统计学习题解答参考

2. 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 为来自总体 X 的样本，期望 $\mathbb{E}X = \mu$，$\operatorname{Var} X = \sigma^2$ 都有限，记 S_n^2 为样本方差，$\bar{X}_n$ 为样本均值，证明

(a). S_n^2 依分布收敛到 σ^2；

(b).

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n}$$

依分布收敛于标准正态分布.

解 (a) 只需要证明 S_n^2 依概率收敛到 σ^2. 注意到

$$\mathbb{E} S_n^2 = \sigma^2, \quad Var\, S_n^2 = \frac{2}{n-1}\sigma^4.$$

由 Chebyshev 不等式可得

$$\mathbb{P}(|S_n^2 - \sigma^2| > \varepsilon)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var\, S_n^2$$

$$= \frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}.$$

由此可见，当 $n \to \infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n^2 - \sigma^2| > \varepsilon) = 0.$$

即 S_n^2 依概率收敛到 0.

另外的方法：设

$$Y_n = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2.$$

其中 $Z_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$, $i=1,2,\cdots,n$. 则 $Y_n \sim \chi^2(n)$, 且由 $\mathbb{E} Z_i^2 = 1$, $Var\, Z_i^2 = 3$, 从而可由大数定律知

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 1.$$

由于

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

可知

$$\frac{S_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \Big/ n-1 \sim \frac{Y_{n-1}}{n-1}.$$

从而可知

$$\frac{S_n^2}{\sigma^2} \xrightarrow{P} 1.$$

由此可知

$$S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

b) 由 a) 中结论可知, $\frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{P} 1$, 从而由中心极限定理以及 Slutsky 定理可得

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{D} N(0,1). \quad \square$$

这里用到 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$ 及下面的结论.

定理1 设 $X_n \xrightarrow{P} X$，h为连续函数，则

$$h(X_n) \xrightarrow{P} h(X).$$

定理2 (Slutsky)

设 $X_n \xrightarrow{D} X$，$Y_n \xrightarrow{P} c$，c为常数，则

1) $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$,

2) $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$,

3) $X_n / Y_n \xrightarrow{D} X / c$.

3. 对 $n=4$ 的情形写出 W_+ 的精确分布.

	正负秩排列	只考虑正秩	W_+
4个正秩	1 2 3 4	1 2 3 4	10
3个正秩	-1 2 3 4	2 3 4	9
	1 -2 3 4	1 3 4	8
	1 2 -3 4	1 2 4	7
	1 2 3 -4	1 2 3	6
2个正秩	⋮	1 2	3
	⋮	1 3	4
		1 4	5
		2 3	5
		2 4	6
		3 4	7
1个正秩	1 -2 -3 -4	1	1
		2	2
		3	3
		4	4
0个正秩	-1 -2 -3 -4		0

W_+的分布列

W_+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	1/16	1/16	1/16	2/16	2/16	2/16	2/16	2/16	1/16	1/16	1/16