第二章　行列式

§5 行列式计算

一、矩阵于行列式

二、矩阵的初等变换

三、阶梯形矩阵

在§3我们看到，一个上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它主对角线上元素的乘积

$$a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

这个计算很简单，下面我们想办法把任意的n阶行列式化为上三角行列式来计算.

为了便于叙述并考虑到以后的应用，我们引进矩阵及矩阵的初等行变换的概念.

定义5. 由sn个数排成的s行n列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

称为一个$s \times n$矩阵.

数$a_{ij}, i=1,2,\ldots,s, j=1,2,\ldots,n$, 称为矩阵(1)的$(i,j)$元素, i称为元素a_{ij}的行足标, j称为列足标. 当一个矩阵的元素全是某一数域F中的数时，它就称为这一数域F上的矩阵. 下面的两个例子，一个是有理数域上的矩阵，另一则是复数域上的矩阵

例如，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$是一个$2\times 4$矩阵，而

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i \\ 0 & i & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是一个3×3复矩阵.

$n\times n$矩阵也称为方阵.

一个n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定义一个n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为矩阵A的行列式，记作$|A|$.

下面定义矩阵的初等行变换.

定义6 .对数域F上矩阵的行所实施的下面的三种变换称为矩阵的**初等行变换**.

(1) 用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的某一行中的所有元素 (如用数k乘矩阵的第 i 行, 记为 kr_i);

(2) 把矩阵某一行上的所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去(如把矩阵的第j行的k倍加到第i行上, 记为 $r_i + kr_j$);

(3) 交换矩阵的两行(交换 i, j 两行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$).

一般来说，一个矩阵经过初等行变换后，就变成了另一个矩阵.

如把矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

第一行的-2倍加到第二行，就得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

当矩阵$\boldsymbol{A}$经过初等行变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$时，记为$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$.

我们称形式如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的矩阵为阶梯型矩阵. 它们的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为零; 如该行全为零, 则它的下面的行全为零.

可以证明, 任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵.

事实上，设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

我们看第一列的元素$a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}$，只要其中有一个不为零，用初等行变换 3)，总能使第一列的第一个元素不为零，然后从第二列开始，每一行都加上第一行的一个适当的倍数，于是第一列除去第一个元素外全是零了．这就是说经过一系列初等行变换后，

$$A \to J_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \end{pmatrix}$$

对于中右下角的一块

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{s2} & \cdots & a'_{sn} \end{pmatrix}$$

再重复以上的作法，如此做下去直到变成阶梯形矩阵为止．如果原来的矩阵A中第一列元素全为零，那么就依次考虑它的第二列的元素，等等．例如，设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

这样就把A变成了一个阶梯形矩阵.

现在来讨论行列式的计算问题. 一个n阶行列式可看成是由一个n 阶方阵A就定的, 对于矩阵可以做初等行变换, 而行列式的性质 2、6、7 正是说明了方阵的初等行变换对于行列式的影响. 每个方阵A总可以经过一系列的初等行变换变成阶梯形方阵J. 由行列式的性质 2、6、7, 对方阵每作一次初等行变换, 相应地, 行列式或者不变, 或者差一非零倍数. 也就是

$$|A| = k|J|, \qquad k \neq 0.$$

显然, 阶梯形方阵的行列式都是上三角形的, 因此, $|J|$是容易计算的.

例. 计算

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix} = -(-13)\cdot 16\cdot \frac{3}{2} = 312.$$

这里，第一步是互换第 1,2 行，以下都是把一行的倍数加到另一行上.

不难看出，用这个方法计算一个n阶的数字行列式只需做$\frac{n^2+2n-3}{3}$乘法与除法．特别当n比较大时，这个方法的优越性就更加明显．同时还应看到，这个方法完全是机械的，因而可以用计算机按此程序来进行行列式计算.

最后我们指出，对于矩阵我们同样可以定义初等列变换，即

1) 以数域F中一个非零数乘矩阵的某一列；

2) 把矩阵的某一列的c倍加到另一列，这里c是F中任意一个数;

3) 互换矩阵中两列的位置.

为了计算行列式，我们也可以对矩阵进行初等列变换，有时，同时用初等行变换与列变换，行列式计算可以更简单些.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换.

§ 6. 行列式依一行(列)展开

一. 余子式, 代数余子式

二. 行列式依一行(列)展开

三. 在行列式计算上的应用

在 § 4 我们看到，对于n阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

现在来研究这些$A_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$，究竟是什么，并用以将$n$阶行列式的计算降为较低阶的行列式计算.

我们知道 3 阶行列式可以通过 2 阶行列式表示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

与此相仿，A_{ij}也是一些带有正、负号的$n-1$阶行列式. 为了说明这一点，引入

定义 7. 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素a_{ij}所在的第i行与第j列，余下的$(n-1)^2$个元素按原来的排列构成一个$n-1$的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

称为元素a_{ij}的**余子式**，记为M_{ij}.

由此定义, (2)可改写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

下面来证明

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

为此，我们先由行列式的定义证明n阶与$n-1$阶行列式的下面这个关系，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

事实上，(5)式左端行列式的展开式

$$\sum_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_{n-1} n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nj_n}$$

中只有$j_n = n$的项才可能不为零，而$a_{nn} = 1$，因此左端为

$\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}$.

显然$j_1j_2\dots j_{n-1}$是$1, 2, \dots, n-1$的排列，且

$$\tau(j_1j_2\dots j_{n-1}n) = \tau(j_1j_2\dots j_{n-1})$$

这就证明了(5).

为了证明(4)，在(1)中令

$a_{i1} = \cdots a_{i,j-1} = a_{i,j+1} = \cdots = a_{in} = 0, a_{ij} = 1$，即得

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{n-i+n-j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2n+(i+j)}M_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

这里，第一步是依次把第i行与它下边的一行对换，直到把它换到第n行为止，这样一共换了$n-i$次，因之行列式差一个符号$(-1)^{n-i}$；第二步是同样把第j列换到第n列；再利用(5)与明显的关系式$(-1)^{2n+(i+j)}=(-1)^{i+j}$即得(4).

定义 8. 上面提到的A_{ij}称为元素a_{ij}的**代数余子式.**

这样，公式(1)就是说，行列式等于某一行的元素分别于它的代数余子式的乘积之和，在(1)中，如果令第i行的元素等于另外一行，譬如说，第 k 行的元素，也就是

$$a_{ij}=a_{kj}, j=1,2,\dots,n,\ i\neq k.$$

于是

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

这是因为右端的行列式有两个相同的行. 这也指出, 在行列式中, 一行的元素与另一行对应的元素的代数余子式的乘积之和为零.

基于行列式中行与列的对称性, 在以上的公式和讨论中把行换成列也一样. 综上所述, 即得

定理 3. 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则下列公式成立:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & 当k=i, \\ 0, & 当k\neq i; \end{cases} \quad (6)$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & 当l=j, \\ 0, & 当l\neq j. \end{cases} \quad (7)$$

用连加号简写为

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{si}=\begin{cases} D, & 当k=i, \\ 0, & 当k\neq i; \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=\begin{cases} D, & 当l=j, \\ 0, & 当l\neq j. \end{cases}$$

当$n=3$时，公式(6)有明显的几何意义. 如果把行列式的行看作向量在直角坐标系下的坐标，即设

$\alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$，$\alpha_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$，

那么

$$\alpha_2\times\alpha_3=(A_{11},A_{12},A_{13}).$$

于是

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\alpha_1\cdot(\alpha_2\times\alpha_3),$$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=\alpha_2\cdot(\alpha_2\times\alpha_3)=0,$$

$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=\alpha_3\cdot(\alpha_2\times\alpha_3)=0.$$

在计算数字行列式时，直接应用(6)或(7)不一定能简化计算，因为把一个n阶行列式的计算换成n个$n-1$阶行列式的计算并不减少计算量，只是在行列式中某一行或某一列含有较多零时，应用公式(6)和(7)才有意义. 但这两个公式在理论上是重要的.

例1. 行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-10)(-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 20 \cdot (-52) = -1080$$

例2. 范德蒙德(Vandermonde)行列式定义为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

试计算n阶范德蒙德行列式 $detV_n$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \overline{\overline{\text{从最后一行起，每行减去上一行的}x_n\text{倍}}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \cdots & x_{n-1} - x_n \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \cdots & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \cdots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{n+1}(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)\cdots(x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1}$$

这样就得到了一个递推公式，反复使用该递推公式，可得

$$\begin{aligned} V_n &= (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})V_{n-1} \\ &= (x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1)\cdots(x_{n-1} - x_{n-2})V_{n-2} \\ &= \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j). \end{aligned}$$

例3. 证明: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

$$左边 \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b-a & 2b-2a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-a) \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^3 = 右边$$

例 4. 对 $2n$ 阶矩阵

$$A_{2n}=\begin{bmatrix} a & & & O & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a & & b & & \\ O & & & & & & O \\ & & c & & d & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c & & & O & & & d \end{bmatrix}$$

试计算 $|A_{2n}| = \det A_{2n}$.

提示：建立递推关系再行求解.

解：可以看出

$$A_{2n}=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & A_{2(n-1)} & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{bmatrix}$$

对 A_{2n}，按第 1 行展开，有

$$|A_{2n}|=a\begin{vmatrix} A_{2(n-1)} & & & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}+b\cdot(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} & A_{2(n-1)} & & \\ c & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

对两个 $(2n-1)$ 阶行列式各按最后一行展开，得

$$|A_{2n}| = ad|A_{2(n-1)}| - bc\cdot(-1)^{(2n-1)+1}|A_{2(n-1)}|$$
$$= (ad-bc)|A_{2(n-1)}|$$

这是一个递推公式，顺次用 $n, (n-1), \cdots, 2$ 代入，

可得 $(n-1)$ 个等式：

$$|A_{2n}| = (ad-bc)|A_{2(n-1)}|$$
$$(ad-bc)|A_{2(n-1)}| = (ad-bc)^2|A_{2(n-2)}|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(ad-bc)^{n-2}\,|A_4| = (ad-bc)^{n-1}\,|A_2|$$

$$= (ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)^{n}$$

$$|A_{2n}| = (ad-bc)^{n}$$

例 5 计算下面的行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal{c_1 - \frac{1}{2}c_2 - \cdots - \frac{1}{n}c_n} \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

例6. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

我们对k用数学归纳法.

当$k=1$时, (9)式左端为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix},$$

按第一行展开，即得所要结论.

假设(9)对$k=m-1$，即左端行列式的左上角是$m-1$阶时已经成立，现在来看$k=m$的情形，按第一行展开，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r2} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,i-1} & c_{r,i+1} & \cdots & c_{rm} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,m-1} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{r,m-1} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= [a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+i}a_{1i}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{1+m}a_{1m}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} \end{vmatrix}] \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

这里第二个括号是用了归纳法假定，最后一步是根据按一行展开的公式.

根据归纳法原理, (9)式普遍成立.