第十章 双线性函数

- §10.1 线性函数
- §10.2 对偶空间
- §10.3 双线性函数
- §10.4 对称双线性函数
- §10.5 辛空间

§ 10.3 双线性函数

一、双线性函数

二、度量矩阵

三、非退化双线性函数

一、双线性函数

定义 设V是数域F上的n维线性空间，映射

$f: V\times V\to F$ 为 V上的二元函数. 即对$\forall\alpha,\beta\in V$,

f唯一地对应于F中一个数 $f(\alpha,\beta)$，如果

$f(\alpha,\beta)$具有性质:

(1) $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$

(2) $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$

其中 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2\in V,k_1,k_2\in P$

则 $f(\alpha,\beta)$称为V上的一个双线性函数.

注

对于线性空间V上的一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 当固定一个向量 α (或 β)不变时，可以得出一个线性函数.

例1.线性空间 V 上的内积即为一个双线性函数.

$$f:V\times V\to P, f(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta),\forall\alpha,\beta\in V$$

例2. V上两个线性函数 $f_1, f_2 : V \to F$,

定义 $f : V \times V \to F$, $\quad f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha) f_2(\beta)$

证明: f 是V上的一个双线性函数.

证: $\quad f(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = f_1(\alpha) f_2(k_1\beta_1 + k_2\beta_2)$

$$= k_1 f(\alpha, \beta_1) + k_2 f(\alpha, \beta_2),$$

$$f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = f_1(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) f_2(\beta)$$

$$= k_1 f(\alpha_1, \beta) + k_2 f_2(\alpha_2, \beta)$$

例3.设F^n是数域F上的n维线性空间，$A\in F^{n\times n}$.

令 $f: V\times V\to F$

$(X,Y)\mapsto X^TAY.$

$$\forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in V,$$ ①

则$f(X,Y)$为F^n上的一个双线性函数.

若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， 则

$$f(X,Y)=X^TAY=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\\cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$ ②

事实上，①或②是数域 F 上任意 n 维线性空间

V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 的一般形式.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为数域 F 上线性空间V的一组基，

设 $$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)X$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1 \ \ \varepsilon_2 \ \ \cdots \ \ \varepsilon_n)Y$$

则 $f(\alpha,\beta)=f(\sum x_i\varepsilon_i,\sum y_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_i y_j,$

令 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j), i,j=1,2,\cdots,n,\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

则 $f(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

其中 $A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$

二、度量矩阵

定义 设 $f(\alpha,\beta)$是数域 F 上n 维线性空间V上一个双线性函数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

称为 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵.

命题1 在给定基下，V上全体双线性函数与 F上全体 n 级矩阵之间存在1—1对应.

证：取定 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$， 双线性函数

$$f(\alpha,\beta)=f(\sum x_i\varepsilon_i,\sum y_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_i y_j,$$

令 $$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

则 f 与 $A=\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$ 对应.

即 f 与 f 在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵对应.

且不同双线性函数对应的在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的

度量矩阵不同.

事实上，若 f,g在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的度量矩阵分别为

$$A=\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right),\quad B=\left(g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$$

且 $f\neq g$ 时 $A=B$. 即

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=g(\varepsilon_i,\varepsilon_j),\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则对任意 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$

$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n\in V.$ 有

$$f(\alpha,\beta)=f(\sum x_i\varepsilon_i,\sum y_i\varepsilon_i)=\sum f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j$$

$$=\sum g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j=g(\sum x_i\varepsilon_i,\sum y_i\varepsilon_i)=g(\alpha,\beta)$$

则有 $f=g$. 矛盾.

反之，任取 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\in F^{n\times n}$,

对V中任意向量 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\quad \beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$,

定义函数 $f(\alpha,\beta)=X^TAY=\sum\sum a_{ij}x_iy_j$,

则 f 为V上的一个双线性函数.

$f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵即为 A.

命题1′ 线性空间V上双线性函数空间 ${}^{*}V^{*}$与 $F^{n\times n}$同构.

证：取定V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，作映射

$$\varphi: V^{*} \to F^{n\times n},\quad f(\alpha,\beta) \to A = (f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{n\times n}$$

则 φ 为 V^{*}到$F^{n\times n}$ 的1—1对应.

事实上，任取 $B \in F^{n\times n}$，$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \beta = \sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i \in V$,

则 $$g(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

是V上的一个双线性函数. 故 φ 为满射.

若双线性函数 $f(\alpha,\beta)\neq g(\alpha,\beta)$, 但 $\varphi(f)=\varphi(g)$.

设 $f(\alpha,\beta)\mapsto A=\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$,

$g(\alpha,\beta)\mapsto B=\left(g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$.

则
$$f(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=g(\alpha,\beta).$$

矛盾, $\therefore\ \varphi$ 为单射.

令 $(f+g)(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta)$

$$(kf)(\alpha,\beta)=k[f(\alpha,\beta)]$$

易证 $f+g, kf$ 仍为V上双线性函数.

并且 $(f+g)(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)+g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$

$$f+g \mapsto A+B=\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)+\left(g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$$

$$kf \mapsto kA=k\left(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\right)$$

命题2 n维线性空间V上同一双线性函数，$f(\alpha,\beta)$在V的不同基下的矩阵是合同的.

证：设 $f(\alpha,\beta)$ 在V的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵分别为 A,B.

$$\left.\begin{array}{l}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C \\ \alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X_1 \\ \beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Y_1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow X=CX_1,Y=CY_1$$

$$f(\alpha,\beta)=X^TAY=(CX_1)^TA(CY_1)^T=X_1^TC^TACY_1^T$$

$$f(\alpha,\beta)=X_1^T BY_1. \qquad \therefore B=C^T AC.$$

即 A与B 合同.

注:

若矩阵 A与B合同，则存在一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 及V上两组基，使 $f(\alpha,\beta)$在这两组基下的度量矩阵为 A,B.

三、非退化双线性函数

定义

设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间V上的一个双线性函数，

如果从 $f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in V$ 可推出 $\alpha=0$. 则称

$f(\alpha,\beta)$ 是非退化的.

命题3 双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的

$\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)$ 的度量矩阵为非退化的.

证：设双线性函数 $f(\alpha,\beta)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下度量矩阵为 A,

$$\alpha=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n)X,$$

$$\beta=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \cdots\ \ \varepsilon_n)Y.$$

$$f(\alpha,\beta)=X^TAY.$$

若 $f(\alpha,\beta)=X^T AY=0$ 对任意 $\beta\in V$ 均成立.

即对任意 Y 均有 $X^T AY=0.$ 必有

$$X^T A=0,\quad A^T X=0.$$

而 $A^T X=0$只有零解 $\Leftrightarrow \left|A^T\right|\neq 0.$

即 $|A|\neq 0$, 即 A 非退化.

推论: $\forall\alpha\in V$, 由 $f(\alpha,\beta)=0$ 可推出 $\beta=0$,

则 f 非退化.

例、设 $A \in F^{m\times m}$，定义 $F^{m\times n}$ 上的一个二元函数

$$f(X,Y)=Tr(X^T AY)_{n\times n},\quad X,Y\in F^{m\times n}$$

(1) 证明 f 是 $F^{m\times n}$ 上的双线性函数；

(2) 求 $f(X,Y)$ 在基

$$E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mn}$$

下的度量矩阵.

(1) 证 $f(X,k_1Y_1+k_2Y_2)=Tr(X^TA(k_1Y_1+k_2Y_2))$

$$=Tr(X^TAk_1Y_1+X^TAk_2Y_2)$$

$$=Tr(k_1X^TAY_1+k_2X^TAY_2)$$

$$=Tr(k_1X^TAY_1)+Tr(k_2X^TAY_2)$$

$$=k_1Tr(X^TAY_1)+k_2Tr(X^TAY_2)$$

$$=k_1f(X,Y_1)+k_2f(X,Y_2)$$

$$f(k_1X_1+k_2X_2,Y)=k_1f(X_1,Y)+k_2f(X_2,Y)$$

（2）解：

$$f(E_{ij},E_{kt})=Tr(E_{ij}{}^{T}AE_{kt})=\begin{cases}a_{ik} & j=t,a_{jt}i=k\\ 0 & j\neq t,i\neq k\end{cases}$$

所以度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11}E_n & a_{12}E_n & \cdots & a_{1n}E_n \\ a_{21}E_n & a_{22}E_n & \cdots & a_{2n}E_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}E_n & a_{m2}E_n & \cdots & a_{mn}E_n \end{pmatrix}.$$

在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(X,Y)$,对

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T, Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T\in P^4 \text{有}$$

$$f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$$

1)给定 P^4 的一组基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0)^T,\quad \varepsilon_2=(1,-1,1,0)^T$$

$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1)^T,\qquad \varepsilon_3=(-1,-1,0,1)^T$$

求 $f(X,Y)$ 在这组基下的度量矩阵;

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

$$=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}$$

2）另取一组基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$且

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_3)\mathrm{T}$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

求$f(X,Y)$在这组基下的度量矩阵.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

$$\mathbf{B} = T^T A T = \begin{pmatrix} -6 & 46 & 8 & 24 \\ -18 & 26 & 16 & -72 \\ -2 & -38 & 0 & 0 \\ 15 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$