2020秋季学期期中试题解析

填空(每空1分)

- 1. 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + 2u$ 与 $g(x) = x^2 + tx + u$ 的最大公因式是一个二人多项式,,则t = 2____,u = 0___,
- 2. 实系数多项式 x³+ px+q有一个复根 3+2i,则其余两个根是 _3-2i ____, _-6 ___.
- 3. 如果 $x^3 x^2 4x + 1$ 的三个根为 a_1 , a_2 , a_3 , 则 $\sum a_1^2 a_2 = _-1$ ____. 提示: $\sum a_1^2 a_2 = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3$
- 4. 已知向量组 $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 0$,
 - 1. 设 $f(x) = x^3 + (1+t)x^2 + 2x + 2u$ 与 $g(x) = x^2 + tx + u$ 的最大公因式是一个二多项式,,则 t = 2_____, u = 0_____.
 - 2. 实系数多项式 x³+px+q有一个复根 3+2i,则其余两个根是 _3-2i ____, _-6 ___.
 - 3. 如果 $x^3 x^2 4x + 1$ 的三个根为 a_1 , a_2 , a_3 , 则 $\sum a_1^2 a_2 = _-1$ ____. 提示: $\sum a_1^2 a_2 = \sigma_1 \sigma_2 3\sigma_3$
 - 4. 已知向量组 $\alpha_1 = 1$, 2, -1, 1^T , $\alpha_2 = 2$, 0, t, 0^T , $\alpha_3 = 0$, -4, 5, -2^T 的秩为 2, 则 t = 3.

5, 当 $\alpha = 4$ 时,下面的线性方程组无解



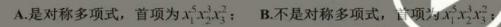
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 依次是行列式 1 的第一、第二、第三、第四列、 $\alpha_1,\alpha_3,\gamma,\alpha_2$ 依次是行列式 |B| 的第一、第二、第三、第四列,又已知 |A|=a, |B|=b, 则,行列式 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, (\beta+\gamma) = a+b$ _____.

- 选择正确答案(每题1分)
 - $7.\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2$ 是关于 $x_1,x_2,...,x_n$ 的n元多项式,它(A)

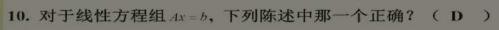
二. 选择止備答案(每题1分)

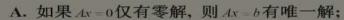
 $7.\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2$ 是关于 $x_1,x_2,...,x_n$ 的n元多项式,它(A

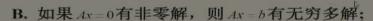


- C.是对称多项式,首项为 $x^5x^2x^2$; D.不是对称多项式,首项为 x^2x^2
- 8. 设向量组(1): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以被向量组(2): $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表 示,则(D)正确.
- A.若r < s,向量组(2)必定线性相关; B.若r > s,向量组(2)必定线性无关 C.若r < s,向量组(1)必定线性相关; D.若r > s,向量组(1)必定线性相关.
- 9. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, 那么 $\begin{vmatrix} 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ 2a_{22} & 2a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{32} & 2a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix} = ($ B).
- A. 8; B. -16; C. 16;
- D. 12.
- 10. 对于线性方程组 Ax = b, 下列陈述中那一个正确? (D)
 - A. 如果 Ax = 0 仅有零解,则 Ax = b 有唯一解;
 - B. 如果 Ax = 0 有非零解,则 Ax = b 有无穷多解;
 - C. Ax = b有唯一解当且仅当 $|A| \neq 0$;

H308课件







C.
$$Ax = b$$
有唯一解当且仅当 $|A| \neq 0$;

D. 如果 Ax = b有两个不同解,则 Ax = 0有无穷多解。



三. 计算题 (每题 3 分)

解。

11. 设
$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2 + 5g(x) = x^2 - x + 1$$
,求其最大公因式($f(x)$, $g(x)$),

使
$$u(x) f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$

$$(f(x),g(x))=1$$
, $u(x)=x$, $v(x)=-3x^2-x+1$





D. 如果 Ax = b 有两个不同解,则 Ax = 0 有无穷多解.





三. 计算题 (每题 3 分)

11. 设
$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2 \exists g(x) = x^2 - x + 1$$
,求其最大公因式 $(f(x), g(x))$,

使
$$u(x) f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$

$$\mu$$. $(f(x),g(x))=1$, $u(x)=x$, $v(x)=-3x^2-x+1$

12. 设
$$_{n}$$
级行列式 $_{D_{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 求其第一行前 $_{n-1}$ 个元素的代

12.设
$$_n$$
级行列式 $_{D_n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$, 求其第一行前 $_{n-1}$ 个元素的代

数余子式之和: $\sum_{i=1}^{n-1} A_{i,i}$.

解, n > 2 时

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_{1j} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n! (1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k})^{n-1}$$

 $\overline{j=1}$

解. n > 2时

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_{1j} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! (1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k})$$

$$n=2, \sum_{j=1}^{n-1} A_{1j}=2.$$





13.已知一个二次三项式除以x-1所得余数是3,除以x-2所得余数是6,除以x+2所得余数是18,求这个二次三项式.

解. 设所求的二次三项式为: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

因用一次多项式 $x - \alpha$ 去除f(x)所得余数等于 $f(\alpha)$,我们有

$$\begin{cases}
a+b+c=3 \\
4a+2b+c=6 \\
4a-2b+c=18
\end{cases}$$

解得:a = 2, b = -3, c = 4, $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

14.试确定λ的值使得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

无解,有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下H30就果性之的

14.试确定λ的值使得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

无解,有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下,求出它的通解.





H308课件

14.试确定 λ 的值使得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 4 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

无解,有唯一解,有无穷多解;在有无穷多解的情况下,求出它的 通解.

解.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$
, 得 $\lambda = -1$ or $\lambda = 4$.





在 $\lambda \neq -1$ and $\lambda \neq 4$ 时,方程组有唯一解;

$$\lambda = -1, 我们有 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

H308课件

$$\lambda = -1, \exists x_1 | \exists x_1 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$$

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

知方程组无解;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





H308课件

我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我们有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ 4-t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in R 为方程组通解.$$

四. 证明题 (每题2分)

15.求证: 对n>2的上三角行列式|A|, 若i< j, 则 $A_{ij}=M_{ij}=0$.

证明: M_{ij} 与 A_{ij} 分别是在行列式|A|中划去i行j列后余下元素

15.求证: 对n > 2的上三角行列式|A|, 若i < j, 则 $A_{ij} = M_{ij} = 0$.

证明: M_{ij} 与 A_{ij} 分别是在行列式|A|中划去i行j列后余下元素组成的n-1阶子式与代数余子式,它们仅差一个符号. |A|是一上三角行列式,划去第i行第j列后,若i+1 < j,元素 $a_{i+1,i+1}$ 在 M_{ij} 中位于第i行第i+1列,主对角线上(i,i)-位置元素为零,若i+1=j, $a_{i+1,i+1}$ 亦被划去, $a_{i+2,i+2}$ 在 M_{ij} 中位于第i+1行第i+1列,主对角线上(i,i)-位置元素仍为零,而 M_{ij} 仍然为上三角行列式,故 $M_{ij}=0$,当然 $A_{ij}=0=M_{ij}$.

16.设A为 $m \times n$ 矩阵,B为 $l \times n$ 矩阵,则AX = 0与BX = 0同解当且仅当 $R \binom{A}{B} = R(A) = R(B)$.

证明. "⇒:"AX = 0与BX = 0同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则r(A) = r(B) = n - s. 又 因AX = 0与BX = 0同解, $\binom{A}{B}X = 0$ 也与AX = 0,BX = 0同解,故 $r(\binom{A}{B}) = r(A)$.

" \leftarrow "因 $r({A \choose B})=r(A)$,A的极大线性无关向量组也是 ${A \choose B}$ 的极大线性无关向量组,则B的行向量可由A的行向量组线**的表**解析即

证明. "⇒:"AX = 0与BX = 0同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则r(A) = r(B) = n - s. 又因AX = 0与BX = 0同解, $\binom{A}{B}X = 0$ 也与AX = 0,BX = 0同解,故 $r(\binom{A}{B}) = r(A)$.
" \Leftarrow "因 $r(\binom{A}{B}) = r(A)$,A的极大线性无关向量组也是 $\binom{A}{B}$ 的极大线性无关向量组,则B的行向量可由A的行向量组线性表出,即BX = 0中的每一个方程可写成中AX = 0的方程的线性组合,故AX = 0的解都是BX = 0的解.同理,BX = 0的解也都是AX = 0的解,AX = 0与BX = 0同解.

证明. " \Rightarrow :"AX = 0与BX = 0同解,它们基础解系所含解向量个数相等,设为s,并设未知量个数为n,则r(A) = r(B) = n - s. 又 因AX = 0与BX = 0同解, $\binom{A}{B}X = 0$ 也与AX = 0,AX = 00同解,故 AX = 00问解,故

" \leftarrow "因 $r(\binom{A}{B})=r(A)$,A的极大线性无关向量组也是 $\binom{A}{B}$ 的极大线性无关向量组,则B的行向量可由A的行向量组线性表出,即BX=0中的每一个方程可写成中AX=0的方程的线性组合,故AX=0的解都是BX=0的解.同理,BX=0的解也都是AX=0的解,AX=0与BX=0同解.

17. 证明: 三次方程 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 的三个根成等比数列的充分必要条件为: $p^3r - q^3 = 0$.

证明: 设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 . 三个根成等比数列的充要条件是

$$(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2) = 0,$$

展开整理后有:

 $x_1^4x_2x_3+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4-\left(x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3\right)=0$ 将上面不等式左边用初等对称多项式表出,即为: $\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$,这里 $\sigma_1=-p$, $\sigma_2=q$, $\sigma_3=-r$. 故上述的充分条件等价于 $p^3r-\frac{1}{13001}$ 集件

证明: 设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 . 三个根成等比数列的充要条件是

$$(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2) = 0,$$

展开整理后有:

 $x_1^4x_2x_3+x_1x_2^4x_3+x_1x_2x_3^4-\left(x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3\right)=\mathbf{0}$ - 将上面不等式左边用初等对称多项式表出,即为: $\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3$,这里 $\sigma_1=-p$, $\sigma_2=q$, $\sigma_3=-r$. 故上述的充分条件等价于 $p^3r-q^3=\mathbf{0}$.

H308课件

1. 设多项式f(x)用x-1除时余式为 3,用x-3除时余式为 5,求用(x-1)(x-3)除f(x)的余式.

解. 写 f(x) = (x-1)(x-3)g(x) + ax + b, 将x = 1, x = 3代入, 解得

$$a = 1, b = 2.$$

2.设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根都是实数,求证: $p^2 \ge 3q$. 证明. 设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 . 三个根均为实数的一个充分条件是(若有复根,必为共轭根,且三次多项式至少有一实根):



2.设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根都是实数,求证: $p^2 \ge 3q$. 证明. 设多项式 $x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根分别为 x_1, x_2, x_3 . 三个根均为实数的一个充分条件是(若有复根,必为共轭根,且三次多项式至少有一实根):

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 \ge 0$$

展开整理后有: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \ge 0$ 将上面不等式左边用初等对称多项式表出,即为: σ_1^2

展开整理后有: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \ge 0$ 将上面不等式左边用初等对称多项式表出,即为: $\sigma_1^2 - 3\sigma_2$, 这里 $\sigma_1 = -p$, $\sigma_2 = q$,故上述的充分条件等价于 $p^2 \ge 3q$. 3. 设 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = g(x) = x^2 + x - 2$,求其最大公因式 (f(x), g(x)),以及 u(x), v(x) 使 u(x) f(x) + v(x) g(x) = (f(x), g(x)).

答案.
$$(f(x),g(x))=1$$
, $u(x)=-\frac{1}{8}x$, $v(x)=\frac{1}{8}(\hat{x}+x-\hat{x})$