第一章

1-1　解：由质点的运动方程 $x=6t-t^2$ 可得，坐标 x 与时间 t 的关系曲线如下所示，t 由 0 至 4 s 的时间间隔内质点的位移大小

$$\left|x\right|=\left|x_{t=4}-x_{t=0}\right|-\left|6\times4-4^2-0\right|=8\ \mathrm{m}$$

路程的大小为

$$S=\left|x_{t=3}\right|+\left|x_{t=4}-x_{t=3}\right|=\left|6\times3-3^2\right|+\left|\left(6\times4-4^2\right)-\left(6\times3-3^2\right)\right|=10\ \mathrm{m}$$

1-2　解：根据质点的运动方程 $x=2t, y=12-2t^2$ 得质点的运动轨迹为

$$y=12-2t^2=12-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=12-\frac{x^2}{2}$$

设 x 方向的速度为 v_x，y 方向的速度为 v_y，则

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2, v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4t$$ 质点速度为 $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$

设 x 方向的加速度为 a_x，y 方向的加速度为 a_y，则

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0, a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-4$$

质点加速度为 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}$

1-3　解：由 v-t 曲线的物理意义可知，质点的位移应等于速度曲线与时间轴所包围的面积。由题 1-3 图可知，$0\le t\le2.5\ \mathrm{s}$ 时间段内，位移为正；$2.5<t\le4.5\ \mathrm{s}$ 时间段内，位移为负；

故 $t=4.5\ \mathrm{s}$ 时

$$\Delta x=\frac{(1+2.5)\times2}{2}-\frac{(1+2)\times1}{2}=2\ \mathrm{m}$$

即 $t=4.5\ \mathrm{s}$ 时，质点在 x 轴上的位置为 $x=2\ \mathrm{m}$ 处

1-4　解：由加速度的定义可知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x a\mathrm{d}x=\int_0^x\left(3+9x^2\right)\mathrm{d}x=3x+3x^3$$

即 $\frac{1}{2}v^2=3x+3x^3$

$v^2 = 6x + 6x^3$

故 $v = \sqrt{6x + 6x^3}$ （SI）

1-5　解：（1）由位移定义可知，质点在第二秒内的位移

$$\Delta x = x(2) - x(1) = (4.5\times 2 - 2\times 8)\ \mathrm{m} - (4.5\times 1 - 2\times 1)\ \mathrm{m} = -9.5\ \mathrm{m}$$

质点在第二秒内的平均速度

$$\bar{v} = -9.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（2）由瞬时速度定义可知

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4.5 - 6t^2 = (4.5 - 6\times 2^2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = -19.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（3）因为速度为零时

$$v = 0 = 4.5 - 6y^2, t = 0.866\ \mathrm{s}$$

所以在 $t = 1\sim 2\ \mathrm{s}$ 时间内，质点将沿 x 轴方向做单向运动。这段时间内路程即为位移。所以

$2\ \mathrm{s}$ 内的路程为

$$|\Delta x| = \left|(4.5\times 2 - 2\times 2^3) - (4.5\times 1 - 2\times 1^3)\right| = 9.5\ \mathrm{m}$$

1-6　解：$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}(-kv^2)$

分离变量积分得　$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^x -k\mathrm{d}x$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kx$$

即　$v = v_0\mathrm{e}^{kx}$

1-7　解：（1）由速度的定义得质点在任意时刻的速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + b\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

（2）由已知可得 t 时刻 x 轴、y 轴的坐标分别为

$$x = a\cos\boldsymbol{\omega} t$$

$$y = b\sin\boldsymbol{\omega} t$$

所以质点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

即质点运动的轨道为椭圆。

（3）由加速度的定义得质点在任意时刻的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$=-\omega^2(a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j})=-\omega^2\boldsymbol{r}$$

显然质点加速度 a 的方向与矢径 r 方向相反，即指向椭圆圆心。

1-8　解：如图所示，取路灯所在处为坐标原点，人与路灯水平距离为 S，头顶在地面上的影子与灯水平距离为 x，则

$$\frac{h}{H}=\frac{x-S}{x}$$

故 $$x=\frac{H}{H-h}S$$

头顶在地面影子的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{H}{H-h}v_0$$

1-9　解：　抛体的加速度大小为 g，方向竖直向下，将加速度沿物体的速度的速度 v 方向和垂直方向进行投影得切向加速度大小 $\left|a_{\mathrm{t}}\right|=\left|-g\sin\theta\right|=\sin\theta$

法向加速度大小 $\left|a_{\mathrm{n}}\right|=\left|g\cos\theta\right|=g\cos\theta$

1-10　解：　（1）　$$v_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b-ct$$

切向加速度　$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v_t}{\mathrm{d}t}=-c$$

法向加速度　$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v_{\mathrm{t}}^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$$

（2）若 $a_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}$,有

$$c=\frac{(b-ct)^2}{R}$$

解得　$$t=\frac{b}{c}\pm\sqrt{\frac{R}{c}}(\mathrm{s})$$

1-11　解：　（1）　$$v_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\frac{v_{\mathrm{t}}^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

所以 $a = a_t \tau_0 + a_n n_0$ $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{1}{R}\sqrt{(v_0 - bt)^2 + b^2R^2}$

（2） $b = \frac{1}{R}\sqrt{(v_0 - bt)^2 + b^2R^2}$

$t = v_0 / b$

1-12 解： 由相对运动关系可得 $\boldsymbol{v}_{A地} = \boldsymbol{v}_{AB} + \boldsymbol{v}_{B地}$

即 $\boldsymbol{v}_{A地} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v} = (25\boldsymbol{i} + 40\boldsymbol{j})\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

则 $v = \sqrt{25^2 + 40^2}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 47.2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

$$\tan\theta = \frac{v'}{v_0} = \frac{40}{25} = 1.6$$

所以 $\theta = 58^\circ$

1-13 解： 以地面为静止参考系 S，汽车为动参考系 S'，由相对运动速度的关系可得

$\boldsymbol{v}_{雨地} = \boldsymbol{v}_{雨汽} + \boldsymbol{v}_{汽地}$（如图 1-13 所示）

故车中观察到的雨滴的速度大小为

$$v_{雨汽} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 20.1\ \mathrm{mg \cdot s^{-1}}$$

其方向与竖直向下的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{9}{18} = 26^\circ 24'$$

1-14 解：视雨滴为研究对象，地面为静止参考系 S，汽车为动参考系 S',如图 1-14（a）所示，要使物体不被淋湿，车中观察到的雨滴下落的方向应满足

$$\tan\alpha \ge \tan\beta = \frac{l}{h}$$

由相对速度关系得到 $\boldsymbol{v}_{雨地} = \boldsymbol{v}_{雨车} + \boldsymbol{v}_{车地}$（如图 1-14（b）所示），即 $v_2 = v_3 + v_1$

故 $\tan\beta = \frac{v_1 - v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta} \ge \frac{l}{h}$

即 $v_1 \ge v_2\left(\frac{1}{h}\cos\theta + \sin\theta\right)$

1-15 解：取河岸为参照系，以小船出发点为坐标原点，如图所示建立直角坐标系，如题意得，水流速度可表示为

$$v_{水} = ky$$

由已知可得当离岸 $L/2$ 时，速度为 v_0 ,即 $v_0 = k\dfrac{L}{2}$

得 $$k = \frac{2v_0}{2}$$

小船的离开岸边时速度为 $v_x = v_{水} = \dfrac{2v_0}{L}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$v_y = u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

积分得其运动方程为

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t u\mathrm{d}t \quad 即 \quad y = ut$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{2v_0}{L}ut\mathrm{d}t \quad 即 \quad x = \frac{v_0 u}{L}t^2$$

所以小船驶向对岸的轨迹为

$$x = \frac{v_0}{uL}y^2$$

当船驶至河宽的 1/4 处时，即 $y = \dfrac{L}{4}$,则船运行的时间为

$$t = \frac{L}{4u}$$

此时小船沿 x 轴方向运行的距离为

$$x = \frac{uv_0}{L}t^2 = \frac{uv_0}{\mathrm{L}}\left(\frac{l}{4u}\right)^2 = \frac{v_0 L}{16u}$$

小船掉头驶回岸边时的速度

$$v_x = v_{水} = \frac{2v_0}{L}y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = -\frac{u}{2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

积分得运动方程为

$$\int_{L/4}^y \mathrm{d}y = \int_0^t \left(-\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}t \quad 即 \quad y = \frac{L}{4} = -\frac{ut}{2}$$

$$\int_{\frac{v_0}{16u}}^x L\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{2v_0}{L}\left(\frac{L}{4} - \frac{ut}{2}\right)\mathrm{d}t \quad 即 \quad x = \frac{v_0 L}{16u} + \frac{v_0}{2}t - \frac{uv_0}{2L}t^2$$

当船驶回岸边时， $y = 0$ 。则船运行时间为

$$t = \frac{L}{2u}$$

此时小船 x 方向运行的距离为

x= $x=\frac{v_0L}{16u}+\frac{v_0}{2}t-\frac{uv_0}{2L}t^2=\frac{3v_0L}{16u}$

即小船返回本岸时离出发点的距离为 $\frac{3v_0L}{16u}$ 。

第二章

2-1　解：　对木块 M 进行受力分析，并如 2-1 解图所示建立直角坐标系。

x 方向上：$F_{\mathrm{T}}\cos\boldsymbol{\theta}-F_{\mathrm{f}}=0$ (1)

Y 方向上：$F_{\mathrm{N}}+F_{\mathrm{T}}\cdot\sin\theta-Mg=0$ (2)

$$F_{\mathrm{f}}=\mu F_{\mathrm{N}} \tag{3}$$

联立以上三式，得

$$F_{\mathrm{T}}=\frac{\mu Mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$$

人拉木箱最省力，即 F_{T} 取最小值时，要求 $\cos\theta+\mu\sin\theta$ 取最大值，即

$$\mathrm{d}(\cos\theta+\mu\sin\theta)=(-\sin\theta+\mu\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

$$\mu=\tan\theta=\frac{h}{\sqrt{l^2-h^2}} \tag{4}$$

整理式（4），有

$$l=\frac{h\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}=\frac{1.5\times\sqrt{1+(0.4)^2}}{0.4}\ \mathrm{m}=4.04\ \mathrm{m}$$

2-2　解：如题 2-2 解图所示，以 A、B 以及绳子整体为研究对象，这个系统所受合力沿竖直方向，假设该系统向上运动的加速度大小为 a，则

对系统有　$F_{\mathrm{T}}-(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m)g=(m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m)a$ (1)

对 A 物体有　$F_{\mathrm{T0}}-m_{\mathrm{A}}g=m_{\mathrm{A}}a$ (2)

对绳子上的质元 $\mathrm{d}m$ 有　$(F_{\mathrm{T}}+\mathrm{d}F_{\mathrm{T}})-F_{\mathrm{T}}-\mathrm{d}m\cdot g=\mathrm{d}m\cdot a$ (3)

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\cdot\mathrm{d}x \tag{4}$$

联立以上四式，有

$$a=\frac{F}{m_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}+m}-g=2.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$F_{\mathrm{T0}}=m_{\mathrm{A}}\left(a+g\right)=96\ \mathrm{N}$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}=\frac{m}{L}\left(a+g\right)\mathrm{d}x$$

所以　$\displaystyle\int_{F_{\mathrm{T0}}}^{F_{\mathrm{T}}}\mathrm{d}F_{\mathrm{T}}=\frac{m}{L}\left(a+g\right)\int_0^x\mathrm{d}x$

$$F_{\mathrm{T}} - F_{\mathrm{T0}} = \frac{m}{L}(a+g)\cdot x = 24.4x$$

即距离 A 端为 x 处绳中的张力为

$$F_{\mathrm{T}(x)} = 96 + 24.4x \ (\mathrm{SI})$$

2-3　解：隔离物体，作受力分析图（题 2-3 解图）。

故对 A 物体　　$F_{\mathrm{T}} - \mu_0 m_{\mathrm{A}} g \geq 0$

对 B 物体　　$F - F_{\mathrm{T}} - \mu_0 m_{\mathrm{A}} g - \mu_0 \left(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\right) g \geq 0$

解得　　$F \geq \mu_0 (3m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) g = 49\ \mathrm{N}$

$$F_{\mathrm{T}} = \mu_0 m_{\mathrm{A}} g = 9.8\ \mathrm{N}$$

2-4　解：如图所示建立坐标系，在绳上任取一微元，其质量为 $\frac{M}{L}\mathrm{d}x$，对其受力分析得

$$F_{\mathrm{T}}(x) - F_{\mathrm{T}}(x+\mathrm{d}x) = \frac{M}{L}\mathrm{d}x \cdot \omega^2 x$$

$$-\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \frac{M\omega^2}{L} x\mathrm{d}x$$

$$\int_{F_{\mathrm{T}(x)}}^{0} \mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \int_{x}^{L} -\frac{M\omega^2}{L} x\mathrm{d}x$$

所以　　$F_{\mathrm{T}(x)} = \frac{M\omega^2}{2L}\left(L^2 - x^2\right)$

2-5　解：　a）如题 2-5 解图所示建立直角坐 $F_{\mathrm{N}} - mg - f\sin\theta = 0$ 标系，有

$$f\cos\theta - F_{\mathrm{f}} = ma$$

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}}$$

联立方程组，可得　　$F_{\mathrm{N}} = mg + f\sin\theta$

$$a = \frac{1}{m}\left[f\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) - \mu mg\right]$$

b)　当 $f\cos\theta \geq mg\sin\theta$，即 $f \geq mg\tan\theta$ 时，木块有沿着 x 轴向上运动的趋势：

$$F_{\mathrm{N}} - f\sin\theta - mg\cos\theta = 0$$

$$F_{\mathrm{f}} - f\cos\theta + mg\sin\theta = -ma$$

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}}$$

联立方程组，得 $$F_{\mathrm{N}} = f\sin\theta + mg\cos\theta$$

$$a = -\frac{1}{m}\left[f\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) - mg\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)\right]$$

当 $f \le mg\tan\theta$ 时，木块有沿 x 轴向下运动或者向下运动的趋势，则有

$$a = \frac{1}{m}\left[mg\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) - f\left(\mu\sin\theta + \cos\theta\right)\right]$$

c) $$F_{\mathrm{N}} + f\sin\theta - mg = 0$$

$$f\cos\theta - F_{\mathrm{f}} = ma$$

$$F_{\mathrm{f}} = \boldsymbol{\mu} F_{\mathrm{N}}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg - f\sin\boldsymbol{\theta}$$

$$a = \frac{1}{m}\left[f\left(\cos\theta + \mu\sin\theta -\right) - \mu mg\right]$$

d) 若 $f \le mg\sin\theta$，则木块下滑或有下滑趋势：

$$F_{\mathrm{N}} - mg\cos\theta = 0$$

$$-F_{\mathrm{f}} - f + mg\sin\theta = -ma$$

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{\mathrm{N}}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta$$

$$a = \frac{1}{m}\left[mg\left(\boldsymbol{\mu}\cos\theta - \sin\theta\right) + f\right]$$

若 $f \ge mg\sin\theta$，木块有上滑趋势：

$$F_{\mathrm{N}} - mg\cos\theta = 0$$

$$F_{\mathrm{f}} + mg\sin\theta - f = ma$$

$$F_{\mathrm{f}} = \mu F_{N}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos\theta$$

$$a = \frac{1}{m}\left[mg\left(\mu\cos\theta + \sin\theta\right) - f\right]$$

2-6 解：（1） 由题可知 t 时刻物体运动法向方向上满足

$$F_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{R} = T + mg\cos\theta$$

得绳中的张力为

$$T = m\frac{v^2}{R} - mg\cos\theta$$

切向方向上满足 $F_{\mathrm{t}} = mg\sin\boldsymbol{\theta}$

故切向加速度

$$a_{\mathrm{t}} = g\sin\theta$$

方向沿速度 v 方向。

（2）当 $0 \le \theta \le 90^\circ$ 时，a_{t} 大小越来越大，方向沿运动速度方向相同；当 $90 \le \theta \le 180^\circ$ 时，a_{t} 大小越来越小，方向沿运动速度方向相同；当 $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ 时，a_t 大小越来越大，方向沿运动速度方向相反；当 $270^\circ \le \theta \le 360^\circ$ 时，a_{t} 大小越来越小，方向沿运动速度方向相反。

2-7 【证明】 如题 2-7 解图所示，建立坐标系，用隔离法进行受力分析。

对 A： $F_{\mathrm{NA}} - mg = 0$

$$F_{\mathrm{fA}} = \mu_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{NA}} = m_{\mathrm{A}} a$$

对 B，有 $F_{\mathrm{NB}} - Mg - F'_{\mathrm{NA}} = 0$

$$F - F'_{\mathrm{fA}} = Ma$$

其中： $F_{\mathrm{NA}} = F'_{\mathrm{NA}}$

$$F_{\mathrm{fA}} = F'_{\mathrm{fA}}$$

联立以上各式，有

$$a = \mu_{\mathrm{s}} g$$

$$F = F_{\mathrm{fA}} + Ma = \mu_{\mathrm{s}} mg + M\mu_{\mathrm{s}} g = \mu_{\mathrm{s}}\left(m + M\right)g$$

即 $F \le \mu_{\mathrm{s}}\left(m + M\right)g$ 时，A、B 间不发生相对滑动。

2-8 解：（1）对锥面上的小球进行受力分析，如图所示建立坐标系

$$T\sin\theta - N\cos\theta = m\omega^2 r \tag{1}$$

$$T\cos\theta + N\sin\theta = mg \tag{2}$$

$$r = l\sin\theta \tag{3}$$

联立以上各式得

$$N = mg\sin\theta - m\omega^2 l\sin\theta\cos\theta$$
$$T = mg\cos\theta + m\omega^2 l\sin^2\theta$$

(2)当 $\omega = \omega_c$ 时，小球离开锥面，即 N=0。

$$T\cos\theta = mg \tag{1}$$

$$T\sin\theta = m\omega_c^2 l\sin\theta \tag{2}$$

联立以上两式得

$$T = mg/\cos\theta$$

$$\omega_c = \sqrt{g/l\cos\theta}$$

2-9　解：以地面为参考系，以竖直向下为正方向，设三物体的加速度分别为 a_1，a_2 和 a_3，a' 表示 m_2，m_3 相对滑轮 B 的加速度，各物体的受力分析如图 2-16 所示，由牛顿第二定律得

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \tag{1}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{2}$$

$$-T_2 + m_3 g = -m_3 a_3 \tag{3}$$

由于滑轮的质量忽略，所以

$$T_1 = 2T_2 \tag{4}$$

各物体的加速度间有如下关系

$$a_2 = a' - a_1, a_3 = a' + a_1 \tag{5}$$

由上几式得

$$a_1 = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_2 m_3} g$$

$$= \frac{0.2\times0.1 + 0.2\times0.05 - 4\times0.1\times0.05}{0.2\times0.1 + 0.2\times0.05 + 4\times0.1\times0.05}\times 9.8$$
$$= 1.96\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

方向向下。

$$T_1 = m_1\left(g - a_1\right) = 0.2\times\left(9.8-1.96\right) = 1.57\ \text{N}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 = 0.785\ \text{N}$$

$$a_2 = \frac{m_2 g - T_2}{m_2} = \frac{0.1\times 9.8 - 0.785}{0.1} = 1.95\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

方向向下。

$$a_3 = -\frac{m_3 g - T_2}{m_3} = -\frac{0.05\times 9.8 - 0.785}{0.05} = 5.9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

方向向上。

2-10　解：　力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$A = \int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b F\,\mathrm{d}x\cdot\cos\theta = \int_{\frac{h}{\tan 30^\circ}}^{\frac{h}{\tan 60^\circ}} -\frac{Fx}{\sqrt{h^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = -F\int_{\frac{h}{\tan 30^\circ}}^{\frac{h}{\tan 60^\circ}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{h^2+x^2}} = -F\sqrt{h^2+x^2}\Bigg|_{\frac{h}{\tan 30^\circ}}^{\frac{h}{\tan 60^\circ}}$$

$$= 20.28\ \text{J}$$

2-11　解：　力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$A = \int F\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{(0,0)}^{(0,2\pi)} F_0\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}\right) = \int_0^0 F_0 x\mathrm{d}x + \int_0^{2R} F_0 y\mathrm{d}y = 2F_0R^2$$

2-12　解：取井水水面为坐标原点，竖直向上为坐标轴正方向建立 y 轴，则人的拉力为

$$F = \left(11 - \frac{0.2y}{0.5}\right)g \qquad \text{方向竖直向上}$$

力 F 所做的功 $A = \int_0^2 F\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(11 - \frac{0.2y}{0.5}\right)g\mathrm{d}y = 207.76\ \text{J}$

2-13　解：已知条件可知，质点的位矢为

$$\boldsymbol{r}(t) = 5t\boldsymbol{i} + 0.5t^2\boldsymbol{j}(\text{SI})$$

质点的加速度为 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{j}\left(\text{SI}\right)$

由牛顿第二定律可知质点所受外力　$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = 0.5\boldsymbol{j}$

从 $t = 2\ \text{s}$ 到 4 s 这段时间内，外力对质点所做的功

$$A = \int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t=2\,\text{s}}^{t=4\,\text{s}} \left(5t\boldsymbol{i} + 0.5t^2\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(0.5\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}t = \int_{t=4\,\text{s}}^{t=4\,\text{s}} 0.25t^2\mathrm{d}t = 3\ \text{J}$$

2-14　解：对于两中子星系统，机械能守恒，所以有

$$-G\frac{m^2}{r}=2\times\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{m^2}{r/2}\right)$$

$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times10^{30}}{10^{10}}}=8.17\times10^{4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2-15　解：由分析可知，弹簧、物体、地球所构成的系统在运动过程中，仅有保守力弹簧拉力做功。所以系统机械能守恒，设当物体速率为$\frac{v_0}{2}$时，弹簧伸长量为 x，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$x=\sqrt{\frac{3m}{4k}}v_0$$

此时弹簧对物体的拉力　　$F=kx=\frac{v_0}{2}\sqrt{3mk}$

2-16　解：　取物体和地球构成的系统作为研究对象，B 位置处为重力势能的零势能面，由功能原理得

$$A_f=\frac{1}{2}mv^2-mgR=\frac{1}{2}\times2\times6^2-2\times9.8\times4=-42.4\ \mathrm{J}$$

2-17　解：　由题意可知物体到达最远位置时，物体速度为零，系统仅有弹性势能。设此时弹簧伸长量为 x，由功能原理得

$$F_x-\mu mgx=\frac{1}{2}kx^2$$

即 $x=\frac{2\left(F-\mu mg\right)}{k}$

此时，即物体到达最远位置的弹性势能

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{2\left(F-\mu mg\right)^2}{k}$$

2-18　解：　（1）重力做功等于系统重力势能的增量。如题 2-18 解图所示，已最低点处为重力势能零点，有

$$A_{\mathrm{G}}=mgl\left(1-\cos\theta\right)=0.5\times9.8\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{J}=0.67\ \mathrm{J}$$

$$A_{\mathrm{T}}=\int F_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}l=\int F_{\mathrm{T}}\mathrm{d}l\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0\ \mathrm{J}$$

（2）小球与绳子组成的系统只有重力做功，系统的机械能守恒，有

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = A_{\text{G}} = 0.67\ \text{J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2A_{\text{G}}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 0.66}{0.5}}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 1.60\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

（3）小球做圆周运动，根据牛顿运动定律可知

$$F_{\text{T}} - mg = mv^2/l$$

$$F_{\text{T}} = mg + mv^2/l = \left(0.5\times 9.8 + 0.5\times 1,60^2/1\right)\text{N} = 6.18\ \text{N}$$

2-19　解：　以物体为研究对象可知，合外力的冲量等于物体动量的增量，以竖直向上为正方向可得

$$\int_0^0 \boldsymbol{F}_{合}\text{d}t = m\boldsymbol{v}_{末} - m\boldsymbol{v}_{初} = m\left(\boldsymbol{v}_{末} - \boldsymbol{v}_{初}\right) = m\int_0^{\frac{2}{a}}\text{d}t$$

即 $\int_0^2\left(\boldsymbol{F}_{底} + m\boldsymbol{g}\right)\text{d}t = \int_0^2 (F_{底} - mg)\text{d}t = \int_0^2 F_{底}\text{d}t - \int_0^2 mg\text{d}t$

$$= I_{底} - mgt\Big|_0^2 = m\left(3t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^2$$

所以，$I_{底} = 160 + 196 = 356\ \text{N}\cdot\text{S}$　　　方向竖直向上

2-20　解：　(1)用动量定理求冲量：

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = -m\omega R\boldsymbol{i} - m\omega R\boldsymbol{j} = -m\omega R(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

(2)用积分法求冲量：

$$\boldsymbol{f} = -m\omega^2\boldsymbol{r} = -m\omega^2 R(\cos\omega t\boldsymbol{i} + \sin\omega t\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{f}\,\text{d}t - m\omega^2 R\left[\int_0^{\pi/2\omega}\cos\omega t dt i + \int_0^{\pi/2\omega}\sin\omega t dt j\right]$$

$$I = -m\omega R(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

2-21　解：已知第一辆车和人的总质量 $m_1 = 500\ \text{kg}$，第二辆车和质量 $m_2 = 500\ \text{kg}$，对于两辆车和人组成的系统而言，人的拉力属于系统内力，不影响系统的总动量，系统的动量守恒，即

$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$（1）

对第二辆车而言 $F\cdot t = m_2 v_2$（2）

联立以上两式，得

$$v_2 = -\frac{Ft}{m_2} = \frac{50\times 5}{500}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 0.5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_1=-\frac{m_2v_2}{m_1}=-\frac{500\times0.5}{250}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=-1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

即第一辆车的速度大小为$1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，第二辆车的速度大小为$0.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

2-22　解：根据动量守恒定理，有

$$F\cdot\Delta t_1=(m_1+m_2)v_A$$

$$F\cdot\Delta t_2=m_2v_B-m_2v_A$$

联立两式，有

$$v_\mathrm{A}=\frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$$

$$v_\mathrm{B}=\frac{F\Delta t_1}{m_2}+\frac{F\Delta t_2}{m_1+m_2}$$

2-23　解：物体 A、B 共同运动阶段对物体 A、B 进行受力分析可得

$$F_{外}=mg=2ma$$

即$a=\frac{g}{2}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

由分析可知 C 开始运动前 A、B 的运动时间为

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2\times0.5}{5}}=0.2\ \mathrm{s}$$

此时 A、B 的速度大小为

$$v=v_A=v_B=at=1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由分析可知，A 和 B 拉动 C 运动是一个碰撞过程，系统动量守恒，设 C 开始运动时的速度为v'，于是有

$$2mv=3mv'$$

$$v'=\frac{2}{3}v=0.667\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2-24　解：以地面为参考系建立坐标轴，以船前进方向为 x 轴正方向。第二艘船和抛出的两物体的系统，由于忽略水的阻力，在运动方向上动量守恒。由于抛出的两物体相对于穿的速度为 u，因此向前抛的物体相对于地面的速度大小为$v+u$，向后抛的物体相对于地面的速度大小为$v-u$，设抛出物体后的第二艘船的速度为V_2，由动量守恒得

$$Mv=(M-2m)V_2+m(v+u)+m(v-u)$$

得抛出的物体后第二艘船的速度为

$$V_2=v$$

以第一艘船的中间船抛来的物体为系统，在运动方向上动量守恒有

$$Mv+m(v+u)=(M+m)V_1$$

得落入物体后的第一艘船的速度为

$$V_1=v+\frac{m}{M+m}u$$

以第三艘船的中间船抛来的物体为系统，由动量守恒定律有

$$Mv+m(v-u)=(M+m)V_3$$

得落入物体后的第三艘船的速度为

$$V_3=v-\frac{m}{M+m}u$$

2-25　解：由胡克定律有 $kx_0=mg$ （1）

由机械能守恒定律有 $mgh=\frac{1}{2}mv_0^2$ （2）

由动量守恒定律有 $mv_0=(m+M)v_1$ （3）

设木板下移到最低点为重力势能零势点，而最大下移距离为 x_{m}，则由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2+(m+M)gx_{\mathrm{m}}+\frac{1}{2}k(x_0+x_{\mathrm{m}})^2 \quad (4)$$

由（1）得 $k=\frac{mg}{x_0}$

由（2）得 $v_0=\sqrt{2gh}$

代入（3）得 $v_1=\frac{mv_0}{(m+M)}=\frac{m\sqrt{2gh}}{(m+M)}$

将以上三式（4），整理得

$$\frac{M}{2x_0}x_{\mathrm{m}}^2-mx_{\mathrm{m}}-\frac{m^2h}{(m+M)}=0$$

$$x_{\mathrm{m}}^2-0.04x_{\mathrm{m}}-0.002=0$$

$$x_{\mathrm{m}}=0.069\ \mathrm{m}$$

2-26　【证明】首先分析，m 沿 M 的斜面下滑的过程中，各物体所受的力做功如何？

m：重力和 M 给 m 的正压力，两个力对 m 均做功。

M：重力、m 给 M 的正压力以及地面给 M 的正压力做功,三个里中只有 m 给 M 的压力做功。

如果将 m 和 M 作为一个系统来考虑，则外力只在竖直方向上，所以系统在水平方向的动量

守恒。由于动量守恒定律只在惯性系中成立。所以取地面为参考系，由动量守恒定律得

$$Mv_2 + mv_{1x} = 0 \quad （1）$$

其中，v_2 就是 M 对地的速度；而 v_{1x} 是 m 对地的速度在 x 轴方向的分量。又由相对速度公式，有

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_2$$

式中，u 就是 m 相对于 M。则

$$v_{1x} = v_2 - u\cos\theta$$

$$v_{1y} = -u\sin\theta \quad （2）$$

再考虑到，如果将 m、M 及地球作为一个系统，则 M 和 m 之间的一对相对作用力做功之和等于零。这样，就只有 m 的重力这个保守内力做功，所以系统的机械能守恒。由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh \quad （3）$$

又根据 $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$ （4）

将式（2）代入得 $v_1^2 = (v_2 - u\cos\theta)^2 + (-u\sin\theta)^2$

将式（4）代入式（3），并与式（1）联立，有

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}m\left[(v_2 - u\cos\theta)^2 + (-u\sin\theta)^2\right] = mgh \\ Mv_2 + mv_{1x} = 0 \end{cases}$$

以上两式联立解得三角形物块的速度

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\theta}{(m+M)(M+m\sin^2\theta)}}$$

2-27　解：（1）以地面为参考系建立坐标系，水平方向为 x 轴正方向。设人跳车时车的速度为 V，则人跳车时相对地的速度

$$v = -u + V$$

跳车过程中，人与车系统动量守恒，根据动量守恒定律，有

$$MV + Nmv = 0$$

将 v 代入上式，可求出第一种情况车的反冲速度为

$$V = \frac{Nm}{M + Nm}u$$

（2）N 个人依次跳车，第一个人跳车过程有

$$[M + (N-1)m]V_1 + mv_1 = 0$$

$$v_1 = u + V_1$$

由上面两式解出第一个跳车后，车的反冲速度为

$$V_1 = \frac{mu}{M + Nm}$$

第二个人跳车过程有

$$\left[M - \left(N-2\right)m\right]V_2 + mv_2 = \left[M + \left(N-1\right)m\right]V_1$$

$$v_2 = -u + V_2$$

由此可知，第二个人跳车后，车的反冲速度为

$$V_2 = V_1 + \frac{mu}{M + \left(N-1\right)m}$$

同理可得第三个人跳车后，车的反冲速度为

$$V_3 = V_2 + \frac{mu}{M + \left(N-2\right)m}$$

依次分析每个人跳车过程，可得 N 个人依次跳下后平板车的反冲速度为

$$V_N = \frac{mu}{M + Nm} + \frac{mu}{M + \left(N-1\right)m} + \cdots + \frac{mu}{M + m}$$

2-28　解：由分析可知，在链条下滑过程中，整个链条所受的合外力为 BC 斜面上的那段链条重力沿斜面的分力，根据动能定理合外力对物体做的功等于其动能的增量，可以确定最终链条的速率，避开了复杂的过程分析。

设链条的质量为 m，坐标选择如图所示。当链条下端在任意位置 x 时，链条受合外力为 $\frac{m}{l}xg\sin\alpha$，且沿斜面向下，对链条应用动能定理得

$$\int_0^l \frac{m}{l}xg\sin\alpha dx = \frac{1}{2}mv^2$$

即 $v = \sqrt{\frac{g}{L}\left(L^2 - a^2\right)\sin\alpha}$

2-29　解：（1）如图所示建立坐标系。链条下端在 y 时，重力所做的元功 $\mathrm{d}A = \frac{m}{L}yg\mathrm{d}y$。链条下端由位置 a 滑至 L 时，重力所做的功为

$$A_{\mathrm{G}} = \int_a^L \frac{m}{L}yg\mathrm{d}y = \frac{1}{2L}mg\left(L^2 - a^2\right)$$

（2）链条左端滑至 x 时，摩擦力所做元功

$$\mathrm{d}A = -\mu\frac{m}{L}(L-a-x)g\mathrm{d}x$$

链条左端由坐标原点 O_x 滑至 $\left(L-a\right)$ 处，摩擦力所做的功为

$$A_{\mathrm{f}} = \int_0^{L-a} -\frac{\mu mg}{L}\left(L-a-x\right)\mathrm{d}x = -\frac{\mu mg}{2L}\left(L-a\right)^2$$

（3）根据动能定理有 $A_G + A_f = \frac{1}{2}mv^2$

即 $\frac{mg}{2L}(L^2-a^2)-\frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2=\frac{1}{2}mv^2$

解得 $v^2=\frac{g}{L}\left[\left(L^2-a^2\right)-\mu\left(L-a\right)^2\right]$

所以 $v=\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{\left(L^2-a^2\right)-\mu\left(L-a\right)^2}$

2-30　解：子弹与木块 A 在入射前后系统水平方向上动量守恒，即

$$mv_0=\left(m+m_1\right)v_0$$

故 $$v_{10}=\frac{mv_0}{m+m_1}$$

式中，v_{10} 是子弹射入 m 与 m_1 的共同速度。

碰撞后，$\left(m+m_1\right)$、m_2、弹簧构成的系统机械能守恒、动量守恒、弹簧到达最大压缩时，m_1+m_2与m_2 的速度相同，由系统动量守恒得

$$mv_0=\left(m+m_1+m_2\right)v \quad（1）$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}\left(m+m_1\right)v_{10}^2=\frac{1}{2}\left(m+m_1+m_2\right)v^2+\frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

整理以上三式得

$$x=mv_0\sqrt{\frac{m_2}{\left(m+m_1\right)\left(m+m_1+m_2\right)k}}$$

2-31　解：　以筒内水面为参考面，考察水面与小孔两处的流体，由于孔相对于水面小很多，因此水面下降速度可以忽略。以小孔高度为零势面，设孔距离水面高度为 h，由伯努利方程得

$$p_0+\rho gh=p_0+\frac{1}{2}\rho v^2$$

即 $v^2=2gh$

由平抛运动公式 $H-h=\frac{1}{2}gt^2$ 和 $x=vt$ 得

$$x=2\sqrt{h\left(H-h\right)}$$

令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h}=0$ 得水流的水平射程最大时，孔与水面的距离为

$$h=\frac{H}{2}$$

水流的最大水平射程为

$$x=2\sqrt{h\left(H-h\right)}=2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H-\frac{H}{2}\right)}=H$$

2-32　证明 1,2 两点等高，根据水平流管中的伯努利方程得

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

根据流体连续性原理有

$$Q_V=v_1S_1=v_2S_2$$

联立以上两式得

$$v_1=S_2\sqrt{\frac{2\left(p_1-p_2\right)}{\rho\left(S_1^2-S_2^2\right)}}，\quad v_2=S_1\sqrt{\frac{2\left(p_1-p_2\right)}{\rho\left(S_1^2-S_2^2\right)}}$$

所以 $Q_V=S_1S_2\sqrt{\frac{2\left(p_1-p_2\right)}{\rho\left(S_1^2-S_2^2\right)}}=S_1S_2\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(S_1^2-S_2^2)}}$

2-33　解：由已知可知，$v_D=0,v_B=v_C=v$，

$p_D=p_C=p_0$，将伯努利方程应用于 D,C,B 三处有

$$p_0+\rho g(d+h_2)=p_0+\frac{1}{2}\rho v^2=p_B+\rho g(h_1+d+h_2)+\frac{1}{2}\rho v^2$$

解得开口 C 处流出的液体的速率为

$$v=\sqrt{2g\left(d+h_2\right)}$$

在最高点 B 处液体的压强为

$$P_B=P_0-\rho g\left(h_1+d+h_2\right)$$

能够发生虹吸现象的条件是

$$P_B\geq 0$$

$$h_1\leq\frac{\rho_0}{\rho g}-\left(d+h_2\right)$$

第三章

3-1　解：对匀变速圆周运动来说 $\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$，当 $\theta=0$ 时，即 $6t+\frac{1}{2}(-6)t^2=0$。得

$t_1=0$（舍）或 $t_2=\sqrt{2}\ \mathrm{s}$。

当 $t=\sqrt{2}\ \mathrm{s}$ 时，$\omega=\omega_0+\beta t=\left(6-6\sqrt{2}\right)\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$$\left|\boldsymbol{v}\right|=\left|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}\right|=r\omega\sin\frac{\pi}{2}=\left(6\sqrt{2}-6\right)\times0.2=\frac{6}{5}\left(\sqrt{2}-1\right)\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

3-2　解：由转动定律 $M=J\beta$ 得

$$-\mu FR=\frac{1}{2}mR^2\beta \qquad (1)$$

$$\beta=\frac{0-\omega_0}{\Delta t} \qquad (2)$$

由以上两式得

$$\mu=\frac{mR\omega_0}{2F\Delta t}=\frac{5\times0.1\times\frac{900}{60}\times2\pi}{2\times10\times11.8}=0.2$$

3-3　解：对大圆盘、小圆盘，两物体构成的系统受力分析，得

$$m_1g-F_{\mathrm{T_1}}=m_1a \qquad (1)$$

$$F_{\mathrm{T_1}}R-F_{\mathrm{T_2}}R=\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)\beta \qquad (2)$$

$$F_{\mathrm{T2}}-m_2g=m_2a_2 \qquad (3)$$

$$a_1=R\beta \qquad (4)$$

$$a_2=r\beta \qquad (5)$$

由以上(1) 一(5)方程组得

$$\beta=\frac{\left(m_1R-m_2r\right)g}{\frac{1}{2}\left(MR^2+mr^2\right)+m_1R^2+m_2r^2}$$

$$F_{\mathrm{T2}}=\frac{m_1g\left[\frac{1}{2}\left(MR^2+mr^2\right)+m_2r\left(r+R\right)\right]}{\frac{1}{2}\left(MR^2+mr^2\right)+m_1R^2+m_2r^2}$$

$$F_{\mathrm{T2}}=\frac{m_2g\left[\frac{1}{2}\left(MR^2+mr^2\right)+m_2r\left(r+R\right)\right]}{\frac{1}{2}\left(MR^2+mr^2\right)+m_1R^2+m_2r^2}$$

3-4　解：设圆盘两侧的绳长分别为x_1、x_2，选长度为x_1,x_2的两段绳和绕着绳的盘为研究对象。设 a 为绳的加速度，β为盘的角加速度，r 为盘的半径，且绳与盘的切点张力分别为F_{T1}、F_{T2}，则

$$x_2\frac{m}{l}g-F_{\mathrm{T2}}=x_2\frac{m}{l}a \quad (1)$$

$$F_{\mathrm{T1}}-x_1\frac{m}{l}g=x_1\frac{m}{l}a \quad (2)$$

$$\left(F_{\mathrm{T2}}-F_{\mathrm{T1}}\right)r=\left(\frac{Mr^2}{2}+\pi r^3\frac{m}{l}\right)\beta \quad （3）$$

$$a=\beta r \quad （4）$$

$$l=\pi r+x_1+x_2 \quad （5）$$

$$x_1-x_2=s \quad （6）$$

联立以上几式得

$$a=\frac{mgs}{(m+\frac{M}{2})l}$$

3-5　解：（1）由转动定律得$\beta=\frac{M}{J}=\frac{mg\frac{1}{2}\cos\theta}{\frac{1}{3}ml^2}=\frac{3g\cos45^\circ}{2l}=5.20\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

由转动动能定理得$\int_0^{45^\circ}mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin45^\circ}=3.22\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

3-6　解：由已知可得$M=-k\omega^2$（1）

$M=J\beta$（2）

由以上两式可得$\beta=\frac{-k\omega^2}{J}$

当$\omega = \dfrac{\omega_0}{3}$时，$\beta = -\dfrac{k\omega_0^2}{9J}$

3-7　解：（1）由角动量守恒得

$$J_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A0}} + 0 = \left(J_{\mathrm{A}} + J_{\mathrm{B}}\right)\omega$$

得　$\omega = \dfrac{J_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A0}}}{J_{\mathrm{A}} + J_{\mathrm{B}}} = \dfrac{1.0 \times 3\pi}{1.0 + 2.0} = \pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

(2)由角动量原理　$\int_{t0}^{t} \boldsymbol{M}\mathrm{d}t = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_0$　得

A 轮所受冲量矩　$\int_{t_0}^{t} M \cdot \mathrm{d}t = J_{\mathrm{A}}\omega - J_A\omega_{\mathrm{A0}} = -2\pi\ \mathrm{N \cdot m \cdot s}$

B 轮所受冲量矩　$\int_{t_0}^{t} M \cdot \mathrm{d}t = J_{\mathrm{B}}\omega - J_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B0}} = 2\pi\ \mathrm{N \cdot m \cdot s}$

3-8　解：由人和转台构成的系统角动量守恒，得

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0 + 0 = \frac{1}{2}MR^2\omega + \left(mr^2\right)\omega \quad (1)$$

又因为　　$r = ut$（2）

有以上两式得　　$\omega = \dfrac{\omega_0}{1 + \dfrac{2mu^2t^2}{MR^2}}$

$$\therefore \varphi = \int \omega \mathrm{d}t = \frac{R\omega_0}{\mu\sqrt{\dfrac{2m}{M}}} \arctan \frac{ut\sqrt{\dfrac{2m}{M}}}{R}$$

3-9　解：（1）将子弹和细杆作为一个系统，根据角动量守恒有

$$mv_0d + 0 = \left(\frac{1}{3}ML^2 + md\right)\omega$$

求得子弹射入杆后的角速度

$$\omega = \frac{3mv_0d}{ML^2 + 3md^2}$$

（2）子弹射入杆的过程中（设经历时间为Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力分别为F_x，F_y，水平方向上满足动量定理

$$F_x\Delta t = P_2 - P_1 = M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0$$

得杆的上端受轴的水平分力为

$$F_x=\left(M\frac{L\omega}{2}+md\omega-mv_0\right)\Big/\Delta t$$

竖直方向忽略子弹的重量，由动量定理得

$$\left(F_y-M\omega^2\frac{L}{2}-Mg\right)\Delta t=0$$

得杆的上端受轴的竖直分力为

$$F_y=M\omega^2\frac{L}{2}+Mg$$

3-10　解：由动量守恒定律得

$$mv_0=\left(m+M\right)v_1 \quad （1）$$

由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}\left(m+M\right)v_1^2=\frac{1}{2}k\left(l-l_0\right)^2+\frac{1}{2}\left(m+M\right)v_2^2 \quad （2）$$

由角动量守恒定律有

$$\left(m+M\right)v_1l_0=\left(m+M\right)v_2l\sin\theta \quad （3）$$

联立式（1）、（2）、（3），求得

$$v_2=\frac{1}{\left(m+M\right)}\sqrt{m^2v_0^2-k\left(l-l_0\right)^2\left(m+M\right)}$$

速度方向（与水平方向的夹角）

$$\sin\theta=\frac{l_0mv_0}{l\sqrt{m^2v_0^2-k\left(l-l_0\right)^2\left(m+M\right)}}$$

3-11　解：由角动量守恒定律有

$$m_2v_1l=\frac{1}{3}m_1l^2\omega-m_2v_2l$$

$$\omega=\frac{3m_2(v_1+v_2)}{m_1l} \quad （1）$$

又因合力矩

$$M=\int_0^l\mu\frac{m_1}{l}gxdx=\frac{1}{2}\mu m_1gl$$

由角动量守恒定理$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}_0$，有

$$-\frac{1}{2}\mu m_1gl\cdot t=0-\frac{1}{3}m_1l^2\omega$$

将（1）代入式（2），解得

$$t=\frac{2m_2\left(v_1+v_2\right)}{\mu m_1g}$$

3-12　解：将子弹和圆盘作为一个系统，由子弹击中细杆前后系统角动量守恒得

$$mv_0R+0=\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega_0$$

圆盘所获得的角速度为

$$\omega_0=\frac{2mv_0}{MR+2mR}$$

圆盘的摩擦力矩力矩为

$$K=\int_0^R\frac{Mg\mu 2\pi r^2}{\pi R^2}\mathrm{d}r=\frac{2Mg\mu R}{3}$$

根据刚体定轴转动定理

$$K=\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\alpha$$

可求得细杆的加速度为

$$\alpha=\frac{4Mg\mu}{3MR+6mR}$$

设圆盘经 t 时间停下来，则

$$t=\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{3mv_0}{2Mg\mu}$$

3-13　解：（1）由转盘和人构成的系统，角动量守恒得

$$\frac{1}{2}m'R^2\omega_0+\frac{1}{4}mR^2\omega_0=\frac{1}{2}m'R^2\omega+\frac{1}{4}mR^2\left(\omega-\frac{v}{\frac{R}{2}}\right)\quad(1)$$

解得 $\omega=\omega_0+\dfrac{2v}{21R}$

（2）若欲使盘静止，在式（1）中令 $\omega=0$ 得

$$v=-\frac{21}{2}\omega_0R$$

与原设定的速度方向相反，即顺着 ω_0 的方向。

3-14　解：设探测器在两圆形轨道运行的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，则

$$G\frac{M_\mathrm{e}m}{\left(3R_\mathrm{e}\right)^2}=m\frac{v_1^2}{3R_\mathrm{e}}$$

$$G\frac{M_\mathrm{e}m}{\left(13R_\mathrm{e}\right)^2}=m\frac{v_2^2}{13R_\mathrm{e}}$$

解得 $v_1=\sqrt{\dfrac{GM_e}{3R_e}}=\sqrt{\dfrac{gR_e}{3}}=4.56\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$v_2=\sqrt{\frac{GM_e}{13R_e}}=\sqrt{\frac{gR_e}{13}}=2.19\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

设探测器在椭圆轨道两交点处的速度分别为 v_1' 和 v_2'，由能量守恒定律有

$$-G\frac{M_e m}{3R_e}+\frac{1}{2}mv_1'^2=-G\frac{M_e m}{13R_e}+\frac{1}{2}mv_2'^2$$

由角动量守恒定律有

$$mv_1'(3R_e)=mv_2'(13R_e)$$

解得 $v_2'=\sqrt{\dfrac{3GM_e}{104R_e}}=\sqrt{\dfrac{3}{104}gR_e}=1.34\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$v_1'=\frac{13}{3}v_2'=5.81\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

则两个交点处速度增加量分别是

$$v_1'-v_1=1.25\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_2-v_2'=0.85\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（2）两次变轨所需的能量为

$$\Delta E=\frac{1}{2}m\left(v_1'^2-v_1^2\right)+\frac{1}{2}m\left(v_2^2-v_2'^2\right)=2.4\times10^{10}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

3-15　解：由题意可知，碎片离盘时的初速度为

$$v_0=\omega R$$

因此碎片上升的最大高度

$$h_m=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{\omega^2R^2}{2g}$$

碎片离盘前后，由于碎片和余下部分组成的系统不受外力矩，系统角动量守恒，设碎片离盘后，余下部分的角速度 ω'，则

$$\frac{1}{2}MR^2\omega=\left(\frac{1}{2}MR^2-mR^2\right)\omega+m\omega R^2$$

得 $\omega'=\omega$

说明圆盘破碎后的角速度保持不变。

余下部分的角动量

$$L=\left(\frac{1}{2}MR^2-mR^2\right)\omega'=\left(\frac{M}{2}-m\right)R^2\omega$$

余下部分的转动动能

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega'^2 = \frac{1}{4}\left(M-2m\right)R^2\omega^2$$

3-16　解：（1）子弹与棒为一系统，子弹入棒过程极短，棒还没来得及转动，则系统所受合力矩为 0，故角动量守恒

$$mv_0 l = \left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ml^2\right)\omega_0$$

所以 $\omega_0 = \dfrac{mv_0}{\frac{1}{3}m_0 l + ml}$

（2）当棒摆动时，选子弹、棒、地球为一系统，则其机械能守恒。设下垂棒的下端点为重力势能零位置，则

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ml^2\right)\omega_0^2 + mg\frac{l}{2} = m_0 gl + mgl$$

所以 $v_0 = \dfrac{1}{m}\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}m_0 + m\right)\left(m_0 + 2m\right)gl}$

3-17　证明：对 A 受力分析，由转动定律得

$$-m_1 g\mu r_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}\beta_1 \quad （1）$$

同理对 B 受力分析得

$$m_1 g\mu r^2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}\beta_2 \quad （2）$$

且由题意可知

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad （3）$$

$$\omega_1 = \omega + \beta_1 t \quad （4）$$

$$\omega_2 = \beta_2 t \quad （5）$$

联立以上几式得 $t = \dfrac{\omega r_1}{\beta_2 r_2 - \beta_1 r_2} = \dfrac{m_2 r_2 \omega}{2\mu g(m_1 + m_2)}$

3-18　解：空的圆环与小球系统 $J_0\omega_0 = \left(J_0 + mR^2\right)\omega$　　(1)

无外力矩角动量守恒得　$\dfrac{1}{2}J_0{\omega_0}^2 + mgR = \dfrac{1}{2}\left(J_0 + mR^2\right)\omega^2 + \dfrac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2$　　(2)

机械能守恒，解得 $$v_{\mathrm{B}}=\sqrt{2gR+\frac{J_0\omega_0{}^2R^2}{J_0+mR^2}}$$

小球滑到 c 点时，由角动量守恒定律，系统的角速度又恢复至ω_0，又由机械能守恒定律， $$\frac{1}{2}mv_c^2=mg\left(2R\right)$$ 得 $v_c=\sqrt{4gR}$

第四章

4-1 解 ：一个分子碰撞给器壁的冲量为 $2mv\cos 45^{\circ}=\sqrt{2}mv$

单位时间由于碰撞给器壁的冲量为 $10^{23}\left(\sqrt{2}mv\right)$

器壁在单位时间面积上受到的冲力（即压强）为 $p=\dfrac{10^{23}\left(\sqrt{2}mv\right)}{S}\approx 1.16\times 10^{3}\ \mathrm{Pa}$

4-2 解：$\because p=\dfrac{1}{2}nm\overline{v}^{2}$

m 相同，n 相同

$$\therefore p_A:p_B:p_C=\overline{v}_A^{2}:\overline{v}_B^{2}:\overline{v}_C^{2}=\left(\sqrt{\overline{v}_A^{2}}:\sqrt{\overline{v}_B^{2}}:\sqrt{\overline{v}_C^{2}}\right)^2=1:4:16$$

4-3 解：因为 $n=\dfrac{p}{kT}$ (1)

$n=\dfrac{\rho N_A}{M_{mol}}$ (2)

由以上两式得

$$M_{mol}=\frac{\rho N_A kT}{p}=\frac{\rho RT}{p}=\frac{11.3\times 8.31\times\left(273+27\right)\times 10^{-3}}{1.0\times 10^{-2}\times 1.01\times 10^{5}}\mathrm{kg/mol}=2.789\times 10^{-2}\ \mathrm{kg/mol}$$

4-4 解： (1) $\overline{v}=1.6\sqrt{\dfrac{RT}{M}}=1.6\sqrt{\dfrac{8.31\times 273}{32\times 10^{-3}}}=4.26\ \mathrm{m/s}$

(2) $n=\dfrac{p}{kT}=\dfrac{1.01\times 10^{5}}{1.38\times 10^{-23}\times 273}=2.68\times 10^{25}$ 个$/m^3$

1 秒内氧分子与箱子碰撞的次数

$$N=6\times\left(\frac{n\overline{v}}{4}\right)=6\times\frac{2.68\times 10^{25}\times 426}{4}=1.71\times 10^{28}$$

4-5 答：说法正确的是 A,B,C

4-6 解：$v=\dfrac{pV}{RT}=\dfrac{5\times 10^{-6}\times 1.013\times 10^{5}\times 10\times 10^{-6}}{760\times 8.31\times 3000}=2.67\times 10^{-12}\ \mathrm{mol}$

管内空气分子个数 $N=\mu N_A=2.67\times 10^{-12}\times 6.02\times 10^{23}=1.61\times 10^{12}$ 个

空气分子平均平动动能总和为

$$N\overline{\varepsilon}_k=N\cdot\frac{3}{2}kT=1.61\times 10^{12}\times\frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 300=10^{-8}\ \mathrm{J}$$

平均动能总和是$N\cdot\frac{5}{2}kT=1.61\times10^{12}\times\frac{5}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300=1.67\times10^{-8}$ J

4-7　解　(1) O_2、He

(2) 速率在$v\sim v+\Delta v$区间内分子数占总分子数的百分比

(3) 所有速率区间内分子数的总和，等于100%

4-8　解　(1)　$\int_{v_0}^{\infty}Nf(v)\mathrm{d}v$

(2)　$\dfrac{\int_{v_0}^{\infty}vf(v)\mathrm{d}r}{\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v}$

(3)　$\int_{v_0}^{\infty}f(v)\mathrm{d}v$

4-9　解：$\because\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$　　　$p=\dfrac{\rho}{M}RT$

$$\therefore\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=\sqrt{\frac{3\times1.0\times10^3}{1.26\times10^{-2}}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\approx488\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

4-10　解：$\overline{v_0}=\sqrt{\dfrac{8kT_0}{\pi m}}$，$\overline{z_0}=\sqrt{2}\pi d^2n\overline{v_0}$，$\overline{\lambda_0}=\dfrac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2P_0}$

$$\therefore\bar{v}=\sqrt{\frac{8k\left(2T_0\right)}{\pi m}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m}}=\sqrt{2}\overline{v_0}$$

$$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2n\bar{v}=\sqrt{2}\pi d^2n\left(\sqrt{2}\overline{v_0}\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\pi d^2n\overline{v_0}\right)=\sqrt{2}\overline{z_0}$$

$$\bar{\lambda}=\frac{k(2T_0)}{\sqrt{2}\pi d^2(2p_0)}=\frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi d^2p_0}=\overline{\lambda_0}$$

4-11　解：（1）由归一化条件$\int_0^{\infty}f(v)\mathrm{d}v=1$，得

$$\int_0^{v_0}\frac{a}{Nv_0}v\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}(2a-\frac{a}{v_0}v)\frac{\mathrm{d}v}{N}=1$$

解得$a=\dfrac{N}{v_0}$

（2）$\int_{v_0}^{\infty}Nf(v)\mathrm{d}v=N\int_{v_0}^{2v_0}\left(2a-\dfrac{a}{v_0}v\right)\dfrac{\mathrm{d}v}{N}=\int_{v_0}^{2v_0}\left(\dfrac{2N}{v_0}-\dfrac{N}{v_0^2}v\right)\mathrm{d}v=\dfrac{N}{2}$

（3）$\overline{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0}v\frac{a}{Nv_0}v\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}v\frac{2a-\frac{a}{v_0}v}{N}\mathrm{d}v=v_0$

4-12　解：（1）设分子数为 N，由 $E=N\cdot\frac{i}{2}kT$ 及 $p=\frac{N}{v}kT$ 得

$p=\frac{2E}{iV}=1.35\times10^5\ \mathrm{Pa}$

（2）由 $\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT$ ，$E=N\cdot\frac{5}{2}kT$ 得

$\overline{\varepsilon_t}=\frac{3E}{5N}=7.5\times10^{-21}\ \mathrm{J}$

$T=\frac{2E}{5Nk}=362\ \mathrm{K}$

4-13　解：由内能公式有 $E_1=\nu_1\cdot\frac{i}{2}RT_1$，$E_2=\nu_2\cdot\frac{i}{2}RT_2$

所以 $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\nu_2T_2}{\nu_1T_1}=\frac{N_2T_2}{N_1T_1}$

由压强公式 $p_1=\frac{N_1}{V}kT_1$，$p_2=\frac{N_2}{V}kT_2$ 得

$\frac{E_2}{E_1}=\frac{p_2}{p_1}$

4-14　解：根据气体分子平均速率公式，初始时分子平均速率为 $\overline{v_0}\approx1.60\sqrt{\frac{RT_0}{M}}$

变化后的气体分子平均速率 $\overline{v}=1.60\sqrt{\frac{R\left(4T_0\right)}{M}}=2\overline{v_0}$

初始时气体数密度 $n_0=\frac{N}{2V_0}=\frac{n_0}{2}$

变化后平均碰撞频率 $\overline{z}=\sqrt{2}n\pi d^2\overline{v}=\sqrt{2}\frac{n_0}{2}\pi d^2 2\overline{v_0}=\overline{z_0}$

平均自由程 $\overline{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}=\frac{1}{\sqrt{2}\frac{n_0}{2}\pi d^2}=2\overline{\lambda_0}$

4-15　解：由理想气体平均速率公式有

$\overline{v_1}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_1}}$，$\overline{v_2}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_2}}$

所以 $\frac{\overline{v_1}}{\overline{v_2}}=\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$

由已知可得$E=\dfrac{m_1}{M_1}\left(\dfrac{3}{2}RT\right)=\dfrac{m_2}{M_2}\left(\dfrac{3}{2}RT\right)$，即$\dfrac{M_2}{M_1}=\dfrac{m_2}{m_1}$

故$\dfrac{\overline{v_1}}{\overline{v_2}}=\sqrt{\dfrac{M_2}{M_1}}=\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$

4-16　解：为使气体分子之间不相碰，则必须使分子的平均自由程不小于容器的直径，必须满足$\overline{\lambda}\geq 2R$

因为$\overline{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

则$n=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\overline{\lambda}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2(2R)}$

所以$N=n_{\max}V=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2(2R)}\cdot\dfrac{\sqrt{2}R^2}{3d^2}$

第五章

5-1　解：一定量的理想气体处于热平衡状态时，此热力学系统不随时间变化的三个客观量是 $\underline{p, V, T}$，而随时间变化的微观量是 $\underline{\bar{v}, f}$。

5-2　解：热力学系统的内能可以通过<u>热传递</u>或者<u>做功</u>的方式，或者二者都有的方式来改变，系统内能的改变完全取决于<u>系统的初末状态</u>，而与<u>过程</u>无关。

5-3　解：A,C,D

5-4　解：(1) $A=\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V=\int_{V_1}^{V_2}\frac{a^2}{V^2}\mathrm{d}V=a^2\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$

(2) $\frac{T_1}{T_2}=\frac{p_1V_1}{vR}:\frac{p_2V_2}{vR}=\frac{\frac{a^2}{V_1^2}V_1}{vR}:\frac{\frac{a^2}{V_2^2}V_2}{vR}=V_2:V_1$

5-5　解：ab 过程为等体升温过程。$Q_{ab}=v\frac{i}{2}R\left(T_2-T_1\right)-vRT_2\ln\frac{p_b}{p_a}=Q_2<Q_1$

$\therefore$ 答案 B。

5-6　解：等温膨胀过程，$Q_T=3RT_0\ln\frac{5V_0}{V_0}=3RT_0\ln 5=1.1\times10^4\ \mathrm{J}$

等体升压过程

$Q_V=\Delta E=3C_{V,m}\Delta T=3C_{V,m}\left(5T_0-T_0\right)=12C_{V,m}T_0=12\times273\times C_{V,m}=3276C_{V,m}$

$Q_{总}=Q_T+Q_V=1.1\times10^4+3276C_{V,m}=8\times10^4\ \mathrm{J}\quad C_{V,m}=21.06\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$

$\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{c_V+R}{c_V}=\frac{21.06+8.31}{21.06}=1.4$

5-7　解：（1）abc 过程是吸热过程

$\because$ ac 是等温线　$\therefore \Delta E_{ac}=0$

$Q_{abc}=\Delta E_{ac}+A_{abc}=\Delta E_{ac}+S_{abc}>0$　（S_{abc} 代表曲线 abc 下的面积）即 abc 过程吸热。

（2）def 过程是放热过程

循环 defd 为逆循环过程，所以 $Q_{defd}=Q_{def}+Q_{fd}<0$

又因为 $Q_{fd}=0$　（df 为绝热线）

所以 $Q_{def}<0$，即 def 过程放热

5-8　解：根据热力学第一定律 $Q_{AB}=\Delta E_{AB}+S_{AB}$，$Q_{AC}=\Delta E_{AC}+S_{AC}=0$（AC 绝热过程），

$Q_{AD}=\Delta E_{AD}+S_{AD}$

又因为$T_B=T_C=T_D$，所以$\Delta E_{AB}=\Delta E_{AC}=\Delta E_{AD}=-S_{AC}$

所以$Q_{AB}=-S_{AC}+S_{AB}<0$　　$Q_{AD}=-S_{AC}+S_{AD}>0$

即$A\to B$过程气体放出热量，$A\to D$过程气体吸收热量。

5-9　解：过程Ⅰ $Q_{\text{I}}=\Delta E+W=\dfrac{5}{2}R\Delta T+\dfrac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(V_2-V_1\right)$

过程Ⅱ $p_2V_2^{\frac{1}{2}}=p_3V_3^{\frac{1}{2}}=p_1V_3^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore V_3=\frac{p_2^2}{p_1^2}V_2=\left(\frac{4.04\times10^5}{1.01\times10^5}\right)^2\times2\times10^{-3}=32\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

$$W_{\text{II}}=\int_{V_2}^{V_3}PdV=\int_{V_2}^{V_3}\frac{c}{\sqrt{V}}dV=2c\left(\sqrt{V_3}-\sqrt{V_2}\right)=2\left(p_3V_3-p_2V_2\right)=4848\ \text{J}$$

$$Q_{\text{II}}=\Delta E+W_{\text{II}}=\frac{5}{2}R\Delta T+W_{\text{II}}=\frac{5}{2}\left(p_3V_3-p_2V_2\right)+4848\text{J}=10908\ \text{J}$$

故：$Q_{总}=Q_{\text{I}}+Q_{\text{II}}=2020\ \text{J}+10908\ \text{J}=12928\ \text{J}$

5-10　解：氩气摩尔定容热容$C_{V,m}=\dfrac{3}{2}R$

氩气定容比热容$C_V=\dfrac{C_{V,m}}{M}=\dfrac{C_{V,m}}{mN_A}=\dfrac{\frac{3}{2}R}{mN_A}$

氩原子质量$m=\dfrac{\frac{3}{2}R}{C_VN_A}=\dfrac{\frac{3}{2}R}{C_V}=\dfrac{1.5\times1.38\times10^{-23}}{314}=6.59\times10^{-26}\ \text{kg}$

5-11　解：（1）A部分气体经历绝热过程，则

$$p_{\text{A}}V_{\text{A}}^{\gamma}=p_{\text{A0}}V_{\text{A0}}^{\gamma}=1.013\times10^3\times\left(20\times10^{-3}\right)^{1.4}=4.2\times10^2$$

由于活塞滑动过程中

$$P_{\text{A}}=P_{\text{B}},V_{\text{A}}=V_{总}-V_{\text{B}}=40\times10^{-3}-V_{\text{B}}$$

代入上式得

$$p_{\text{B}}\left(0.04-V_{\text{B}}\right)^{1.4}=4.2\times10^2$$

即B中气体过程方程为$p_{\text{B}}\left(0.04-V_{\text{B}}\right)^{1.4}=420$

（2）$T_{\mathrm{A}}=T_{\mathrm{A0}}\left(\dfrac{V_{\mathrm{A0}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)^{1.4-1}$

$$=\frac{p_{\mathrm{A0}}V_{\mathrm{A0}}}{R}\left(\frac{V_{\mathrm{A0}}}{V_{\mathrm{A}}}\right)^{0.4}=\frac{1.013\times10^{5}\times0.02}{8.31}\times\left(\frac{0.02}{0.01}\right)^{0.4}\ \mathrm{K}=322\ \mathrm{K}$$

$$p_{\mathrm{B}}=\frac{420}{\left(0.04-V_{\mathrm{B}}\right)^{1.4}}=\frac{420}{\left(0.04-0.03\right)^{1.4}}\ \mathrm{Pa}=267305\ \mathrm{Pa}$$

$$T_{\mathrm{B}}=\frac{p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}}{R}=\frac{267305\times0.03}{8.31}\ \mathrm{K}=965\ \mathrm{K}$$

（3）
$$\begin{aligned}Q_{\mathrm{B}}&=\Delta E_{\mathrm{B}}+A_{\mathrm{B}}=\frac{5}{2}R\left(T_{\mathrm{B}}-T_{\mathrm{B0}}\right)+\int_{V_{\mathrm{B0}}}^{V_{\mathrm{B}}}p_{\mathrm{B}}\mathrm{d}V_{\mathrm{B}}\\&=\frac{5}{2}R\left(T_{\mathrm{B}}-\frac{p_{\mathrm{B0}}V_{\mathrm{B0}}}{R}\right)+\int_{V_{\mathrm{B0}}}^{V_{\mathrm{B}}}\frac{420}{\left(0.04-V_{\mathrm{B}}\right)^{1.4}}\mathrm{d}V_{\mathrm{B}}\\&=\frac{5}{2}R\left(T_{\mathrm{B}}-\frac{p_{\mathrm{B0}}V_{\mathrm{B0}}}{R}\right)+\frac{420}{-0.4}\left[\left(0.04-V_{\mathrm{B0}}\right)^{-0.4}-\left(0.04-V_{\mathrm{B}}\right)^{-0.4}\right]\\&=1.66\times10^{4}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

5-12　解：因为 AB、CD 是绝热过程，因此 ABCDEA 循环中，仅 BEC 和 DEA 两过程与外界有热量交换。

$$Q_{ABCDEA}=A_{净功}=\left(80-40\right)\ \mathrm{J}=40\ \mathrm{J}=Q_{BEC}+Q_{DEA}=Q_{BEC}-120$$

所以 $Q_{BEC}=40+120=160\ \mathrm{J}$

5-13　解：在此循环中：

ab 过程：等容增压，$\Delta E>0, A=0$，故 $Q>0$，吸热；

bc 过程：等压膨胀，$A>0,\Delta E>0$，故 $Q>0$，吸热；

cd 过程：等容降压，$T\downarrow, A=0,\Delta E<0$，故 $Q<0$，放热；

da 过程：等压压缩，$V\downarrow, A<0,\Delta E<0$，故 $Q<0$，吸热。

（1）气体一次循环从外界吸收的热量为

$$\begin{aligned}Q_1&=Q_{ab}+Q_{bc}=\frac{3}{2}R\left(T_b-T_a\right)+\frac{5}{2}R\left(T_c-T_b\right)\\&=\frac{3}{2}\left(p_bV_b-p_aV_a\right)+\frac{5}{2}\left(p_cV_c-p_bV_b\right)\\&=\frac{3}{2}\times\left[2\times10^{-3}\times\left(2-1\right)\times10^{4}\right]\mathrm{J}+\frac{5}{2}\times\left[2\times10^{4}\times\left(3-2\right)\times10^{-3}\right]\mathrm{J}\\&=80\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

（2）整个循环所做净功等于 $p-V$ 图中该循环所包围的面积，即

$$A_{净功} = S_{abcda} = \left[(2-1)\times 10^4 \times (3-2)\times 10^{-3}\right] \text{J} = 10 \text{ J}$$

5-14　解：$\Delta E = \dfrac{m}{M} C_{v_1 m} \Delta T = 0$

$$Q = \frac{m}{M} C_{p_1 m}(T_2 - T_1) + \frac{m}{M} C_{v_1 m}(T_3 - T_2)$$

$$= \frac{5}{2}(p_1 V_2 - p_1 V_1) + \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_2) = \frac{11}{2} p_1 V_1 = 5.6\times 10^2 \text{ J}$$

$$A = Q = 5.6\times 10^2 \text{ J}$$

5-15　解：（1）此热机效率　　$\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{-73+273}{27+273} = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \approx 33.3\%$

（2）$Q_{吸} = \dfrac{m}{M} R T_1 \ln \dfrac{2.718V}{V} = \dfrac{290\times 10^{-3}}{29\times 10^{-3}} \times 8.31 \times (27+273) \ln 2.718 = 2.493\times 10^4 \text{ J}$

$$A = \eta Q_{吸} = 33.3\% \times 2.493\times 10^4 = 8.31\times 10^3 \text{ J}$$

5-16　解：$A \to B$ 吸热 $Q_1 = \dfrac{m_0}{M} C_{p_1,m}(T_c - T_A)$

$C \to D$ 放热 $Q_2 = \dfrac{m_0}{M} C_{p_1,m}(T_C - T_D)$

效率　　$\eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{T_C - T_D}{T_B - T_A}$

$$= 1 - \frac{T_C\left(1 - \dfrac{T_D}{T_C}\right)}{T_B\left(1 - \dfrac{T_A}{T_B}\right)} \tag{1}$$

对 $D \to A$、$B \to C$ 两准静态绝热过程有

$$\begin{cases} p_D^{1-\gamma} T_D^{\gamma} = p_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} \\ p_C^{1-\gamma} T_C^{\gamma} = p_B^{1-\gamma} T_B^{\gamma} \end{cases}$$

式（2）除以（3），且代入 $p_C = p_D, p_A = p_B$，得

$$\left(\frac{T_D}{T_C}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\gamma}$$

所以

将式（4）代入式（1），则有

$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_B} = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

5-17　解：答案 D

5-18　解：用统计观点解释：不可逆过程实质上是一个热力学概率较小的状态向热力学概率较大的状态转变的过程，一切实际过程都向熵增加（围观状态数增加）的方向进行

5-19　解：设初态为 $A(p_A, V_A, T_A)$，经等容过程后状态为 $B(p_B, V_A, T_B)$，再经过等压过程后达到末态 $C(p_B, V_C, T_C)$。

熵是态函数，可以在初、末两态间的任选一个可逆过程进行计算。可选择两条路径：

（1）就按实际进行的路径 AB（等容）及 BC（等压）;

（2）沿等温过程 AC，分别计算。

（1）等容-等压过程

经过等容 AB 过程，熵变

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{C_{V,m}\mathrm{d}T}{T} = 2C_{V,m} \ln \frac{T_B}{T_A}$$

经过等压 BC 过程，熵变

$$\Delta S_2 = \int_B^C \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{2\left(C_{V,m} + R\right)\mathrm{d}T}{T}$$

$$= 2C_{V,m} \ln \frac{T_C}{T_B} + 2R \ln \frac{T_C}{T_B}$$

由题意知 $T_C = T_A$

所以 $\Delta S_2 = 2C_{V,m} \ln \frac{T_A}{T_B} + 2R \ln \frac{T_A}{T_B}$

故由初态 A 到末态 C 的熵变

$$\Delta S = S_C - S_A = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= 2C_{V,m} \ln \frac{T_B}{T_A} + 2C_{V,m} \ln \frac{T_A}{T_B} + 2R \ln \frac{T_A}{T_B} = 2R \ln \frac{T_A}{T_B}$$

再由题意 $p_A = 3p_B$，又 AB 为等容过程，有 $\frac{T_A}{p_A} = \frac{T_B}{p_B}$，即

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{p_A}{p_B} = 3$$

所以 $\Delta S = 2R \ln \frac{T_A}{T_B} = 2 \times 8.31 \ln 3 \ \mathrm{J \cdot K^{-1}} = 18.3 \ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

（2）等温过程 AC

$$\Delta S=\int_A^C\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_A^C\frac{p\mathrm{d}V}{T}=\int_{V_A}^{V_C}\frac{2R}{V}\mathrm{d}V=2R\ln\frac{V_C}{V_A}$$

其中 $V_C=\dfrac{2RT_A}{p_B}$，$V_A=\dfrac{2RT_A}{p_A}$

所以 $\Delta S=2R\ln\dfrac{p_A}{p_B}=2R\ln 3=18.3\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$

二者的结果相同。因此，熵差只与始、末状态有关，与中间经过的可逆过程无关。

5-20　解：熵是系统混乱度（无序度）的定量量度。一定量的理想气体，经历一个等温膨胀过程，它的熵将增加。

5-21　解：整个系统与外界无热量传递，不做功，所以绝热筒内两部分空气内能不变，故温度不变，为 $300\ \mathrm{K}$。

设两部分气体末压强为 p_1，左侧体积为 V_1，右侧体积为 $\left(2V_0-V_1\right)$。由两部分各自的状态方程得

$$p_0V_0=p_1V_1$$

$$2p_0V_0=p_1\left(2p_0-V_1\right)$$

所以 $V_1=\dfrac{2}{3}V_0$

所以 $p_1=\dfrac{3}{2}p_0=\dfrac{3}{2}\times1.013\times10^5\ \mathrm{Pa}=1.52\times10^5\ \mathrm{Pa}$

在两部分气体初末态间均设计等温可逆过程，计算熵变。

$$\begin{aligned}\Delta S&=\Delta S_{左}+\Delta S_{右}=\int\frac{\delta Q_{左}}{T}+\int\frac{\delta Q_{右}}{T}=\int\frac{p_{左}\mathrm{d}V}{T_0}+\int\frac{p_{右}\mathrm{d}V}{T_0}\\&=\frac{p_0V_0}{T_0}\int_{V_0}^{\frac{2}{3}V_0}\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{2p_0V_0}{T_0}\int_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0}\frac{\mathrm{d}V}{V}\\&=\frac{p_0V_0}{T_0}\ln\frac{2}{3}+\frac{2p_0V_0}{T_0}\ln\frac{4}{3}\\&=\frac{p_0V_0}{T_0}\left(\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{1.013\times10^5\times10^{-3}}{300}\left(\ln\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{3}\right)\mathrm{J\cdot K^{-1}}\\&=0.0574\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}\end{aligned}$$

第六章

6-1　解：如题 7-1 图所示选取坐标，在 x 位置处取电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x=\frac{Q}{L}\mathrm{d}x$$

其激发的电场强度 $\mathrm{d}E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{(a-x)^2}$ （方向沿 x 方向）

所以 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{L}\displaystyle\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{1}{\left(a-\frac{L}{2}\right)}-\frac{1}{\left(a+\frac{L}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{Q}{\pi\varepsilon_0\left(4a^2-L^2\right)}$$

于是 $F=qE=\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0\left(4a^2-L^2\right)}$

6-2　解：如题 6-2 解图所示，定义极轴 $\boldsymbol{p}_c=q\boldsymbol{l}$ （方向从负到正）

根据电场强度叠加原理可知，，轴线上一点 p 的电场强度

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$$

考虑方向，P 点电场强度的大小表示为

$$E_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}$$

当 $r\gg l$ 时 $E_p\approx\dfrac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

考虑方向 $\boldsymbol{E}_p=\dfrac{2\boldsymbol{p}_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

中垂线上一点 Q 的电场强度 $\boldsymbol{E}_Q=\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$

考虑方向，有 $E_{Qy}=E_+\sin\theta+E_-\sin\theta=0$

$$E_{Qx} = E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r^2 + \dfrac{l^2}{4}} \cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{r^2 + \dfrac{l^2}{4}} \cdot \frac{l/2}{\left(r^2 + \dfrac{l^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{ql}{\left(r^2 + \dfrac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

当 $r \gg l$ 时 $E_{Qx} \approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{p_{\mathrm{e}}}{r^3}$

考虑方向 $E_Q = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{-p_{\mathrm{e}}}{r^3}$

6-3　解：如图所示在球面上任取一细圆环，所带的电荷为

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}s = \sigma \cdot 2\pi R \sin\alpha \cdot R\mathrm{d}\alpha$$

带电量 $\mathrm{d}q$ 的细圆环在 O 点的场强为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} \boldsymbol{i}$$

利用几何关系 $r = R\sin\alpha, x = R\cos\alpha, x^2 + r^2 = R^2$ 统一积分变量有

$$\mathrm{d}E = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^3} 2\pi R^2 \sigma \sin\alpha \mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cos\alpha \sin\alpha \mathrm{d}\alpha$$

积分得球心 O 处的电场强度的大小为

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\alpha \cos\alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

方向沿 x 轴方向。

6-4　解:由高斯定律$\oint_S E\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$求得电场分布，在圆通内即$r<R$时

$$\oint_S E_1\cdot\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q=0$$

$$E_1=0$$

当$r\geq R$时，$\oint_S E_2\cdot\mathrm{d}S==\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$，即

$$E_2 2\pi rl=\frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

故 $$E=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r\geq R)\end{cases}$$

所画出的$E-r$曲线如题 7-4 解图所示。

6-5　解:（1）$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}-x\right)}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\left(\frac{a}{2}+x\right)}=\frac{2\lambda x}{\pi\varepsilon_0\left(a^2-4x^2\right)}$

当$E>0$，没 x 正向；当$E<0$，没 x 轴负向

（2）任一带电线均处于另一带电线的电场中，故其单位长度受力大小为

$$F=Eq=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

均匀带负电直线受力方向沿x轴正向，均匀带正电直线受力方向沿 x 轴负方向

6-6　解:如题 6-6 解图所示，完整的体电荷密度为ρ的均匀带电球体在空腔中任一点 P 处的电场强度为　$\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_1$

体电荷密度为$-\rho$球心在O_2的带电小球在任一点P处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}_2$$

故空腔内任一点的场强为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

由矢量几何关系 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}$ 得 $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$

即空腔内任一点的场强大小为 $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}a$

可见空腔内为匀强电场。

6-7　解：以 q 为球心，$\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{h}{2}\right)^2}$ 为半径作一球面，通过圆锥体侧面的电场强度通量等于通过整个球面的电通量减去以圆锥底面为底的球冠面的电通量。

整个球面的电通量 $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

以圆锥底面为底的球冠面的电通量，

$$\Phi' = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{S'}{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{2\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{h}{2}\right)}{4\pi\left[R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]} = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{h/2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right]$$

故圆锥侧面的电通量 $\Phi_{\text{侧}} = \Phi - \Phi' = \dfrac{q}{2\varepsilon_0}\left[1 + \dfrac{h/2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}\right]$

6-8　解：补上七个与题中给的同样的小立方体构成的大的立方体，使 q 位于正中心，则由高斯定理有

$$\Phi = \oint_S E \cdot \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

而 $\Phi_{abcd} = \dfrac{1}{24}\Phi = \dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

6-9　解：（1）如题 6-9 解图所示，$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V &= \frac{qr}{\pi R^4} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{4q}{R^4} r^3 \mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$Q=\int \mathrm{d}q=\frac{4q}{R^4}\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{4q}{4R^4}R^4=q$$

（2）由于电荷分布的球对称性，在球内作球形高斯面，则

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S_{内}}\mathrm{d}q$$

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2 E_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S_{内}}\mathrm{d}q=\frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}\int \rho \mathrm{d}V=\frac{4q}{\varepsilon_0 R^4}\int_0^r r^3\mathrm{d}r=\frac{qr^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

所以$E_1=\dfrac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\ (r<R)$

$\boldsymbol{E}_1$方向沿径向外指。

同理，在球外$E_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ (r>R)$

$\boldsymbol{E}_2$方向亦沿径向外指。

（3）$U_\infty=0$，球内任一点电势

$$U=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}l=\int_r^R \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}l+\int_R^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}l$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\int_r^R r^2\mathrm{d}r+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^R\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(4-\frac{r^3}{R^3}\right)\ (r<R)$$

同理，在球外任一点电势

$$U=\int_r^\infty \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}l=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (r>R)$$

6-10　解：根据电势差事绝对的及 B 点电势$U_B=0$，因

$$\mathrm{d}U_+=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(x+l)}\qquad dU_-=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\lambda \mathrm{d}x}{(x+l)}$$

所以$U_0=\int_1^{2l}\mathrm{d}U_++\int_0^1\mathrm{d}U_-=\int_1^{2l}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda \mathrm{d}x}{(x+l)}+\int_0^1\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-\lambda \mathrm{d}x}{(x+l)}=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{3}{4}$

由对称性得$U_p=0$

6-11　解：由高斯定理求得电场分布，在球体内部即$r \le R$时

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$$

$$E_1\left(4\pi r^2\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{k}{r}4\pi r^2 dr = \frac{2\pi k}{\varepsilon_0}r^2$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{k}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

同理，在球体外即$r > R$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \frac{k}{r}4\pi r^2 dr = \frac{2\pi k}{\varepsilon_0}R^2$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

由电势$U_p = \int_p^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$可求得各区域的电势分布，在球体内即$r \le R$时

$$U_1 = \int_r^R \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_R^\infty \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(R-r\right) + \frac{kR}{2\varepsilon_0} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(2R-r\right)$$

在球体外即$r > R$时$U_2 = \int_r^\infty \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0 r}$

6-12　解：（1）因为$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

所以最大力矩$M = 2F\dfrac{l}{2} = qEl = 8.0\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m}$

（2）在转角θ处受力矩$M = qlE\cos\theta$

$$A = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} qlE\cos\theta d\theta = qlE = 8.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

6-13　解：电场力是保守力，其做功仅与始、末位置有关，与路径无关，所以

$$A_{BCD} = q\Delta U_{BCD} = q\left(U_B - U_D\right)$$

以无穷远处为零电势点，则

$$U_B = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_D = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3R} - \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{7}{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以$A_{BCD}=q\left(U_B-U_D\right)=q\left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{7}{3}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

6-14　解：取圆盘中半径为 r 和$r+\mathrm{d}r$之间的圆环，每一圆环所带电荷量为$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$，

圆环轴线上的电势为$\mathrm{d}U\left(x\right)=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+R^2}}$

$$U\left(x\right)=\int_0^R \mathrm{d}U\left(x\right)=\int_0^R\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2+R^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

（2）电场强度$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\boldsymbol{i}$

6-15　解：无限大平面导体板 B 在在 A 板激发的电场中，有静电感应，最终达到平衡，如图 6-15 解图所示，设两表面的感应电荷面密度分别为σ_1和σ_2，在导体板 B 中任选一点 P，根据静电平衡条件及电荷守恒定律，有

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0 \quad (1)$$

$$\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\cdot S=0 \quad (2)$$

联立以上两式，有$\sigma_1=-\frac{\sigma}{2}$

$$\sigma_2=\frac{\sigma}{6}$$

6-16　解：A、B 两极板处于静电平衡状态，设电荷分布如题 6-16 解图所示，B 板接地，说明 B 板电势为零，即$E_N=0$，考虑静电平衡条件及电荷守恒定律，有

$$E_P=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (1)$$

$$E_Q=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (2)$$

$$E_N=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (3)$$

$$\left(\sigma_1+\sigma_2\right)S=Q_1 \quad (4)$$

$$\left(\sigma_3+\sigma_4\right)S=Q_2 \quad (5)$$

联立以上五式，得

$\sigma_1 = \sigma_4 = 0$

$\sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{Q}{S}$

则 A、B 板间任意一点 M 处的电场强度

$$E_M = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$$

E_M 的方向由 A 板指向 B 板。

6-17　解：设 A 板两侧的电荷分别为 q_1 和 q_2，则 B 板和 C 板各自的感生电荷为 $-q_1$ 和 $-q_2$，由电荷守恒可得

$$Q_A = q_1 + q_2 = 3.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

由分析可知 A 板是等势的，也就是说 $U_{AC} = U_{AB}$

由平板电容器的表达式 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ 可得

$$C_{AB} d_{AB} = C_{AC} d_{AC}$$

又已知 $C_{AB} = \dfrac{q_1}{U_{AB}}$，$C_{AC} = \dfrac{q_2}{U_{AC}}$，

有 $q_2 = \dfrac{d_{AB}}{d_{AC}} q_1 = 2q_1$

由（1）、（2）联立方程组可得

$q_1 = 1.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}$，$q_2 = 2.0\times10^{-7}\ \mathrm{C}$；

A 板相对于地的电势为

$$U_A = U_{AB} = \frac{q_1 d_{AB}}{\varepsilon_0 S} = 2.3\times10^4\ \mathrm{V}$$

6-18　解：如图 6-18 解图所示，考虑静电感应，空腔内放一 $+q$ 点电荷，在壳内感应出 $-q$ 电荷（在表面上分布不均匀，这是因为 $+q$ 不在球心 O 处），外表面感应出 $+q$ 电荷。外壳接地后，球壳电势为零，因外界无电场,所以球壳外 $E = 0$。即接地后，球壳外表面无电荷分布。

选无穷远处为零电势参考点，根据电势叠加原理，有

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \iint_{\text{球壳}} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{\iint_{球壳}\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{R}\right)$$

6-19　解：金属球 A 与壳之间$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$，方向沿矢径$r$的方向。

所以$U_{AB}=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_B}^{R_A}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$，$R_A$为金属球 A 的半径，$R_B$为球壳半径。

故电容器的电容值$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$

6-20　解：电容器可等效为极板面积为$\frac{A}{2}$的两平板电容器并联。设有电介质部分极板表面电荷密度为σ_1，另一部分极板表面电荷密度σ_2。由高斯定理得有介质部分电容器中电场强度大小为

$$E_{空}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

电介质中场强为$E_{介}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon}$

故这部分电容器电势差为$U_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon}t+\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\left(d-t\right)$

这部分电容器电容为$C_1=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma_1\frac{A}{2}}{U_1}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 A}{2\left[t\varepsilon_0+\left(d-t\right)\varepsilon\right]}$

同理不含介质部分电容器电场强度大小为

$$E=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

电势差为$U=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d$

电容为$C_2=\dfrac{\sigma_2\dfrac{A}{2}}{U_2}=\dfrac{\varepsilon_0 A}{2d}$

总电容为$C=C_1+C_2=\dfrac{\varepsilon_0 A\left(2\varepsilon d-\varepsilon t+\varepsilon_0 t\right)}{2d\left[\varepsilon_0 t+\left(d-t\right)\varepsilon\right]}$

6-21　解：

（1）$E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q_1}{r^2} & R_1<r<R_2\\ 0 & R_2<r<R_3\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1+Q_2}{r^2} & r>R_3\end{cases}$

（2）$W_e=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}_r}\dfrac{Q_1}{r^2}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r$

$=\dfrac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

（3）$W_{\mathrm{e}}=\dfrac{\left(2\times10^{-7}\right)^2\times9\times10^9}{2\times5}\left(\dfrac{1}{3\times10^{-2}}-\dfrac{1}{6\times10^{-2}}\right)\mathrm{J}$

$=6\times10^{-4}\ \mathrm{J}$

6-22　解：设点电荷 Q 的半径为 a（相对而言 a 很小），其产生的电场强度

$\boldsymbol{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0$

则初始状态的电场能$W_1=\int_a^\infty\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^\infty\dfrac{\mathrm{d}r}{r^3}=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

末状态的电场能$W_2=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_a^R\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2}+\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2}$

$=\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{R_1}\right)+\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

外力在这个过程所做的功

$A=W_1-W_2=-\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

6-23 【解】球形电容器电容

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

能量 $$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 U^2}{R_2-R_2}$$

（2） $$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电场能量 $$W=\int_V w_e \mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_0\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

考虑到$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

所以$Q=\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}\right)U$

故$W=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 U^2}{R_2-R_1}$

6-24　解：插入介质前，电容器储存的电能为

$W_1=\frac{1}{2}CU^2=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}U^2$

电容器带电量为$Q_1=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$

插入介质后，电容器相当于两个并联电容器。插入介质后，电容器的总电容为

$C_{总}=C_1+C_2=\frac{\varepsilon S}{2d}+\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)S}{2d}U^2$

电容器带电量增加为$Q_2=C_{总}U=\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)SU}{2d}$

电容器储存的电能增加为$W_2=\frac{1}{2}C_{总}U^2=\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)S}{4d}U^2$

故增加的电能为$\Delta W=W_2-W_1=\frac{(\varepsilon+\varepsilon_0)S}{4d}U^2$

电源做的功为$A=\Delta QU=\left(Q_2-Q_1\right)U=\dfrac{\left(\varepsilon+\varepsilon_0\right)S}{2d}U^2$

第七章

7-1　解：将载流导线看作两段半无限长直电流和两段圆弧圆电流，由于O点在载流导线 AC，BD 的延长线上，有$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=0$，所以载流导线 AC，BD 在$O$点产生的磁场均为零。两段圆环在$O$点产生磁场方向相反，规定垂直纸面向外为正有

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2R}\frac{l_1}{2\pi R}-\frac{\mu_0 I_2}{2R}\frac{l_2}{2\pi R}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\left(I_1 l_1-I_2 l_2\right)$$

又因为$U=I_1R_1=I_2R_2$

即$I_1\cdot\rho\frac{l_1}{S}=I_2\cdot\rho\frac{l_2}{S}$

$I_1 l_1=I_2 l_2$

所以O点的磁感应强度$B=0$

7-2　解：将载流导线看作两段半无限长直电流和$\left(\frac{3\pi/4}{2\pi}\right)$圆电流，AM 在 O 点产生的磁感应强度大小为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方向为垂直纸面向外；

CN 在O点产生的磁感应强度大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\pi\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方向为垂直纸面向外；

圆弧部分 AC 在O点产生的磁感应强度为

$$B_3=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{3\pi/4}{2\pi}=\frac{3\mu_0 I}{16R}$$

方向为垂直纸面向外；

所以O处的总感应强度大小为

$$B=B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0 I}{16\pi R}\left(8+3\pi\right)$$

方向为垂直纸面向外。

7-3　解：$Od=\frac{l}{2}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}l$

$$Ob=l\sin 30^\circ-\frac{l}{2}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}l$$

有

$$B_{ab}=\frac{\mu_0\cdot\frac{2}{3}I}{4\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}l}\left[\cos 30^\circ-\cos\left(180^\circ-30^\circ\right)\right]=\frac{\mu_0 I}{\pi l}$$

方向：垂直向内；

$$B_{acb}=2\frac{\mu_0\cdot\frac{1}{3}I}{4\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}l}\left[\cos 30^\circ-\cos\left(180^\circ-30^\circ\right)\right]=\frac{\mu_0 I}{\pi l}$$

方向：垂直向外；

$$B_{b\infty}=\frac{\mu_0 I}{4\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}l}\left(\cos 90^\circ-\cos 180^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}$$

方向：垂直向内。

最后得 $B_O=\dfrac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}$

方向为垂直纸面向内。

8-4 解：（1）由分析可知，半径为 R 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的 $B_1=0$；半径为 r_0 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的磁感应强度由安培环路定理得

$$\oint \boldsymbol{B}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_1$$

$$B_0 2\pi d=\mu_0\pi r_0^2 j$$

所以有 $B_0=\dfrac{\mu_0 r_0^2}{2\pi d}j$

方向垂直于纸面向外。

大圆柱体轴线上的磁感应强度 $B=B_0=\dfrac{\mu_0 r_0^2}{2\pi d}j$，方向垂直于纸面向外。

（2）同理由安培环路定理得，半径为 R 的载流体圆柱体在 $O'O$ 轴上产生的磁感应强度大小为

$$B_1'=\frac{\mu_0 d}{2}j$$

方向垂直于纸面向外。

半径为 r_0 的实心载流圆柱体在 $O'O$ 轴上产生的磁感应强度为 $B_0'=0$，

故空圆柱轴线上的磁感应强度$B'=B_1'=\dfrac{\mu_0 d}{2}j$

（3）如图所示，设 P 点为空心圆柱内的任意一点，设$O'P=r_2$，$OP=r_1$，

$-j$电流在 P 点产生的磁感应强度B_2按照安培环路定理为

$\boldsymbol{B}_2=-\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}_2$

同理j电流在 P 点产生的磁感应强度B_1'为

$$\boldsymbol{B}_1=-\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}_1$$

所以 P 点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_P=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{j}\times\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\right)=\frac{\boldsymbol{\mu}_0}{2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{d}$$

其中 d 为由OO轴到 $O'O'$轴垂直距离的指向。
故空心部分为大小和方向均不变的匀强磁场，得证。

7-5　解：球面所带电荷量 $q=4\pi\varepsilon_0 RU$

电荷面密度　　　　$\sigma=\dfrac{q}{4\pi R^2}=\dfrac{\varepsilon_0 U}{R}$

取一细圆环，所带电荷量

$$\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\varepsilon_0 UR\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

细圆环以ω转动的电流

$$\mathrm{d}i=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\omega\varepsilon_0 UR\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

该细圆环电流在球心处的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}i\left(R\sin\theta\right)^2}{2R^3}=\frac{1}{2}\mu_0 U\omega\varepsilon_0\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

则$B=\int\mathrm{d}B=\dfrac{1}{2}\omega U\varepsilon_0\mu_0\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{2}{3}\omega U\varepsilon_0\mu_0$

7-6　解：如题 7-6 解图所示，在半球表面上加一半径为 R 的圆面，形成闭合曲面。由高斯定理可知此闭合曲面磁通量为零，即

$\Phi_m=\oiint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_1}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\iint_{S_2}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

故$\iint_{S_1}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint_{S_2}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$=-\iint\left(ai+bj+ck\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=-\left(ai+bj+ck\right)\cdot \pi R^2 k$$
$$=-\pi R^2 c$$

7-7　解：（1）因 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$

所以 $\Phi_{\mathrm{m}}=\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^R \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2} rl\mathrm{d}r=\dfrac{\mu_0 Il}{4\pi}$

（2）当 S 平面的一边距 OO' 为 x 时

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\int_x^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} rl\mathrm{d}r+\int_R^{R+x}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\left(\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\ln\frac{R+x}{R}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}x}=0$，且 $\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_m}{\mathrm{d}x^2}<0$，则得

$$\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\left(-x\right)+\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\frac{R}{R+x}\frac{1}{R}=0$$

所以 $x=\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}R$

即此处 Φ_{m} 取得最大值。

7-8　解：由安培环路定理，可得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0 IN$$

故 $B=\dfrac{\mu_0 IN}{2\pi r}$

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 IN}{2\pi r}h\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\mu_0 INh}{2\pi r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

7-9　解：（1）在 CD 上任取一线元 $\mathrm{d}r$，它距 O 点的距离为 r，其上带电量 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}r$，当 CD 转动时，$\mathrm{d}q$ 形成圆形电流，电流强度为

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi}=\frac{\lambda\omega}{2\pi}\mathrm{d}r$$

此电流在 O 点的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

方向垂直纸面向里。

故带电线段CD旋转时在O点的总磁感应强度大小为

$$B_0=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

（2）旋转的带电线元$\mathrm{d}r$的磁距大小为

$$\mathrm{d}m=\pi r^2\mathrm{d}I=\frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r$$

方向为垂直纸面向里，故转动的带电线段CD的总磁矩大小为

$$m=\int \mathrm{d}m=\int_a^{a+b}\frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\lambda\omega}{6}\left[(a+b)^3-a^3\right]$$

方向为垂直纸面向里。

（3）若$a\gg b$,则

$$B_0=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}=\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\left(\frac{b}{a}+\cdots\right)\approx\frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\frac{b}{a}$$

$$m=\frac{\lambda\omega}{6}\left[(a+b)^3-a^3\right]=\frac{\lambda\omega a^3}{6}\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)^3-1\right]$$

$$\frac{\lambda\omega a^3}{6}\left[3\frac{b}{a}+\cdots\right]\approx\frac{1}{2}a^2\omega\lambda b$$

磁感应强度$\boldsymbol{B}_O$、磁矩$\boldsymbol{m}$方向均为垂直纸面向里。

7-10　解　$B=\dfrac{\mu_{0I}}{2\pi\cdot 3r}$（方向垂直纸面向内）

由$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$得

$$F=ev\frac{\mu_0 I}{2\pi\cdot 3r}=\frac{ev\mu_0 I}{6\pi r}$$　电子所受磁场力的方向垂直于OO'轴向左

7-11　解　电流I_1在右边产生磁场方向垂直纸面向里,在AB边处产生的磁感应强度大小为

$$B=\mu_0 I_1/2\pi d$$

AB边所受安培力方向向左，大小为

$$F_{AB}=I_2 aB=\mu_0 I_1 I_2 a/2\pi d$$

在AC边上任取一电流元$I_2\mathrm{d}l$，电流元到直线电流的距离为r,所受磁场力为

$$\mathrm{d}F_{AC}=BI_2\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r\sin 60^\circ}\mathrm{d}r$$

两个分量分别为$\mathrm{d}F_{ACx}=\mathrm{d}F_{AC}\cos\alpha$和$\mathrm{d}F_{ACy}=\mathrm{d}F_{AC}\sin\alpha$。

由对称性分析可知，AC边与BC边所受力的x分量大小相等，方向相同，y分量大小相等，方向相反。

$$F_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2\cot\alpha}{2\pi}\int_d^{d+a\sin\alpha}\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1 I_2\sqrt{3}}{6\pi}\ln\frac{d+a\sqrt{3}/2}{d}$$

方向向右。

作用在三角形线圈上力的大小为

$$F=F_{AB}-2F_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{a}{d}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\frac{d+a\sqrt{3}/2}{d}\right)$$

方向水平向左。

7-12　解：取如图 8-12 所示的坐标系，在线圈上P处取一电流元$I_1\mathrm{d}l$，长直导线在该处产生的磁感应强度

$$B_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

方向如图所示。

电流元$I_1\mathrm{d}l$所受到的磁场力

$$\mathrm{d}F=B_2 I_1\mathrm{d}l\sin\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}l\sin\theta$$

方向垂直于线圈平面（即纸面向外），此力对 y 轴的力矩

$$\mathrm{d}M=\mathrm{d}F\cdot r\sin\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}l$$

由图可知，$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}(2\theta)=2R\mathrm{d}\theta$，所以整个圆线圈受到的磁力矩为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin^2\theta 2R\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2}$$

该力矩的方向对着 y 轴看沿顺时针方向。

7-13　解：（1）线圈受到的磁力矩的大小是

$$M=|\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}|=ISB\sin\theta$$

θ为线圈法线与B的夹角。B与线圈平面成30°角时，$\theta=60^\circ$

线圈绕OO'轴的转动惯量

$$J=\frac{M}{\alpha}=\frac{ISB\sin\theta}{\alpha}=2.16\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}}$$

（2）磁场对线圈做功，表现在力矩做功，沿力矩方向的角位移为$-\mathrm{d}\theta$，那么

$$A=\int -M\mathrm{d}\theta=\int_{60^\circ}^{0^\circ}-NISB\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{1}{2}NISB=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

7-14　解：圆柱不滚的条件是摩擦力产生的力矩与线圈中的磁力矩等值反向，即

$$f_{\mathrm{r}}r=2fr\sin\theta$$

式中，f_{r}为斜面摩擦力；f为导线所受安培力；r为圆柱体半径。

又由

$$mg\sin\theta-f_{\mathrm{r}}=0$$

$$f=NIlB$$

得

$$mg\sin\theta r=2NIlBr\sin\theta$$

即

$$I=\frac{mg}{2NlB}$$

方向：从上向下看顺时针方向。

7-15　解：作垂直轴的横截面，如题 7-15 解图b所示；

$$j=\frac{I}{\pi R}$$

$$\mathrm{d}I=j\mathrm{d}l=jR\mathrm{d}\theta=\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\theta$$
$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta$$

$$B_x=\int\mathrm{d}B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\pi=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y=\int\mathrm{d}B_y=0$$

故

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\boldsymbol{i}$$

8-16　解：（1）以其中一条导轨左端为原点，建立Oxy坐标系如图所示。已知$l\gg d$，即导轨可以看做无限长载流直导线（忽略导线电阻）

在任一位置y处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi y}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(3d-y)}$$

方向:垂直于纸面向里。

于是，由 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$ 得滑块在滑动时所受到的安培力

$$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}y\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi y} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(3d-y)}\right]$$

所以
$$F = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{5}{2}d}\left[\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}y}{3d-y}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \cdot \ln 5$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi m} \cdot \ln 5$$

又
$$l = \frac{1}{2}at^2$$

所以
$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l\pi m}{\mu_0 I^2 \cdot \ln 5}} = \frac{1}{I}\sqrt{\frac{2l\pi m}{\mu_0 \cdot \ln 5}}$$

（2）
$$v^2 - v_0^2 = 2al$$

又
$$v_0 = 0$$

所以
$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{2l\mu_0 I^2}{\pi m}\ln 5} = I\sqrt{\frac{2l\mu_0}{\pi m}\ln 5}$$

7-17　解：　相对于 OO' 轴，线框受重力矩

$$M_1 = 2a\rho gS \cdot \frac{1}{2}a\sin\alpha + a\rho gS \cdot a\sin\alpha = 2Sa^2\rho g\sin\alpha$$

所受磁力矩

$$M_2 = Ia^2B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = Ia^2B\cos\alpha$$

平衡时，有 $M_1 = M_2$，即

$$2Sa^2\rho g\sin\alpha = Ia^2B\cos\alpha$$

所以　$$B = \frac{2S\rho g}{I}\tan\alpha = 9.3\times10^{-3}\ \mathrm{T}$$

7-18 解　当 $x < R$ 时，$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$　　$B = 0$　$H = 0$

当 $R < r < R+d$ 时，$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$　　$H = \dfrac{I}{2\pi r}$，　$B = \mu H = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$

当$r > R+d$时， $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$　　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$　　$H=\dfrac{B}{\mu_0}=\dfrac{I}{2\pi r}$

7-19　解：a 代表铁磁质（$\mu \gg 1$，图 B-H 为非线性关系）

a 代表顺磁质（$\mu > 1$，且≈ 1）

C 代表抗磁质（$\mu < 1$，且≈ 1）

7-20　解：$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Hl$　　$\sum I_{i0} = NI$

得$H=\dfrac{N}{l}I = 500\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$

$B=\mu H = \mu_0\mu_r \dfrac{N}{l}I = 2.51\,\mathrm{T}$

7-21　解：（1）由　　$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H2\pi r, \sum I_{i0} = I_0$

得　　$H=\dfrac{I_0}{2\pi r}$

$$B=\mu H=\frac{\mu_0\mu_r I_0}{2\pi r}(R_1<r<R_2)$$

（2）内表面：　　$B=\dfrac{\mu_0\mu_r I_0}{2\pi r}$

又由　　$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(I_0 - I_1'\right)$

得　　$\dfrac{\mu_0\mu_r I_0}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0\left(I_0 - I_1'\right)$

即　　$I_1' = I_0\left(1-\mu_r\right)$

方向：与l_0方向相反

外表面：　　$B=\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$

又由　　$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\left(I_0 - I_1' + I_2'\right)$

得　　$\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \mu_0\left(I_0 - I_1' + I_2'\right)$

即　　$I_2' = I_1' = I_0\left(1-\mu_r\right)$

方向：　与I_1'方向相反。

7-22　解：$r > R_1$，$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H2\pi r$.　$\sum I_0 = I$

$$H = \frac{1}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

当$r_1 = 1.5\times 10^{-2}$ m时，

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 3.2\times 0.1}{2\pi\times 1.5\times 10^{-2}}\ \text{T} = 4.3\times 10^{-6}\ \text{T}$$

$r > R_2$：

$$H = \frac{1}{2\pi r}$$

当$r_2 = 2.5\times 10^{-2}$ m时，

$$H = \frac{1}{2\pi r} = \frac{0.1}{2\pi\times 2.5\times 10^{-2}}\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1} = 0.64\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$$

7-23　解：（1）由介质中安培环路定理得螺绕环内的磁场强度

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H\pi d = NI_0$$

所以$H = \dfrac{NI_0}{\pi d} = \dfrac{500\times 0.6}{3.14\times 0.15}\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1} = 636.94\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$

故$B = \mu_0\mu_r H = \left(4\pi\times 10^{-7}\times 800\times 636.94\right)\ \text{T} = 0.64\ \text{T}$

铁芯中的磁通量$\Phi = NBS = \left(500\times 0.64\times 0.07\right)\ \text{Wb} = 22.4\ \text{Wb}$

（2）由已知可得

$$B = \frac{\Phi}{NS} = \frac{4.8\times 10^{-4}}{500\times 0.07}\ \text{T} = 1.37\times 10^{-5}\ \text{T}$$

所以$H = \dfrac{B}{\mu_0\mu_r} = \dfrac{1.37\times 10^{-7}}{1200\times 4\pi\times 10^{-7}}\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1} = 9.09\times 10^{-3}\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$

故螺旋管中电流为

$$I_0 = \frac{H\pi d}{N} = \frac{9.09\times 10^{-3}\times 3.14\times 0.15}{500} = 8.56\times 10^{-6}\ \text{A}$$

第八章

8-1　解：（1）设逆时针方向为回路正方向，如图所示。由法拉第电磁感应定律可得回路中的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}S\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\pi\left(3t+4\right)\times10^{-6}$$

当 $t=2\ \mathrm{s}$ 时

$$\varepsilon_{t=2}=-3.14\times10^{-5}\ \mathrm{V}$$

$$I_{t=2}=\frac{\varepsilon}{R}=-3.14\times10^{-2}\ \mathrm{A}$$

$\varepsilon<0$，说明感应电动势的方向与回路正向相反。

（2）任意时刻通过圆环截面的电量为

$$q=\left|\int_0^t I\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^t\frac{\varepsilon}{R}\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^t-\pi\left(3t+4\right)\times10^{-3}\mathrm{d}t\right|$$

当 $t=2\ \mathrm{s}$ 时

$$q_{t=2}=\left|\int_0^t-\pi\left(3t+4\right)\times10^{-3}\mathrm{d}t\right|=4.4\times10^{-2}\ \mathrm{C}$$

8-2　解:距长直导线 r 处在 CD 上取有向线段元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向由 C 指向 D，如图所示，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所在处磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向垂直于纸面向里。

因为 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$，$\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)$ 与 $\mathrm{d}l$ 成 θ 角，且有 $\mathrm{d}l\sin\theta=\mathrm{d}r$，所以 $\mathrm{d}l$ 上产生的动生电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\mathrm{d}l\cos\theta=\frac{\mu_0 Iv}{2\boldsymbol{\pi}}\cot\theta\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

CD 上产生的动生电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\int_d^{d+l\sin\theta}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\cot\theta\frac{\mathrm{d}r}{r}\\&=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\cot\theta\ln\frac{d+l\sin\theta}{d}\\&=2.79\times10^{-4}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 可知，ε 的方向是由 C 指向 D，D 端电势高。

8-3　解：设顺时针方向为线圈回路的正方向，由分析可知，线圈内的感应电动势为

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{DC} + \varepsilon_{CB} + \varepsilon_{BA} \\
&= \int_A^D \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{CD}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + 0 + \int_C^B \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{CB}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + 0 \\
&= \frac{\mu_0 I v}{2\pi x} \int_A^D \mathrm{d}l + \frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(x+b\right)} \cos 180^\circ \int_C^B \mathrm{d}l \\
&= \frac{\mu_0 I b c v}{2\pi\left(x+b\right)}
\end{aligned}
$$

感应电动势方向为顺时针方向。

当$I = 5.0\ \mathrm{A}$，$v = 3.0\ \mathrm{m/s}$，$c = 20\ \mathrm{cm}$，$b = 10\ \mathrm{cm}$，$x = 10\ \mathrm{cm}$时，

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 I b c v}{2\pi\left(x+b\right)} = 3\times10^{-6}\ \mathrm{V}$$

8-4 解：$U_{ab} = U_{ob} - U_{oa} = \frac{1}{2}B\omega\left(\frac{3}{4}l\right)^2 + \frac{1}{2}B\omega\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{B\omega l^2}{4} > 0$

所以 b 点的电势高。

8-5 解：（1）$U_{OM} = \frac{1}{2}B\omega a^2$（方向$M \to 0$）

（2）$U_{ON} = \frac{1}{2}B\omega\left(ON\right)^2 = \frac{1}{2}B\omega\left(2a\sin 60^\circ\right) = \frac{3}{2}B\omega a^2$（方向$N \to 0$）

（3）O点电势高。

8-6 解：如图所示，导体棒 MN 向右运动时，回路中产生的感应电动势方向由 N 指向 M，导体棒 MN 所受安培力方向向左。

（1）由法拉第电磁感应定律得回路中产生的感应电动势为

$\varepsilon = vBl$

所以回路中电流为

$$I = vBl/R$$

导体棒所受安培力为

$$F = -vB^2l^2/R$$

由牛顿第二定律有

$$-\frac{B^2l^2v}{R} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量积分得

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)$$

（2）导体棒移动的距离为

$$S = \int_0^\infty v_0 \exp\left(-\frac{B^2l^2}{mR}t\right)\mathrm{d}t = \frac{mRv_0}{B^2l^2}$$

（3）电阻所产生的焦耳热为

$$Q=\int_0^\infty I^2R\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{B^2l^2v_0^2}{R}\exp\left(-\frac{2B^2l^2}{mR}t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mv_0^2$$

（4）导体棒在磁场中运动，切割磁场线而产生感生电动势和感应电流，从而导体棒受到与运动方向相反的安培力的作用。电流流过电阻产生焦耳热，安培力作用使导体棒动能减小。当导体棒运动速度为零时，不再有感应电流产生，也不再有焦耳热产生。此时，导体棒的初始动能全部转化为焦耳热，应为$mv_0^2/2$。

8-7　解：（1）$\varepsilon_{ab}=\int_{ab}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{l_0}^{l_0+l_1}v\frac{\mu_0I_0}{2\pi x}\mathrm{d}x=\frac{\mu_0I_0v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{l_0}\right)$ a 点电势高

（2）在任意位置 y 处

$$\Phi_m=\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{l_0}^{l_0+l_1}\frac{\mu_0i}{2\pi x}y\mathrm{d}x=\frac{\mu_0iy}{2\pi}\ln\left(1+\frac{l_1}{l_0}\right)$$

所以

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{l_0+l}{l_0}\right)\left(y\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mu_0I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{l_0+l}{l_0}\right)\left[\omega(l_2+\omega t)\sin\omega t-v\cos\omega t\right]$$

8-8　解：D

8-9　解：设逆时针方向为回路的正方向，由法拉第电磁感应定律求出闭合回路的总电动势，就是金属棒 PQ 上的电动势，故

$$\varepsilon_{PQ}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

因为$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}>0$，所以$\varepsilon_{PQ}>0$，因而 Q 端电势高，同时此棒中产生的感应电动势大小为

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

8-10 解：（1）因为$\Phi_m=\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_a^b\frac{\mu_0I}{2\pi x}l\mathrm{d}x=\frac{\mu_0Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=\frac{\mu_0Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\mathrm{e}^{-ct}$

若$c>0$，感应电流的方向为逆时针方向。

（2）$M=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

8-11　解：设长直导线通过的电流为 I，则通过矩形线框的磁通量

$$\Phi_m=\int_a^b\frac{\mu_0I}{2\pi x}c\mathrm{d}x=\frac{\mu_0Ic}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

所以互感系数　$M=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0c}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

于是感应电动势 $\varepsilon_i=-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}I_0\omega\cos\omega t=-\dfrac{\mu_0 c I_0\omega}{2\pi}\cos\omega\,\mathrm{t}\ln\dfrac{b}{a}$

8-12　解：设长直导线为线圈 1，三角形回路为线圈 2，先求二者互感，设长直导线通过电流为 I_1，求三角形回路磁通量 Φ_2

$$\mathrm{d}\Phi_2=B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\frac{2}{\sqrt{3}}(b+h-r)\mathrm{d}r$$

$$\Phi_2=\int\mathrm{d}\Phi_2=\frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi}\int_b^{b+h}\left(\frac{b+h}{r}-1\right)\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi}\left[(b+h)\ln\left(\frac{b+h}{b}\right)-h\right]$$

$$M=\frac{\Phi_2}{I_1}=\frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi}\left[(b+h)\ln\left(\frac{b+h}{b}\right)-h\right]$$

$$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I_0\omega}{\sqrt{3}\pi}\left[(b+h)\ln\frac{b+h}{b}-h\right]\sin\omega t$$

8-13　解：$\Phi_m=\displaystyle\int_d^{d+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}b\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$

$$M=\frac{\Phi_m}{I_1}=\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

8-14　证明：在两导线之间，以导线表面为边界取一长为 1 的矩形截面。如 8-14 解图所示。由于导线 A 和 B 电流方向相反。他们所产生的磁场在截面内方向相同，均垂直于纸面向里。在距导线 A 的轴线 r 处，取一面积微元，其面积为 $l\mathrm{d}r$，则导线 A 产生的磁场在该面积微元上的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 Il}{2\pi r}\mathrm{d}r$$

则导线 A 产生的磁场在矩形截面上的磁通量为

$$\Phi_A=\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_r^{d-r}\frac{\mu_0 Il}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d-r}{r}$$

由对称性可知，导线 B 在矩形截面上的磁通量也为

$$\Phi_B=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d-r}{r}$$

所以矩形截面上的磁通总量为

$$\Phi=\Phi_A+\Phi_B=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}$$

故自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-r}{r}$$

8-15　解：答案 D

8-16　解：（1）变化的磁场一定伴随有电场：（b）

（2）磁力线总是有头无尾的：（c）

（3）电荷总伴随有电场：（a）

8-17　解：（1）$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}=\iint_S \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

（2）$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}=-\iint_S \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

8-18　解：（1）圆柱面内的磁场可按长直螺线管计算，即 $B=\mu_0 nI$，则

$$B=\mu_0 nI=\mu_0\cdot 2\pi a\cdot\frac{\omega}{2\pi}\sigma$$
$$=\mu_0 a\sigma\omega=\mu_0 a\sigma\beta t$$

（2）圆柱面内的电场为涡旋电场，由电磁感应定律可得

$$\oint_L \boldsymbol{E}_\mathrm{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$E_\mathrm{R}\cdot 2\pi r=-\mu_0 a\sigma\beta\pi r^2$$

所以
$$E_\mathrm{R}=\frac{1}{2}\mu_0 a\sigma\beta r\quad (r<a)$$

（3）圆柱面内的磁场近似看成是均匀的，则圆柱面内的磁场能

$$W_\mathrm{m}=\iint_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\mu_0\sigma^2 a^2\beta^2 t^2=\frac{1}{2}\pi\mu_0\sigma^2 a^4\beta^2 l t^2$$

圆柱壳内的电场能

$$W_\mathrm{e}=\iiint_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V=\frac{\varepsilon_0 l}{2}\int_0^a\left(\frac{\mu_0\sigma a\beta r}{2}\right)^2 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$W_\mathrm{e}=\frac{\pi\varepsilon_0\mu_0^2\sigma^2\beta^2 a^6 l}{16}$$

8-19　解：大线圈中的感生电动势由互感产生。大线圈在其中心处所产生的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2b}$$

由于 $a\ll b$，小线圈中磁场可视为均匀磁场。任意时刻 t 时小线圈中的磁通量为

$$\varPhi_a=\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=BS\cos\omega t=\frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2\cos\omega t$$

故两线圈互感系数为

$$M=\frac{\varPhi_a}{I}=\frac{\mu}{2b}\pi a^2\cos\omega t$$

小线圈中感应电流为

$$i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{R\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I\pi a^2\omega}{2bR}\sin\omega t$$

小线圈中的电流 i 所产生磁场穿过大线圈的磁通量为

$$\Phi_b=Mi=\left(\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\right)^2\frac{I}{R}\omega\sin\omega t\cos\omega t=\left(\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\right)^2\frac{I\omega}{2R}\sin 2\omega t$$

大线圈中的感生电动势为

$$\boldsymbol{\xi}_b=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\right)^2\frac{I}{R}\cos 2\omega t$$

8-20　解：由于 $L\gg R$，圆筒内磁场可看成是均匀的。如图 8-20 所示，通过圆筒的中轴线取一长为 L，宽为 $d(d<R)$ 的矩形回路 $ABCD$。由安培环路定理可得

$$BL=\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi}$$

即圆筒内的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi L}$$

因此线圈中的磁通量为

$$\Phi=N\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 NQ\omega_0 R^2}{2L}$$

则线圈中的感应电动势为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}==\frac{\mu_0 NQR^2}{2L}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 NQR^2k\omega_0}{2L}$$

第九章

9-1　解：　因为$x=A\cos\left(3\pi t+\varphi\right)$，所以$\omega=3\pi$

由已知可得$A=\sqrt{{x_0}^2+\frac{{v_0}^2}{\omega^2}}=\sqrt{\left(0.06\right)^2+\frac{\left(-0.24\right)^2}{\left(3\pi\right)^2}}=6.52\times10^{-2}\ \mathrm{m}$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0}=-\frac{0.24}{3\pi\times0.04}=-0.637\qquad\varphi=-32.5^\circ$$

9-2　解：设简谐振子的表达式为　$x=A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$

由旋转矢量可得　$\varphi=\frac{\pi}{2}$

$\because\ v_m=A\omega$

$\therefore\ \omega=\frac{v_m}{A}=\frac{0.03}{0.02}=\frac{3}{2}$

故震动表达式为　$x=0.02\cos\left(\frac{3}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)\ (\mathrm{SI})$

9-3　解：由旋转矢量可得　$\varphi=0$

由已知可得　$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{B}$

所以　$x=4.8\times10^{-2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right)\ (\mathrm{m})$

（1）$t=0.5\ \mathrm{s}$时，$x=4.8\times10^{-2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\times0.5\right)=2.4\times10^{-2}\ \mathrm{m}$

因为　$a=-\omega^2x$

所以　$F=ma=-m\omega^2x=-1.0\times10^{-2}\times\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2\times2.4\times10^{-2}=1.05\times10^{-3}\ \mathrm{N}$

（2）由旋转矢量得　$\Delta\theta=\frac{2}{3}\pi$

故　$\Delta t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=1\ \mathrm{s}$

9-4　解：有图可知$A=10\ \mathrm{m}$，且$t=0$时$x_0=10\cos\varphi_0-5\ \mathrm{m}$　$v_0<0$

根据旋转矢量法得 $\varphi_0=\dfrac{2}{3}\pi$

由图可知 $t=1$ 时，$x=0, v>0$

根据旋转矢量法得 $\varphi_{t=1}=\dfrac{3}{2}\pi$

$$\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\frac{3}{2}\pi-\frac{2}{3}\pi}{1}=\frac{5}{6}\pi$$

故振动表达式为 $x=10\cos(\dfrac{5}{6}\pi t+\dfrac{2}{3}\pi)$ (SI)

9-5 解：如题 9-5 解图所示在任一 θ 处，应用牛顿定律，有

$$-mg\sin\theta=ma_z=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mr\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

得
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{r}\sin\theta=0$$

当 θ 很小时，由 $\sin\theta\approx\theta$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{r}\theta=0$$

令 $\omega^2=\dfrac{g}{r}$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

即物体所作的运动为简谐振动。

（2）简谐振动的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{r}{g}}$

9-6 解：（1）平衡位置处

$$F_{浮}=mg$$

$$\rho_{水}l^2ag=\rho l^3g$$

以平衡位置处为坐标原点，沿竖直方向建立 x 轴，如题 9-6 解图所示。则任意位置处

$$\rho_{水}l^2(a+x)g-\rho\cdot l^2g=-m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}l^2}+\frac{\rho_{水}l^2g}{\rho l^3}x=0$$

令 $\omega^2=\dfrac{\rho_{水} g}{\rho l}$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}l^2}+\omega^2 x=0$$

木块作简谐运动。

（2） $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\rho l}{\rho_{水} g}}$$

由题意可知，作简谐振动的木块在 $t=0$ 时相对于平衡位置的位移 $x_0=b-a$，初速度为 $v_0=0$，所以 $$A=\sqrt{{x_0}^2+\frac{{v_0}^2}{\omega^2}}=b-a$$

9-7 解：以 m 为研究对象。

在平衡位置 0 时 $F_0=mg-k\Delta l=0$ （1）

在任意位置 x 时 $F=mg-F_{\mathrm{T1}}$ （2）

由转动定律有

$$F_{\mathrm{T1}}R-k(\Delta l+x)R=J\beta$$

解得 $F_{\mathrm{T1}}=k\left(\Delta l+x\right)R+\dfrac{J\beta}{R}$ （3）

将式（1）和式（3）代入式（2）中，得合外力

$$F=mg-k\left(\Delta l+x\right)-\frac{J\beta}{R}=-kx-\frac{J\beta}{R} \quad （4）$$

而 $F=ma=mR\beta$

代入式（4）中得

$$F=-kx-\frac{JF}{mR^2}$$

解得 $F\left(1+\dfrac{J}{mR^2}\right)=-kx$

即 $F=-\left(\dfrac{mR^2 k}{mR^2+J}\right)x$

合外力与位移成正比且方向相反，系统作简谐运动，角频率诶

$$\omega^2=\frac{R^2 k}{mR^2+J}$$

谐振动的周期 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mR^2+J}{kR^2}}$$

9-8 解：沿带电圆环的轴线方向取坐标轴 x 轴，带电圆环的圆心O处为坐标原点，选向上为正方向。此处忽略重力，当粒子偏离O点 x 时，分析粒子受到的恢复力，在环上取一微小长度的带电微元$R\mathrm{d}\varphi$，此微元对粒子的库仑力为

$$\mathrm{d}F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QEq\mathrm{d}\varphi}{2\pi r^2}$$

这个力沿 x 轴的分力为

$$\mathrm{d}F_x=-\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QRq\mathrm{d}\varphi}{2\pi r^2}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QRq\mathrm{d}\varphi}{2\pi r^3}, \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}$$

沿整个圆环积分：

$$F_x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}F_x=-\frac{xQqR}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

当 x 很小时，θ接近于90°，上式近似为为

$$F_x=-\frac{QqR}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x=-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}x$$

即带电粒子沿轴线方向受力与位移满足$F_x=-kx$，为简谐振动，振动频率为

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 mR^2}}$$

9-9 解：根据题意可得 A、B 两点的位置关于坐标原点 O 对称。

作出 A、B 对应旋转矢量位置如图所示。

$$|v_A|=|v_B|\cdot\frac{T}{2}=4\text{ s}$$

所以 $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$$

$t=0$时， $$x=-5=A\cos\phi$$

$t=2\text{ s}$时， $$x=5=A\cos(2\omega+\phi)=A\cos(\frac{\pi}{2}+\phi)=-A\sin\phi$$

故$\tan\phi=+1$

又因为 $v_A=-A\omega\sin\phi>0$，即$\sin\phi<0$。所以$\phi=-\frac{3}{4}\pi$，则

$$x=5\sqrt{2}\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{3\pi}{4}\right)(\text{m})$$

$t=0$ 时，$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3.93\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$$

9-10　解：（1）由已知可得　$E=E_k+E_p=0.2+0.6=0.8\ \mathrm{J}$

又　$\because\ E=\frac{1}{2}kA^2$

$$\therefore A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2\times 0.8}{25}}=0.25\ \mathrm{m}$$

（2）　$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{4}E=0.2\ \mathrm{J}$

所以　$E_k=E-E_P=0.6\ \mathrm{J}$

（3）　$v_\mathrm{m}=\omega A=\sqrt{\frac{k}{m}}A=2.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

9-11　解：因为 $mg=kx_0, A=2\ \mathrm{cm}$，所以

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\frac{mg}{x_0}A^2=3.92\times 10^{-3}\ \mathrm{J}$$

9-12　解：$x=6\times 10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{4}\right)(\mathrm{m})$

（1）因为　$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2$

所以　$x=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}=\pm 4.24\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$

（2）如题 9-12 解图所示，因为 $\Delta\theta=\frac{\pi}{4}$，所以

$$\Delta t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{3}{4}\ \mathrm{s}=0.75\ \mathrm{s}$$

9-13　解：两振动的相位差为　$\Delta\varphi=\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)-\left(2t-\frac{5\pi}{6}\right)=\pi$

合振动　$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

初相 $$\varphi=\arctan\frac{4\sin\dfrac{\pi}{6}+3\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)}{4\cos\dfrac{\pi}{6}+3\cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)}=\frac{\pi}{6}$$

当两个分振动的相位差为π时，合振动的相位与振幅大的振动相位相同，合振动振幅等于两分振动振幅之差。

9-14　解：(1)　由旋转矢量图（如题 9-14 解图），可知

$$A=\sqrt{A_1{}^2+A_2{}^2}=\sqrt{4^2+3^2}\ \text{m}=5\ \text{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

$$=\frac{4\sin\dfrac{\pi}{3}+3\sin(-\dfrac{\pi}{6})}{4\cos\dfrac{\pi}{3}+3\cos(-\dfrac{\pi}{6})}$$

$$=0.427$$

$$\varphi=\arctan\left(0.427\right)=0.4\ \text{rad}\left(\text{或}23.1^\circ\right)$$

(2) 由同方向同频率振动合成理论可知，当两分振动同相时，合振幅最大；两分振动反相时，合振幅最小，所以

$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$时，x_1+x_3取最大值

$\varphi=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$时，$x_1+x_3$取最小值。

9-15　解：两物体无相对滑动式，两物体间最大静摩擦力

$$f=\mu mg=ma_{\max}=m\omega^2A_{\max}$$

所以系统最大振幅 $$A_{\max}=\frac{\mu g}{\omega^2}=\frac{\mu g}{k/(m+M)}=\frac{(M+m)\mu g}{k}$$

系统最大能量 $$E_{\max}=\frac{1}{2}kA_{\max}^2=\frac{(M+m)^2\mu^2g^2}{2k}$$

9-16　解：(1) 由题可知x_1、x_3是两个振动方向、频率都相同的简谐振动，其合振动也是简谐振动，角频率与分振动的角频率相同。由旋转矢量图（补充题 9-7 解图）可知合振动的振幅。

$$x_{13}=\sqrt{0.3^2+0.4^2+2\times0.3\times0.4\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\ \text{m}$$

$$= 0.5\ \mathrm{m}$$

$$\tan\varphi_{13} = \frac{x_{13}x}{Ox} = \frac{0.4\sin\dfrac{\pi}{4} + 0.3\sin\dfrac{3}{4}\pi}{0.4\cos\dfrac{\pi}{4} + 0.3\cos\dfrac{3\pi}{4}} = 7$$

所以
$$\varphi_{13} = \arctan 7,\ 0 < \varphi_{13} < \frac{\pi}{2}$$

（2）当 $\varphi_2 - \varphi_3 = \pm 2k\pi (k = 0, 1, 2, \cdots)$，即 x_2、x_3 相位相同时，x_2、x_3 合成振幅最大，由于 $\varphi_3 = \dfrac{3}{4}\pi$，故

$$\varphi_2 = \pm 2k\pi + \frac{3}{4}\pi \qquad （k = 0, 1, 2, \cdots）$$

（3）当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2k+1)\pi\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$，即 x_2、x_3 相位相反时，x_2、x_3 合成振幅最小，由于 $\varphi_1 = \dfrac{1}{4}\pi$，故

$$\varphi_2 = \pm 2k\pi + \frac{5}{4}\pi \ （k = 0, 1, 2, \cdots）$$

第十章

10-1 解：（1）x,t 前面都为正号，符号相同，所以波沿 x 轴负方向传播。

（2）$y=5\cos\left(8t+3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 对比波动的标准表达式 $y=A\cos(\omega t+\dfrac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$ 得

$$\omega=8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\qquad \lambda=\frac{2\pi}{3}=2.1\ \mathrm{m}$$

$$v=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{8}{2\pi}=1.27\ \mathrm{Hz}\qquad u=\lambda v=2.1\times1.27=2.67\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（3）式中 $\dfrac{\pi}{4}$ 的意义是指 $t=0$ 时刻平衡位置为 0 处的质点的初相位

10-2 解：从题 10-2 图可知，波的振幅 $A=4\ \mathrm{cm}=0.04\ \mathrm{m}$，波长 $\lambda=0.8\ \mathrm{m}$

由波沿 x 轴正方向传播，可判定此时位于原点处的质点沿 y 轴正方向运动，利用旋转矢量法可得初相位 $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{3}$

故 θ 点处质元的振动方程为

$$y=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.04\cos(\frac{2}{3}\pi t-\frac{\pi}{3})$$

该简谐波的波函数

$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right)=0.04\cos\left(\frac{2}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0\right)$$

$$=0.04\cos\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{2\pi}{0.8}x-\frac{\pi}{3}\right)=0.04\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{5\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)\ (\mathrm{SI})$$

10-3 解：由 $y=4\times10^{-3}\cos240\pi t$ 可得

$$\omega=240\pi$$

$$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{120}\ \mathrm{s}$$

$$\therefore \lambda=uT=40\times\frac{1}{120}=\frac{1}{3}\ \mathrm{m}$$

由于波沿 x 轴负向传播，波的表达式为

$$y=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=4\times10^{-3}\cos\left(240\pi t+6\pi x\right)(\mathrm{m})$$

10-4 解：由已知条件可知波的表达式为 $y=6.0\times10^{-2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\alpha\right)$

（1）距原点 5m 处质元的振动

$$y\Big|_{x=5}=6.0\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=6.0\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{7\pi}{4}\right)$$

（2）该质元与坐标原点处的质元振动的相位差

$$\Delta\varphi=\varphi\big|_{x=5}-\varphi\big|_{x=0}=\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{7\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{5}{4}\pi$$

10-5　解：（1）$a\uparrow;b\uparrow;c\downarrow$

（2）由图可知　$A=0.1\,\mathrm{m},\lambda=0.4\,\mathrm{m}$

所以　$T=\dfrac{\lambda}{n}=\dfrac{0.4}{0.05}=8\,\mathrm{s}$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$$

由图可知，$t=0$处质元，$t=0$时刻时，位于正向振幅最大处，所以$\varphi_0=0$

波的表达式是　$y=0.1\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t-\dfrac{2\pi}{0.4}x\right)=0.1\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t-5\pi x\right)(\mathrm{m})$

（3）$x=0.3\,\mathrm{m}$处质元振动表达式为

$$y\big|_{x=0.3}=0.1\cos\left(\frac{\pi}{4}t-5\pi\times0.3\right)=0.1\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{3}{2}\pi\right)(\mathrm{m})$$

10-6　解：（1）以 A 为坐标原点，波沿 x 轴正向传播，波动表达式为

$$y=3\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{uT}x\right)$$

$$=3\cos(4\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{u}x)=3\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{24}\cdot x\right)=3\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{m})$$

（2）$x_B=6\,\mathrm{m}$，B 点的振动表达式为

$$y_B=3\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{uT}\times6\right)=3\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

以 B 为坐标原点，波沿 x 轴正方向传播，波动表达式为

$$y=3\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{uT}x\right)=3\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}x\right)$$

10-7　解：由已知可得简谐波$A=0.03\,\mathrm{m}$，$\nu=25\,\mathrm{Hz}$，$\lambda=0.2\,\mathrm{m}$

$\therefore\omega=2\pi\nu=50\pi\,\mathrm{rad/s}$

$t=0$时$x=0$处质元的位移为零并向 x 轴正向移动，利用旋转矢量法可得原点质元初相位

$\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ 简谐波的表达式为

$$y = A\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0.03\cos\left(50\pi t - \frac{2\pi}{0.2}x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.03\cos\left(50\pi t - 10\pi x - \frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{SI})$$

10-8　解：（1）由题 10-8 图可知，，$A = 0.2\ \mathrm{m}$，$t = 0$ 时，P 点位移 $y_P = A\cos\varphi_0 = 0$，速度 $v_p = -A\sin\varphi_0 > 0$

由旋转矢量法得 $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$

由题 10-8 可知，$\lambda = 0.6\ \mathrm{m}$，且经过 $0.25\ \mathrm{s}$ 波形移动 $\dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{0.6}{4} = 0.15\ \mathrm{m}$

$\therefore$ 波速 $u = \dfrac{0.15}{0.25} = 0.6\ \mathrm{m/s}$

$\therefore \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{\lambda/u} = \dfrac{2\pi u}{\lambda} = \dfrac{2\pi\times 0.6}{0.6} = 2\pi\ \mathrm{rad/s}$

$\therefore P$ 点的振动表达式为 $y_P = 0.2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)(\mathrm{m})$

（2）波动表达式为 $y_P = 0.2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{2} - 2\pi\dfrac{x-0.3}{\lambda}\right) = 0.2\cos\left(2\pi t - \dfrac{10}{3}\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)(\mathrm{m})$

（3）将 $x = 0$ 代入波动表达式得 O 点的振动表达式 $y_0 = 0.2\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)(\mathrm{m})$ 据此画出原点 O 的振动曲线.

10-9　解：（1）由 $\overline{I} = \overline{w}u$，得

$$\overline{w} = \frac{\overline{I}}{u} = 6.0\times10^{-5}\ \mathrm{J\cdot m^{-3}}$$

由因为 $\overline{I} = \dfrac{1}{2}I_{\max}$

所以 $I_{\max} = 2\overline{I} = 12\times10^{-5}\ \mathrm{J\cdot m^{-3}}$

（2）因为两个同相面间的间距为"λ"，所以含的能量为

$$\overline{w}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\lambda = \overline{w}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\frac{u}{\nu} = 9.24\times10^{-7}\ \mathrm{J}$$

10-10　解：因为

$\varphi_{10}-\varphi_{20}=\dfrac{\pi}{2}$，$u_1=400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$u_2=500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$r_1=4\ \mathrm{m}$，$r_2=3.75\ \mathrm{m}$

所以两列波在 P 点的相位差

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\left(\varphi_{10}-\varphi_{20}\right)-2\pi\nu_1\left(\frac{r_1}{u_1}-\frac{r_2}{u_2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\pi\times100\times\left(\frac{4}{400}-\frac{3.75}{500}\right)=0$$

两列波在 P 点振动同相，相干加强。

于是得 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

$=A_1+A_2=0.02\ \mathrm{m}$

10-11　解：因为

$\varphi_{20}-\varphi_{10}=\pi$，$u=400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$\nu=100\ \mathrm{Hz}$，$\lambda=\dfrac{u}{\nu}=4\ \mathrm{m}$

所以两列波在 AB 连线上的距离为 x 处的 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi=\left(\varphi_{20}-\varphi_{10}\right)-\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(30-x\right)-x\right]$$

$$=\pm\left(2k+1\right)\pi\ \ \left(k=0,1,\cdots\right)$$

得

$$x=15\pm2k\ \ \left(k=0,1,\cdots,7\right)$$

10-12　解：设 O 点为坐标原点，向右为正方向。

自 O 点向右的波：$y_1\left(x,t\right)=A\cos\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$

自 O 点向左的波：$y_2\left(x,t\right)=A\cos\left(\omega t+\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$

反射点 P 处入射波引起的振动

$$y_{2P}\left(t\right)=A\cos\left[\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{5}{4}\lambda\right)\right]=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

反射点 P 点的振动（有半波损失）

$$y_{3P}\left(t\right)=A\cos\left(\omega t+\pi-\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

反射波的波函数

$$y_3(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x+\frac{5\lambda}{4}}{u}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{5\lambda}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$$

即 $y_3(x,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

在 $-\frac{5\lambda}{4}\le x\le 0$，$y_2$ 与 y_3 叠加为驻波

$$y=y_2+y_3=A\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

即 $y=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$

在 $x>0$，y_1 和 y_3 合成简谐波

$$y=y_1+y_3=2A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

10-13　解：因为 $y_{反}=0.15\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right](\mathrm{m})$

且 $x=0$ 处反射为自由端，所以

$$y_{入}=0.15\cos\left[100\pi\left(t+\frac{x}{200}\right)+\frac{\pi}{2}\right](\mathrm{m})$$

$$y_{合}=2\times0.15\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(100\pi\frac{x}{200}\right)(\mathrm{m})$$
$$=0.3\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}x\,(\mathrm{m})$$

显然，合成波是驻波。

10-14　解：设入射波在 0 点的振动方程为 $y_{0入}=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，则反射波在 0 点的振动方程为

$$y_{0反}=A\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{\frac{3}{4}\lambda\times2}{\lambda}2\pi-\pi\right)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

二者合振动为 $y_{0合}=2A\cos(\omega t+\varphi_0)$，由题可知在 $t=0$ 时，0 处质点合振动状态是经过平

衡位置向正方向运动，利用旋转矢量法可得$\varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$入射波在 0 点振动方程为$y_{0入}=A\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

入射波在 D 点振动方程为$y_{D入}=A\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\frac{3}{4}\lambda-\frac{\lambda}{6}}{\lambda}2\pi\right)=A\cos\left(\omega t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

反射波在 D 点振动方程为$y_{D反}=A\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\frac{3}{4}\lambda+\frac{\lambda}{6}}{\lambda}2\pi-\pi\right)=A\cos\left(\omega t+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

利用旋转矢量法得$A_{D合}=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}A$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

所以 D 点处入射波与反射波的合振动方程为

$$A_{D合}=\sqrt{3}A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}A\cos\left(\frac{2\pi u}{\lambda}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

10-15　解：测速仪与汽车状态如图所示：

$$\nu_R=\frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S=\frac{u+v}{u-0}\nu_S=\nu_S'$$

$$\nu_R'=\frac{u+0}{u-v_S}\nu_S'=\frac{u}{u-v}\cdot\frac{u+v}{u}\nu_S=\frac{u+v}{u-v}\nu_S$$

拍频$\Delta\nu=\nu_S'-\nu_S=\dfrac{u+v}{u-v}\nu_S-\nu_S$

解得$v=\dfrac{\Delta\nu u}{\Delta\nu+2\nu_S 0\times10^{10}}=\dfrac{1.2\times10^4\times3\times10^8}{1.2\times10^4+2\times5.0\times10^{10}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=36\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

限定车速$v_{\max}=\dfrac{100\times10^3\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}}=27.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

故此车已超过限定车速。

第十一章

11-1　解：光程差$\delta = r_1 - e + ne - r_2 = r_1 - r_2 + (n-1)e = (n-1)e$

11-2　解：S_2点到 P 比S_1到 P 点的相位落后$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$\therefore P$点的合振动振幅平方为$I == A^2 + A^2 + 2A^2\cos\frac{2}{3}\pi = A^2$

$\therefore \frac{I}{I_{\max}} = \frac{A^2}{4A^2} = \frac{1}{4}$

11-3　解：由于 P 点为第三级明条纹，故　　$r_2 - r_1 = 3\lambda$

装置置于液体中后，两束光的光程差为$n(r_1 - r_2) = 4\lambda$

所以$n = \frac{4}{3} = 1.33$

11-4　解：由题意知$d = 2.0\times10^{-4}$ m，$D = 1$ m

由干涉加强条件可知相邻两条纹间距$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$

所以$\lambda = \Delta x\frac{d}{D} = \frac{7.5\times10^{-3}}{3}\frac{2.0\times10^{-4}}{1} = 5\times10^{-7}$ m

11-5　解：覆盖云母片后，原零级明纹中心处光程差为

$\delta = (n-1)e = (1.58-1)\times6.6\times10^{-6} = 3.828\times10^{-6}$ m

$k = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{3.828\times10^{-6}}{550\times10^{-9}} \approx 7$即零级明条纹将移到原来的第 7 级明纹处。

11-6　解：从S_1，S_2到达 0 点的两束光的光程差为$\delta = (n-1)t$，相位差$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi(n-1)t}{\lambda}$

若两缝发出的光线在 0 点处分别产生的振幅为A_0，则对应 0 点处合振动振幅为

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2\cos\Delta\phi} = 2A_0\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} = 2A_0\cos\frac{\pi(n-1)t}{\lambda}$$

故 0 点处光强$I = 4A_0^2 = 4A_0^2\cos^2\frac{\pi(n-1)t}{\lambda}$

当$t=0$时，$I=4A_0^2=I_0$，所以 0 点处光强为$I=I_0\cos^2\dfrac{\pi(n-1)t}{\lambda}$

11-7　解：因为$\delta=2en+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda \quad k=1,2,\cdots$

$$\lambda=\frac{2en}{k-\frac{1}{2}}=\frac{2\times1.2\times10^{-7}\times1.33}{k-\frac{1}{2}}=\frac{319.2}{k-\frac{1}{2}}\text{ nm} \quad k=1,2,\cdots$$

在可见光范围内取$k=1$，故

$\lambda_1=638.4\text{ nm}$

11-8　解：由相干条件可知

$$\begin{cases}2en+\dfrac{\lambda_1}{2}=(2k_1+1)\dfrac{\lambda_1}{2}\\[2mm]2en+\dfrac{\lambda_2}{2}=(2k_2+1)\dfrac{\lambda_2}{2}\end{cases}$$

以上两式可简化为

$$\begin{cases}2en=k_1\lambda_1\\2en=k_2\lambda_2\end{cases}$$

即$k_1\lambda_1=k_2\lambda_2$

所以$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{7}{5}=\dfrac{14}{10}=\cdots$

再由相干条件，有$2ne+\dfrac{\lambda}{2}=k\lambda$，$k=1,2,\cdots$

得$\lambda=\dfrac{2en}{k-\frac{1}{2}}$，$k=1,2,\cdots$

在可见光范围内，反射时干涉加强的光的波长有

$k=6$，$\lambda_6=636.36\text{ nm}$

$k=7$，$\lambda_7=538.46\text{ nm}$

$k=8$，$\lambda_8=466.7\text{ nm}$

11-9　解：（1）因为在两分界面上的反射光有半波损，因此干涉极大条件为$2nd=k\lambda$ $k=0,1,2,\cdots$

干涉极小条件为$2nd=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\lambda \quad k=0,1,2,\cdots$

所以最薄处$d=0$，对应区域为亮区

（2）蓝色波长为480 nm，第三个蓝区对应的油层厚度为

$$d=\frac{3\lambda}{2n}=\frac{3\times 480\times 10^{-9}}{2\times 1.20}=600\times 10^{-9}\ \text{m}=600\ \text{nm}$$

（3）油膜厚到一定程度后，其上下表面反射光的光程差超过光的相干长度，因此干涉条纹消失，彩色消失。

11-10　解：由劈尖干涉条件得$\Delta x=\dfrac{\lambda}{2\tan\theta}=\dfrac{\lambda l}{2D}$

故$D=\dfrac{\lambda l}{2\Delta x}=\dfrac{546\times 10^{-9}\times 12.50\times 10^{-2}}{2\times 1.50\times 10^{-3}}=2.275\times 10^{-5}\ \text{m}$

11-11　解：$2e_5 n+\dfrac{\lambda}{2}=5\lambda$

$$e_5=\frac{\left(5-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2n}$$

$$x_5=\frac{e_5}{\theta}=\frac{\left(5-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2ne}$$

$$\Delta x=x_5-x_5'=\frac{\left(5-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2\theta}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\theta=\frac{\left(5-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2\Delta x}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{\frac{9}{2}\times 500\times 10^{-9}}{2\times 1.61\times 10^{-3}}\left(1-\frac{1}{1.4}\right)=2\times 10^{-5}\ \text{rad}$$

11-12　解：等厚干涉条纹是同等厚度处对应同一级干涉条纹，暗条纹向右移，说明在这弯曲的暗条纹对应处厚度相等，因此现在暗纹处厚度小于没有纹路时的厚度，即纹路是凸起的，故$H=b'\sin\theta=b'\dfrac{\lambda/2}{b}=\dfrac{\lambda b'}{2b}$

1-13　解：$2(n-1)e=7\lambda$

$$\therefore e=\frac{7\lambda}{2(n-1)}=\frac{7\times 546.1\times 10^{-9}}{2\times(1.38-1)}=5.03\times 10^{-6}\ \text{m}$$

11-14　解：由牛顿环干涉条件可知，暗环半径

$$r_R = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$

牛顿环置于不同介质中，同一级次暗环半径之比为

$$\frac{r_R}{r_R'} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}$$

故$n_2 = \frac{r_R^2}{r'^2_R} n_1 = \frac{1.4^2}{1.27^2} \times 1 = 1.22$

11-15　解：据牛顿环干涉条件，可知暗环半径

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$

空气膜$n=1$，则第 k 级暗纹

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} = 5.63\ \mathrm{nm}$$

第$k+5$级暗纹$r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda} = 7.96\ \mathrm{nm}$

联立以上两式，得

$$R = 10.0\ \mathrm{m}$$

11-16　解：（1）如题 11-16 图所示，设第 k 级牛顿环的半径为r_k，该处空气膜厚度 e，因

$n < n_1 = n_2 < n_3$，则该处光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

对亮条纹有$\delta = k\lambda$

由图可知

$$R^2 - r_k^2 = (R-e)^2$$

取$r_k^2 = 2\mathrm{Re}$

当$n=1$时，有$\frac{r_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

$$r_k = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)R\lambda} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

条纹是以接触点为中心的同心圆环，中心处$\delta = \lambda/2$，为暗条纹。

（2）当在透镜和平板玻璃间充满$n=1.6$的透明液体时，$n_1 = n_2 < n < n_3$。

在半径为 r 处有

$$2Re = r^2$$

右侧（n_3 一侧）的光程差

$$\delta_1 = 2ne = \frac{nr^2}{R}$$

左侧（n_2 一侧）的光程差

$$\delta_2 = 2ne + \frac{\lambda}{2} = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

对于同一级次的明纹，有

$$\delta_1 = \frac{nr^2}{R} = k\lambda\text{，}\quad \delta_2 = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

所以 $r_1 = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$，$r_2 = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n}}$

即左右两边同一级明纹半径大小不等，且右边的接触点为明纹，而左边的接触点为暗纹，故形成一错开的半圆图像。

11-17　解：根据暗纹的条件，对第三级暗纹有

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2}\text{，}\quad k = 1, 2, \cdots$$

$$k = 3\text{，}\ a\sin\theta_3 = 3\lambda$$

所以，中央明纹两侧的两个第三级暗条纹之间的距离

$$\Delta x_3 = 2f\tan\theta_3 \approx 2f\sin\theta_3 = 2f\cdot\frac{3\lambda}{a} = 6\frac{\lambda f}{a} = 8\times10^{-3}\ \text{m}$$

11-18　解：由第二暗纹 $k = 2$ 得 $b\sin\theta = 2\lambda$

$$\sin\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

距离中央明纹中心的距离为

$$x = f\tan\theta \approx f\sin\theta = \frac{1}{2}\times 2.0\times10^{-3} = 1\times10^{-3}\ \text{m}$$

透镜焦距为

$$f = \frac{x}{\sin\theta} = \frac{xb}{2\lambda} = \frac{10^{-3}\times0.3\times10^{-3}}{2\times600\times10^{-9}} = 0.25\ \text{m}$$

11-19　解：设第一级暗纹的衍射角为 θ_1，则

$$a\sin\theta_1 = 2k\cdot\frac{\lambda}{2} = k\lambda\big|_{k=1} = \lambda$$

所以，中央明纹的角宽度

$$\Delta\theta_0 = 2\theta_1 = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right) \approx \frac{2\lambda}{a} = 5.46\times10^{-3}\ \text{rad}$$

中央明纹在屏上的线宽度

$$\Delta x = 2f\tan\theta_1 \approx \frac{2\lambda f}{a} = 2.73\ \text{mm}$$

设第 k 级和第 k+1 级暗纹的衍射角分别为θ_k和θ_{k+1}，第 k 级明纹的角宽度为

$$\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k = \arcsin\left[\frac{(k+1)\lambda}{a}\right] - \arcsin\left(\frac{k\lambda}{a}\right)$$

$$\approx (k+1)\frac{\lambda}{a} - k\frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a} = 2.73\times10^{-3}\ \text{rad}$$

其他明纹在屏上的线宽度

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = f\left(\tan\theta_{k+1} - \tan\theta_k\right)$$

$$\approx \left(\sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k\right) = \frac{k\lambda}{a} = 1.36\ \text{mm}$$

11-20　解：$(a+b) = \frac{1}{100}\ \text{cm}$

由光栅方程$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda$

$k=2$，$(a+b)\sin\theta_2 = 2\lambda$

得$x_2 = D\tan\theta_2 \approx D\frac{2\lambda}{(a+b)}$

$$= 100\times10^{-2}\times\frac{2\times500\times10^{-9}}{\frac{1}{1000}\times10^{-2}}\ \text{m} = 0.1\ \text{m} = 10\ \text{cm}$$

11-21　解：（1）由光栅方程$(a+b)\sin\theta = 2\lambda$，得光栅常数

$$a+b = \frac{2\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times600\times10^{-9}}{0.20}\ \text{m} = 6\times10^{-6}\ \text{m}$$

（2）由缺级条件

$$k = \frac{a+b}{a}k'$$

$k'=1$，$k=4$

得光栅上狭缝可能的最小宽度

$$a = \frac{1}{4}(a+b) = 1.5\times10^{-6}\ \text{m}$$

（3）当$\theta=90^{\circ}$时，有

$$k_{\mathrm{m}}=\frac{a+b}{\lambda}=\frac{6\times10^{-6}}{600\times10^{-9}}=10$$

所以光屏上出现的全部级次为

$0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm7,\pm9$（共 15 条谱线）

11-22　解：根据光栅方程$\left(a+b\right)\sin\theta=k\lambda$

可知，$\theta=\varphi$时，$\left(a+b\right)\sin\theta=k_1\lambda_1$

$$\left(a+b\right)\sin\theta=k_2\lambda_2$$

即$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{660.0\times10^{-9}}{440.0\times10^{-9}}=\dfrac{3}{2},\dfrac{6}{4},\cdots$

第二次重合时$k_1=6$，$k_2=4$

则$\left(a+b\right)\sin\varphi=k_1\lambda_1$

$$a+b=\frac{k_1\lambda_1}{\sin\varphi}=\frac{6\times440.0\times10^{-9}}{\sin60^{\circ}}\ \mathrm{m}=3.05\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

11-23　解：由光栅方程

$\left(a+b\right)\left(\sin\theta\pm\sin30^{\circ}\right)=\pm k\lambda$，$d=a+b$

当入射光线和衍射光线在光栅法线的异侧时，取$\theta=90^{\circ}$时，有

$$k=\frac{d\left(1\sin30^{\circ}\right)}{\lambda}=\frac{2.1\times10^{-6}\times\left(1-\sin30^{\circ}\right)}{500\times10^{-9}}=2.1$$

当入射光线和衍射光线在光栅法线的同侧时，取$\theta=-90^{\circ}$时，有

$$k=\frac{d\left(1+\sin30^{\circ}\right)}{\boldsymbol{\lambda}}=\frac{2.1\times10^{-6}\times\left(1+\sin30^{\circ}\right)}{500\times10^{-9}}=6.3$$

又因缺级条件得

$k_1=\dfrac{a+b}{a}k_2=3k_2$，$k_2=1,2,\cdots$

所以缺少的级次为

$\pm3,\pm6$

因此光屏上出现的全部级次为

$-2,-1,0,1,2,4,5$（共 7 条谱线）

11-24　解：光栅常数$d=a+b=\dfrac{1\times10^{-3}}{500}=2\times10^{-6}\ \text{m}$

$$\frac{k}{k'}=\frac{a+b}{a}=\frac{2\times10^{-6}}{1\times10^{-6}}=2$$

即$k=2k'\quad k'=1,2,\cdots$时光栅主极大缺级

当平行光斜入射时，有

$$(a+b)(\sin\theta\pm\sin\varphi)=k\lambda$$

所以$k_{\max}=\left[\dfrac{(a+b)(1\pm\sin30^\circ)}{\lambda}\right]=\left[\dfrac{2\times10^{-6}\times\left(1\pm\dfrac{1}{2}\right)}{0.59\times10^{-6}}\right]\approx3.4\times\left(1\pm\dfrac{1}{2}\right)$

所以当平行单色光以30°角斜入射光栅时，最大能观察到的次级为 5. 屏上能观察到的主极大条纹为$k=5、3、1、0、-1$，共 5 条（此时，0 级明条纹不在对称中心轴位置）。

11-25　解：天文望远镜最小分辨角

$$\theta=1.22\frac{\lambda}{D}=1.22\times\frac{550\times10^{-9}}{5}=1.34\times10^{-7}$$

月球表面可被分辨的最小距离

$$l=L\theta=3.86\times10^{8}\times1.34\times10^{-7}=51.8\ \text{m}$$

11-26　解：设自然光强度为I_1，偏振光强度为I_2，由已知可得

$I_{\max}=\dfrac{1}{2}I_1+I_2$（1）

$I_{\min}=\dfrac{1}{2}I_1$（2）

$I_{\max}=5I_{\min}$（3）

由以上三式得

$$I_2=2I_1$$

所以入射光中自然光强度占总光强的$\dfrac{1}{3}$，线偏振光强度占总光强的$\dfrac{2}{3}$。

11-27　解：设入射自然光光强为I_0，则

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ = \frac{3}{8} I_0$$

故 $I_0 = \frac{3}{8} I_1$

当两偏振片的偏振化方向的夹角为 45° 时，

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} I_1 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} I_1$$

11-28　解：根据布儒斯特定律可知 $\tan i_0 = \dfrac{n_2}{n_1}$

当反射光为完全线偏振光时 $i_0 + r = 90^\circ$

所以 $i_0 = 90^\circ - r = 60^\circ$

$$\tan 60^\circ = \frac{n_2}{n_1}$$

所以 $n_2 = n_1 + \tan 60^\circ = 1.732$

11-29　解：当光从水中射向玻璃时， $\tan i_0 = \dfrac{n_{玻}}{n_{水}}$

$$i_0 = \arctan \frac{n_{玻}}{n_{水}} = \arctan \frac{1.50}{1.33} = 48.44^\circ$$

当光从玻璃射向水中时， $\tan i_0' = \dfrac{n_{水}}{n_{玻}}$

$$i_0' = \arctan \frac{n_{水}}{n_{玻}} = \arctan \frac{1.33}{1.50} = 41.56^\circ$$

11-30　解： $I_1 = \dfrac{I_0}{2} \cos^2(\omega t)$

$$I = I_1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \frac{I_0}{2} \cos^2(\omega t) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$$

$$= \frac{I_0}{2} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \cdot \frac{1 + \cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{I_0}{8}\left[1 - \cos^2(\omega t)\right] = \frac{I_0}{16}(1 - \cos 4\omega t)$$

11-31　解：只有 i_1 和 i_2 都是布儒斯特角，才可使反射光均为线偏振光，则

$$\tan i_1=\frac{n_{水}}{n_{空气}}=1.33$$

$$\tan i_2=\frac{n_{介质}}{n_{水}}=\frac{1.681}{1.33}$$

而 $\gamma=\frac{\pi}{2}-i_1$

在三角形 ABO 中，有

$$\theta+\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)+\left(\frac{\pi}{2}-i_2\right)=\pi$$

即 $\theta=i_2-\gamma=i_2-\left(\frac{\pi}{2}-i_1\right)=i_1+i_2-\frac{\pi}{2}$

$$=\arctan(1.333)+\arctan\left(\frac{1.681}{1.33}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$=14.71^{\circ}$$

11-32　解：令自然光通过起偏器，然后分别通过这三种透明片，改变起偏器的透振方向，观察现象，出现消光的透明片为偏振片。令自然光先通过起偏器，然后分别通过剩下的两种透明片，再通过检偏器，改变检偏器的透振方向，出现消光的透明片为半波片。

第十二章

12-1　解：根据光速不变原理可知，飞船的固有长度为$c\cdot\Delta t$

12-2　解：取题中参考系为 S 系，飞船为 S'系。则S'系相对于 S 系的速率$u=0.82c$。微流量在 S 系中速率$v=-0.82c$。由洛伦兹速度变换式得微流量相对S'系的速率为

$$v'=\frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}=\frac{-0.82c-0.82c}{1-\frac{(0.82c)^2}{c^2}}=-0.98c$$

所以在飞船上测量比物体经过飞船要用的时间为

$$t=\frac{l}{|v'|}=1.19\times10^{-6}\ \mathrm{s}$$

12-3　解　根据时间延缓有

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2.6\times10^{-8}}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=4.3\times10^{-8}\ \mathrm{s}$$

12-4　解　在S'系中　$\Delta\alpha'=l_0\cos30^\circ$

$$\Delta y'=l_0\sin30^\circ$$

在 S 系中　$\Delta x=\Delta x'\sqrt{1-u^2/c^2}=l_0\cos30^\circ\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$

$$\Delta y=\Delta y'=l_0\sin30^\circ$$

由已知可得　$\tan45^\circ=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\tan30^\circ}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

得　$u=\sqrt{\frac{2}{3}}c$

12-5　解　设k'系相对于 k 系的速率为 u，由洛伦兹变换可知

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$　即　$2000=\frac{1000}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$　得$u=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

故在k'系中测得两事件的时间间隔为

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{u\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{0-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c\times 1000}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c})^2}}=-5.77\times 10^{-6}\text{ s}$$

12-6 解 发生在同一地点的两件事之间之间的间隔是原时，所以

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{即 } 3=\frac{2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

解得 S'系相对于 S 系的运动速度 $u=\frac{\sqrt{5}}{3}c$

所以 $\Delta x'=u\Delta t'=\frac{\sqrt{5}}{3}c\times 3=6.72\times 10^{8}\text{m}$

12-7 解 B 钟读数 $\Delta t=\frac{\Delta x}{2}$

A 钟读数 $\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\Delta x}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

12-8 证明： 在S'系中，

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\frac{(t_2-t_1)-\frac{u}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{-\frac{u^2}{c^2}}}=0$$

解得$u=\frac{c^2\Delta t}{\Delta x}$

所以$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\Delta x-\frac{c^2\Delta t}{\Delta x}\Delta t}{\sqrt{1-\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}}}=\sqrt{\Delta x^2-c^2\Delta t^2}$

12-9 解：地球上的钟导弹发射的时间是火箭发射Δt_1后，

$$\Delta t_1=\frac{\Delta t'}{\sqrt{-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}=\frac{10s}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}=12.5\ \mathrm{s}$$

这段时间火箭飞行了 S 的距离，$S=v\Delta t_1=0.6c\times12.5=7.5c$

导弹飞到地球的时间为$\Delta t_2=\frac{S}{v_1}=\frac{7.5c}{0.3c}=25\ \mathrm{s}$

$\therefore$ 火箭发射$\Delta t_{总}=\Delta t_1+\Delta t_2=37.5\ \mathrm{s}$后，导弹到达地球。

12-10　解：μ子的总能量为$E=mc^2=E_k+m_0c^2=10500\ \mathrm{MeV}$

μ子的动量为$P=\frac{\sqrt{E^2-\left(m_0c^2\right)^2}}{c}=\frac{\sqrt{10500^2-105^2}}{c}=10499.5\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{c}^{-1}$

μ子的速度$v=\frac{P}{m}=\frac{Pc^2}{E}=0.99995c$

12-11　解：由动量守恒定律得

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0$$

由此可知，碰撞后复合粒子静止。
又由能量守恒定律得

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=M_0c^2$$

即$M_0=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

12-12　解：介子的总能量$E=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}c^2=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，即$3000=\frac{100}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

$\therefore\ \ u=0.999c$

运动的介子寿命　$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=6.0\times10^{-5}\ \mathrm{s}$

$\Delta x = u\tau = 0.999\times3\times10^{8}\times6.0\times10^{-5} = 1.798\times10^{4}$ m

12-13 解：（1）总能量$E = mc^2 = \dfrac{m_e}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 = \dfrac{9.11\times10^{-31}\times\left(3\times10^{8}\right)^2}{\sqrt{1-0.99^2}} = 5.81\times10^{-13}$ J

（2）经典动能$E_k = \dfrac{1}{2}m_e v^2$

相对论动能$E_k' = mc^2 - m_e c^2 = m_e c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right)$

所以$\dfrac{E_k}{E_k'} = \dfrac{v^2}{2c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right)} = \dfrac{0.99^2}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0.99^2}}-1\right)} = 0.08$

12-14　解：μ子速度=0.998c，固有寿命$\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$ s，由于时间延续效应，在地面参考系中，μ子的动寿命为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.998^2}} = 3.48\times10^{-5}\ \text{s}$$

飞行距离　　$l = \tau u = 3.48\times10^{-5}\times0.998c = 10419$ m

由于μ子所示高度为7000m，故能到达地面

12-15　解　设电子的静止质量为m_0，根据能量守恒可得静止的正负电子对湮没时产生的光子能量为　　$E_{光子} = m_0c^2$

由能量$\rightarrow$动量关系可以确定光子的动量大小为　　$P_{光子} = m_0 c$

由光子和电子构成的系统碰撞前后能量守恒，动量守恒，当碰撞后光子运动方向与原方向相反时，电子获得最大速度，故

$$m_0c^2 + m_0c^2 = E'_{光子} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

$$m_0 c = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - p'_{光子} \tag{2}$$

$$E'_{光子} = P'_{光子} C \tag{3}$$

由以上三式整理得 $v = \frac{4}{5}c$

12-16　解：碰撞前质点 B 的总能量 $E_{\mathrm{B}} = E_{0\mathrm{B}} + E_{\mathrm{kB}} = m_0 c^2 + 6m_0 c^2 = 7m_0 c^2$

质点 B 的动量 $P = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{B}}^2 - m_0^2 c^4}{c^2}} = 4\sqrt{3} m_0 c$

碰撞过程中

由动量守恒得复合质点 $P' = P = 4\sqrt{3} m_0 c$

由能量守恒得 $Mc^2 = m_0 c^2 + mc^2 = 8m_0 c^2$ 所以 $M = 8m_0$ 即复合质点的动质量

对于复合质点 $M^2 c^4 = p_1^2 c^2 + M_0{}^2 c^4$ 所以 $M_0 = \sqrt{M^2 - p_1^2 / c^2} = 4m_0$。即复合质点静止质量为 $4m_0$

第十三章

13-1　解：设太阳半径为 R，地球与太阳距离为 d，太阳温度为 T，由斯特藩-玻尔兹曼定律得太阳单位时间，单位面积上的辐射的能量为 $E(T) = \sigma T^4$（1）

根据能量守恒，由题意知 $4\pi R^2 E(T) = 4\pi d^2 P$（2）

其中，P 为地球每平方米接收太阳辐射的能量

由以上两式得 $T = \sqrt[4]{\dfrac{d^2 P}{\sigma R^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{\left(1.50\times10^{11}\right)\times1.4\times10^{3}}{5.67\times10^{-8}\times\left(7.0\times10^{8}\right)^2}} = 5800\ \mathrm{K}$

13-2　解：由维恩位移定律得 $\lambda_{\max} = T = b$

由斯特藩-玻尔兹曼定律得 $M_0(T) = \sigma T^4 = \sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4$

则总辐射出射度改变为 $\dfrac{M_{0.50}}{M_{0.69}} = \dfrac{\sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_{0.50}}\right)^4}{\sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_{0.69}}\right)^4} = \left(\dfrac{\lambda_{0.69}}{\lambda_{0.50}}\right)^4 = 3.63$

13-3　解：（1）由实验曲线得 $U_C = k\nu + b = \dfrac{2}{5}\times10^{-14}\nu - 2$（1）

又由爱因斯坦光电效应方程 $h\nu = \dfrac{1}{2}mv_m^2 + A = eU_C + A$ 得 $U_C = \dfrac{h}{e}\nu - \dfrac{A}{e}$（2）

由（1）、（2）比较可知，实验曲线效率 $k = \dfrac{h}{e}$

（2）因为实验曲线斜率 $k = \dfrac{h}{e} = \dfrac{2}{5}\times10^{-14}$

所以普朗克常量 $h = \dfrac{2}{5}\times10^{-14}e = \dfrac{2}{5}\times10^{-14}\times1.6\times10^{-19} = 6.4\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$

13-4　解：（1）磁场中

$$f = evB = m\frac{v^2}{R}$$

$$v = \frac{ReB}{m}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{R^2e^2B^2}{2m}$$

因为 $h\nu = \dfrac{1}{2}mv^2 + A$

所以$A = h\nu - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{R^2e^2B^2}{2m}$

（2）因为$\frac{1}{2}mv^2 = eU_c$

所以$U_e = \frac{R^2e^2B^2}{2m}$

13-5　解：（2）和（4）

13-6　证：如题 13-6 解图所示，由动量守恒定律得，有

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cos\theta$$

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\varphi + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin\theta$$

由式（1）和式（2）得$\tan\theta = \dfrac{\frac{h\nu}{c}\sin\varphi}{\frac{h\nu_0}{c} - \frac{h\nu}{c}\cos\varphi}$

由$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\varphi}{2}$

有$\lambda = \lambda_0 + \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\varphi}{2}$

则$\tan\theta = \dfrac{\frac{h}{\lambda}\sin\varphi}{\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\cos\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos\varphi}$

$$= \frac{\sin\varphi}{1 + \frac{2h}{m_0 c\lambda}\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{2h}{m_0 c\lambda}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{m_0 c\lambda}\right)\tan\frac{\varphi}{2}} = \left[\left(1 - \frac{h}{m_0 c\lambda}\right)\tan\frac{\varphi}{2}\right]^{-1}$$

13-7　解：功率为 P 的点光源，发出球面波，单位时间内以 d 为半径的球面上总能量为

$4\pi d^2 P$

设单位时间内落在垂直于光线的单位面积上的光子数为 N，则以 d 为半径的球面上功率

$$P = Nh\frac{c}{\lambda}\cdot 4\pi d^2$$

所以 $N = \dfrac{P\lambda}{4\pi d^2 hc}$

光子的能量

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \left(6.626\times10^{-34}\times\frac{3\times10^8}{663\times10^{-9}}\right)\text{J} = 3\times10^{-19}\ \text{J}$$

13-8　解：由康普顿效应的实验规律以及波长的偏移公式，可知散射光波该变量为

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) = 2.42631\times10^{-12}\times(1-\cos 60^\circ) = 1.213\times10^{-12}\ \text{m}$$

散射光的波长为

$$\lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = \Delta\lambda + \frac{hc}{E_0} = 1.213\times10^{-12} + \frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{1.0\times10^4\times1.6\times10^{-19}} = 1.213\times10^{-12} + 1.243\times10^{-10} = 1.255\times10^{-10}\ \text{m}$$

康普顿散射的碰撞前后遵循能量守恒

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2$$

故反冲电子动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = \dfrac{hc}{\lambda_0} - \dfrac{hc}{\lambda} = hc\left(\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{1}{\lambda}\right)$

$$= 6.63\times10^{-34}\times3\times10^8\times\left(\frac{1}{1.243\times10^{-10}} - \frac{1}{1.255\times10^{-10}}\right) = 1.39\times10^{-17}\ \text{J}$$

13-9　解：康普顿散射过程中能量守恒，所以反冲电子的动能

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda\lambda_0}(\lambda-\lambda_0) = \frac{hc}{\lambda\lambda_0}\Delta\lambda$$

故 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{E_k}{hc/\lambda_0} = \dfrac{0.1}{0.5} = \dfrac{1}{5}$

即 $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \dfrac{1}{5}$

$$\therefore \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{4}$$

13-10　解：反冲电子的动能为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{(0.6c)^2}{c^2}}}-m_0c^2=0.25m_0c^2$$

电子的动能等于光子能量的损失，所以$E_k=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}$，解得

$$\lambda'=\frac{hc\lambda}{hc-E_k\lambda}=\frac{h\lambda}{h-0.25m_0c\lambda}$$

$$=\frac{6.63\times10^{-34}\times0.003\times10^{-9}}{6.63\times10^{-34}-0.25\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}\times0.003\times10^{9}}\text{ m}$$

根据康普顿散射公式$\lambda'-\lambda=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$得

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{(\lambda'-\lambda)m_0c}{2h}$$

$$=\frac{(0.0043-0.003)\times10^{-9}\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^{8}}{2\times6.63\times10^{-34}}$$
$$=0.26796$$

$\sin\frac{\theta}{2}=0.51763$，$\theta=62^\circ81'$，所以散射光子方向为

$\theta=62^\circ81'$。

13-11　解：氢原子能级跃迁条件得$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=E_5-E_2$

即$\lambda=\frac{hc}{E_5-E_2}=\frac{hc}{\frac{E}{5^2}-\frac{E}{2^2}}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{-13.6\times1.6\times10^{-19}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}\right)}=4.35\times10^{-7}\text{ m}$

13-12　解：设氢原子在此电子轰击下，可激发到的最高能态为 n 态，要求

$13.6-\frac{13.6}{n^2}\leq12.6$，且 n 取正整数。

解得$n=3$

所以氢原子可激发到的最高能态为$n=3$的能态，但由于激发态都是不稳定的，它又会自发跃迁回到基态，体系能发射的谱线条数为 3，跃迁示意如题 13-12 解图所示。

由$\lambda=\frac{hc}{E_m-E_n}$可计算出三种可能辐射对应谱线波长分别为

$102.6\text{ nm}, 657.9\text{ nm}$ 和 $121.6nm$

13-13　解：$E_n=-13.6+12.09=-1.51eV=\dfrac{-13.6}{n^2}$

$\therefore n=3$

$n=3$ 的激发态对应的轨道半径为 $r_n=n^2r_1=3^2r_1=9r_1$

即电子的轨道半径增加到玻尔半径的 9 倍。

13-14　解：$E_k=\dfrac{3}{2}kT=\dfrac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times\left(273+27\right)=6.21\times10^{-21}$ J

$$\lambda=\frac{h}{P}=\frac{h}{\sqrt{2mE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.67\times10^{-27}\times6.21\times10^{-21}}}=1.46\times10^{-10}\text{ m}$$

13-15　解：根据玻尔氢原子理论 $mur_n=n\hbar$

$$mv=\frac{n\hbar}{r_n}=\frac{nh}{2\pi r_n}$$

德布罗意波长 $\lambda=\dfrac{h}{P}=\dfrac{h}{mv}=\dfrac{h2\pi r_n}{nh}=2\pi\dfrac{r_n}{n}=2\pi\dfrac{n^2a}{n}=2\pi na$

13-16　解：（1）电子

动量 $P=\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{6.63\times10^{-34}}{0.2\times10^{-9}}=3.32\times10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$\because P=mv=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore v=\frac{cP}{\sqrt{m_0^2c^2+P^2}}=3.64\times10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\ll c$$

动能 $E_k=\dfrac{1}{2}m_0v^2=\dfrac{P^2}{2m_0}=\dfrac{\left(3.32\times10^{-24}\right)^2}{2\times9.11\times10^{-31}}=6.04\times10^{-18}$ J

（2）光子

动量 $P=\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{6.63\times10^{-34}}{0.2\times10^{-9}}=3.32\times10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

动能 $E_k=E=Pc=3.32\times10^{-24}\times3\times10^8=9.96\times10^{-16}$ J

由此可知，当电子的德布罗意波长和光子的波长相同时，电子的动能远小于光子的能量。

13-17 证明 ：因为考虑相对论效应 $E^2=P^2c^2+m_0^2c^4$（1）

$E=E_k+m_0c^2$（2）

由以上两式得 $P=\frac{1}{c}\sqrt{E_k^2+2E_k m_0c^2}$

故 $\lambda=\frac{h}{P}=\frac{hc}{\sqrt{E_k^2+2E_k m_0c^2}}$

13-18　解：带电粒子由静止状态开始经加速电场作用而获得能量和动量，加速过程中带电粒子获得动能等于电场力做功，即 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=eU$，$P=mv=\sqrt{2mE_k}=\sqrt{2meU}$

代入德布罗意关系式得 $P=\frac{h}{\lambda}=\sqrt{2meU}$

$$m=\frac{h^2}{2eU\lambda^2}=\frac{\left(6.63\times10^{-34}\right)^2}{2\times1.6\times10^{-19}\times206\times\left(2\times10^{-9}\right)^2}=1.667\times10^{23}\ \text{kg}$$

13-19　解：（3）

13-20　解：根据德布罗意公式 $\lambda=\frac{h}{P}$ 可得 $P=\frac{h}{\lambda}$，则 $\left|\Delta P\right|=\frac{h}{\lambda^2}\left|\Delta\lambda\right|$

又根据不确定关系式知 $\left|\Delta x\Delta P_x\right|\geq\frac{\hbar}{2}$，

故 $\left|\Delta x\right|\geq\frac{\hbar}{2\left|\Delta P_x\right|}=\frac{\hbar\lambda^2}{2h\left|\Delta\lambda\right|}=\frac{\lambda^2}{4\pi\left|\Delta\lambda\right|}=\frac{\left(500\times10^{-9}\right)^2}{4\times3.14\times0.1\times10^{-9}}\approx2\times10^{-4}\ \text{m}$

13-21　解：根据不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p_x\geq h$ 及动量 $\Delta p_x=m\Delta v_x$ 求解。

（1）电子

$$\Delta p_x=m\Delta v=9.11\times10^{-31}\times10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$=9.11\times10^{-33}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Delta x\geq\frac{h}{\Delta p_x}=\frac{6.63\times10^{-34}}{9.11\times10^{-33}}\ \text{m}=7.28\times10^{-2}\ \text{m}$$

（2）微观粒子

$$\Delta p_x=m\Delta v=10^{-31}\times1\times10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=10^{-15}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Delta x\geq\frac{h}{\Delta p_x}=\frac{6.63\times10^{-34}}{10^{-15}}\ \text{m}=6.63\times10^{-19}\ \text{m}$$

（3）（微小物体）

$$\Delta p_x=m\Delta v=10^{-31}\times1\times10^{-2}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}=10^{-6}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Delta x\geq\frac{h}{\Delta p_x}=\frac{6.63\times10^{-34}}{10^{-6}}\ \text{m}=6.63\times10^{-28}\ \text{m}$$

13-22　解：求归一化因子。

因$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)\right|^2 \mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left|Axe^{-\lambda x}\right|^2 \mathrm{d}x=A^2\frac{2}{(2\lambda)^3}=\frac{2A^2}{(2\lambda)^3}=1$

所以归一化因子

$A=2\lambda^{\frac{3}{2}}$（定积分$\int_0^{\infty}x^n e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{n!}{a^{n+1}}$）

（2）粒子坐标的概率分布函数

$$\rho(x)=\left|2\lambda^{\frac{3}{2}}x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right|^2=4\lambda^3x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x}\left(x\ge 0\right)$$

$$\rho(x)=0\left(x\le 0\right)$$

（3）若求粒子概率最大处，令$\frac{\mathrm{d}\rho(x)}{\mathrm{d}x}=0$，则

$$2x\mathrm{e}^{-2\lambda x}-2\lambda x^2\mathrm{e}^{-2\lambda x}=0$$

解得$x=\frac{1}{\lambda}$

13-23　解：粒子在任意位置 x 处，出现的概率密度为

$$\left|\psi(x)\right|^2=\frac{2}{a}\sin^2\frac{2\pi}{a}x$$

令$\frac{\mathrm{d}\left|\psi(x)\right|^2}{\mathrm{d}x}=0$

得$\sin\frac{4\pi}{a}x=0$

所以$\frac{4\pi}{a}x=n\pi, n=0,1,2,\cdots$

即$x=0,\frac{a}{4},\frac{a}{2},\frac{3}{4}a,a$

由$\frac{\mathrm{d}\left|\psi(x)\right|^2}{\mathrm{d}x}<0$知，发现粒子概率最大的位置在

$$x=\frac{a}{4},\frac{3}{4}a$$

13-24　解：由归一化条件$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x=1$得

$$\int_0^l c^2x^2\left(l-x\right)^2\mathrm{d}x=1$$

即$\int_0^l c^2\left(l^2x^2-2lx^3+x^4\right)\mathrm{d}x=1$

解得$c=\left(\frac{30}{l^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

所以在$0\sim\frac{l}{3}$区间内发现粒子的概率为

$$\Omega=\int_0^{\frac{l}{3}}c^2x^2(l-x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{l}{3}}c^2\left(l^2x^2-2lx^3-x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=c^2l^5\frac{17}{3^4\times30}=\frac{17}{81}=21\%$$

13-25　解：$\overline{x}=\int_0^a x|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a}\left[\int_0^a x\mathrm{d}x-\int_0^a x\cos\frac{2\pi x}{a}\mathrm{d}x\right]=\frac{a}{2}$$

$$\overline{x^2}=\int_0^a x^2|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{a}\left[\int_0^a x^2\mathrm{d}x-\int_0^a x^2\cos\frac{2\pi x}{a}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{3}a^2$$

13-26　解：处于$n=2$能级的氢原子共有$2n^2=2\times2^2=8$种不同的状态。不考虑电子自旋

$n=2,\ l=0,1,\ m_l=0,\pm1$

所各状态可表示为

$(2,0,0),(2,1,1),(2,1,-1),(2,1,0)$

13-27　解：B,D

13-28　解：主量子数为$n=2$的电子壳层上可能有$2n^2=2\times2^2=8$个电子

因为$n=2$，所以 n 可取 1,2 两个值

l可取 0,1

m_l可取 0，±1

m_s可取$\pm\frac{1}{2}$

所以 8 个电子锁具有的量子数表示为

$$\left(2,0,0,\frac{1}{2}\right)\left(2,0,0,-\frac{1}{2}\right)\left(2,1,1,\frac{1}{2}\right)\left(2,1,1,-\frac{1}{2}\right)\left(2,1,0,\frac{1}{2}\right)\left(2,1,0,-\frac{1}{2}\right)\left(2,1,-1,\frac{1}{2}\right)\left(2,1,-1,-\frac{1}{2}\right)$$

13-29　解：主量子数 n 确定电子能量的主要部分，$n=1,2,3,\cdots$

角量子数 l 确定电子角动量 L 的值$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar,l=1,2,3,\cdots$，$n-1$决定电子能量的次要部分，n 相同，l 越小，能级越低

磁量子数 m_l 确定电子角动量 L 在外磁场方向的分量 $L_z = m_l \hbar, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm l$

自旋磁量子数 m_s 确定电子自旋角动量在外磁场方向的分量 $S_z = m_s \hbar, m_s = \pm \frac{1}{2}$