# 第十章 双线性函数

- § 10.1 线性函数
- § 10.2 对偶空间
- § 10.3 双线性函数
- § 10.4 对称双线性函数
- § 10.5 辛空间

# § 10.1　线性函数

一、线性函数的定义

二、线性函数的简单性质

# 一、线性函数的定义

**定义**

设V是数域 F上的线性空间，映射 $f: V \to F$，

若满足： $\forall \alpha, \beta \in V, k \in F$

(1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$

(2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$

则称 $f$ 为V上的一个线性函数.

# 二、线性函数的基本性质

1. $f(0)=0, f(-\alpha)=-f(\alpha)$

2. 若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$， 则

$$f(\beta)=k_1 f(\alpha_1)+k_2 f(\alpha_2)+\cdots+k_s f(\alpha_s)$$

3.设 $f: V\to F$ 为一个线性函数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为V的一组基， $f(\varepsilon_i)=a_i, i=1,2,\cdots,n$

$$\forall\alpha\in V, \alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$$

则 $f(\alpha)=k_1 f(\varepsilon_1)+k_2 f(\varepsilon_2)+\cdots+k_n f(\varepsilon_n)$

$$=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n$$

即 $f$ 可由 $V$ 的基的像确定.

反之，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是F中任意$n$个确定的数，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为V的一组基.

$$\forall \alpha \in V, \alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$$

令
$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i,$$

则 $f: V \to F$ 为线性函数，且

$$f(\varepsilon_i) = a_i, i = 1,2,\cdots,n$$

**例1.** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n \in F$，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F^n$

则 $$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$$

是$\mathbf{F}^n$到 F的一个线性函数. 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n=0$ 时，称 $f$ 为零函数.

**例2.** 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{F}^{n\times n}$，则 $f(A)=traceA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

是 $\mathbf{F}^{n\times n}$到 F 的一个线性函数.

**例3.** 设 $V$ 是数域 F 上的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 $V$ 的

一组基，$f$ 是 $V$ 上的一个线性函数，已知

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=1,\ f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1,\ f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3$$

求 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

**解：**

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=1 \\ f(\varepsilon_2)-2f(\varepsilon_3)=-1 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\varepsilon_1)=4 \\ f(\varepsilon_2)=-7 \\ f(\varepsilon_3)=-3 \end{cases}$$

所以 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$.

例4. $V$ 是数域 F上的3维线性空间， $f$ 是V上的一个线性函数，已知

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0, f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1,$$

求 $f$.

解:
$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)-2f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\varepsilon_1)=0 \\ f(\varepsilon_2)=1 \\ f(\varepsilon_3)=0 \end{cases}$$

则 $\forall \alpha = x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3\in V,$

$$f(\alpha)=x_2, f(\varepsilon_2)=x_2.$$

**定理1**　设V为数域 F上的一个$n$ 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为V的一组基，　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 F中任意n 个数. 则存在唯一的V上线性函数 $f$ 使

$$f(\varepsilon_i)=a_i,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

**证明：** 映射 $f: V \to \mathrm{F}$,

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 \mapsto x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$$

即为$V$上的线性函数，且 $f(\varepsilon_i) = a_i, i = 1,2,\cdots,n$

若还有 $g$是 $V$上线性函数使 $g(\varepsilon_i) = a_i, i = 1,2,\cdots,n,$

则$\forall \alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 \in V$,有

$$g(\alpha) = x_1g(\varepsilon_1) + x_2g(\varepsilon_2) + \cdots + x_ng(\varepsilon_n)$$

$$= x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$$

$$= x_1f(\varepsilon_1) + x_2f(\varepsilon_2) + \cdots + x_nf(\varepsilon_n)$$

$$= f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n) = f(\alpha) \qquad \therefore f = g$$