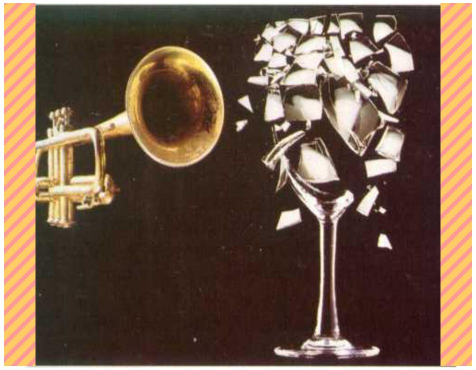
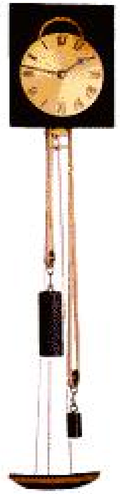
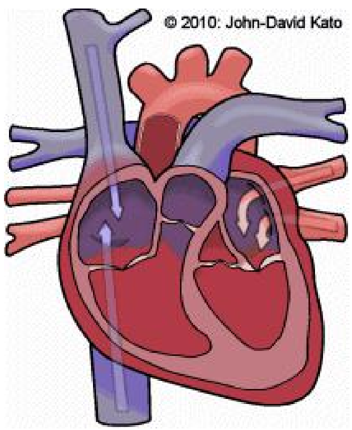
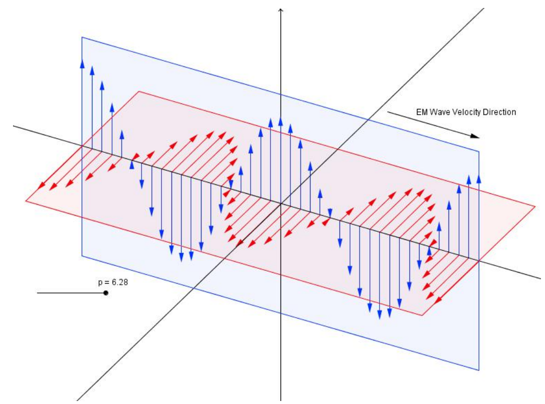
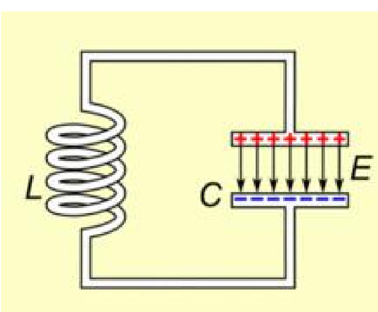
振动与波动






© 2010: John-David Kato


EM Wave Velocity Direction
p = 6.28


L
C
E


999999 上证指数 分时 均线 成交额(万)
3202 3197 3191 3185 3180 3174 3169 3163 3158 3152 3147 3141 3135 3130
1.23% 1.05% 0.88% 0.70% 0.53% 0.35% 0.18% 0.00% 0.18% 0.35% 0.53% 0.70% 0.88% 1.05%
755377 647466 539555 431644 323733 215822 107911
09:30 10:30 13:00 14:00


2000-2017年生猪出栏价格与CPI走势图
元/公斤
生猪
CPI（右轴）
25.00 20.00 15.00 10.00 5.00 0.00
10.0 8.0 6.0 4.0 2.0 0.0 -2.0 -4.0
2000/1/1 2001/1/1 2002/1/1 2003/1/1 2004/1/1 2005/1/1 2006/1/1 2007/1/1 2008/1/1 2009/1/1 2010/1/1 2011/1/1 2012/1/1 2013/1/1 2014/1/1 2015/1/1 2016/1/1 2017/1/1

第九章　机械振动

§1 简谐振动

机械振动：物体位置在某一值附近来回往复的变化

广义振动：一个物理量在某一定值附近往复变化，该物理量的运动形式称振动, 如物理量：　$\vec{r}\quad \vec{v}\quad \vec{E}\quad \vec{H}\quad Q\quad i$

平衡位置：物体运动始终在该位置附近

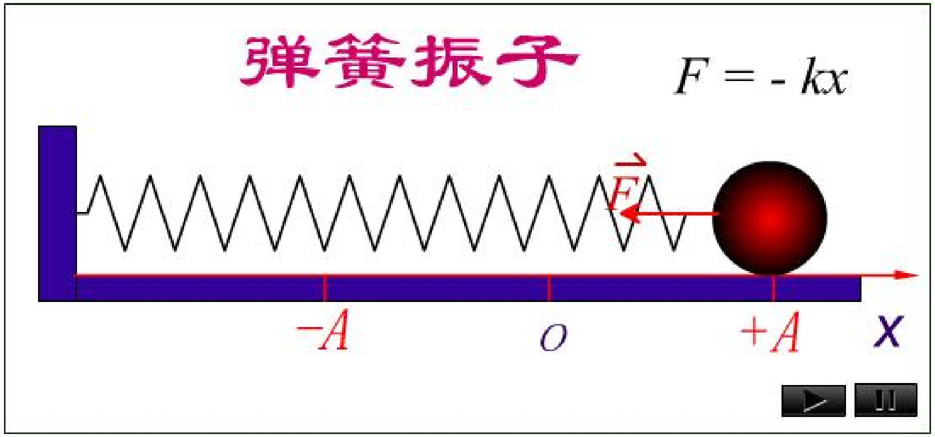
重要的振动形式是简谐振动—— **simple harmonic vibration**

简谐振动是振动的基本模型，一般振动是多个简谐振动的合成，或者说：振动的理论建立在简谐振动的基础上。

- 以机械振动为例说明振动的一般性质

一、简谐振动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



特征量：

x 位移 单位：m

A 振幅 单位：m, cm 最大位移； 由初始条件决定

ν 频率 单位：Hz 1Hz=1/1s

T 周期 单位：s $T = 1/\nu$

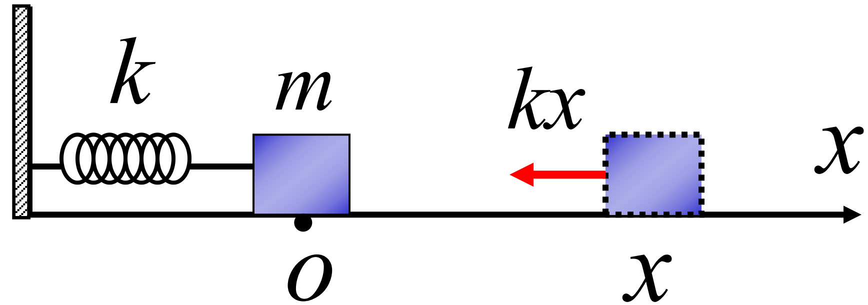
ω 圆频率（角频率） 单位：rad s^{-1} $\omega = 2\pi\nu$

$\omega t + \varphi$ 相位（位相 或 周相） 单位：rad

φ 初相位（初位相） 单位：rad

——取决于时间零点的选择

以弹簧谐振子为例



设弹簧原长为坐标原点

由牛顿第二定律 $\sum F_x = ma_x$ $\quad -kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

整理得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

简谐振动

上述方程的特解之一为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

二、简谐振动的速度及加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

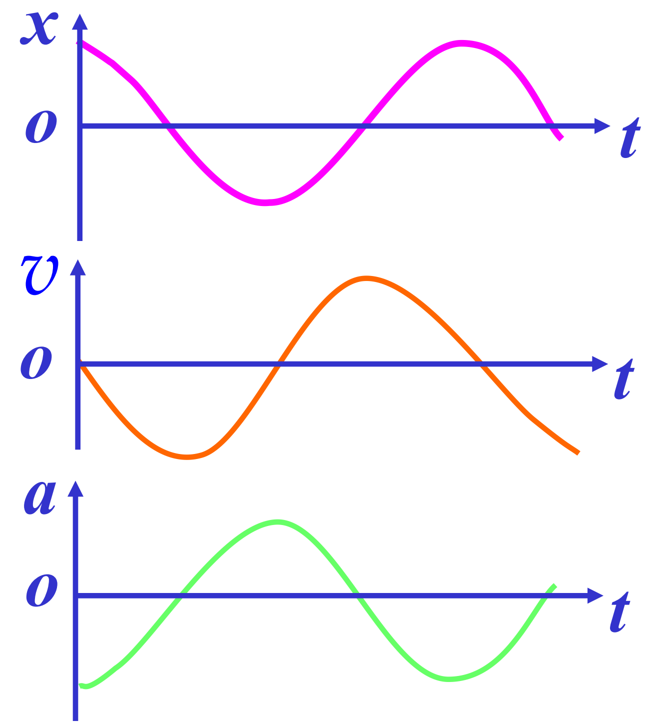
$$v_m = A\omega$$

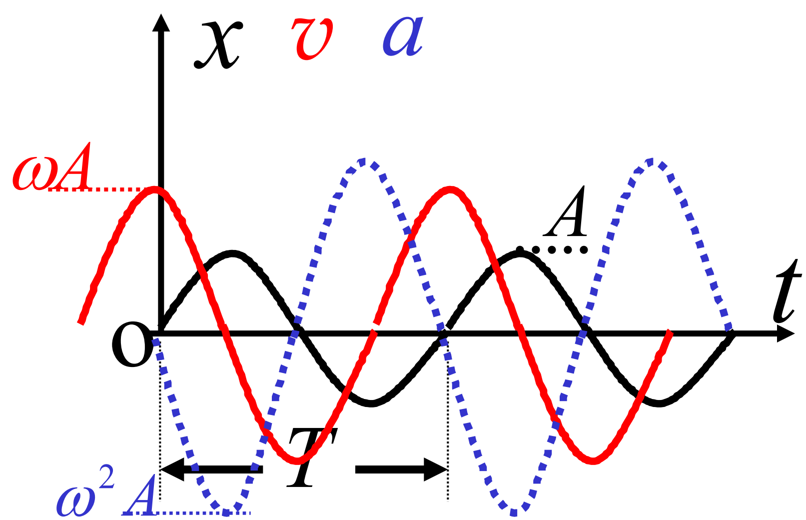
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -\omega^2 x$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$a_m = A\omega^2$$





三、简谐振动的相位

$$\boxed{\omega t+\varphi}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

相　位　　$\Phi(t)=\omega t+\varphi$

相位的意义: 表征任意时刻（t）物体振动状态. 物体经一周期的振动，相位改变 2π .

初相位　φ　　$t=0$时，$\Phi(t)=\varphi$

一般$\varphi\in[-\pi,\pi]$

相位的物理概念：

1.描述振动系统形象状态的物理量（周期性）

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$(\omega t + \varphi)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	A	0	$-A$	0	A
v	0	$-\omega A$	0	ωA	0

2.描述振动系统状态的变化趋势

3.描述频率相同的两振动系统（或两物理量）的振动步调

相位超前/落后

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in [-\pi, \pi]$$

相位差：$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ x_1 的振动超前于 x_2 的振动

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$ x_1 的振动落后于 x_2 的振动

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ x_1 与 x_2 的振动同相位

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ x_1 与 x_2 的振动反相位

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)}$$

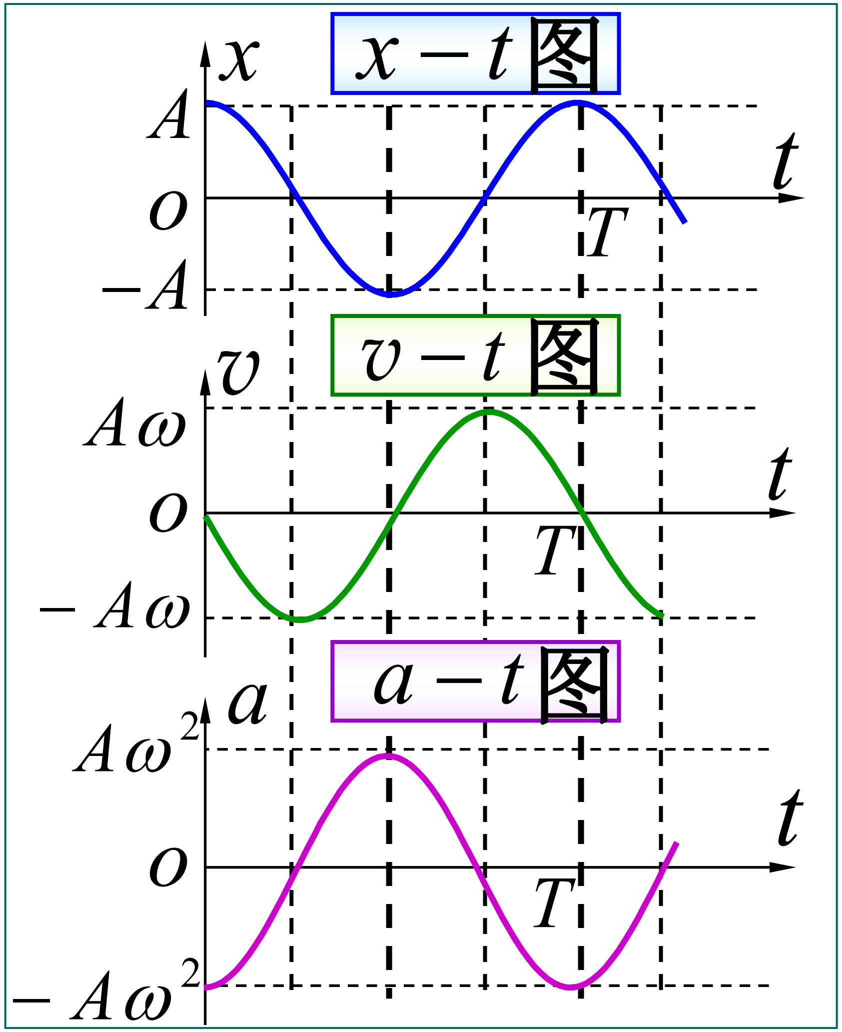
$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

速度超前位移π/2相位

$$\boxed{a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

加速度超前位移π相位



四、初始条件决定简谐振动的振幅和初相位

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

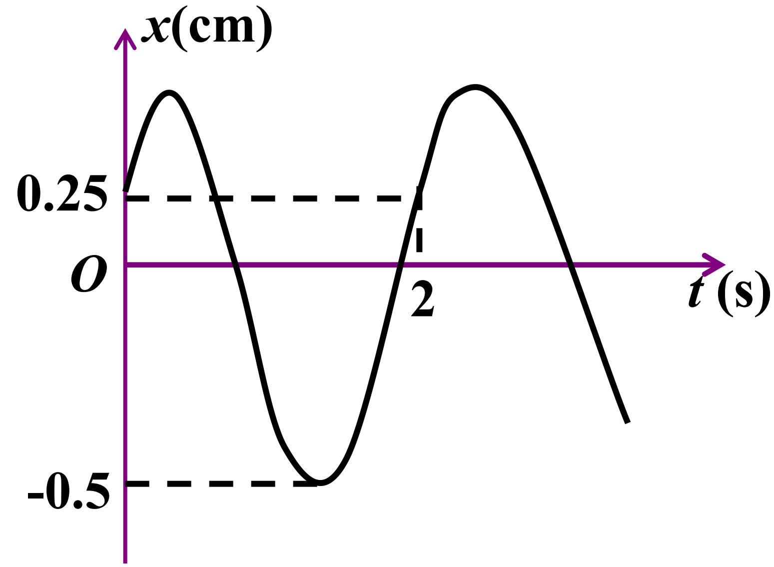
初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

例1 如图，求振动方程。

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



解： 由图可知

$$A = 0.5cm \qquad T = 2s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi(1/s)$$

初始条件： $x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.5\cos\varphi_0 = 0.25(\text{cm})$

$$\cos\varphi_0 = 0.5 \qquad \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$

初始条件：$v_0 > 0 \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0 \qquad \sin\varphi_0 < 0$

$$\therefore \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3} \qquad\qquad x = 0.5\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \ \ (\text{cm})$$

五、简谐振动的描述

1. 解析描述

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -\omega^2 x$$

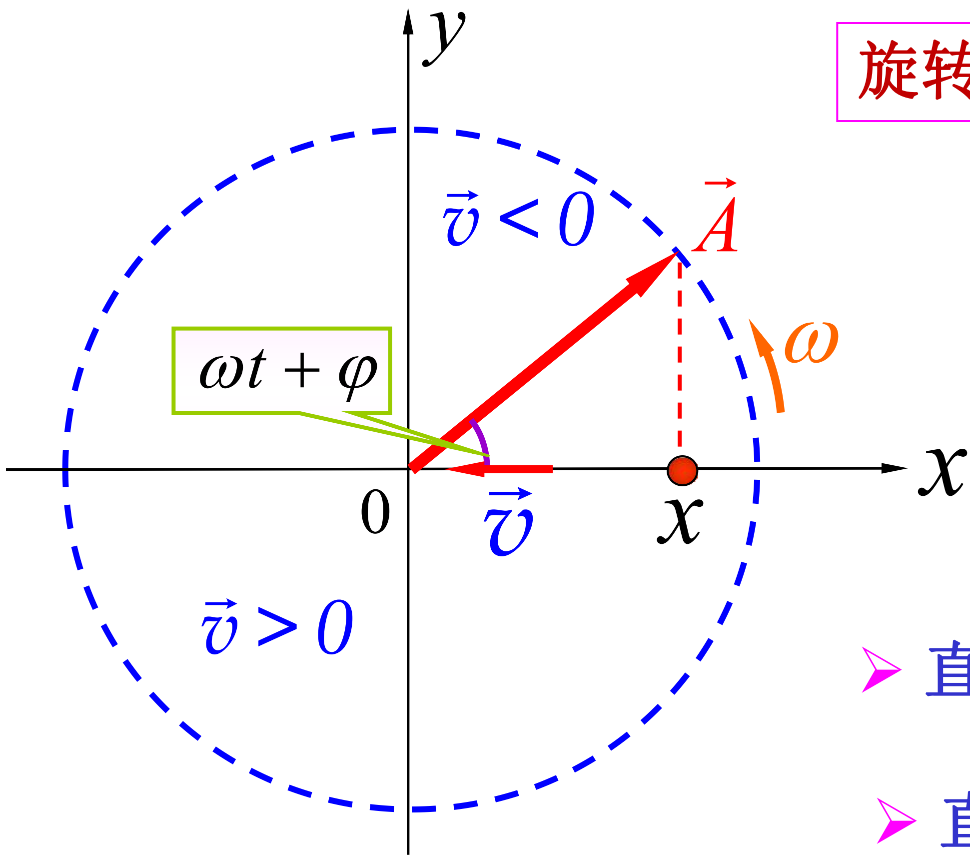
x, v, a 均是简谐振动的物理量

- 频率相同 ω
- 振幅的关系 $v_m = A\omega \quad a_m = A\omega^2$
- 相位差 $\Delta\varphi$ 速度超前于位移；加速度超前于速度

2. 旋转矢量法描述

用匀速圆周运动、几何方法描述简谐振动

规定：$\left|\vec{A}\right| = A$ 以角速度 ω 逆时针转

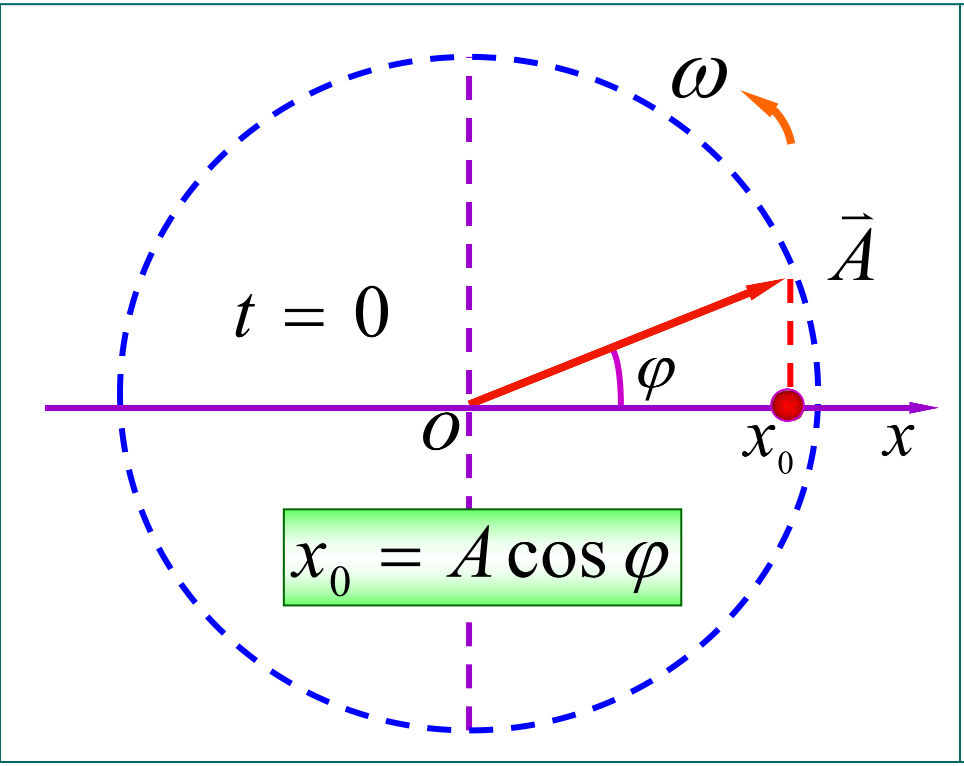


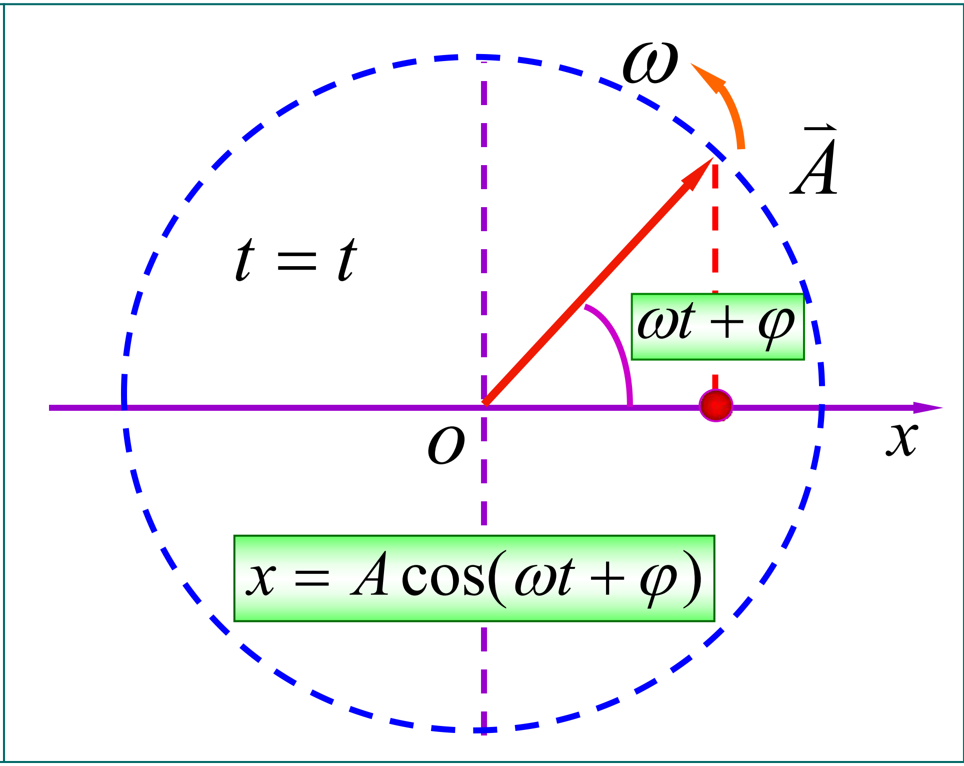
旋转矢量端点在x轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

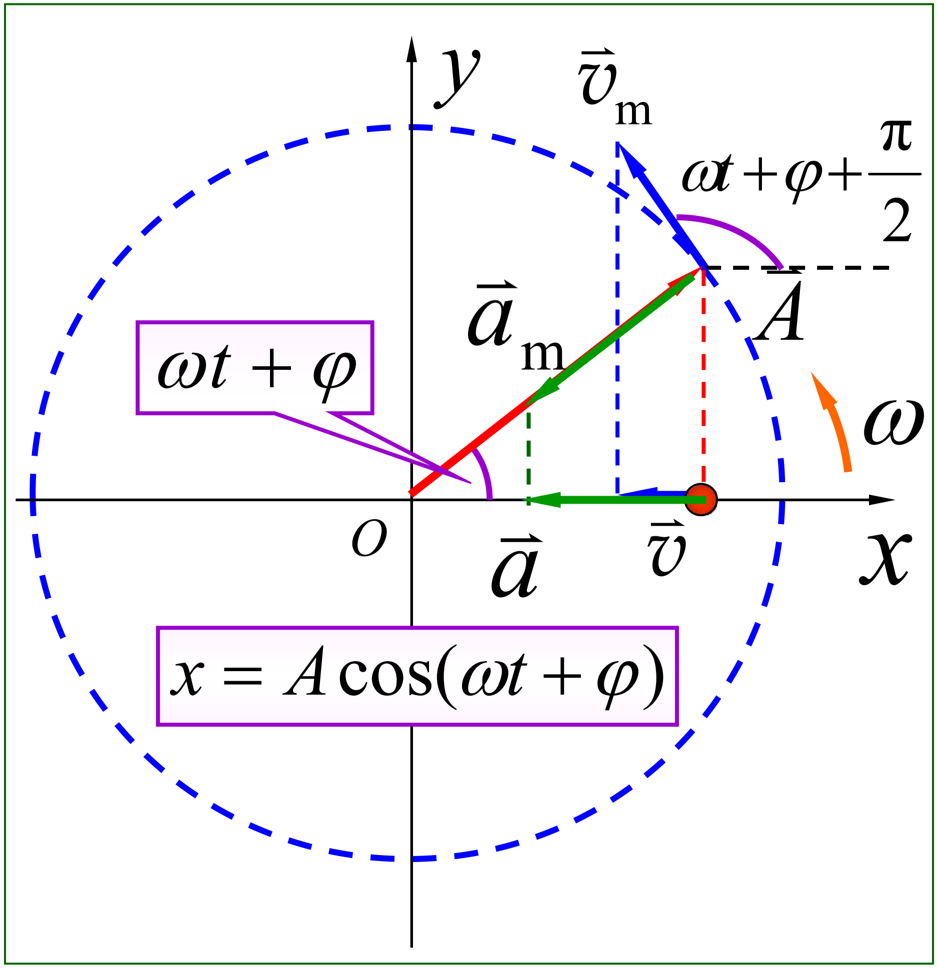
- 直观地表达振动状态 x、v
- 直观地表达了$(\omega t + \varphi)$

旋转矢量图中的初相位和相位





**旋转矢量图中的速度和加速度



$$v_{\mathrm{m}}=A\omega$$

$$\boxed{v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)}$$

$$=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a_{\mathrm{m}}=A\omega^2$$

$$\boxed{a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

旋转矢量法 vs 解析法描述

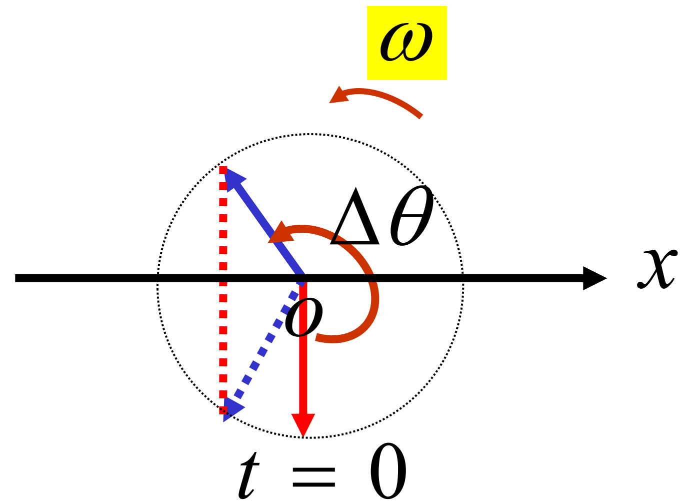
特征量	旋转矢量	运动表达式	
A	矢量的长度	振幅	初始条件决定
φ_0	初角度	初相位	初始条件决定
ω	角速度	角频率	系统特性决定
cos	x轴的投影	方程函数形式	
$\omega t+\varphi_0$	t时刻的角位移	t时刻振动状态	
T(周期)	转一周的时间	完成一次完整振动时间	
ν（频率）	一秒内转的圈数	一秒内振动次数	

例：质量为m的质点和劲度系数为k 的弹簧组成的弹簧谐振子，

$t=0$时，质点过平衡位置且向正方向运动。

求：物体运动到负的二分之一振幅处时所用的最短时间

解：设 t 时刻到达末态



由已知画出$t=0$ 时刻的旋矢图

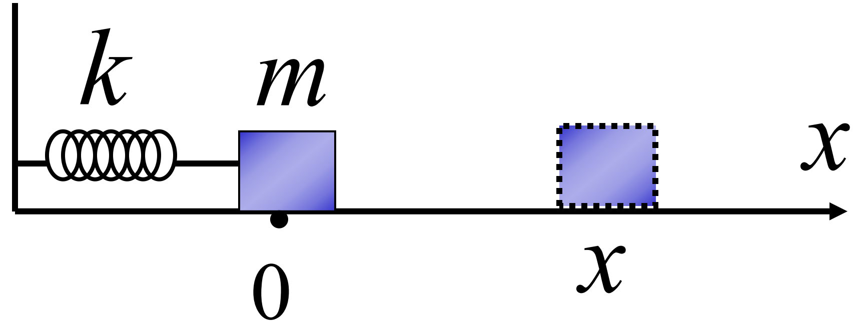
再画出末态的旋矢图

由题意选蓝实线所示的位矢

设始末态位矢夹角为$\Delta\theta$ $\Delta\theta=\omega t$

得 $$t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{7\pi}{6\omega}=\frac{7\pi}{6\sqrt{k/m}}$$

§2 简谐振动的能量



以弹簧谐振子为例：

系统机械能守恒，以弹簧原长为势能零点

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$$

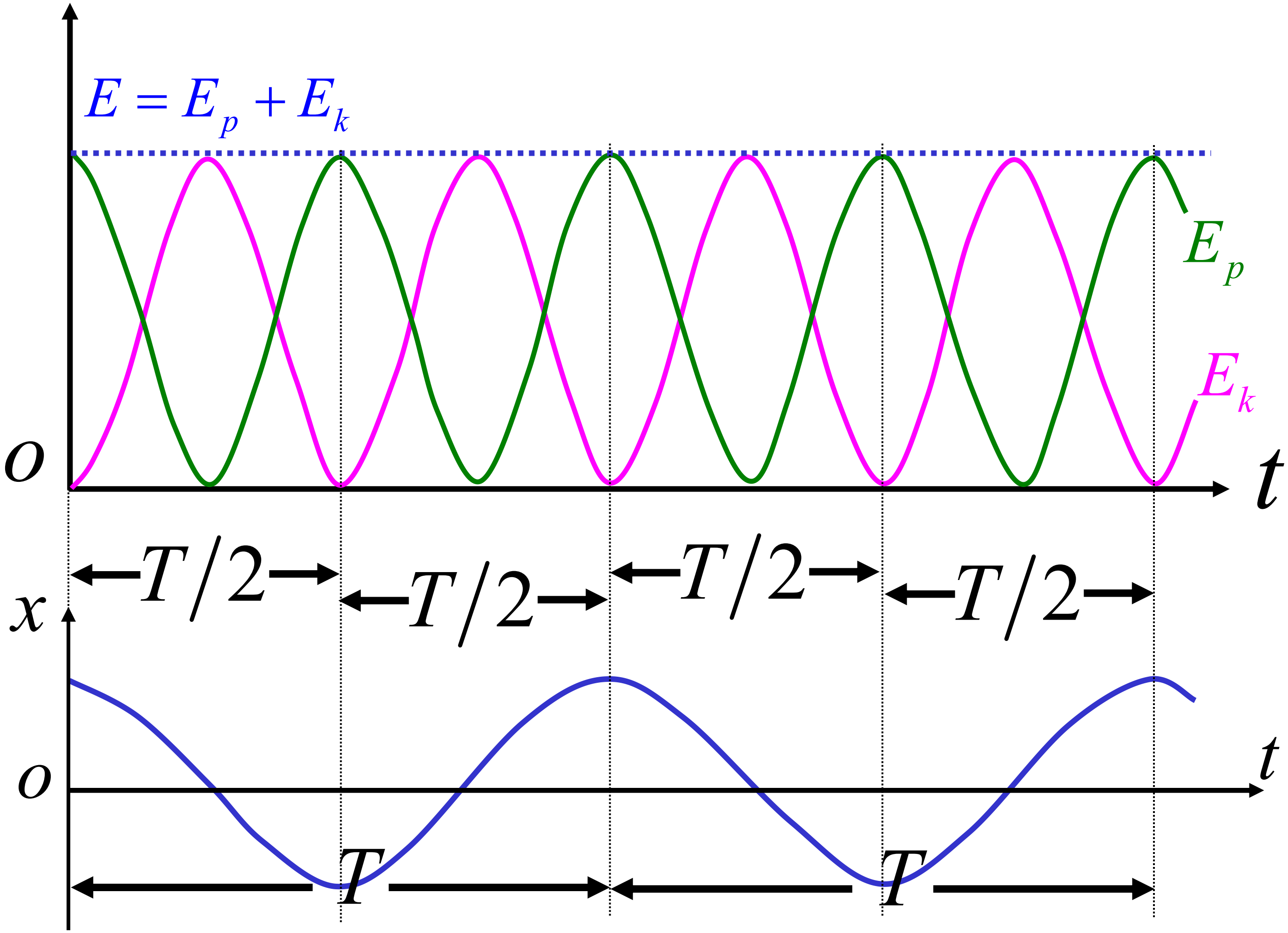
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$m\omega^2 = k$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐振动系统动能、势能及总的机械能曲线



§ 3 简谐振动的合成

当一个物体同时参与几个简谐振动时就需考虑振动的合成问题。

——两个振动方向相同、频率相同简谐振动的合成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$ 线性叠加 $x = x_1 + x_2$

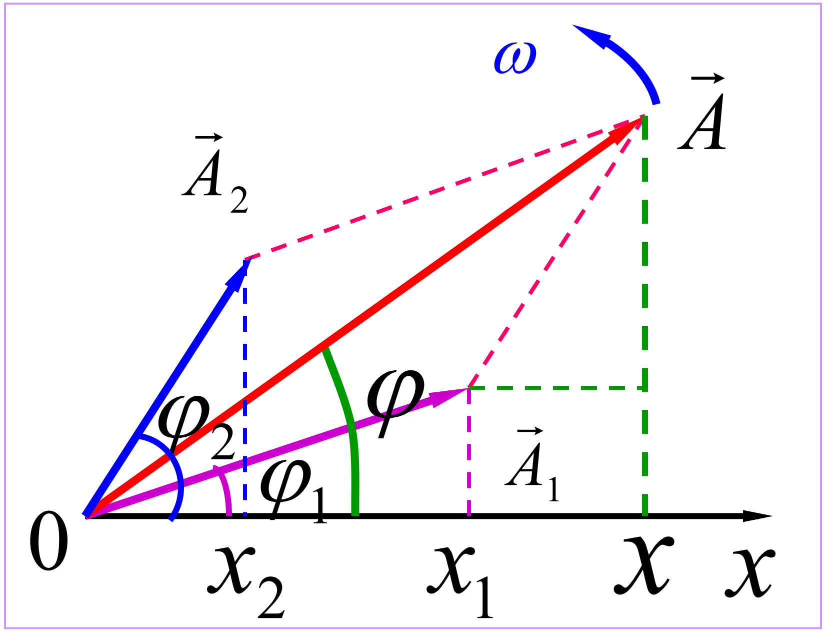
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

- 两个同方向同频率简谐振动合成后仍为同频率的简谐振动
- 合振动的振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$
- 合振动的初相位 $\mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

同方向同频率简谐振动的合成的旋转矢量法

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$



在 t =0 时刻：

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

在任意t 时刻：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

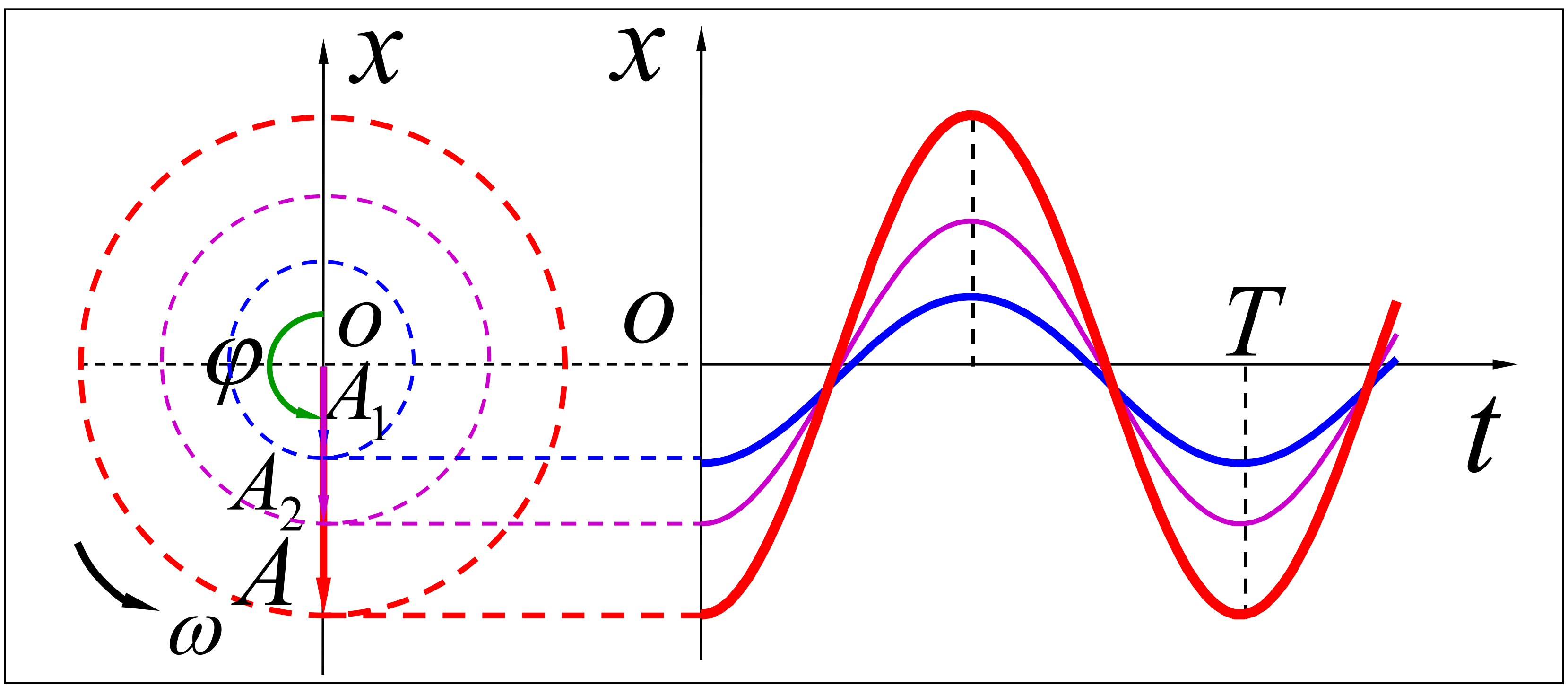
对合成简谐振动的讨论

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

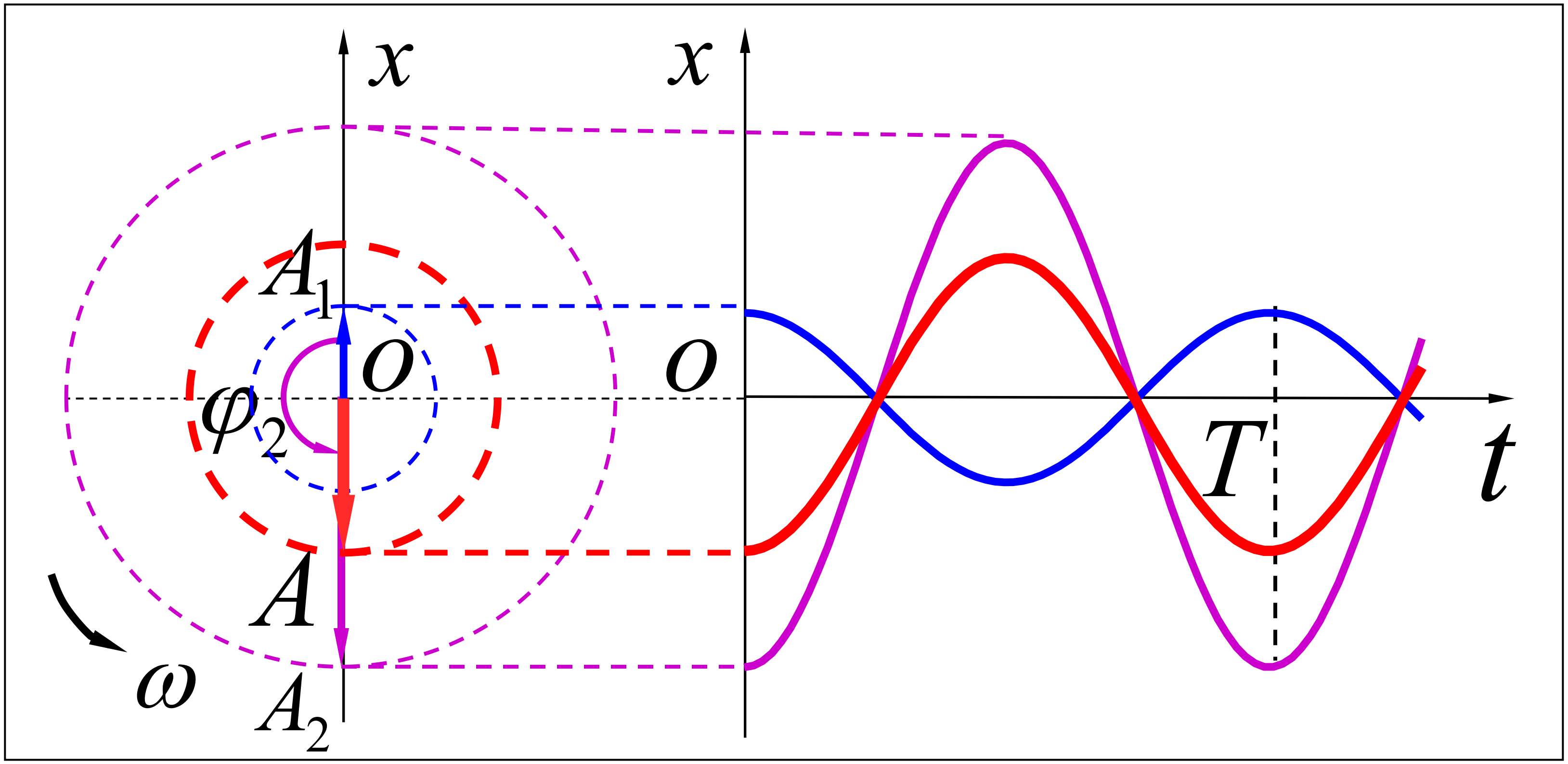
（1）相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$ （同相） 相互加强



（2）相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = |A_1 - A_2|$$ （反相） 相互削弱



（3）一般情况 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 =$ 其它值

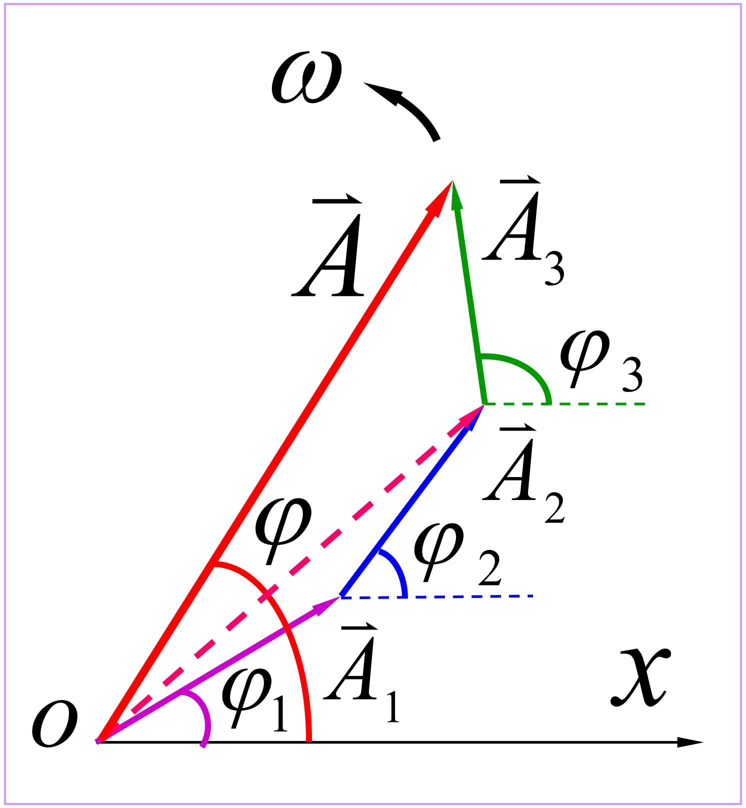
$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$$

多个同方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



——多个同方向同频率简谐振动合成仍为简谐振动

例：已知一质点同时参与了三个简谐振动，$x_1=A\cos(\omega t+\pi/3)$，$x_2=A\cos(\omega t+5\pi/3)$，$x_3=A\cos(\omega t+\pi)$。求其合振动方程。

解法一：

$$x' = A\cos(\omega t+\frac{\pi}{3})+A\cos(\omega t+\frac{5\pi}{3})$$

$$= 2A\cos(\omega t+\pi)\cos(\frac{2\pi}{3})$$

$$= -A\cos(\omega t+\pi)$$

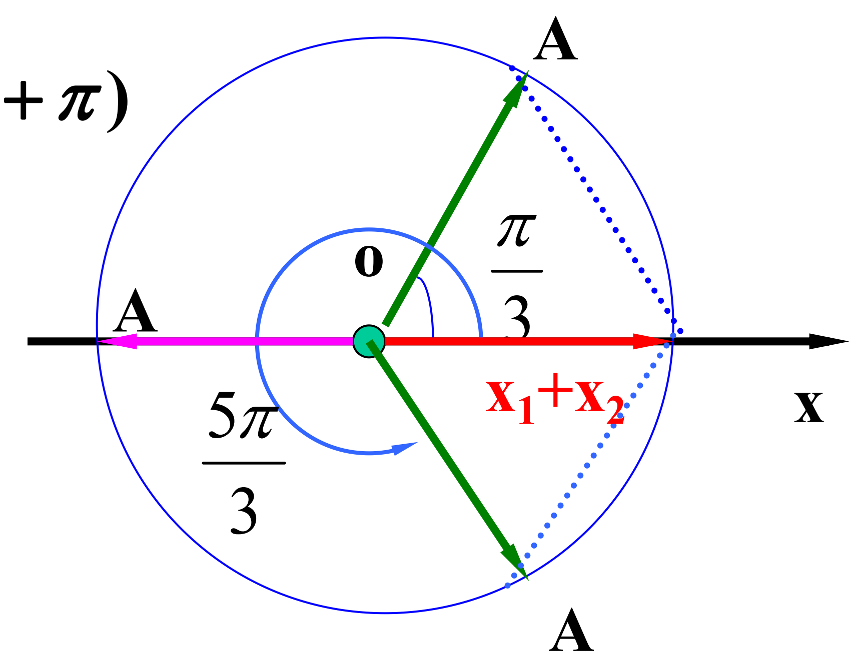
$$X = x'+x_3$$

$$= -A\cos(\omega t+\pi)+A\cos(\omega t+\pi)$$

$$= 0$$

解法二：旋转矢量法

$$X = 0$$



**无阻尼自由振动

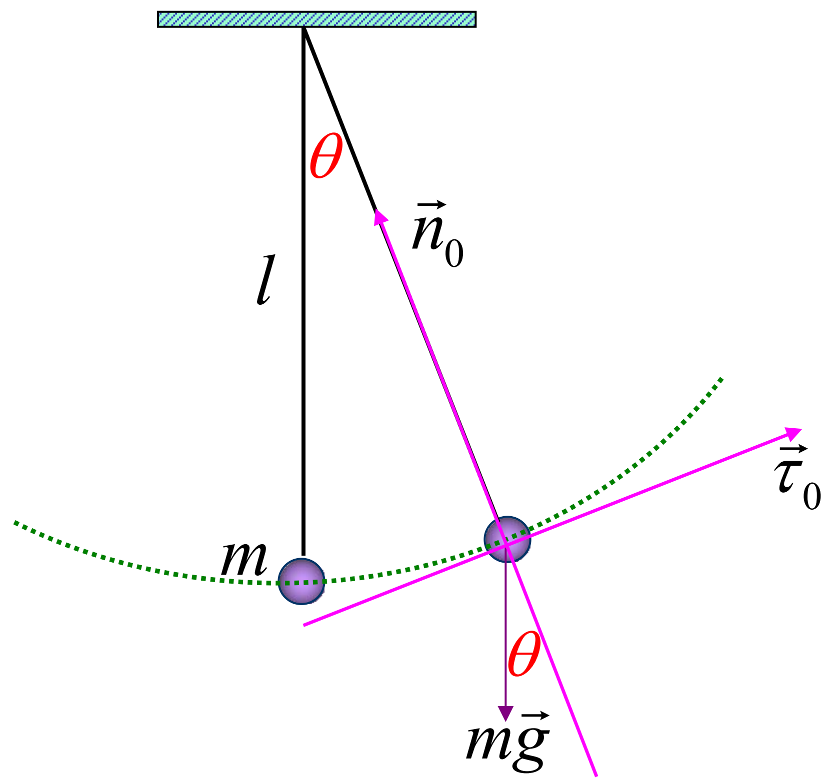
例题：证明单摆小幅度摆动时的运动是简谐振动，并求出简谐振动的频率

证明：$\sum F_\tau = ma_\tau$

$$-mg\sin\theta = ma_\tau$$

$$= ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-g\sin\theta = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+g\sin\theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$$\because \theta<5^\circ, \therefore \sin\theta=\theta$$

设： $\omega^2=\dfrac{g}{l}$

有： $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=2\pi\nu$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

无阻尼自由振动

固有频率

固有圆频率

固有周期