

习题四

1. (1) 设 $z_n = \frac{n-1}{n} + i \frac{2n}{3n+1}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 。

(2) 设 $z_n = 1 + \frac{i}{n}$, $z'_n = \frac{n-1}{n} + i$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm z'_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot z'_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n}$ 。

解: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = 1 + \frac{2}{3}i$ 。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = 1 + i$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) = 1 \pm (1 + i);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot z'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = 1 + i;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i。$$

2. 下列结论是否正确? 为什么?

(1) 每一个幂级数在其收敛圆内与收敛圆上均收敛;

(2) 每一个幂级数收敛于一个解析函数;

(3) 每一个在点 z_0 连续的函数一定可以在点 z_0 的某一邻域内展开成泰勒级数;

(4) 每一个在点 z_0 处可导的函数一定可以在点 z_0 的某一邻域内展开成泰勒级数。

解: (1) 不正确。例如: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z| < 1$ 内收敛于 $\frac{1}{1-z}$, 但在收敛

圆 $|z|=1$ 上的 $z=1$ 发散。

(2) 不正确。例如：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ 仅在 $z=0$ 收敛，从而它不收敛于任一个解析函数。

(3) 不正确。例如：函数 $f(z) = \bar{z} = x - yi$ 在点 $z=0$ 连续，但它处处不可导。从而它在 $z=0$ 的邻域内不能展开成泰勒级数。

(4) 不正确。例如：函数 $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ 在点 $z=0$ 可导，但它除 $z=0$ 外处处不可导。从而它在 $z=0$ 的邻域内不能展开成泰勒级数。

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解 1: 不能。由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，说明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=-2$ 收敛。因而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 2$ 。若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在 $z=3$ 发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 发散，这与幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 2$ 矛盾。故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛。

解 2: 不能。由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，说明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 的收敛半径 $R \geq |0-2|=2$ 。而 $3 \in \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$ ，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛。

4. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在它的收敛圆周 z_0 处绝对收敛, 证明它在收敛圆周所围的闭区域上处处绝对收敛。

证: 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在它的收敛圆周 z_0 处绝对收敛, 则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n$$

收敛。令 $R = |z_0|$, 对任意 z , $|z| \leq R$ 有

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |a_n| |z_0|^n。$$

由正项级数的比较判别法, 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 收敛。即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在收敛圆周 $|z| = R$ 所围的闭区域上处处绝对收敛。

5. 我们知道, 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 当 x 为任何实数时, 都有确定的值, 而且是可导的。但它的泰勒展开式: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$ 却只当 $|x| < 1$ 时成立, 通过研究函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 试说明其原因。

解: 函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 \mathbb{C} 上仅有两个奇点 $z = \pm i$ 。根据泰勒展开定理, 它在 $z=0$ 的泰勒展开式

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots \quad (*)$$

的收敛半径 $R=1$ 。因此当 $|z| < 1$ 时, $(*)$ 式成立。当 $|z| > 1$ 时, $(*)$ 式处处不成立, 不然与收敛半径 $R=1$ 矛盾。

特别把 z 限制在实轴上有

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (**)$$

当 $|x| > 1$ 时, $(**)$ 式不成立。

当 $|x|=1$ 时, $(**)$ 式左边 $=\frac{1}{2}$, 右边 $=1-1+1-1+\cdots$ 发散。故 $|x|=1$ 时, $(**)$ 式不成立。

6. 证明如下不等式:

(1) 对于任意的 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

(2) 当 $0 < |z| < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|.$$

证: 注意到

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < \infty,$$

于是

(1) 对于任意的 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned} |e^z - 1| &= \left| \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots \right| \\ &\leq \frac{1}{1!}|z| + \frac{1}{2!}|z|^2 + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^n + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!}|z| + \frac{1}{2!}|z|^2 + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^n + \cdots \right) - 1 \\ &= e^{|z|} - 1 \\ &= |z| \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}|z| + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^{n-1} + \cdots \right) \\ &\leq |z| \left(1 + \frac{1}{1!}|z| + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}|z|^{n-1} + \cdots \right) \\ &= |z|e^{|z|}. \end{aligned}$$

(2) 当 $0 < |z| < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|e^z - 1| &= |z| \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}|z| + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^{n-1} + \cdots \right) \\
&\leq |z| \left[\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots \right) - 1 \right] \\
&= |z|(e - 1) \\
&\leq \frac{7}{4}|z|.
\end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}
|e^z - 1| &= |z| \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}|z| + \cdots + \frac{1}{n!}|z|^{n-1} + \cdots \right) \\
&\geq |z| \left(1 - \frac{1}{2!}|z| - \cdots - \frac{1}{(n-1)!}|z|^{n-1} - \cdots \right) \\
&\geq |z| \left(1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} - \cdots \right) \\
&= |z| \left(3 - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} - \cdots \right) \\
&= |z|(3 - e) \\
&\geq \frac{1}{4}|z|.
\end{aligned}$$

因此，有

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|.$$

7. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，便指出它们的收敛半径。

(1) $\frac{1}{z^2}$, $z_0 = -1$;

解: $\frac{1}{z^2}$ 的奇点是 $z=0$, 故 $R=|0-(-1)|=1$, 且

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{1-(z+1)} \cdot \frac{1}{1-(z+1)} \\ &= \left[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots\right] \left[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots\right] \\ &= 1+2(z+1)+3(z+1)^2+\cdots+n(z+1)^n+\cdots, \quad |z+1|<1.\end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{4-3z}$, $z_0=1+i$;

解: $\frac{1}{4-3z}$ 的奇点是 $z=\frac{4}{3}$, 故 $R=\left|\frac{4}{3}-(1+i)\right|=\frac{\sqrt{10}}{3}$, 且

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-3z} &= \frac{1}{4-3(1+i)-3[z-(1+i)]} = \frac{1}{1-3i-3[z-(1+i)]} \\ &= \frac{1}{1-3i} \cdot \frac{1}{1-\frac{3[z-(1+i)]}{1-3i}} \\ &= \frac{1}{1-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{3[z-(1+i)]}{1-3i} \right\}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}} [z-(1+i)]^n, \quad |z-(1+i)| < \frac{\sqrt{10}}{3}.\end{aligned}$$

(3) $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$, $z_0=0$;

解: $\frac{e^{z^2}}{\cos z}$ 离 $z=0$ 最近的奇点是 $z=\frac{\pi}{2}$, 故 $R=\left|0-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$, 且

$$\frac{e^{z^2}}{\cos z} = \frac{1+\frac{1}{1!}z^2+\frac{1}{2!}z^4+\cdots}{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots} = 1+\frac{3}{2}z^2+\frac{29}{24}z^4+\cdots, \quad |z|<\frac{\pi}{2}.$$

8. 证明: (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径

为 1;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R 。则 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 的收敛半径大于或等于 R 。

证: (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 处收敛。由阿贝尔定理,

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 内收敛, 从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$ 。另

一方面, 如 $R > 1$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=1$ 绝对收敛。这与 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散矛

盾。故 $R=1$ 。

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R 。则对 $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 收敛。

注意到

$$|(\operatorname{Re} a_n) z^n| = |\operatorname{Re} a_n| |z^n| \leq |a_n| |z^n| = |a_n z^n|。$$

可见幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 在 $|z| < R$ 内绝对收敛。从而 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n) z^n$ 的收敛半

径大于或等于 R 。

9. 设 $f(z) = \frac{z-a}{z+a}, a \neq 0$, 求 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, n \geq 0$, 其中 C 为任一条包含原点

且落在圆周 $|z|=|a|$ 内的简单光滑闭曲线。

解： $z = -a$ 是函数 $f(z)$ 的唯一奇点。故 $f(z)$ 在 $|z| < |a|$ 内解析，从而在 C 上及 C 内部解析。由于 C 包含原点，由高阶导数公式及泰勒展开定理可知

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) = 2\pi i c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 c_n 为 $f(z)$ 在 $|z| < |a|$ 内泰勒级数展开式的系数。

另一方面，在 $|z| < |a|$ 内有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-a}{z+a} = 1 - \frac{2a}{z+a} \\ &= 1 - 2 \frac{1}{1 + \frac{z}{a}} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{a}\right)^n \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2}{a^n} z^n. \end{aligned}$$

于是，有

$$c_n = \begin{cases} -1, & n = 0; \\ (-1)^{n+1} \frac{2}{a^n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

因而，得

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \begin{cases} -2\pi i, & n = 0; \\ (-1)^{n+1} \frac{4\pi i}{a^n}, & n \geq 1. \end{cases}$$

10. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$ 。记 $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, 证明:

$$(1) S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} f(\zeta) \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta, |z| < r < R;$$

$$(2) f(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta, |z| < r < R.$$

证： (1) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$, 则

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, n = 0, 1, 2, \dots.$$

于是

$$\begin{aligned} S_n(z) &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right) z + \dots + \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \dots + \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} f(\zeta) \left(\frac{\zeta^n + z\zeta^{n-1} + z^2\zeta^{n-2} + \dots + z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} f(\zeta) \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta, |z| < r < R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f(z) - S_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} f(\zeta) \frac{\zeta^{n+1} - z^{n+1}}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)(\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1} + z^{n+1})}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{z^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta^{n+1}} d\zeta, |z| < r < R. \end{aligned}$$

11. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 其和函数为 $f(z)$, 证明:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $0 < r < R$, $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$ 。

证： 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$ ，其和函数为 $f(z)$ 。则

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \oint_{|z|=r} ds \\ &= \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中 $0 < r < R$, $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$ 。

12. (1) 若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \infty$ ，且 $M(r) \leq kr^n$ (k 为大于零的正数, n 为大于或等于 1 的自然数, $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$)，证明： $f(z)$ 是一个次数至多为 n 的多项式。

(2) 若 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ 是 n 次多项式, 即 $a_n \neq 0, n \geq 1$ 。证明：存在常数 k 和 $r_0 > 0$ ，使得当 $|z| > r_0$ 时，有

$$|P(z)| \geq k|z|^n。$$

(3) 证明一个 $n \geq 1$ 次的多项式的值不可能对于一切 z 都相同。

证： (1) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \infty$ ，且 $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})| \leq kr^n$ (k 为大于零

的正数, n 为大于或等于 1 的自然数)。由上题知

$$|a_m| \leq \frac{M(r)}{r^m} \leq k \frac{1}{r^{m-n}} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (m > n)。$$

可见

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0。$$

因此, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ 。它是一个次数至多为 n 的多项式。

(2) 设 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ 是 n 次多项式, 则有

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &= |z|^n \left| a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \\ &\geq |z|^n \left(|a_n| - \left| a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \right)。 \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(|a_n| - \left| a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \right) = |a_n| > 0$ 。故存在常数 $r_0 > 0$, 使得当

$|z| > r_0$ 时, 有

$$|a_n| - \left| a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2}$$

令 $k = \frac{|a_n|}{2}$, 则有 $|P(z)| \geq k |z|^n$ 。

(3) 设有一个 $n \geq 1$ 次的多项式 $P(z)$ 的值对于一切 z 都相同。则

$$|P(z)| = l > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}。$$

另一方面, 由(2)存在常数 k 和 $r_0 > 0$, 使得当 $|z| > r_0$ 时, 有

$$|P(z)| \geq k |z|^n。$$

这说明 $\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$ 。矛盾。故一个 $n \geq 1$ 次的多项式的值不可能对于一切 z 都相同。

13. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $\operatorname{Re}[f(z)] > 0$, 证明:

① 对任意的 $0 < r < 1, n = 1, 2, \dots$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \zeta^{n-1} f(\zeta) d\zeta = 0;$$

② 对任意的 $0 < r < 1, n = 1, 2, \dots$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})} \right] r^{-n} e^{-in\theta} d\theta;$$

③ $|a_n| \leq 2(\operatorname{Re} a_0), n = 1, 2, \dots$ 。

证: 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $\operatorname{Re}[f(z)] > 0$ 。

① 对任意的 $0 < r < 1, n = 1, 2, \dots$, 由于 $\zeta^{n-1} f(\zeta)$ 在 $|\zeta| = r$ 上及内部解析,

据柯西积分定理, 有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \zeta^{n-1} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (*)$$

② 对任意的 $0 < r < 1, n = 1, 2, \dots$, 利用泰勒系数和高阶导数公式, 有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta. \quad (**)$$

现在利用圆周 $|\zeta|=r$ 的参数方程 $\zeta = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 将(*)和(**)中的线积分转换为定积分, 得

$$\begin{cases} 0 = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta \\ a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta \end{cases}。$$

在上式第一个方程的两边取共轭复数并除以 r^{2n} , 得

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} r^{-n} e^{-in\theta} d\theta \\ a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta \end{cases}。$$

上式中两个方程相加, 有

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})} \right] r^{-n} e^{-in\theta} d\theta。$$

③ 对任意的 $0 < r < 1$, $n=1, 2, \dots$, 注意到 $\operatorname{Re}[f(z)] > 0$, 利用②的结论, 得

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left[f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})} \right] r^{-n} e^{-in\theta} \right| d\theta \\ &= \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 2 \operatorname{Re} \left[f(re^{i\theta}) \right] \right| d\theta \\ &= \frac{r^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[f(re^{i\theta}) \right] d\theta。 \end{aligned}$$

而泰勒系数 a_0 为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta; \\ \operatorname{Re} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[f(re^{i\theta}) \right] d\theta。 \end{aligned}$$

所以

$$|a_n| \leq \frac{2}{r^n} (\operatorname{Re} a_0), \quad (n=1, 2, \dots)。$$

令 $r \rightarrow 1$ ，即得所要证明的结论。

14. 把下列函数在指定的圆环域内展开成洛朗级数。

(1) $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2;$

解： $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{z}{z^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{z^2+1} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^2} \right)^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^2} \right)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5 \cdot 2^{n+1}} \right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{z^{2n+2}}。 \end{aligned}$$

(2) $\sin \frac{1}{1-z}, \quad 0 < |z-1| < +\infty;$

解： 注意到

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots。$$

故

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{1-z} &= -\sin \frac{1}{z-1} \\ &= -\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{(z-1)^5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} + \cdots \right].\end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2, \quad 2 < |z| < +\infty, \quad 0 < |z-1| < 1, \quad 1 < |z-1| < +\infty, \\ 0 < |z-2| < 1, \quad 1 < |z-2| < +\infty;$$

解: $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{1}{z^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{1}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) \frac{1}{z^{n+1}}, \quad 2 < |z| < +\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} - \frac{1}{z-1} \\
&= -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad 1 < |z-1| < +\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} \\
&= \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-2)^{n+1}}, \quad 1 < |z-2| < +\infty.
\end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{1}{z(z+2)^3}, \quad 0 < |z+2| < 2.$$

解:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z+2)^3} &= \frac{1}{(z+2)^3} \frac{1}{(z+2)-2} \\
&= \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{z+2}{2}} \\
&= \frac{1}{(z+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z+2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) (z+2)^{n-3}.
\end{aligned}$$

15. 求函数 $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ 的以 $z=0$ 为心的解析的各个圆环区域内的洛朗展开式。

解: 函数 $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ 在 \mathbb{C} 上有两个不解析点 $z=1$ 和 $z=-2$ 。所以它以 $z=0$ 为心的解析圆环区域为 $1 < |z| < 2$ 和 $2 < |z| < +\infty$ 。现分别在这两个圆环区域内求它的洛朗展开式如下。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \end{aligned} \quad 1 < |z| < 2.$$

和

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n 2^n + 1 \right] \frac{1}{z^{n+1}}, \end{aligned} \quad 2 < |z| < +\infty.$$

16. 若函数 $f(z)$ 在 $r < |z| < R$ ($r < 1 < R$) 内解析, 且

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad r < |z| < R.$$

证明

$$2 - a_n - a_{-n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots。$$

证： 设函数 $f(z)$ 在 $r < |z| < R$ ($r < 1 < R$) 内解析，且

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad r < |z| < R。$$

由解析函数洛朗展开式的系数表达式，有

$$\begin{aligned} 1 = a_0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta; \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots。 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 2 - a_n - a_{-n} &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) (2 - e^{-in\theta} - e^{in\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) (2 - 2\cos n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left[2\sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right) \right] d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2\left(\frac{n\theta}{2}\right) d\theta。 \end{aligned}$$

17. 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析，且

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n。$$

若 $f(z)$ 在区间 $(-R, R)$ 上取实值，证明： a_n 为实数， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

证： 设函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析，且

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n。$$

由解析函数泰勒展开式的系数表达式， 有

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots。$$

若 $f(z)$ 在区间 $(-R, R)$ 上取实值， 则 $f(x)$, $x \in (-R, R)$ 是实函数。由于函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析， 故 $f(x)$ 在 $(-R, R)$ 有任意阶导数。

$\forall x_0 \in (-R, R)$ ， 由于函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析， 故 $f(z)$ 在 x_0 可导。于是

$$f'(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0, y=0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

是实数。从而 $f'(x)$, $x \in (-R, R)$ 是实函数。再由数学归纳法可知 $f^{(n)}(x)$ 是实函数。这样 $f^{(n)}(0)$ 是实数。因此， a_n 为实数， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。