2021 年秋统计学习题 01

1. 证明 $n \to \infty$ 时，t 分布收敛于标准正态分布.
2. 已知随机变量 $X \sim t(n)$，求证：$X^2 \sim F(1, n)$.
3. 求总体 $N(20, 3)$ 的容量分别为 $10, 15$ 的两个独立样本均值的差的绝对值大于 0.3 的概率.
4. 设 $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{n+m}$ 是分布 $N(0, \sigma^2)$ 的容量为 $n+m$ 的样本，试求下列统计量的概率分布

   (a).
$$Y_1 = \frac{\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}.$$
   (b).
$$Y_2 = \frac{m\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$$
5. 设 $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$
   试求统计量
$$T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S^*} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$
   的分布.
6. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本.

   (a). 写出 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度.

   (b). 写出 $\bar{X}$ 的概率密度.