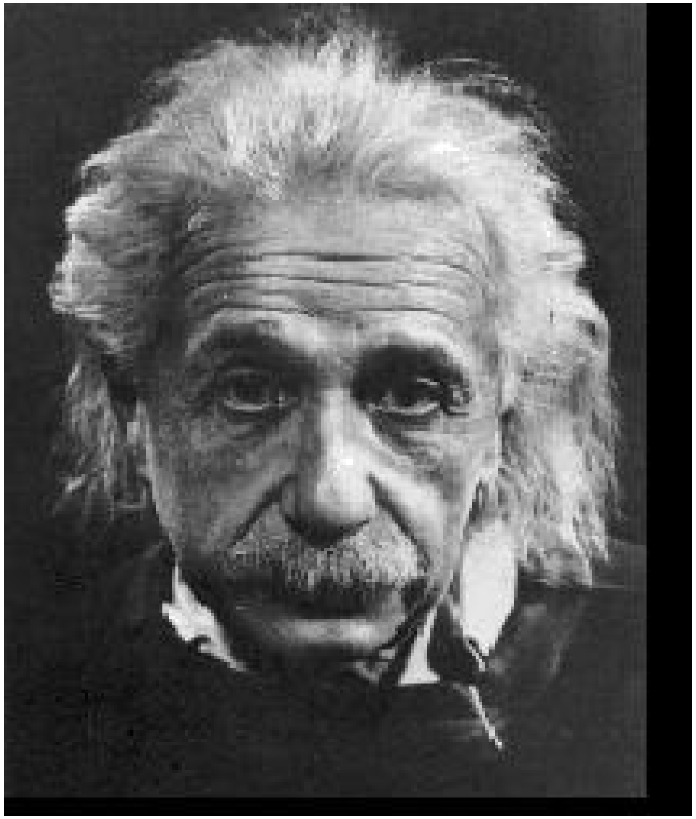
第12章 狭义相对论基础



爱因斯坦: **Einstein**

现代时空的创始人

牛顿力学：宏观……微观（量子力学）

低速……高速（相对论）

相对论力学：狭义：惯性系，时空与运动

广义：非惯性系，时空与引力

注意：不要抱住老的时空观念不放，

应该根据实验事实建立新观念。

经典力学的绝对时空观

牛顿说“绝对空间，就其本性而言，与外界任何事物无关，而永远是相同的和不动的”。

“绝对的、真正的数学的时间自己流逝着，并由于它的本性均匀地与任何外界现象无关的流逝着”。

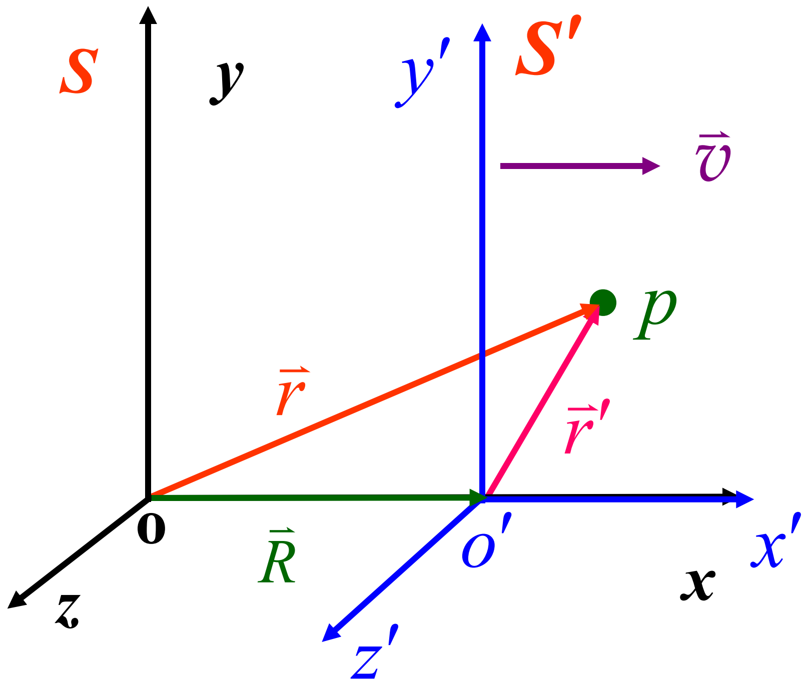
1. 时间，空间与物质的运动无关.
2. 时间与空间彼此无关.
3. 时间间隔，空间间隔的度量绝对不变.

§1 伽利略变换 经典力学的相对性原理

一、伽利略变换

$\vec{R} = \vec{v}\, t$

坐标变换: $\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}}$



$$\begin{cases} x' = x - v\,t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= x' + v\,t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

速度变换: $\boxed{\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v}}$ 加速度变换: $\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}}$

二、经典力学相对性原理

$$S \quad \vec{F} \quad m \quad \vec{a} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

$$S' \quad \vec{F}' \quad m' \quad \vec{a}' \qquad \vec{F}' = m'\vec{a}'$$

在牛顿力学中力与参考系无关，质量与运动无关。

力学的相对性原理	力学定律在一切惯性系内是相同的，并不存在一个比其他惯性系优越的惯性系。

或 牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变

三、 经典时空观

$$\begin{cases} x' = x - vt & x = x' + vt' \\ y' = y & y = y' \\ z' = z & z = z' \\ t' = t & t = t' \end{cases}$$

推导过程中默认了空间间隔、时间间隔与惯性参考系的选择无关

时间间隔度量绝对不变

$$t' = t \longrightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = \Delta t'$$

空间间隔度量绝对不变

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = (x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)$$

$$= x_2 - x_1 = \Delta x$$

经典力学遇到的困难

19世纪下半叶，得到了电磁学的基本规律即麦克斯韦电磁场方程组。

例如，麦克斯韦电磁场方程组中有真空中的电磁波速（光速）c：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8.85 \times 10^{-12})}}$$

$$= 2.998 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

人们认为这是光相对以太的运动速度。

光相对以太沿各个方向的运动速度都是c。

以太就是绝对的惯性参考系。

对电磁现象的研究表明:

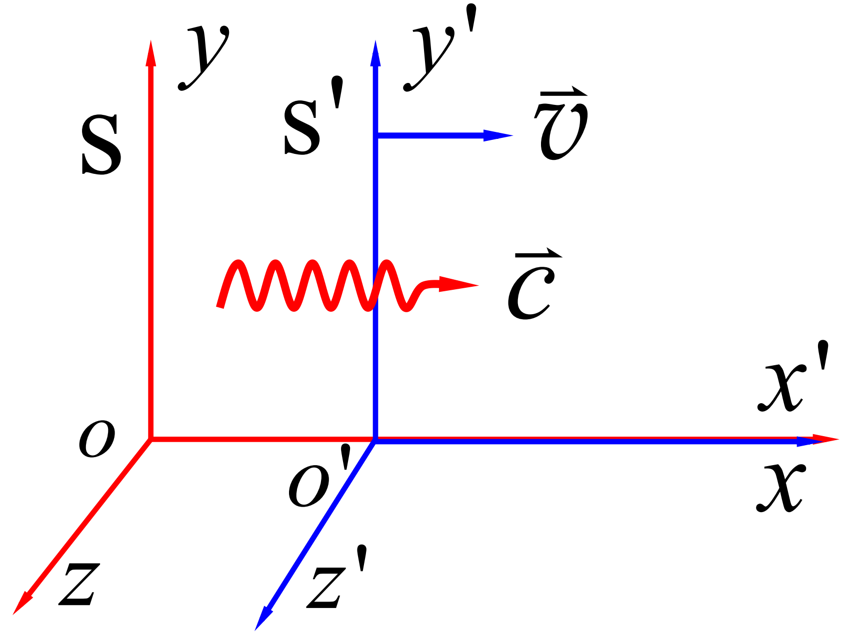
电磁现象所遵从的麦克斯韦方程组

不服从伽利略变换.

根据伽利略变换

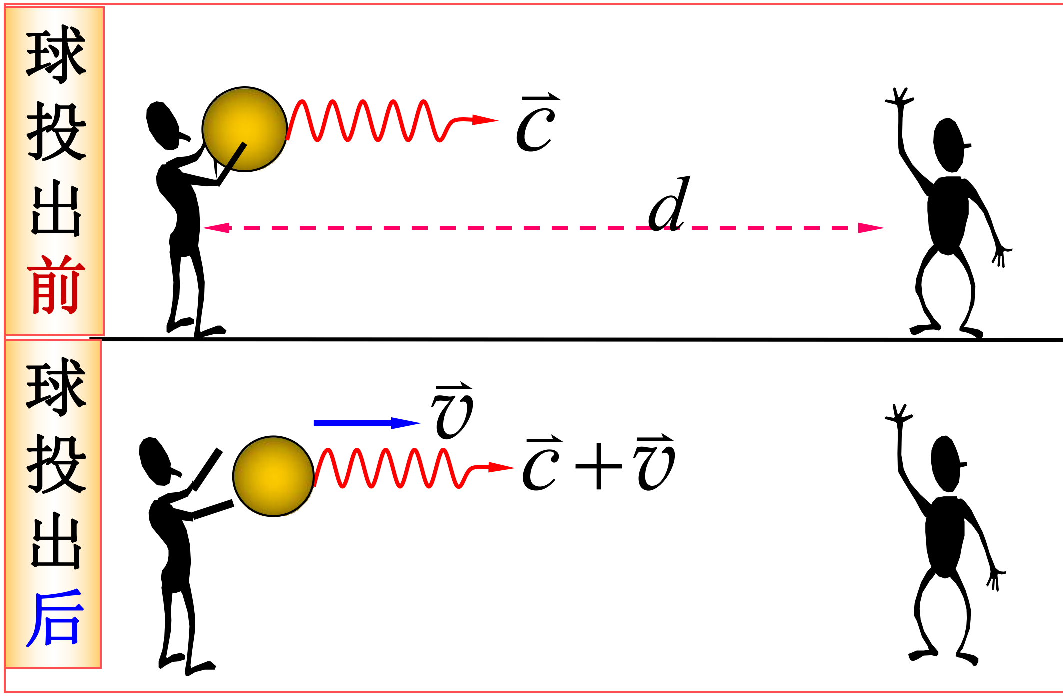
真空中的光速

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}?$$



例　试计算球被投出前后的瞬间，所发出的光波达到观察者所需时间.

（根据伽利略变换）



$$\Delta t_1 = \frac{d}{c}$$

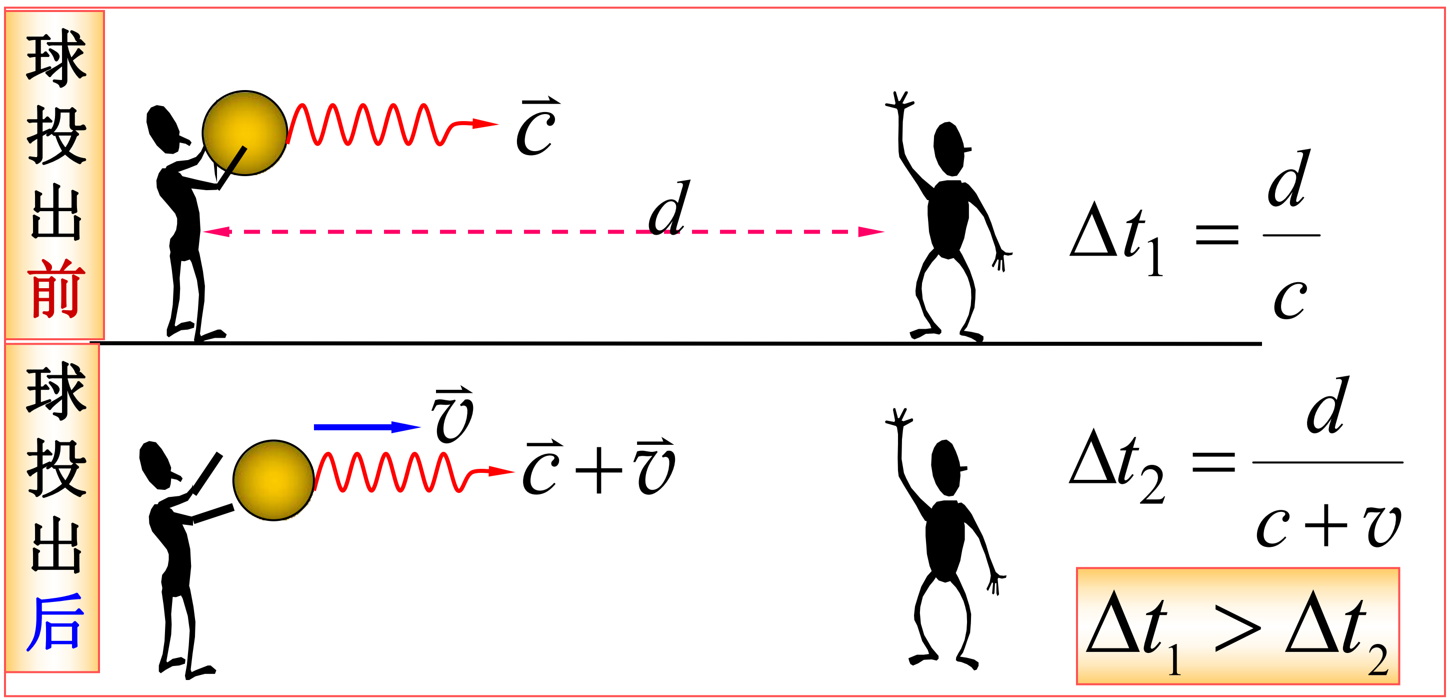
$$\Delta t_2 = \frac{d}{c+v}$$

$$\boxed{\Delta t_1 > \Delta t_2}$$

结果:　观察者先看到投出后的球，

后看到投出前的球.

（根据伽利略变换）



$$\Delta t_1 = \frac{d}{c}$$

$$\Delta t_2 = \frac{d}{c+v}$$

$$\boxed{\Delta t_1 > \Delta t_2}$$

**四、迈克尔孙—莫雷实验

设计初想：测出地球相对于以太的运动速度，寻找绝对惯性系（以太），光相对于绝对惯性系的速度为c。

基本原理：

光相对绝对参考系 c

光相对运动系(地球) c'

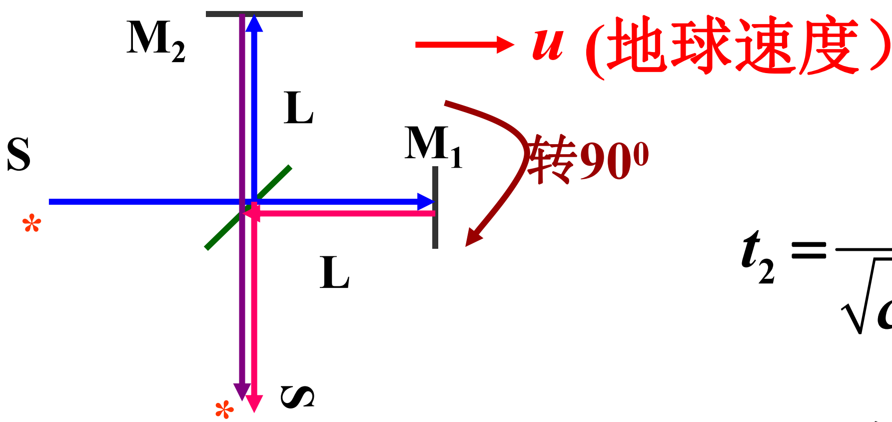
运动系(地)相对绝对系v

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$$

(可测)(已知)(推知)

利用干涉条纹移动测 c' .

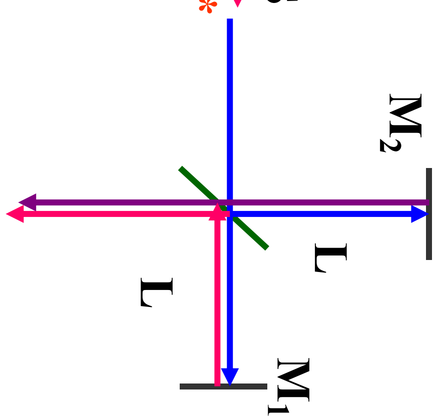
迈克尔孙—莫雷实验



$$t_1=\frac{L}{c-u}+\frac{L}{c+u}=\frac{2Lc}{c^2-u^2}\approx\frac{2L}{c}+\frac{2Lu^2}{c^3}$$

$$t_2=\frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}}\approx\frac{2L}{c}+\frac{Lu^2}{c^3}\qquad \Delta t=t_1-t_2=\frac{Lu^2}{c^3}$$

波程差 $\quad \Delta\delta=c2\Delta t$



条纹移动 $\quad \Delta N=\frac{\Delta\delta}{\lambda}=\frac{2Lu^2}{\lambda c^2}=\frac{2\times 11\times(3\times 10^4)^2}{5.9\times 10^{-7}\times(3\times 10^8)^2}\approx 0.37$

实测 $\Delta N=0$

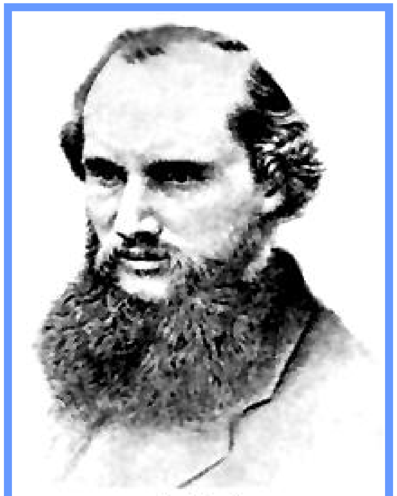
未找到绝对的惯性参考系——狭义相对论基本假设

以后又有许多人在不同季节、时刻、方向上反复重做迈克耳孙-莫雷实验．近年来, 利用激光使这个实验的精度大为提高, 但结果却没有任何变化。

结论：作为绝对参考系的“以太”不存在

迈克耳孙-莫雷实验测到以太漂移速度为零,对以太理论是一个沉重的打击,被人们称为是笼罩在19世纪物理学上空的一朵乌云.

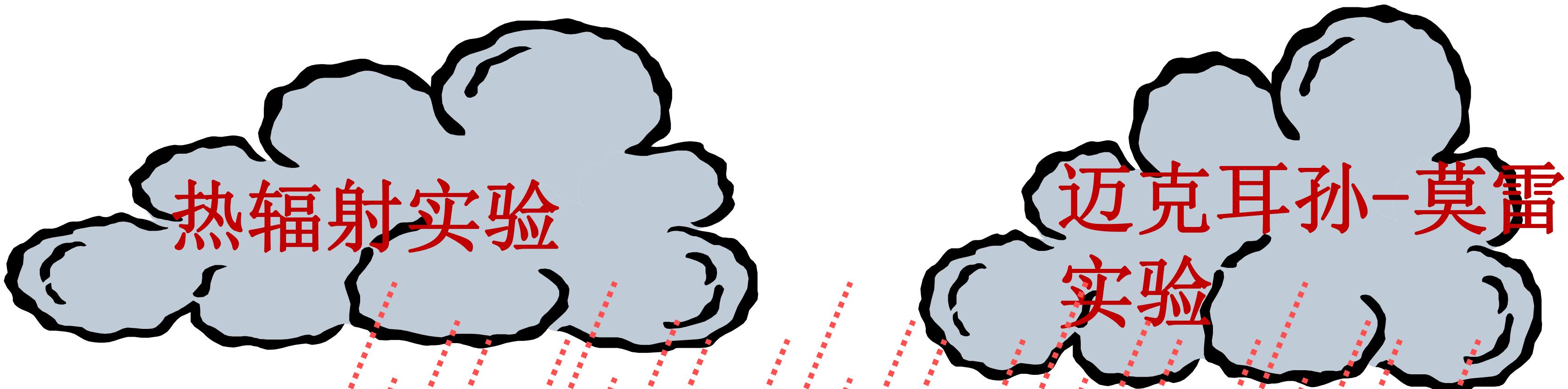
“在已经基本建成的科学大厦中，后辈的物理学家只要做一些零碎的修补工作就行了。”



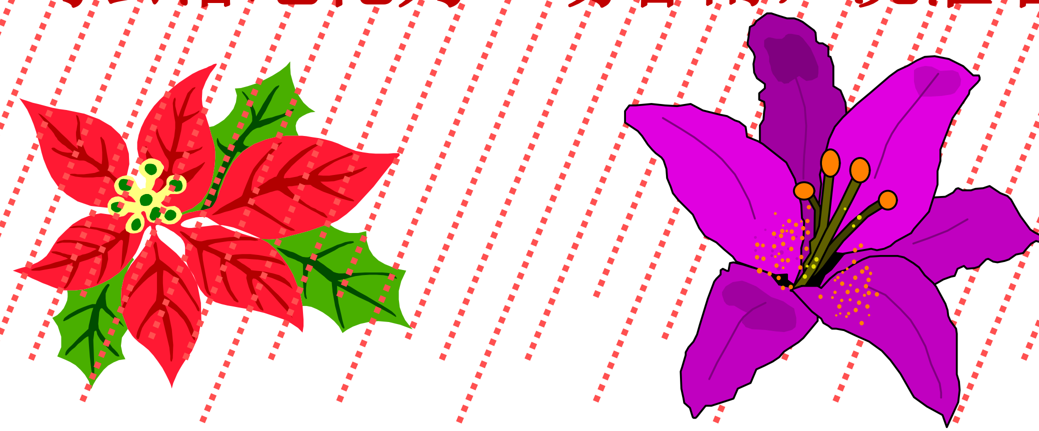
开尔文

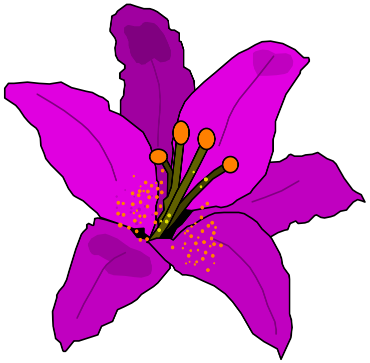
“但是，在物理学晴朗天空的远处，还有两朵令人不安的乌云，----”

——开尔文



后来的事实证明，正是这两朵乌云发展成为一场革命的风暴，乌云落地化为一场春雨，浇灌着两朵鲜花。





相对论问世

普朗克量子力学的诞生

自然和自然规律隐藏在黑暗之中，
上帝说："让牛顿降生吧"，
于是，一切就有了光明；
但是，光明并不长久，魔鬼又出现了，
上帝咆哮道："嗬！让爱因斯坦降生吧"，
就恢复到如今这个样子。

1922年爱因斯坦在访日的即席演讲中有一段话：“还在学生时代，我就在想这个问题了。 当时，我知道迈克耳孙实验的奇怪结果。我很快得出结论：如果我们承认迈克耳孙的零结果是事实， 那么地球相对以太运动的想法就是错误的。这是引导我走向狭义相对论的最早的想法。”

爱因斯坦认为：物质世界的规律应该是和谐统一的，麦克斯韦方程组应对所有惯性系成立。任何惯性系中光速都是各向为*c*。

爱因斯坦：

忽然我领悟到这个问题的症结所在。这个问题的答案来自对时间概念的分析，不可能绝对地确定时间，在时间和信号速度之间有着不可分割的联系。利用这一新概念，我第一次彻底地解决了这个难题。

§2 狭义相对论的基本假设　洛仑兹变换

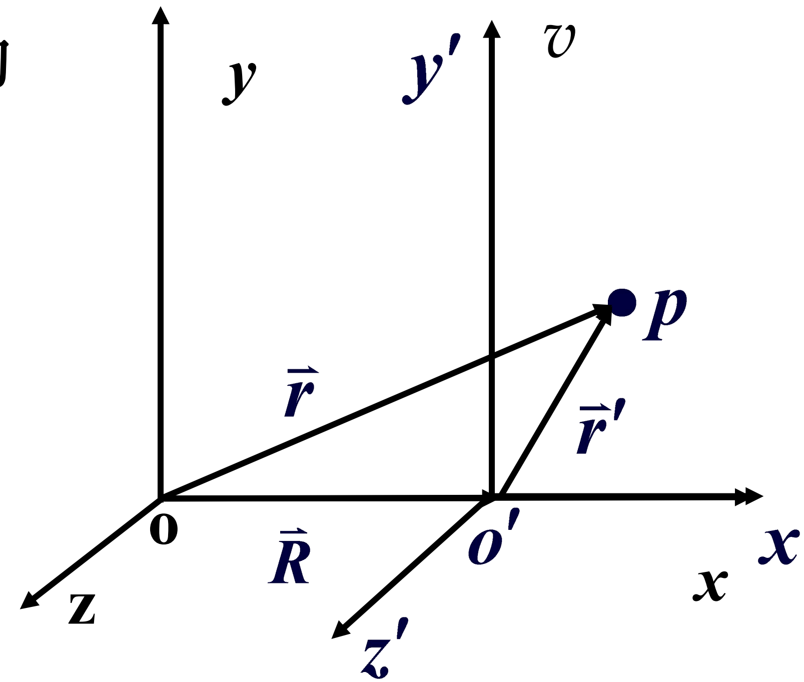
狭义相对论的基本原理

1）光速不变原理　在所有的惯性系中，真空中的光速都具有相同的量值 c

2）相对性原理　在一切惯性系中，物理定律具有相同的形式。

**洛仑兹变换推导

根据相对性原理，两惯性系间的时空变换式应是线性变换



$$
\begin{cases}
x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\
y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\
z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\
t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t
\end{cases}
$$

两惯性系在y，z方向上无相对运动

$$
\begin{cases}
x' = a_{11}x + a_{14}t \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = a_{41}x + a_{44}t
\end{cases}
$$

任意时刻，**S' 系原点O' 的坐标x' =0，而在S系中的坐标则为** $x = vt$

$$0 = a_{11} \cdot vt + a_{14} t$$

$$a_{14} = -a_{11} \cdot v$$

$$\begin{cases} x' = a_{11}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases}$$

假定在S系和S′系坐标原点重合时，从坐标原点处发出一个光脉冲，经过一段时间后，该信号到达了空间某一位置。

$$\boldsymbol{t'^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{c^2}}$$

$$t^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{t'^2 c^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(a_{41}x + a_{44}t\right)^2 c^2 = a_{11}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2$$

$$\left(a_{41}cx+a_{44}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2=a_{11}^2\left(x-\frac{v}{c}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2+y^2+z^2$$

将上式展开，比较两边的系数，得

$$\begin{cases} a_{41}^2c^2+a_{44}^2=a_{11}^2\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right) \\ a_{41}a_{44}c=-a_{11}^2\dfrac{v}{c} \\ a_{44}^2=a_{11}^2\dfrac{v^2}{c^2}+1 \end{cases}$$

考虑到 $a_{11}>0$和 $a_{44}>0$，求解上面方程组得

$$a_{11}=a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\qquad a_{41}=-\frac{v}{c^2}a_{11}$$

洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}(x-vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = \gamma(x-\beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t-\dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

当 $v << c$ 时

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

洛仑兹变换的逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \gamma\left(x' + \beta c t'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

洛伦兹速度变换

S系中的速度为$\boldsymbol{u}$

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

S'系中的速度为$\boldsymbol{u}'$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\,\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \dfrac{\beta}{c}\mathrm{d}x\right) \end{cases}$$

$$u'_x=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x-\beta c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t-\frac{\beta}{c}\mathrm{d}x}=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y}{\gamma\left(\mathrm{d}t-\frac{\beta}{c}\mathrm{d}x\right)}=\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_z=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

相对论速度的逆变换

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x},u_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_y}{1+\frac{v}{c^2}u'_x},u_z=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_z}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x},\quad u'_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x},\quad u'_z=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

讨论：

1）速度的变换公式，保证了光速 c 不变性。如：

若在 S系中 $u_x=c,u_y=u_z=0$.

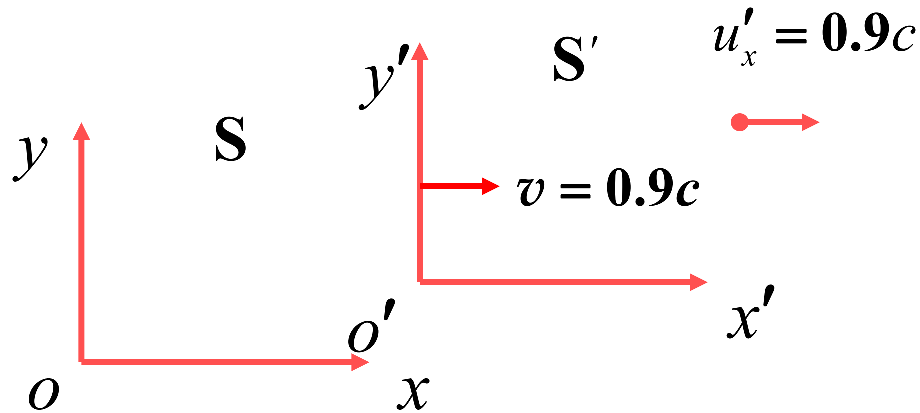
则S'系中 $u'_x=?$ u'_y、$u'_z=?$

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{c-v}{1-\frac{v}{c^2}c}=c$$

$$u'_y=u'_z=0.$$

2) 无论在真空还是在介质中, 无论用什么方法, 都不可能使一信号速度大于光速

S'系相对于S系运动速度 $v = \mathbf{0.9}c$. 而在S'系中一粒子的运动速度 $u'_x = \mathbf{0.9}c$, $u'_y = u'_z = \mathbf{0}$. 求S系的 $u_x = ?$



$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + \dfrac{0.9c}{c^2}0.9c} = 0.994c \ .$$

例. 在 S'系中一束光沿 y'方向传播, 速率为 c, S'系相对与S系沿x轴以速度v运动。

在 S 系中，此束光的速率多大?

解　由洛仑兹速度逆变换公式

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0 + v}{1 + 0} = v,$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, c$$

$$u_x = v$$

$$u_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, c$$

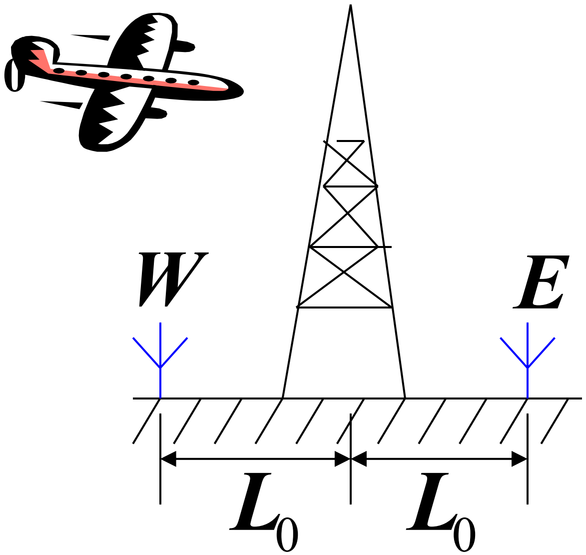
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} = 0,$$

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

$$= v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 = c^2$$

光的速度方向发生了改变，但光的速率不变。

例：一发射台向东西两侧距离均为L_0的两个接收站E与W发射讯号, 如图, 今有一飞机以匀速度v 沿发射台与两接收站的连线由西向东,



求:在飞机上测得两接收站收到发射台同一讯号的时间间隔是多少?

解: 设东西接收到讯号为两个事件,时空坐标为地面为S系(x_E, t_E),(x_W, t_W) 飞机为S′系(x_E', t_E'),(x_W', t_W')

$$\Delta t = t_E - t_W = \frac{L_0}{c} - \frac{L_0}{c} = 0$$

由洛仑兹时空变换得

$$\Delta t' = t_E' - t_W' = \frac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}(x_E - x_W)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-2L_0 v}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

负号表示东先接收到讯号。