（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（不选主元）

A的所有顺序主子式$D_k \neq 0, k=1,\cdots,n$，则存在唯一的分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{n}{2}(n+1) = n^2$ 未知 列 n^2个方程

思路：第一行与第一列相等

$a_{1i} = u_{1i}$ $i=1,\cdots,n$ 得U第一行元

$a_{i1} = l_{i1}u_{11}$ $l_{i1} = a_{i1}/u_{11}$ $i=2\sim n$

得L的第一列元素

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（不选主元）

设已进行 r-1 步，得到 U 第 r-1 行，L 第 r-1 列元素

则第 r 步由以下计算公式 $a_{ri}=\sum_{k=1}^{r} l_{rk}u_{ki}=\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}+u_{ri}$

得 $u_{ri}=a_{ri}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{ki}$, $i=r, r+1, \dots, n$

又 $a_{ir}=\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}+l_{ir}u_{rr} \Rightarrow l_{ir}=\left(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}\right)/u_{rr}$, $i=r+1, \dots, n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44} \end{pmatrix},$$

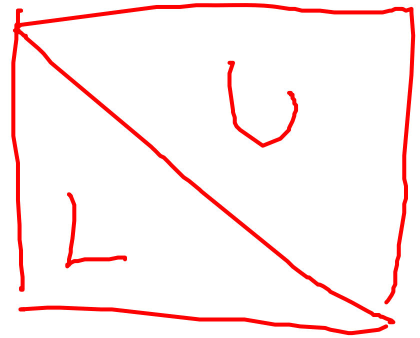
无需开辟新的存储单元。

乘除法次数约为 $\frac{n^3}{3}$，与高斯法相当

（五）矩阵三角分解的直接法：杜立特算法（选列主元）

当杜立特算法第$r-1$步分解已完成，有

$$
A \to \begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,r-1} & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,r-1} & u_{2r} & \cdots & u_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
l_{r-1,1} & l_{r-1,2} & \cdots & u_{r-1,r-1} & u_{r-1,r} & \cdots & u_{r-1,n} \\
l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$



$PA = LU$

$S_i = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}, \quad i = r, r+1, \cdots, n$

于是 $u_{rr} = S_r$ $l_{ir} = S_i / S_r$ $i = r+1, \cdots, n$

取 $\max\limits_{r \le i \le n} |S_i| = |S_{i_r}|$ 交换 r行与 i_r行

将 S_{i_r} 调到 (r,r)位置 于是 $|l_{ir}| \le 1$, 再进行第r步分解运算

（六）平方根法

$A=LU$

U

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}=DU_0$$

$A=LDU_0$

$A^T=U_0^T D L^T$

$A=A^T$

$A=LDU_0=U_0^T D L^T$

单位下三角　　上三角

LU分解唯一，$L=U_0^T$　　$A=LDL^T$

（定理：对称矩阵三角 分解）A为n阶对称矩阵，A的所有顺序主子式$D_k\neq 0$, $k=1,\cdots,n$，则存在唯一的分解$A=LDL^T$, L为单位下三角阵

D对角阵

（六）平方根法

（定理）若A对称正定，$A=LDL^T$，L为单位下三角阵，其中D为对角阵，且$D_{ii}>0, 1\le i\le n$

$x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

$D_{ii}>0$

所有顺序主子式 $A_k>0$，$A_k=D_{11}\times\cdots\times D_{kk}$

（定理：*Cholesky*分解）若A对称正定，$A=LL^T$，L为非奇异下三角阵，当限定L的对角线元素为正时，这种分解是唯一的

$$D^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}\sqrt{D_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{D_{nn}}\end{pmatrix}$$

$$A=L_1DL_1^T=L_1D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L_1^T$$

$$=L_1D^{\frac{1}{2}}\cdot(L_1D^{\frac{1}{2}})^T=LL^T \qquad L=L_1D^{\frac{1}{2}}$$

平方根法解线性方程组：

$Ax=b$ $\quad LL^Tx=b$

$Ly=b$ 解 y

$L^Tx=y$ 解 x

$$A=LL^T=\begin{pmatrix}l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k)/l_{ii}$ $\quad i=1\to n$

$x_i=(b_i-\sum_{k=i+1} l_{ki}x_k)/l_{ii}$ $\quad i=n, n-1, \cdots, 1$

（六）平方根法：Cholesky分解的直接法

$$A=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

A对称正定

$\frac{1}{2}n(n+1)$

$\frac{1}{2}n(n+1)$

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} + l_{jj}l_{ij}$$

$$l_{jj}=\Big(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad l_{ij}=\Big(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}\Big)/l_{jj}$$

$i=j+1,\cdots,n$

$$a_{jj}=\sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \quad j=1,\cdots,n$$

$\therefore l_{jk}^2 \le a_{jj} \le \max_{1\le i\le n}|a_{ii}|$

$\therefore \max_{j,k}\{l_{jk}^2\} < \downarrow$

(1) l_{jk} 不增长 且 l_{jj} 恒正

数值稳定，不选主元

(2) $\frac{n^3}{6}$ 乘除法

（六）平方根法：改进的平方根法（不需要做开方运算）

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

略

（七）追赶法（三对角矩阵）

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ r_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & r_n & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

L　　U

α_1　α_2　α_n

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 & c_1 = \alpha_1\beta_1 \\ a_i = r_i & b_i = r_i\beta_{i-1} + \alpha_i \quad i = 2, 3, \cdots n \\ c_i = \alpha_i \beta_i & i = 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_i = b_i - a_i\beta_{i-1} & i = 2, 3, \cdots, n \quad \alpha_1 = b_1 \\ \beta_i = c_i / (b_i - a_i\beta_{i-1}) & i = 2, \cdots, n-1 \\ r_i = a_i & i = 2, 3, \cdots n \end{cases}$$

（七）追赶法（解方程组）

11:26 回来

$$A = LU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ r_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & r_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$Ax=f \quad LUx=f \quad Ly=f$ 解 y，$Ux=y$ 解 x

$$\begin{cases} Ly=f \Rightarrow y_1 = f_1/b_1 \quad y_i = (f_i - a_i y_{i-1})/(b_i - a_i\beta_{i-1}) \quad i=2,\cdots,n \\ Ux=y \Rightarrow x_n = y_n \quad x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad i=n,n-1,\cdots,2,1 \end{cases}$$

$$\beta_1 \to \beta_2 \to \underbrace{\cdots \to \beta_{n-1} \to y_1 \to y_2 \cdots}_{\text{追}} \to y_n \to \underbrace{x_n \to x_{n-1} \to \cdots}_{\text{赶}} \to x_1$$

解方程的追赶法（$5n-4$）次乘除法：

（七）追赶法（三对角矩阵）

（定理）若三对角阵A满足： $(1)\,|b_1|>|c_1|>0;$

$(2)\,|b_i|\ge|a_i|+|c_i|,\ a_i,c_i\ne 0,\ i=2,3,\cdots,n-1;$

$(3)\,|b_n|>|a_n|>0,$

则A可逆，且上述三角分解存在唯一，

且追赶法中，α_i,β_i满足：

$(1)\,0<|\beta_i|<1,\ i=1,2,\cdots,n-1;$

$(2)\,0<|c_i|\le|b_i|-|a_i|<|\alpha_i|<|b_i|+|a_i|,\ i=2,\cdots,n-1,$

$0<|b_n|-|a_n|<|\alpha_n|<|b_n|+|a_n|$

（七）追赶法（三对角矩阵）

（证明）归纳法证 $|\alpha_i| > |c_i| > 0$, $0 < |\beta_i| < 1$

$i=1$ 时 $|b_1| > |c_1| > 0$ $\beta_1 = \frac{c_1}{b_1}$ $0 < |\beta_1| < 1$

$|\alpha_1| = \left|\frac{c_1}{\beta_1}\right| > |c_1|$ ✓

$i-1$ 时成立 i 时 $i-1$ 成立 $0 < |\beta_{i-1}| = \left|\frac{c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}\right| < 1$

$|\alpha_i| = |b_i - a_i \beta_{i-1}| \geq |b_i| - |a_i||\beta_{i-1}| > |b_i| - |a_i| \geq |c_i|$

$|\alpha_i| \leq |b_i| + |a_i||\beta_{i-1}| \leq |b_i| + |a_i|$

$0 < |\beta_i| = \left|\frac{c_i}{\alpha_i}\right| < 1$

$\alpha_n = b_n - a_n \beta_{n-1}$ $|\alpha_n| \leq |b_n| + |a_n|$ □

向量范数与矩阵范数

$\mathbb{R}^n$　$x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$　$\mathbb{C}^n$

（定义：向量范数）$\forall x\in\mathbb{R}^n$ 有一个数 $\|x\|$ 与之对应 满足

(1) $\|x\|\geq 0$ 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$（正定）

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$（齐次）

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$（三角不等式）

则称 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 一个范数

(3) $\Rightarrow$ $\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leq\|x-y\|$

常见向量范数：

(1) ∞范 $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$　(2) 1范 $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

(3) 2范 $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{(x,x)}$

(4) p范 $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$　$p=3,4,\cdots,1.5$

讨论 $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$　例 $x=(1,-2,3)^T$　$\|x\|_\infty=3$　$\|x\|_1=6$

$\|x\|_2=\sqrt{14}$

向量范数性质

（定义：向量序列收敛） $x^{(k)}$, x^*

若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$, $i=1,\dots,n$ 则 $x^{(k)} \to x^*$

记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

（定理：向量范数关于分量连续性）$\|\cdot\|$ 是 R^n 一个范数，则 $\|x\|$ 是 R^n 中连续函数

证明：$x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ $\quad$ $\Delta x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{\Delta x_i}\, e_i$

$$\left|\, \|x+\Delta x\| - \|x\| \,\right| \le \|\Delta x\| \le \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|\, \|e_i\|$$

$$\le \underline{\|\Delta x\|_\infty} \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \quad 常 \qquad \square$$

$\Delta x \to 0$ 时 $\Delta x_i \to 0$ $\quad \|\Delta x\|_\infty \to 0$ $\quad$ 则 $\|x+\Delta x\| \to \|x\|$

向量范数性质

（定理：等价性）$\|x\|_s$，$\|x\|_t$ $\mathbb{R}^n$ 任两范数，则存 C_1 $C_2>0$ 使 $C_1\|x\|_s \le \|x\|_t \le C_2\|x\|_s$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

证明：只证 $C_1 \le \dfrac{\|x\|_t}{\|x\|_\infty} \le C_2$ 即可

E_0 是范数 $\|x\|_\infty = 1$ 的全体集合 则 E_0 是有界闭集

则 $\|x\|_t$ 在 E_0 上存在最大值 小值 α_0, β_0

即 $\alpha_0 \le \|x\|_t \le \beta_0$ $x \in E_0$ 则 $\alpha_0 > 0$ $\alpha_0 \ne 0$

则 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \ne 0$ $\alpha_0 \le \left\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_t \le \beta_0$

（定理：向量收敛）

"注意. 无穷维空间,该结果不成立" $\alpha_0\|x\|_\infty \le \|x\|_t \le \beta_0\|x\|_\infty$ $\in E_0$ $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_\infty}\right\|_\infty = 1$

定理：$\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)} = x^* \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$ $\|\cdot\|$ 任一范数

证明 "$\Rightarrow$" $\|x^{(k)} - x^*\| \le C\|x^{(k)} - x^*\|_\infty$ $\Rightarrow$ $\|\ \|_\infty \to 0$

"$\Leftarrow$" $|x_i^{(k)} - x_i^*| \le \|x^{(k)} - x^*\|_\infty \le \|x^{(k)} - x^*\| \to 0$

矩阵范数

$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

（定义：矩阵范数）$\forall A\in R^{n\times n}$ 有 $\|A\|$ 与之对应，满足

(1) $\|A\|\ge 0$ $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$ (2) $\|cA\|=|c|\,\|A\|$ 齐次

(3) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$

(4) $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$

称 $\|\cdot\|$ 是 $R^{n\times n}$ 的一个范数

常见矩阵范数：(1) $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ 最大行和

(2) $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 最大列和

(3) $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ λ_{max} 是 A^TA 最大特征值

(4) $\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Frobenius 范

可以 (1) (2) (3) 是范数 ??

范数.

矩阵算子范数

（定义：矩阵算子（或从属）范数）$x \in \mathbb{R}^n$，$\|x\|_v$ 是一个向量范数，则

$$\|A\|_v = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

定义的 $\|A\|_v$ 称为〈向量范数 $\|\cdot\|$ 的算子范数或从属范数〉

证明算子范数确实是一个范数：

作业 P177 9, 10, 12, 13

（定义：向量范数与矩阵范数相容性）

（定理：算子范数与对应的向量范数相容）