Бекатов Бекзат (КФ) 318 (328)

Вариант С1

№1

$$J(u) = \left(\int_0^T (u(t) - 2|u(t)|)dt \right)^2$$

$J(u) = \|Au - b\|^2$ $\qquad b = 2|u(t)| \in L_2$? [illegible]

По [illegible] $\|u_n\| \to u_0$ $\quad 0 \le |J(u_n) - J(u_0)| \to 0$ [illegible]

[illegible]

[illegible] выпукла.

$J(u)$ выпукла если $\underbrace{J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)}_{\mathrm{I}} \le \underbrace{\alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2)}_{\mathrm{II}}$

II. $\alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2) =$

$$\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 = \int_0^T 2|\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2| - (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)dt \le$$

$$\le \int_0^T \{2|\alpha u_1| + 2|(1-\alpha)u_2| - \alpha u_1 - (1-\alpha)u_2\}dt = \alpha \underbrace{\int_0^T (2|u_1| - u_1)dt}_{J(u)} +$$

$$+ (1-\alpha)\int_0^T (2|u_2| - u_2)dt = \alpha J(u_1) + (1-\alpha) J(u_2)$$

I. ~~[illegible]~~ $x \to x^2$

$$J(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) - \alpha J(u_1) - (1-\alpha) J(u_2) = \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)u_1 u_2 +$$

$$(1-\alpha)^2 u_2^2 - \alpha u_1^2 - (1-\alpha) u_2^2 = \alpha(\alpha-1)u_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)u_1 u_2 + (1-\alpha)u_2^2$$

$(1-\alpha)-1$

$$= \alpha(\alpha-1)\underbrace{(u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2)}_{\ge 0} \le 0$$

$\alpha \in [0,1]$

Из этих случаев можно увидеть что наша $J(u)$ выпукла [illegible] на две функции и [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]. [illegible] что $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha J(u) + (1-\alpha) J(v)$ удовлетворяет и для выпуклой

N2

$u = u(t) = 0 \qquad J'(0) = ?$

$$J'(u) = J(u+h) - J(u) = J(h) - \underbrace{J(0)}_{=0} = J(h) =$$

$$= \langle 0, h \rangle + J(h)$$

$$\| J(h) \| = \int_0^T (2|h(t)| - h(t))dt)^2 \le \left(\int_0^T 3|h(t)|dt \right)^2 = 9\left(\int_0^T |h(t)|dt \right)^2 \le$$

$$\le 9 \left(\sqrt{\int_0^T h^2(t)\,dt} \right)^2 = 9 \int_0^T h^2(t)\,dt = 9\|h\|^2 = \bar{o}(\|h\|)$$

$$J'(c) = \langle c, h \rangle \equiv 0$$

№ 3.

$u = u(t) \in L^2(0,T)$ для которой предъ. форме $J'(u)$ в т. u не сущ.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0, & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$$

Допустим

$$F(x) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ x, & t \in (\frac{T}{2}; T] \end{cases} \qquad F(x) : R \to L_2$$

Допуст. $\exists J'(u)$ мы можем сказать тогда что

$$\left(J(F(x))\right)'_{x=0} = J'(F(0)) \cdot F'(0) = J'(u) \cdot F'(0)$$

Вторые

$F(x) = u + x \cdot g(t)$

где $g(t)$: $g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 1, & t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$

$F'(x) = g(t)$

$\left(J(F(x))\right)'_{x=0} = \left(\cancel{\int_0^{T/2} dt +}\right)$ ~~не пойми что~~

$$= \left(\left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_{T/2}^{T} 2|x| - x) dt\right)^2\right)'_{x=0} =$$

$$\left(\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}(2|x| - x)\right)^2\right)'_{x=0} = \frac{T}{4}\left(1 + 2|x| - x\right)^2\Big)'_{x=0} =$$

$$\begin{cases} \frac{T}{4}\left(1 + x^2\right)' & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{T}{4}\left((1 - 3x)^2\right)' & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

Они не равны $\Rightarrow \nexists J'(u)$