

Муминов Султонбек Сохибджонович

Muminov Sultonbek Sohijjonovich

Студент

Student

Научный руководитель: Анисимова Ирина Викторовна

Scientific adviser: Anisimova Irina Viktorovna

Доктор физико-математических наук, доцент, профессор каф. ПМИ

Doctor of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Professor PMI

Казанский национальный исследовательский технический университет им.
А.Н.Туполева

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Казань, Россия

Kazan, Russia

**Численное моделирование задачи свободной конвекции вблизи
экстремальных значений температур**

**Numerical simulation of the problem of free convection near extreme
temperatures**

Аннотация: в работе выполнено численное моделирование задачи свободной конвекции вблизи экстремальных значений температур. Для решения соответствующей разностной задачи использован алгоритм метода прогонки. Выполнен расчетный вариант распределения температурного поля.

Abstract: numerical simulation of the problem of free convection near extreme temperature values is performed in the paper. To solve the corresponding difference problem, the algorithm of the run-through method is used. A calculated version of the temperature field distribution is performed.

Ключевые слова: свободная конвекция, приближение Обербека – Буссинеска, численное решение, метод прогонки.

Keywords: free convection, Oberbeck – Boussinesq approximation, numerical solution, run-through method.

В настоящее время задача свободной конвекции вблизи экстремальных значений температур является важной и актуальной для исследования. Такой вид теплообмена встречается во многих технических и естественных процессах, в том числе в термальной обработке материалов, охлаждении электроники, в

процессах сгорания, природных явлениях, таких как формирование вихрей в окружающей среде [1].

Понимание поведения жидкостей и газов в условиях свободной конвекции вблизи экстремальных значений температур является ключевым для оптимизации подобных процессов, улучшения их эффективности и надежности [2]. Также изучение конвекции имеет важное значение для более глубокого понимания физических явлений в природе и их воздействия на окружающую среду.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном слое под действием нагрева нижней границы. Явление свободной конвекции математически моделируется системой уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска [3] и [4], которая включает уравнения Навье – Стокса, теплопроводности и несжимаемости

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z + g\rho T \\ V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь V_x , V_z – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости; P – отклонение давления от гидростатического, отнесенного к постоянной средней плотности ρ ; T – отклонение от средней температуры; ν – коэффициент вязкости; χ – коэффициент температуропроводности; g – ускорение свободного падения. На рисунке 1 построим область течения:

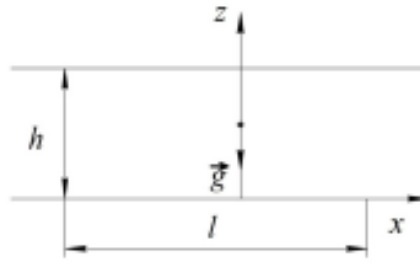


Рис.1. Геометрия расчетной области

Для решения задачи математического моделирования распределения гидродинамических полей температуры, будем искать автомодельное решение в виде

$$T = T_0(z) + T_{11}(z) \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

где значения T_0 и T_{11} определяются численно из системы [3]:

$$\begin{cases} Gr * \delta^2 \left(2u * T_{11} + w \frac{dT_{11}}{dz} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{d^2 T_{11}}{dz^2} \\ Gr * \delta^2 + w \frac{dT_0}{dz} = \frac{1}{Pr} \left(\delta^2 + \frac{d^2 T_0}{dz^2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $Gr = \frac{g\beta\theta H^5}{\nu^2 l^2}$ – число Грасгофа; $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ – число Прандля; $\delta = \frac{H}{l}$ – параметр, характеризующий отношение вертикального и горизонтального масштабов.

Будем считать, что на нижней твердой границе области выполнялся однородный нагрев, поэтому граничные условия задавались:

$$T_{11} = const_1, T_0 = const_2 \quad (4)$$

На верхней свободной границе ($z = H$) теплопередача выполнялась по закону Фурье

$$\frac{dT_0}{dz} = \frac{dT_{11}}{dz} = 0 \quad (5)$$

Численная реализация

Из системы (3) для T_0 и T_{11} запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{1}{Pr * Cr * \delta^2} \frac{d^2 T_{11}}{dz^2} - w \frac{dT_{11}}{dz} - 2u * T_{11} = 0 \\ \frac{1}{Pr * Gr * \delta^2} \frac{d^2 T_0}{dz^2} - \frac{dT_0}{dz} = -\frac{1}{Pr * Gr * w} \end{cases} \quad (6)$$

Ввиду того, что верхняя граница являлась свободной, расчетная область отображалась в бесконечную полосу по оси Ox шириной 1 по оси Oz . Зададим граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: T_{11} = 0, T_0 = const \\ \text{при } z = 1: \frac{dT_{11}}{dz} = \frac{dT_0}{dz} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Численное решение было получено методом прогонки [5]. Для получения численного решения разностной задачи был выбран язык Dart, что позволило получить вывод данных распределения полей температур в виде таблиц и градиентного рисунка:

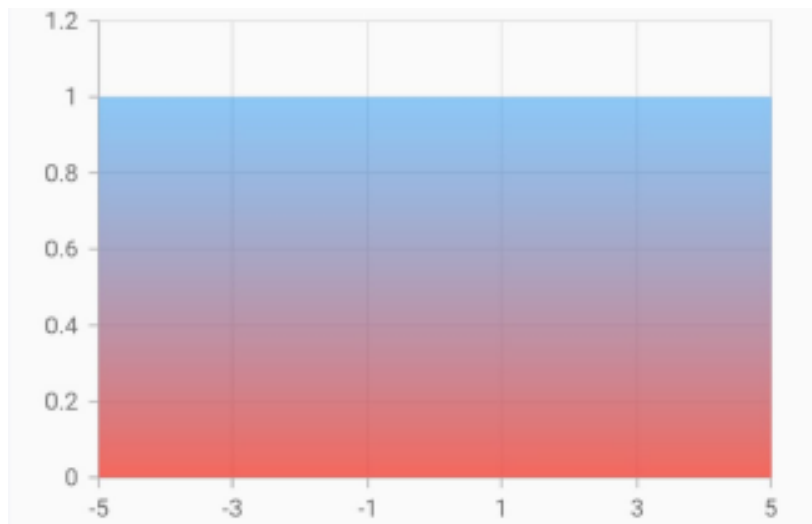


Рис. 2. Распределение полей температур

Заключение

В работе было выполнено численное моделирование задачи свободной конвекции вблизи экстремальных значений температур. На верхней свободной границе выполнялось условие теплообмена по закону Фурье. Для решения соответствующей разностной задачи был использован конечно-разностный алгоритм метода прогонки. Алгоритм был реализован с помощью языка Dart. Подробно исследовано распределение температурного поля для одного из вариантов расчета.

Библиографический список:

1. Игнатьева, И. В. О некоторых численных алгоритмах решения приближенных и полных уравнений Навье-Стокса : специальность 01.02.05 "Механика жидкости, газа и плазмы" : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Игнатьева Ирина Викторовна. – Чебоксары, 1998. – 20 с. – EDN ZKSEQV.
2. Artificial neural networks application on friction factor and heat transfer coefficients prediction in tubes with inner helical-finning / A. N. Skrypnik, A. V. Shchelchikov, Y. F. Gortyshov, I. A. Popov // . – 2022. – Vol. 206. – P. 118049. – DOI 10.1016/j.applthermaleng.2022.118049. – EDN WIBCYYJ.
3. Анисимова, И. В. Распределение гидродинамических полей при стационарной конвекции со свободной границей / И. В. Анисимова, С. С. Власова, Ю. Ф. Гортышов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2020. – № 4. – С. 133-138. – EDN WPNVTC.
4. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. № 5. С. 547–566.
5. Анисимова, И. В. Интегрирование дифференциальных уравнений высшего порядка и систем дифференциальных уравнений : учебное пособие / И. В.

Анисимова, В. Н. Игнатъев, Л. Г. Цветков. – Казань : Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, 2018. – 164 с. – ISBN 978-5-7579-2353-6. – EDN LDDHWW.