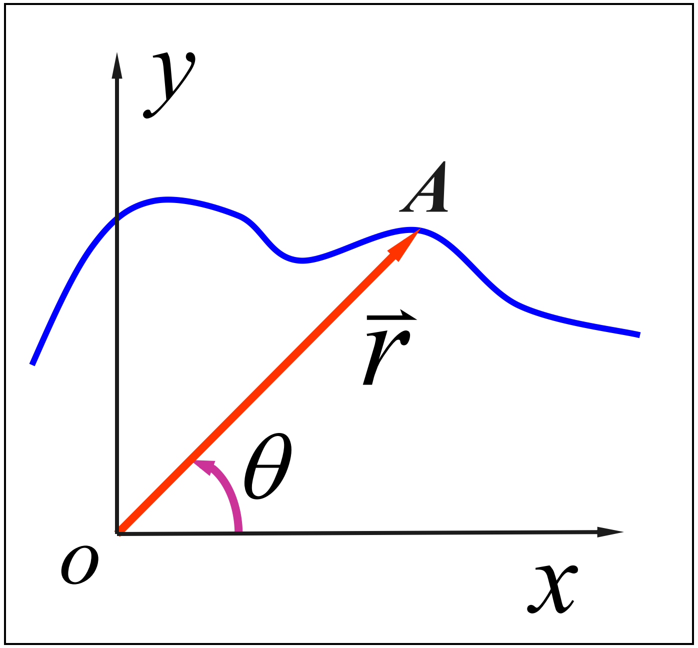
§2 圆周运动

一、平面极坐标

设一质点在 Oxy 平面内运动，某时刻它位于点 A。矢径 $\vec{r}$ 与 x轴之间的夹角为θ 。于是质点在点 A 的位置可由 $A(r,\theta)$ 来确定。



以 (r,θ) 为坐标的参考系为**平面极坐标系**。

它与直角坐标系之间的变换关系为
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

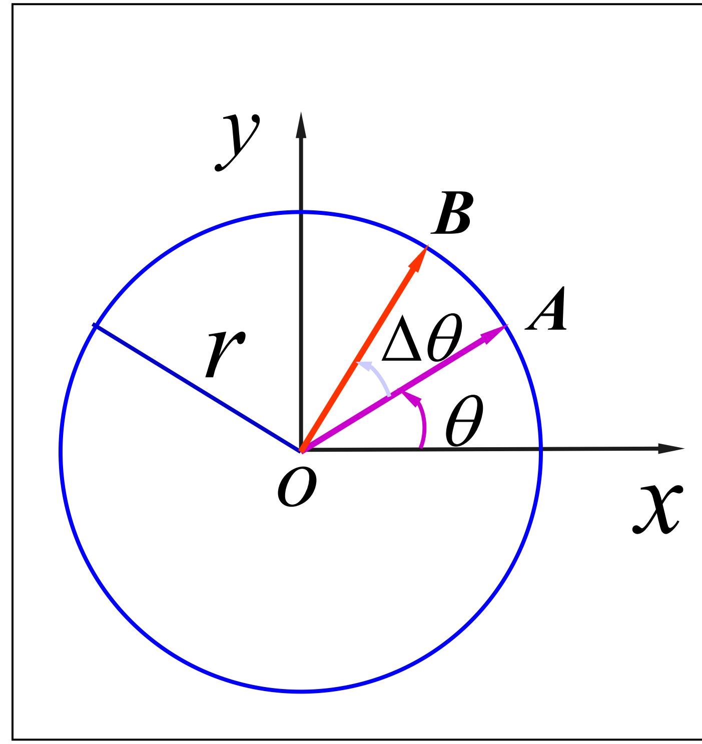
二、圆周运动的角速度和角加速度

1 角位移　微小角位移矢量

角坐标（角位置）$\theta(t)$

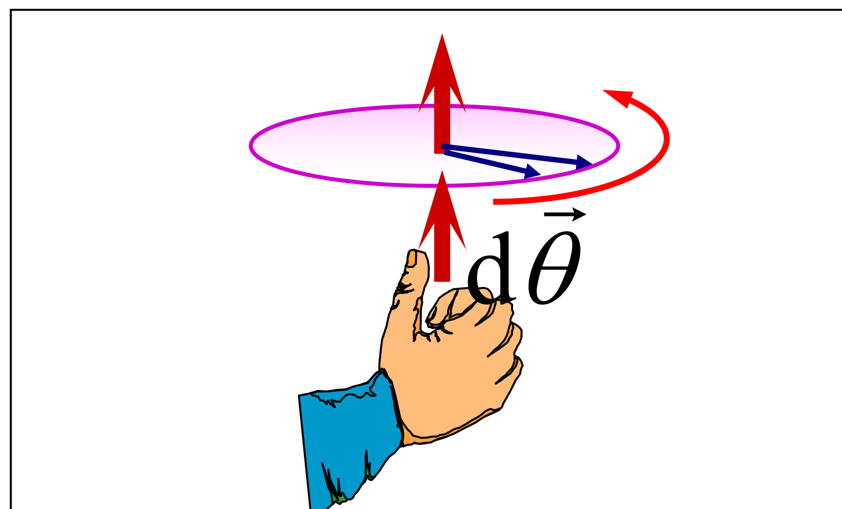
经过 Δt 时间角位置变化的大小为 $\Delta\theta=\theta(t_B)-\theta(t_A)$

当 $\Delta t\to o$时，角位置变化的大小为 $\Delta\theta\to d\theta$



$d\theta$ 为微小角位移矢量 $d\vec{\theta}$ 的大小。

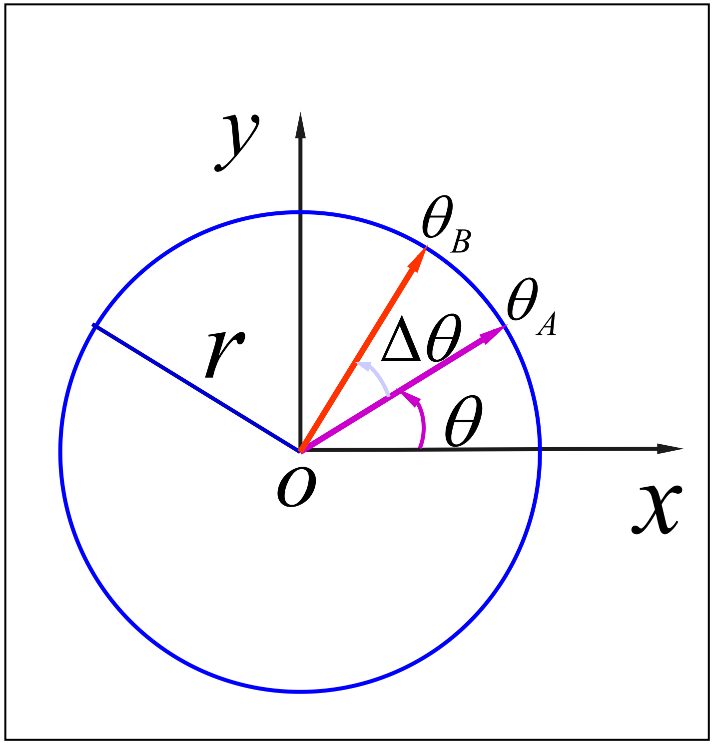
$d\vec{\theta}$ 的方向为角度增加的右手螺旋前进方向。



单位：弧度（rad）

2. 圆周运动的角速度

平均角速度 $\boxed{\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\theta_B - \theta_A}{\Delta t}}$

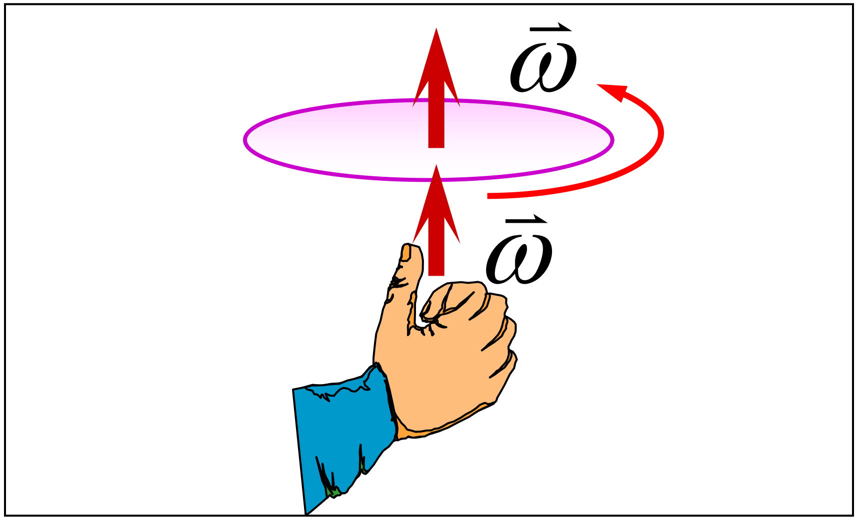


瞬时角速度大小（角速度）

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$

角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与微小角位移矢量 $d\vec{\theta}$ 同方向。

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}}$$



单位：弧度/秒（rad·s⁻¹）

3 圆周运动的角加速度

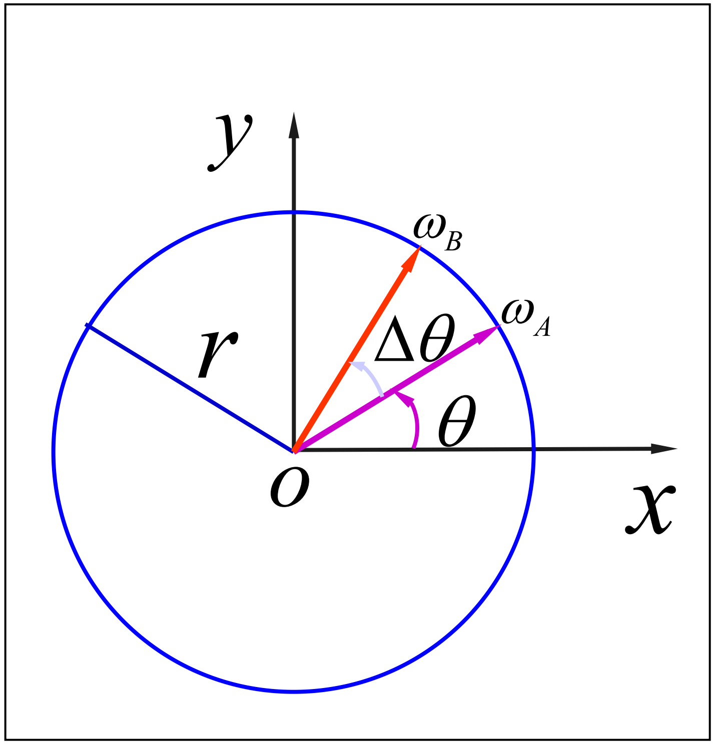
平均角加速度

$$\bar{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_B-\omega_A}{\Delta t}$$

瞬时角加速度大小（角加速度）

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}$$

单位：弧度/秒^2（$rad\cdot s^{-2}$）



角加速度矢量 $\vec{\beta}$ 的方向与角速度矢量的变化有关：当角速度增加时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 同方向；当角速度减小时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 反方向。

$$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

4 圆周运动的角量和线量的关系

$$ds = \overset{\frown}{AB} = r d\theta$$

$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

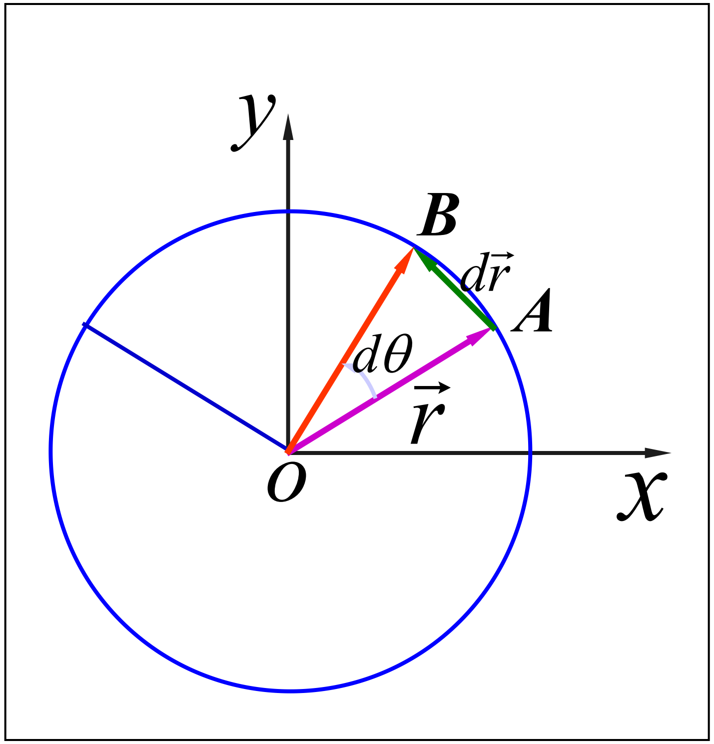
上式两侧除以 d*t* 有:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\because \quad \vec{\omega} \perp \vec{r}$$

$$\therefore \quad v = r\omega = v_\tau$$

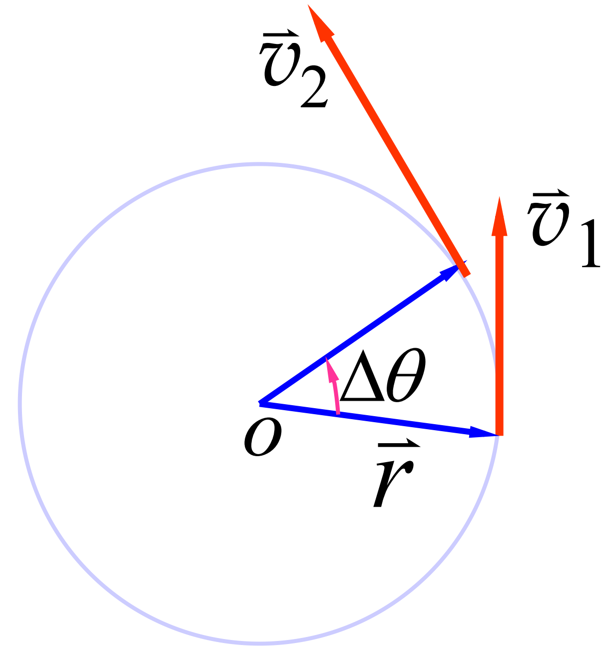
v_τ 称为切向速度的大小。



三、圆周运动的加速度

1 匀速率圆周运动的加速度

质点作匀速率圆周运动时，$\omega = const.$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v} \quad = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$= \vec{\omega}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\right) \quad = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} = r\omega^2 \left(-\vec{r}_0\right) = \frac{v^2}{r}\left(-\vec{r}_0\right)$$ ——称为法向加速度。

$\vec{r}_0 = \hat{r}$ 称为径向单位方向矢量。

2 变速率圆周运动的加速度

质点作变速率圆周运动时，$\omega \neq const.$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_n=-\omega^2\vec{r}=r\omega^2(-\vec{r}_0)=\frac{v^2}{r}(-\vec{r}_0)=v\omega(-\vec{r}_0)$$

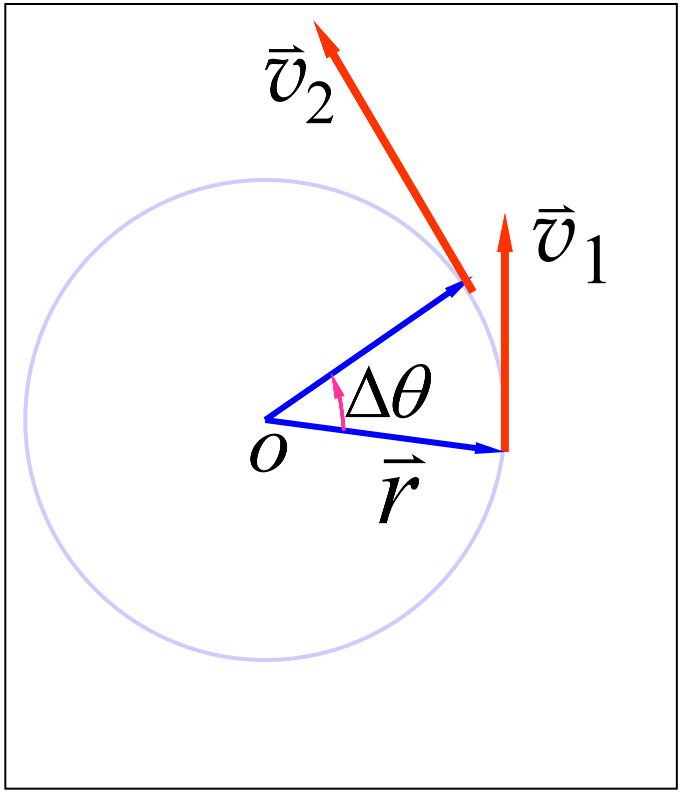
——法向加速度。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}=\vec{\beta}\times\vec{r}=r\beta\vec{\tau}_0=\vec{a}_\tau$$

$\vec{\tau}_0=\hat{\tau}$ 称为切向单位方向矢量 。

$$\vec{a}_\tau=r\beta\vec{\tau}_0=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0$$

——切向加速度。



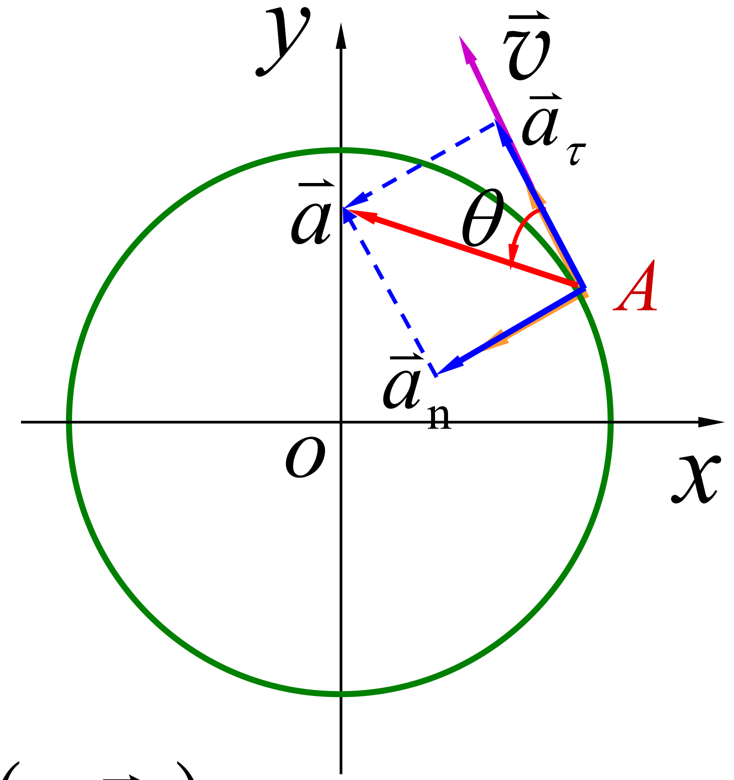
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0+\frac{v^2}{r}(-\vec{r}_0)=r\beta\vec{\tau}_0+r\omega^2(-\vec{r}_0)$$

切向加速度（速度大小变化）

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\beta$$

法向加速度（速度方向变化）

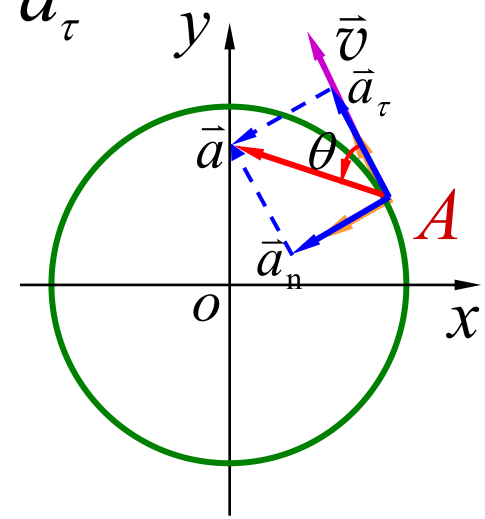
$$a_n=v\omega=\omega^2 r=\frac{v^2}{r}$$



圆周运动加速度 $\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}_0+a_n(-\vec{r}_0)$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_\mathrm{n}^2}$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}_0 + a_n(-\vec{r}_0) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_\mathrm{n}}{a_\tau}$$

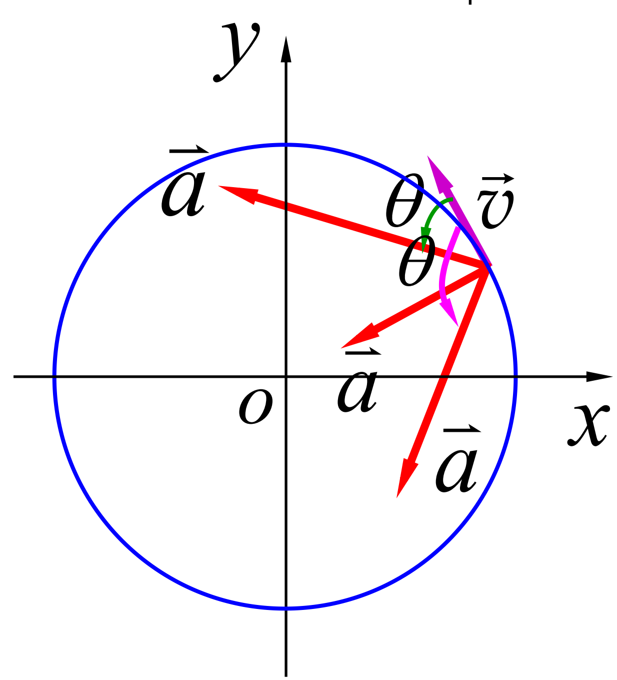


$$\because a_\mathrm{n} > 0 \quad \therefore 0 < \theta < \pi$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\beta$$

$$a_\tau \begin{cases} >0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ v\ \text{增大} \\ =0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2},\ v\equiv\text{常量} \\ <0,\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi,\ v\ \text{减小} \end{cases}$$



说明：

1. 匀速率圆周运动：速率 v 和角速度 ω 都为常量 。

$$a_\tau = 0 \qquad a = a_{\mathrm{n}} = r\omega^2 = v^2 / r$$

2. 匀变速率圆周运动

$$\beta = const.$$

如 $t=0$ 时， $\theta=\theta_0, \omega=\omega_0$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

与匀变速率直线运动类比

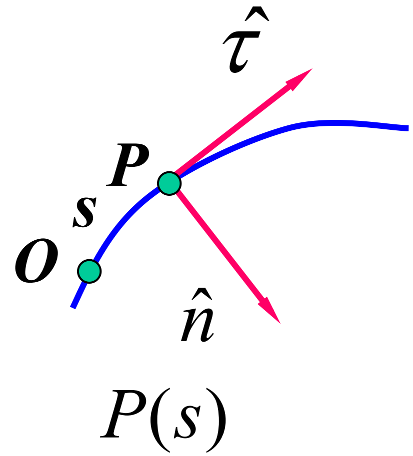
$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

*四、一般曲线运动的描述

一般曲线运动（自然坐标）

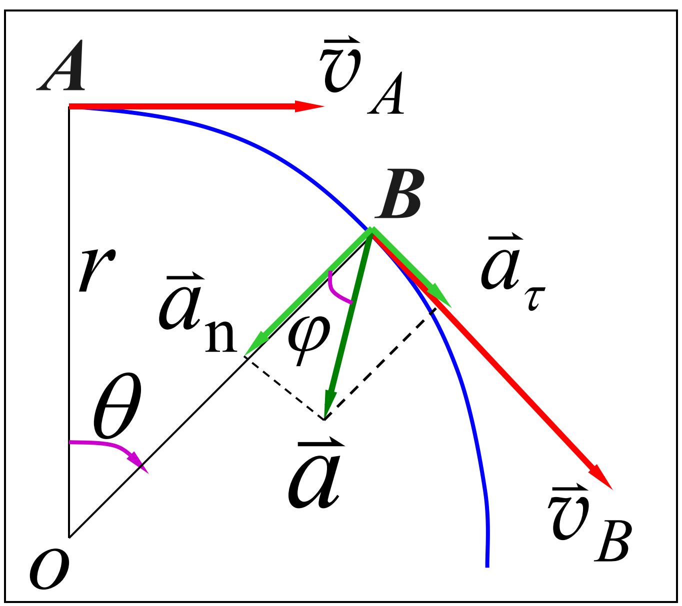


$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0$$

其中 $\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 为曲率半径，$\vec{v}$ 为切向速度，$\vec{n}_0 = -\vec{r}_0$ 为法向单位矢量。

例 如图一超音速歼击机在高空 A 时的水平速率为 1940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B，其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从 A 到 B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点 B 的加速度；(2) 飞机由点 A 到点 B 所经历的路程 。



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_τ 和 β 为常量。

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t$

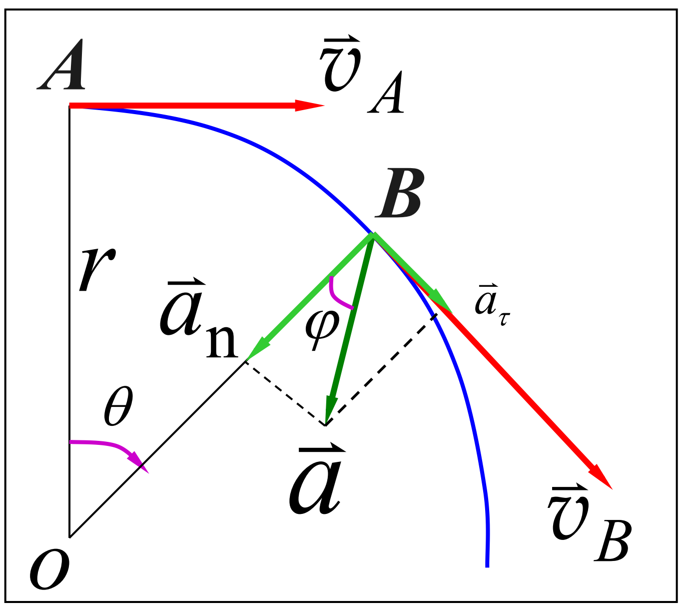
已知：$v_A = 1940\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$　　$v_B = 2192\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\text{s}$　　$\overset{\frown}{AB} = 3.5\text{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t \qquad a_\tau = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

在点 **B** 的法向加速度 $a_\text{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

在点 **B** 的加速度



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\text{n}^2} = 109\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 φ 为

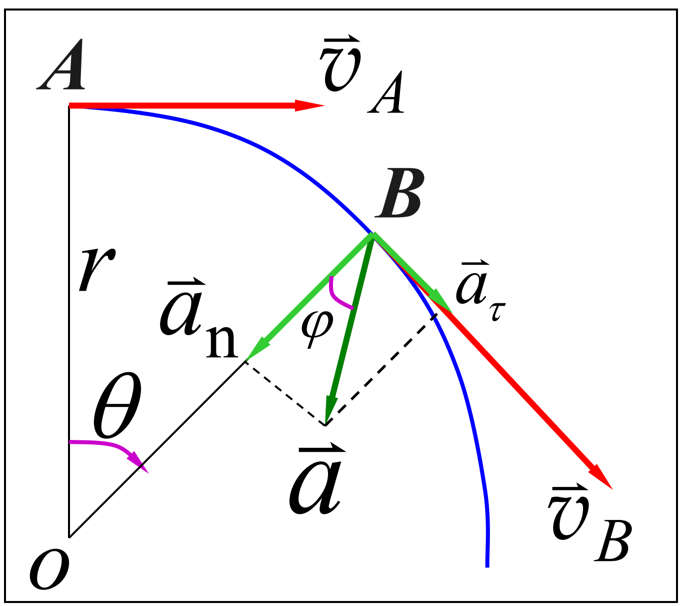
$$\varphi = \arctan\frac{a_\tau}{a_\text{n}} = 12.4^\circ$$

已知：$v_A = 1940\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$　　$v_B = 2192\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$

$t = 3\mathrm{s}$　　$\overset{\frown}{AB} = 3.5\mathrm{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\beta t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\ \mathrm{m}$$

§3 相对运动

一、时间与空间

小车以较低的速度 $\vec{v}$ 沿水平轨道先后通过点 A 和点 B。地面上人测得车通过 A、B 两点间的距离和时间与车上的人测量结果相同。

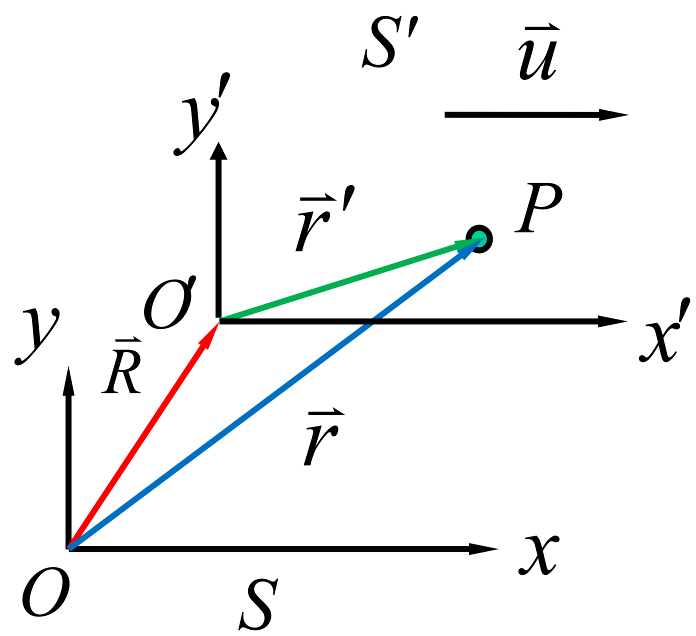
在两个相对作直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间的测量也是绝对的，与参考系无关，时间和长度的的绝对性是经典力学或牛顿力学的基础。

二、相对运动

物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系

质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

S 系	$(Oxyz)$
S' 系	$(O'x'y'z')$



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{R}$$

绝对位移　　相对位移　　牵连位移

$$\Delta\vec{r}_{\text{人对地}} = \Delta\vec{r}\,'_{\text{人对车}} + \Delta\vec{R}_{\text{车对地}}$$

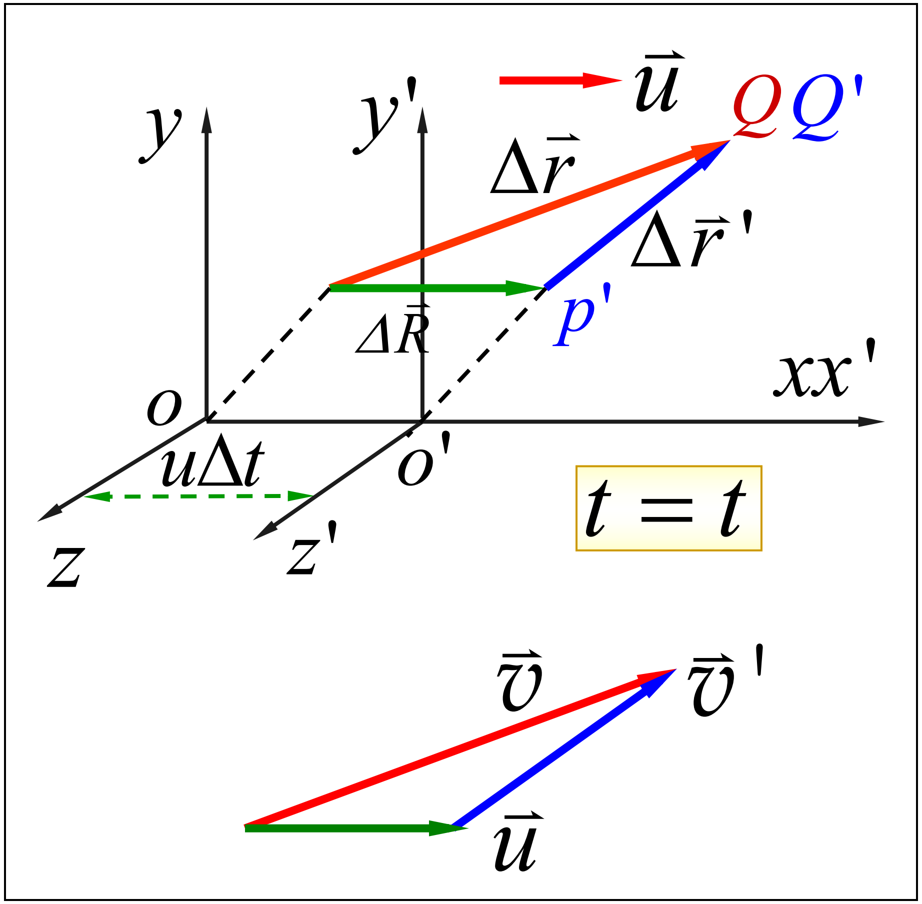
伽利略速度变换

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{R}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + u\Delta t$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$



绝对速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

相对速度 $\vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{v}_{人对地} = \vec{v}'_{人对车} + \vec{u}_{车对地}$$

牵连速度 $\vec{u}$

绝对速度

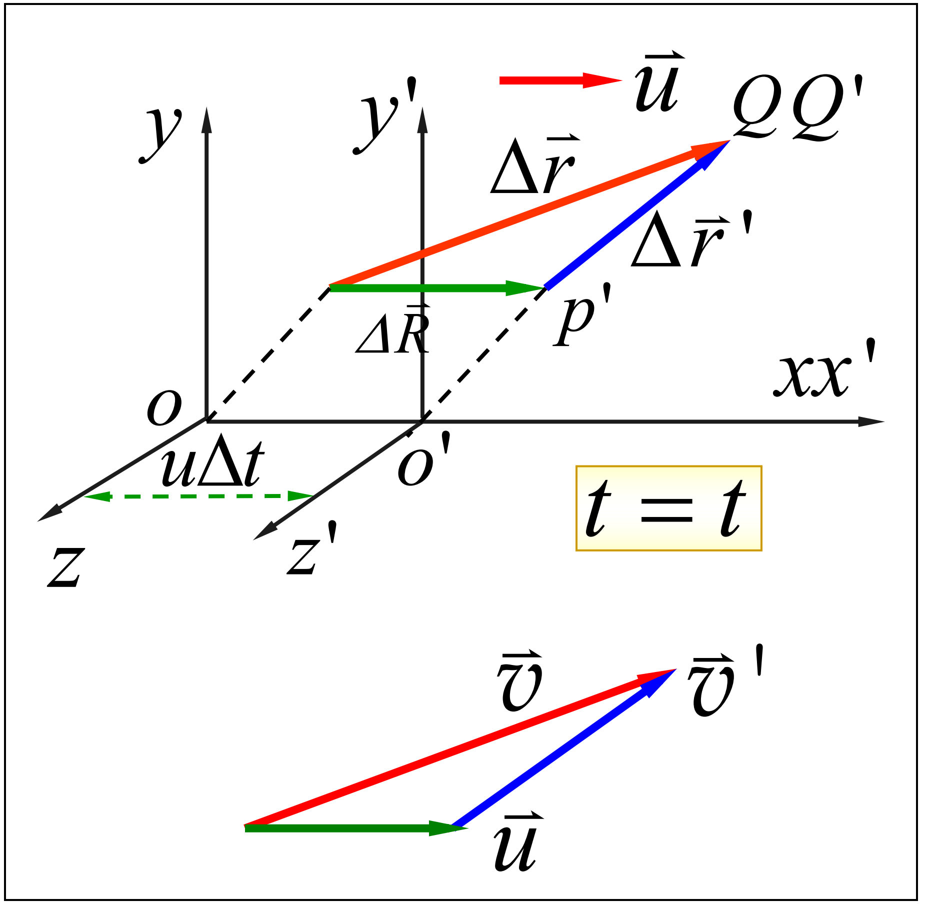
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$ 牵连速度

相对速度

注意

当 $\vec{u}$ 接近光速时，

伽利略速度变换不成立！



加速度关系 $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}'}{dt} + \dfrac{d\vec{u}}{dt}$

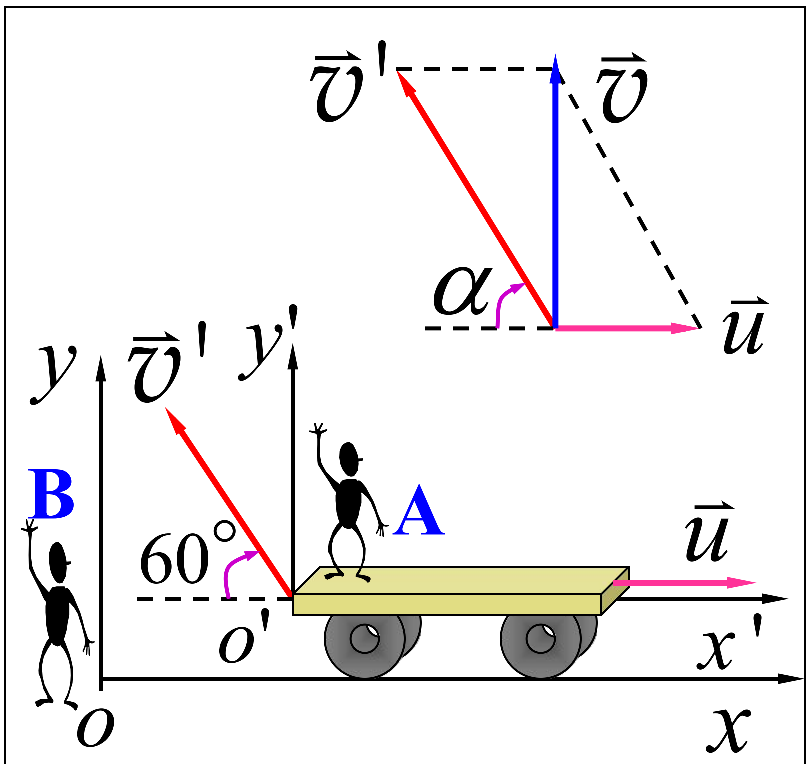
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

若 $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = 0$，则 $\vec{a} = \vec{a}'$。

（如：两参考系相对做匀速直线运动时）

例：一列火车以10 m/s自西向东做匀速直线运动。雨滴相对于地面竖直下落，在车窗上形成的雨迹偏离竖直方向30度。则雨滴相对于地面速率为_______，相对于车的速率为________。

例 如图示，一实验者 A 在以 10 m/s 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台射弹器，此射弹器以与车行进的水平方向呈 60° 度角斜向上射出一弹丸。 此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动, 求弹丸上升的高度 。



解： 地面参考系为 S 系

平板车参考系为 S'系

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

速度变换

$$v_x = u + v'_x$$

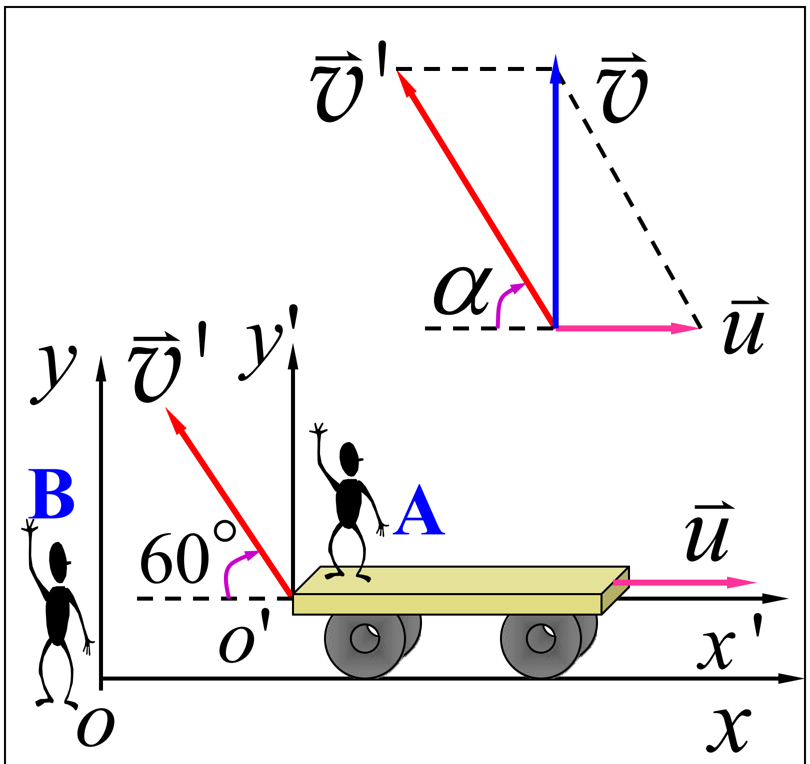
$$v_y = v'_y$$

$$\because v_x = 0 \qquad \therefore v'_x = -u = -10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x \tan\alpha| \qquad |v_y| = 17.3\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

弹丸上升高度

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\mathrm{m}$$



单选题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

这两节课的讲课速度如何？

A 太快，跟不上

B 太慢，吃不饱

C 不快不慢刚刚好

D 讲真，我没听课

提交