

## 2021 年秋统计学习题 03

1. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本.
  - (a). 试求适当选择的常数  $c$  使得  $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计;
  - (b). 求  $k$  使得  $k \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$  为  $\sigma$  的无偏估计.
2. 设  $\hat{\theta}$  是参数  $\theta$  的无偏估计, 且  $\text{Var } \hat{\theta} > 0$ , 试证明  $\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2$  不是  $\theta$  的无偏估计.
3. 设总体  $X$  的数学期望  $\mu = \mathbb{E}X$  已知, 试证统计量  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  是总体方差  $\sigma^2 = \text{Var } X$  的无偏估计.
4. 设  $X$  为离散型随机变量, 分布列为

$$\mathbb{P}(X = 1) = \theta, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 1 - \theta.$$

三个独立样本观测值为  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ . 如果  $\Theta$  的先验分布为  $[0, 1]$  上的均匀分布, 求其后验密度.