

# 应用随机过程

连续马链案例

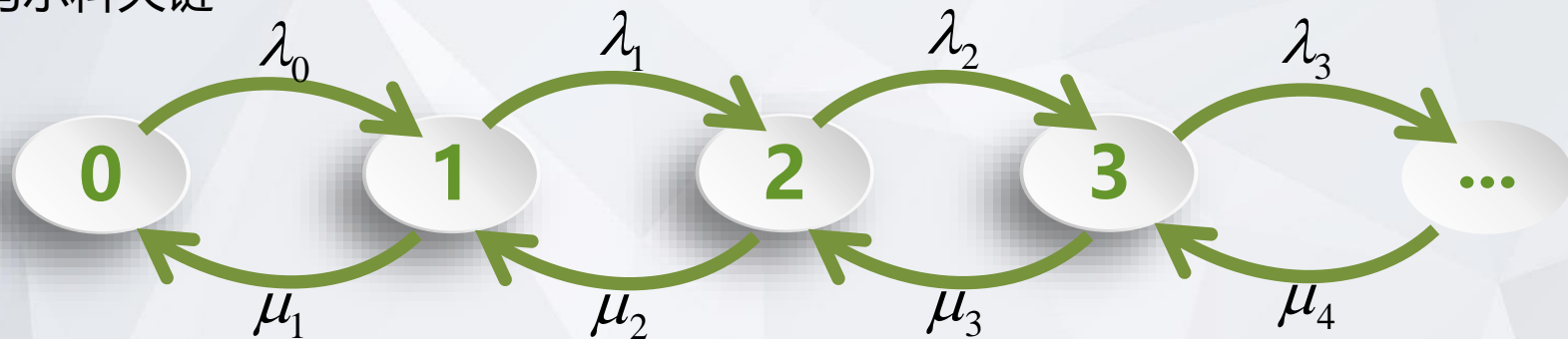
授课教师：赵毅

哈尔滨工业大学（深圳）理学院





马尔科夫链



转移速率矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & 0 \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_3) & \lambda_3 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



# 一位难求





# 虚置浪费





**背景:** 新新网吧为深圳大学城周边用户提供网络休闲服务。假设来网吧上网的人数服从均匀泊松分布，平均每小时有二十五人来网吧上网。每人的平均网络浏览时间大概一小时，浏览时间近似服从指数分布。可假设每人上网彼此独立，互不影响，而且到达网吧的过程与用户上网过程相互独立。当新来用户发现网吧电脑全部被占用，则自动离开去其它地方。

**任务:** 描述在新新网吧上网人数的概率分布，以及平均上网人数情况。



# 案例建模分析

6







每个顾客的上网时间  $T_i \sim \exp(\mu)$

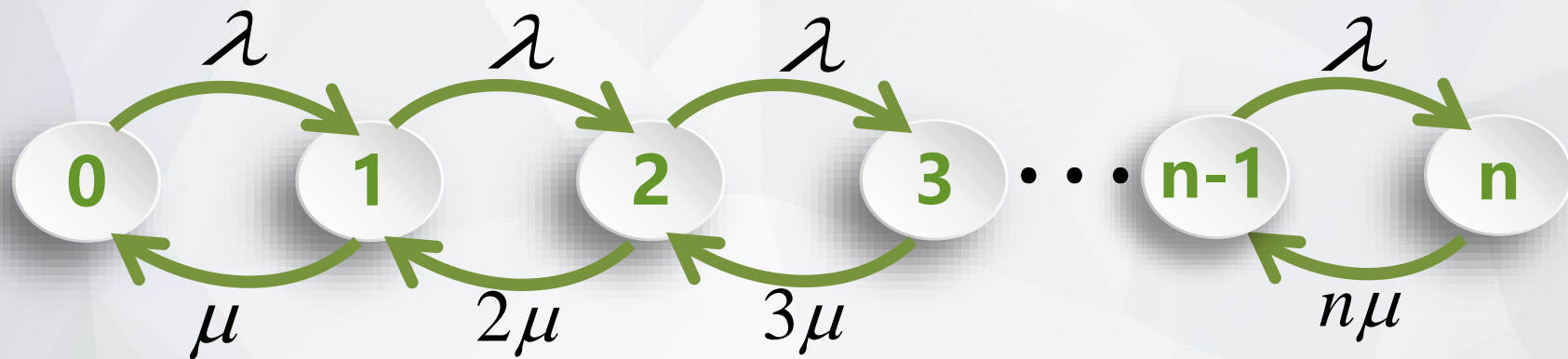
网吧里有  $m$  ( $m \leq n$ ) 个顾客同时在网上, 则首位顾客上网完成时间

$T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_{m-1}, T_m\}$  服从参数为  $m\mu$  的指数分布





## 网吧系统的马尔科夫链







## 转移速率矩阵

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda + 3\mu) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -[\lambda + (n-1)\mu] & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n\mu & -n\mu \end{pmatrix} \end{matrix}$$



转移概率矩阵

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}$$

状态概率向量

$$S(t) = S(0) \cdot P(t)$$

其中,  $S(0) = \{P\{X(0)=0\}, P\{X(0)=1\}, P\{X(0)=2\}, \dots, P\{X(0)=n\}\}$





## 参数讨论

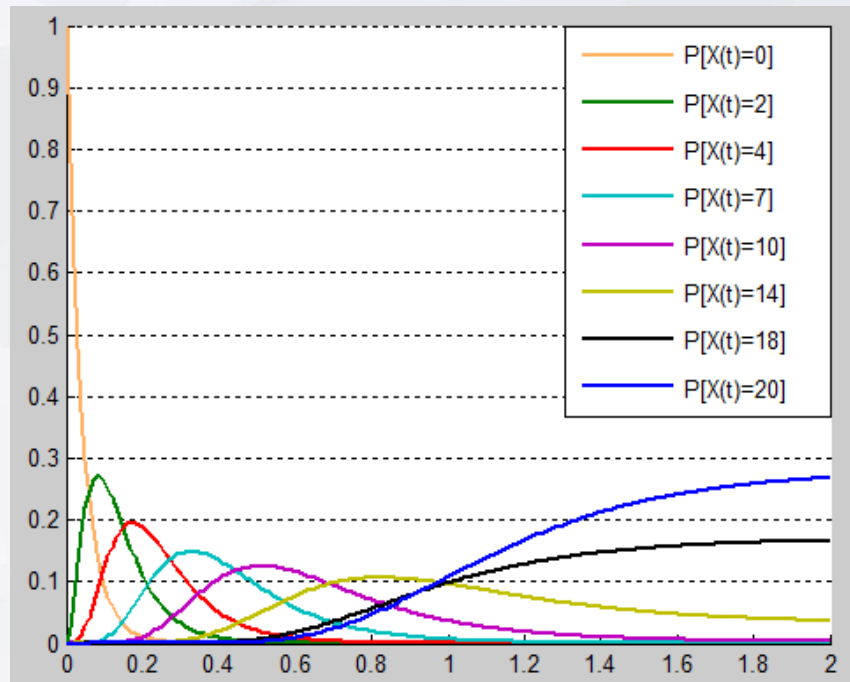
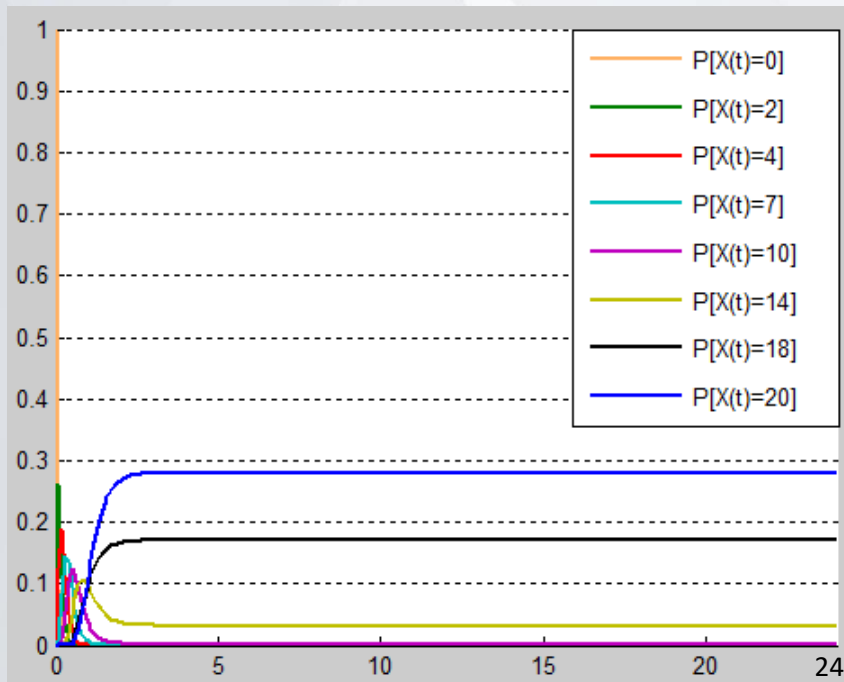
设 $X(t)$ 为 $t$ 时刻系统的状态(网吧中的总人数)

网吧开始营业时 $X(0)=0$ , 故  
 $S(0) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$

网吧有20台电脑, 系统状态包括  
 $S(t) = \{P\{X(t)=0\}, P\{X(t)=1\}, P\{X(t)=2\}, \dots, P\{X(t)=20\}\}$



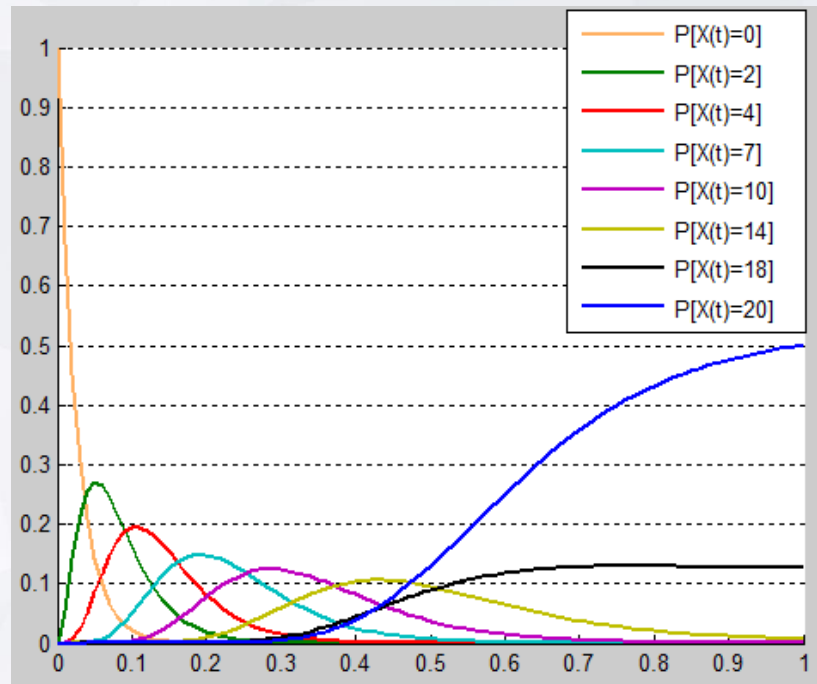
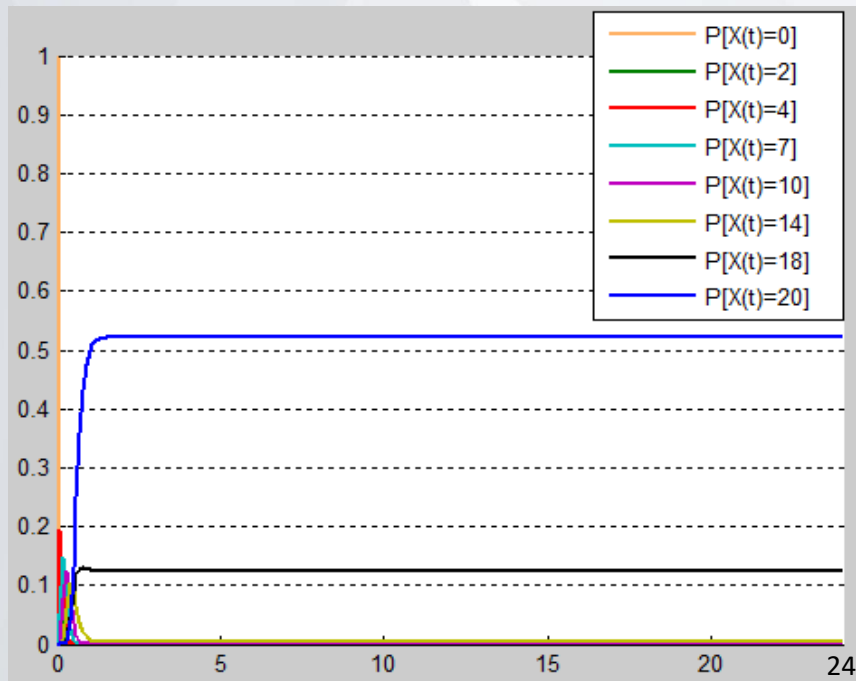
$$n=20 \quad \lambda=25 \quad \mu=1$$



备注：为了清楚显示结果的方便，两图未显示其余人数状态对应的概率曲线，如  $n=19, 17, 16$  等



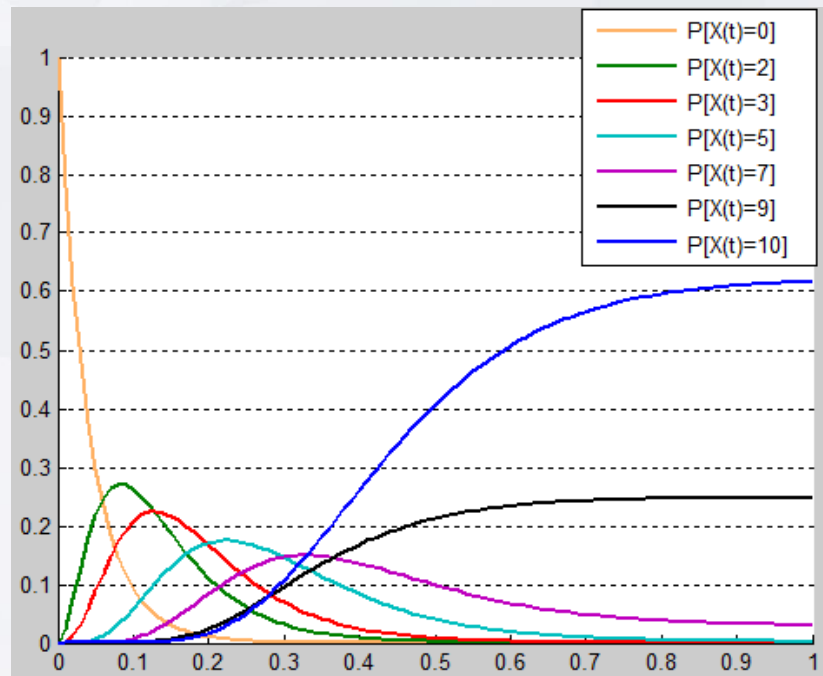
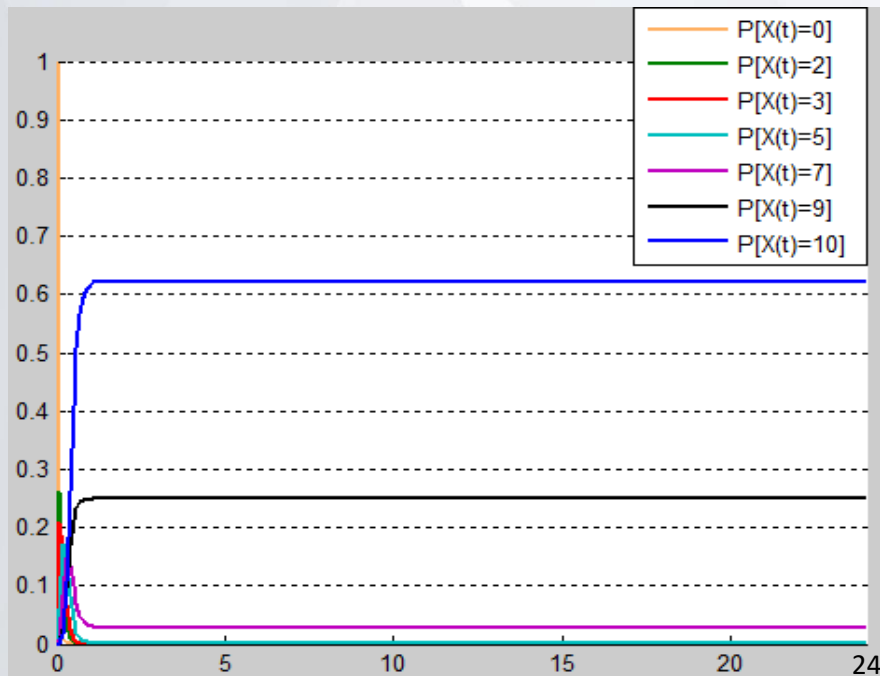
$$n=20 \quad \lambda=40 \quad \mu=1$$



备注：为了清楚显示结果的方便，两图未显示其余人数状态对应的概率曲线，如  $n=19, 17, 16$  等



$$n=10 \quad \lambda=25 \quad \mu=1$$



备注：为了清楚显示结果的方便，两图未显示其余人数状态对应的概率曲线，如  $n=8, 6, 4$  等





## 停车场停车的随机过程建模分析



谢 谢 听 课

授课教师

赵毅