$$

这里，c_α^*表示自由度为p和$n-p$的F分布的上侧α分位点，即$\Pr(F_{p,n-p}>c_\alpha^*)=\alpha$。

- 显然，置信域是以$\bar{\boldsymbol{x}}$为中心，椭球的轴为：

$$\pm\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{p}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\boldsymbol{e}_i,$$

其中$\mathbf{V}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$，$i=1,\cdots,p$。

- 等价的有：

$$\pm\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\boldsymbol{e}_i,$$

其中$\mathbf{S}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$，$i=1,\cdots,p$。

例子

考虑45个雄性钩嘴鸢的尾巴长度(X，单位：毫米)和翅膀长度(Y，单位：毫米)的数据，该数据来源于Johnson 和Wichern (2008)，并见下表。假设该数据来自一个二元正态分布$(X,Y)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$。试编程绘制尾巴长度($X$) 和翅膀长度($Y$) 的均值向量$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)'$ 置信水平为95%的置信域。

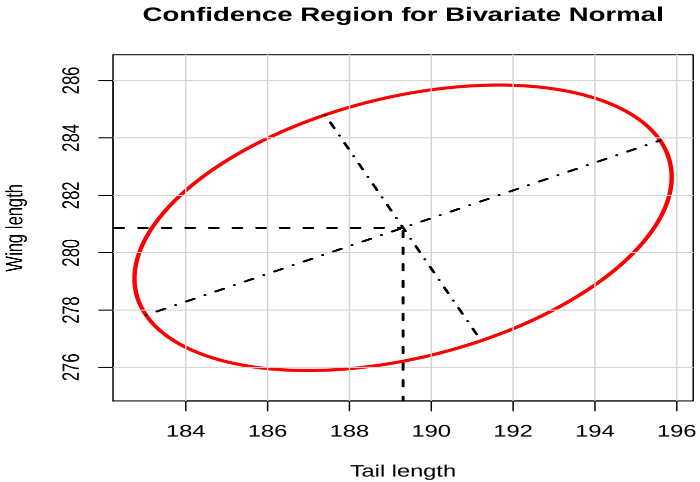
Σ未知时，μ的置信域

序号	X	Y	序号	X	Y	序号	X	Y
1	180	278	16	185	282	31	284	277
2	186	277	17	195	285	32	176	281
3	206	308	18	183	276	33	185	287
4	184	290	19	202	308	34	191	295
5	177	273	20	177	254	35	177	267
6	177	284	21	177	268	36	197	310
7	176	267	22	170	260	37	199	299
8	200	281	23	186	274	38	190	273
9	191	287	24	177	272	39	180	278
10	193	271	25	178	266	40	189	280
11	212	302	26	192	281	41	194	290
12	181	254	27	204	276	42	186	287
13	195	297	28	191	290	43	191	286
14	187	281	29	178	265	44	187	288
15	190	284	30	177	275	45	186	275

```
conf.ellipse = function(xdata, alpha){
  if(ncol(xdata)!=2) stop("Only for bivariate normal")
  n = nrow(xdata); xbar = colMeans(xdata)
  S = cov(xdata); es = eigen(S)
  e1 = es$vec %*% diag(sqrt(es$val))
  r1 = sqrt(qf(alpha,2,n-2))*sqrt(2*(n-1)/(n*(n-2)))
  theta = seq(0,2*pi, len=250)
  v1 = cbind(r1*cos(theta), r1*sin(theta))
  pts = t(xbar-(e1%*%t(v1)))
  plot(pts,type="l",col='red',lwd=3,main="Confidence Region for
       Bivariate Normal", xlab="X", ylab="Y", asp=1)
  grid(lty = 1, equilogs = FALSE)
```

程序

```
  segments(-0.2,xbar[2],xbar[1],xbar[2],lty=2,lwd=2)
  segments(xbar[1],0,xbar[1],xbar[2],lty=2,lwd=2)
  th2 = c(0,pi/2,pi,3*pi/2,2*pi)
  v2  = cbind(r1*cos(th2), r1*sin(th2))
  pts2 = t(xbar-(e1%*%t(v2)))
  segments(pts2[3,1],pts2[3,2],pts2[1,1],pts2[1,2],lty=4,lwd=2)
  segments(pts2[2,1],pts2[2,2],pts2[4,1],pts2[4,2],lty=4,lwd=2)
}
source("conf.ellipse.R")
XY.data  = read.table("Hook.DAT")
colnames(XY.data) = c("Tail length", "Wing length")
conf.ellipse(XY.data,alpha=0.95)
```



Confidence Region for Bivariate Normal
Wing length
Tail length
276
278
280
282
284
286
184
186
188
190
192
194
196

同时置信区间

问题：假设样本$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$独立同分布，并来自$p$元正态总体$N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，则对所有的$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^p$，如何构造$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$的置信度为$1-\alpha$的同时置信区间？

- 对任意的$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^p$，在多元正态总体下，$y_i=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_i\sim N_1(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{a}'\Sigma\boldsymbol{a})$，$i=1,\cdots,n$
- 从而由$(n-1)\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}=(n-1)S_y=\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2\sim\boldsymbol{a}'\Sigma\boldsymbol{a}\chi^2_{n-1}$，知

$$t=\frac{\bar{y}-\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{S_y/n}}=\frac{\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n}}\sim t_{n-1}$$

- 可得$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ 置信度为$1-\alpha$的置信区间：

$$\left[\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n},\ \ \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n}\right].$$

- 进一步

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n}}\right| \le t_{n-1}(\alpha/2).$$

- 从而，如果对所有的$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$，成立

$$\max_{\boldsymbol{a}\neq 0\in\mathbb{R}^p}\left|\frac{\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n}}\right| \le c$$

- 等价于

$$\max_{a\neq 0\in\mathbb{R}^p}\left[\frac{\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}/n}}\right]^2=\max_{a\neq 0\in\mathbb{R}^p}\frac{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}}\leq c^2$$

- 由Cauchy-Schwarz不等式：$(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{d})^2\leq(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d})$，有

$$\frac{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}}\leq T^2\sim\frac{p(n-1)}{n-p}F_{p,n-p}$$

当且仅当等号在$\boldsymbol{a}=d\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})$时成立，其中$d$为任意非零常数。

- 因此，取$c^2 = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)$，则由

$$\left\{ \frac{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}} \le c^2 \right\} \supseteq \{T^2 \le c^2\}.$$

- 对任意的$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，可知

$$\Pr\left(\frac{n\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}} \le c^2 \right) \ge \Pr(T^2 \le c^2) = 1-\alpha.$$

- 这时，对所有的$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$ 置信度为$1-\alpha$的同时置信区间为：

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \mp \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}}.$$

- 上述导出同时置信区间的方法，可以用在如何导出T^2统计量的过程中，由置信区间与假设检验的等价性，即

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \quad \text{等价于} \quad H_0 : \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_0, \forall \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}.$$

- 利用同时置信区间的结果，可得假设$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$的水平为$\alpha$的检验为：

$$T^2 > \frac{p(n-1)}{n-p}F_{p,n-p}(\alpha).$$

$\boldsymbol{\mu}$的分量$\mu_1, \cdots, \mu_p$置信度为$1-\alpha$的置信区间：

- 当取$\boldsymbol{a} = (1, 0, \cdots, 0)', \cdots, \boldsymbol{a} = (0, \cdots, 0, 1)'$时，可得下面$p$个同时置信区间：

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad \bar{x}_1 \mp \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) s_{11}} \\
&\qquad \vdots \\
C_p: &\quad \bar{x}_p \mp \sqrt{\frac{p(n-1)}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) s_{pp}}
\end{aligned}
$$

即

$$
\Pr\left(\prod_{i=1}^{p} C_i \right) \geq 1-\alpha.
$$

```
#### 构造均值向量的95%同时置信区间
mu1.L=xbar[1]-sqrt(((n-1)*p/(n-p))*qf(0.95,p,n-p))*sqrt(S[1,1]/n)
mu1.U=xbar[1]+sqrt(((n-1)*p/(n-p))*qf(0.95,p,n-p))*sqrt(S[1,1]/n)
mu2.L=xbar[2]-sqrt(((n-1)*p/(n-p))*qf(0.95,p,n-p))*sqrt(S[2,2]/n)
mu2.U=xbar[2]+sqrt(((n-1)*p/(n-p))*qf(0.95,p,n-p))*sqrt(S[2,2]/n)
c(mu1.L, mu1.U); c(mu2.L, mu2.U)
lines(c(mu1.L,mu1.L),c(0,mu2.U),lty=2,col=2,lwd=3)
lines(c(mu1.U,mu1.U),c(0,mu2.U),lty=2,col=2,lwd=3)
lines(c(0,mu1.U),c(mu2.L,mu2.L),lty=2,col=2,lwd=3)
lines(c(0,mu1.U),c(mu2.U,mu2.U),lty=2,col=2,lwd=3)
```

- 注意到$\mu_i(i=1,\cdots,p)$的边际$1-\beta$置信区间为：

$$B_i(\beta):\bar{x}_i-t_{n-1}(\beta/2)\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}\le\mu_i\le\bar{x}_i+t_{n-1}(\beta/2)\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}.$$

- 即$\Pr(\mu_i\in B_i(\beta))=1-\beta$，$i=1,\cdots,p$。
- 令$\overline{B}_i(\beta)$是$B_i(\beta)$的对立事件。由

$$\begin{aligned}\Pr\left(\prod_{i=1}^{p}B_i(\beta)\right) &= 1-\Pr\left(\sum_{i=1}^{p}\overline{B}_i(\beta)\right)\\ &\ge 1-\sum_{i=1}^{p}\Pr(\overline{B}_i(\beta))\end{aligned}$$

- 于是，若取$\beta=\alpha/p$，则

$$\Pr\left(\prod_{i=1}^{p}B_i(\alpha/p)\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha}{p}=1-\alpha.$$

- 从而，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_p$的$1-\alpha$的Bonferroni同时置信区间为：

$$B_1(\alpha/p):\quad \bar{x}_1\pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

$$B_2(\alpha/p):\quad \bar{x}_2\pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

$$\vdots$$

$$B_p(\alpha/p): \quad \bar{x}_p \pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}.$$

- 类似地，可得$\boldsymbol{\mu}$的分量差$\mu_i - \mu_k (i \neq k)$置信度为$1-\alpha$的Bonferroni同时置信区间为：

$$\left|\frac{\sqrt{n}[\bar{x}_i - \bar{x}_k - (\mu_i - \mu_k)]}{\sqrt{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}}\right| \leq t_{n-1}(\alpha/(p(p-1))), \quad i \neq k.$$

```
#### 构造均值向量的95% Bonferroni同时置信区间
mu1.LB=xbar[1]-qt(0.05/(2*p),n-1,lower.tail=F)*sqrt(S[1,1]/n)
mu1.UB=xbar[1]+qt(0.05/(2*p),n-1,lower.tail=F)*sqrt(S[1,1]/n)
mu2.LB=xbar[2]-qt(0.05/(2*p),n-1,lower.tail=F)*sqrt(S[2,2]/n)
mu2.UB=xbar[2]+qt(0.05/(2*p),n-1,lower.tail=F)*sqrt(S[2,2]/n)
c(mu1.LB, mu1.UB); c(mu2.LB, mu2.UB)
lines(c(mu1.LB,mu1.LB),c(0,mu2.UB),lty=6,col=4,lwd=3)
lines(c(mu1.UB,mu1.UB),c(0,mu2.UB),lty=6,col=4,lwd=3)
lines(c(0,mu1.UB),c(mu2.LB,mu2.LB),lty=6,col=4,lwd=3)
lines(c(0,mu1.UB),c(mu2.UB,mu2.UB),lty=6,col=4,lwd=3)
```

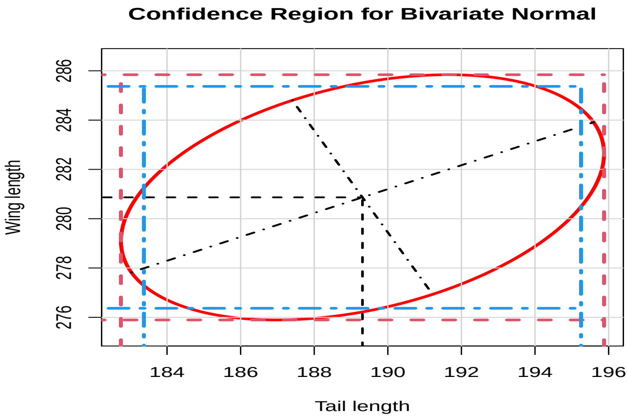


Figure: 均值向量$(\mu_1,\mu_2)'$的95%置信域(红色椭圆)、同时置信区间(红色虚线矩形)和Bonferroni 同时置信区间(蓝色点断线矩形)。

- 对比均值向量$\boldsymbol{\mu}$的任何分量的Bonferroni同时置信区间和同时置信区间，发现两者区间长度的比值为(表中结果取$\alpha = 0.05$):

$$\text{区间长度比值} = \frac{t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2p}\right)}{\sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p}F_{p,n-p}(\alpha)}}.$$

	$p=2$	$p=4$	$p=10$
$n=15$	0.88	0.69	0.29
$n=25$	0.90	0.75	0.48
$n=50$	0.91	0.78	0.58
$n=100$	0.91	0.80	0.66
$n=\infty$	0.91	0.81	0.66

μ的分量差$\mu_i - \mu_k (i \neq k)$的同时置信区间：

- 当取$\boldsymbol{a} = (0, \cdots, a_i, 0, \cdots, 0, a_k, 0, \cdots, 0)'$，其中$a_i = 1, a_k = -1$时，
  - $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu} = \mu_i - \mu_k$
  - $\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a} = s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}$
- 因此可得$\mu_i - \mu_k$的同时置信区间为：

$$\bar{x}_i - \bar{x}_k \mp \sqrt{\frac{p(n-1)}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}{n}}.$$

Bonferroni同时置信区间:

- $\bar{x}_i - \bar{x}_k \sim N(\mu_i - \mu_k, \sigma_{ik}^*/n)$，其中$\sigma_{ik}^* = \sigma_{ii} - 2\sigma_{ik} + \sigma_{kk}, i \neq k$;
- $(n-1)(s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk})/\sigma_{ik}^* \sim \chi_{n-1}^2$;
- $\bar{x}_i - \bar{x}_k$与$(n-1)(s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk})/\sigma_{ik}^*$相互独立;
- 则有

$$\frac{\sqrt{n}[\bar{x}_i - \bar{x}_k - (\mu_i - \mu_k)]}{\sqrt{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}} \sim t_{n-1}.$$

- 因此，可得$\boldsymbol{\mu}$的分量差$\mu_i - \mu_k (i \neq k)$的Bonferroni同时置信区间:

$$\left|\frac{\sqrt{n}[\bar{x}_i - \bar{x}_k - (\mu_i - \mu_k)]}{\sqrt{s_{ii} - 2s_{ik} + s_{kk}}}\right| \leq t_{n-1}(\alpha/(p(p-1))), \quad i \neq k.$$

当样本量n很大时，对均值向量的推断可以不假设多元正态成立。由大样本理论，知

$$\Pr[n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}) \le \chi_p^2(\alpha)] \approx 1-\alpha.$$

定理6.1.1

设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$为来自均值$\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的总体的简单随机样本，其中$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p, \boldsymbol{\Sigma} > 0$均未知，令$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\mathbf{S}$分别为样本均值和样本协方差矩阵，则当$n-p \to \infty$时，$\boldsymbol{\mu}$的一个渐近$1-\alpha$的置信域为：

$$\left\{\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^p \middle| n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}^*) \le \chi_p^2(\alpha)\right\}.$$

注：由置信区间和假设检验的等价性，也可用于$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \leftrightarrow H_1: \boldsymbol{\mu} \ne \boldsymbol{\mu}_0$的检验问题。

定理6.1.2

设$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$为来自均值$\boldsymbol{\mu}$，协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的总体的简单随机样本，其中$\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^p,\boldsymbol{\Sigma}>0$均未知，令$\overline{\boldsymbol{x}},\mathbf{S}$分别为样本均值和样本协方差矩阵，则当$n-p\to\infty$时，$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}$的一个渐近$1-\alpha$的置信区间为：

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}}-\sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}}{n}}\le\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}\le\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}}+\sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'\mathbf{S}\boldsymbol{a}}{n}},$$

其中$\boldsymbol{a}$为任意非零p维向量。

因此，$\mu_1,\cdots,\mu_p$的置信度为$1-\alpha$的同时置信区间为：

$$\bar{x}_i\mp\sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}},\quad i=1,\cdots,p.$$

- 设X和Y相互独立，且$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma})$ 和$Y \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$，$\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$。
- $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 和$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$是分别来自总体$X$和$Y$的随机样本，$n, m > p$。
- 记$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\bar{\boldsymbol{y}}$分别为它们的样本均值向量。
- 样本$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$的离差矩阵和样本协方差阵为

$$\mathbf{V}_1 = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \bar{\boldsymbol{x}})', \quad \mathbf{S}_1 = \frac{1}{n-1}\mathbf{V}_1.$$

- 样本$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$的离差矩阵和样本协方差阵分别为

$$\mathbf{V}_2 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \bar{\boldsymbol{y}})', \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{m-1}\mathbf{V}_2.$$

问题：讨论总体均值差$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$的置信域估计问题。

- 当Σ已知时，由于$\bar{\boldsymbol{x}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma/n)$，$\bar{\boldsymbol{y}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma/m)$，并且$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\bar{\boldsymbol{y}}$相互独立，则有

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}} \sim N_p\left(\boldsymbol{\delta}, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\Sigma\right).$$

- 根据多元正态分布的性质，有

$$\frac{nm}{n+m}[(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{\delta}]'\Sigma^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{\delta}] \sim \chi^2(p).$$

- 由此结果可得$\boldsymbol{\delta}$的置信水平为$1-\alpha$的置信域为超椭球：

$$\mathcal{D}=\left\{\boldsymbol{\delta}^* \in \mathbb{R}^p : \frac{nm}{n+m}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}^*]'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}^*] \leq c_\alpha\right\},$$

这里，c_α表示自由度为p的χ^2分布的上侧α分位点，即$\Pr(\chi_p^2 > c_\alpha) = \alpha$。

- 当Σ未知时，为了构造δ的置信域，首先需要找到Σ的最优无偏估计量。Σ唯一的最小协方差阵无偏估计为

$$\hat{\Sigma} = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{n+m-2} = \frac{n-1}{n+m-2}\mathbf{S}_1 + \frac{m-1}{n+m-2}\mathbf{S}_2.$$

- 考虑下面的枢轴统计量

$$\frac{(n+m-2)nm}{n+m}[(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{\delta}]'(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{\delta}].$$

- 由$\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}$与$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$相互独立，以及

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}[(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}) - \boldsymbol{\delta}] \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma),$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \sim W_p(n+m-2, \Sigma).$$

- 由上式和Hotelling T^2分布的定义4.4，有

$$
\begin{aligned}
T^2 &= \frac{(n+m-2)nm}{n+m}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}] \\
&= (n+m-2)\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]\right)'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1} \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]\right) \\
&\sim T^2(p, n+m-2).
\end{aligned}
$$

- 由Hotelling T^2分布的性质4.3.3和4.3.4，有

$$\frac{1}{n+m-2}T^2 = \frac{nm}{n+m}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]$$
$$\stackrel{d}{=} \frac{\chi^2_p}{\chi^2_{n+m-p-1}},$$

其中分子和分母的χ^2分布相互独立。

- 进一步有

$$
\begin{aligned}
&\frac{n+m-p-1}{(n+m-2)p}T^2 \\
&= \frac{(n+m-p-1)nm}{(n+m)p}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}]'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1}[(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\delta}] \\
&\sim F_{p,n+m-p-1}.
\end{aligned}
$$

- 此结果可得δ的置信水平为$1-\alpha$的置信域为超椭球：

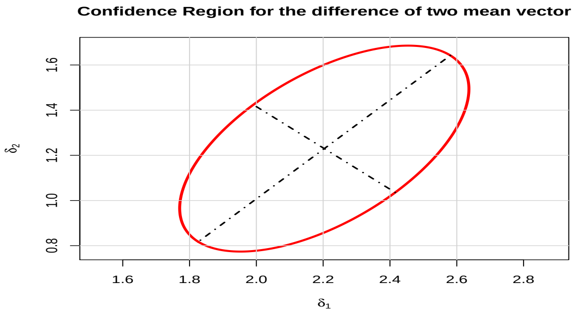
$$\mathcal{D}=\left\{\boldsymbol{\delta}^*\in\mathbb{R}^p:\frac{n+m-p-1}{(n+m-2)p}T^2\le c_\alpha^*\right\},$$

这里，c_α^*表示自由度为p和$n+m-p-1$的F分布的上侧α分位点，即$\Pr(F_{p,n+m-p-1}>c_\alpha^*)=\alpha$。

分别从二元正态总体$\boldsymbol{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma})$和$\boldsymbol{Y} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})$ 中生成50个和45个模拟数据，其中

$$\boldsymbol{\mu}_1 = (10, 4)', \quad \boldsymbol{\mu}_2 = (8, 3)', \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix}.$$

编程序并构造均值差$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$的95%置信域。



p值(Probability Value)

- 在介绍多元正态总体的假设检验问题之前，先介绍两个重要的概念：
  1. p值
  2. 似然比统计量
- 假设检验使用的原理是：小概率事件原理。
- 如果原假设H_0是正确的，那么衡量差异大小的某个统计量落入拒绝域W是一个小概率事件。如果该统计量的实测值落入拒绝域W，也就是说，H_0成立下的小概率事件发生了，那么就认为H_0不可信，需要拒绝原假设H_0。
- 通常称这个小概率为显著性水平，用α表示，取$\alpha = 0.1, 0.05$或0.01。

定义6.1：p值(Probability Value)

假设检验问题的p值是由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的**最小显著性水平**。

1. 如果拒绝域为$W=\{|T|>C\}$，则p值为：

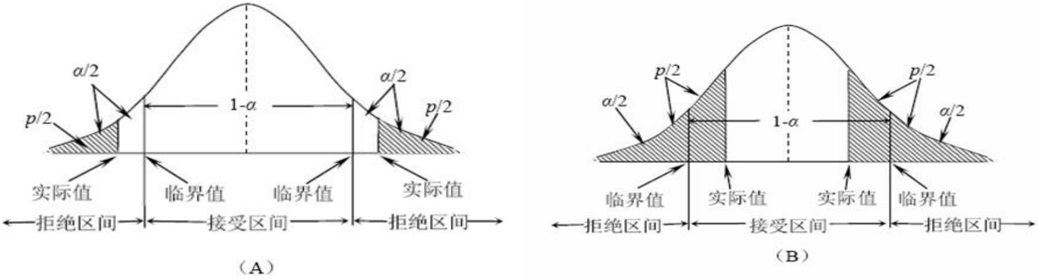
$$p_v=\Pr\left(|T|>|T_0|\big|H_0\right).$$

2. 如果拒绝域为$W=\{T>C\}$，则p值为：

$$p_v=\Pr(T>T_0|H_0).$$

3. 如果拒绝域为$W=\{T<C\}$，则p值为：

$$p_v=\Pr(T<T_0|H_0).$$



1. 当$p_v < \alpha$时，则在显著性水平α下否定原假设H_0；在这种情况下，可能犯“弃真"的第一类错误，且α 就是犯第一类错误的概率。
2. 当$p_v \geq \alpha$时，则在显著性水平α下接受原假设H_0；在这种情况下，可能犯“取伪"的第二类错误。

- 设p元总体$\boldsymbol{X}$的密度函数为$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$，其中$\boldsymbol{\theta}$是未知参数向量，且$\boldsymbol{\theta}\in\Theta$(参数空间)，又称$\Theta_0$是$\Theta$的子集。
- 考虑假设检验问题

$$H_0:\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0,\qquad H_1:\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1.$$

- 显然$\Theta_0\bigcap\Theta_1=\emptyset,\Theta_0\bigcup\Theta_1=\Theta$。
- 从总体$\boldsymbol{X}$抽取容量为n的样本$\mathcal{X}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，样本的联合密度函数为:

$$L(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{\theta})=\prod_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}),$$

记为$L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})$，称它为样本的似然函数。

- 引入统计量

$$\lambda(\mathcal{X})=\frac{\max\limits_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})}{\max\limits_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})}=\frac{L(\mathcal{X};\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{L(\mathcal{X};\widetilde{\boldsymbol{\theta}})},$$

其中$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$和$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$分别是参数$\boldsymbol{\theta}$在参数子空间$\Theta_0$和整个参数空间$\Theta$ 上的MLE，它们都是样本$\mathcal{X}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ 的函数，与参数$\boldsymbol{\theta}$无关。
- 因此，$\lambda(\mathcal{X})$是样本$\mathcal{X}$的函数，常把$\lambda(\mathcal{X})$称为似然比统计量。由于$\Theta_0\subset\Theta$，从而$0\leq\lambda(\mathcal{X})\leq 1$。
- 根据点估计理论中的极大似然原理，$L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})$可看作在给定样本$\mathcal{X}$下，$\boldsymbol{\theta}$有“多大可能" 出现的一种度量。

- 若$\lambda(\mathcal{X})$取值较小，也就是$L(\mathcal{X};\widehat{\boldsymbol{\theta}})$较$L(\mathcal{X};\widetilde{\boldsymbol{\theta}})$很小时，由于$L(\mathcal{X};\widehat{\boldsymbol{\theta}})=\sup\limits_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})$，所以在给定样本$\mathcal{X}$下，$\Theta_0$中的$\boldsymbol{\theta}$出现的可能性都很小，即原假设$H_0$为真的可能性很小，即完全有理由怀疑$H_0$不真。
- 因此，把似然比统计量$\lambda(\mathcal{X})$作为检验统计量，根据$\lambda(\mathcal{X})$取值大小做出检验结果：

$$
\text{当}\lambda(\mathcal{X}) \leq C\text{时，拒绝}H_0;
$$
$$
\text{当}\lambda(\mathcal{X}) > C\text{时，接受}H_0,
$$

其中常数$C(0<C<1)$为这个检验的临界值。

- 把这样的检验称为显著性水平为α的似然比检验(LRT)，这种方法称为似然比方法。
- 为了确定临界值C，需要采用Bootstrap方法或者研究似然比统计量$\lambda(\mathcal{X})$的抽样分布。

定理6.2.1

在一些正则条件下，则当$n \to \infty$时，变量

$$-2\ln\lambda(\mathcal{X}) = -2\ln\left[\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta}) \Big/ \max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1} L(\mathcal{X};\boldsymbol{\theta})\right] \xrightarrow{d} \chi^2_{p-k},$$

其中p是参数空间Θ的维数，k是参数子空间Θ_0的维数。

- 设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是来自$p$元正态总体$N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的随机样本，其中$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$，$n > p$。讨论总体均值$\boldsymbol{\mu}$的假设检验问题：

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0, \qquad H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0,$$

其中$\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$为给定的均值向量。

- 基于样本$\boldsymbol{x}_i (i = 1, \cdots, n)$，$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的似然函数为

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\{\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\}\Big)\right].$$

- 当Σ已知时，检验问题的似然比为：

$$\lambda = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)\right]}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}}\left\{\exp\left[-\dfrac{1}{2}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})\right]\right\}} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})\right]},$$

其中$\widehat{\boldsymbol{\mu}}$是在$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$时$\boldsymbol{\mu}$的MLE，所以$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{x}}$。

- 则似然比可表示为

$$\lambda = \exp\left[-\frac{1}{2}n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)\right].$$

Σ已知，总体均值向量μ的检验

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$。当原假设$H_0$为真时，$n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \sim \chi^2_p$。
- 因此取

$$\chi^2 = n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

作为检验统计量，并且在检验统计量χ^2比较大的时候拒绝原假设H_0。

- p值为：$p_v = \Pr(\chi^2_p \geq \chi^2)$.

- 当Σ未知时，似然比定义为：

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\Sigma}\left\{|\Sigma|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\{\mathbf{V}+n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\}\right)\right]\right\}}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\Sigma}\left\{|\Sigma|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\{\mathbf{V}+n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu})'\}\right)\right]\right\}}$$

$$= \frac{|\widehat{\Sigma}_0|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widehat{\Sigma}_0{}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{\mu}_0)(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{\mu}_0)'\right)\right)\right]}{|\widehat{\Sigma}|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widehat{\Sigma}^{-1}\{\mathbf{V}+n(\bar{\boldsymbol{x}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}}-\widehat{\boldsymbol{\mu}})'\}\right)\right]}.$$

- $\widehat{\Sigma}_0$是在原假设H_0为真，即$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$，$\Sigma > 0$ 时，Σ的MLE定义为：

$$\widehat{\Sigma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)'.$$

- 分母中的$\widehat{\mu}$和$\widehat{\Sigma}$分别为$\boldsymbol{\mu}$和Σ的MLE，定义为：

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\boldsymbol{x}}, \qquad \widehat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})' = \frac{\mathbf{V}}{n}.$$

- 利用分块矩阵行列式的计算，有

$$\left|\mathbf{I}_p + n\mathbf{V}^{-1/2}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{V}^{-1/2}\right| = 1 + n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{V}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0).$$

- 由上面的讨论，似然比可以表示为

$$\lambda = \left(\frac{|\mathbf{V}|}{\left|\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\right|}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{\left|\mathbf{I}_p + n\mathbf{V}^{-1/2}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{V}^{-1/2}\right|}\right)^{n/2}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{V}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}\right)^{n/2}.$$

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$。

- 考虑下面的检验统计量：

$$T^2 = n(n-1)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{V}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0),$$

在T^2较大时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$。

- 由Hotelling T^2分布的性质，有

$$\frac{1}{n-1}T^2 \stackrel{d}{=} \frac{\chi_p^2}{\chi_{n-p}^2}, \quad \text{分子与分母的}\chi^2\text{分布相互独立},$$

$$\frac{n-p}{(n-1)p}T^2 \sim F_{p,n-p}.$$

- 故，Hotelling T^2检验的p值为

$$p_v = \Pr\left(F_{p,n-p} \geq \frac{n-p}{(n-1)p}T^2\right).$$

- 对于Hotelling T^2检验，可以使用R语言程序包ICSNP 中的函数HotellingsT2()，调用格式如下。

```
HotellingsT2(X, Y = NULL, mu = NULL,
             test = "f",
             na.action = na.fail, ...)
```

其中X表示数据框数据或数据矩阵，Y是另一个数据框数据或数据矩阵，如果使用两样本均值检验时需要，mu表示原假设给定的均值向量，test="f"表示决策基于F分布，test="chi"表示决策基于逼近的卡方分布。

20位健康女性出汗数据

个体	X_1	X_2	X_3	个体	X_1	X_2	X_3
1	3.7	48.5	9.3	11	3.9	36.9	12.7
2	5.7	65.1	8.0	12	4.5	58.8	12.3
3	3.8	47.2	10.9	13	3.5	27.8	9.8
4	3.2	53.2	12.0	14	4.5	40.2	8.4
5	3.1	55.5	9.7	15	1.5	13.5	10.1
6	4.6	36.1	7.9	16	8.5	56.4	7.1
7	2.4	24.8	14.0	17	4.5	71.6	8.2
8	7.2	33.1	7.6	18	6.5	52.8	10.9
9	6.7	47.4	8.5	19	4.1	44.1	11.2
10	5.4	54.1	11.3	20	5.5	40.9	9.4

- 考虑Johnson和Wichern(2008)中表5.1的20位健康女性出汗数据，其中X_1 表示出汗率，X_2表示含钠量，X_3 表示含钾量。考虑假设检验：$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 = (4, 50, 10)'$，显著性水平取$\alpha = 0.1$。
- 编写函数T2.test()

```
T2.test = function(X, mu0){
 n = nrow(X); p = ncol(X)
 Xbar = colMeans(X); S = cov(X)
 T2 = n*t(Xbar-mu0)%*%solve(S)%*%(Xbar-mu0)
 T2.adj = (n-p)*T2/(p*(n-1))
 pval = 1- pf(T2.adj, p, n-p)
 cat("Hotelling T-squared statistic", fill=T)
 data.frame(T2=T2, T2.adj=T2.adj, p.value=pval)
}
```

```
sweat = read.table("T5-1.DAT")    ##读入数据
mu0 = c(4, 50, 10); T2.test(sweat, mu0)
## 输出结果:
     Hotelling T-squared statistic
        T2    T2.adj     p.value
1 9.738773 2.904546 0.06492834
## 使用程序包ICSNP中函数HotellingsT2()计算
library(ICSNP)
HotellingsT2(sweat, mu = mu0)
## 输出结果:
        Hotelling's one sample T2-test
data:  sweat
T.2=2.9045, df1=3, df2=17, p-value=0.06493
alternative hypothesis:true location is not equal to c(4,50,10
```

- 设相互独立的p元正态总体$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$和$\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$，$\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{\Sigma}_1 > 0,\ \boldsymbol{\Sigma}_2 > 0$;
- $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$是分别来自总体$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$的样本，$n+m \geq p+2$;
- 记$\overline{\boldsymbol{x}}$和$\overline{\boldsymbol{y}}$分别为它们的样本均值向量;
- $\mathbf{V}_1$和$\mathbf{S}_1$是样本$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$的离差阵和协方差阵;
- $\mathbf{V}_2$和$\mathbf{S}_2$是样本$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$的离差阵和协方差阵。
- 考虑下面的假设检验问题

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = 0, \qquad H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 \neq 0.$$

- 样本$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$的联合密度为：

$$\frac{1}{(2\pi)^{(n+m)p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{(n+m)/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1)' + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)']\Big)\right\}$$

- 则$(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$的似然函数为：

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2) &= \exp\left\{ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1)(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1)' + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)']\Big)\right\} \\ &= \exp\left\{ -\frac{1}{2}[n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_1) + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{\mu}_2)]\right\}. \end{aligned}$$

- 当$\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}^p$时，$\boldsymbol{\mu}_1$ 和$\boldsymbol{\mu}_2$的MLE分别为：$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 = \bar{\boldsymbol{x}}$，$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2 = \bar{\boldsymbol{y}}$;
- 在原假设H_0成立，即当$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}$ 时，$\boldsymbol{\mu}$的MLE 为：

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 = (n\bar{\boldsymbol{x}} + m\bar{\boldsymbol{y}})/(n+m);$$

- 则检验问题的似然比为：

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2} L(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)} = \frac{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)}{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1, \widehat{\boldsymbol{\mu}}_2)} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}[n(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0) + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)]\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{nm}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})\right]\right\}.
\end{aligned}$$

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$。当原假设$H_0$为真时，有

$$\frac{nm}{n+m}(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}})'\Sigma^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}) \sim \chi_p^2;$$

- 因此，考虑下面的检验统计量

$$\chi^2 = \frac{nm}{n+m}(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}})'\Sigma^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}),$$

并且在检验统计量χ^2比较大的时候拒绝原假设H_0;

- p值为

$$p_v = \Pr(\chi_p^2 \geq \chi^2).$$

- 当$\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$未知时，$(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\Sigma)$的似然函数为：

$$L(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\Sigma)=\frac{1}{|\Sigma|^{(n+m)/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\Sigma^{-1}[\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\right.$$
$$\left.+n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_1)(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_1)'+m(\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{\mu}_2)(\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{\mu}_2)']\Big)\right\}.$$

- 当$\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2\in\mathbb{R}^p$，$\Sigma>0$ 时，$\boldsymbol{\mu}_1$和$\boldsymbol{\mu}_2$ 的MLE分别为：$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1=\bar{\boldsymbol{x}}$，$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2=\bar{\boldsymbol{y}}$;
- Σ的MLE为：$\widehat{\Sigma}=(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)/(n+m)$.
- 在原假设H_0成立，即当$\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\mu},\Sigma>0$时，$\boldsymbol{\mu}$ 的MLE为：

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0=(n\bar{\boldsymbol{x}}+m\bar{\boldsymbol{y}})/(n+m).$$

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ 未知时，总体均值向量的检验

- 当原假设H_0成立时，将似然函数$L(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma)$中的均值向量$\boldsymbol{\mu}_1$和$\boldsymbol{\mu}_2$都用$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$来代替，从而得到原假设$H_0$成立时$\Sigma$的似然函数为：

$$L(\Sigma) = \frac{1}{|\Sigma|^{(n+m)/2}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\Sigma^{-1}[\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)' + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)']\Big)\Big\}.$$

- 由上面Σ的似然函数，当原假设H_0成立时，Σ的MLE为：

$$\widehat{\Sigma}_0 = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)(\bar{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)' + m(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)(\bar{\boldsymbol{y}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_0)'}{n+m} = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \frac{nm}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})'}{n+m}.$$

$\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$ 未知时，总体均值向量的检验

- 从而检验问题的似然比为：

$$\lambda=\frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma})}=\frac{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0,\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0,\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_0)}{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1,\widehat{\boldsymbol{\mu}}_2,\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})}=\left(\frac{|\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2|}{\left|\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2+\frac{nm}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})'\right|}\right)^{(n+m)/2}.$$

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu}_1\neq\boldsymbol{\mu}_2$。经过计算，有

$$\begin{aligned}&\left|\mathbf{I}_p+\frac{nm}{n+m}(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1/2}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1/2}\right|\\&=1+\frac{nm}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})'(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}}).\end{aligned}$$

- 这时，似然比为：

$$\lambda = \left(1 + \frac{nm}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})'(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})\right)^{-(n+m)/2}.$$

- 由Hotelling T^2分布的定义，取统计量为：

$$T^2 = \frac{nm(n+m-2)}{n+m}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}})'(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{y}}).$$

- 在原假设H_0为真，即$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2$时，$T^2 \sim T^2(p, n+m-2)$，并且在$T^2$较大时拒绝原假设$H_0$，从而认为备择假设$H_1$成立，即$\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2$。

- 根据Hotelling T^2分布的性质，有

$$\frac{1}{n+m-2}T^2(p, n+m-2) \stackrel{d}{=} \frac{\chi_p^2}{\chi_{n+m-p-1}^2},$$

分子与分母的χ^2分布相互独立，

$$\frac{n+m-p-1}{(n+m-2)p}T^2(p, n+m-2) \sim F_{p,n+m-p-1}.$$

- 所以Hotelling T^2检验的p值为：

$$p_v = \Pr\left(F_{p,n+m-p-1} \geq \frac{n+m-p-1}{(n+m-2)p}T^2\right).$$

研究从农场到奶场运输牛奶的成本费用，对从事牛奶运输的公司进行了调查，其中第一种采用汽油卡车运输(包含36个样本)，第二种采用柴油卡车运输(包含23个样本)，且令X_1 表示燃料费用，X_2表示修理费用，X_3表示投资资本，所有测量值均以英里为单位。取显著性水平$\alpha = 0.05$，考虑检验问题$H_0 : \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = (0,0,0)'$。

```
library(ICSNP)
Milk = read.table("Milk.DAT")
X = Milk[1:36, 1:3]; colnames(X) = c("X1","X2","X3")
Y = Milk[37:59,1:3]; colnames(Y) = c("Y1","Y2","Y3")
delta0 = c(0, 0, 0); HotellingsT2(X, Y, mu = delta0)
## 输出结果
        Hotelling's two sample T2-test
data:  X and Y
T.2 = 16.375, df1 = 3, df2 = 55, p-value = 1e-07
alternative hypothesis: true location difference is
                                 not equal to c(0,0,0)
```

- 设有r个相互独立的p元正态总体$\boldsymbol{X}_k \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma})$，$\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$;
- $\boldsymbol{x}_{k1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{kn_k}$是来自总体$\boldsymbol{X}_k$的样本，$k = 1, \cdots, r$;
- 记$n = \sum_{k=1}^r n_k$，$n \geq p + r$;
- 考虑r个总体均值是否全部相等的假设检验问题，即

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \cdots = \boldsymbol{\mu}_r, \quad H_1 : \boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r \text{不全相等}.$$

- 当$p > 1$时，上面的假设检验问题称为多元方差分析。

- 样本$\boldsymbol{x}_{k1},\cdots,\boldsymbol{x}_{kn_k}(k=1,\cdots,r)$的联合密度函数为：

$$\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k+\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)'\right]\right)\right\}$$

- 则$\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r,\boldsymbol{\Sigma}$的似然函数为$L(\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r;\boldsymbol{\Sigma})$：

$$L=\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\Big[\sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k+\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)'\Big]\Big)\right\}.$$

1. $\bar{\boldsymbol{x}}_k=\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\boldsymbol{x}_{ki}$是第$k$个总体的样本均值向量
2. $\mathbf{V}_k=\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)'$是第$k$个总体的样本离差阵

- 当$\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^p(k=1,\cdots,r)$，$\boldsymbol{\Sigma}>0$时，$\boldsymbol{\mu}_k$的MLE为：

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k = \overline{\boldsymbol{x}}_k, \qquad k=1,\cdots,r;$$

- $\boldsymbol{\Sigma}$的MLE为：$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_{k=1}^r \mathbf{V}_k/n$，其中$\sum_{k=1}^r \mathbf{V}_k$就是通常所说的组内离差阵，记为

$$\mathbf{SSA} = \sum_{k=1}^r \mathbf{V}_k = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} (\boldsymbol{x}_{ki}-\overline{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_{ki}-\overline{\boldsymbol{x}}_k)'.$$

- 由于$\mathbf{V}_k \sim W_p(n_k-1,\boldsymbol{\Sigma})$且相互独立$(k=1,\cdots,r)$，由可加性质可知：

$$\mathbf{SSA} \sim W_p(n-r,\boldsymbol{\Sigma}), \qquad n=\sum_{k=1}^r n_k.$$

- 在原假设H_0成立，即当$\boldsymbol{\mu}_1 = \cdots = \boldsymbol{\mu}_r = \boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$时，$\boldsymbol{\mu}$的MLE为：

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0 = \overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}\boldsymbol{x}_{ki} = \sum_{k=1}^{r}\frac{n_k\overline{\boldsymbol{x}}_k}{n}.$$

- 将$L(\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma})$中的均值向量$\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r$都用$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0$来代替，从而得到原假设$H_0$成立时$\boldsymbol{\Sigma}$的似然函数为：

$$L(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\mathbf{SSA} + \mathbf{SSB}\right]\right)\right\},$$

其中$\mathbf{SSB} = \sum_{k=1}^{r} n_k(\overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})(\overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})'$ 为组间离差阵。

- 极大化似然函数$L(\Sigma)$关于Σ，得Σ的MLE为： $\widehat{\Sigma}_0 = \dfrac{\mathbf{SSA} + \mathbf{SSB}}{n}$.
- 若令总的离差阵为：$\mathbf{SST} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}})'$.
- 对总的离差阵进行分解，有

$$
\begin{aligned}
\mathbf{SST} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}})' = \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}}_k + \overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}}_k + \overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})' \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_{ki} - \overline{\boldsymbol{x}}_k)' + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})(\overline{\boldsymbol{x}}_k - \overline{\boldsymbol{x}})' \\
&= \mathbf{SSA} + \mathbf{SSB}.
\end{aligned}
$$

- 当原假设H_0成立时，**SSB** $\sim W_p(r-1,\Sigma)$；
- 不论原假设H_0是否成立，都有**SSA** $\sim W_p(n-r,\Sigma)$；
- 证明：当原假设H_0成立时，**SST** $\sim W_p(n-1,\Sigma)$，且组内离差阵**SSA**与组间离差阵**SSB**相互独立；
- 则检验问题的似然比为：

$$\lambda=\frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\Sigma} L(\boldsymbol{\mu},\cdots,\boldsymbol{\mu},\Sigma)}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r,\Sigma} L(\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r,\Sigma)}=\frac{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\mu}}_0,\widehat{\Sigma}_0)}{L(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_1,\cdots,\widehat{\boldsymbol{\mu}}_r,\widehat{\Sigma})}$$

$$=\left(\frac{|\mathbf{SSA}|}{|\mathbf{SSA}+\mathbf{SSB}|}\right)^{n/2}.$$

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，从而认为备择假设H_1成立，即$\boldsymbol{\mu}_1 \neq \cdots \neq \boldsymbol{\mu}_r$。
- 当原假设H_0成立时，$\mathbf{SSA} \sim W_p(n-r, \Sigma)$，$\mathbf{SSB} \sim W_p(r-1, \Sigma)$，$\mathbf{SSA}$与$\mathbf{SSB}$相互独立，并由Wilks分布的定义有

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{SSA}|}{|\mathbf{SSA} + \mathbf{SSB}|} \sim \Lambda(p, n-r, r-1).$$

- 因此，取Λ为检验统计量，在Λ较小时拒绝H_0，从而认为H_1 成立，即$\boldsymbol{\mu}_1 \neq \cdots \neq \boldsymbol{\mu}_r$。
- 当给定显著性水平α时，可以通过查Wilks分布分位数表得临界值C_α，使得

$$\Pr(\Lambda \leq C_\alpha) = \alpha.$$

- 因此，拒绝原假设H_0的拒绝域为$W = \{\Lambda \le C_\alpha\}$。
- 在工程问题中，很少提供Wilks分布分位数表，常见的是χ^2分布、t分布和F分布的分位数表。
- 在$p = 1, 2$或$m = 1, 2$时，为了计算简单，Wilks分布可转化为F分布。
- 下面讨论在$p = 1, 2$或$r = 2, 3$时，把服从Wilks分布$\Lambda(p, n-r, r-1)$的检验统计量Λ转化为F分布的检验统计量计算p值。

(1) 当$p=1$时，$\Lambda \sim \Lambda(1, n-r, r-1)$，有

$$F = \frac{n-r}{r-1}\frac{1-\Lambda}{\Lambda} \overset{d}{=} F_{r-1,n-r},$$

则检验的p值为：$p_v = \Pr(F_{r-1,n-r} \geq F)$。在$p=1$时，$\Lambda = \mathbf{SSA}/(\mathbf{SSA}+\mathbf{SSB})$，所以$F$实际上就是

$$F = \frac{\mathbf{SSB}/(r-1)}{\mathbf{SSA}/(n-r)},$$

容易看出F就是一元统计中大家所熟悉的方差分析的F统计量。

(2) 当$r=2$时，$\Lambda \sim \Lambda(p, n-2, 1)$，有

$$F = \frac{n-1-p}{p}\frac{1-\Lambda}{\Lambda} \overset{d}{=} F_{p,n-1-p},$$

则检验的p值为$p_v = \Pr(F_{p,n-1-p} \geq F)$。

(3) 当$p=2$时，$\Lambda\sim\Lambda(2,n-r,r-1)$，有

$$F=\frac{n-r-1}{r-1}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\overset{d}{=}F_{2(r-1),2(n-r-1)},$$

则检验的p值为$p_v=\Pr(F_{2(r-1),2(n-r-1)}\geq F)$。

(4) 当$r=3$时，$\Lambda\sim\Lambda(p,n-3,2)$，有

$$F=\frac{n-2-p}{p}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\overset{d}{=}F_{2p,2(n-2-p)},$$

则检验的p值为$p_v=\Pr(F_{2p,2(n-2-p)}\geq F)$。

问题：当$p\neq 1,2$或$r\neq 2,3$时，如何确定拒绝域？

(5) 当$p \neq 1, 2$或$r \neq 2, 3$时，可以根据似然比统计量的极限分布定理，在原假设H_0为真时，有

$$-2\ln\lambda = -n\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{(r-1)p},$$

其中

- λ为似然比
- 渐近χ^2分布的自由度$(r-1)p = rp + p(p+1)/2 - p - p(p+1)/2$
- $rp + p(p+1)/2$是完全参数空间被估计的独立参数的个数
- $p + p(p+1)/2$是原假设成立时参数空间被估计参数的个数

- 因此，Wilks Λ检验的渐近p值为

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{(r-1)p} \geq -n\ln\Lambda\right).$$

- 为了提高渐近p值的精度，Bartlett (1938a)给出了下面修正后的似然比检验的精度为n^{-2}的渐近p值，即

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{(r-1)p} \geq -\left(n-1-\frac{p+r}{2}\right)\ln\Lambda\right) + O(n^{-2}).$$

- 例：为了研究某种疾病，对一批人同时测量了4个指标：β脂蛋白(X_1)，甘油三酯(X_2)，α脂蛋白(X_3)，前β脂蛋白(X_4)。按不同的年龄和性别分为3组：(1) 20–35岁的女性；(2) 20–25 岁的男性；(3) 35–50岁的男性。试问在显著性水平$\alpha = 0.01$下，这3个组的4 项指标间有无显著性差异？

- 比较3个组($r=3$)的4项指标($p=4$)间是否存在差异问题，其实就是要进行多元方差分析。假设第k组为4元正态总体$N_4(\boldsymbol{\mu}_k,\Sigma)$，其中$k=1,2,3$。来自3 个总体的样本量为$n_1=n_2=n_3=20$，总样本量为$n=60$。考虑假设检验：

$$H_0:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\mu}_3 \longleftrightarrow H_1:\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\mu}_3\text{中至少有一对不相等}.$$

- 考虑似然比统计量$\Lambda\sim\Lambda(p,n-r,r-1)$。既然$p=4$，$r=3$，$n-r=57$，则$\Lambda\sim\Lambda(4,57,2)$。这时，取$F$检验统计量为

$$F=\frac{n-2-p}{p}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}=\frac{54}{4}\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\overset{d}{=}F_{8,108}.$$

```
X = read.table("Body.txt", header=F)
colnames(X) = c("X1", "X2", "X3", "X4", "Y")
Y = factor(X$Y); X = as.matrix(X[,1:4])
fit = manova(X~Y)
summary(fit, test="Wilks")
## 输出结果:
    Df   Wilks approx F num Df den Df   Pr(>F)
Y     2 0.66212   3.0907      8    108 0.003538 **
Residuals 57
---
Signif.codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

- 设$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$是来自$p$元正态总体$N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的随机样本，其中$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$，$n > p$。
- 当$\boldsymbol{\mu}$未知时，总体协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$的假设检验问题

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0(\text{已知}), \qquad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0. \tag{5.1}$$

- 对$\boldsymbol{x}_i$作变换，$i = 1, \cdots, n$，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}).$$

- 当原假设H_0成立，即$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$时，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_p).$$

- 因此，对上面的假设检验问题，仅需讨论协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$是否等于单位阵$\mathbf{I}_p$的假设检验问题，即

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p, \qquad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}_p. \tag{5.2}$$

- $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的似然函数为

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\{\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\}\right)\right].$$

- 当原假设H_0成立时，$\boldsymbol{\mu}$的MLE为$\bar{\boldsymbol{x}}$；
- 而当备择假设H_1成立，$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$的MLEs 分别为$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\mathbf{V}/n$。

- 因此，检验问题(5.2)的似然比检验统计量为：

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}} L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_p)}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \left(\frac{e}{n}\right)^{pn/2} |\mathbf{V}|^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{V})\right\}. \tag{5.3}$$

- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，即认为$\boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}_p$。
- 当样本量n很大时，并且在原假设H_0成立，即$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p$时，根据似然比统计量的极限分布定理，有

$$-2\ln\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{p(p+1)/2}, \quad n \to \infty.$$

- 自由度$p(p+1)/2 = [p+p(p+1)/2] - p$，其中
  - $p+p(p+1)/2$表示在完全参数空间被估计的参数个数
  - p表示在原假设成立时参数空间被估计的参数个数
- 从而得到检验问题(5.2)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\ln\lambda).$$

- 类似的，可以得到检验问题(5.1)的似然比检验统计量为：

$$\lambda_1 = \left(\frac{e}{n}\right)^{pn/2} |\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}|^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})\right\}. \tag{5.4}$$

- 则检验问题(5.1)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\ln\lambda_1).$$

- 问题：下面讨论对于检验问题(5.2)和(5.1)，如何修正似然比检验统计量(5.3)和(5.4)？并且讨论如何改进修正似然比检验的渐近p 值？

- 则检验问题(5.1)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\ln\lambda_1).$$

- 问题：下面讨论对于检验问题(5.2)和(5.1)，如何修正似然比检验统计量(5.3)和(5.4)？并且讨论如何改进修正似然比检验的渐近p值？
- 既然Σ的极大似然估计$\mathbf{V}/n$是有偏估计，而样本协方差阵$\mathbf{V}/(n-1)$是Σ的无偏估计。

- 对似然比统计量(5.3)和(5.4)修正的方法就是将样本容量n换成$n-1$，分别得到修正的似然比统计量为：

$$\lambda^* = \left(\frac{e}{n-1}\right)^{p(n-1)/2} |\mathbf{V}|^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{V})\right\}$$

和

$$\lambda_1^* = \left(\frac{e}{n-1}\right)^{p(n-1)/2} |\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}_0^{-1}|^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}_0^{-1})\right\}.$$

- 当$n\to\infty$时，有

$$(-2\ln\lambda) - (-2\ln\lambda^*) \xrightarrow{P} 0, \qquad (-2\ln\lambda_1) - (-2\ln\lambda_1^*) \xrightarrow{P} 0.$$

- 说明$-2\ln\lambda^*$与$-2\ln\lambda$，$-2\ln\lambda_1^*$与$-2\ln\lambda_1$ 有相同的极限分布，即$\chi^2_{p(p+1)/2}$。
- 可以证明修正以后检验问题(5.2)和(5.1) 的渐近p值分别为：

$$\Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\ln\lambda^*) + O(n^{-1}),$$

$$\Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\ln\lambda_1^*) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度，进一步引入调整参数：

$$\rho = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(n-1)}.$$

- 使得修正后的似然比检验的精度为n^{-2}的渐近p值分别为：

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\rho \ln \lambda^*) + O(n^{-2}),$$

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+1)/2} \geq -2\rho \ln \lambda_1^*) + O(n^{-2}).$$

- 下面讨论总体协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$是否与已知正定矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_0$成比例的检验问题。令$\sigma^2 > 0$未知，考虑检验问题：

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0, \qquad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0. \tag{5.5}$$

- 对样本$\boldsymbol{x}_i (i = 1, \cdots, n)$的分布作(5.2)的变换。不失一般性，对检验问题(5.5)的讨论，仅讨论总体协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$是否与单位矩阵$\mathbf{I}_p$成比例的检验问题，即

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_p, \qquad H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_p. \tag{5.6}$$

- 如$H_0: \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_p$成立，则总体$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$。可知：$N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$的密度函数等高曲面是$p$维欧氏空间$\mathbb{R}^p$中的超球面。
- 因此把检验问题(5.6)称为球形检验(Sphericity test)问题；
- 进而推广将协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$是否与已知正定矩阵$\boldsymbol{\Sigma}_0$成比例的检验问题(5.5) 统称为球形检验问题。

- $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的似然函数为

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\{\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\}\right)\right].$$

- 当原假设$H_0 : \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_p$成立，MLE分别为：$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{x}}$，$\widehat{\sigma}^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{V})/(pn)$；
- 当备择假设H_1成立，$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$的MLE 分别为：$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\mathbf{V}/n$。
- 检验问题(5.6)的似然比检验统计量为

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\sigma^2} L(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_p)}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \frac{|\mathbf{V}|^{n/2}}{(\mathrm{tr}(\mathbf{V})/p)^{np/2}}. \tag{5.7}$$

- 由似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，即认为$\boldsymbol{\Sigma} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_p$。
- 似然比检验统计量λ可以改写成下面的形式：

$$\lambda^{2/(np)} = \frac{|\mathbf{V}|^{1/p}}{\mathrm{tr}(\mathbf{V})/p} = \frac{\sqrt[p]{\eta_1 \cdots \eta_p}}{(\eta_1 + \cdots + \eta_p)/p}, \tag{5.8}$$

其中$\eta_1, \cdots, \eta_p$是离差阵$\mathbf{V}$的p个非零特征值。

- 由算术—几何平均值不等式：$\sqrt[p]{\eta_1 \cdots \eta_p} \leq \frac{\eta_1 + \cdots + \eta_p}{p}$，等号成立当且仅当$\eta_1 = \cdots = \eta_p$，则可知似然比检验统计量$\lambda \leq 1$，并且当且仅当$\mathbf{V}$的特征值全都相等的时候才有$\lambda = 1$。

- 也就是说，当**V**的特征值全都相等的时候，**V**就与单位阵成比例。
- 说明在λ比较大的时候认为原假设H_0成立的可能性要大，因此这样的似然比检验方法是非常合理的。
- 根据似然比统计量的极限分布定理，当样本量n很大时，并且在H_0 : $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_p$成立时，有

$$-2\ln\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1}, \quad n \to \infty \tag{5.9}$$

- 自由度$p(p+1)/2-1 = [p+p(p+1)/2]-(p+1)$
  - $p+p(p+1)/2$表示在完全参数空间被估计的独立的参数个数
  - $p+1$表示在原假设成立时参数空间被估计的独立参数的个数

- 检验问题(5.6)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\ln\lambda\right).$$

- 由(5.2)和(5.7)，类似可得检验问题(5.5) 的似然比检验统计量为：

$$\lambda_1 = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}|^{n/2}}{(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V})/p)^{np/2}}. \tag{5.10}$$

- 进而可得检验问题(5.5)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\ln\lambda_1\right).$$

- 将样本容量n换成$n-1$，分别得到似然比统计量(5.7) 和(5.10)的修正似然比统计量为：

$$\lambda^* = \frac{|\mathbf{V}|^{(n-1)/2}}{(\mathrm{tr}(\mathbf{V})/p)^{(n-1)p/2}},$$

$$\lambda_1^* = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V}|^{(n-1)/2}}{(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{V})/p)^{(n-1)p/2}}.$$

- 证明：当$n \to \infty$，并且原假设H_0成立时，修正后的似然比统计量λ^*和λ_1^*仍有渐近的χ^2分布，即有

$$-2\ln\lambda^* \xrightarrow{d} \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1}, \qquad -2\ln\lambda_1^* \xrightarrow{d} \chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1}.$$

- 可得到球形检验问题(5.6)和(5.5)的修正以后的渐近p值分别为:

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\ln\lambda^*\right) + O(n^{-1}),$$
$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\ln\lambda_1^*\right) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度，引入调整参数$\rho = 1 - \frac{2p^2+p+2}{6p(n-1)}$，使得修正后的渐近$p$值分别为:

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\rho\ln\lambda^*\right) + O(n^{-2}),$$
$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{p(p+1)}{2}-1} \geq -2\rho\ln\lambda_1^*\right) + O(n^{-2}).$$

- 考虑总体均值向量和协方差阵的联合检验问题：

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0, \quad H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0, \tag{5.11}$$

其中$\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$已知，且$\boldsymbol{\Sigma}_0 > 0$已知。

- 当$\boldsymbol{\mu}_0$和$\boldsymbol{\Sigma}_0$已知时，对$\boldsymbol{x}_i$作变换，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0), \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}), \quad i = 1, \cdots, n.$$

- 当原假设H_0成立，则$\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$。故不失一般性，对于假设检验问题(5.11)，仅需讨论下面的假设检验问题：

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p, \quad H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}_p. \tag{5.12}$$

均值向量和协方差阵的联合检验问题

- $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的似然函数为

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\{\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\}\right)\right].$$

- 当备择假设H_1成立，即当$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$未知时，均值向量$\boldsymbol{\mu}$和协方差阵$\boldsymbol{\Sigma}$的MLE 分别为$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\mathbf{V}/n$。
- 因此，检验问题(5.12)的似然比检验统计量为：

$$\lambda = \frac{L(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})} = \left(\frac{e}{n}\right)^{pn/2} |\mathbf{V}|^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{V} + n\bar{\boldsymbol{x}}\,\bar{\boldsymbol{x}}')\right\}. \quad (5.13)$$

- 利用似然比原理，在λ比较小的时候拒绝原假设H_0，即认为$\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}_p$。
- 当样本量n很大时，并且在$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p$成立时，根据似然比统计量的极限分布定理，有

$$-2\ln\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{p(p+3)/2}, \quad n \to \infty \tag{5.14}$$

- 自由度为$p(p+3)/2 = p + p(p+1)/2$
  - $p + p(p+1)/2$表示在完全参数空间被估计的独立的参数个数
  - 而在原假设成立时参数空间被估计的独立参数的个数为0

- 则检验问题(5.12)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+3)/2} \geq -2\ln\lambda) + O(n^{-1}).$$

- 由(5.12)和(5.13)，类似可得检验问题(5.11) 的似然比检验统计量为：

$$\lambda_1 = \left(\frac{e}{n}\right)^{pn/2} |\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}|^{n/2} \exp\Big[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\{\mathbf{V} + n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\}\Big)\Big]. \tag{5.15}$$

- 可得检验问题(5.11)的渐近p值为:

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+3)/2} \geq -2\ln\lambda_1) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度, 引入调整参数$\rho = 1 - \frac{2p^2+9p+11}{6n(p+3)}$, 使得联合检验问题(5.12)和(5.11)的似然比检验精度为n^{-2}的渐近p值分别为

$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+3)/2} \geq -2\rho\ln\lambda) + O(n^{-2}),$$
$$p_v = \Pr(\chi^2_{p(p+3)/2} \geq -2\rho\ln\lambda_1) + O(n^{-2}).$$

- 设有r个相互独立的p元正态总体$\boldsymbol{X}_k \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$, $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}_k > 0$;
- $\boldsymbol{x}_{k1}, \cdots, \boldsymbol{x}_{kn_k}$是来自总体$\boldsymbol{X}_k$的随机样本, $k = 1, \cdots, r$;
- 记$n = \sum_{k=1}^{r} n_k$, $n_k \geq p + 1$。
- 考虑这r个总体协方差阵是否全部相等的假设检验问题，即

$$\begin{aligned} H_0 &: \boldsymbol{\Sigma}_1 = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_r = \boldsymbol{\Sigma}, \\ H_1 &: \boldsymbol{\Sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\Sigma}_r\text{不全相等}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

- 样本$\boldsymbol{x}_{k1},\cdots,\boldsymbol{x}_{kn_k}(k=1,\cdots,r)$的联合密度函数为：

$$\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k+\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)'\right]\right)\right\}$$

- 对$k=1,\cdots,r$，其中
  - $\bar{\boldsymbol{x}}_k=\frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\boldsymbol{x}_{ki}$是第$k$个总体的样本均值向量
  - $\mathbf{V}_k=\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)'$是第$k$个总体的样本离差阵
- 则$\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r,\boldsymbol{\Sigma}$的似然函数$L(\boldsymbol{\mu}_1,\cdots,\boldsymbol{\mu}_r,\boldsymbol{\Sigma})$为：

$$L=\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k+\sum_{k=1}^{r}n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{\mu}_k)'\right]\right)\right\}.$$

- 不论原假设H_0是否成立，$\boldsymbol{\mu}_k$的MLE都为$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_k = \bar{\boldsymbol{x}}_k (k = 1, \cdots, r)$;
- 当$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_1 = \cdots = \boldsymbol{\Sigma}_r = \boldsymbol{\Sigma}$成立时，$\boldsymbol{\Sigma}$的MLE为$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \sum_{k=1}^r \mathbf{V}_k / n$，其中$\sum_{k=1}^r \mathbf{V}_k$是组内离差阵;
- 在$\boldsymbol{\Sigma}_k > 0 (k = 1, \cdots, r)$时，$\boldsymbol{\Sigma}_k$的MLE为$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_k = \mathbf{V}_k / n_k$，由此得到检验问题(5.16)的似然比检验统计量为:

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}, \cdots, \boldsymbol{\Sigma})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\Sigma}_r} L(\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\Sigma}_r)} = \frac{n^{pn/2}}{\prod\limits_{k=1}^r n_k^{pn_k/2}} \frac{\prod\limits_{k=1}^r |\mathbf{V}_k|^{n_k/2}}{\left| \sum\limits_{k=1}^r \mathbf{V}_k \right|^{n/2}}. \quad (5.17)$$

- 利用似然比原理，在λ比较小的时候拒绝原假设H_0，即$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_r$不全相等。
- 根据似然比统计量的极限分布定理，当样本容量n足够大，并在原假设成立时，可以证明

$$-2\ln\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_{\frac{(r-1)p(p+1)}{2}}, \quad n\to\infty \tag{5.18}$$

- 自由度为$(r-1)p(p+1)/2=[rp+rp(p+1)/2]-[rp+p(p+1)/2]$
  - $rp+rp(p+1)/2$表示在完全参数空间被估计的独立的参数个数
  - $rp+p(p+1)/2$表示在原假设成立时参数空间被估计的独立参数的个数

- 问题：根据无偏性的要求如何对似然比统计量λ进行修正？如果提高检验问题(5.16)的渐近p值的精度？
- 对似然比统计量λ的修正方法是将每一个总体的样本容量n_k都换成$n_k-1, k=1,\cdots,r$。并将总的样本量n换成$n-r$，则修正后的似然比检验统计量为：

$$\lambda^* = \frac{(n-r)^{p(n-r)/2}}{\prod_{k=1}^{r}(n_k-1)^{p(n_k-1)/2}} \frac{\prod_{k=1}^{r}|\mathbf{V}_k|^{(n_k-1)/2}}{\left|\sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k\right|^{(n-r)/2}}. \quad (5.19)$$

- 当$n \to \infty$，且原假设H_0成立时，可以证明修正后的对数似然比统计量$-2\ln\lambda^*$ 和$-2\ln\lambda$有相同的渐近χ^2分布。
- 修正后的似然比检验的渐近p值为

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{(r-1)p(p+1)}{2}} \geq -2\ln\lambda^*\right) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度，进一步引入调整参数$\rho = 1 - \nu$

- 其中ν为

$$
\nu = \begin{cases} \dfrac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(r-1)}\left[\sum_{k=1}^{r}\dfrac{1}{n_k-1}-\dfrac{1}{n-r}\right], & \text{当}n_k\text{不全等;} \\ \dfrac{(2p^2+3p-1)(r+1)}{6(p+1)(n-r)}, & \text{当}n_k\text{全相等.} \end{cases}
$$

- 因此，所得检验问题(5.16)的似然比检验精度为n^{-2}的渐近p值为

$$
p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{(r-1)p(p+1)}{2}} \geq -2\rho \ln \lambda^*\right) + O(n^{-2}).
$$

- 对身体指标化验数据进行分析。取显著性水平$\alpha = 0.1$，试判断3个组的协方差矩阵是否相等？
- 假设第k组数据来自4元正态总体$N_4(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$，其中$k = 1, 2, 3$。
- 即考虑如下的假设检验：

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_3 \leftrightarrow H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\Sigma}_3\text{至少有一对不相等}.$$

- 可知，$r = 3$，$p = 4$，$n_1 = n_2 = n_3 = 20$，总样本量$n = 60$。

```
multi.cov.test=function(data, ind, r){
  n=nrow(data); p=ncol(data)-1; data=data[ ,1:p]
  V=0
  for (i in 1:r)
  {
    datai=data[ind==i, ]; ni=nrow(datai)
    V=V+(ni-1)*cov(datai)
  }
  det.V=0
  for (i in 1:r)
  {
    datai=data[ind==i, ]; ni=nrow(datai)
    det.V=det.V+(ni-1)*log(det(cov(datai)))
  }
  M=(n-r)*log(det(V/(n-r)))-det.V
  nu=(2*p^2+3*p-1)*(r+1)/(6*(p+1)*(n-r))
  f=p*(p+1)*(r-1)/2;  T = (1-nu)*M
  p.value=1-pchisq(T, f)
  return(p.value=p.value)
}
```

```
X = read.table("Body.txt", header=F)
colnames(X) = c("X1","X2","X3","X4","Y")
Y = factor(X$Y)
multi.cov.test(X, ind=Y, r=3)
## 输出结果:
[1] 0.4373646
```

- 由计算得到的p值可看出：$p_v \approx 0.4374 > 0.1 = \alpha$。因此，接受原假设，认为这3个组的协方差矩阵之间没有显著性差异。

考虑这r个总体均值向量和协方差阵是否分别全部相等的假设检验问题，即

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \cdots = \boldsymbol{\mu}_r, \quad \Sigma_1 = \cdots = \Sigma_r, \\ H_1 : \boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r \text{不全相等或} \Sigma_1, \cdots, \Sigma_r \text{不全相等}. \end{cases} \tag{5.20}$$

记号：

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}_k &= \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}\boldsymbol{x}_{ki}, \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}\boldsymbol{x}_{ki}, \quad n = \sum_{k=1}^{r} n_k, \\ \mathbf{V}_k &= \sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}}_k)', \quad \mathbf{SSA} = \sum_{k=1}^{r}\mathbf{V}_k, \\ \mathbf{SST} &= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k}(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_{ki}-\bar{\boldsymbol{x}})' = \mathbf{SSA} + \sum_{k=1}^{r} n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\bar{\boldsymbol{x}})(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\bar{\boldsymbol{x}})'. \end{aligned}$$

- SST为总的离差阵
- SSA为组内离差阵
- $\mathbf{SSB} = \sum_{k=1}^{r} n_k(\bar{\boldsymbol{x}}_k - \bar{\boldsymbol{x}})(\bar{\boldsymbol{x}}_k - \bar{\boldsymbol{x}})'$为组间离差阵
- 检验问题(5.20)的似然比检验统计量为:

$$\lambda_T = \frac{n^{pn/2}}{\prod_{k=1}^{r} n_k^{pn_k/2}} \frac{\prod_{k=1}^{r} |\mathbf{V}_k|^{n_k/2}}{|\mathbf{SST}|^{n/2}}. \qquad (5.21)$$

- Λ表示当协方差阵均相等时检验r个总体均值向量是否相等的似然比统计量，其中Λ为

$$\Lambda = \left(\frac{|\mathbf{SSA}|}{|\mathbf{SSA} + \mathbf{SSB}|} \right)^{n/2}.$$

- 用(5.17)定义的λ表示多个协方差阵是否全都相等的似然比检验统计量，其中λ为

$$\lambda = \frac{n^{pn/2}}{\prod_{k=1}^{r} n_k^{pn_k/2}} \frac{\prod_{k=1}^{r} |\mathbf{V}_k|^{n_k/2}}{|\mathbf{SSA}|^{n/2}}.$$

- 容易看出：$\lambda_T = \Lambda \cdot \lambda$。
- 采用类似的修正方法，在似然比统计量λ_T中将每一个总体的样本容量n_k都换成$n_k - 1$，将总的样本量n 换成$n - r$，则修正后的似然比检验统计量为:

$$\lambda_T^* = \frac{(n-r)^{p(n-r)/2}}{\prod_{k=1}^{r}(n_k-1)^{p(n_k-1)/2}} \frac{\prod_{k=1}^{r}|\mathbf{V}_k|^{(n_k-1)/2}}{|\mathbf{SST}|^{(n-r)/2}}. \tag{5.22}$$

- 利用似然比原理，在λ_T^*比较小的时候拒绝原假设H_0，即$\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_r$不全相等或$\boldsymbol{\Sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\Sigma}_r$不全相等。

- 根据似然比统计量的极限分布定理，当样本容量n足够大，并在原假设成立时，可以证明：

$$-2\ln\lambda_T^* \xrightarrow{d} \chi^2_{\frac{(r-1)p(p+3)}{2}}, \quad n \to \infty \tag{5.23}$$

- 自由度为$(r-1)p(p+3)/2 = [rp + rp(p+1)/2] - [p + p(p+1)/2]$
  - $rp + rp(p+1)/2$表示在完全参数空间被估计的独立的参数个数
  - $p + p(p+1)/2$表示在原假设成立时参数空间被估计的独立参数的个数

- 由(5.23)，则修正后的似然比检验的渐近p值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{(r-1)p(p+3)}{2}} \geq -2\ln\lambda_T^*\right) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度，进一步引入调整参数

$$\rho = 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad \alpha = \frac{2p^2+9p+11}{6(p+3)(r-1)}\left(\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{h_k} - 1\right),$$

$$h_k = \frac{n_k}{n}, \quad k = 1, \cdots, r.$$

- 检验问题(5.20)精度为n^{-2}的渐近p值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi^2_{\frac{(r-1)p(p+3)}{2}} \geq -2\rho\ln\lambda_T^*\right) + O(n^{-2}).$$

- 设$\mathscr{X}' = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$是来自$p$维正态分布总体$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的随机样本，其中$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{\Sigma} > 0$，$n > p$。
- 将总体$\boldsymbol{X}$剖分为m个子向量，而$\boldsymbol{\mu}$与$\boldsymbol{\Sigma}$也相应的进行剖分

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}^{(m)} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{array}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}^{(m)} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{array},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma}_{mm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{array}, \quad \text{其中} \sum_{k=1}^{m} q_k = p\text{。}$$

- $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}^{(i)}, \boldsymbol{X}^{(j)}) = \boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \boldsymbol{0}(1 \le i < j \le m)$都成立，是$\boldsymbol{X}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(m)}$相互独立的充要条件。
- 下面讨论$\boldsymbol{X}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(m)}$是否相互独立的假设检验问题，即

$$H_0 : \boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \boldsymbol{0}, \quad H_1 : \boldsymbol{\Sigma}_{ij}\text{不全为}\boldsymbol{0}, \tag{6.1}$$

其中$1 \le i < j \le m$。

- 对样本$\mathcal{X}' = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$的样本均值向量$\bar{\boldsymbol{x}}$和样本离差阵$\mathbf{V}$也作类似的剖分，有

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{x}}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{matrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \cdots & \mathbf{V}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{V}_{m1} & \cdots & \mathbf{V}_{mm} \end{pmatrix} \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{matrix}.$$

- 在原假设H_0成立，即$\boldsymbol{X}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(m)}$相互独立($\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{0}$, $1 \leq i < j \leq m$)时，样本的联合密度为:

$$\frac{1}{(2\pi)^{np/2} \prod_{k=1}^{m} |\boldsymbol{\Sigma}_{kk}|^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1} \left[\mathbf{V}_{kk} + n(\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)})(\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)})' \right] \right) \right\}.$$

- 当原假设H_0成立时，$(\boldsymbol{\mu}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\mu}^{(m)},\boldsymbol{\Sigma}_{11},\cdots,\boldsymbol{\Sigma}_{mm})$ 的似然函数为：

$$
\begin{aligned}
& L_0(\boldsymbol{\mu}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\mu}^{(m)},\boldsymbol{\Sigma}_{11},\cdots,\boldsymbol{\Sigma}_{mm}) \\
= & \frac{1}{(2\pi)^{np/2}\prod_{k=1}^{m}|\boldsymbol{\Sigma}_{kk}|^{n/2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{tr}\Big(\boldsymbol{\Sigma}_{kk}^{-1}\Big[\mathbf{V}_{kk} \\
& +n(\overline{\boldsymbol{x}}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)})(\overline{\boldsymbol{x}}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)})'\Big]\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

- 当原假设成立时，$\boldsymbol{\mu}^{(k)}$和$\boldsymbol{\Sigma}_{kk}$的MLE分别为：$\overline{\boldsymbol{x}}^{(k)}$和$\mathbf{V}_{kk}/n$，$k=1,\cdots,m$。

- 在完全参数空间$(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$的似然函数为: $L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，表达式见前面。
- 均值向量$\boldsymbol{\mu}$和协方差阵Σ的MLE 分别为$\bar{\boldsymbol{x}}$和$\mathbf{V}/n$。
- 因此，检验问题(6.1)的似然比检验统计量为:

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\mu}^{(m)},\boldsymbol{\Sigma}_{11},\cdots,\boldsymbol{\Sigma}_{mm}} L_0(\boldsymbol{\mu}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\mu}^{(m)},\boldsymbol{\Sigma}_{11},\cdots,\boldsymbol{\Sigma}_{mm})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} L(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})}$$

$$= \left(\frac{|\mathbf{V}|}{\prod\limits_{k=1}^{m} |\mathbf{V}_{kk}|} \right)^{n/2}.$$

独立性检验

- 由样本离差阵$\mathbf{V}$构造样本相关系数矩阵$\mathbf{R}$，类似的将它剖分为:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \cdots & \mathbf{R}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{m1} & \cdots & \mathbf{R}_{mm} \end{pmatrix} & \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{matrix} \end{array}.$$

- 检验问题(6.1)的似然比检验统计量可变换为:

$$\lambda = \left(\frac{|\mathbf{V}|}{\prod_{k=1}^{m} |\mathbf{V}_{kk}|} \right)^{n/2} = \left(\frac{|\mathbf{R}|}{\prod_{k=1}^{m} |\mathbf{R}_{kk}|} \right)^{n/2}.$$

- 表明: $\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$是否相互独立仅与样本的相关结构有关。
- 在实际计算时，我们仍然使用样本离差阵$\mathbf{V}$来计算似然比统计量λ。
- 利用似然比原理，在λ较小时拒绝原假设H_0，即认为$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$不相互独立。
- 当样本量n很大时，并且在原假设H_0成立，即$\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(m)}$相互独立时，根据似然比统计量的极限分布定理，有

$$-2\ln\lambda \xrightarrow{d} \chi^2_f, \quad n\to\infty \tag{6.2}$$

- 自由度为

$$f = \frac{p^2 - \sum_{k=1}^{m} q_k^2}{2} = \left[p + \frac{p(p+1)}{2}\right] - \left[p + \frac{\sum_{k=1}^{m} q_k(q_k+1)}{2}\right],$$

  - $p + p(p+1)/2$ 表示在完全参数空间被估计的独立的参数个数
  - $p + \sum_{k=1}^{m} q_k(q_k+1)/2$表示在原假设成立时参数空间被估计的独立参数的个数

- 检验问题(6.1)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr(\chi_f^2 \geq -2\ln\lambda).$$

- 采用类似的修正方法，在似然比统计量λ中将样本容量n都换成$n-1$，修正后的似然比检验统计量为

$$\lambda^* = \left(\frac{|\mathbf{V}|}{\prod_{k=1}^{m} |\mathbf{V}_{kk}|} \right)^{(n-1)/2}. \tag{6.3}$$

- 当样本容量n足够大，在H_0成立时，可以证明:

$$-2\ln\lambda^* \xrightarrow{d} \chi^2_f, \quad n \to \infty. \tag{6.4}$$

- 由式(6.4)，则修正后的似然比检验的渐近p 值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi_f^2 \geq -2\ln\lambda^*\right) + O(n^{-1}).$$

- 为了提高渐近p值的精度，进一步引入调整参数

$$\rho = 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad \alpha = \frac{2\left(p^3 - \sum_{k=1}^m q_k^3\right) + 9\left(p^2 - \sum_{k=1}^m q_k^2\right)}{6\left(p^2 - \sum_{k=1}^m q_k^2\right)}.$$

- 因此，所得检验问题(6.1)的渐近p值为：

$$p_v = \Pr\left(\chi_f^2 \geq -2\rho\ln\lambda^*\right) + O(n^{-2}).$$

- 对20位健康女性出汗数据进行分析。显著性水平取$\alpha = 0.05$，检验随机向量$\boldsymbol{X}$的三个分量是否相互独立？
- 假设随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)' \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，其中$\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{3\times3}$。
- 考虑如下的假设检验：

$$H_0 : \sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = 0,\ \sigma_{23} = 0,$$
$$H_1 : \sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{23}\text{不全为}0.$$

- 取检验统计量为$-2\rho\ln\lambda^*$，$n = 20$，$p = 3$，$q_1 = q_2 = q_3 = 1$，$m = 3$。

```
sweat = read.table("T5-1.DAT")
colnames(sweat)=c("Sweat rate","Sodium","Potassium")
n = nrow(sweat); p = ncol(sweat)
V = (n-1)*cov(sweat); A = det(V)/prod(diag(V))
rho = 1 - ((p^3-3)/(3*(p^2-3))+3/2)/n
f = (p^2-3)/2; T = -2*rho*(n-1)/2*log(A)
p.value=1-pchisq(T, f)
## 输出p值为：
[1] 0.02593504
```

- 由计算结果知：$p_v \approx 0.02594 < 0.05 = \alpha$。因此，拒绝原假设，表明随机向量的三个分量不相互独立。


多元统计分析
STATISTICS
DATA
统计与数据科学丛书 4
STATISTICS AND DATA SCIENCE SERIES 4
多元统计分析
李高荣 吴密霞 编著
Multivariate Statistical Analysis
科学出版社

谢谢，请多提宝贵意见！