矩阵范数 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

（定义：矩阵范数）$\forall A\in R^{n\times n}$ 有 $\|A\|$ 与之对应，满足

(1) $\|A\|\geq 0$ $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$ (2) $\|cA\|=|c|\,\|A\|$ 齐次

(3) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

(4) $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$

称 $\|\cdot\|$ 是 $R^{n\times n}$ 的一个范数

常见矩阵范数：(1) $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$ 最大行和

(2) $\|A\|_1=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 最大列和

(3) $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ λ_{max} 是 A^TA 最大特征值

(4) $\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius 范

可以 (1) (2) (3) 是范数 ??

矩阵算子范数

$x \in R^n$

（定义：矩阵算子（或从属）范数）$\|x\|_v$是某一向量范数

则 $\boxed{\|A\|_v = \max\limits_{x \in R^n} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}}$ 称为矩阵A算子范数或从属范数

$x \neq 0$

证明算子范数确实是一个范数：

(1)(2)(3)易证。为证(4)，得一个结论 $\forall x \in R^n$ 有

$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \le \|A\|_v$ 则 $\boxed{\|Ax\|_v \le \|A\|_v \|x\|_v \quad (*)}$

则 $\|AB\|_v = \max\limits_{x \in R^n} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} \le \max\limits_{x \in R^n} \frac{\|A\|_v \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \le \max\limits_{x \in R^n} \frac{\|A\|_v \|B\|_v \cancel{\|x\|_v}}{\cancel{\|x\|_v}}$

$= \|A\|_v \|B\|_v$

（定义：向量范数与矩阵范数相容性）

若 $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ 称矩阵范数与向量范数相容

（定理：算子范数与对应的向量范数相容）$\|Ax\|_v \le \|A\|_v \|x\|_v$

$v = \infty, 1, 2$

矩阵算子范数

（定理）前面列出的矩阵范数$\|A\|_v$是向量范数$\|\bullet\|_v$的算子范数，

$v=\infty,1,2$

(证明) (1)

$\|A\|_\infty^0=\max\limits_{x\in R^n}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}=\|A\|_\infty$ (最大行和) $A_\infty^0=A_\infty$

$\forall x\in R^n \quad Ax=\left(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)_{i=1}^n$ 则 $\|Ax\|_\infty=\max\limits_i\left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|$

$\leq\left[\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|\right]\|x\|_\infty$ 则 $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\leq\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|=\|A\|_\infty$

则证明了 $\|A\|_\infty^0\leq\|A\|_\infty$ 接下证存在x_0使得

$\frac{\|Ax_0\|_\infty}{\|x_0\|}=\|A\|_\infty$ 设第i_0行为最大行和 取

$x_0=(\mathrm{sgn}(a_{i_0,1}),\mathrm{sgn}(a_{i_0 2})\cdots\mathrm{sgn}(a_{i_0,n}))^T$ $\mathrm{sgn}(a)$是a的符号

则 $\|x_0\|_\infty=1$ $a>0$ $\mathrm{sgn}(a)=1$ $a<1$, $\mathrm{sgn}(a)=-1$

(证明续) Ax_0 的第 i_0 个元素为 $\sum_{j=0}^{n} a_{i_0 j}\,\mathrm{sgn}(a_{i_0 j})$

正是第 i_0 行和 $= \sum_{j=0}^{n} |a_{i_0 j}|$

$\|Ax_0\|_\infty = \|A\|_\infty$ 而 $\frac{\|Ax_0\|_\infty}{\|x_0\|_\infty} \le \|A\|_\infty$ 则 $\|A\|_\infty^0 = \|A\|_\infty$

$\max_{x\in R^n} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|A\|_\infty$ (最大行和)

(2) $\max_{x\in R^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \|A\|_1$ (最大列和) 同理

(3) $\max_{x\in R^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$? $\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^TAx, x)$

λ_{max} 是 A^TA 最大特征值

A^TA 对称半正定 $\le \lambda_{max}(x, x)$

$\therefore \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \le \lambda_{max}$

接下 存在 u_0 使 $\frac{\|Au_0\|_2^2}{\|u_0\|_2^2} = \lambda_{max}$ 只须取 u_0 是 λ_{max} 特征向量即可

$\therefore \|A\|_2^0 = \sqrt{\lambda_{max}} = \|A\|_2$ □

（例：计算各矩阵范数）

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 计算 $\|A\|_\nu$

$\nu=1, 2, \infty, F$

解 $\|A\|_1 = 6 \qquad \|A\|_\infty = 7$

$\|A\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -14 & 20 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1.3393 \times 10^{-1}$

$\lambda = 2.9866 \times 10^{0}$

A^TA 特征值

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}} = \sqrt{2.9866} \approx 5.4650$

（定理：矩阵范数与谱半径关系） $\|\cdot\|$ 为任一算子范数

则 $\rho(A) \le \|A\|$；反之 $\forall \varepsilon > 0$，至少存在一个算子范

数 $\|A\|_\varepsilon$ 使 $\|A\|_\varepsilon \le \rho(A) + \varepsilon$

证明 只证(1) $Ax = \lambda x$ 则 $\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

则 $|\lambda| \|x\| = \|Ax\| \le \|A\| \|x\|$

(2)不证 $\therefore \|A\| \ge |\lambda|$ 则 $\|A\| \ge \rho(A)$

（定理：对称矩阵范数） A 对称 则 $\|A\|_2 = \rho(A)$

证明：$\|\cancel{A}\|_2$ A 对称 则存在正交阵 Q 使 $QAQ^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 $\|A\|_2 = \max\limits_x \dfrac{(Ax, Ax)}{(x, x)} = \max\limits_x \dfrac{\left(Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^T x, Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^T x\right)}{(x, x)}$

$= \cancel{\max} \; \rho(B) \dfrac{(Qx, Qx)}{(x, x)} = \rho(B)$

$Q^T Q = I$

（扰动定理） $\|B\|<1$ 则 $I\pm B$ 可逆 则 $\|(I\pm B)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|B\|}$

（B相当于对I的扰动） $\|I\|=1$

$\|B\|$算子范数

证明：若 $I-B$ 奇异，则存在 $x_0 \neq 0$ 使得

$(I\pm B)$可逆

(1) $(I-B)x_0=0 \quad Bx_0=x_0$ 相容性

则 $\|x_0\|=\|Bx_0\| \le \|B\|\,\|x_0\|$ 则 $\|B\|\ge 1$ 矛盾

~~$\|Bx_0\|=\|x_0\|$~~

(2) $(I-B)^{-1}=I+B(I-B)^{-1}$

$\|(I-B)^{-1}\| \le \|I\|+\|B\|\,\|(I-B)^{-1}\|$ 移项可得 □

误差分析

11:25 回来

（一）病态方程组的例子：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

右端项微小改变 解剧烈改变 这样方程组称为病态的 它的矩阵称为病态矩阵

（定义：病态矩阵与良态矩阵）

ill-posed

反之 称为良态

$|A| = 0.0001$

（二）误差分析

（定理：右端项扰动） $|A|\neq 0$ $Ax=b\neq 0$ b 发生扰动 δb

则 $A(x+\delta x)=b+\delta b$ 则 $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

证明： $Ax=b \Rightarrow A\delta x=A\delta b$

$\therefore \|\delta x\|\leq\|A^{-1}\|\|\delta b\|$ $\quad b=Ax$

$\|b\|\leq\|A\|\|x\|$

相除 $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|}\leq\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ □

（二）误差分析

（定理：矩阵扰动） $|A| \neq 0$ $Ax=b \neq 0$ 若 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$，则 $(A+\delta A)(x+\delta x)=b$

则 $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|\|A\| \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$

$\|A^{-1}\|\|A\|$ 重要

证明：$\begin{cases}(A+\delta A)(x+\delta x)=b \\ Ax=b\end{cases} \Rightarrow (A+\delta A)\delta x = -\delta A x$

$A+\delta A = A(I+A^{-1}\delta A)$ 条件 $\|A^{-1}\delta A\|<1$

则扰动矩阵 $A+\delta A$ 可逆 $\therefore \delta x = -(A+\delta A)^{-1}\delta A x$

$\therefore \|\delta x\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$ $\therefore \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$ □

（三）条件数

（定义：条件数）$|A| \neq 0$ $\quad \mathrm{cond}(A)_v = \|A^{-1}\|_v \|A\|_v$

$v = 1, 2, \infty$

称为 A 的条件数

* $\mathrm{cond}(A)_v$ 刻画了 A 与 b 的扰动误差引起的解的相对误差的倍数　cond(A) 越大　A 越病态

（条件数性质）(1) $\mathrm{cond}(A)_v \geq 1$ $\quad I = A^{-1}A$

$1 = \|I\| \leq \|A^{-1}\| \|A\|$

(2) $\mathrm{cond}(cA)_v = \mathrm{cond}(A)_v$

(3) 若 A 正交阵 $(A^TA = I)$ 则 $\mathrm{cond}(A)_2 = 1$

$\mathrm{cond}(A)_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

(4) A 对称正定 则 $\mathrm{cond}(A)_2 = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

$\|A\|_2 = \lambda_{max}$

$\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\lambda_{min}}$

（三）条件数

（例1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} = A$ 算 $\|\cancel{A}\|$ $\mathrm{cond}(A)_2$

解 A对称正定 $\lambda^2 - 2.0001\lambda + 0.0001 = 0$

$\lambda = \dfrac{2.0001 \pm \sqrt{2.0001^2 - 0.0004}}{2}$ $\therefore$ $\mathrm{cond}(A)_2 = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \sim 10^4$

（例2）$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$ Hilbert 矩阵

病态

$\|H_3\|_\infty = \frac{11}{6}$ $\|H_3^{-1}\|_\infty = 408$

$\mathrm{cond}(A)_\infty = 748$

$\cancel{\mathrm{cond}(A)}$ $\mathrm{cond}(H_6)_\infty = 2.9 \times 10^7$ $\mathrm{cond}(H_7) = 9.85 \times 10^8$

（三）条件数

（条件数大的情形）：(1) 大型方程组（亿级）

(2) $|A|$ 很小（$|A| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \lambda_n$），有小特征值

但不绝对 $|A| = 10^{-200}$ 但 $\mathrm{cond}(A)_2 = 100$ $\begin{pmatrix} 10^{-2} & & \\ & \ddots & \\ & & 10^{-2} \end{pmatrix}$ 100项

(3) A 元素之间量级相差很大 $\begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 不好

(4) 有两列(或行)很接近 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}$

（改善条件数的方法：预处理）

$Ax = b$ 找 P Q

新方程组 $\begin{cases} PAQy = Pb & 求 y \\ Qx = y & 求 x \end{cases}$ 其中 PAQ 条件数要好

P Q 称为预处理矩阵 Q P 一般取对角阵或三角阵

例 $\begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{cond}(A)_\infty = 10^4$ 第一行除 10^4 $\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{cond}_\infty = 4$

（四）误差与残差

（定理：残差误差估计）

x 真解 $\tilde{x}$ 近似 $x-\tilde{x}$ 误差

$Ax - A\tilde{x} = b - A\tilde{x}$ 称为残差。

$|A| \neq 0$ $Ax=b$ $\tilde{x}$ 是 x 近似解 $r = A\tilde{x} - b$ 残差

则 $$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

证明. $x-\tilde{x} = A^{-1}r$ $\|x-\tilde{x}\| \le \|A^{-1}\| \|r\|$

$\|b\| \le \|A\| \|x\|$ 得到结论

注 小的残差不一定保证小的误差

相差 $\mathrm{cond}(A)$ 倍

（四）误差与残差

（迭代改善法）

P178 17, 18, 20, 21

x_1 近似解 $r_1 = b - Ax_1$ 残差

解方程 $Ad_1 = r_1$ 令 $x_2 = x_1 + d_1$

则 $A(x_2) = A(x_1+d_1) = Ax_1 + Ad_1 = Ax_1 + b - Ax_1$

$= b$

则 $x_1 + d_1$ 为精确解

算法 (1) $PA = LU$ 求 x_1 ($PAx = pb$, $LU = pb$)

(2) For $k = 1, 2, \cdots, N$ $r_k = b - Ax_k$ (残差计算)

$Ad_k = r_k \Longleftrightarrow PAd_k = pr_k$ $LUd_k = pr_k$

$\Longleftrightarrow Ly = pr_k$ $Ud_k = y$

令 $x_{k+1} = x_k + d_k$

若 $\|d_k\| / \|x_k\| \le 10^{-t}$ 停止 令 $x_{k+1} = x_k + d_k$ 为有解近似