第五章 一阶逻辑等值演算与推理

① 一阶逻辑等值式

定义 1：设 A 和 B 是一阶逻辑中任意两个公式，若 A⇒B 是永真式，则称 A 和 B 是等值的，记为 A≡B。

下面给出一阶逻辑中的一些基本而重要的等值式：

(1) 消去量词等值式

设个体域为 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$， 则有

$$\forall x\, A(x)\equiv A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$$
$$\exists x\, A(x)\equiv A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$$

(2) 量词否定等值式

$$\sim(\forall x\, A(x))\equiv\exists x\ \sim A(x)$$
$$\sim(\exists x\, A(x))\equiv\forall x\ \sim A(x)$$

(3) 量词作用域的收缩与扩张等值式

$$(a)\ \forall x\ (A(x)\vee B)\equiv\forall x\, A(x)\vee B$$
$$\forall x\ (A(x)\wedge B)\equiv\forall x\, A(x)\wedge B$$
$$\forall x\ (A(x)\Rightarrow B)\equiv\exists x\, A(x)\Rightarrow B$$
$$\forall x\ (B\Rightarrow A(x))\equiv B\Rightarrow\forall x\, A(x)$$

$$(b)\ \exists x\ (A(x)\vee B)\equiv\exists x\, A(x)\vee B$$
$$\exists x\ (A(x)\wedge B)\equiv\exists x\, A(x)\wedge B$$
$$\exists x\ (A(x)\Rightarrow B)\equiv\forall x\, A(x)\Rightarrow B$$
$$\exists x\ (B\Rightarrow A(x))\equiv B\Rightarrow\exists x\, A(x)$$

(4) 量词分配等值式

$$\forall x\ (A(x)\wedge B(x))\equiv\forall x\ A(x)\wedge\forall x\ B(x)$$

$$\exists x\ (A(x)\vee B(x))\equiv\exists x\ A(x)\vee\exists x\ B(x)$$

注 1： 量词分配等值式中，∀对∨和∃对∧无分配律。

(5) 同种量词顺序置换等值式

$$\forall x\ \forall y\ A(x,y)\equiv\forall y\ \forall x\ A(x,y)$$

$$\exists x\ \exists y\ A(x,y)\equiv\exists y\ \exists x\ A(x,y)$$

② 基本规则

- **置换规则**

若 A≡B，则 φ(A)≡φ(B)，其中 φ(A)是含 A 的公式。

- **换名规则**

设 $x,y,z\in D$，则

$$\forall x\ F(x,y,z)\equiv\forall t\ F(t,y,z)$$

$$\exists y\ F(x,y,z)\equiv\exists t\ F(x,t,z)$$

- **代替规则**

设 $x,y,z\in D$，则

$$\forall x\ F(x,y,z)\equiv\forall x\ F(x,t,z)$$

$$\exists y\ F(x,y,z)\equiv\exists y\ F(x,y,t)$$

③ 等值演算

例 1： 设个体域为 $D=\{a, b, c\}$，将下面各公式的量词消去：

(1) $\forall x(F(x)\Rightarrow G(x))$；

(2) $\forall x(F(x)\vee\exists y\, G(y))$；

(3) $\exists x\forall y\, F(x,y)$。

例 2： 证明下列各等值式

(1) $\sim\exists x(M(x)\wedge F(x))\equiv\forall x(M(x)\Rightarrow\sim F(x))$；

(2) $\sim\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\Rightarrow H(x,y))\equiv\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\sim H(x,y))$；

(3) $\sim\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))\equiv\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\Rightarrow\sim L(x,y))$。

④ 一阶逻辑前束范式

设 B 为不含量词的公式，则

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k B$$

称为前束范式，其中 $Q_i(1\leqslant i\leqslant k)$为∀或∃。

例如：$\forall x\,\exists y\,(F(x, y)\Rightarrow G(x, y))$，$\exists x\,\forall y\,\forall z\,(F(x, y, z)\wedge G(x, y))$。

但 $\forall x\, F(x)\wedge\forall x\, G(x, y)$不是。

定理 1： 任何一个一阶逻辑公式均和一个前束范式等值。

⑤ 一阶逻辑的推理

在一阶逻辑中，从前提 A_1，A_2，…，A_k 出发推出结论 B 的推理的形

式结构仍然采用如下形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B。$$

若上式是永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶逻辑中判断推理是否正确，也归结为判断上式是否为永真式。

㈠ 推理定律的来源

i. 命题逻辑推理定律的代换实例：

例如：$A \wedge B \Rightarrow A$：$\forall xF(x) \wedge \forall yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$；

$A \Rightarrow A \vee B$：$\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$。

ii. 由基本等值式生成的推理定律

例如：$\forall xF(x) \Rightarrow \sim\sim \forall xF(x)$；

$\sim\sim \forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$；

$\sim \forall xF(x) \Rightarrow \exists x \sim F(x)$；

$\exists x \sim F(x) \Rightarrow \sim \forall xF(x)$。

iii. 一些常用的重要推理定律

(a) $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$

(b) $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

(c) $\forall x\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x))$

(d) $\exists x\, (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, B(x))$

iv. 消去量词和引入量词规则

(1) 全称量词消去规则（记为∀－）

$$\frac{\forall x\, A(x)}{\therefore\ A(y)} \quad 或 \quad \frac{\forall x\, A(x)}{\therefore\ A(c)}$$

其中 x, y 是个体域中任意个体变项，c 是个体域中任意个体常项且取代 x 的 y 应为任意的不在 $A(x)$ 中约束出现的个体变项。

例如：不能由 $\forall x\,(P(x, z) \vee \exists y\, Q(x, y))$ 得到 $(P(y, z) \vee \exists y\, Q(y, y))$。但可以得到 $(P(c, z) \vee \exists y\, Q(c, y))$。

(1) 全称量词引入规则（记为∀+）

$$\frac{A(y)}{\therefore\ \forall x\, A(x)}$$

其中 y 是个体域中任意一个体变项，且取代 y 的 x 不能在 $A(y)$ 中约束出现。

(3)存在量词消去规则(记为∃－)

$$\frac{\exists x\, A(x)}{\therefore\ A(c)}$$

其中 c 是使 A 为真的个体常项，c 不在 $A(x)$ 中出现，且 $A(x)$ 没有其它自由出现的个体变项。

(4)存在量词引入规则(记为∃+)

$$\frac{A(c)}{\therefore\ \exists x\, A(x)}$$

其中 c 是特定的个体常项，x 不在 A(c)中出现。

㈡ 自然推理系统 F

1. 字母表

⑴ 个体常项符号：$a, b, c, \cdots$。

⑵ 个体变项符号：$x, y, z, \cdots$。

⑶ 谓词符号：F, G, H, ⋯。

⑷ 函数符号：$f, g, h, \cdots$。

⑸ 量词符号：∀, ∃。

⑹ 联接词：～，∧，∨，⇒，⇔。

⑺ 括号与逗号：（ ），。

2. 合式公式

3. 推理规则

⑴ 前提引入规则

⑵ 结论引入规则

⑶ 置换规则

⑷ 假言推理规则

⑸ 附加规则

⑹ 化简规则

(7) 取拒式规则

(8) 假言三段论规则

(9) 析取三段论规则

(10) 构造性二难推理规则

(11) 合引取入规则

(12) ∀—规则

(13) ∀+规则

(14) ∃—规则

(15) ∃+规则

例 3： 设个体域为 $\mathbb{R}$，$\mathrm{F}(x, y)$为 $x > y$。指出在推理系统 F 中，以 $\forall x\, \exists y\, \mathrm{F}(x, y)$为前提推出$\forall x\, \mathrm{F}(x, c)$的下述推理证明中的错误。

(1) $\forall x\, \exists y\, \mathrm{F}(x, y)$	前提引入
(2) $\exists y\, \mathrm{F}(z, y)$	(1) ∀—
(3) $\mathrm{F}(z, c)$	(2) ∃—
(4) $\forall x\, \mathrm{F}(x, c)$	(3) ∀+

例 4： 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明。

凡偶数都能被 2 整除。6 是偶数。所以 6 能被 2 整除。

例 5： 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明。

前提：$\forall x\ \big(F(x) \Rightarrow G(x)\big),\ \exists x\ \big(F(x) \wedge H(x)\big)$；

结论：$\exists x\left(G(x)\wedge H(x)\right)$。

例 6： 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明。

前提：$\forall x\left(F(x)\Rightarrow\left(G(x)\wedge H(x)\right)\right)$, $\exists x\left(F(x)\wedge R(x)\right)$；

结论：$\exists x\left(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x)\right)$。