高等代数与几何 B 模拟考试题（A）答案

(2022/2023 学年春季学期)

一．填空（每空 2 分）

1. 设F^3的两个子空间

$W_1=\{(a,a,c)^T|a,c\in R\}$，$W_2=\{(a,2a,a)^T|a\in R\}$.

则$\dim(W_1\cap W_2)=$__0___,$\dim(W_1+W_2)=$__3_____.

2. 令A是一3×3矩阵,$|A|=-1$,λ是A的一特征值. 则A^*+A+2I必有特征值_$\frac{-1}{\lambda}+\lambda+2$_____.

3. 用正交变换化二次型:$2x_1x_2+4x_3x_4$所得

标准形为__$y_1^2-y_2^2+2y_3^2-2y_4^2$________.

4. 矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$的法式为_$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$______,

Jordan标准形为_$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$__________________________.

5. 设V是数域F上的二阶矩阵全体做成的线性空间,定义V上的线性变换$\mathcal{A}$如下:$\mathcal{A}(A)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}A$, 则$\mathcal{A}$的秩为2 ；零度为2.

6.设V是数域 F 上的一个三维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是它的一组基，$f$是V上的一个线性函数，已知

$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1,f(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=-1,f(\varepsilon_2+2\varepsilon_3)=1$

则$f(\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3)=$____6______.

二.选择最佳答案（每题 2 分）

.7. 设$\sigma,\tau\in L(V_n)$,则$\sigma^{-1}(0),\tau^{-1}(0),(\sigma\tau)^{-1}(0)$的维数之间的关系为

(A　)

(A) $\dim(\sigma\tau)^{-1}(0)\le\dim\sigma^{-1}(0)+\dim\tau^{-1}(0)$;

(B) $\dim(\sigma\tau)^{-1}(0)\ge\dim\sigma^{-1}(0)+\dim\tau^{-1}(0)$;

(C) $\dim(\sigma\tau)^{-1}(0) = \dim\sigma^{-1}(0) + \dim\tau^{-1}(0)$;

(D) $\dim(\sigma\tau)^{-1}(0) \neq \dim\sigma^{-1}(0) + \dim\tau^{-1}(0)$.

8. 设V是一个欧式空间,$\mathcal{A}$是V上一个保持向量长度不变的变换，则（D）
(A) $\mathcal{A}$是线性变换; (B) $\mathcal{A}$是正交变换; (C) $\mathcal{A}$是对称变换; (D) $\mathcal{A}$可能不是线性变换.

9. 令$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则（C）
(A) A与 B 相似且合同,　(B) A与 B 相似但不合同,
(C) A与 B 合同但不相似，(D) A与 B 既不相似又不合同.

10. 设方阵 A 的特征多项式为$(\lambda-1)(\lambda-2)^3$,最小多项式为$(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 则(A).

(A) A 是 4 阶矩阵且它的 Jordan 标准形由 3 个 Jordan 块组成;

(B) A 是 3 阶矩阵且它的 Jordan 标准形由 3 个 Jordan 块组成;

(C) A 是 4 阶矩阵且它的 Jordan 标准形由 2 个 Jordan 块组成;

(D) A 是 3 阶矩阵且它的 Jordan 标准形由 2 个 Jordan 块组成.

11. .令$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是线性空间 V 的一个基，$f_1, f_2, f_3$是它的对偶基, $\alpha_1 = \varepsilon_1, \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$，则$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的对偶基是 (B)

(A)$f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3$;　(B);$f_1 - f_2 - f_3, f_2 - f_3, f_3$;

(C)$f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3$;　(D)$f_1 + f_2 + f_3, f_2 + f_3, f_3$.

12. 设A为4阶矩阵, 且$A^2 + A = 0$, 若$r(A) = 3$,则A相似于（ D ）
(A)$\mathrm{diag}(1,1,1,0)$,　(B)$\mathrm{diag}(1,1,-1,0)$,
(C) $\mathrm{diag}(1,-1,-1,0)$,　(D)$\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$.

13. 设 V 是实数域上的二维列向量空间，用下列矩阵定义的线性变换中没有非平凡不变子空间的是 (C).

(A)$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(B)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,　(C) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

三. 计算题(14、17 题 7 分，15、16 题 6 分)

14. 在F^4中,令$\alpha_1 = (1,-1,1,-1)^T, \alpha_2 = (0,1,1,0)^T$,

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,-1,-4)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0,2)^T.$$

求: (1) $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$的一个基及维数.

(2) 求向量$\gamma=(1,-3,1,-3)^T$在子空间$L(\alpha_1,\alpha_2)$上的内射影.

解.（1）因

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-1&1&0&1\\1&1&-1&0\\-1&0&-4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&-3&1\\0&0&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

易见 $\dim(L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2))=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是它的一组基（3 分）

(2) 令$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，求$V_1^{\perp}$. 解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4=0\\ \qquad x_2+x_3=0\end{cases}$$

得其一基础解系

$\alpha_3=(2,1,-1,0)^T,\alpha_4=(1,0,0,1)^T$,

$V_1^{\perp}=L(\alpha_3,\alpha_4)$.

将α表成α_1,α_2,α_3,α_4的线性组合,

$$\alpha=(2\alpha_1-\alpha_2)+(-\alpha_4)$$

故α在V_1上的内射影为

$2\alpha_1-\alpha_2=(2,-3,1,-2)^T$.（4 分）

15. 1) 求在实数域R^3上定义的双线性函数:

$$f(X,Y)=x_1y_1-2x_1y_2+4x_2y_1-2x_3y_3,\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

在基底$\delta_1=(1,0,0)^T,\delta_2=(1,1,0)^T,\delta_3=(1,1,1)^T$下的度量矩阵;

2) 上面定义的双线性函数$f(X,Y)$是否是内积,说明理由.

解.（1）度量矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\5&3&3\\5&3&1\end{pmatrix},\text{（3 分）}$$

（2）不是内积，因度量矩阵不是对称矩阵，无对称性。（3 分）

16.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组$Ax=\beta$有解但不唯一，试求：(1)$a$ 的值； (2) 正交矩阵Q使Q^TAQ为对角矩阵.

解.(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$.由线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一知 $a=-2,1$.但 $a=1$ 方程组无解,故 $a=-2$.

(2) $a=-2$ 时, $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$, A 的特征值为 $0,3,-3$;

对应的特征向量为: $(1,1,1)^T,(-1,0,1)^T,(1,-2,1)^T$.把这三个向量单位化可得正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, \text{而,}\quad Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}。$$

17.已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&0&a\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

1)确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

2)在实数域上矩阵 A 能否对角化?若能,写出 A 相似的对角矩阵;若否,给出 A 的有理标准形.

解.1). 由 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&0&a\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

解得: $\lambda=-1$, $a=6,b=0$.(2 分)

又, $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+4)$,由于 $\lambda^2-\lambda+4$ 在实数域上没有根,矩阵 A 在实数域上不能对角化.(2 分).

2)特征矩阵 $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda&-6\\1&0&\lambda+2\end{pmatrix}$ 的不变因子为:

1,1,$\lambda^3+3\lambda+4$,A的有理标准形为：

$\begin{pmatrix}0&0&-4\\1&0&-3\\0&1&0\end{pmatrix}$(或$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-4\\0&1&1\end{pmatrix}$)(3 分)

四. 综合题(每题 4 分)

18.设$A\in \mathrm{R}^{m\times n}$,$\beta\in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$. 求证：线性方程组$AX=\beta$有解的充要条件是$\beta$与线性方程组$A^T\mathrm{X}=0$的解空间正交.

证明. "$\Rightarrow$"因线性方程组$AX=\beta$有解，β可写成A的列向量的线性组合，即$\beta\in L(A)$，而$A^T\mathrm{X}=0$的解空间S中的所有向量都与A的列向量正交，故与β正交.(2分)

"$\Leftarrow$"令S表示$A^T\mathrm{X}=0$的解空间（写S为由$A^T\mathrm{X}=0$的一基础解系组成的矩阵），$A^TS=0$，则$S^TA=0$. 由$\mathrm{r}(A)+\dim(\mathrm{S})=n$ 及 $\dim(\mathrm{S})=\mathrm{r}(S^T)$知$A$的列向量构成齐次线性方程组$S^T\mathrm{X}=0$的解空间，由题设$\beta$也是$S^T\mathrm{X}=0$的解，$\beta$应是$A$的列向量的线性组合，故$AX=\beta$有解(2 分).

19.设$\mathcal{A}$是数域F上线性空间V上的线性变换，$\mathcal{A}$在V的一组基$e_1,e_2,\cdots e_n$下的表示矩阵是主对角线上元素皆为0的 Jordan 块，求证：

(1)V中包含e_1的$\mathcal{A}$－子空间只有V本身；

(2)V中任一$\mathcal{A}$－子空间必包含e_n；

(3)V不能分解成两个非平凡$\mathcal{A}$－子空间的直和.

证明. (1)首先，

$$\mathcal{A}(e_1,e_2,\cdots e_n)=(e_1,e_2,\cdots e_n)\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix}$$

即有：$\mathcal{A}e_1=e_2,\mathcal{A}e_2=e_3,\cdots,\mathcal{A}e_{n-1}=e_n$. 因此，若$U$为含

e_1的$\mathcal{A}$ –子空间，U必包含V的基底$e_1, e_2, \cdots e_n$，故$U = \mathrm{V}$.
(2)设$\alpha \in U$，U为一$\mathcal{A}$ –子空间．写
$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$,(不妨设$x_1 \neq 0$)
$\mathcal{A}\alpha = x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n$, (见(1))
$\mathcal{A}^2\alpha = x_1e_3 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-2}e_n$,
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$\mathcal{A}^{n-1}\alpha = x_1e_n$.
因U为$\mathcal{A}$ –子空间，$\mathcal{A}\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$均含在$U$内．故$e_n \in U$.
(3)若U_1, U_2是两个非平凡$\mathcal{A}$ –子空间，则$e_n \in U_1 \cap U_2$，$U_1 + U_2$不是直和，故，V不能分解成两个非平凡$\mathcal{A}$ –子空间的直和.（前两问 3 分，（3）1 分）

20.证明:n阶方阵A与所有的$A^m(m \geq 1)$都相似的充分必要条件是A的 Jordan 标准型为 diag$\{J_{r_1}(1),\cdots,J_{r_k}(1),0, \cdots, 0\}$.
特别地, 非异阵A与所有的$A^m(m \geq 1)$都相似的充分必要条件是A的特征值全为 1.
证明.“必要性”．因A与$A^m(m \geq 1)$相似, 它们的特征值满足：$\lambda = \lambda^m(m \geq 1)$, 立得：$\lambda = 1,0$. 这样,$A$的 Jordan 标准型中的 Jordan 块只能为$J_r(1)$,或$J_r(0)$. 但形为$J_r(0)$的块的阶数r只能为1,否则$R(J_r(0)^m) < R(J_r(0))(m \geq 2)$,$J_r(0)$与$J_r(0)^m$不相似，$A$不能与所有的$A^m(m \geq 1)$相似，矛盾.
故,A的 Jordan 标准型为diag$\{J_{r_1}(1),\cdots J_{r_k}(1), 0 \cdots, 0\}$.
“充分性”.由充分性的证明知,我们只需证明$J_r(1)^m$与$J_r(1)$相似即可.事实上,
$J_r(1)^m = I_r + C_m^1J_r(0) + C_m^2J_r(0)^2 + \cdots + J_r(0)^m(m \geq 1)$，因$\lambda I_r - J_r(1)^m$有一$r-1$阶子式为 1, 它的不变因子依然为$1, \cdots, 1, \lambda^r$, 与$J_r(1)$相同，故与$J_r(1)$相似.(必要性、充分性各 2 分)