# 2021年秋统计学
## 习题01参考解答

1. 证明 $n\to\infty$ 时，自由度为 $n$ 的 $t$ 分布的 pdf

$$f_n(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

收敛于（对任意给定的 $t\in(-\infty,\infty)$）

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

在第4页有注

证明.

(方法一) 利用 Stirling 公式

$$\Gamma(n)\approx\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{(n+1)/2}}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{n/2}}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}\cdot\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\cdot 1\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2e}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

再注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

即可证得所需结论. □

**方法二:**

记

$$a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad g_n(t) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad n\geq 1,\ t\in\mathbb{R}.$$

则 $f_n(t) = a_n g_n(t)$. 由于

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n+1} = 1+(n+1)\cdot\frac{t^2}{n} + \frac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\frac{t^2}{n}\right)^2 + \cdots$$

$$\geq 1+\frac{n+1}{n}t^2 + \frac{n+1}{2n}t^4 \geq 1+\frac{1}{2}t^4.$$

可得

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \leq \left(1+\frac{1}{2}t^4\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

注意到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}t^4\right)^{-\frac{1}{2}}dt < \infty$, 从而由控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty} g_n(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = \sqrt{2\pi}.$$

又由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_n g_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$$

可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\int g_n(t)\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} a_n g_n(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} g_n(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

注：本问题的原题干并不十分明确，这里涉及两种收敛：

1). 密度 $f_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$, $(n\to\infty)$

2) 依分布收敛，即 t 分布的 cdf $F_n(t) \to \Phi(t)$.

但这两者有联系.

由 Scheffe's 定理，如果密度在一零测集(勒贝格测度意义下)之外收敛，则对应的 r.v.s 也依分布收敛. 反过来的结果也有相关研究，参

i) Dennis. D. Boos, 1985, Ann. Stat. vol 13. no 1. 423~427. A converse to Scheffe's Theorem

ii) T. J. Sweeting, 1986 Anna. Stat. Vol. no3 1252-1256

实际中，我们更关心依分布收敛的证明，有如下简单证明.

根据定义 $T_n = \frac{X}{\sqrt{Y_n/n}}$, 其中 $Y_n \sim \chi^2(n) \sim \sum_{i=1}^{n} U_i^2$

$U_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$, 因此，由 LLN, $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} EU_i^2 = 1$.

可推得 $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{D} 1$. 再由 Slutsky 定理，$\frac{X}{\sqrt{Y_n/n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

表依分布收敛

2. 已知随机变量 $X \sim t(n)$，求证：$X^2 \sim F(1,n)$.

证明：设

$$Z \sim N(0,1), \quad U \sim \chi^2(n),$$

且 $Z, U$ 相互独立，则 $X$ 与

$$V := \frac{Z}{\sqrt{U/n}}$$

同分布，从而 $X^2$ 与 $V^2$ 同分布. 注意到 $Z^2 \sim \chi^2(1)$，

且 $Z^2$ 与 $U$ 相互独立，所以

$$V^2 = \frac{Z^2}{U/n} \sim F(1,n).$$

由此可知 $X^2 \sim F(1,n)$.

3 求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10, 15 的两个独立样本的均值的差的绝对值大于 0.3 的概率.

解: 分别记两个总体为 X, Y. 则 X, Y 同分布且相互独立. 且各自的样本均值 $\bar{X} \sim N(20, \frac{3}{10})$, $\bar{Y} \sim N(20, \frac{3}{15})$ 都是正态分布随机变量且相互独立. 从而

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(0, \tfrac{1}{2}).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|\bar{X}-\bar{Y}| > 0.3) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{0.3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= 1 - \left(2\Phi\left(\frac{0.3}{\sqrt{1/2}}\right) - 1\right) \\
&\approx 2 - 2\Phi(0.42464069) \\
&\approx 0.67137.
\end{aligned}$$

4 设 $X_1 \cdots X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, 求

(a)
$$Y_1 = \frac{\sqrt{m}\, \sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\, \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$$

(b)
$$Y_2 = \frac{m \sum_{i=1}^{n+m} X_i^2}{n \sum_{i=n+1}^{m} X_i^2}$$

的分布.

解 (a). 由假设可知
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, n\sigma^2).$$
从而有
$$U := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\,\sigma} \sim N(0,1).$$
又有
$$\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$$
且
$$\left\{\frac{X_i}{\sigma}\right\}_{i=n+1}^{m}$$
相互独立, 从而可知
$$V := \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m)$$
注意到 $U, V$ 相互独立, 从而
$$Y_1 = \frac{U}{\sqrt{V/m}} \sim t(m)$$

(b)

$$W := \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

且 $V$, $W$ 相互独立, 从而

$$Y_2 = \frac{W/n}{V/m} \sim F(n,m).$$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1} \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

求

$$T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的分布.

解: 由于 $(n-1)S^2 = nS^{*2}$ 可知 $\bar{X}$ 与 $nS^{*2}$ 相互独立, 且由

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

可知

$$\frac{nS^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

又由于 $S^{*2}$ 仅依赖于 $X_1, \cdots, X_n$, 与 $X_{n+1}$ 独立 从而可知

$$X_{n+1} - \bar{X} \sim N\left(0, \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$$

与 $S^{*2}$ 独立, 所以

$$T = \frac{\dfrac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sigma^2}}}{\sqrt{\dfrac{nS^{*2}}{\sigma^2} \Big/ n-1}} \sim t(n-1)$$

6 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} X$.

(a) 写出 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合概率密度函数

(b) 写出 $\overline{X}$ 的 pdf.

解. (a) 总体 $X$ 的 pdf 为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

由于 $X_1, \cdots, X_n \sim X$ 且相互独立, 故 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合 pdf 为

$$f_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}.$$

(b). 因 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, 故

$$f_{\overline{X}}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$