**第一章 多项式**

1. 用除，求商与余式：



1）；



2）。



解 1）由带余除法，可得；



2）同理可得。



2．适合什么条件时，有



1），



2）。



解 1）由假设，所得余式为0，即，



所以当时有。



2）类似可得，于是当时，代入（2）可得；而当时，代入（2）可得。



综上所诉，当 或时，皆有。



3．求除的商与余式：



1）；



2）。



解 1）；



2）。



4．把表示成的方幂和，即表成



的形式：



1）；



2）；



3）。



解 1）由综合除法，可得；



2）由综合除法，可得；



1. 由综合除法，可得



。



5．求与的最大公因式：



1）；



2）；



3）。



解 1）；



2）；



3）。



6．求使。



1）；



2）；



3）。



解 1）因为



再由，



解得，



于是。



2）仿上面方法，可得，且。



3）由可得。



７．设与的最大公因式是一个二次多项式，求的值。



解 因为，



，



且由题设知最大公因式是二次多项式，所以余式为0，即



，



从而可解得 或 。



８．证明：如果，且为与的组合，那么是与的一个最大公因式。



证 易见是与的公因式。另设是与的任一公因式，下证。



由于是与的一个组合，这就是说存在多项式与，使



，



从而由可得，得证。



９．证明：，的首系数为１）。



证 因为存在多项式使，



所以，



上式说明是与的一个组合。



另一方面，由知，



同理可得，



从而是与的一个最大公因式，又因为的首项系数为１，所以。



１０．如果不全为零，证明：



。



证 存在使，



又因为不全为０，所以，



由消去律可得，



所以。



11．证明：如果不全为零，且，那么。



证 由上题证明类似可得结论。

12．证明：如果，那么。



证 由假设，存在及使



（1）



（2）



将（1）（2）两式相乘，得

，



所以。



13．设都是多项式，而且



。



求证：。



证 由于

，



反复应用第12题结论，可得

，



同理可证

，



从而可得

。



14．证明：如果，那么。



证 由题设知，所以存在使，



从而，



即，



所以。



同理。



再由12题结论，即证。



15．求下列多项式的公共根



解 由辗转相除法，可求得，所以它们的公共根为。



16．判别下列多项式有无重因式：

1） ；



2） ；



解 1），



所以有的三重因式。



2），，所以无重因式。



17．求值，使有重根。



解 易知有三重根时，。若令



，比较两端系数，得



由（1），（3）得，解得的三个根为，将的三个根分别代入（1），得。再将它们代入（2），得的三个根。



当时有3重根；当时，有2重根。



18．求多项式有重根的条件。



解 令，则，显然当时，只有当才有三重根。



下设，且为的重根，那么也为与的根，即



由（1）可得，再由（2）有。所以



，



两边平方得，所以。



综上所叙即知，当时，多项式有重根。



19．如果 ，求。



解 令，。由题设知，1是的根，也是的根，此即



，



解得。



20．证明：不能有重根。



证 因为的导函数，所以，于是，从而无重根。



21．如果是的一个k重根，证明是



的一个k+3重根。



证 因为

，



由于是的重根，故是的重根。代入验算知是的根。



现在设是的重根，则是的重根，也是的s-2重根。



所以。得证。



22．证明：是的重根的充分必要条件是 ，而



证 必要性：设是的重根,从而是的重根，是的重根，，是的一重根，并且不是的根。于是



而。



充分性：由，而，知是的一重根。又由于，知是的二重根，依此类推，可知是的重根。



23．举例说明段语“ 是的 重根，那么是的重根”是不对的。



解 例如，设，那么以0为重根，但0不是的根。



24．证明：如果，那么。



证 要证明，就是要证明（这是因为我们可以把看作为一个变量）。由题设由，所以，也就是，得证。



25．证明：如果，那么。



证 因为的两个根为和，其中，所以和也是的根，且，于是



，



解之得。得证。



26．求多项式在复数范围内和在实数范围内的因式分解。



解 在复数范围内，其中，



在实数域内，所以，当为奇数时，有



其中，皆为实数。



当是偶数时，有



27．求下列多项式的有理根：

1） ；



2） ；



3） 。



解 利用剩余除法试根，可得

1. 有一个有理根2。
2. 有两个有理根（即有2重有理根）。



1. 有五个有理根（即一个单有理根3和一个4重有理根）。



28．下列多项式在有理数域上是否可约？

1）；



2） ；



3）；



4） 为奇素数；



5）为整数。



解 1）因为都不是它的根，所以在有理数域里不可约。



2）利用艾森斯坦判别法，取，则此多项式在有理数域上不可约。



3）首先证明：

命题 设有多项式，令或，得



或



则与或者同时可约，或者同时不可约。



事实上，若可约，即，从而，



这就是说也可约，反之亦然。



现在我们用它来证明在有理数域上不可约。令，则多项式变为



利用艾森斯坦判别法，取，即证上式不可约，因而也不可约。



1. 设，令，则



由于是素数，因而，但，所以由艾森斯坦判别法，即证在有理数域上不可约，因而也在有理数域上不可约。



1. 已知，令，可得



利用艾森斯坦判别法，取，即证在有理数域上不可约，因而也在有理数域上不可约。

