练 习 1（2021）

一. 选择题

1. 复数域上的$n \times n$矩阵集合按通常的矩阵加法与数乘运算，对于实数域（ C ）

(A) 不构成其上的线性空间；　(B) 构成其上的n维线性空间；

(C) 构成其上的$2n^2$维线性空间；(D) 构成其上的n^2维线性空间；

2. 下列论述哪个正确（ B ）

(A) 如果$k_1 = k_2 = \cdots k_r = 0$时，$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关；

(B) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，且$\alpha_{r+1}$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表出，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$线性无关；

(C) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关，则其中每个向量都不能由该向量组线性表示；

(D) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关，则其中每个向量都能由其余向量线性表示.

3. R^4中的全体反对称矩阵所成线性空间的维数为（ A ）.

(A) 6;　(B) 27;　(C) 9;　(D) 3.

4. 与矩阵$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$乘法交换的$F^{3\times3}$中的矩阵按矩阵的加法与数乘（ D ）.

(A) 不构成$F^{3\times3}$的线性子空间；　(B) 构成$F^{3\times3}$的2维线性子空间；

(C) 构成$F^{3\times3}$的4维线性子空间；(D) 构成$F^{3\times3}$的3维线性子空间.

5.令U,V,X,Y都是R^3的线性子空间，$Y\subseteq X, X=U+V$，则(C).

(A) $Y=Y\cap U+Y\cap V$;　(B)；$Y\neq Y\cap U+Y\cap V$

(C)若$U\subseteq Y$或$V\subseteq Y$，$Y=Y\cap U+Y\cap V$；(D)以上都不正确。

6. 令

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

则(D)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$构成$R^4$的一个基；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,e_4$构成$R^4$的一个基，$e_4=(0\quad 0\quad 0\quad 1)^T$；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,e_2$构成 R^4的一个基，$e_2=(0\quad 1\quad 0\quad 0)^T$

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,e_4$构成 R^4的一个基.

7. 设$V_1,V_2,\dots,V_k$都是线性空间 V 的子空间，下面的陈述哪一个是错误的(B)

(A) $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k\Leftrightarrow$

$0=0+0+\cdots+0;$

(B)若$V_i\cap V_j=0, i\neq j=1,2,\dots,k$, 则

$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k$;

(C) $V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k\Leftrightarrow$

$dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)=\sum dimV_i;$

(D)若$V_1+V_2+\cdots+V_k=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k$，则

$V_i\cap V_j=0, i\neq j=1,2,\dots,k.$

二. 填空

8.设F^3的两个子空间

$$W_1=\{(a,a,c)^T|a,c\in R\},\ W_2=\{(a,2a,a)^T|a\in R\}.$$

则 $\dim(W_1\cap W_2)=$__0__, $\dim(W_1+W_2)=$__3__.

9. 在$\mathrm{F}^{2\times 2}$中, 基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

到基

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

的过渡矩阵为__ $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ __.

10.在$F[x]_3$中，向量α在基底：$1,x,x^2$下的坐标为$1,0,-1$，则α在基底：$1+x,x+x^2,x^2$下的坐标为 _$(1,-1,-1)^T$__.

11.在$\mathrm{F}^{2\times 2}$中, 令

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix};$$

$$F_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},F_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},F_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}.$$

求一2×2矩阵$A=$_ $a\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ _使A在上述两组基底$\{E_i\},\{F_i\}$下的坐标相等.

12. 令V_1是齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$解空间，V_2是齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+2x_4=0\\-x_1+x_2\qquad\quad+x_4=0\end{cases}$的解空间. 则

$\dim(V_1\cap V_2)=$__1__, $\dim(V_1+V_2)=$__4__.

13.令V_1是齐次线性方程组$x_1+x_2+x_3+x_4=0$解空间，V_2是齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+3x_4=0\\ 2x_2-x_3-2x_4=0\end{cases}$的解空间．$\mathrm{F}^4$是否是$V_1$与$V_2$的直和___否_______

14. 在 F^4 中，$\alpha_1=(1,0,-1,0)^T,\alpha_2=(0,1,2,1)^T,\alpha_3=(2,1,0,1)^T$生成$R_1$，$\beta_1=(-1,1,1,1)^T,\beta_2=(1,-1,-3,-1)^T$，$\beta_3=(-1,1,-1,1)^T$生成$R_2$；则$R_1\cap R_2$的一个基为__$\beta_2$____，$R_1+R_2$的一个基为____$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$___.

三．综合题

15. 已知向量组

$\alpha_1=(1,2,1,-2)^T,\alpha_2=(2,3,1,0)^T,\alpha_3=(1,2,2,-3)^T$；

$\beta_1=(1,1,1,1)^T,\beta_2=(1,0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,3,0,-4)^T$，

设子空间$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，求子空间$V_1\cap V_2$与$V_1+V_2$的一组基及维数.

Sol: $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&1\\2&3&2&1&0&3\\1&1&2&1&1&0\\-2&0&-3&1&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1&1\\0&1&0&1&2&1\\0&0&1&1&2&-2\\0&0&0&0&-5&0\end{pmatrix},$$

故 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2)$, $\dim(V_1+V_2)=4$.

解线性方程组：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_2\beta_2$,

求得$V_1\cap V_2$的一个基为: β_1,β_3.

16. 在$F[x]$ 中求向量组$T=\{f(x)|degf(x)=n\}$ 一个极大无关组.

Sol. 一个极大无关组为： $x^n, x^n+x^{n-1}, \dots, x^n+x^{n-1}+\cdots+1$

17. 设R, R_1, R_2都是线性空间$V(F)$的子空间，其中$R_1 \subseteq R_2$，且$R \cap R_1 = R \cap R_2, R + R_1 = R + R_2$，证明: $R_1 = R_2$.

Sol. $\dim R_1 = \dim(R+R_1) - \dim R + \dim(R \cap R_1) =$

$\dim(R+R_2) - \dim R + \dim(R \cap R_2) = \dim R_2$,

又 $R_1 \subseteq R_2$，故$R_1 = R_2$.

18. 设R, L都是线性空间$V_n(F)$的真子空间，证明:

$\dim R \cap L \geq \dim R + \dim L - n$.

Hint. $\dim(R+L) \leq n$

19. 令$n \times n (n \geq 3)$矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

1) 确定a的值使齐次线性方程组$AX = 0$有非零解;

2) 设V_1, V_2分别是$AX = 0$对于a的1)中的两个不同值的解空间，证明：$F^n = V_1 \oplus V_2$.

Hint. $a = 1-n$，$AX = 0$的解空间$S_1 = L((1,1,\dots,1)^T)$，维数为 1；$a = 1$，$AX = 0$的解空间$S_2 = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_{n-1})$，其中 $\varepsilon_i = (1,0,\dots,-1,\dots,0)^T, i = 1,2,\dots,n-1$,再证明$F^n = V_1 + V_2$.