应用随机过程

离散型随机变量的生成函数

授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院

生成函数的定义

数列的生成函数

$$a^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

1. $\{a_n\}$是任意数列
2. $a^g(z)$又称为序列$\{a_n\}$的Z-变换或几何变换
3. 当$|z| < R$时，级数$a^g(z)$收敛

概率生成函数

概率生成函数

$$P_X(z) = a^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = E[z^X]$$

1 $a_n = Prob\{X = n\}$是随机变X的概率分布函数

2 $P_X(z)$称为离散型随机变量X的概率生成函数

3 当$|z| < 1$时，级数$a^g(z)$收敛

随机变量的矩与概率生成函数

- 定义$P_X(z)$的k阶导数为$P_X^{(k)}(z)=\frac{d^k}{dz^k}P_X^{(k)}(z)$

- 一阶矩：

$$P_X^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{E[X]=P_X^{(1)}(1)}$$

- 二阶矩：

$$P_X^{(2)}(z)=\frac{d}{dz}P_X^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}$$

$$\downarrow$$

$$P_X^{(2)}(1)=E[X(X-1)]=E[X^2]-E[X] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E[X^2]=P_X^{(2)}(1)+P_X^{(1)}(1)}$$

二项随机变量的概率生成函数

令X为参数是n和p的二项随机变量，则

$$P\{X=j\}=a_j=\binom{n}{j}p^j q^{n-j} \qquad j=0,1,\cdots n$$

其中$q=1-p$，试利用概率生成函数求均值和方差。

解：随机变量X的概率生成函数为

对z求导

$$P_X(z)=\sum_{j=0}^{n}a_j z^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}z^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}pz^j q^{n-j}=(pz+q)^n$$

对$P_X(z)$求一阶导数和二阶导数

$$P_X^{(1)}(z)=n(pz+q)^{n-1}p \ ,P_X^{(2)}(z)=n(n-1)(pz+q)^{n-2}p^2$$

令$z=1$

我们得到

$$E[X]=P_X^{(1)}(1)=np, \qquad E[X^2]=P_X^{(2)}(1)+P_X^{(1)}(1)=n(n-1)p^2+np$$

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=npq$$

几何随机变量的概率生成函数

令X为参数是p的几何随机变量，则

$$P\{X=n\}=a_n=pq^n \qquad n=0,1,\cdots,$$

其中一次伯努利试验中成功的概率为p，且$q=1-p$，试求X的概率生成函数，均值和方差。

解：X的概率生成函数为

$$P_X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}pq^nz^n=\frac{p}{1-qz}$$

求X的均值、方差

随机变量和的概率生成函数

令$X_1,\cdots,X_k$为k个独立、非负、取整数值的随机变量，其中X_i的概率生成函数为$P_i(z)$。令S为这k个随机变量的和。那么X的概率生成函数怎么求呢?

S是这k个随机变量的卷积

Z-3

随机变量S的概率生成函数为

$$P_S(z) = P_1(Z) \cdots P_k(z)$$

负二项随机变量的概率生成函数

令S为负二项随机变量，则$S=X_1+\cdots+X_k$，其中$X_1,\cdots,X_k$独立同分布，且都服从几何分布$\{pq^n\}$，其中每一次伯努利试验成功的概率为p。试利用概率生成函数求S的概率分布。

解：由随机变量和的概率生成函数有

$$P_S(z)=\left(\frac{p}{1-qz}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n$$

为将频域转变为时域

$$\frac{1}{(1-qz)^k}=\frac{1}{(1-qz)^{(k-1)+1}}$$

利用Z-5的逆变换

$$\frac{1}{(k-1)!}(n+1)\cdots(n+(k-1))q^n$$

利用Z-1,整理得到S的概率分布

$$p_n=\frac{p^k}{(k-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)q^n$$

$$=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}p^kq^n$$

$$=\binom{n+k-1}{n}p^kq^n=P\{S=n\}\quad n=0,1,\cdots$$

思考问题

随机变量和

令$X_1,\cdots X_k$为k个独立，非负，取整数值的随机变量，S为这k个随机变量的和，其中X_i概率生成函数为$P_i(z)$。

$$P_S(z)=P_1(z)\cdots P_k(z)$$

复合随机变量

复合随机变量定义为$S_N=X_1+\cdots X_N$，其中N是一个非负，取整数值的随机变量，且概率生成函数为$\pi_N(z)$

$$P_S(z)=\ ?$$

重要知识总结

概率生成函数

01 定义

02 $E[X] = P_X^{(1)}(1)$

03 $E[X^2] = P_X^{(2)}(1) + P_X^{(1)}(1)$

04 随机变量和的概率生成函数

生成函数表

Table 1.1

	The Sequence$\{a_n\}$	Generating Function $a^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
1.	$\{\alpha a_n\}$	$\alpha a^g(z)$
2.	$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$	$\alpha a^g(z) + \beta b^g(z)$, where $b^g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$
3.	$\left\{\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right\}$ Convolution	$a^g(z) b^g(z)$
4.	$\{a^n\}$	$\frac{1}{1-az}$
5.	$\left\{\frac{1}{k!}(n+1)(n+2)\cdots(n+k)a^n\right\}$	$\frac{1}{(1-az)^{k+1}}$
6.	$\{b_n\}$, where $b_n = 0$ if $n > k$; $= a_{n-k}$ if $n \geq k$; and k is a positive integer	$z^k a^g(z)$
7.	$\{b_n\}$, where $b_n = 0$ if $n < 0$; $= a_{n+k}$ if $n \geq 0$; and k is a positive integer	$\frac{1}{z^k}[a^g(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{k-1} z^{k-1}]$
8.	$\left\{\sum_{m=0}^{n} a_m\right\}$	$\frac{1}{1-z} a^g(z)$
9.	$\{b_n\}$, where $b_n = a_0$ if $n = 0$; $= a_n - a_{n-1}$ if $n \geq 1$	$(1-z) a^g(z)$
10.	$\{A^n\}$, where A is a square matrix	$\sum_{n=0}^{\infty} (zA)^n = [I - Az]^{-1}$, where I is an identity matrix

谢谢听课

授课教师

赵毅