第4章　自由曲线与曲面

内容提要

- 参数多项式曲面
- 孔斯曲面
- Bezier曲面
- B样条曲面

参数多项式曲面(1/5)

- 曲面的表示形式
  - 非参数表示
    - 显式表示

$$z = f(x, y)$$

    - 隐式表示

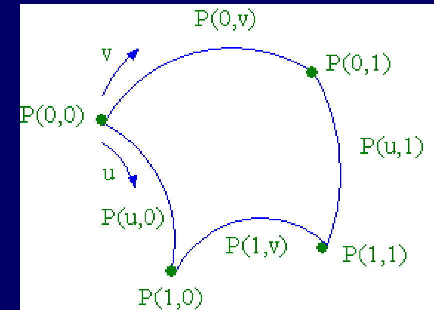
$$s(x, y, z) = 0$$

  - 参数表示

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in [0,1]\times[0,1] \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

- 参数曲线的自然扩展形式
- 应用：为具有曲面的物体建模

参数多项式曲面(2/5)



- 一张矩形区域上的参数曲面片
  - 在一张矩形区域上由曲线边界包围的具有一定连续性的点集面片，用双参数的单值函数表示

$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}u^iw^j$$

x=x(u,w) y=y(u,w) z=z(u,w) u,w ∈ [0,1]

$$P(u,w)=[x(u,w),y(u,w),z(u,w)]$$

- **角点。**把u,w=0或1代入p(u,w)，得到四个角点是p(0,0)，p(1,0)，p(0,1)和p(1,1)，简记为p_{00}，p_{01}，p_{10}，p_{11}。
- **边界线。**矩形或曲面片的四条边界线是：p(u,0)，p(u,1)，p(0,w)，p(1,w)，简记为p_{u0}，p_{u1}，p_{0w}，p_{1w}。
- **曲面片上一点。**该点为$p(u_i,w_j)$，简记为p_{ij}。
- **p_{ij}点的切矢。**在面片上一点p_{ij}处有u向切矢为 p_{ij}^u ，w向切矢为 p_{ij}^w 。
- **p_{ij}点的法矢。**在p_{ij}处的法矢记为$n(u_i,w_j)$，简记为n_{ij}

$$n_{ij}=\frac{p_{ij}^u\times p_{ij}^w}{|p_{ij}^u\times p_{ij}^w|}$$

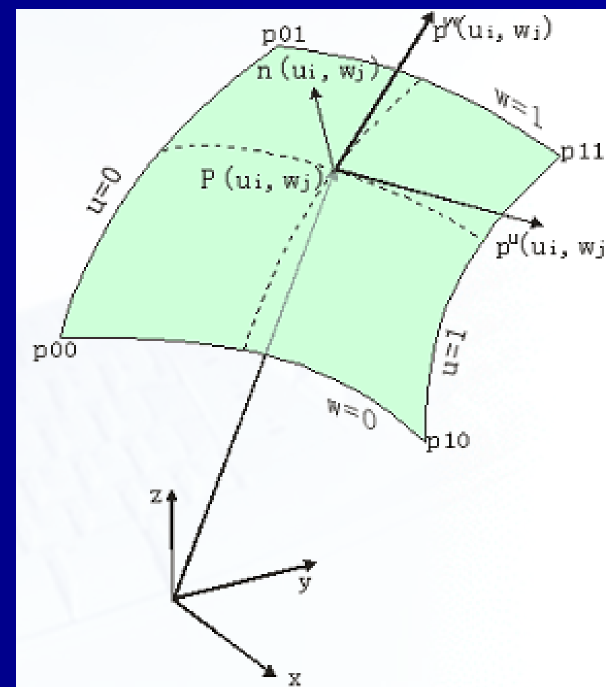
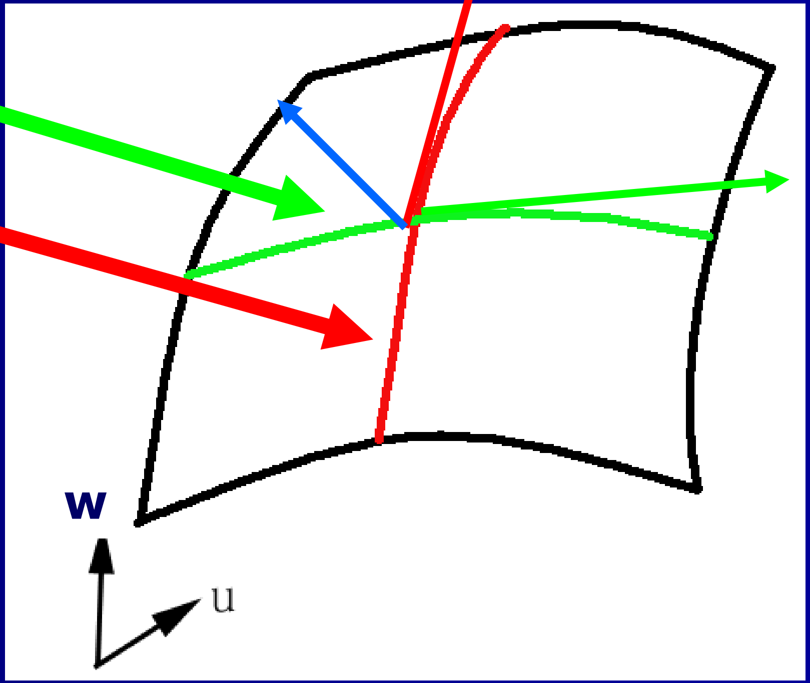


图6. 3. 1 参数曲面片

参数多项式曲面(2/5)

- 等参数曲线
  - 一个参数固定，一个参数自由变化
  - u曲线 $P = P(u, v_0)$
  - w曲线 $P = P(u_0, v)$



参数多项式曲面(3/5)

- 参数多项式曲面的定义

$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_{ij}u^i w^j=U^T AW \qquad (u,w)\in[0,1]\times[0,1]$$

  - 系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \ddots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

参数多项式曲面(4/5)

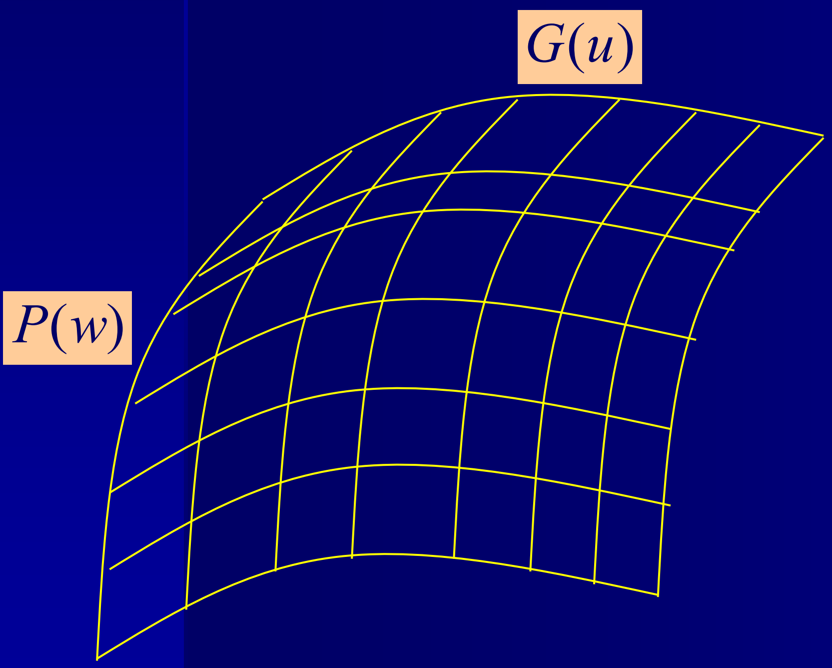
$$P(u,w)=U^T AW$$

- 矩阵表示

$$P_j(w)=G\cdot M_v\cdot W$$
$$=\left[G_{0j},G_{1j},\cdots,G_{nj}\right]\cdot M_w\cdot W$$

$$G_i(u)=\left[G_{0i},G_{1i},\cdots,G_{ni}\right]\cdot M_U\cdot U$$

$$P(u,w)=U^T\cdot {M_U}^T\cdot G\cdot M_w\cdot W$$
$$G=(G_{ij})_{i,j=0}^{m,n}$$



参数多项式曲面(5/5)

- 常用的二次曲面

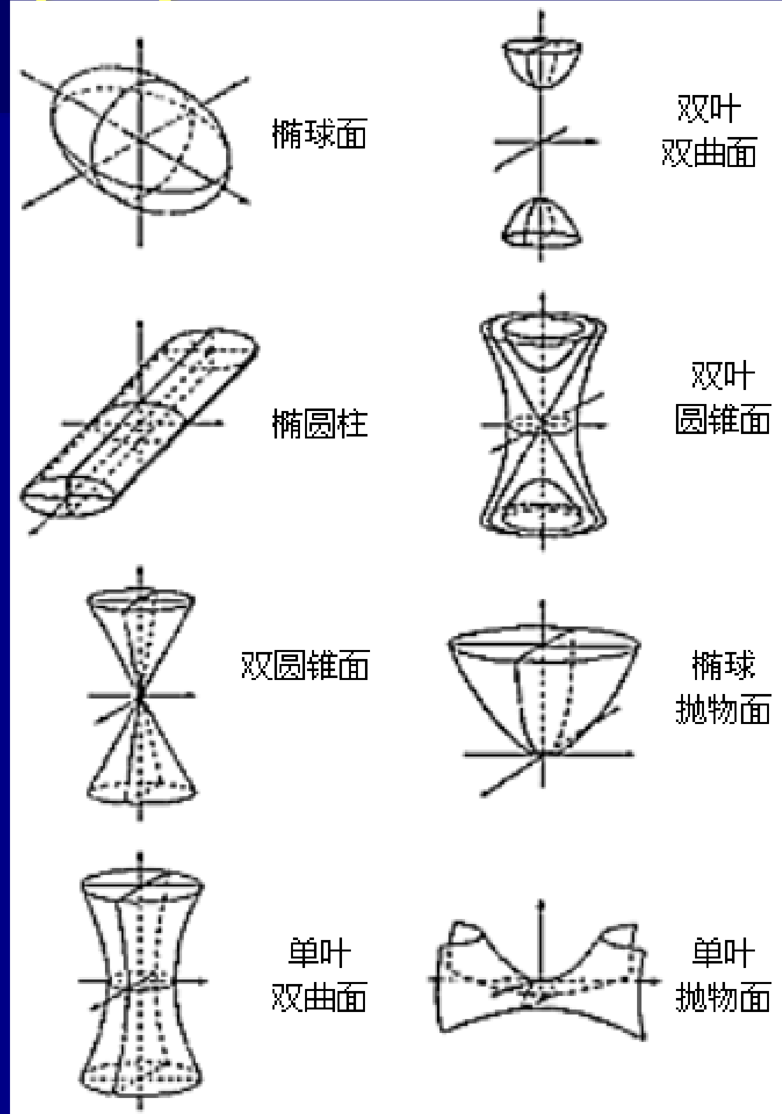


图 6.3.12 常用的二次曲面

参数多项式曲面(5/5)

- 双线性曲面
  - P(u,w)是u,w的线性函数
  - 在单位正方形的参数空间内，以其相反的边界进行线性插值而获得的曲面

$$P(u,w)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-w\\ w\end{bmatrix}$$

$$P(0,w)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-w\\ w\end{bmatrix}$$
$$=P_{00}(1-w)+P_{01}w$$

四条边界线为直线

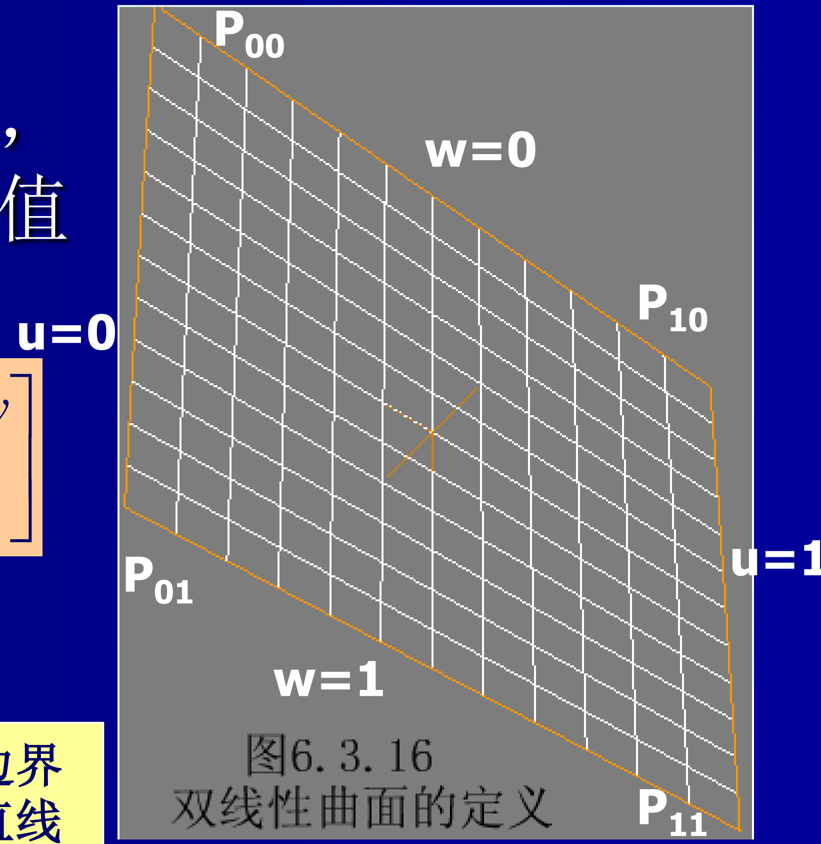


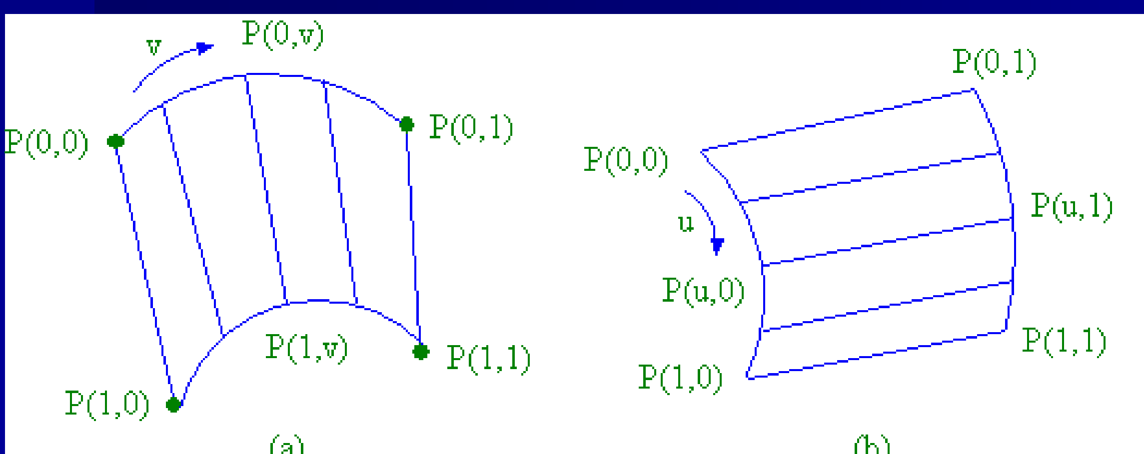
图6.3.16
双线性曲面的定义

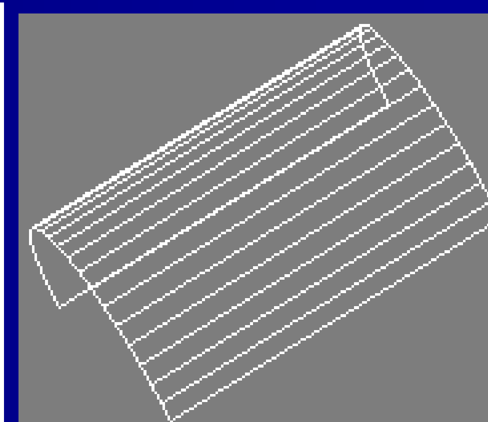
参数多项式曲面(5/5)

- 单线性曲面——直纹面

直纹面可看作是对两条已知边界曲线的线性插值，若已知两条边界曲线是p(u,0)和p(u,1)，则直纹面可定义为：Q（u,w）=p(u,0)(1-w)+p(u,1)w

可写成：$Q=\begin{bmatrix}1-w & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{u0}\\ p_{u1}\end{bmatrix}$ 或 $Q=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{0w}\\ p_{1w}\end{bmatrix}$



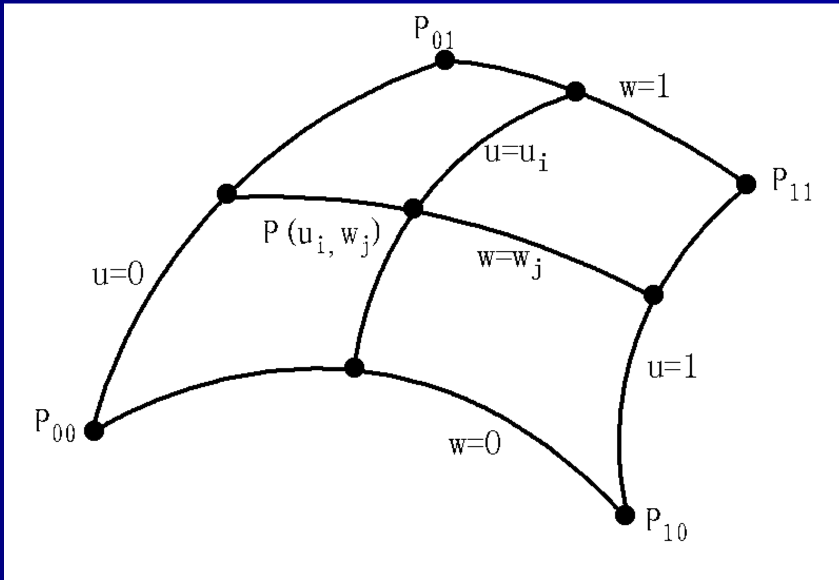


参数多项式曲面(5/5)

- 双三次参数曲面片
  - 由两个三次参数变量（**u,w**）定义的曲面

$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}a_{ij}u^{i}w^{j},\qquad u,w\in[0,1]$$

$$U=[u^3\ \ u^2\ \ u\ \ 1],\quad W=[w^3\ \ w^2\ \ w\ \ 1]$$



孔斯（Coons）曲面

- 1964年于MIT提出
- 使用曲面片角点和角点处的偏导数（角点信息矩阵）来决定曲面。
- 使用Hermite样条调和函数对角点信息矩阵进行调合生成曲面。
- 属于双三次曲面片

4个角点位置向量

$$Q_{u,\omega}(t) = [F_{h1}(u)\ F_{h2}(u)\ F_{h3}(u)\ F_{h4}(u)] \times \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{00}^{\omega} & P_{01}^{\omega} \\ P_{10} & P_{11} & P_{10}^{\omega} & P_{11}^{\omega} \\ P_{00}^{u} & P_{01}^{u} & P_{00}^{u\omega} & P_{01}^{u\omega} \\ P_{10}^{\omega} & P_{11}^{u} & P_{10}^{u\omega} & P_{11}^{u\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{h1}(\omega) \\ F_{h2}(\omega) \\ F_{h3}(\omega) \\ F_{h4}(\omega) \end{bmatrix},$$

$$P_{00}^{u} = \frac{\partial P(u,w)}{\partial u}$$

边界曲线在4个角点处的u向和w向两组切线矢量

角点处的混合偏导，也称角点扭矢量

孔斯（Coons）曲面

$$[C]=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{00}^{w} & P_{01}^{w} \\ P_{10} & P_{11} & P_{10}^{w} & P_{11}^{w} \\ P_{00}^{u} & P_{01}^{u} & P_{00}^{uw} & P_{01}^{uw} \\ P_{10}^{u} & P_{11}^{u} & P_{10}^{uw} & P_{11}^{uw} \end{bmatrix}$$

- 前三组信息
  - 完全决定了四条边界曲线的位置和形状
- 第四组角点扭矢量
  - 与边界形状没有关系
  - 但却影响边界曲线上中间各点的切线向量，从而影响整个曲面片形状

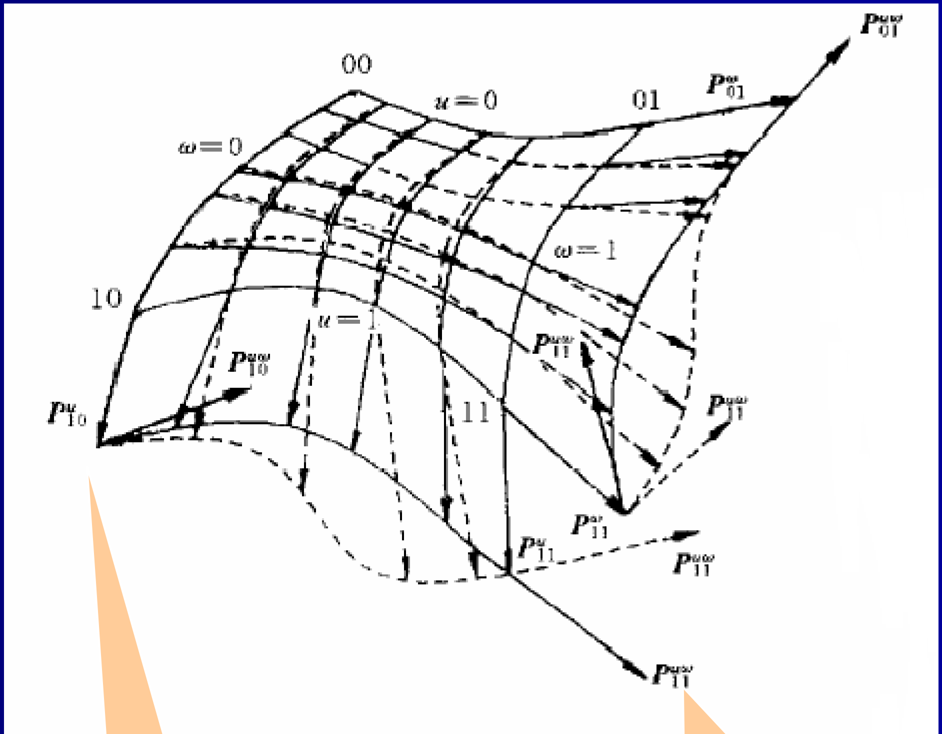


图 2 孔斯曲面的形成

角点切矢

角点扭矢

孔斯（Coons）曲面

$$[C]=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{00}^{w} & P_{01}^{w} \\ P_{10} & P_{11} & P_{10}^{w} & P_{11}^{w} \\ P_{00}^{u} & P_{01}^{u} & P_{00}^{uw} & P_{01}^{uw} \\ P_{10}^{u} & P_{11}^{u} & P_{10}^{uw} & P_{11}^{uw} \end{bmatrix}$$

- 缺点：
  - 使用起来不太方便
    - 必须给定矩阵[C]中的16个向量，才能唯一确定曲面片的位置和形状，而要给定扭矢量是相当困难的
  - 两个曲面片之间的光滑连接需要两个角点信息矩阵中相应偏导和混合偏导满足一定的条件

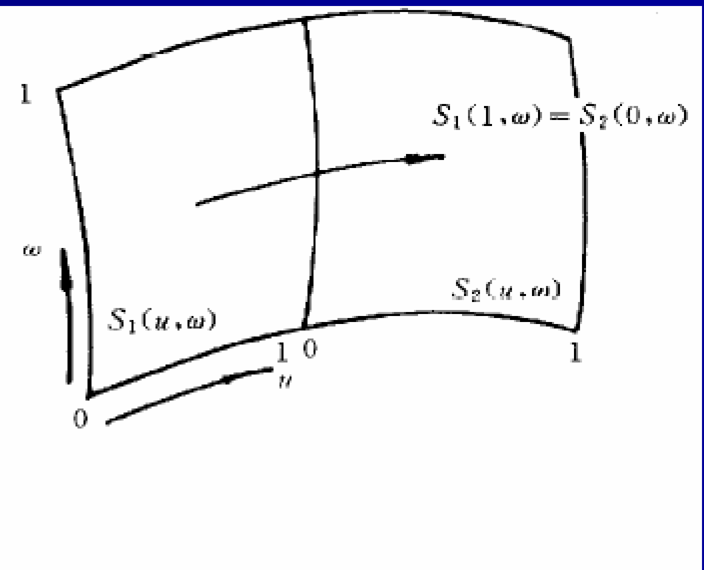


图 3　两张孔斯曲面的连接

孔斯（Coons）曲面

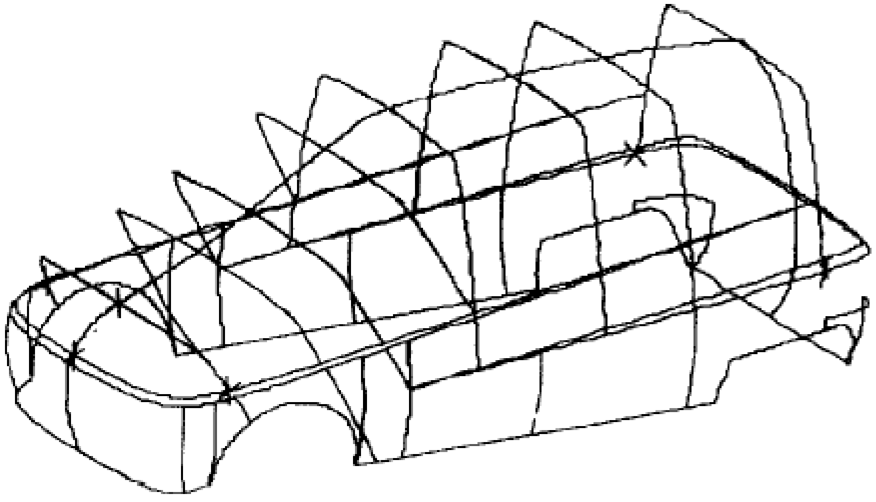


图 4　轿车车身三维框架

- Coons曲面的形状控制困难，几何造型系统中已较少使用

三次B样条曲线拟合得到的车身框架模型

孔斯曲面生成和拼接得到的车身模型

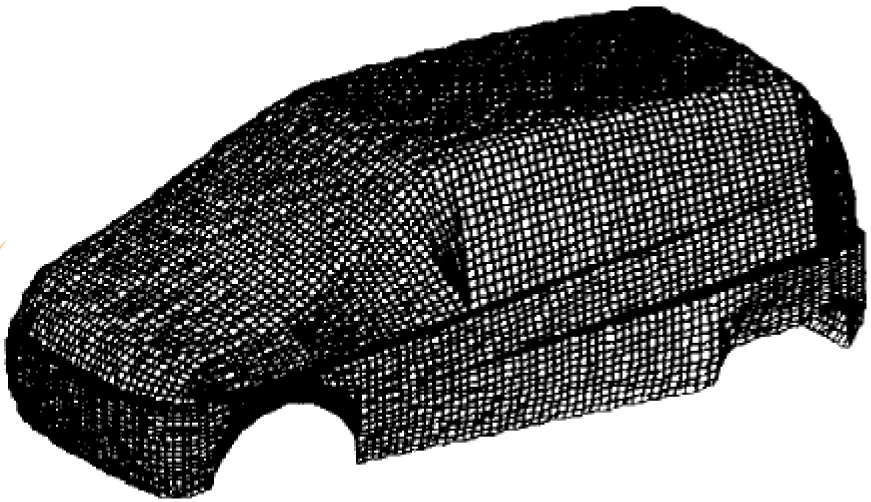
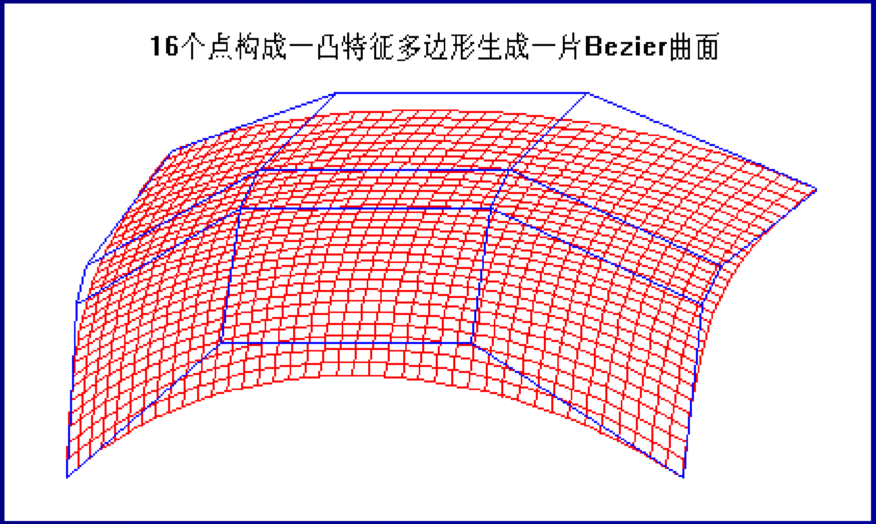


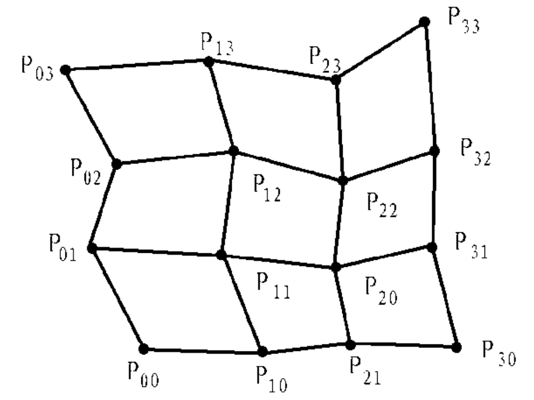
图 5　最后的轿车车身外观

孔斯（Coons）曲面

- Coons曲面特点
  - “插值边界线”
- Bezier曲面特点
  - 曲面逼近控制网格
- Coons和Bezier并列被称为现代计算机辅助几何设计技术的奠基人



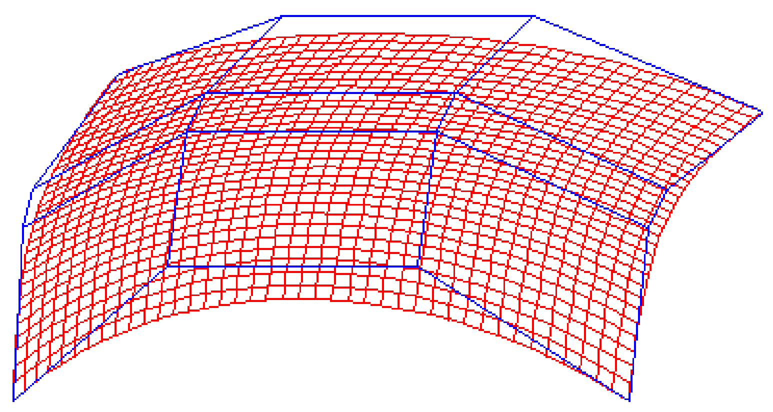
Bezier曲面



- **Bezier曲面的定义**
  - Bezier曲线从一个参数t扩展到两个参数(u,v)

$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w) \qquad (u,w)\in[0,1]\times[0,1]$$

  - Bernstein基函数 $B_{i,m}(u)=C_m^i u^i(1-u)^{m-i}, B_{j,n}(w)=C_n^j w^j(1-w)^{n-j}$
  - 控制顶点 $P_{i,j}$
  - 控制网格 $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{m,n}$
    - 特征网格
    - 控制顶点沿v向和u向分别构成m+1和n+1个控制多边形共同组成曲面的控制网格



16个点构成一凸特征多边形生成一片Bezier曲面

Bezier曲面

$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}B_{i,m}(u)B_{j,n}(w) \qquad (u,w)\in[0,1]\times[0,1]$$

- 矩阵表示

$$\boldsymbol{P}(u,w)=\left[B_{0,n}(u),B_{1,n}(u),\cdots,B_{m,n}(u)\right]\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{0,m}(w) \\ B_{1,m}(w) \\ \cdots \\ B_{n,m}(w) \end{bmatrix}$$

Bezier曲面

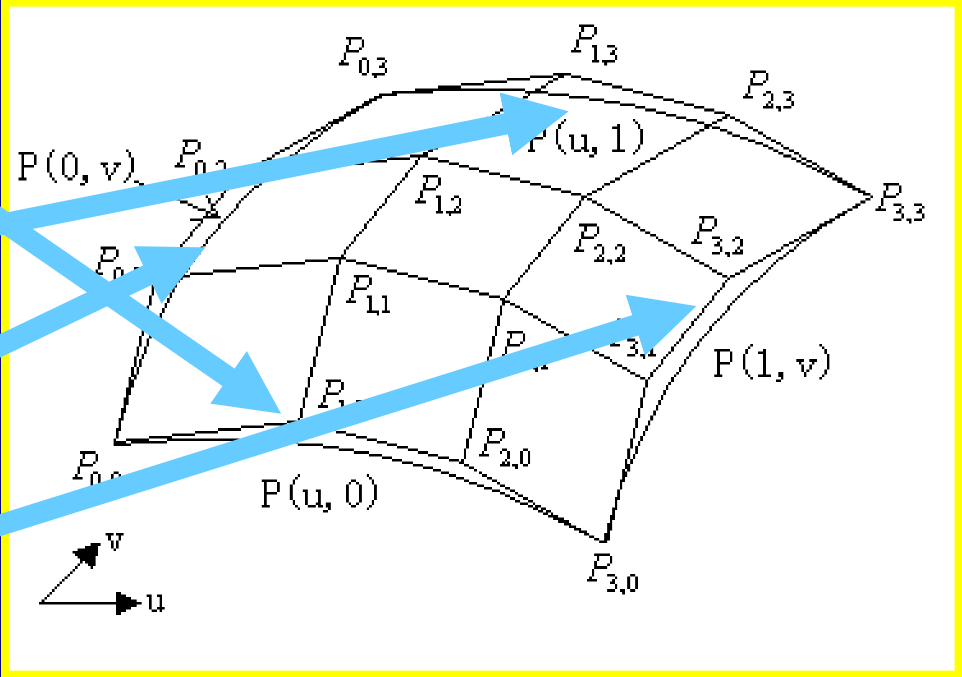
- **Bezier曲面的性质**
  - 边界线

$$P(u,0)=\sum_{i=0}^{m}P_{i,0}B_{i,m}\qquad u\in[0,1]$$

$$P(u,1)=\sum_{i=0}^{m}P_{i,n}B_{i,m}\qquad u\in[0,1]$$

$$P(0,w)=\sum_{j=0}^{n}P_{0,j}B_{j,n}\qquad w\in[0,1]$$

$$P(1,w)=\sum_{j=0}^{n}P_{m,j}B_{j,n}\qquad w\in[0,1]$$



Bezier曲面

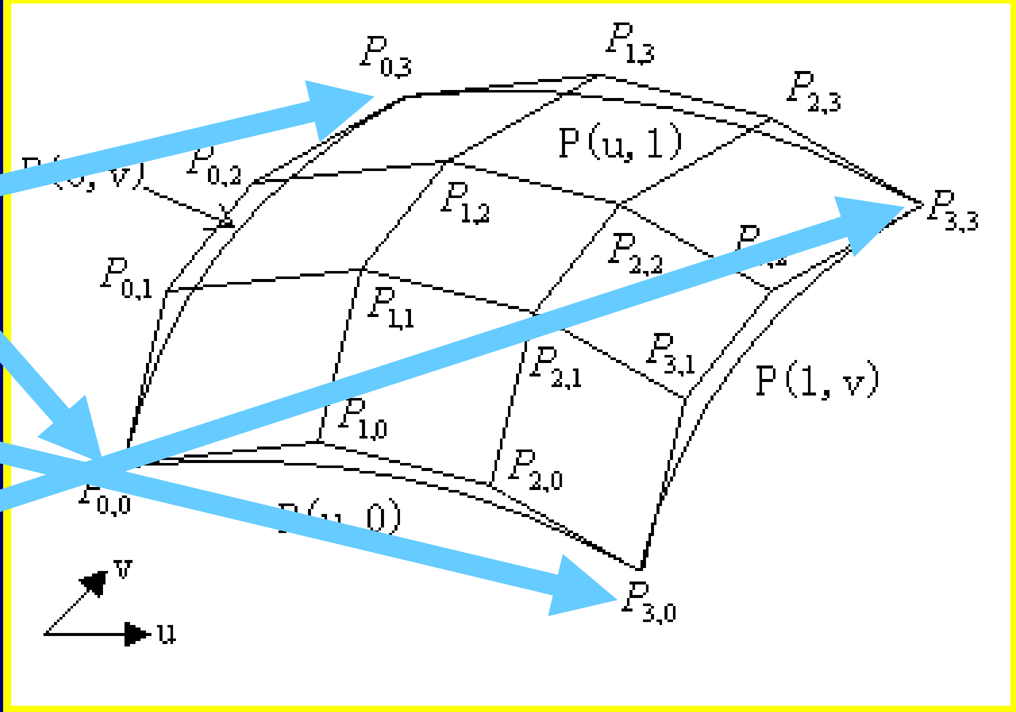
–角点位置

$P(0,0) = P_{0,0}$

$P(0,1) = P_{0,n}$

$P(1,0) = P_{m,0}$

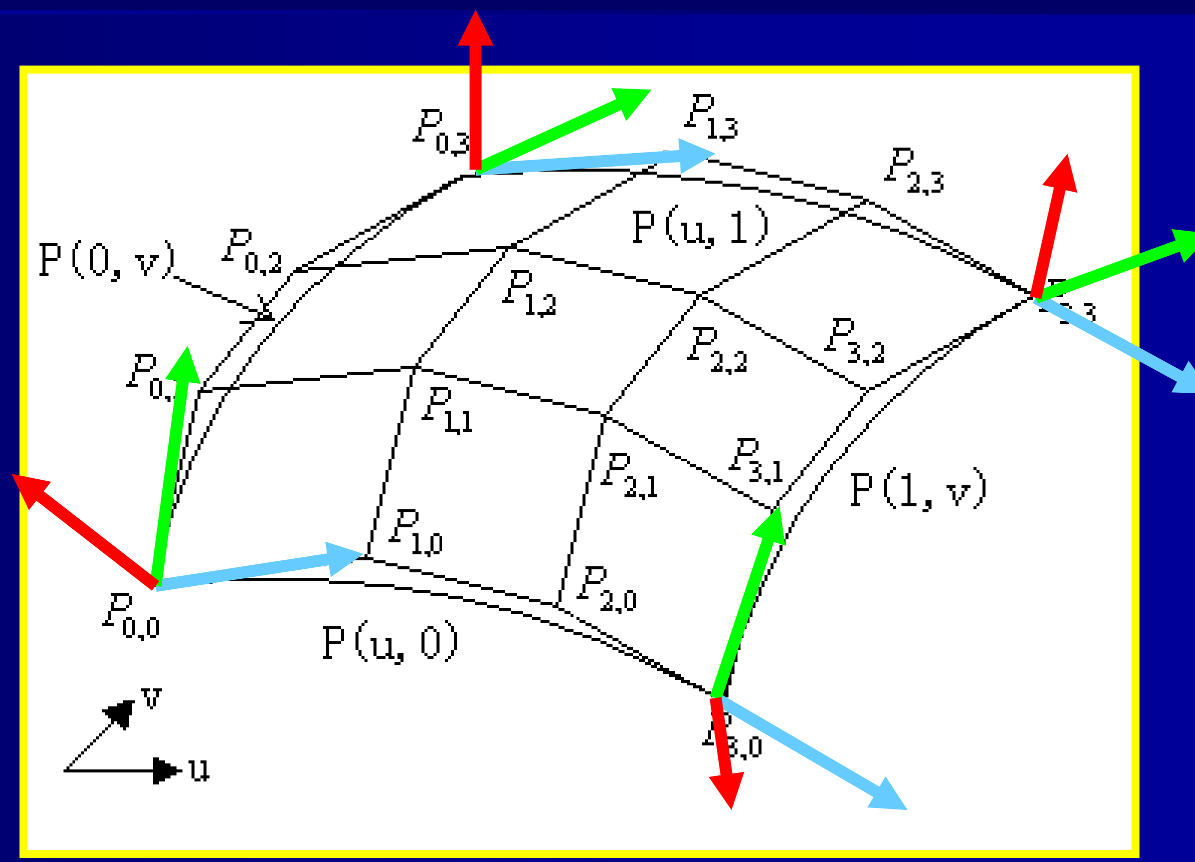
$P(1,1) = P_{m,n}$



Bezier曲面

– 角点切平面

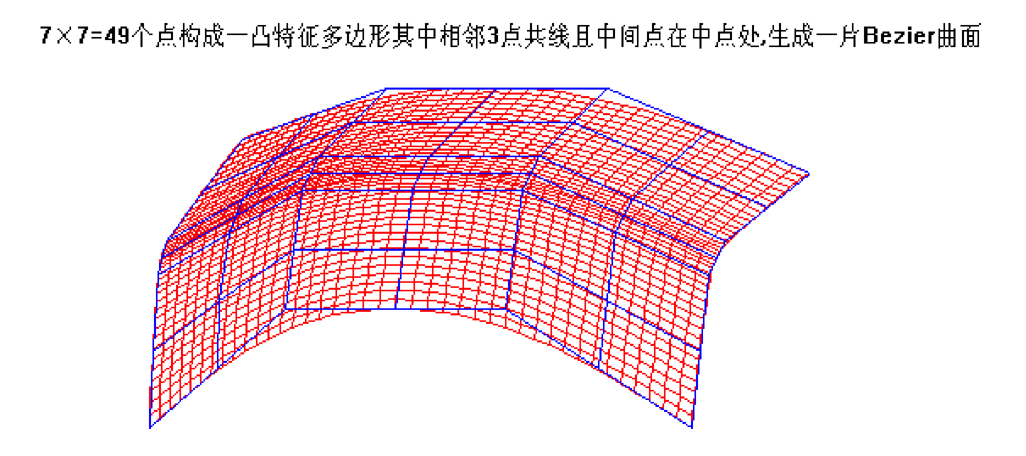
– 角点法矢量

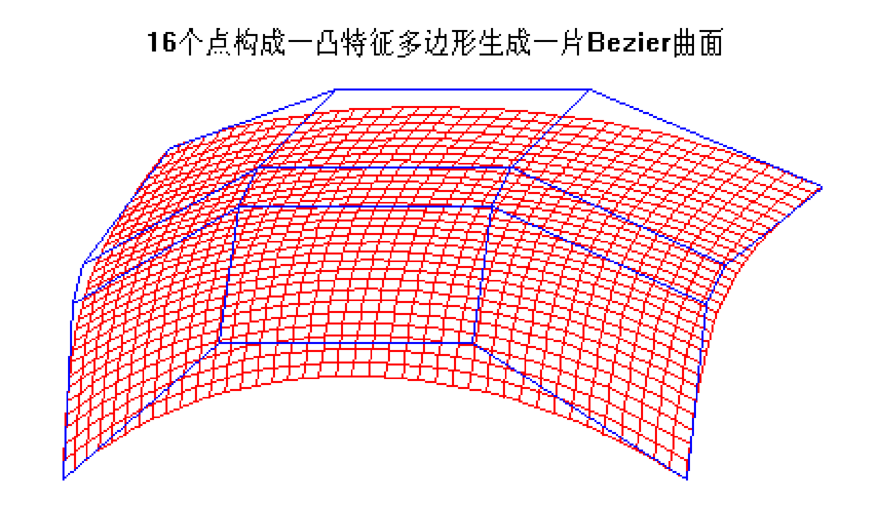


Bezier曲面

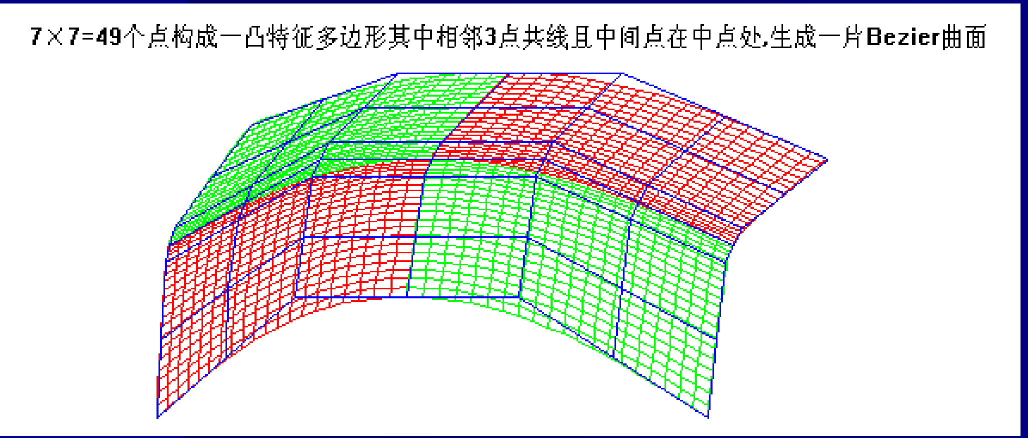
- 凸包性
  - Bezier曲面包含在其控制顶点的凸包之内
- 平面再生性
- 仿射不变性
- 拟局部性

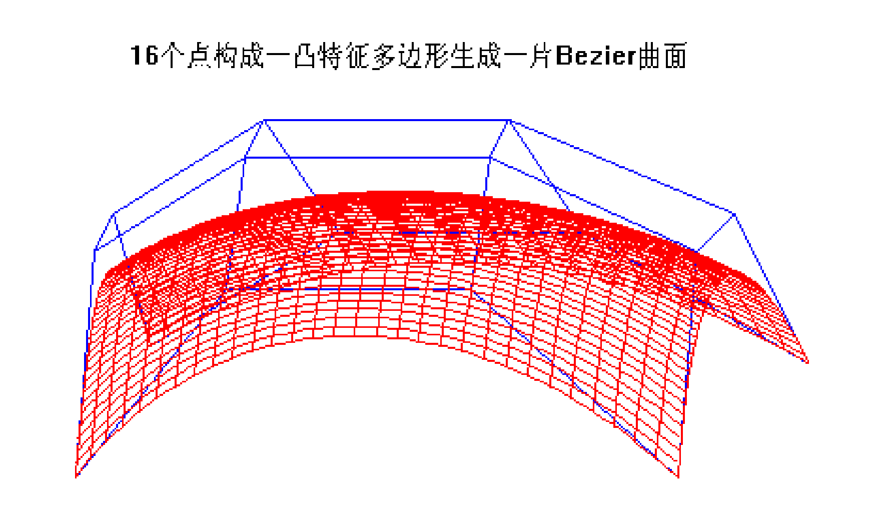
Bezier曲面





四个分曲面构成整个曲面





Bezier曲面

- 双线性Bezier曲面

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}B_{i,1}(u)B_{j,1}(w)p_{ij} \qquad u,w\in[0,1] \qquad （当m=n=1时）$$

- 双二次Bezier曲面

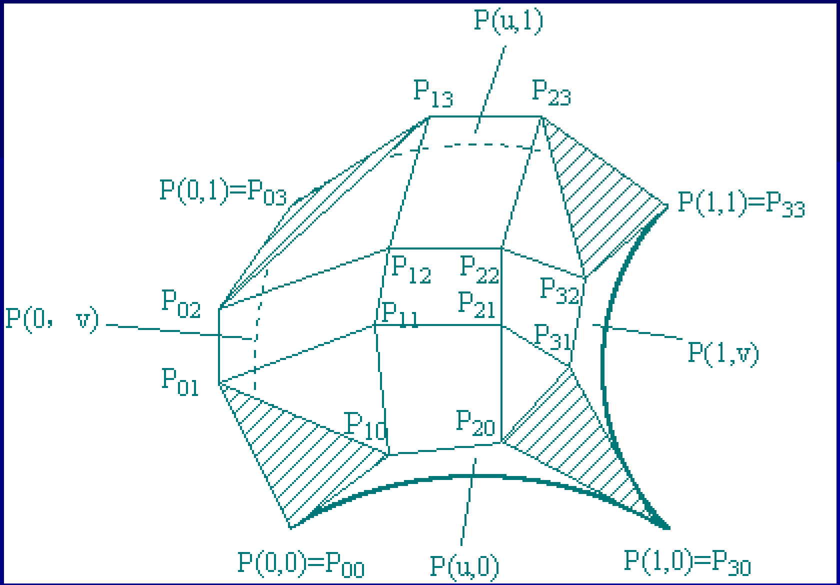
$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}B_{i,2}(u)B_{j,2}(w)p_{ij} \qquad u,w\in[0,1] \qquad （当m=n=2时）$$

- 双三次Bezier曲面

$$S(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}B_{i,3}(u)B_{j,3}(w)p_{ij} \qquad u,w\in[0,1] \qquad （当m=n=3时）$$

Bezier曲面

- **双三次Bezier曲面**
  - 给定Pij (i=0,1,2,3; j=0,1,2,3)16个控制点
  - 双三次Bezier曲面片表示为



$$P(u,w)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}P_{ij}B_{i,3}(u)B_{j,3}(w)$$

$$=\begin{bmatrix}B_{0,3}(u) & B_{1,3}(u) & B_{2,3}(u) & B_{3,3}(u)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03}\\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}B_{0,3}(w)\\ B_{1,3}(w)\\ B_{2,3}(w)\\ B_{3,3}(w)\end{bmatrix}$$

Bezier曲面

- **双三次Bezier曲面**

$P(u,w) = [B(u)]\,[P]\,[B(w)]^T$

$= [U]\,[M_{be}]\,[P]\,[M_{be}]^T\,[W]^T$

$[U] = [u^3\ u^2\ u\ 1]$ 参数u的矩阵向量

$[W] = [w^3\ w^2\ w\ 1]$参数w的矩阵向量

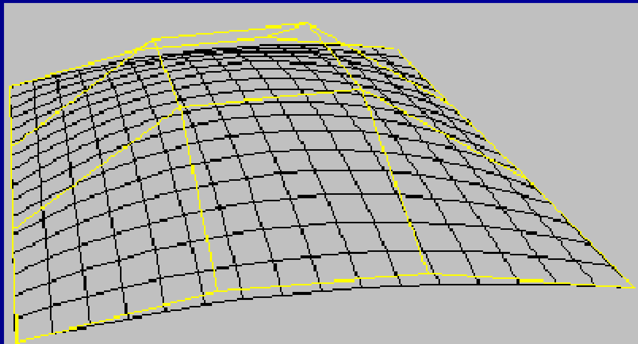


图6.3.19 双三次Beizer曲面

$$M_{be} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

三次Bezier系数矩阵

Bezier曲面

- **双三次Bezier曲面**

展成代数形式

$$P(u,w)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03}\\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}w^3\\ w^2\\ w\\ 1\end{bmatrix}$$

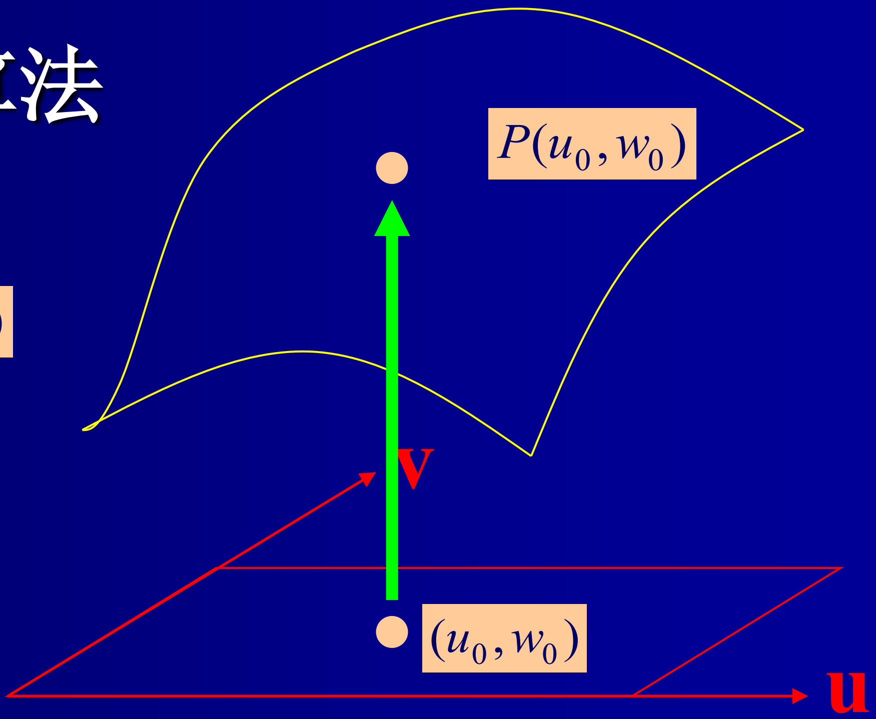
$$\begin{aligned}
&=((-u^3+3u^2-3u+1)P_{00}+(3u^3-6u^2+3u)P_{10}+(-3u^3+3u^2)P_{20}+u^3P_{30})(-w^3+3w^2-3w+1)\\
&+((-u^3+3u^2-3u+1)P_{01}+(3u^3-6u^2+3u)P_{11}+(-3u^3+3u^2)P_{21}+u^3P_{31})(3w^3-6w^2+3w)\\
&+((-u^3+3u^2-3u+1)P_{02}+(3u^3-6u^2+3u)P_{12}+(-3u^3+3u^2)P_{22}+u^3P_{32})(-3w^3+3w^2)\\
&+((-u^3+3u^2-3u+1)P_{03}+(3u^3-6u^2+3u)P_{13}+(-3u^3+3u^2)P_{23}+u^3P_{33})(w^3)
\end{aligned}$$

Bezier曲面

- 离散生成算法
  - De Casteljau算法

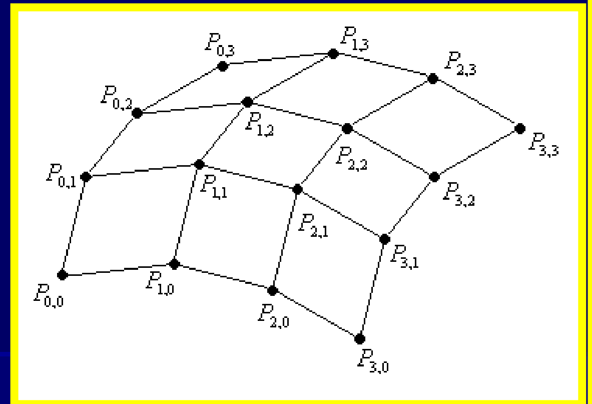
    给定 (u_0, w_0)，

    计算型值点 $P(u_0, w_0)$



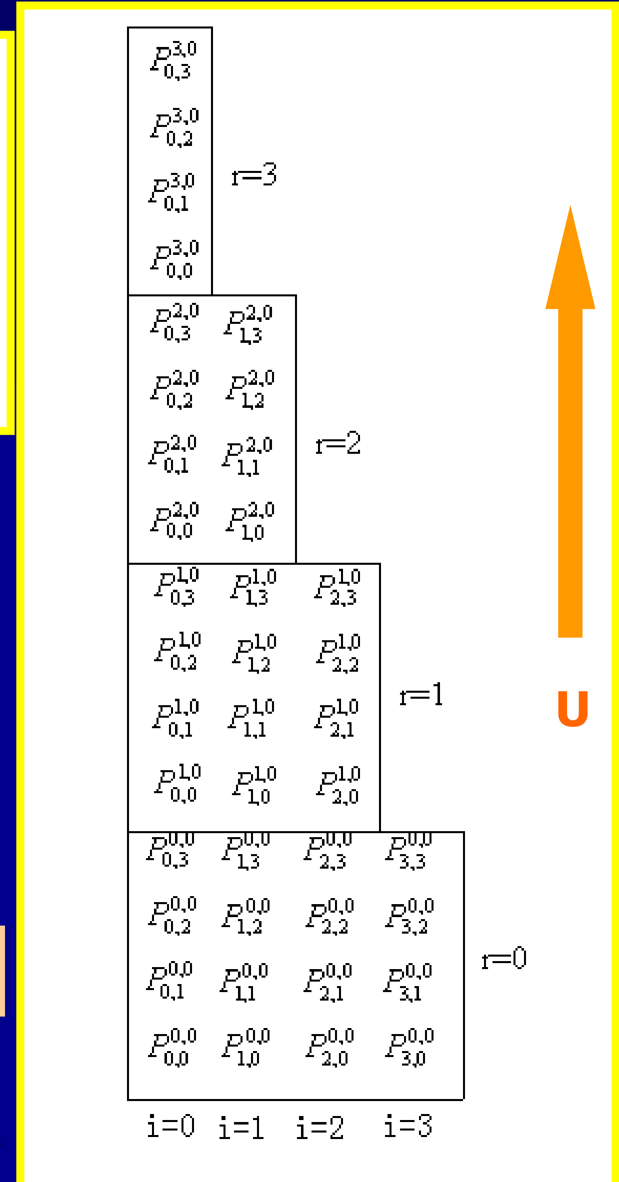
Bezier曲面

–递推计算过程



$$
P_{i,j}^{r,s}=\begin{cases} P_{i,j} & r=s=0 \\ (1-u)P_{i,j}^{r-1,0}+uP_{i+1,j}^{r-1,0} & r=1,\cdots m, s=0 \\ (1-w)P_{0,j}^{r,s-1}+wP_{0,j+1}^{r,s-1} & r=m, s=1,\cdots n \end{cases}
$$

$$
i=0,1,\ldots,m,\ j=0,1,\ldots,n
$$



- 先以u参数值对控制网格沿u向的n+1个多边形执行曲线的De Casteljau算法
- m级递推后，得到沿w向由n+1个顶点 $P_{0,j}^{m,0}$ 构成的中间多边形
- 再以w参数值对它执行曲线的De Casteljau算法
- n级递推后，得到一个点 $P_{0,0}^{m,n}$ ，即所求取面上的点p(u,w)

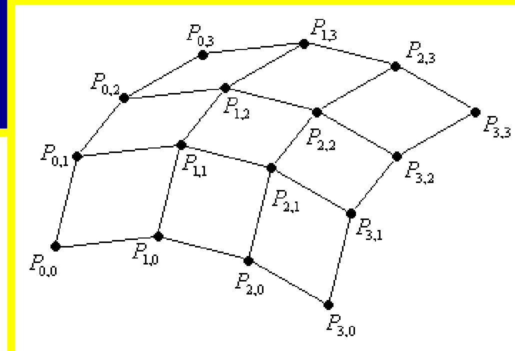
Bezier曲面

–递推计算过程

- 先以w参数值对控制网格沿v向的m+1个多边形执行曲线的De Casteljau算法
- n级递推后，得到沿u向由m+1个顶点 $P_{i,0}^{0,n}$ 构成的中间多边形
- 以u参数值对它执行曲线的De Casteljau算法
- m级递推后，得到一个点 $P_{0,0}^{m,n}$ ，即所求取面上的点**p(u,w)**

$$
P_{i,j}^{r,s}=\begin{cases} P_{i,j} & r=s=0 \\ (1-w)P_{i,j}^{0,r-1}+wP_{i,j+1}^{0,r-1} & r=0,s=1,\cdots n \\ (1-u)P_{i,0}^{r-1,s}+uP_{i+1,0}^{r-1,s} & r=1,\cdots m,s=n \end{cases}
$$

$$
i=0,1,\ldots,m,\ j=0,1,\ldots,n
$$



w

s=0

j=3	$P_{0,3}^{0,0}$	$P_{1,3}^{0,0}$	$P_{2,3}^{0,0}$	$P_{3,3}^{0,0}$
j=2	$P_{0,2}^{0,0}$	$P_{1,2}^{0,0}$	$P_{2,2}^{0,0}$	$P_{3,2}^{0,0}$
j=1	$P_{0,1}^{0,0}$	$P_{1,1}^{0,0}$	$P_{2,1}^{0,0}$	$P_{3,1}^{0,0}$
j=0	$P_{0,0}^{0,0}$	$P_{1,0}^{0,0}$	$P_{2,0}^{0,0}$	$P_{3,0}^{0,0}$

s=1

$P_{0,2}^{0,1}$	$P_{1,2}^{0,1}$	$P_{2,2}^{0,1}$	$P_{3,2}^{0,1}$
$P_{0,1}^{0,1}$	$P_{1,1}^{0,1}$	$P_{2,1}^{0,1}$	$P_{3,1}^{0,1}$
$P_{0,0}^{0,1}$	$P_{1,0}^{0,1}$	$P_{2,0}^{0,1}$	$P_{3,0}^{0,1}$

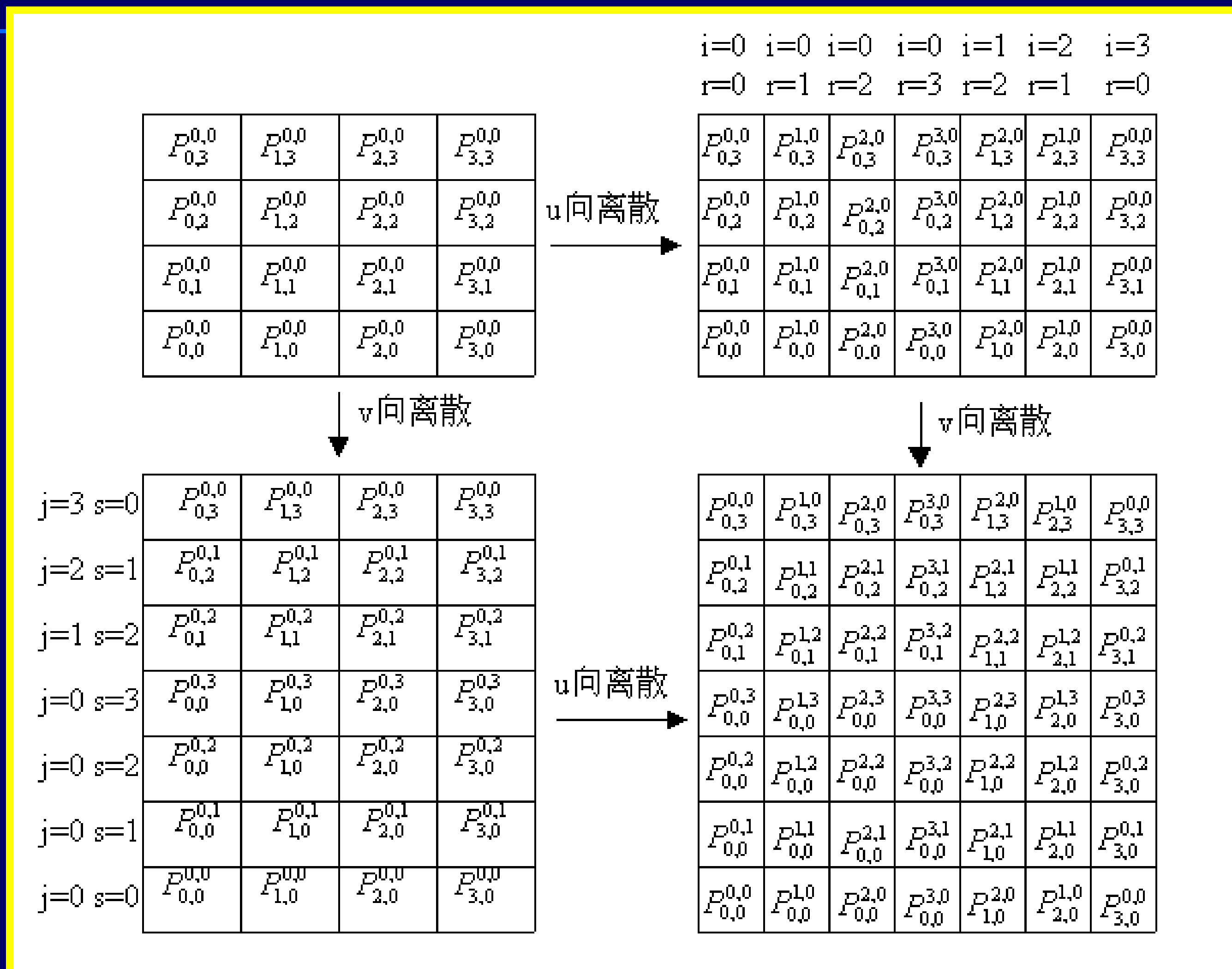
s=2

$P_{0,1}^{0,2}$	$P_{1,1}^{0,2}$	$P_{2,1}^{0,2}$	$P_{3,1}^{0,2}$
$P_{0,0}^{0,2}$	$P_{1,0}^{0,2}$	$P_{2,0}^{0,2}$	$P_{3,0}^{0,2}$

s=3

$P_{0,0}^{0,3}$	$P_{1,0}^{0,3}$	$P_{2,0}^{0,3}$	$P_{3,0}^{0,3}$

Bezier曲面



i=0 i=0 i=0 i=0 i=1 i=2 i=3
r=0 r=1 r=2 r=3 r=2 r=1 r=0
u向离散
v向离散
v向离散
j=3 s=0
j=2 s=1
j=1 s=2
j=0 s=3
j=0 s=2
j=0 s=1
j=0 s=0
u向离散

Bezier曲面