第五章 图形变换与裁剪（三）

5.5 二维线段裁剪

5.5 二维线段裁剪

1 直线段裁剪

- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-**Barsky**算法

2 多边形裁剪

- **Sutherland_Hodgman算法**
- **Weiler-Atherton算法**

1.直线段裁剪(1/18)

- 裁剪（clipping）的目的
  - 判断图形元素是否在裁剪窗口之内并找出其位于内部的部分
- 裁剪处理的基础
  - 图元关于窗口内外关系的判别
  - 图元与窗口的求交
- 裁剪与覆盖的区别

1.直线段裁剪(2/18)

- 裁剪窗口
  - 矩形、圆形、一般多边形
- 被裁剪对象
  - 线段、多边形、曲线、字符
- 设计裁剪算法的核心问题
  - 效率高，速度快

1.直线段裁剪(3/18)

- 把直线当作点的集合，逐点裁剪
  - 点 (x, y) 在窗口内的充分必要条件是：

$$x_{\min} \le x \le x_{\max}$$

$$y_{\min} \le y \le y_{\max}$$

问题：极其费时，精度不高。

1.直线段裁剪(4/18)

- 把直线当作一个整体来裁剪
  - 矩形裁剪窗口：

$$[x_{min}，x_{max}] \times [y_{min}，y_{max}]$$

  - 待裁剪线段：

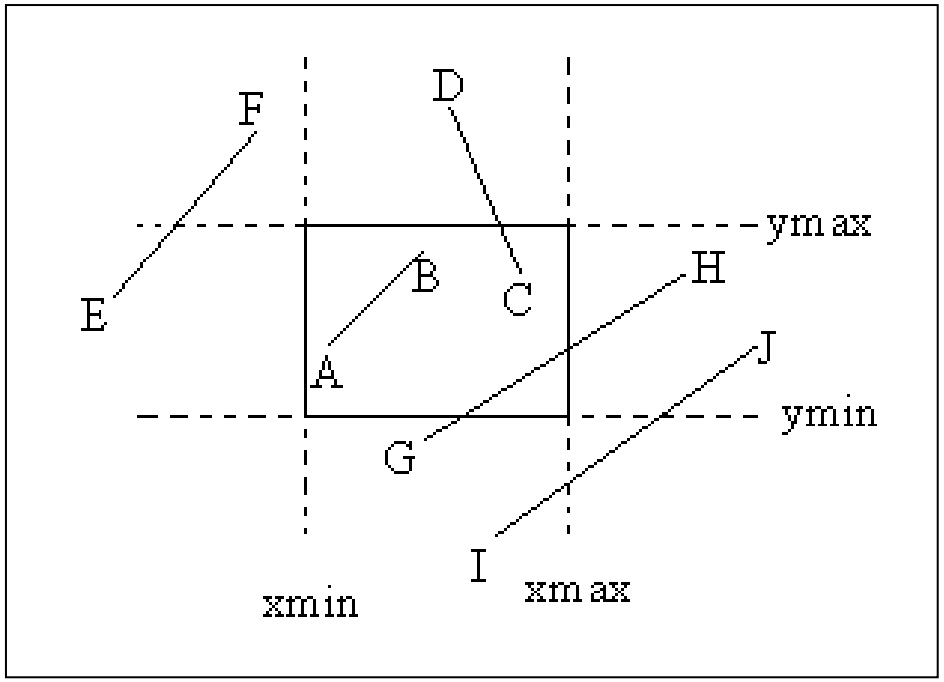
$$P_0(x_0, y_0)P_1(x_1, y_1)$$

- 前提：任何平面线段在凸多边形窗口进行裁剪后，落在窗口内的线段不会多于1条。

1.直线段裁剪(5/18)

- 待裁剪线段和窗口的关系

1. 完全落在窗口内,
2. 完全落在窗口外,
3. 部分在内，部分在外.



5.5 二维线段裁剪

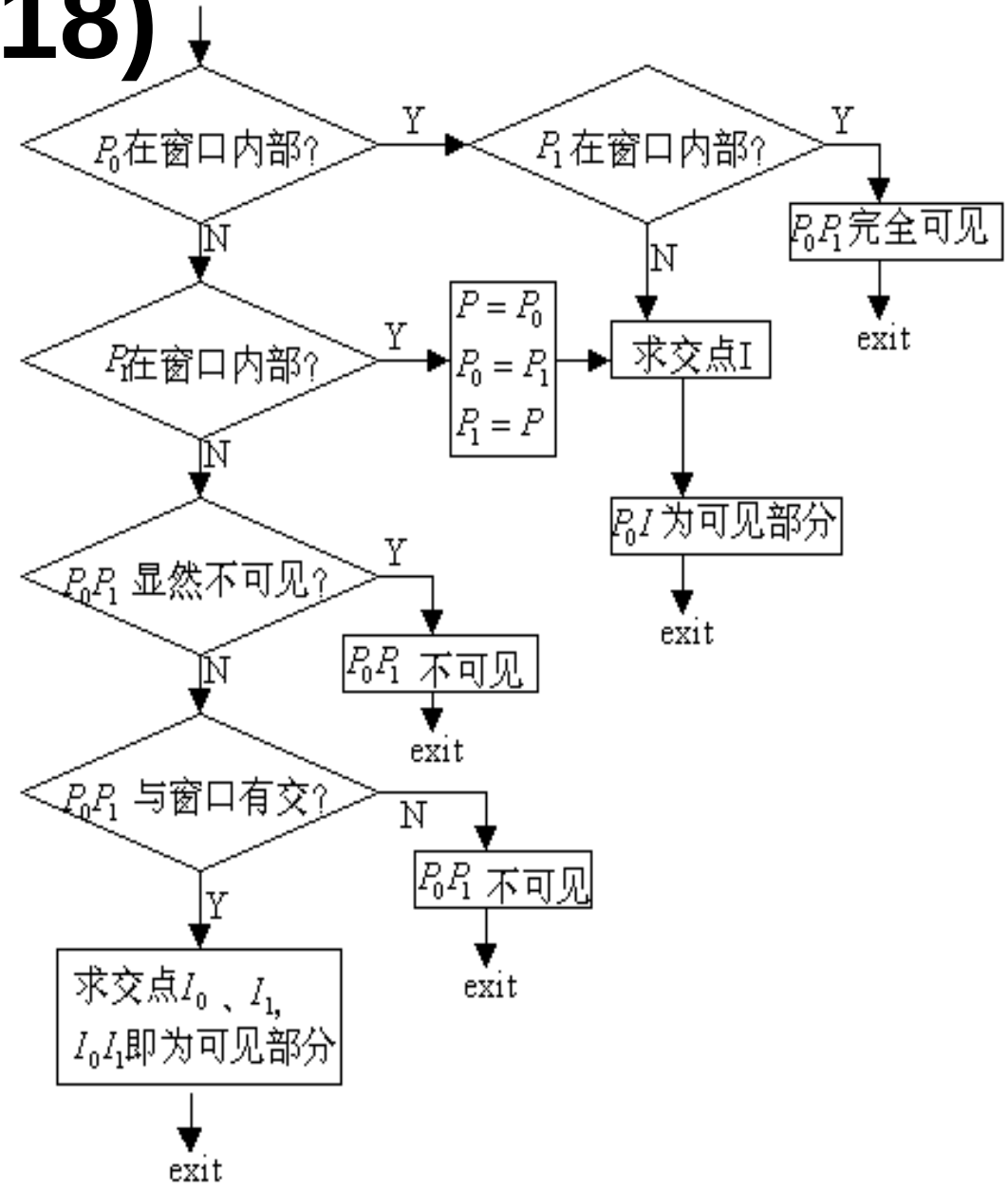
1 直线段裁剪

- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-**Barsky**算法

1.直线段裁剪(6/18)

直接求交算法

直线与窗口边都写成参数形式，求参数值。



5.5 二维线段裁剪

1 直线段裁剪

- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-Barsky算法

1.直线段裁剪(7/18)
Cohen-Sutherland 算法

- 待裁剪线段和窗口的关系
  1. 完全落在窗口内,
  2. 完全落在窗口外,
  3. 部分在内，部分在外.

为提高效率，该算法强调：

- 快速判断情形(1)(2)；
- 减少情形(3)的求交次数和求交所需的计算量。

1.直线段裁剪(8/18)

Cohen-Sutherland 算法

算法步骤：

1. 判别线段两端点是否都落在窗口内，如果是，则线段完全可见，转至第4步；
2. 判别线段是否为显然不可见，如果是，则裁剪结束，转至第4步 ；
3. 求线段与窗口边延长线的交点，这个交点将线段分为两段，其中一段显然不可见，丢弃。对余下的另一段重新进行第1步处理，
4. 结束

裁剪过程是递归的。

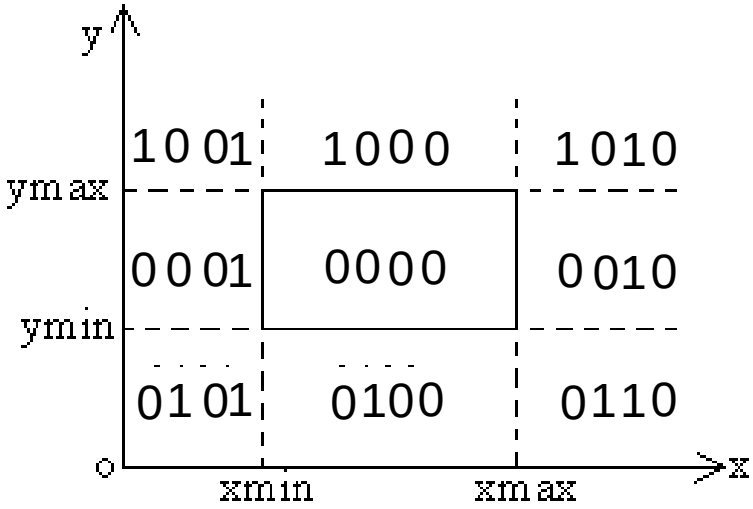
1.直线段裁剪(9/18)

Cohen-Sutherland 算法

- 关键问题：
  - 如何快速判别 完全可见 和 完全不可见 线段？
- 解决方法 —— 编码：
  - 由窗口四条边所在直线把二维平面分成9个区域，每个区域赋予一个四位编码，$C_tC_bC_rC_l$，上下右左；

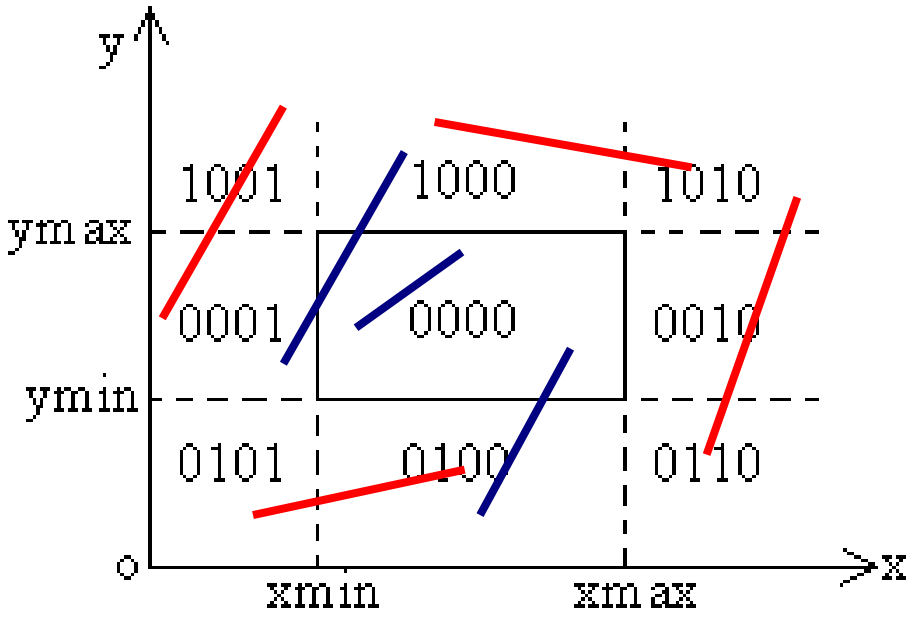
$$C_t=\begin{cases}1, & y>y_{max}\\ 0, & else\end{cases}\quad C_b=\begin{cases}1, & y<y_{min}\\ 0, & else\end{cases}$$

$$C_r=\begin{cases}1, & x>x_{max}\\ 0, & else\end{cases}\quad C_l=\begin{cases}1, & x<x_{min}\\ 0, & else\end{cases}$$



1.直线段裁剪(10/18)
Cohen-Sutherland 算法

- 所以也称为编码裁剪算法
- 端点编码：
  - 定义为它所在区域的编码
- 快速判断“完全不可见
  - 线段两端点编码的逻辑“与”运算结果非零，则完全不可见。



1.直线段裁剪(11/18)

Cohen-Sutherland 算法

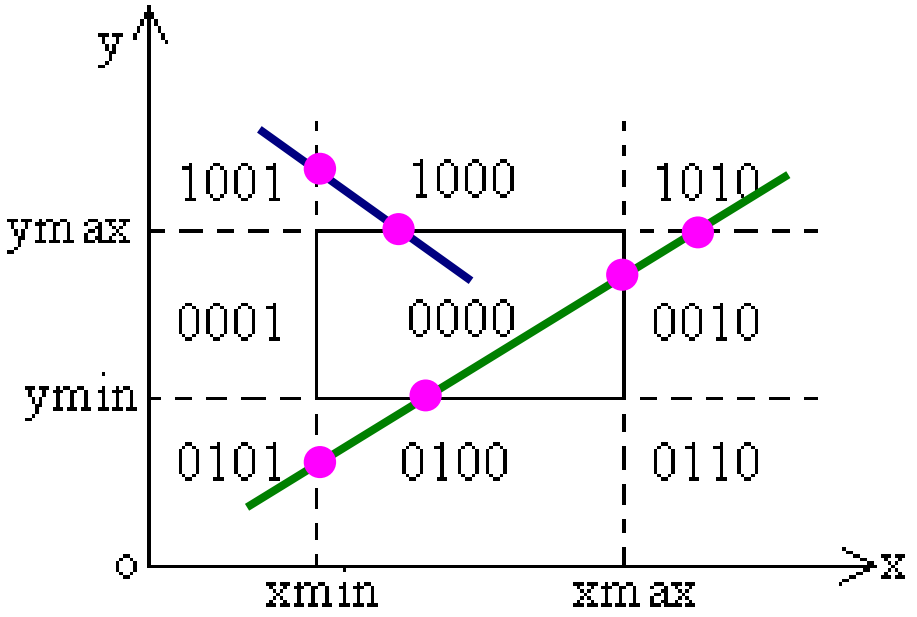
对于那些部分可见又部分不可见的线段，需要求交，求交前先测试与窗口哪条边所在直线有交？

- 逐个端点判断其编码

  $C_lC_tC_rC_b$中各位是否为“1”，若是，则需求交。

- 最坏情形：

  线段求交四次。



1.直线段裁剪(12/18)

Cohen-Sutherland 算法

1）特点：

用编码方法可快速判断线段-——

完全可见 或 完全不可见。

2）特别适用两种场合：

① 大窗口场合；

② 窗口特别小的场合

（如：光标拾取图形时，光标看作小的裁剪窗口）

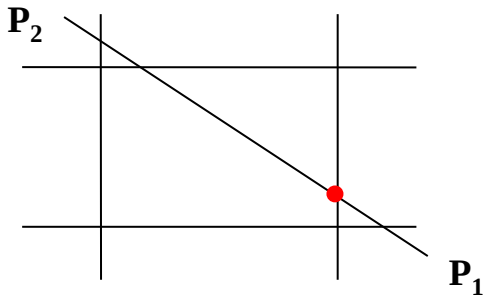
5.5 二维线段裁剪

1 直线段裁剪

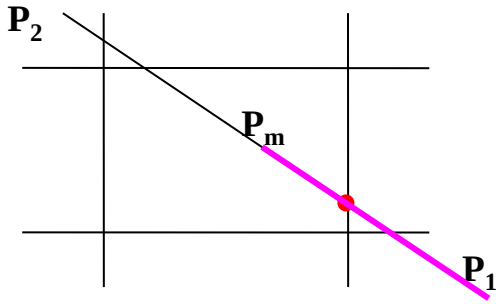
- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-**Barsky**算法

1.直线段裁剪(13/18)
中点分割法

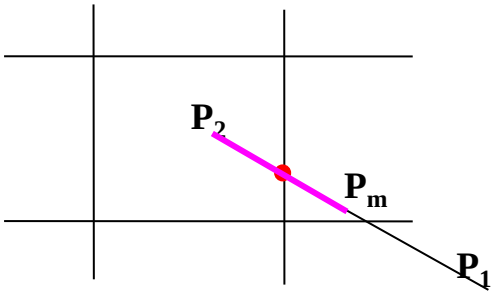
- 基本思想：利用对分搜索思想搜索交点
  - 从P1点出发找出距P1最近的可见点
  - 从P2点出发找出距P2最近的可见点
  - 不断地在中点处将线段一分为二，对每段线段重复Cohen-Sutherland裁剪算法的线段可见性测试方法，直至找到每段线段与窗口边界线的交点或分割子段的长度充分小可视为一点为止
- 取中点Pm=(P1+P2)/2。



从P1点出发找距P1最近的可见点



用P_1P_m代替P_1P_2



用P_mP_2代替P_1P_2

1.直线段裁剪(13/18)
中点分割法

- 优点：
  - 算法原理和编码裁剪是一致的，不同之处在于用移位运算代替求交计算
  - 适合硬件实现

5.5 二维线段裁剪

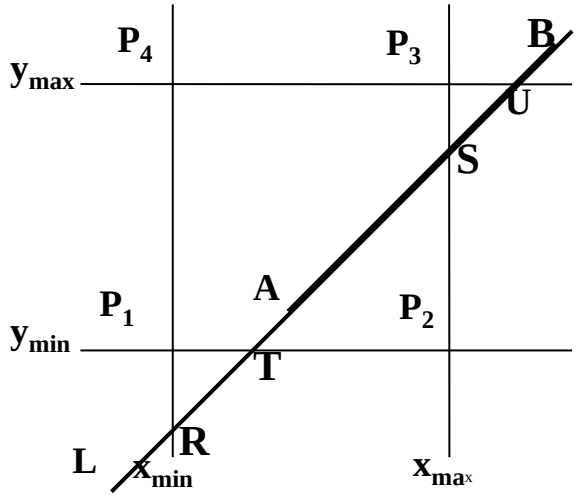
1 直线段裁剪

- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-**Barsky**算法

1.直线段裁剪(14/18)

Liang-Barsky裁剪算法

- 基本思想：
  - 把二维裁剪化为一维裁剪问题，并向x（或y）方向投影以决定可见线段



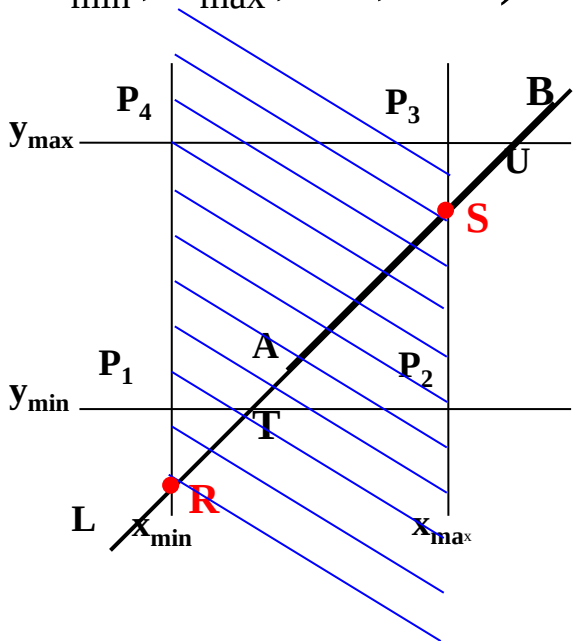
AS是一维窗口TS中的可见部分

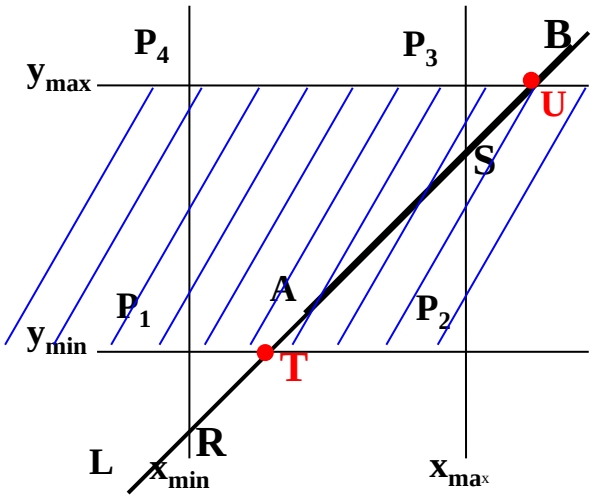
1.直线段裁剪(15/18)

- 当Q为空集时，线段AB不可能在窗口中有可见线段。
- 当Q不为空集时，Q可看成是一个一维窗口
- 直线L与区域的交：

$$Q = L \cap \square P_1P_2P_3P_4 = L \cap [x_{\min}, x_{\max}; -\infty, +\infty] \cap [-\infty, +\infty; y_{\min}, y_{\max}]$$

$$= (L \cap [x_{\min}, x_{\max}; -\infty, +\infty]) \cap (L \cap [-\infty, +\infty; y_{\min}, y_{\max}]) = RS \cap TU$$

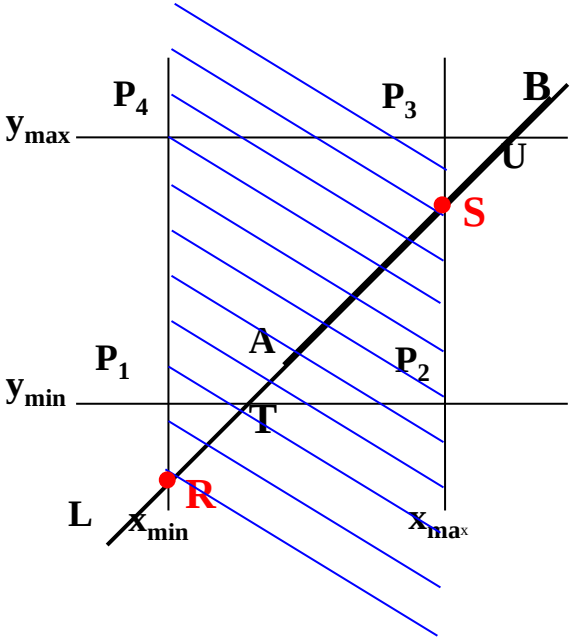


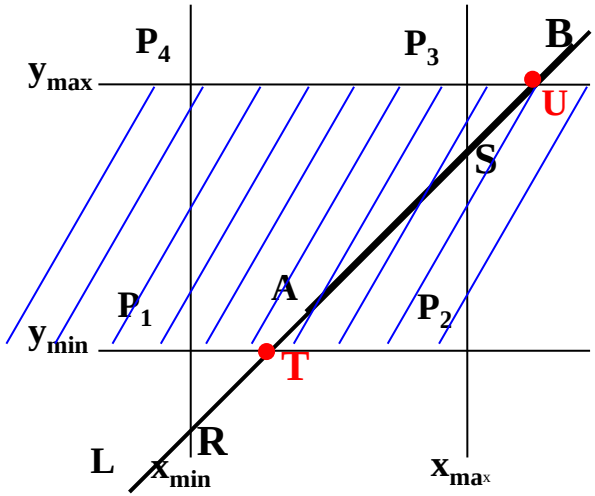


1.直线段裁剪(16/18)

- 当Q为空集时，线段AB不可能在窗口中有可见线段。
- 当Q不为空集时，Q可看成是一个一维窗口。

- 存在可见线段的充要条件
  - $AB \cap Q$ 即 $AB \cap RS \cap TU$ 不为空集 。

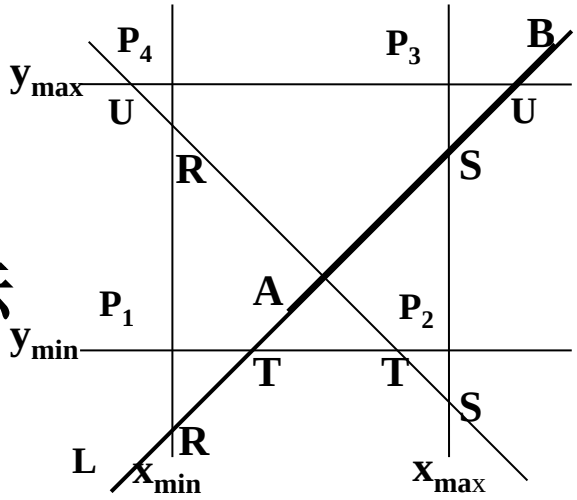




$$Q = RS \cap TU$$

1.直线段裁剪(17/18)

Liang-Barsky裁剪算法



AS是一维窗口TS中的可见部分

- ***RS*,*AB*, *TU*三条线段的交集的端点坐标**
- **等价于求三条线段的**
  左端点的最大值，右端点的最小值
- **向x轴投影，得到可见线段端点的 x 坐标变化范围**

$$\max[x_{\min}, \min(x_A, x_B), \min(x_T, x_U)] \le x \le \min[x_{\max}, \max(x_A, x_B), \max(x_T, x_U)]$$

左端点x坐标 $x_\alpha = \max[x_{\min}, \min(x_A, x_B), \min(x_T, x_U)]$

右端点x坐标 $x_\beta = \min[x_{\max}, \max(x_A, x_B), \max(x_T, x_U)]$

y坐标可由将x坐标代入直线方程计算得到

1.直线段裁剪(18/18)
Liang-Barsky裁剪算法

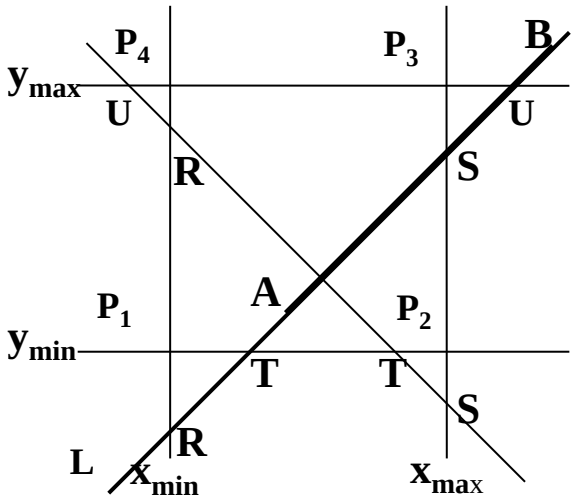
- **AB有可见部分的充要条件也可表示为**

$$\max[x_{\min}, \min(x_A, x_B), \min(x_T, x_U)] \le \min[x_{\max}, \max(x_A, x_B), \max(x_T, x_U)]$$

令 $L = \max[x_{\min}, \min(x_A, x_B)]$　　$R = \min[x_{\max}, \max(x_A, x_B)]$

则有：$\max[L, \min(x_T, x_U)] \le \min[R, \max(x_T, x_U)]$

等价于判断
$$\begin{cases} L \le R \\ L \le \max(x_T, x_U) \\ \min(x_T, x_U) \le R \end{cases}$$



AS是一维窗口TS中的可见部分

5.5 二维线段裁剪

1 直线段裁剪

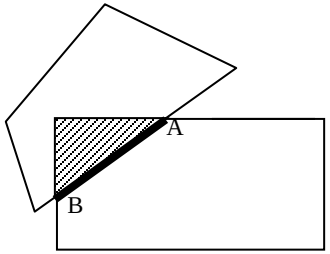
- 直接求交算法
- **Cohen-Sutherland算法**
- 中点分割裁剪算法
- 梁友栋-**Barsky**算法

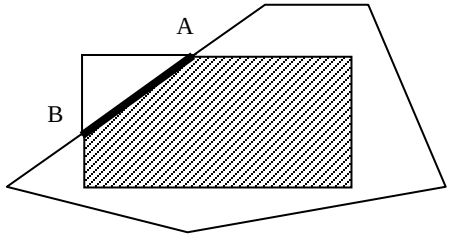
2 多边形裁剪

- **Sutherland_Hodgman算法**
- **Weiler-Atherton算法**

2.多边形裁剪（Ploygon clipping）-1/3

- 错觉：多边形裁剪是直线段裁剪的组合？
- 新的问题：





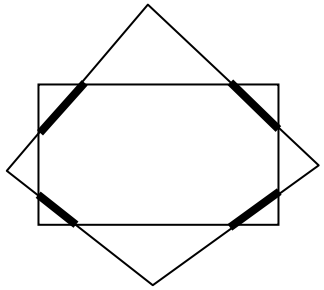
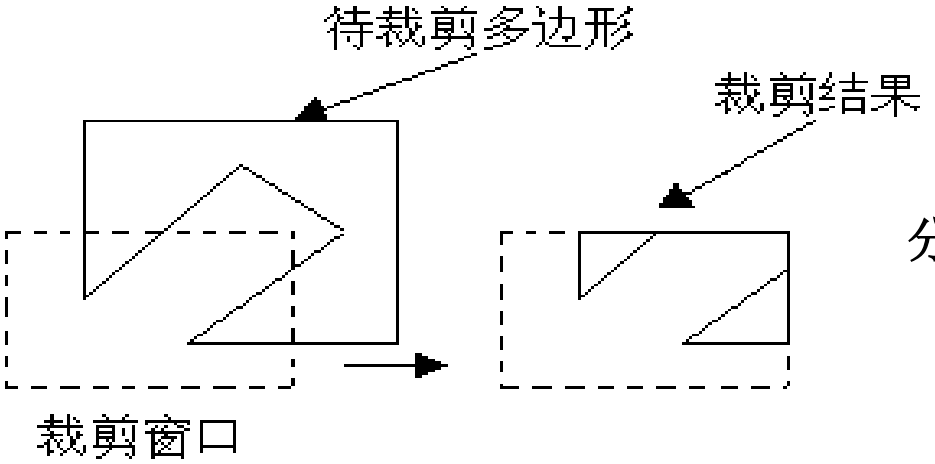


图1 因丢失顶点信息而去法确定裁剪区域

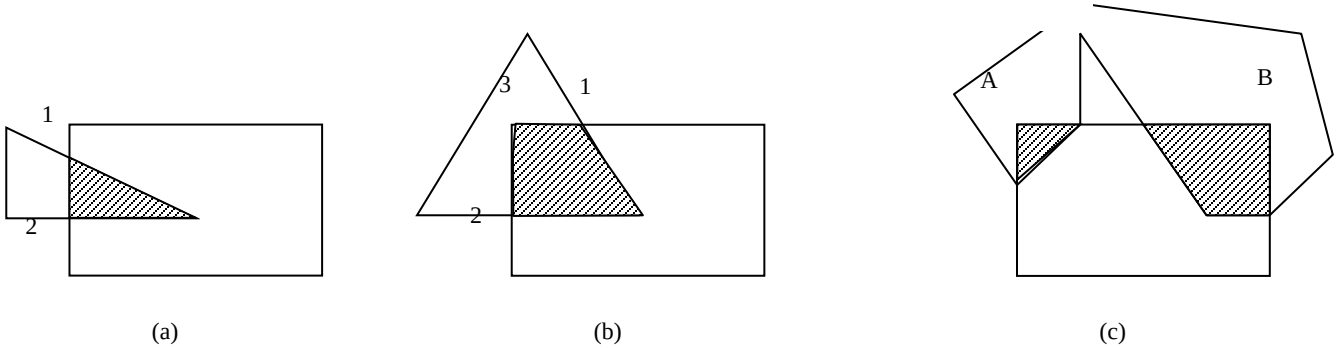
图2 原来封闭的多边形变成了孤立的线段

边界不再封闭，需要用窗口边界的恰当部分来封闭它

2.多边形裁剪-2/3



分裂为几个多边形



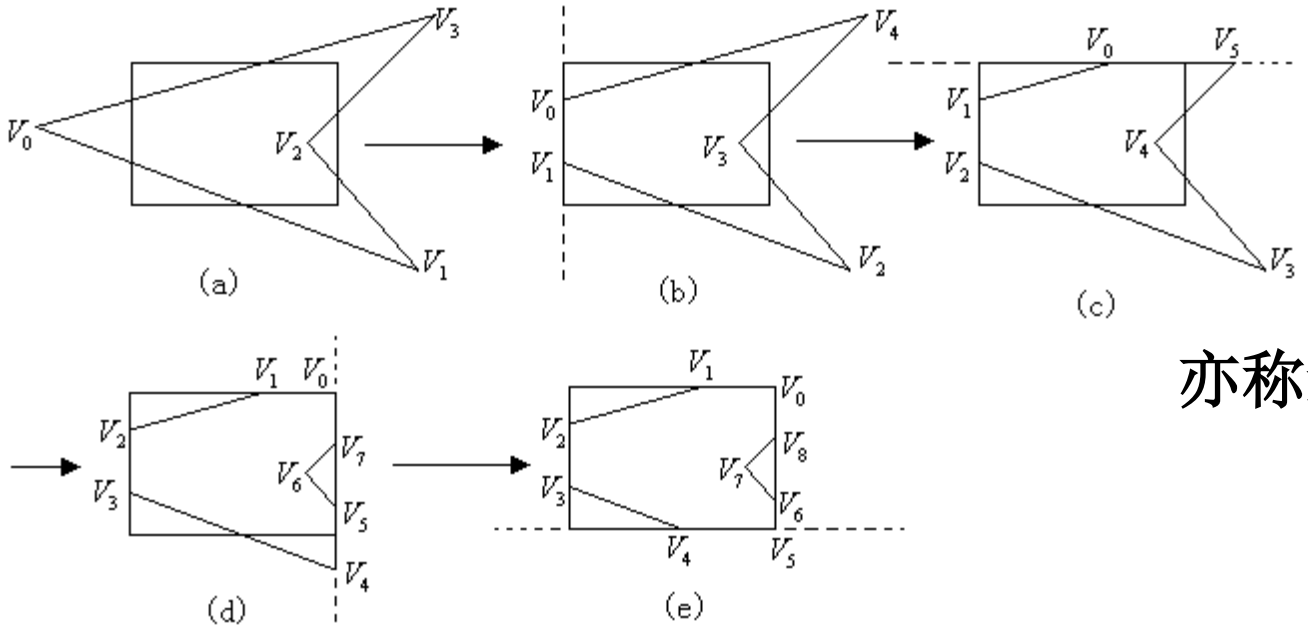
裁剪后的多边形顶点形成的几种情况

2.多边形裁剪-3/3

- 关键：
  - 不仅在于求出新的顶点，删去界外顶点
  - 还在于形成正确的顶点序列
- 常用算法
  - **Sutherland_Hodgman算法**
  - **Weiler-Atherton算法**

Sutherland-Hodgman算法-1/4

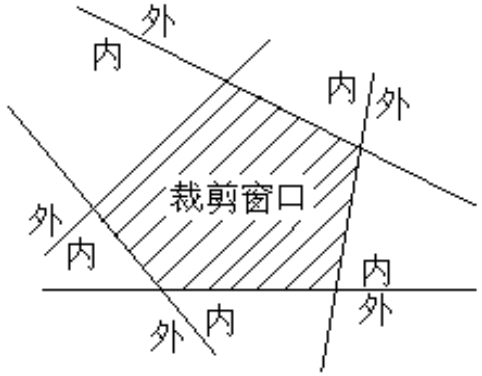
- 分割处理策略：
  - 将多边形关于矩形窗口的裁剪分解为多边形关于窗口四边所在直线的裁剪。
- 流水线过程(左上右下)：左边的结果是右边的开始。

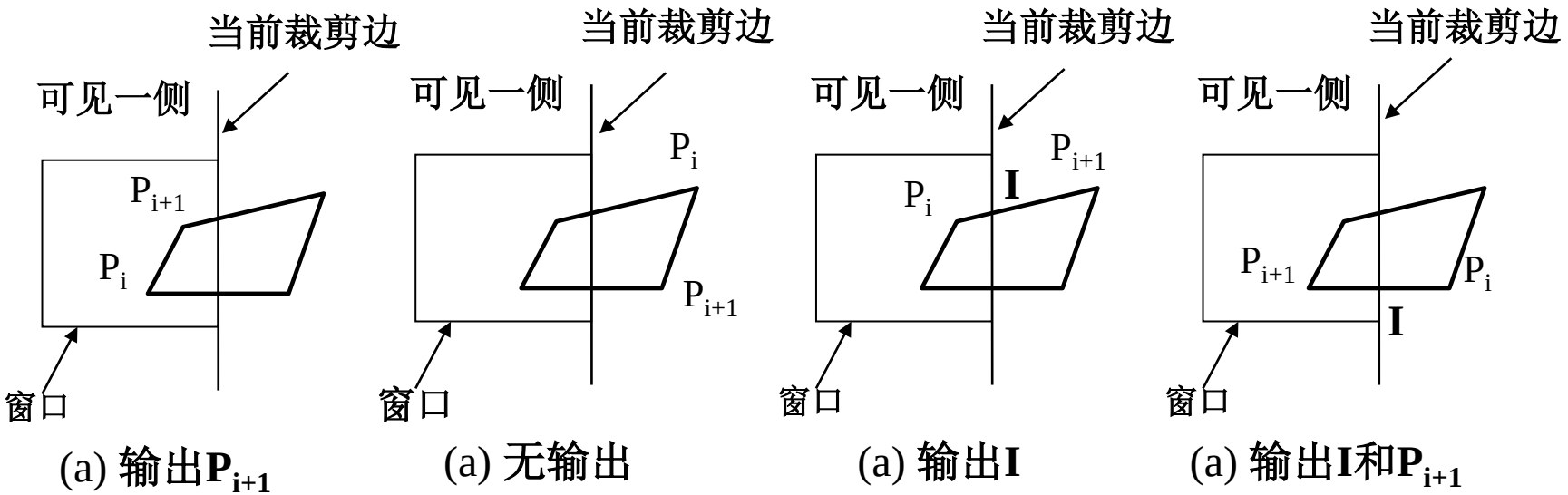


亦称逐边裁剪算法

Sutherland-Hodgman算法-2/4

- 内侧空间与外侧空间
- 多边形的边与半空间的关系





(a) 输出P_{i+1}　(a) 无输出　(a) 输出I　(a) 输出I和P_{i+1}

线段与当前裁剪边的位置关系

Sutherland-Hodgman算法-3/4

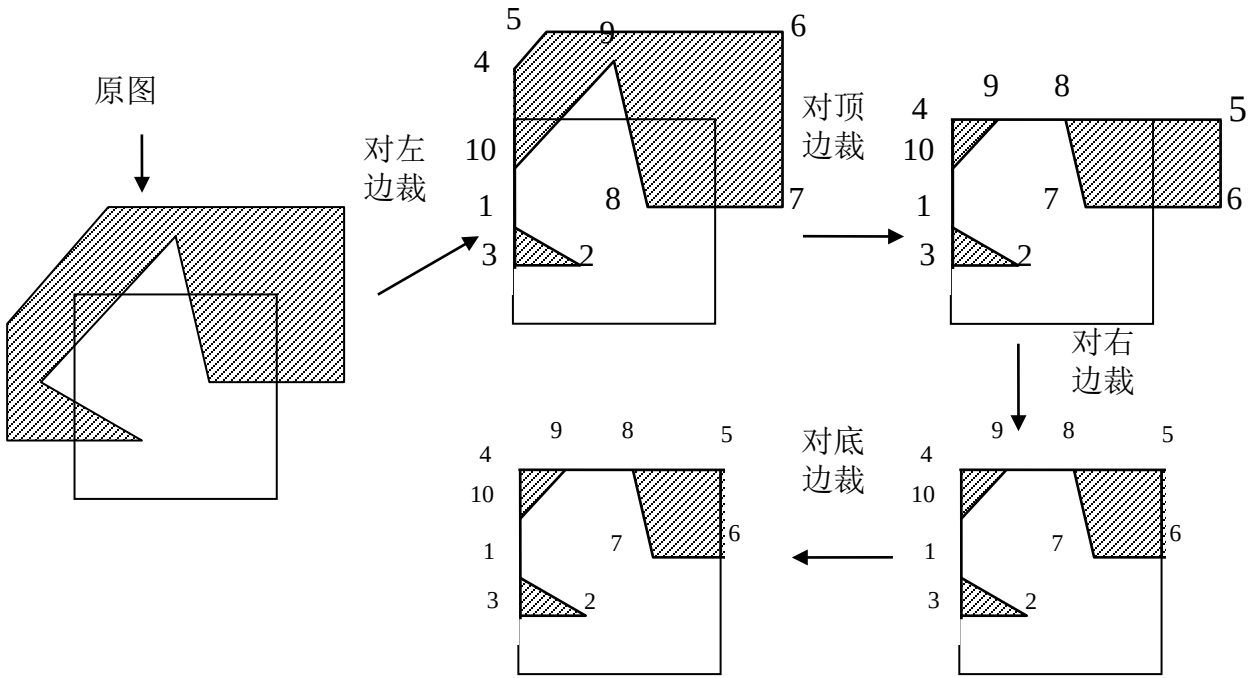
- 裁剪结果的顶点构成：
  - 裁剪边内侧的原顶点；
  - 多边形的边与裁剪边的交点。
- 顺序连接。

几点说明：

- 裁剪算法采用流水线方式，适合硬件实现。
- 可推广到任意凸多边形裁剪窗口

Sutherland-Hodgman算法-4/4
存在的问题

- 逐边裁剪要求裁剪窗口为凸多边形，那么凹多边形窗口怎么办？
- 逐边裁剪法对凹多边形裁剪时，裁剪后分裂为几个多边形，这几个多边形沿边框产生多余的线段？

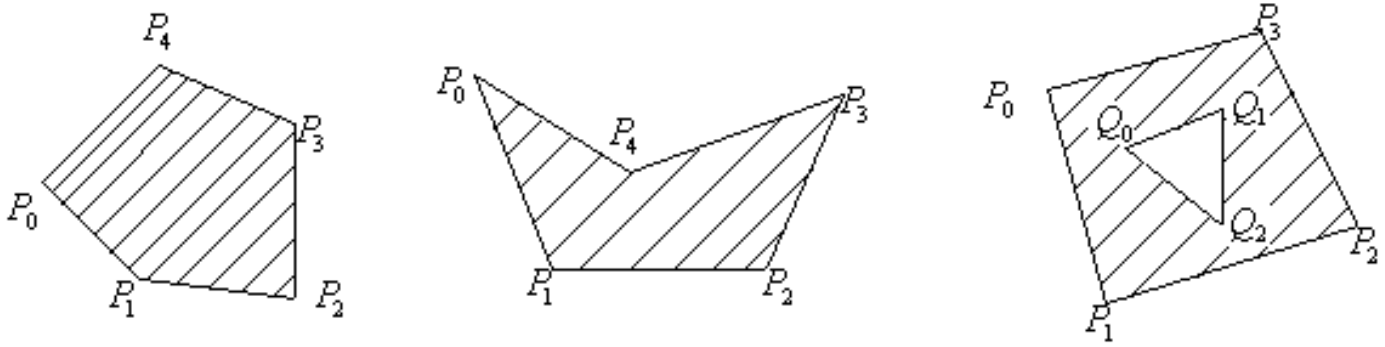


Demo

图6 逐边裁剪法对凹多边形裁剪时可能出现的问题

Weiler-Atherton算法-1/7

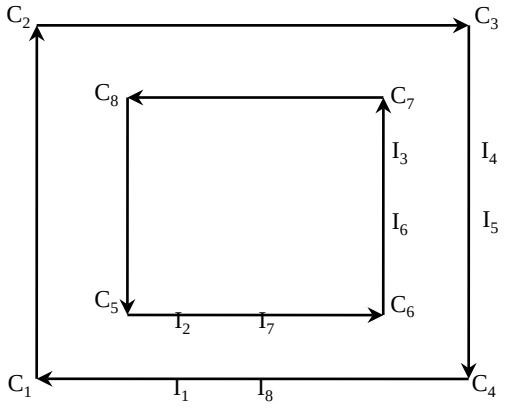
裁剪窗口为任意多边形（凸、凹、带内环）的情况：



- 主多边形：被裁剪多边形，记为SP
- 裁剪多边形：裁剪窗口，记为CP

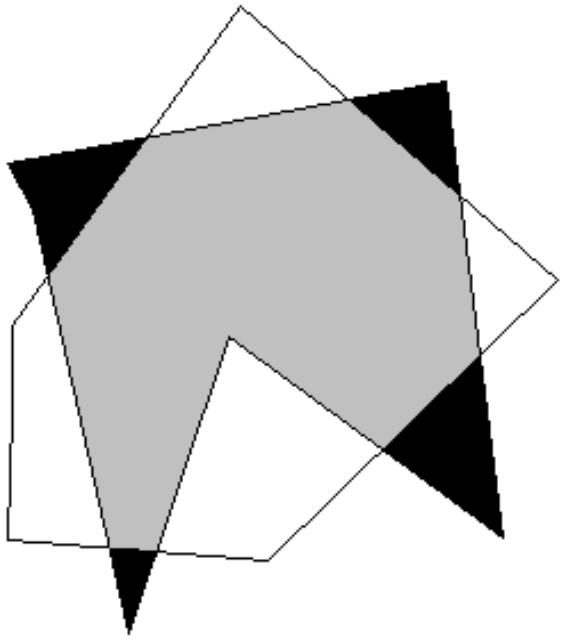
Weiler-Atherton算法-2/7

- 约定：
  - SP与CP均用它们顶点的环形链表定义
  - 外边界取顺时针方向
  - 内边界取逆时针方向
  - 使得沿多边形的边走动，其右边为多边形的内部。



Weiler-Atherton算法-3/7

- SP和CP把二维平面分成两部分。
- 内裁剪：SP∩CP
- 外裁剪：SP-CP



裁剪结果区域的边界由两部分构成：

1. SP的部分边界
2. CP的部分边界

且在交点处，边界发生交替

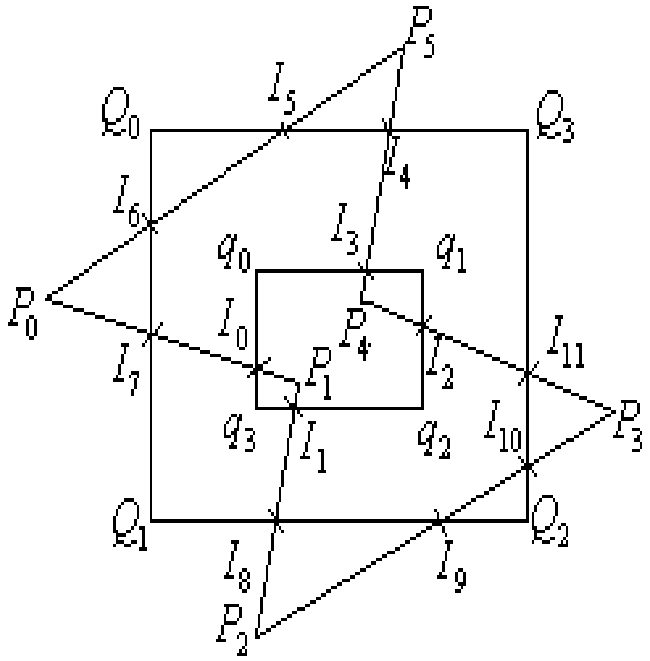
即由SP边界转至CP边界

或由CP边界转至SP边界

Weiler-Atherton算法-4/7

- 如果SP与CP有交点，则*交点成对出现，*
  它们被分为如下两类：

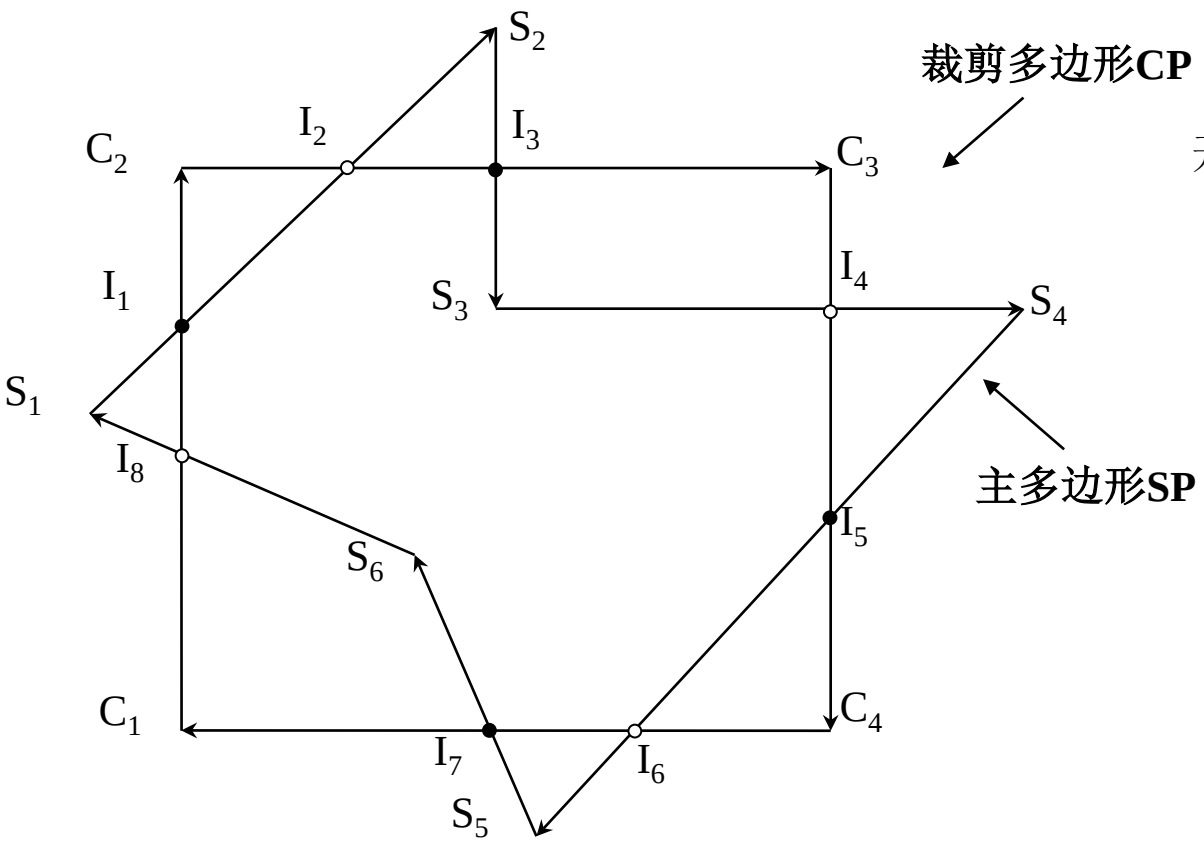
  - *进点*：SP边界由此进入CP
    如，I1,I3, I5, I7, I9, I11
  - *出点*：SP边界由此离开CP
    如，I0,I2, I4, I6, I8, I10



Weiler-Atherton算法-5/7

- 由任一个进点出发，沿SP的边，跟踪检测其与CP的交点（前交点），并判断该交点是进点还是出点。
- 若是*进点*：则沿SP边所示方向收集顶点序列。
- 若是*出点*：则从此点开始，检测CP的边所示方向收集顶点序列。
- 如此交替沿两个多边形的边行进。直至回到跟踪的起始点为止。

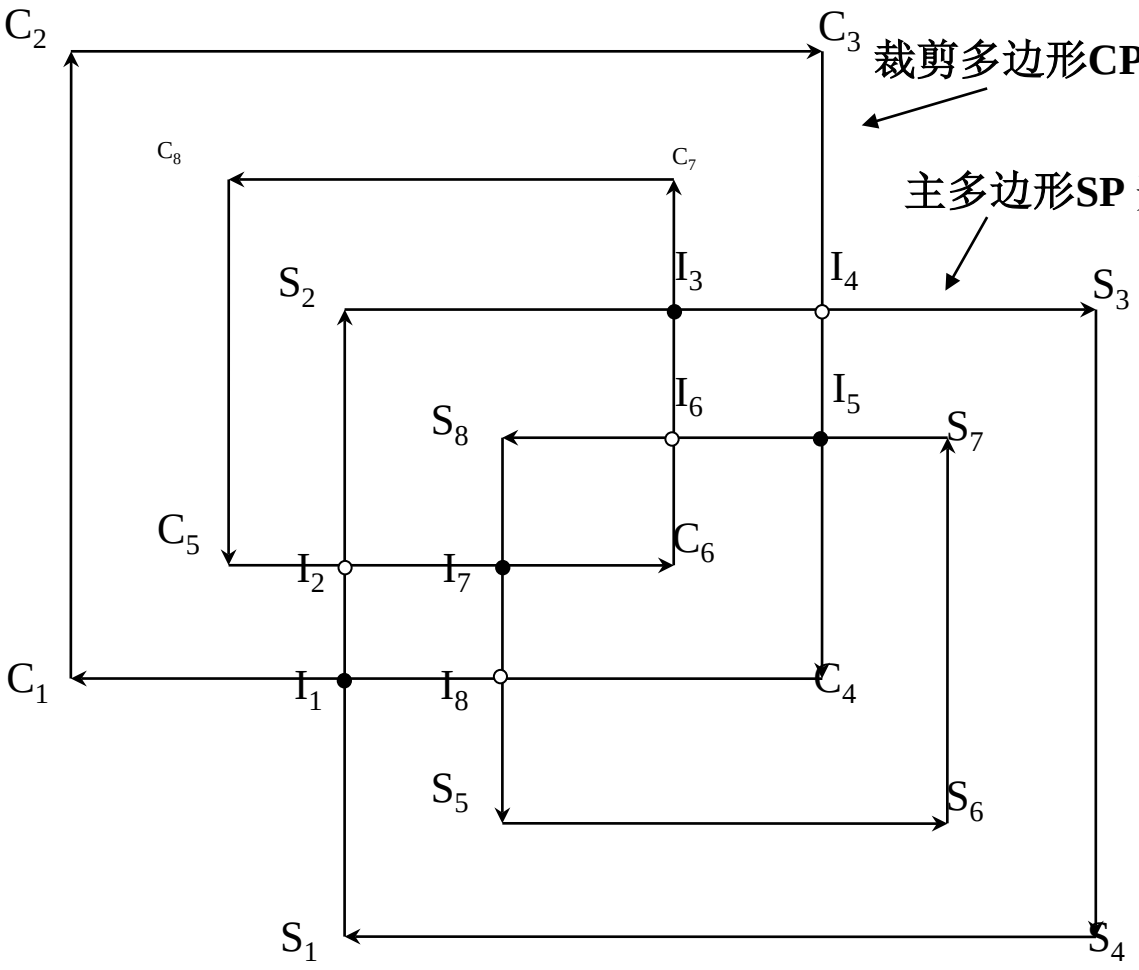
Weiler-Atherton算法-6/7



主多边形表		裁剪多边形表	
	S_1		C_1
开始	I_1		I_8
	I_2		I_1 结束
	S_2		C_2
	I_3		I_2
	S_3		I_3
	I_4		I_5
	S_4		C_3
	I_5		I_4
	I_6		I_5
	S_5		C_4
	I_7		I_6
	S_6		I_7
	I_8		C_1
	S_1		

算法裁剪后所生成的多边形为$I_1I_2I_3S_3I_4I_5I_6I_7S_6I_8\ I_1$

Weiler-Atherton算法-7/7



主多边形表		裁剪多边形表	
S_1		C_1	
I_1	●	C_2	
I_2	○	C_3	
S_2		I_4	○
I_3	●	I_5	●
I_4	○	C_4	
S_3		I_8	○
S_4		I_1 结束	●
S_1		C_1	
S_5		C_5	
S_6		I_2	○
S_7		I_7	●
I_5	●	C_6	
I_6	○	I_6	○
S_8		I_3 结束	●
I_7	●	C_7	
I_8	○	C_8	
S_5		C_5	

算法裁剪后所生成的多边形为$I_1I_2I_7I_8I_1$和$I_3I_4I_5I_6I_3$